Konzepte der Barodesie

Concepts of Barodesy

G. Medicus, W. Fellin und F. Schranz

This is the peer-reviewed version of the following article: Medicus, G., Fellin, W. and Schranz, F. (2018), Konzepte der Barodesie, 95: 620-638. doi:10.1002/bate.201800015, which has been published in final form at <https://doi.org/10.1002/bate.201800015>. This article may be used for non-commercial purposes in accordance with Wiley Terms and Conditions for Use of Self-Archived Versions.

Die Barodesie ist ein Materialmodell für granulare Materialien, das gewisse Ähnlichkeiten mit der Hypoplastizität aufweist. Sie wurde von Kolymbas eingeführt und basiert auf den Hypothesen von Goldscheider für das asymptotische Bodenverhalten. Gängige Beziehung der Bodenmechanik, wie z.B. die Beziehung für die Steifigkeit von Ohde bzw. Janbu, eine Spannungs-Dilatanzbeziehung und Prinzipien der Critical State Soil Mechanics lassen sich leicht in das vorgestellte Modell einbeziehen. In diesem Artikel werden die Konzepte der Barodesie an einfachen und bekannten Beispielen (zum Teil eindimensional) erklärt. Der Text ist damit ein guter Einstieg in die Barodesie und Materialmodellierung.

Barodesy is a material model for granular materials with similarities to hypoplasticity. It was introduced by Kolymbas and is based on hypotheses by Goldscheider for asymptotic soil behavior. Common relationships of soil mechanics, such as the stiffness relationship of Ohde and Janbu, a stress-dilatancy relationship, and principles of Critical State Soil Mechanics are included in the presented model. In this article the concepts of barodesy are explained using simple and known examples. The article is thus a good introduction to barodesy and material modelling in general.

1 Einleitung

Die Barodesie ist ein Materialmodell, das sich grundlegend von herkömmlichen elasto-plastischen Modellen unterscheidet: Sie unterscheidet nicht zwischen elastischen und plastischen Verzerrungen und kommt damit ohne Begriffe wie Fließfläche, plastisches Potential oder Fließregel aus. Die Spannungsrate wird als eine tensorielle Funktion der aktuellen Cauchy Spannung, der Deformationsrate und der Porenzahl formuliert. Damit hat die Barodesie gewisse Ähnlichkeiten mit der Hypoplastizität.¹ Im Gegensatz zur Hypoplastizität² wurde die Grundstruktur der Barodesie aus den sog. *Hypothesen von Goldscheider* (siehe Abschnitt 3.2) hergeleitet. Bodenmechanische Theorien (u.a. aus Critical State Soil Mechanics) lassen sich gut in die mathematische Struktur der Barodesie integrieren. In diesem Text wird auf folgende Bodeneigenschaften und deren Umsetzung in der Barodesie eingegangen:

¹ Die Texte “Hypoplastizität für Einsteiger” [1] und “Hypoplastizität für leicht Fortgeschrittene” [2] sind ein guter Einstieg in die Thematik und erläutern mathematische Eigenschaften, die auch für die Barodesie gelten.

²Die Hypoplastizität wurde auf Grundlage des Darstellungstheorems für tensorwertige Funktionen von zwei tensorwertigen Argumenten entwickelt. Das Darstellungstheorem von Cayley-Hamilton für eine tensorwertige Funktion von einem tensorwertigem Argument lautet: Eine tensorwertige Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ lässt sich als Summe der Potenzen von $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{X}^1$, $\mathbf{X}^2$ und den Invarianten a_i von $\mathbf{X}$ darstellen, d.h. $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{X} + a_2 \mathbf{X}^2$, vgl. [2, 3].

1. Bodenverhalten ist nichtlinear. Die Steifigkeit ist von der aktuellen Spannung abhängig.
2. Boden ist anelastisch: Steifigkeiten für Be- und Entlastung unterscheiden sich.
3. Boden zeichnet sich durch sein *asymptotisches Verhalten* bei konstanter Verzerrungsrate aus. Grundlage für das asymptotische Verhalten sind die sog. *proportionalen Pfade*.
4. Im sog. *kritischen Zustand* verschwindet die Steifigkeit. Scherdeformationen nehmen bei gleichbleibenden Spannungen und gleichbleibendem Volumen unbegrenzt zu.
5. Boden folgt einer sog. *Spannungs-Dilatanz Beziehung*: Je größer die Dilatanz ist, desto größer ist der Peakreibungswinkel.
6. Die kritische Porenzahl trennt lockeren von dichtem Boden bzw. leicht überkonsolidierten von stark überkonsolidiertem Boden.
7. Mit der Berücksichtigung der aktuellen Porenzahl in der Barodesie lassen sich Effekte wie Pyknotropie (d.h. die Abhängigkeit von Steifigkeit und Festigkeit von der Dichte) und Barotropie (d.h. die Abhängigkeit von Steifigkeit und Festigkeit vom Spannungsniveau) abbilden.

Im Abschnitt 3 werden diese Bodeneigenschaften mit Versuchsergebnissen veranschaulicht und auch die entsprechenden Simulationen mit der Barodesie gezeigt. In diesem Text wird die Barodesie und die darin enthaltenen Theorien möglichst einfach und zum Teil auch eindimensional erklärt. Für eine Vertiefung werden folgende Artikel empfohlen: [4–12].

2 Begriffe und Notation

Spannungen und Verzerrungen folgen der mechanischen Vorzeichenkonvention: Druckspannungen und Stauungen sind negativ definiert. Die Hauptverzerrungen sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Die Hauptspannungen sind $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ mit σ_1 als betragsmäßig größte Hauptspannung. Da hier nur effektive Spannungen betrachtet werden, wird der Einfachheit halber der Strich bei den effektiven Spannungen weggelassen. In diesem Text werden – abgesehen von den 3D Darstellungen – nur axialsymmetrische Bedingungen ($\sigma_2 = \sigma_3, \varepsilon_2 = \varepsilon_3$) untersucht und dargestellt. Die Deviatorspannung q unter axialsymmetrischen Bedingungen ist $q = -(\sigma_1 - \sigma_3)$, der mittlere effektive Druck ist $p = -\frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$. Die euklidische Norm eines Tensors ist $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{X}^2}$. Der normierte Tensor ist der Tensor dividiert durch seine Norm: $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$. Die normierte Spannung $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}/\|\boldsymbol{\sigma}\|$ kann im Hauptspannungsraum als Vektor dargestellt werden. Dieser Vektor hat die Länge 1 und zeigt vom Ursprung ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$) auf $\boldsymbol{\sigma}^0$. Daher werden (normierte) Tensoren als Richtungsvektoren im Hauptspannungsraum bezeichnet.

Der Stretchingtensor $\mathbf{D}$ ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Für Quaderverformungen ist die Zeitrates des Tensors der logarithmischen Verzerrungen $\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ gleich dem Stretchingtensor $\mathbf{D}$ [13]. Allgemein gilt für kleine Verzerrungen: $\mathbf{D} \approx \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Hier werden nur Quaderverformungen betrachtet und $\mathbf{D}$ wird als $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ geschrieben.

Die Zeitableitung der Spannungen $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ kann nach Zaremba/Jaumann wie folgt berechnet werden: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}$. $\mathbf{W}$ ist der antisymmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten, Beispiele in [3]. Die sog. objektive³ Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ beschreibt die vom Bezugssystem unabhängige Antwort des Materials auf Verformungen. Ein Materialmodell muss objektiv sein und liefert daher im Allgemeinen die objektive Spannungsrate. Für Quaderverformungen ist (wegen $\mathbf{W} = \mathbf{0}$) die objektive Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ gleich der Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$,

³Der Ausdruck objektiv weist darauf hin, dass das Materialverhalten unabhängig von Bewegungen des Betrachters ist. Bei reiner Starrkörperrotation oder reiner Drehung des Betrachters gilt: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$.

cf. [2, 3]. Da in diesem Text nur Quaderverformungen untersucht werden, gilt $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}$. In der Bodenmechanik sind verschiedene Maße für die Dilatanz bzw. Kontraktanz üblich. Hier werden $\text{tr } \dot{\epsilon}^0 = \dot{\epsilon}_1^0 + \dot{\epsilon}_2^0 + \dot{\epsilon}_3^0$ und $\tan \beta$ verwendet. Der Winkel β beschreibt das Verhältnis der volumetrischen zur axialen Deformationsrate, d.h. $\tan \beta = -\dot{\epsilon}_{\text{vol}}/\dot{\epsilon}_1$. Ergänzende Grundlagen zur Materialmodellierung und Darstellung von Spannungen sind in [4] verfügbar.

3 Bodenverhalten und seine mathematische Beschreibung mit der Barodesie

In diesem Abschnitt werden Bodeneigenschaften und bodenmechanische Theorien erläutert. Es wird gezeigt, dass sich diese gut in die mathematische Struktur der Barodesie integrieren lassen.

3.1 Nichtlineares Bodenverhalten

Boden zeichnet sich durch sein nichtlineares Materialverhalten aus: Die Steifigkeit des Bodens ist vom Spannungsniveau und von der Lagerungsdichte (der Porenzahl e) abhängig. Je größer das Spannungsniveau und die Dichte ist, desto steifer verhält sich der Boden bei vorgegebener Verzerrung ϵ . Im Folgenden wird der hydrostatische Kompressionsversuch ($\sigma := \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ und $\epsilon := \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$) betrachtet, da er im Gegensatz zur ödometrischen Kompression ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ und $\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) eine rein eindimensionale Betrachtung zulässt. Für den Kompressionsversuch kann die inkrementelle Steifigkeit mit $E_s = \dot{\sigma}/\dot{\epsilon}$ bezeichnet werden. Die Beziehung von Ohde [14] und Janbu [15] lässt sich wie folgt ausdrücken⁴, vgl. [16]:

$$E_s \propto \sigma^* \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^\alpha \quad \text{bzw.} \quad E_s = \chi \cdot \sigma^* \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^\alpha \quad (1)$$

$\sigma^* = 1 \text{ kPa}$ ist ein Referenzdruck⁵, α und χ sind Materialkonstanten.

