Zur Rolle der Materialmodelle beim Standsicherheitsnachweis On the Role of Constitutive Models in Simulation of Limit State

Dimitrios Kolymbas, Wolfgang Fellin, Barbara Schneider-Muntau,
Gertraud Medicus, Fabian Schranz

Zusammenfassung

Die Ansicht, dass für die numerische Simulation von geotechnischem Versagen das Materialmodell keine wesentliche Rolle spielt, wird kritisch erörtert. Auf Grund von Literaturhinweisen und eigenen Untersuchungen wird gezeigt, dass das Materialmodell durchaus eine Rolle spielen kann. Es ist daher fundiertes Fachwissen über die Materialmodelle erforderlich. Eine a priori Außerachtlassung von Materialmodellen bei Standsicherheitsnachweisen sollte vermieden werden.

Abstract

This paper challenges the critical perception that constitutive models play no important role in numerical simulation of geotechnical collapses. Contrary to this conventional perception, the role of constitutive models in collapse simulations is investigated and highlighted by means of published results and own research. This shows that application of constitutive models in numerical investigations of limit states demands a profound knowledge of them.

1 Einleitung

In den Empfehlungen des Arbeitskreises für Numerik in der Geotechnik - EANG [6], Seite 60, Absatz 2.6.3.2 „Stoffmodelle für Standsicherheitsberechnungen“, steht, dass die Standsicherheit nur wenig von der Wahl des Stoffmodells abhängt. Im vorliegenden Aufsatz wird untersucht, in wie fern diese Aussage gerechtfertigt ist. Sie ist nämlich gut begründet, klingt aber recht überraschend, wird doch immer wieder betont, dass es mit der allmählichen Verbesserung von numerischen Verfahren und Computerleistung nunmehr hauptsächlich auf die Wahl eines geeigneten Stoffmodells ankommt. Als kritisch sehen wir vor allem, was die Aussage eventuell bei wenig versierten Leserinnen und Lesern auslösen kann. Die in den EANG [6] erwähnte Feststellung, dass das klassische elastisch-ideal-plastische Modell mit einer Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb (hier kurz MC-Modell) ausreichend ist, gemeinsam mit dem Text „Für Baugruben und Böschungen zeigt sich aufgrund der relativ geringen Behinderung der Verformungen nur ein vernachlässigbarer Einfluss des Dilatanzwinkels auf die Standsicherheit, ...“ [6, S. 60] (siehe dazu auch [5]) kann leicht dazu verführen, das MC-Modell immer unreflektiert zu verwenden. Ein wesentlicher Grund für die zu beobachtende große Akzeptanz solcher stark vereinfachten Aussagen mag sein, dass die Dichotomie zwischen Verformungsproblemen und Standsicherheitsnachweisen in der Geotechnik eine lange Tradition hat. Hatte man zunächst in der Geotechnik nur Standsicherheitsprobleme betrachtet (unter Heranziehung einer wie auch immer definierten Sicherheit), so hat man sich erst relativ spät auf Verformungsprobleme eingelassen, immer mit dem Vorbehalt, dass hierbei die Treffsicherheit der Modellierung geringer als bei Standsicherheitsnachweisen ist. Diese Dichotomie wird auch in der Lehre konsequent umgesetzt.

Die Forschung hat sich zunächst auf das Ereignis „Bruch“ oder „Versagen“ fixiert und versucht, es mit diversen Festigkeitshypothesen zu erfassen. Die Verformungen hat man lange mit

der Elastizitätstheorie zu berechnen versucht und mit dem Aufkommen von Theorien zur Elastoplastizität fing man an einzusehen, dass das Versagen nichts anderes als eine besondere Verformung ist. Aber auch die Elastoplastizitätstheorien haben insinuiert, dass das Versagen genau bei Erreichen von bestimmten Spannungszuständen eintritt. Ignoriert wird dabei, dass das Versagen von Feststoffen eher ein Prozess als ein Zustand ist, der schwer zu erfassen ist, da er auch mit dem Versagen von numerischen und experimentellen Methoden einhergeht. Ein Ausdruck der „Trivialisierung“ des Versagens ist der Begriff der Grenzzustandsgleichung, der in der Normung Eingang gefunden hat. Die Trivialisierung besteht darin, dass man glaubt, dass das Versagen durch eine *algebraische Gleichung* zu erfassen ist. Dies mag für Zustände, jedoch nicht für Prozesse möglich sein. Dass das Versagen eher ein Prozess als ein singuläres Ereignis ist, wurde übrigens durch die Einführung des Begriffs des progressiven Bruches [25, S. 98] berücksichtigt, welcher aber kaum weiter verfolgt wurde.

In der Finite-Elemente-Praxis wird gerne die φ' - c' -Reduktion eingesetzt, bei welcher man sich an den Grenzzustand durch Reduktion der Werte φ' und c' herantastet. Man erhält dadurch Lokalisierungen der Verformung in dünnen Bereichen, die man durchaus mit „hergebrachten“ Gleitkreisen vergleichen kann. Im Vergleich zu den kinematischen Methoden (Gleitkreise und andere Starrkörperbruchmechanismen) bietet die Finite-Elemente-Methode eine halbwegs globale Erfüllung der maßgebenden Gleichungen, es muss aber betont werden, dass die Anwendung der sogenannten *strength reduction method* keineswegs eindeutige Ergebnisse liefert. Die mit solchen Methoden erhaltene Sicherheit hängt stark von der konkreten Anwendung der Reduktion der einzelnen Materialparameter ab, siehe z.B. [7, 29]. Auf jeden Fall zeigt die φ' - c' -Reduktion, dass die vorerwähnte Dichotomie zwischen Verformungs- und Standsicherheitsproblemen unhaltbar ist: Mit einem, für die entsprechende Problemstellung, nicht geeigneten Materialmodell, erhält man falsche Spannungspfade zum Grenzzustand und somit unzutreffende Spannungszustände beim Versagen. Dies trifft insbesondere auf undrainierte Verhältnisse zu und war auch die Hauptursache für die Überschätzung der Standsicherheit beim Schadensfall Nicoll Highway (siehe Absatz 4.2.2). Übrigens ist die φ' - c' -Reduktion nur mit Materialmodellen einsetzbar, die eben diese Parameter explizit enthalten, wie z.B. das MC-Modell.

2 Die Natur des Versagens

Wir wollen uns hier auf das Versagen von Bodenproben bei Laborversuchen, insbesondere bei Triaxialversuchen beschränken. Phänomenologisch manifestiert sich das Versagen durch eine horizontale Tangente der Spannungsdehnungskurve (sog. Grenzzustand). Was dabei oft übersehen wird, ist dass man weder Spannungen noch Dehnungen direkt messen kann, es können nur Verschiebungen und Kräfte gemessen werden. Um daraus auf Spannungen und Dehnungen zu schließen, braucht man eine wesentliche Annahme, dass sich nämlich die Probe homogen deformiert, d.h. dass sie ihre zylindrische Form beibehält. Die Anschauung zeigt aber, dass in der Nähe des Grenzzustandes die Verformung inhomogen wird, die Probe wird ungleichmäßig deformiert, sie baucht aus (sog. Faß- oder Elefantenfußbildung) oder sie wird von Scherfugen durchzogen. Eine Weile hat man geglaubt, dass der Verlust der Homogenität auf störende Randeinflüsse zurückzuführen ist. Man hat daher versucht, die Reibung an den Probenenden durch Schmierung zu eliminieren und/oder die Proben gedrungener zu machen, man musste aber feststellen, dass die Inhomogenisierung nicht zu vermeiden ist. Später hat die Theorie gezeigt (siehe Abschnitt 2.2), dass die Inhomogenisierung unausweichlich ist, denn irgendwann im Verlauf eines Versuchs geht die sog. Kontrollierbarkeit verloren, d.h. man kann durch Aufprägen von Spannungen und Verschiebungen auf den Rand einer Probe nicht die Verteilung von Spannungen und Verformungen *innerhalb* der Probe erzwingen. Ist die Kontrollierbarkeit verloren, so kann die Probe – salopp formuliert – selber entscheiden, welche Verformung sie einschlägt. Oft „entscheidet“ sich die Probe für eine lokalisierte Verformung, die sich innerhalb dünner Scherfugen abspielt. Das Erscheinen von Scherfugen ist eine Art Musterbildung in einer ursprünglich gleichmäßigen Probe. Die Möglichkeit einer inhomogenen Probendeformation als Alternative zur bisher eingeschlagenen homogenen Deformation geht einher mit dem Verlust der Eindeutigkeit der Lösung des zugrunde liegenden Anfangsrandwertproblems und mit einer Verzweigung (Bi-

furkation) des Lösungspfads, wobei die danach gefundenen Lösungen netzabhängig sind. Man sieht also, dass die Versuche umso weniger aussagefähig werden, je näher man an den Grenzzustand kommt. Die Verzweigung der Deformation manifestiert sich in der Spannungsdehnungslinie in dem Sinne, dass sie durch einen Laborversuch nicht bis zum Peak verfolgt werden kann, da sie schon vorher durch das Eintreten der inhomogenen Deformation verfälscht wird.