Mit

$$E_s = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = \chi \cdot \sigma^* \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^\alpha \quad (2)$$

$$\text{folgt} \quad \dot{\sigma} = \chi \cdot \sigma^* \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^\alpha \cdot \dot{\epsilon} \quad (3)$$

Eine weitere Vereinfachung erhält man für Tone, da näherungsweise $\alpha = 1$ gilt, vgl. [16, 18]. Damit vereinfacht sich Gl. (3) zu:

$$\dot{\sigma} = \chi \cdot \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (4)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \chi \cdot \dot{\epsilon} \quad (5)$$

⁴ Ursprünglich wurde die Beziehung von Ohde [14] und Janbu [15] für den Ödometerversuch mit $\sigma = \sigma_1$ und $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ eingeführt.

⁵Ein Referenzdruck wird hier benötigt, damit α in Gl. (1) dimensionslos ist. Im Grundbau Taschenbuch [17] wird als Referenzdruck der atmosphärische Druck $\sigma_{\text{at}} \approx 100 \text{ kPa}$ angegeben und damit $E_s = v_e \cdot \sigma_{\text{at}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{at}}} \right)^{w_e}$. Mit $\alpha = w_e$ kann χ wie folgt berechnet werden: $\chi = v_e \frac{\sigma_{\text{at}}}{\sigma_{\text{at}}^\alpha} \frac{\sigma^{*\alpha}}{\sigma^*}$.

Integration von Gl. (5), $\int_0^t \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} dt = \chi \int_0^t \dot{\varepsilon} dt$, führt auf:

$$\ln \sigma \Big|_0^t = \chi \cdot \varepsilon \Big|_0^t \quad (6)$$

$$\ln \sigma(t) - \underbrace{\ln \sigma(0)}_{\sigma_0} = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \chi \cdot (\varepsilon(t) - \underbrace{\varepsilon(0)}_{\varepsilon_0}) \quad (7)$$

$$\ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \chi \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon_0) \quad (8)$$

$$\text{bzw.} \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{\chi} \cdot \ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} + \varepsilon_0 \quad (9)$$

$$\text{und} \quad \sigma(t) = \sigma_0 \cdot \exp(\chi \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon_0)) \quad (10)$$

Die Kalibrierung des Parameters χ in Gl. (8) an Versuchsergebnisse von Weald Ton [19] in Abbildung 1 ergibt $\chi \approx -56$.⁶

Abbildung 1: Isotroper Kompressionsversuch: Anpassung der analytischen Lösung (Gl. 8) an Versuchsergebnisse von Weald Ton [19]. *Isotropic compression test: Analytical solution (eq. 8) and results of Weald Ton [19].*

3.2 Asymptotisches Bodenverhalten

Boden zeichnet sich durch sein asymptotisches Verhalten aus, und mit der Fähigkeit, seine Belastungsgeschichte allmählich zu „vergessen“ [20, 21].

3.2.1 Proportionale Pfade

Proportionale Spannungspfade (P σ P) sind Spannungspfade bei denen jeweils das Verhältnis der Hauptspannungen konstant bleibt: $\sigma_1/\sigma_2 = \text{const}$, $\sigma_2/\sigma_3 = \text{const}$, $\sigma_1/\sigma_3 = \text{const}$. Das wird oft mit $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = \text{const}$

⁶Der Parameter χ wurde an $\sigma_0 = -66.0$ kPa mit $\varepsilon_0 = 0$ und $\sigma = -830.8$ kPa mit $\varepsilon = -4.5\%$ kalibriert.

abgekürzt. Proportionale Verzerrungspfade (PεP) sind Verzerrungspfade bei denen das Verhältnis der Hauptverzerrungen konstant bleibt: $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \text{const}$, $\varepsilon_2/\varepsilon_3 = \text{const}$ und $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = \text{const}$.

Wird eine Probe über die Zeit t mit einer konstanten Spannungsrate $\dot{\sigma} = \text{const}$ vom spannungsfreien Zustand deformiert, entsteht ein proportionaler Spannungspfad, der im Hauptspannungsraum eine Gerade darstellt, da für Quaderverformungen $\sigma = \dot{\sigma} \cdot t$ gilt, siehe Abbildung 2 (a). Im Hauptspannungsraum kann $\dot{\sigma}$ als Vektor dargestellt werden, der in Richtung dieses PσP zeigt. Die normierte Spannungsrate $\dot{\sigma}^0$ ist im Hauptspannungsraum als Vektor mit der Länge 1 darstellbar, der in die Richtung von $\dot{\sigma}$ zeigt. Die Richtung eines beliebigen proportionalen Spannungspfades wird im Folgenden über den normierten Tensor $\mathbf{R}^0$ festgelegt, siehe Abbildung 2 (b).

In der selben Art entsteht bei einer Deformation mit $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ aus $\varepsilon = \dot{\varepsilon} \cdot t$ ein proportionaler Verzerrungspfad (PεP). Die normierte Deformationsrate $\dot{\varepsilon}^0$ gibt die Richtung dieses proportionalen Verzerrungspfades an, $\dot{\varepsilon}$ zeigt in dieselbe Richtung, vgl. Abbildung 2 (c).

Abbildung 2: Proportionale Pfade: (a) Die normierte Spannungsrate $\dot{\sigma}^0$ gibt die Richtung des proportionalen Spannungspfades (PσP) für eine Belastung mit $\dot{\sigma} = \text{const}$ an, $\dot{\sigma}$ zeigt in dieselbe Richtung. (b) Die Richtung eines beliebigen proportionalen Spannungspfades wird über den normierten Tensor $\mathbf{R}^0$ festgelegt. (c) Die normierte Deformationsrate $\dot{\varepsilon}^0$ gibt die Richtung des proportionalen Verzerrungspfades (PεP) für eine Deformation mit $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ an, $\dot{\varepsilon}$ zeigt in dieselbe Richtung. *Proportional paths: (a) The normalized stress rate $\dot{\sigma}^0$ indicates the direction of the proportional stress path for a load with $\dot{\sigma} = \text{const}$, $\dot{\sigma}$ points in the same direction. (b) The direction of any proportional stress path is determined by the normalized tensor $\mathbf{R}^0$. (c) The normalized deformation rate $\dot{\varepsilon}^0$ indicates the direction of the proportional strain path for a deformation with $\dot{\varepsilon} = \text{const}$, $\dot{\varepsilon}$ points in the same direction.*

3.2.2 Hypothesen von Goldscheider

Goldscheider führte mit dem True Triaxial Gerät (Abbildung 3) zahlreiche Versuche an Sand durch und konnte daraus zwei grundlegende Hypothesen formulieren:

- Wird eine Bodenprobe mit einem proportionalen Verzerrungspfad deformiert, resultiert daraus ein Spannungspfad, der sich asymptotisch einer Geraden im Spannungsraum - einem proportionalen Spannungspfad - annähert (Abbildung 4 (b), zweite Hypothese von Goldscheider). Der Boden „vergisst“ also mit andauernder Deformation seinen ursprünglichen Zustand⁷.

⁷sog. „SOM“ (Swept Out of Memory) Effekt [20, 21]

Abbildung 3: Prinzip nach Hambly: Gerät für Quaderverformungen, abgeändert von [22]. *Hambly's concept: Apparatus for rectilinear extensions*

- Startet die Verformung mit einem proportionalen Verzerrungspfad sehr nahe am spannungsfreien Zustand, so resultiert aus einem proportionalen Verzerrungspfad direkt der proportionale Spannungspfad (erste Hypothese von Goldscheider). An diesen proportionalen Spannungspfad schmiegt sich jeder andere Spannungspfad an, der mit dem gleichen proportionalen Verzerrungspfad deformiert wurde.

Die Hypothesen nach Goldscheider bilden die Grundlage der Barodesie. Goldscheider [23] und Chu und Lo [24] führten Versuche mit Sand durch und konnten die Hypothesen belegen. Topolnicki [25] konnte mit seinen Versuchen nachweisen, dass die Hypothesen nach Goldscheider auch für Ton gültig sind, vgl. auch Topolnicki et al. [26]. Jedoch ist davon auszugehen, dass die Hypothesen von Goldscheider nur innerhalb eines gewissen Spannungsbereichs gültig sind: Sobald Effekte wie Kornbruch eintreten, verlieren die Hypothesen ihre Gültigkeit, siehe dazu auch Abschnitt 4.4 (Grenzen der Barodesie). Die Spannungspfade der Experimente mit Sydney Sand [24] (Linie mit Punkten) in Abbildung 4 (b) nähern sich asymptotisch proportionalen Spannungspfaden an. Die entsprechenden proportionalen Verzerrungspfade sind in Abbildung 4 (a). Es gibt also einen Zusammenhang zwischen proportionalen Verzerrungspfaden und proportionalen Spannungspfaden.

3.2.3 Mathematische Umsetzung der ersten Hypothese nach Goldscheider

Die Spannungsrate $\dot{\sigma}$ kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\dot{\sigma} = \|\dot{\sigma}\| \cdot \dot{\sigma}^0 \quad (11)$$

wobei $\|\dot{\sigma}\|$ die Norm der Spannungsrate ist und $\dot{\sigma}^0$ die normierte Spannungsrate, die im Hauptspannungsraum einen Richtungsvektor mit der Länge 1 definiert, vgl. Abbildung 5 (a). Für jeden Spannungszustand gilt:

$$\sigma = \|\sigma\| \cdot \sigma^0 \quad (12)$$

Wir betrachten nun eine Deformationsrate $\dot{\epsilon}^0$, die eine Richtung $\mathbf{R}^0$ bedingt, und einen Spannungszustand σ mit dem Richtungsvektor σ^0 , der zur aktuellen Deformationsrate $\dot{\epsilon}^0$ passt, also $\mathbf{R}^0 = \sigma^0$, siehe Abbildung 5 (b). Hier ist der Richtungsvektor σ^0 des Spannungszustandes auch gleich der Richtung des Vektors der Spannungsrate $\dot{\sigma}^0$.

$$\mathbf{R}^0(\dot{\epsilon}) = \sigma^0 = \dot{\sigma}^0 \quad (13)$$

Damit bleiben die Spannungen am proportionalen Spannungspfad, z.B. für einen Schritt einer Zeitintegration mit einem expliziten Eulerverfahren:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \sigma_t + \dot{\sigma}_t \Delta t = \sigma_t^0 \cdot \|\sigma_t\| + \dot{\sigma}_t^0 \cdot \|\dot{\sigma}_t\| \cdot \Delta t = \sigma_t^0 \cdot (\|\sigma_t\| + \|\dot{\sigma}_t\| \cdot \Delta t), \text{ weil } \sigma_t^0 = \dot{\sigma}_t^0.$$