Man kann das Versagen als eine Art Phasenübergang ansehen, der an einzelnen Keimen (etwa kleinen Fehlstellen) seinen Lauf nimmt und das Material von einem Feststoff in einen Stoff umwandelt, der fließen kann (allerdings nur in eine Richtung). Diese Vorstellung ist in der Bruchmechanik bereits adoptiert und bedingt auch, dass eine Grundfeste unserer numerischen Simulationen wackelt. Es handelt sich um die Annahme des *einfachen Stoffs*, welche hier besagt, dass die Größe einer Probe keine Rolle bei ihrem Spannungsdehnungsverhalten spielt. Tatsächlich wird aber beobachtet, dass größere Proben eine kleinere Festigkeit haben.

Eng verknüpft mit dem Versagen sind Verformungen, die klein oder groß ausfallen können. Ob diese Verformungen abrupt oder allmählich auftreten, d.h. ob sich das Material spröde oder duktil verhält, ist eine andere Frage.

2.1 Die Rolle der Dilatanz beim Versagen

Die EANG [6] legen nahe, dass die Dilatanz nur bei Behinderung der Verformung eine Rolle spielt. Es muss dazu aber angemerkt werden, dass der Unterschied zwischen peak- und kritischem Reibungswinkel eben auf die Dilatanz zurückzuführen ist, worauf zuerst Taylor hinwies [24]. Somit ist die Dilatanz immer wichtig, wenn es auf den Peakreibungswinkel und nicht auf den kritischen Reibungswinkel ankommt. Da die Dilatanz mit wachsendem Druckniveau unterdrückt wird, ist der Peakreibungswinkel stark druckabhängig („Barotropie“) und keine Stoffkonstante, wie das Versagenkriterium nach Mohr-Coulomb nahelegt. Man ersieht daran, dass das MC-Modell für Probleme mit stark variablem Druckniveau (etwa Pfähle, Grundbruch von Flachgründungen, Penetration [4]) wenig tauglich und nicht immer die beste Wahl ist.

2.2 Mathematisch-mechanische Beschreibung des Versagens

Wie wir oben gesehen haben, kann es vorkommen, dass man den Grenzzustand bei einem Experiment gar nicht erreichen kann, weil schon vorher eine Bifurkation eintritt und die Verformung inhomogen wird. Das heißt, dass das Versagen nicht durch Erreichen des Grenzzustandes sondern durch Inhomogenisierung der Deformation eintritt. Das zugrunde liegende mathematische Ereignis ist der Verlust der Eindeutigkeit der Lösung des betrachteten Anfangsrandwertproblems. Dies kann man auch als Verlust der *Kontrollierbarkeit* der Probenverformung durch Vorgabe von Verschiebungen und/oder Spannungen am Probenrand ansehen. Man hat gezeigt [19], dass dies mit dem Verschwinden des sog. *second order work* einhergeht. Es handelt sich dabei um die Größe $d^2W := d\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}$ bzw. $d^2W := \dot{\sigma}'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$, die als die zweite Variation der Verformungsarbeit $\int \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}$ an einem Volumenelement dV angesehen werden kann. Ob d^2W im Zuge eines Elementversuchs verschwinden kann, kann bei einem vorgegebenen Spannungszustand mit einem Stoffmodell untersucht werden. Dazu muss man für alle möglichen Verformungszinkremente $d\varepsilon_{ij}$ mit dem Stoffmodell die zugehörigen Spannungszinkremente $d\sigma'_{ij}$ ausrechnen und untersuchen, ob ihr Produkt positiv ist. Ist dies nicht der Fall, so kann bei diesem Spannungszustand eine inhomogene Verformung einsetzen.

2.3 Anfangsrandwertprobleme

Bei allgemeinen Anfangsrandwertproblemen werden keine homogenen Verformungsfelder erwartet. Der Verlust der Eindeutigkeit führt hier zu Problemen, die bis heute nicht zufriedenstellend gelöst worden sind. Dieser Verlust drückt sich bei der numerischen Simulation unter anderem dadurch aus, dass die Steifigkeitsmatrix singulär werden kann, d.h., es kann keine eindeutige Lösung des zugrundegelegten Gleichungssystems ermittelt werden. Man versucht dieses Problem dadurch zu umgehen, dass man zusätzliche Bedingungen einführt, welche die Eindeutigkeit wieder herstellen. Die hierfür eingesetzten Methoden (wie z.B. die Cosserat-Kontinua) werden

Regularisierungen genannt und stellen weitere, teilweise schwierig zu begründende Modellierungsannahmen dar.

3 Validieren von numerischen Simulationen des Versagens in der Geotechnik

3.1 Vergleich mit Messungen

Man kann die Geotechnik mit der Meteorologie vergleichen. Beide sind stark mathematisierte Disziplinen, die aber dennoch recht ungenaue Ergebnisse liefern. Man kann die Setzung eines Gebäudes nicht auf den Millimeter genau vorhersagen, und auch stimmt das vorhergesagte Wetter nicht immer mit dem eingetretenen überein. Und doch gibt es einen großen Unterschied: Während die Vorhersagen der Meteorologie tagtäglich validiert (d.h. überprüft) werden, werden die Berechnungen der Geotechnik zwar von Prüfstatikern, jedoch fast nie durch einen Vergleich mit der Realität überprüft. Dies trifft insbesondere für Grenzlaster, also für die Standsicherheit, zu. Die üblichen Berechnungen in der Geotechnik zielen darauf ab, nachzuweisen, dass es eine genügende Sicherheit gegenüber Versagen gibt, und man ist froh, wenn es tatsächlich nicht zum Versagen kommt. Natürlich gibt es Ausnahmen, bei welchen ein Versagen des Bodens in der Geotechnik angestrebt wird, wie z.B. die Niederbringung eines Senkkastens oder die Sondierung. Soll aber der Boden nicht versagen, kann man nicht messen wie groß die tatsächliche Sicherheit ist, um diese mit der berechneten zu vergleichen. Unseres Wissens wurde noch nie eine geotechnische Konstruktion für eine praktische Anwendung so entworfen, dass sie gerade versagt, um dann zu überprüfen, ob es tatsächlich zum Versagen kommt. Dass dieses Vorgehen für die Baupraxis nicht angemessen ist, leuchtet ein. Gewiss, bei der Analyse eingetretener Schadensfälle werden mathematisch-mechanisch-numerische Methoden kalibriert, um die aktuellen Bodenparameter zu bestimmen. Dies kann aber nicht als Validieren dieser Methoden angesehen werden.

3.2 Vergleich mit anderen Berechnungen

Was dann bleibt, ist, die Ergebnisse numerischer Simulationen mit analytischen Lösungen bzw. mit “hergebrachten“ Lösungen (etwa nach einem Gleitkreisverfahren) zu vergleichen. Als analytische Lösungen kann man etwa den Erddruck nach Coulomb oder die Grundbruchlast nach Prandtl betrachten. Solche Lösungen haben in der Geotechnik eine große Akzeptanz. Sie sind aber extrem schwierig zu validieren und werden dennoch als gleichwertig zur Realität angesehen. Betrachten wir etwa die Grundbruchlast nach Prandtl, so sehen wir, dass diese exponentiell mit $\tan \varphi'$ steigt. Dies bedeutet, dass eine geringe Änderung des Reibungswinkels sehr viel bei der Grundbruchlast ausmacht. Nun lässt sich aber der Reibungswinkel nicht mit absoluter Genauigkeit messen, schon deswegen nicht, weil er stark vom Druckniveau abhängt. Welches Druckniveau ist aber für die Berechnung der Grundbruchlast anzusetzen? So bleiben die Großversuche der Degebo zur Grundbruchlast recht unschlüssig, was die Validierung der diversen hierzu vorgeschlagenen analytischen Formeln betrifft [18]. Allein schon die Festlegung der Grundbruchlast erweist sich darin als problematisch. Diese Unschlüssigkeit bzw. Streuung der Messungen wird auch in der Arbeit von Canepa und Garnier [3] diskutiert. Auch die Erddruckformeln lassen sich kaum durch Versuche validieren, wenn man bedenkt, dass darin der Wandreibungswinkel zwar eine große Rolle spielt, aber meist angesetzt wird (etwa zu $2/3\varphi'$) und kaum je gemessen worden ist. Kleinmaßstäbliche Versuche bei 1 g oder in der Zentrifuge haben ebenfalls Interpretationsprobleme (Rolle des Korndurchmessers bei Scherfugen und Messung des Reibungswinkels bei kleinem Druckniveau).