3.2.4 R-Funktion

Aus der ersten Hypothese nach Goldscheider folgt direkt, dass für jeden möglichen proportionalen Verzerrungspfad ein zugehöriger proportionaler Spannungspfad definiert werden muss. Dies wird in der Barodesie mathematisch mit der sog. **R-Funktion** beschrieben. Die Richtung eines proportionalen Verzerrungspfades ist durch den Tensor der Deformationsrate $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, bzw. den normierten Tensor $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0$ (Abbildung 2 (c)) vorgegeben. Die **R-Funktion** liefert dann die Richtung des entsprechenden proportionalen Spannungspfades $\mathbf{R}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ über den normierten Tensor $\mathbf{R}^0$. Beliebige (volumenverkleinernde und volumenvergrößernde) proportionale Verzerrungspfade sind möglich – volumenvergrößernde allerdings nicht unbegrenzt, da die Porenzahl einen Maximalwert nicht überschreiten kann, ohne dass die Körner vollständig den Kontakt verlieren. Experimente von Bergholz [27] und Bergholz und Herle [28] an gesättigten aufbereiteten Dresden Ton Proben haben gezeigt, dass auch Spannungspfade von stark überkonsolidiertem Ton den Druckbereich nicht verlassen. Alle proportionalen Spannungspfade sollen daher im zulässigen Druckbereich bleiben. Das garantiert eine Funktion der Form

$$\mathbf{R} = -\exp(\alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) \quad (14)$$

die sich für Hauptkomponenten einfach schreibt:

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \exp(\alpha \dot{\epsilon}_1^0) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\alpha \dot{\epsilon}_2^0) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\alpha \dot{\epsilon}_3^0) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die Funktion in Gl. (14) ist negativ semidefinit, d.h. alle Eigenwerte sind kleiner oder gleich 0. Dies liegt an den Eigenschaften der Exponentialfunktion. Damit liegen alle Spannungspfade, die $\mathbf{R}$ definiert (vgl. Abbildung 2 (b)), im Druckquadranten. Die skalare Funktion α in Gl. (14) wird an eine *Spannungs-Dilatanz Beziehung* angepasst.

Ausgewählte proportionale Spannungspfade sind in den Abbildung 4 dargestellt. Die Deformation $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = -1$ mit $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = -\sqrt{3}$ und $\tan \beta = -3$ beschreibt isotrope Kompression und erzeugt die hydrostatische Achse als proportionalen Spannungspfad. Für axialsymmetrische volumentreue Kompression ($\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = \tan \beta = 0$) ist der proportionale Spannungspfad die *Critical State Line* (c). Ein proportionaler Verzerrungspfad zwischen *i* und *c*, erzeugt einen proportionalen Spannungspfad zwischen *i* und *c*.

Alle proportionalen Spannungspfade mit $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = \text{const}$ erzeugen einen Kegel im Druckquadranten des Hauptspannungsraumes, siehe Abbildung 6. Die Deformation $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = -1$ erzeugt den Kegel 1. Für axialsymmetrische Kompression ist das der sog. K_0 -Pfad für ödometrische Kompression, der in Abbildung 6 mit *o* gekennzeichnet ist. Aus volumentreuen Deformationen resultiert der Kegel 2 der kritischen Spannungszustände. Die dilatanten Pfade $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = 0.5$ erzeugt den Kegel 3, und der zur Pyramide entartete Kegel 4 begrenzt die zulässigen Spannungen auf den Druckbereich.

3.2.5 Spannungs-Dilatanz Beziehung

Der mobilisierbare Reibungswinkel ist mit der Dilatanz verknüpft [30, 31]. Verhält sich der Boden dilatant, ist der Peakreibungswinkel φ_p größer dem kritischen Reibungswinkel φ_c .

Chu & Lo's Beziehung Ausgehend von einem hydrostatischen Spannungszustand werden Sandproben mit proportionalen Verzerrungspfaden deformiert. Zwei resultierende Spannungspfade sind im p - q Diagramm in Abbildung 7 (a) dargestellt. Es handelt sich um die Spannungspfade aus dem σ_1 - σ_2 Diagramm aus Abbildung 4 (b). Die zugehörigen proportionalen Verzerrungspfade befinden sich in Abbildung 4 (a).

Bei den Versuchen von Chu und Lo [24] werden – wie bei Goldscheider [23] – die Bodenproben mit proportionalen Verzerrungspfaden deformiert, d.h. das Dilatanzmaß $\tan \beta$ ist während des gesamten Versuchs konstant. Chu und Lo beobachteten, dass die erreichbaren Spannungsverhältnisse q/p (das Spannungsverhältnis im asymptotischen Zustand) mit dem Dilatanzmaß der proportionalen Verzerrungspfaden $\tan \beta = -\dot{\epsilon}_{\text{vol}}/\dot{\epsilon}_1$

(a)

(b)

Abbildung 4: Sydney Sand: Triaxialversuche mit $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und $\sigma_2 = \sigma_3$, Versuche von Chu und Lo [24], $\varphi_c = 34.1^\circ$ (a) Proportionale Verzerrungspfade. (b) Die Spannungspfade der Experimente (Linie mit Punkten) nähern sich asymptotisch proportionalen Spannungspfaden an. *Triaxial tests of Sydney Sand, experiments by Chu and Lo. (a) Proportional strain paths. (b) The stress paths of the experiments approach asymptotically proportional stress paths.*

in Verbindung steht. Auf Grundlage von Versuchsergebnissen haben Chu und Lo folgende empirische Beziehung zur Beschreibung von proportionalen Pfaden eingeführt, siehe Abbildung 7 (b):

$$\frac{q}{p} = \frac{M}{3} \tan \beta + M \quad \text{mit} \quad M = \frac{6 \sin \varphi_c}{3 - \sin \varphi_c} \quad (16)$$

Je größer die Dilatanz $\tan \beta$ ist, desto höher ist das erreichbare Spannungsverhältnis q/p . Ist das Dilatanzmaß $-3 < \tan \beta < 0$, liegt der mobilisierbare Reibungswinkel unter dem kritischen, vgl. Zustand der ödometrischen Kompression ($\tan \beta = -1$). Für einen hydrostatischen Kompressionsversuch ($\tan \beta = -3$) ist der mobilisierte Reibungswinkel $\varphi_m = 0$ bzw. $q/p = 0$. Abbildung 7 (b) zeigt einen Vergleich der Barodesie mit der Beziehung nach Chu und Lo. Im Bereich, der experimentell belegt ist ($-1 < \tan \beta < 0.7$), liefert die Barodesie sehr ähnliche Ergebnisse wie die Beziehung nach Chu und Lo [24]. In Abbildung 7 (b) wird das Spannungsverhältnis q/p bzw. $K = \sigma_2/\sigma_1$ über das Dilatanzmaß $\tan \beta$ aufgetragen.⁸ Unter hydrostatischer Kompression ist $\tan \beta = -\dot{\varepsilon}_{\text{vol}}/\dot{\varepsilon}_1 = -3$, das Spannungsverhältnis $q/p = 0$ bzw. $\sigma_2/\sigma_1 = 1$. Im kritischen Zustand ($\tan \beta = 0$) ist das Spannungsverhältnis $q/p = M$ bzw. $\sigma_2/\sigma_1 = K_c = (1 - \sin \varphi_c)/(1 + \sin \varphi_c)$. Unter ödometrischer Kompression ($\tan \beta = -1$) sind die Annahmen nach Jáky $K_0 = \sigma_2/\sigma_1 = 1 - \sin \varphi_c$ oder nach Chu und Lo mit $K_0 = \sigma_2/\sigma_1 = \frac{9 - 7 \sin \varphi_c}{9 + 5 \sin \varphi_c}$ geeignet. In Abbildung 8 ist zu sehen, dass der Unterschied der zwei Beziehungen in der Streubreite der Experimente liegt. Die Spannungs-Dilatanz Beziehung wird in der Barodesie mit der **R**-Funktion (Gl. (14)) modelliert, und darin speziell über die Funktion α .

Wie bereits erwähnt, ist für proportionale Pfade $\mathbf{R}^0$ gleich $\boldsymbol{\sigma}^0$ (Abbildung 5 (b)) und das Verhältnis zweier Hauptspannungen ist gleich dem Verhältnis der zugehörigen Komponenten des **R**-Tensors, z.B. $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^0}{\sigma_1^0} =$

⁸ K und q/p können wie folgt ineinander umgerechnet werden: $\frac{q}{p} = \frac{3 - 3K}{1 + 2K}$ and $K = \frac{3 - q/p}{3 + 2q/p}$.

Abbildung 5: Darstellung von Spannungstensoren als Vektoren im Hauptspannungsraum: (a) Die Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ist ihr Einheitstensor $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ multipliziert mit ihrer Länge $\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$, also $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\| \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$. (b) Für einen proportionalen Spannungspfad (PσP) gilt: $\mathbf{R}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ Representation of stress tensors as vectors in the principal stress space: (a) The stress rate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ is its unit tensor $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ multiplied by its length $\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$. (b) For a proportional stress path applies: $\mathbf{R}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$

Abbildung 6: 3D Darstellung von proportionalen Spannungspfaden als Erzeugende von Kegeln, die für $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = \text{const}$ durch die $\mathbf{R}$ -Funktion definiert werden. Hier wird Dortmund Ton mit $\varphi_c = 27.9^\circ$ simuliert, abgeändert von [22]. 3D representation of proportional stress paths for $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) = \text{const}$ by the $\mathbf{R}$ -function. Dortmund clay is simulated.

Abbildung 7: “True Triaxial” und konventionelle Triaxialversuche: Sydney Sand [24] wird mit proportionalen Verzerrungspfaden verformt. Resultierende Spannungspfade und asymptotische Annäherung an proportionale Spannungspfade in (a). Die Beziehung von Chu und Lo [24] ist in (b). Versuchsergebnisse von Sydney Sand (Δ) werden gut durch die Beziehung von Chu und Lo [24] beschrieben. Die Versuche von Abbildung (a) sind markiert. q/p , φ_m bzw. $K = \sigma_2/\sigma_1$ werden über $\tan \beta$ dargestellt. M ist von Sydney Sand beträgt 1.38 ($\varphi_c \approx 34.1^\circ$). *Triaxial tests: Sydney sand is deformed with proportional strain paths. (a) Resulting stress paths and asymptotic approach to proportional stress paths. (b) The relationship of Chu and Lo and the experiments of (a) are shown. Test results of Sydney Sand are well described by the relationship of Chu and Lo.*

Abbildung 8: Jákys and Chu & Los Beziehungen liefern K_0 -Werte und werden Experimenten von Ton (o) und Sand (+) gegenübergestellt, abgeändert von [22], Daten von Muir Wood [32]. *Jákys and Chu & Los relations predict K_0 values and are compared with experiments of clay (o) and sand (+).*

$$\frac{R_2^0}{R_1^0} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Mit Gl. (14) folgt aus $K = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\exp(\alpha \varepsilon_2^0)}{\exp(\alpha \varepsilon_1^0)} = \exp(\alpha \varepsilon_2^0 - \alpha \varepsilon_1^0)$:

$$\alpha = \frac{\ln K}{\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0} \quad (17)$$

Für den Ödometerversuch mit $\varepsilon_1^0 = -1$ und $\varepsilon_2^0 = 0$ gilt $\alpha = \ln K_0 = \ln(1 - \sin \varphi_c)$, wenn K_0 nach Jáky abgeschätzt wird. Im kritischen Zustand⁹ ist $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0) = 0$, $\varepsilon_1^0 = -\sqrt{2/3}$ und $\varepsilon_2^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2/3}$. Gleichung 17 ergibt

dann $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln K_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{1 - \sin \varphi_c}{1 + \sin \varphi_c} \right)$. Die Beispiele des Ödometerversuchs und der volumentreuen

Kompression zeigen, dass α in Gl. (14) keine Konstante, sondern eine Funktion von K und $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ ist. K kann als Funktion von $\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ formuliert werden, sowie q/p in Gl. (16) als Funktion von $\tan \beta$. Damit wird α eine Funktion von $\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$, die als Materialparameter nur den kritischen Reibungswinkel φ_c enthält. Eine ausführliche Beschreibung ist in [22]. Abbildung 7 (b) zeigt die Beziehung nach Chu und Lo und die Ergebnisse mit der **R**-Funktion der Barodesie [7, 9]. Die Zwangspunkte der beiden Beziehungen für K_0 im Ödometerversuch ($\tan \beta = -1$) und K_c im kritischen Zustand ($\tan \beta = 0$) sind darin markiert.

Peakzustände Bei Peakzuständen gibt es einen Zusammenhang zwischen Dilatanz und Peakreibungswinkel. Auch hier gilt: Je höher die Dilatanz im Peak ist, desto höher ist der Peakreibungswinkel, siehe Abbil-

⁹Unter volumentreuer Kompression ist $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Damit wird $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

dung 9 (a). In Abbildung 9 (a) werden Triaxialversuche (CD) von Hostun Sand¹⁰ gezeigt. Die Peakzustände dieser CD Versuche, können auch mit der Beziehung nach Chu & Lo abgeschätzt werden, vgl. Abbildung 9 (b).¹¹

Abbildung 9: Peakzustände von CD Triaxialversuchen mit Hostun Sand, Experimente von Desrues et al. [33]. Je größer die Dilatanz im Peak ist, desto größer ist der Peakreibungswinkel. Die Versuche aus Abbildung (a) sind in (b) markiert. (a) q/p - ε_1 bzw. φ_m - ε_1 und ε_1 - ε_{vol} Darstellungen von CD Versuchen. (b) Die Beziehung von Chu und Lo wird Peakzuständen von CD Versuchen [33] gegenübergestellt. *Peak states of CD triaxial tests with Hostun Sand, experiments by [33]. The higher the dilatancy at the peak is, the higher is the peak friction angle. The tests in figure (a) are marked in (b).* (a) q/p - ε_1 , φ_m - ε_1 and ε_1 - ε_{vol} plots from CD tests. (b) The relationship of Chu and Lo is compared with peak states of CD tests.

3.2.6 Mathematische Umsetzung der zweiten Hypothese nach Goldscheider

Ausgehend vom aktuellen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma} = \|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot \boldsymbol{\sigma}^0$ nähert sich der Spannungspfad einem proportionalen Spannungspfad der Richtung $\mathbf{R}^0$ an, wenn die Probe mit einem proportionalen Verzerrungspfad deformiert wird, siehe Abbildung 10. Die Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ gibt eine Tangente an den Spannungspfad vor und zeigt also in die Richtung des proportionalen Spannungsfades. Mathematisch kann die asymptotische Annäherung so beschrieben werden:

$$\underbrace{\|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot \boldsymbol{\sigma}^0}_{\boldsymbol{\sigma}} + \lambda \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \mu \mathbf{R}^0 \quad (18)$$

Die kann als Vektoraddition dargestellt werden, vgl. Abbildung 10.

¹⁰Die Experimente von Desrues et al. [33] *host-d-triaxc-cd-100: cdhfd11, host-d-triaxc-cd-300: hfdw08, host-d-triaxc-cd-600: hfdw09*, werden mit A, B, C markiert. Abbildung 9 (b) wird mit zusätzlichen Versuchsergebnissen von Desrues et al. [33] ergänzt. Der kritische Reibungswinkel ist $\varphi_c = 33.8^\circ$.

¹¹Es ist jedoch zu beachten, dass Chu und Lo [24] ihre Beziehung für proportionale Pfade, in denen $\tan \beta = \text{const}$, also $\frac{d}{dt}(\tan \beta) = 0$ ist, entwickelt haben. Im Peakzustand ändert sich aber β gerade mit der Zeit.

Umformen von Gl. (18) führt auf

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \mathbf{R}^0 - \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|}{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (19)$$

Die skalaren Größen μ und λ sind Funktionen der Porenzahl e und des Spannungsniveaus, da die Richtung und der Ablauf der Annäherung mindestens von diesen beiden Zustandsgrößen abhängt. Mit $f = \frac{\mu}{\lambda}$ und $g = -\frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|}{\lambda}$ folgt:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = f \cdot \mathbf{R}^0 + g \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (20)$$

Nun kennen wir die Richtung der Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ und brauchen noch für Gl. (11) ($\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\| \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$) den Betrag der Spannungsrate. Dieser Betrag folgt aus der Verallgemeinerung der eindimensionalen Betrachtung¹² für die spannungsabhängige Steifigkeit in Gl. (3):

$$\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\| = \underbrace{\chi \cdot \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|}{\sigma^*} \right)^\alpha}_{h(\boldsymbol{\sigma})} \cdot \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (21)$$

Damit folgt aus den Gln. 11, 20 und 21 die Grundstruktur der Barodesie:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = h(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (f \mathbf{R}^0 + g \boldsymbol{\sigma}^0) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (22)$$

Liegt der aktuelle Spannungszustand auf dem zur Deformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ gehörenden proportionalen Spannungspfad (zum Beispiel auf der Critical State Line) gilt $\mathbf{R}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0$, vgl. dazu Abbildung 5 (b). Damit wird Gleichung 22 zu:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = h(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (f + g) \cdot \mathbf{R}^0 \cdot \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (23)$$

Für den kritischen Zustand muss $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ werden. Aus Gl. (23) und der Bedingung $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ folgt, dass das im kritischen Zustand $f + g = 0$ werden muss. Daraus lassen sich Bedingungen für die Formulierung von f und g ableiten, insbesondere beinhalten die skalare Funktionen die Critical State Line (aus dem e - p Diagramm). Folgende Anmerkungen werden zu Gl. (22) gegeben:

- Die skalare Funktion $h(\boldsymbol{\sigma})$ berücksichtigt das aktuelle Spannungsniveau und beinhaltet damit die Beziehung nach Janbu [15] und Ohde [14].
- Die skalaren Funktionen f und g sollen die aktuelle und druckabhängige kritische Porenzahl e und e_c beinhalten
 - die Porenzahl e berücksichtigt die aktuelle Lagerungsdichte.
 - die kritische Porenzahl e_c trennt dichten (stark überkonsolidierten) von lockerem (normal- und leichtüberkonsolidierten) Boden und ist vom Spannungsniveau abhängig, siehe Abschnitt 3.3. Damit sind f und g von der Porenzahl und vom Spannungsniveau abhängig und dienen zur Beschreibung von Barotropie und Pyknotropie.
- Im kritischen Zustand ist $e = e_c$ und $\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0$. Die Funktionen f und g werden so formuliert, dass $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ erfüllt ist.

In Abbildung 11 wird die Annäherung an proportionale Pfade mit Simulationen mit der Barodesie für Ton veranschaulicht: Ausgehend vom hydrostatischen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma} = 200 \cdot \mathbf{1}$ kPa wird Weald Ton mit verschiedenen proportionalen Verzerrungspfaden deformiert, siehe Abbildung 11 (a). Abbildung 11 (b) zeigt daraus resultierende Spannungspfade und die asymptotische Annäherung an proportionale Spannungspfade. Spezielle Pfade sind in den Abbildungen 11 (a) und (b) markiert.

¹²Zur Erinnerung: Die 1D Formulierung für isotrope Kompression ist mit $\alpha = 1$ (Gl. (4)): $\dot{\sigma} = \chi \cdot \sigma \cdot \dot{\epsilon}$.