In der Bodenmechanik hergebracht sind Lösungen nach dem Gleitkreisverfahren oder nach zusammengesetzten Starrkörper-Bruchmechanismen. Es handelt sich dabei um Anwendungen des kinematischen Traglasttheorems der Plastizitätstheorie. Die ältere Bodenmechanik hat auch Grenzspannungsfelder nach der Methode der Charakteristiken herangezogen, es handelt sich hierbei um Anwendungen des statischen Traglasttheorems. Ob die so ermittelten Abschätzungen

von Traglasten auf der sicheren Seite liegen oder nicht, ist dabei eine andere Frage, welche mit der Gültigkeit der sog. Normalitätsbedingung der Plastizitätstheorie verknüpft ist.

Man vergleicht nun die Ergebnisse einer analytischen Berechnung mit einer numerischen Simulation. Dies mag gegen das wissenschaftstheoretische Verbot verstoßen, eine Theorie anhand einer anderen Theorie zu überprüfen. Vgl. die 2. Feuerbach These von Marx: „Die Frage, ob dem menschlichen Denken gegenständliche Wahrheit zukomme, ist keine Frage der Theorie, sondern eine praktische Frage. In der Praxis muss der Mensch die Wahrheit, d.h. die Wirklichkeit und Macht, Diesseitigkeit seines Denkens beweisen. Der Streit über die Wirklichkeit oder Nichtwirklichkeit des Denkens – das von der Praxis isoliert ist – ist eine rein scholastische Frage.“ liefert aber oft zufriedenstellende Ergebnisse (falls sie übereinstimmend sind), die als Bestätigung dieses Vorgehens aufgefasst werden. Warum kommt es aber zu dieser Bestätigung? Der Grund ist relativ einfach. Bei beiden Vorgehen werden als Eingabegrößen die Scherfestigkeitsparameter φ' und c' verwendet. Tut man aber dies, so setzt man – sei es auch nur stillschweigend – die Gültigkeit der Grenzbedingung nach Mohr-Coulomb voraus. überspitzt formuliert, eine Theorie wird durch Vergleich mit sich selbst überprüft. Daher sollte es nicht verwundern, wenn beide Methoden ungefähr dieselben Ergebnisse liefern.

Die EANG [6] z.B. vergleichen im Anhang (ab Seite 115) die Ergebnisse Finiter Elemente Berechnungen einer Baugrube mit verschiedenen Materialmodellen. Dabei wurde eine fiktive Baugrube in vier verschiedenen Böden mit jeweils drei (bzw. vier) Materialmodellen simuliert. Die Unterschiede im Verformungsverhalten sind ausgeprägt, die durch Reduktion der Scherfestigkeitsparameter erhaltene Standsicherheit ist nach den EANG [6] aber vergleichbar. Verglichen wurden hier das Materialmodell nach MC mit dem Hardening-Soil und Hardening-Soil-Small und zum Teil mit dem Soft Soil Modell. Zu Erwähnen ist in diesem Zusammenhang, dass alle vier Materialmodelle das Mohr-Coulomb'sche Versagenskriterium als Fließfläche verwenden. Dadurch lassen sich die geringen Unterschiede bei der Standsicherheit erklären. Auch die sogenannte Finite-Element Limit Analysis [23] beschränkt sich im Grunde genommen auf das Materialmodell nach MC.

4 Einfluss des Materialmodells auf den Grenzzustand der Tragfähigkeit

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele aufgeführt, bei denen die Wahl des Materialmodells die Tragfähigkeit beeinflusst.

4.1 Unendliche Böschung

„Für Baugruben und Böschungen zeigt sich aufgrund der relativ geringen Behinderung der Verformungen nur ein vernachlässigbarer Einfluss des Dilatanzwinkels auf die Standsicherheit, ...“ [6, S.60]. Dies lässt sich selbst für das einfachste aller Standsicherheitsprobleme, die unendlich lange Böschung, nicht nachvollziehen. Wird der Grenzzustand der Tragfähigkeit einer unendlich langen Böschung mit einem MC-Modell berechnet, folgt aus der Formulierung der Fließfläche und des plastischen Potentials, dass die maximale Böschungsneigung β eine Funktion des Reibungswinkels φ' und des Dilatanzwinkels ψ ist [26]:

$$\tan \beta = \frac{\sin \varphi' \cos \psi}{1 - \sin \varphi' \sin \psi} . \quad (1)$$

Lediglich für den assoziierten Fall $\varphi' = \psi$ reduziert sich (1) auf die üblicherweise angenommene Beziehung

$$\beta = \varphi' . \quad (2)$$

Für $\psi = 0$ folgt

$$\tan \beta = \sin \varphi' , \quad (3)$$

mit einem Spannungszustand [8] welcher experimentell in Simple Shear Versuchen [2] und numerisch [27, 28] gut belegt ist. Es zeigt sich, dass bereits bei einem kleinen Dilatanzwinkel von

$\psi = \varphi'/4$ und $25^\circ \leq \varphi' \leq 45^\circ$ eine um rund 5 % größere Böschungsneigung möglich ist als bei Böden ohne Dilatanz [22].