(a)

(b)

Abbildung 11: Spannungspfade für Weald Ton ($\varphi_c = 24^\circ$) werden mit der Barodesie für Ton [7] simuliert. (a) Proportionale Verformungspfade; hydrostatische Kompression i : $\tan \beta = -3$, ödometrische Kompression o : $\tan \beta = -1$, volumentreue Deformation c : $\tan \beta = 0$. (b) Annäherung an die proportionalen Spannungspfade; i : $K = \sigma_2/\sigma_1 = 1$, o : $\sigma_2/\sigma_1 = K_0 = 1 - \sin \varphi_c$, c : $\sigma_2/\sigma_1 = K_c = \frac{1 - \sin \varphi_c}{1 + \sin \varphi_c}$; Ausgangsüberkonsolidierung von OCR= 3. *Stress paths for Weald clay are simulated with the barodesy with an initial overconsolidation ratio of 3. (a) Proportional strain paths. (b) Approach to proportional stress paths*

Abbildung 12: Critical State Line im p - q Diagramm. Die CSL wurde mit konsolidierten, undrnierten (CU) Triaxialversuchen an normalkonsolidiertem Weald Ton bestimmt. Versuchsergebnisse von berkonsolidiertem Ton wurden hinzugefgt. Daten von Roscoe et al. [34], Kalibrierung auf $M = 0.872$ bzw. $\varphi_c \approx 22.4^\circ$ von Muir Wood [32]. *Critical State Line in the p - q plot. The CSL is determined with consolidated, undrained (CU) triaxial tests on normal-consolidated Weald clay. Test results of overconsolidated clay are added. Data by Roscoe et al. [34]*

jeweils mit dem Referenzdruck $\sigma^* = 1 \text{ kPa}$. Für Weald Ton ergeben sich die Werte $N = 0.817$, $\lambda^* = 0.059$ und $v_\lambda = 2.072$ und $\lambda = 0.091$. Für den experimentell belegten Bereich eignen sich beide Ansätze gleichermaßen¹³, siehe Abbildung 13 (b).

Abbildung 13: Kritische Porenzahl: Die CSL wurde mit konsolidierten, undrÄnierten (CU) Triaxialversuchen an normalkonsolidiertem Weald Ton bestimmt. Versuchsergebnisse von überkonsolidiertem Ton wurden hinzugefügt. Daten¹⁴ von Roscoe et al. [34]. Ansätze zur Approximation der Versuchsergebnisse, dargestellt im doppelt-logarithmischen Diagramm: $\ln(1+e) - \ln p$ in (a) und im $1+e - p$ Diagramm in (b). Für den experimentell untersuchten Bereich eignen sich beide Ansätze gleichermaßen. *Critical void ratio: The CSL was determined with consolidated, undrained (CU) triaxial tests on normally consolidated Weald clay. Test results of overconsolidated clay were added. Data by Roscoe et al. [34] Approaches to approximate the test results are shown. Both approaches are suitable for the experimentally investigated range.*

Für Sand werden in Abbildung 14 der halblogarithmische Ansatz nach Gl. (26) mit $v_\lambda = 0.969$, $\lambda = 0.03$ (aus [38]) und der Ansatz nach Bauer [39]

$$e_c = e_{c0} \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right] \quad (27)$$

mit $e_{c0} = 1.05$, $h_s = 1000 \text{ MPa}$, $n = 0.18$ gezeigt. Für den experimentell belegten Bereich eignen sich beide Ansätze, siehe Abbildung 14 (b).

Die Barodesie für Ton [7] beinhaltet explizit die doppelt-logarithmische Formulierung für die CSL (Gl. 25 und später in der konkreten Formulierung der Barodesie Gl. 34). In Abbildung 15 werden Simulationen von drÄnierten Triaxialversuchen (CD) (Anfangsporenzahl/initial void ratio $e_{\text{ini}} = 0.9$) gezeigt. Die normal- und leicht überkonsolidierten ($e_{\text{ini}} > e_c$, oberhalb der CSL) Tonproben verdichten sich, um in den kritischen Zustand zu gelangen (Abbildung 15a) und der mobilisierte Reibungswinkel φ_m steigt kontinuierlich bis

¹³Nach Butterfield [18] ist für sehr weiche Tone der doppelt-logarithmische Ansatz realistischer. Für andere Tonarten eignen sich beide Ansätze.

¹⁴Roscoe et al. [34] zeichnen den mittleren Druck p über den Wassergehalt w auf. Da die Probe vollständig gesättigt ist, ist $w = w_{\text{max}}$. Daraus folgt $e = \frac{\gamma_s}{\gamma_w} w$. $\frac{\gamma_s}{\gamma_w}$ wurde mit 2.75 angenommen.

Abbildung 14: Kritische Porenzahl: Endpunkte von CU Versuchen von Hostun Sand, Daten von Gajo und Muir Wood [38]. Die Experimente werden hier mit der semilogarithmischen Darstellung nach Gajo und Muir Wood [38] und mit der Formulierung nach Bauer [39] approximiert. Darstellung im logarithmischen Diagramm: $1+e - \ln p$ in (a) und im $1+e - p$ Diagramm in (b). Für den experimentell untersuchten Bereich eignen sich beide Ansätze gleichermaßen. *Critical void ratio: Endpoints of CU tests of Hostun sand, data by Gajo and Muir Wood [38]. The test results are approximated by the semi-logarithmic relation by [38] and by a relation by Bauer. Both approaches are suitable for the experimentally investigated range.*

zum kritischen Reibungswinkel φ_c an (Abbildung 15c). Die stark überkonsolidierten Proben ($e_{\text{ini}} < e_c$, unterhalb der CSL) verhalten sich dilatant und erreichen Peakreibungswinkel φ_p , die über dem kritischen Reibungswinkel φ_c liegen (Abbildung 15c).

Abbildung 15: Simulationen mit der Barodesie von CD Triaxialversuchen mit London Ton ($\varphi_c = 22.6^\circ$). Durch die Auflockerung der stark überkonsolidierten Proben, wird der kritische Zustand erreicht. Die normal- und leicht überkonsolidierten Proben verdichten sich und die Spannungen und die Porenzahl landen dann auf der CSL. Die stark überkonsolidierten Proben (grau hinterlegter Bereich) erreichen hohe Peakreibungswinkel bevor die Spannungen und die Porenzahl nach der Entfestigung auf der CSL landen. *Simulations with barodesy of CD triaxial tests with London clay. The highly overconsolidated samples dilate, the normally and slightly overconsolidated samples contract. The stresses and the void ratio then reach the critical state. The highly overconsolidated samples (grayed area) reach high peak friction angles before stresses and void ratio reach the CSL after softening.*

3.3.2 Kritische Zustände in der Deviatorebene

Für nicht axialsymmetrische Versuche eignet sich die Darstellung in der Deviatorebene. In Abbildung 16 werden kritische Spannungszustände von normalkonsolidiertem San Francisco Bay Mud ($\varphi_c = 30.6^\circ$) nach Lade [40] den Grenzflächen nach Matsuoka-Nakai und Mohr-Coulomb gegenübergestellt. Die Bodenproben wurden isotrop konsolidiert und in konventionellen und *True Triaxial* Geräten abgesichert. Bei den gefüllten Kreisen (●) handelt es sich um experimentelle Daten der kritischen Spannungszustände (*critical state*), die Kreise (○) sind Spiegelungen und Drehungen um 120° der experimentellen Daten. Die Barodesie liefert für kritische Zustände praktisch dieselben Spannungsverhältnisse wie Matsuoka-Nakai [11]. Es gibt zwar mathematische Unterschiede, die jedoch keine bodenmechanische Relevanz haben.

3.3.3 Pyknotropie (Einfluss der Lagerungsdichte)

Je dichter eine Bodenprobe ist, desto höher ist (bei gleicher Anfangsspannung) ihre Peakfestigkeit und damit auch ihr Peakreibungswinkel. Der Einfluss der Lagerungsdichte auf die Festigkeit wird Pyknotropie genannt. In Abbildung 17 sind Simulationsergebnisse mit der Barodesie für Ton [7] zur Veranschaulichung dargestellt. Auch hier gilt der Zusammenhang zwischen Spannungsverhältnis q/p und Dilatanz: durch Auflockerung der dichten ($e_{\text{ini}} < e_c$) Probe und durch Verdichtung der lockeren ($e_{\text{ini}} > e_c$), wird der kritische Zustand erreicht, siehe Abbildungen 17 (a) und 17 (c). Die Festigkeit q_{max} und der Peakreibungswinkel sind für die dichte

Abbildung 16: Kritische Spannungspunkte von normalkonsolidiertem San Francisco Bay Mud (●) von Lade [40] werden den Grenzflächen nach Matsuoka-Nakai und Mohr-Coulomb sowie der Barodesie in der Deviatorebene ($\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 500 \text{ kPa}$) gegenübergestellt. Die Barodesie und Matsuoka-Nakai liefern praktisch dieselben Ergebnisse, abgeändert von [22]. *Critical stress points of normal-consolidated San Francisco Bay Mud (●) of Lade [40] are compared with the Matsuoka-Nakai and Mohr-Coulomb failure surface as well as with barodesy in the deviatoric plane. Barodesy and Matsuoka-Nakai practically coincide.*

Probe (d.h. für das niedere Spannungsniveau) größer als für die lockere Probe, siehe Abbildungen 17 (b) und 17 (d).

3.3.4 Barotropie (Einfluss des Spannungsniveaus)

Werden CD Versuche bei unterschiedlichen Spannungsniveaus (Anfangsspannung $p_{\text{ini}} = 100 \text{ kPa}$ bzw. $p_{\text{ini}} = 300 \text{ kPa}$) mit derselben Anfangsporenzahl ($e_{\text{ini}} = 0.55$) simuliert, erhält man die Ergebnisse in Abbildung 18. Obwohl beide Bodenproben dieselbe Anfangsporenzahl haben, ist die Probe mit der Anfangsspannung $p_{\text{ini}} = 100 \text{ kPa}$ per Definition „dicht“ ($e_{\text{ini}} < e_c$), die Probe mit der Anfangsspannung $p_{\text{ini}} = 300 \text{ kPa}$ per Definition „locker“ ($e_{\text{ini}} > e_c$), vgl. Abbildung 18 (a). Damit sind die Begriffe der Pyknotropie und der Barotropie (Einfluss des Spannungsniveaus) untrennbar miteinander verknüpft. Denn auch hier gilt: die dichte Probe muss sich auflockern, um in den kritischen Zustand zu gelangen, die lockere Probe muss sich verdichten, um in den kritischen Zustand zu gelangen, siehe Abbildungen 18 (a) und 18 (c). Die Probe mit dem höheren Spannungsniveau (Anfangsspannung $p_{\text{ini}} = 300 \text{ kPa}$) erreicht eine höhere maximale Deviatorspannung q_{max} als die Probe mit dem geringeren Spannungsniveau ($p_{\text{ini}} = 100 \text{ kPa}$), siehe Abbildung 18 (b). Wird nun die Deviatorspannung mit dem mittleren Druck p normiert, sieht man wieder, dass das maximale Spannungsverhältnis q/p und der Peakreibungswinkel für die dichte Probe größer als für die lockere Probe sind, siehe Abbildung 18 (d).

4 Barodesie für Ton

Die Grundstruktur ist:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = c_3 \|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot (f\mathbf{R}^0 + g\boldsymbol{\sigma}^0) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (28)$$

Mit der $\mathbf{R}$ -Funktion werden proportionale Spannungspfade berechnet [7, 9]:

$$\mathbf{R} = -\exp(\alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) \quad (29)$$

Abbildung 17: Pyknotropie (Einfluss der Lagerungsdichte): dränierte Triaxialversuche mit derselben Ausgangsspannung ($p_{\text{ini}} = 200$ kPa) werden zu verschiedenen Anfangsporenzahlen ($e_{\text{ini}} = 0.5$ und $e_{\text{ini}} = 0.6$) abgesichert. Die Festigkeit q_{max} und der maximal mobilisierbare Reibungswinkel sind für die dichte Probe größer. Das Verhalten von Weald Ton wird mit der Barodesie simuliert. (a) Durch Auflockerung der dichten ($e_{\text{ini}} < e_c$) Probe und durch Verdichtung der lockeren ($e_{\text{ini}} > e_c$), wird der kritische Zustand erreicht. (b) Deviatorspannung vs. Axialstauchung. (c) Dilatantes und kontraktantes Verhalten. (d) Normierte Spannungen q/p über Axialstauchung. *Pyknotropy (influence of relative density): Drained triaxial tests with the same initial stress state are simulated with different initial void ratios. The strength q_{max} and the maximum mobilized friction angles are higher for the dense sample.*

Abbildung 18: Barotropie (Einfluss des Spannungsniveaus): Dränierte Triaxialversuche (CD) mit der selben Anfangsporenzahl ($e_{ini} = 0.55$) werden zu verschiedenen Anfangsspannungen ($p_{ini} = 100$ kPa und $p_{ini} = 300$ kPa) abgesichert. Der maximal mobilisierbare Reibungswinkel ist (bei gleicher Anfangsporenzahl) für die Probe mit kleinerer Laststufe zu erreichen. Weald Ton wird mit der Barodesie simuliert. (a) Die dichte ($e_{ini} < e_c$) Probe muss sich auflockern, um in den kritischen Zustand zu gelangen, die lockere ($e_{ini} > e_c$) Probe muss sich verdichten, um in den kritischen Zustand zu gelangen. (b) Deviatorspannung vs. Axialstauchung. (c) Dilatantes und kontraktantes Verhalten. (d) Normierte Spannungen q/p . *Barotropy (influence of stress level): Drained triaxial tests with the same initial void ratio are simulated at different initial stresses. The maximum mobilized friction angle is obtained for the sample with the lower initial stress state.*

Die skalare Funktion in Gl. (14) lautet:

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{\ln K}{\sqrt{3/2 - (\text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0)^2/2}} \quad (30)$$

$$K = 1 - \frac{1}{1 + c_1(m - c_2)^2} \quad , \quad m = \frac{-3\text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0}{\sqrt{6 - 2(\text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0)^2}} \quad (31)$$

Mit den Gln. 14 - 31 enthält die Barodesie eine Spannungs-Dilatanz Beziehung und berücksichtigt folgendes:

- Unter hydrostatischer Kompression ist der mobilisierte Reibungswinkel $\varphi_m = 0^\circ$
- Unter ödometrischer Kompression folgt die **R**-Funktion der Beziehung von Jáky mit $K_0 = 1 - \sin \varphi_c$, vgl. Abbildung 8.
- Im kritischen Zustand ist der mobilisierte Reibungswinkel gleich dem kritischen Reibungswinkel φ_c .
- Die **R**-Funktion liefert ähnliche Ergebnisse wie die Beziehung für proportionale Pfade von Chu und Lo [24].
- Alle Spannungspfade sind auf den Druckbereich beschränkt. Zugspannungen werden nicht erreicht.

Die skalaren Größen f und g beinhalten die aktuelle und die kritische Porenzahl:

$$f = c_6 \cdot \beta \cdot \text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0 - \frac{1}{2} \quad (32)$$

$$g = (1 - c_6) \cdot \beta \cdot \text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0 + \left(\frac{1 + e}{1 + e_c} \right)^{c_5} - \frac{1}{2} \quad (33)$$

$$\text{mit} \quad e_c = \exp \left(N - \lambda^* \ln \frac{2p}{\sigma^*} \right) - 1 \quad (34)$$

$$\text{und} \quad \beta = -\frac{1}{c_3 \Lambda} + \frac{1}{\sqrt{3}} 2^{c_5 \lambda^*} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (35)$$

$$\text{mit} \quad \Lambda = -\frac{\lambda^* - \kappa^*}{2\sqrt{3}} \text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0 + \frac{\lambda^* + \kappa^*}{2} \quad (36)$$

Der Term $\left(\frac{1+e}{1+e_c} \right)^{c_5}$ in Gl. (33) definiert einen Abstand der aktuellen zur kritischen Porenzahl. Damit wird die aktuelle Überkonsolidierung über eine relative Lagerungsdichte festgelegt. Von Druck und Porenzahl abhängige Peakzustände und Steifigkeiten können so realistisch abgeschätzt werden. Ist unter volumentreuer Deformation ($\text{tr} \dot{\mathbf{e}} = 0$) $e = e_c$, wird $f + g = 0$ (Gln. 32 und 33). Damit verschwindet im kritischen Zustand die Spannungsrate, d.h. $\dot{\sigma} = 0$.

Die Gln. 35 und 36 sorgen u.a. dafür, dass normalkonsolidierter Boden unter hydrostatischer Kompression der sog. *Normal Compression Line* folgt: λ^* ist dann der maßgebende Steifigkeitsparameter, vgl. Abbildung 19 (a). Für die hydrostatische Entlastung ist κ^* der maßgebende Parameter, vgl. Abbildung 19 (a). Die Parameter $c_1 - c_6$ sind Konstanten, die aus den vier Materialparametern φ_c , λ^* , κ^* und N bestimmbar sind, vgl. Tabellen 1 und 2. Für weitere Details zu der mathematischen Formulierung wird auf [22] verwiesen.

4.1 Kalibrierung der Barodesie für Ton

Vier Bodenparameter (φ_c , N , λ^* und κ^*) sind notwendig, um die Barodesie für Ton in ihrer Grundform zu kalibrieren. Dafür ist theoretisch ein konsolidierter, undrännierter Triaxialversuch ausreichend: Aus der Konsolidierung im CU Versuch (hier: Be- und Entlastung) erhält man die Parameter N , λ^* und κ^* , vgl. Abbildung 19 (a). Der kritische Reibungswinkel φ_c lässt sich nach dem Abscheren des CU Versuchs kalibrieren, vgl. Abbildung 20 (a). In Tabelle 1 sind die Parameter für drei Tonarten zusammengefasst. Die Konstanten in Tabelle 2 können aus φ_c , N , λ^* und κ^* berechnet werden.

Tabelle 1: Critical state soil mechanics Parameter für die Kalibrierung der *Barodesie für Ton*

Material	φ_c	N	λ^*	κ^*	Parameter aus
London Ton	22.6°	1.375	0.11	0.016	[36]
Dresden Ton	35°	0.622	0.038	0.008	[8]
Weald Ton	24°	0.8	0.059	0.018	[41]

Tabelle 2: Berechnung der Konstanten $c_1 - c_6$ aus $\varphi_c, N, \lambda^*, \kappa^*$.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{2\sqrt{2/3} \ln K_c - 2 \ln K_0}{1 - \frac{2}{(-1-\sqrt{2})^2}} \\
 c_2 &= \ln K_0 + \frac{c_1^2}{(-1-\sqrt{2})^2} \\
 c_3 &= \frac{-\sqrt{3}/\lambda^* + \sqrt{3}/\kappa^*}{2^{c_5 \lambda^*} + \left(\frac{1}{500}\right)^{c_5 \lambda^*} - 2} \\
 c_4 &= 1 \\
 c_5 &= \frac{1}{K_c} \\
 c_6 &= \frac{1}{2 \left(\frac{-\sqrt{3}}{c_3 \kappa^*} + 2^{c_5 \lambda^*} - 1 \right)} \\
 K_c &= \frac{1 - \sin \varphi_c}{1 + \sin \varphi_c} \\
 K_0 &= \frac{9 - 7 \sin \varphi_c}{9 + 5 \sin \varphi_c}
 \end{aligned}$$

(a)

(b)

Abbildung 19: Isotroper Kompressionsversuch, abgeändert aus [7]: Kalibrierung von N , λ^* und κ^* ; Experimente mit Dresden Ton von Bergholz [27] bezeichnet mit CD 02 und Simulationen mit der Barodesie. Normalkonsolidierter Ton folgt unter hydrostatischer Kompression der sog. *Normal Compression Line* (NCL, graue Linie) (a) $\ln p$ - $\ln(1 + e)$ Darstellung: e_0 ist die Porenzahl e bei $p = 1$ kPa. (b) e - p Darstellung. *Isotropic Compression Test: Calibration of N , λ^* and κ^* ; Experimental data of Dresden clay [27] (CD 02) and simulations with barodesy. Normally consolidated clay follows the so-called Normal Compression Line (NCL, grey line)*

4.2 Barotropie und Pyknotropie für proportionale Pfade

Die Hypothesen von Goldscheider verknüpfen einen Attraktor (prop. Spannungspfad) mit einer dazugehörenden Deformation (prop. Verzerrungspfad): Unabhängig vom Ausgangsspannungszustand nähert sich ein Spannungspfad einem proportionalen Spannungspfad *asymptotisch* an (wenn die Probe mit einem proportionalen Verzerrungspfad deformiert wird).

Diese Attraktorwirkung wird in der Barodesie durch eine direkte Verknüpfung des Deformationsgradienten mit der Richtung des Spannungspfades über die $\mathbf{R}$ -Funktion erreicht. Diese Funktion ist in Gl. (14) nur von der Deformationsrichtung abhängig. Für undrained Triaxialversuche folgt daraus, dass der Spannungspfad im p - q Diagramm immer unterhalb der Critical State Line bleibt. Tatsächlich wird diese aber bei dichten Proben überschritten, d.h. der maximal mobilisierbare Reibungswinkel ist größer als der kritische, vgl. Abbildung 20. Weiters folgt in der Barodesie, dass der K_0 -Wert unabhängig von der Dichte des Bodens ist. Diese widerspricht experimentellen Ergebnissen, die darauf hindeuten, dass K_0 von der Porenzahl oder dem Druck oder von beidem abhängt. [39, 42–49]. In [12] wird eine mögliche Änderung der $\mathbf{R}$ -Funktion vorgeschlagen, um diesen Defekt der Barodesie zu beheben. Hier wird eine alternative Möglichkeit vorgeschlagen, die besser zur Formulierung in Gl. (14) passt, und darüber hinaus die Attraktoren der Barodesie erhält. Das bedeutet insbesondere, dass die Beziehung nach Chu und Lo immer noch unabhängig von der Porenzahl modelliert wird. Mit der Erweiterung können stark überkonsolidierte undrained Versuche besser abgebildet werden, vgl. Abbildung 20 (b). In einer Simulation eines Ödometersversuchs kommt es mit der Erweiterung für dichte bzw. stark überkonsolidierte Böden zu einem lokalen Minimum von K_0 , das anschließend wieder auf $K_0 = 1 - \sin \varphi_c$ ansteigt, vgl. Abbildung 21 (b).

In der Erweiterung ändert sich α in Gl. (30) zu:

$$\alpha = \frac{\ln K}{\sqrt{3/2 - (\text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0)^2/2}} \left(\frac{p_a}{p} \right)^{c_7} \quad (37)$$

$$\text{mit } p_a = \exp \left(\frac{N - \ln(1+e)}{\lambda^*} \frac{p}{p_e} \right) \text{ und } \frac{p}{p_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0 / \lambda^* + c_3 - c_3 \text{tr} \dot{\mathbf{e}}^0 \beta}{c_3} \right)^{\frac{1}{\lambda^* c_5}}$$

Kalibrierung Die Konstante c_7 in Gl. (37) kann an einem dichten/stark überkonsolidierten CU Versuch folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$c_7 = \frac{\ln \left(\frac{\ln K_a}{\ln K_c} \right)}{\ln(p_c/p_{\text{peak}})} \quad (38)$$

Mit dem maximal mobilisierbaren Reibungswinkel (Peakreibungswinkel φ_p) lässt sich $K_a = \frac{1 - \sin \varphi_p}{1 + \sin \varphi_p}$ abschätzen, p_{peak} ist der mittlere Druck im Peak, $K_c = \frac{1 - \sin \varphi_c}{1 + \sin \varphi_c}$ folgt aus dem kritischen Reibungswinkel und $p_c = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{N - \ln(1+e)}{\lambda^*} \right)$. Mit der hier vorgestellten Erweiterung zur Berücksichtigung von Pyknotropieeffekten für proportionalen Pfaden erhöht sich die Anzahl der Parameter von vier auf fünf.

4.3 Barodesie für Sand

Es gibt auch die Versionen der Barodesie für Sand [5, 6], auf die hier nicht näher eingegangen wird. Die Sand- und Tonversionen unterscheiden sich im Wesentlichen nur in der speziellen Wahl von f und g .

4.4 Grenzen der Barodesie

Die Barodesie kann monotone Be- und Entlastungspfade beschreiben. Da im Modell nur die Porenzahl, die effektive Spannung und die Verzerrungsrate berücksichtigt werden, kann die Verformungsgeschichte nicht

Abbildung 20: Undrained triaxiale Kompression von Weald Ton (nach Mašín [41] mit Daten von Parry [50]) und Simulationen mit der Barodesie. Die Anfangsporenzahlen der normal- und stark überkonsolidierten Probe sind $e_{ini} = 0.622$ und $e_{ini} = 0.572$. (a) Simulation mit der Barodesie [7]. (b) α in der $\mathbf{R}$ -Funktion wird mit Gl. (37) ersetzt. *Undrained triaxial compression of Weald clay and simulations with barodesy. The initial void ratios of the normally and heavily overconsolidated sample are $e_{ini} = 0.622$ and $e_{ini} = 0.572$. (a) Simulation with barodesy [7]. (b) α in the $\mathbf{R}$ -function is replaced by equation (37).*

Abbildung 21: Ödometerversuch: Simulation mit (durchgezogene Linie) und ohne (gepunktete Linie) Erweiterung nach Gl. (38). Weald Ton mit einem anfänglichen Überkonsolidierungsverhältnis von 3 wird simuliert. *Oedometric compression test: Simulation with (solid line) and without (dotted line) the extension according to eq. (38). Weald clay with an initial overconsolidation ratio of 3 is simulated.*

vollständig abgebildet werden. Die Beschreibung des hysteretischen Verhaltens bei zyklischen Belastungspfaden ist dann problematisch (sog. *Ratcheting-Effekte* treten auf). Außerdem beschränkt sich das Modell, und die darin zugrundegelegten Hypothesen, auf Spannungen unterhalb des Bereichs in dem Kornbruch eintritt. In der hier vorgestellten Version der Barodesie werden keine Rateneffekte berücksichtigt.

4.5 Praktische Anwendungen

Für die Finite-Elemente Programme Plaxis und Abaqus sind Unterprogramme zur Verwendung der Barodesie [7] auf der Plattform SoilModels [51] frei verfügbar. FE Anwendungen mit der Barodesie wurden von Schneider-Muntau et al. [52–54] und Bode [55] durchgeführt. Die Kalibrierungssoftware *Automatic calibration software ExCalibre*, die ebenfalls auf der SoilModels [51] Projekt-Website verfügbar ist, wurde für hypoplastische Modelle [41, 56] entwickelt. Die Parameter φ_c , N , λ^* und κ^* können mit dieser Software kalibriert und für die Barodesie übernommen werden.

Vergleich der Barodesie mit anderen Modellen Es ist gängige Praxis mit dem Materialmodell nach Mohr-Coulomb (linear-elastisch, ideal plastisch mit Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb) zu rechnen, welches das Spannungs-Dehnungs Verhalten des Bodens bilinear abbildet. Grundlegende bodenmechanische Eigenschaften wie die Druckabhängigkeit der Steifigkeit und Phänomene wie Entfestigung und Verflüssigung können damit nicht abgebildet werden, vgl. [57]. Außerdem ist die Kalibrierung schwieriger als gemeinhin angenommen, z.b. muss für dichten Boden ein anderer Parametersatz verwendet werden als für den selben Boden im lockeren Zustand. Die Kalibrierung deckt auch nur einen bestimmten Spannungsbereich ab. Ändert sich – wie etwa bei einer Grundbruchberechnung – der Spannungszustand stark, kann der vorab gewählte Parametersatz nicht mehr maßgebend für die Problemstellung sein. Auch fortgeschrittenere elastoplastische Modelle wie das Hardening Soil Modell berücksichtigen die Porenzahl nicht als Zustandsgröße

und unterscheiden in der Kalibrierung zwischen lockerem und dichtem Boden.

Das Modified Cam Clay Modell, das - wie die Barodesie - Konzepte der Critical State Soil Mechanics beinhaltet, überschätzt im Gegensatz zur Barodesie und Hypoplastizität Peakfestigkeiten für stark überkonsolidierte Böden.

Die Hypoplastizität nach Mašín [41] und die Barodesie [7] haben gewisse mathematische Ähnlichkeiten. Beiden Modelle liegt dasselbe Konzept der Critical State Soil Mechanics zugrunde, weshalb beide Modelle ähnliche Ergebnisse liefern.

5 Zusammenfassung

Die konzeptionellen Ideen der Barodesie basieren auf bodenmechanischen Theorien. Es wurde gezeigt, dass sich komplexe tensorielle Zusammenhänge der Barodesie eindimensional erklären bzw. durch einfache Vektordarstellungen im Hauptspannungsraum abbilden lassen. Damit wird die Grundstruktur der Barodesie, die sich aus den zwei Hypothesen von Goldscheider und der Beziehung nach Janbu/Ohde herleiten lässt, verständlich.

Die Hypothesen von Goldscheider sind für Sand und Ton gültig. Bei der Ausformulierung der skalaren Funktionen f und g wurde in diesem Beitrag im Detail auf die Barodesie für Ton eingegangen. Es wurde gezeigt, wie Bestandteile aus der Tontheorie wie die *Normal Compression Line* und die *Critical State Line* in der Struktur des Modells integriert werden. Mit der Berücksichtigung der aktuellen Porenzahl und der aktuellen Spannung, können viele bodenmechanische Phänomene – wie Barotropie und Pyknotropie – beschrieben werden.

Um die Qualität eines Modells beurteilen zu können, muss es nachvollziehbar sein. Interpretierbare Ergebnisse werden in der Regel mit einer klaren mathematischen Formulierung erzielt. Eine nachvollziehbare und modulare Struktur – wie in der Barodesie – bietet Potenzial zur weiteren Verbesserung und lässt auch die Grenzen des Modells abschätzen.

Forschung auf dem Gebiet der Materialmodellierung schafft nicht nur neue Modelle, sondern hilft dabei das Bodenverhalten zu verstehen und damit zu beurteilen, in welchen Fällen Annahmen und Vereinfachungen zulässig sind.

Danksagung

Dieser Text wurde durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung an G. Medicus finanziert (Austrian Science Fund (FWF): P 28934-N32).

Literatur

- [1] FELLIN, W. (2000) Hypoplastizität für Einsteiger. In: *Bautechnik* 77, Nr. 1, S. 10–14. – doi 10.1002/bate.200000030. –
- [2] FELLIN, W. ; KOLYMBAS, D. (2002) Hypoplastizität für leicht Fortgeschrittene. In: *Bautechnik* 79, Nr. 12, S. 830–841. – doi 10.1002/bate.200205940. –
- [3] KOLYMBAS, D. (2000) *Introduction to Hypoplasticity*. Balkema, Rotterdam, (Advances in Geotechnical Engineering and Tunnelling 1)
- [4] MEDICUS, G. ; FELLIN, W. ; SCHRANZ, F. (2018) *Konzepte der Barodesie - Ergänzungen*. <http://resolver.obvsg.at/urn:nbn:at:at-ubi:3-3068>.
- [5] KOLYMBAS, D. (2009) Sand as an archetypical natural solid. In: KOLYMBAS, D. (Hrsg.) ; VIGGIANI, G. (Hrsg.): *Mechanics of Natural Solids*, Springer: Berlin, S. 1–26

-
- [6] KOLYMBAS, D. (2015) Introduction to barodesy. In: *Géotechnique* 65, S. 52–65(13). – doi 10.1680/geot.14.P.151
 - [7] MEDICUS, G. ; FELLIN, W. (2017) An improved version of barodesy for clay. In: *Acta Geotechnica* 12, Nr. 2, 365–376. – doi 10.1007/s11440–016–0458–4. –
 - [8] MEDICUS, G. ; FELLIN, W. ; KOLYMBAS, D. (2012) Barodesy for Clay. In: *Géotechnique Letters* 2, S. 173–180. – doi 10.1680/geolett.12.00037
 - [9] MEDICUS, G. ; KOLYMBAS, D. ; FELLIN, W. (2016) Proportional stress and strain paths in barodesy. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 40, Nr. 4, 509–522. – doi 10.1002/nag.2413. –
 - [10] KOLYMBAS, D. ; MEDICUS, G. (2016) Genealogy of hypoplasticity and barodesy. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 40, Nr. 18, 2532–2550. – doi 10.1002/nag.2546. –
 - [11] FELLIN, W. ; OSTERMANN, A. (2013) The critical state behaviour of barodesy compared with the Matsuoka–Nakai failure criterion. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 37, Nr. 3, S. 299–308. – doi 10.1002/nag.1111
 - [12] FELLIN, W. (2013) Extension to barodesy to model void ratio and stress dependency of the K_0 value. In: *Acta Geotechnica* 8, Nr. 5, S. 561–565. – doi 10.1007/s11440–013–0238–3. –
 - [13] GURTIN, M. ; SPEAR, K. (1983) On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor. In: *International Journal of Solids and Structures* 19, S. 437–444
 - [14] OHDE, J. (1939) Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund. In: *Der Bauingenieur* 20, S. 451–459
 - [15] JANBU, N.: Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests. In: *Proceedings of the European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*
 - [16] MUIR WOOD, D. (2009) *Soil Mechanics: A One-Dimensional Introduction*. Cambridge University Press
 - [17] In: SOOS, P. v. ; ENGEL, J. (2017) *Eigenschaften von Boden und Fels – ihre Ermittlung im Labor, in GRUNDBAU-TASCHENBUCH: Teil 1: Geotechnische Grundlagen*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany. – S. 139–242
 - [18] BUTTERFIELD, R. (1979) A natural compression law for soils (an advance on e -log p'). In: *Géotechnique* 29, Nr. 4, S. 469 – 480
 - [19] HENKEL, D.J. (1956) The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear. In: *Géotechnique* 6, S. 139–150
 - [20] GUDEHUS, G. (1979) Attractors, percolation thresholds and phase limits of granular soils. In: BEHRINGER (Hrsg.) ; JENKINS (Hrsg.): *Powder and Grains*, S. 169–183
 - [21] GUDEHUS, G. (1980) Materialverhalten von Sand: Neuere Erkenntnisse. In: *Bauingenieur* 55, S. 57–67
 - [22] MEDICUS, G. (2014) *Barodesy and its application for clay* [Dissertation], University of Innsbruck. <http://diglib.uibk.ac.at/ulbtirolhs/download/pdf/197236>
 - [23] GOLDSCHIEDER, M. (1976) Grenzbedingung und Fließregel von Sand. In: *Mechanics Research Communications* 3, S. 463–468
 - [24] CHU, J. ; LO, S.-C. R. (1994) Asymptotic behaviour of a granular soil in strain path testing. In: *Géotechnique* 44, Nr. 1, S. 65–82

-
- [25] TOPOLNICKI, M. (1987) *Observed stress-strain behaviour of remoulded saturated clay and examination of two constitutive models* [Dissertation], Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe (No. 107)
 - [26] TOPOLNICKI, M. ; GUDEHUS, G. ; MAZURKIEWICZ, B.K (1990) Observed stress-strain behaviour of remoulded saturated clays under plane strain conditions. In: *Géotechnique* 40, Nr. 2, S. 155–187. – doi 10.1680/geot.1990.40.2.155
 - [27] BERGHOLZ, K. (2009) *Experimentelle Bestimmung von nichtlinearen Spannungsgrenzbeziehungen* [Diplomarbeit], Technische Universität Dresden
 - [28] BERGHOLZ, K. ; HERLE, I. (2017) Experimentelle Bestimmung der Nichtlinearität von Spannungsgrenzbedingungen im Bereich geringer Spannungen. In: *geotechnik* 40, Nr. 2, 119–125. – doi 10.1002/ge-te.201600008. –
 - [30] TAYLOR, D. (1948) *Fundamentals of soils mechanics*. John Wiley & Sons, New York
 - [31] ROWE, P.W. (1962) The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* Bd. 296, S. 500–527
 - [32] MUIR WOOD, D. (1990) *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge University Press
 - [33] DESRUES, J. ; ZWESCHPER, B. ; VERMEER, P.A. (2000) Database for Tests on Hostun RF Sand / Institute for Geotechnical Engineering, University of Stuttgart. – Forschungsbericht
 - [34] ROSCOE, K. H. ; SCHOFIELD, A. N. ; WROTH, C. P. (1958) On The Yielding of Soils. In: *Géotechnique* 8, Nr. 1, 22–53. – doi 10.1680/geot.1958.8.1.22
 - [36] MAŠÍN, D. (2005) A hypoplastic constitutive model for clays. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 29(4), S. 311–336
 - [37] ROSCOE, K.H. ; BURLAND, J.B. (1968) On the generalised stress-strain behaviour of wet clay. In: HEYMAN, J. (Hrsg.) ; LECKIE, F.A. (Hrsg.): *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press: Cambridge, S. 535–609
 - [38] GAJO, A. ; MUIR WOOD, D. (1999) Severn-Trent Sand: a kinematic-hardening constitutive model: the q-p formulation. In: *Géotechnique* 49, Nr. 5, S. 696–614
 - [39] BAUER, E. (1996) Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. In: *Soils and Foundations* 36, Nr. 1, S. 13–26
 - [40] LADE, P. V. (2000) Effects of Consolidation Stress State on Normally Consolidated Clay. In: RATHMAYER, H. (Hrsg.): *Proceedings of NGM-2000: XIII Nordiska Geoteknikermötet: Helsinki, Finland*, Building Information Ltd.
 - [41] MAŠÍN, David (2013) Clay hypoplasticity with explicitly defined asymptotic states. In: *Acta Geotechnica* 8, Nr. 5, S. 481–496. – doi 10.1007/s11440-012-0199-y. –
 - [42] BAUER, E. (1992) *Zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe unter vorwiegend ödometrischer Beanspruchung* [Dissertation], Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe (Vol. 130)
 - [43] CHU, J. ; GAN, C.L. (2004) Effect of void ratio on K_0 of loose sand. In: *Géotechnique* 54, Nr. 4, S. 285–288

-
- [44] GUO, P. (2010) Effect of density and compressibility on K_0 of cohesionless soils. In: *Acta Geotechnica* 5, Nr. 4, S. 225–238
 - [45] KOLYMBAS, D. ; BAUER, E. (1993) Soft oedometer — A new testing device and its application for the calibration of hypoplastic constitutive laws. In: *Geotechnical Testing Journal* 16, Nr. 2, S. 263–270
 - [46] LIRER, S. ; FLORA, A. ; NICOTERA, M. V. (2011) Some remarks on the coefficient of earth pressure at rest in compacted sandy gravel. In: *Acta Geotechnica* 6, Nr. 1, S. 1–12
 - [47] MATSUOKA, H. ; NAKAI, T. (1974) Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. In: *Proceedings of JSCE 1974* Bd. 232, S. 59–74
 - [48] TALESNICK, M.L. (2012) A different approach and result to the measurement of K_0 of granular soils. In: *Géotechnique* 62, Nr. 11, S. 1041–1045. – doi 10.1680/geot.11.P.009
 - [49] WU, W. ; BAUER, E. ; KOLYMBAS, D. (1996) Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. In: *Mechanics of Materials* 23, Nr. 1, S. 45–69
 - [50] PARRY, R.H.G (1960) Triaxial Compression and Extension Tests on Remoulded Saturated Clay. In: *Géotechnique* 10, Nr. 4, S. 166–180
 - [51] GUDEHUS, G. ; AMOROSI, A. ; GENS, A. ; HERLE, I. ; KOLYMBAS, D. ; MAŠÍN, D. ; MUIR WOOD, D. ; NOVA, R. ; NIEMUNIS, A. ; PASTOR, M. ; TAMAGNINI, C. ; VIGGIANI, G. (2008) The soilmodels.info project. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 32, S. 1571–1572
 - [52] SCHNEIDER-MUNTAU, B. ; BATHAEIAN, S. M. I. (submitted 2018) Simulation of Settlement and Bearing Capacity of Shallow Foundations with Soft PArticle Code (SPARC) and FE. In: *International Journal of Geomathematics*
 - [53] SCHNEIDER-MUNTAU, B. ; CHEN, C.-H. ; BATHAEIAN, S. M. I. (2017) Simulation of shear bands with Soft PArticle Code (SPARC) and FE. In: *GEM - International Journal on Geomathematics* 8, Nr. 1, 135–151. – doi 10.1007/s13137-016-0091-2. –
 - [54] SCHNEIDER-MUNTAU, B. ; MEDICUS, G. ; FELLIN, W. (2018) Strength reduction method in Barodesy. In: *Computers and Geotechnics* 95, 57 - 67. – doi 10.1016/j.compgeo.2017.09.010. –
 - [55] BODE, M. (2017) *Anwendungen der Barodesie für Ton bei Finite-Elemente Berechnungen* [Diplomarbeit], Universität Innsbruck
 - [56] WOLFFERSDORFF, P.-A. von (1996) A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. In: *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1 1, S. 251–271
 - [57] KOLYMBAS, D. ; FELLIN, W. ; SCHNEIDER-MUNTAU, B. ; MEDICUS, G. ; SCHRANZ, Fabian (2016) Zur Rolle der Materialmodelle beim Standsicherheitsnachweis. In: *geotechnik* 39, Nr. 2, 89-97. – doi 10.1002/gete.201600017