Wird die unendliche Böschung mit einem elastisch-ideal-plastischen Modell mit einer Grenzbedingung nach Matsuoka-Nakai [16] berechnet, folgen ca. 10% höhere maximale Böschungswinkel, als für das MC-Modell bei gleichem Dilatanzwinkel [21, 22].

Berechnungen mit einem hypoplastischem Materialmodell [12, 13] in der Version von von Wolffersdorff [31] geben noch höhere Böschungswinkel [21, 22].

4.2 Undrainierte Verhältnisse

Undrainierte Verhältnisse stellen eine Einschränkung der Verformungen dar, und sind damit aus der betreffenden Aussage: „Für Baugruben und Böschungen zeigt sich aufgrund der relativ geringen Behinderung der Verformungen nur ein vernachlässigbarer Einfluss des Dilatanzwinkels auf die Standsicherheit, ...“ der EANG [6, S.60] ausgeschlossen. Dies kann aber leicht übersehen werden. Eine fälschliche Verwendung des MC-Modelles führt gerade bei locker gelagerten bzw. normalkonsolidierten Böden zu einer beträchtlichen überschätzung der Festigkeit. Die folgenden Beispiele sollen die Problematik veranschaulichen.

4.2.1 Nachrechnung eines CU Versuchs

In Abbildung 1 werden Triaxialversuche von normalkonsolidiertem Weald Clay mit dem MC-Modell simuliert. Das Modell wird anhand des CD Versuchs in Abbildung 1(a) kalibriert. Die Parameter werden mit $\varphi'_c = 23,5^\circ$, $c' = 0$ und $\psi = 0^\circ$ abgeschätzt. Die Konstanten für elastisches Verhalten werden zu $E = 5000 \text{ kPa}$ und $\nu = 0,31$ gewählt. Damit und mit der Kalibrierung an einem normalkonsolidierten Boden liegt eine vorsichtige Schätzung vor. Die maximal aufnehmbaren Schubspannungen $q_{\max}$ werden realistisch abgeschätzt.

In Abbildung 1(b) wird ein normalkonsolidierter CU-Versuch simuliert. Die maximal auftretenden Schubspannungen $q_{\max}$ werden mit dem Mohr-Coulomb Modell trotz der konservativen Parameterwahl stark überschätzt. Für $\psi > 0$ würde die Deviatorspannung q noch weiter ansteigen, vgl. dazu die Gleichungen (A.2) und (A.6) im Anhang A. 1. Im Anhang A. 1 ist die Nachrechnung des CU-Versuchs zusammengefasst.

4.2.2 Schadensfall Nicoll Highway in Singapur

Ein anschauliches Beispiel für eine Überschätzung der Festigkeit ist der Schadensfall am Nicoll Highway im April 2004 in Singapur. Geplant war der Bau einer unterirdischen Schnellzugstrecke in einem feinkörnigen Boden (hauptsächlich Klei). Die Baugrubenwände versagten bei einer Aushubtiefe von etwa 30 m unter GOK. Die numerischen Berechnungen wurden mit effektiven Parametern (c' , φ') durchgeführt, die mit einem CU-Triaxialversuch bestimmt wurden. Der gering durchlässige Boden wurde in einer sog. *undrainierten Berechnung* modelliert, vgl. Abbildung 2(b). Dabei wird angenommen, dass das Wasser in den Poren durch die geringe Durchlässigkeit des Bodens nicht entweichen kann (annähernd volumentreue Verformung). Das hat bei einer Berechnung mit dem Materialmodell nach MC zur Folge, dass der mittlere Druck p' bis zum Erreichen der Fließgrenze näherungsweise konstant bleibt und nur die Deviatorspannung q steigt, vgl. Anhang A. 2. Die Wandverformungen wurden mit der gewählten Berechnungsmethode stark unterschätzt, vgl. Abb. 2(a). Verschiedene Schadensursachen wurden laut Whittle [30] ausfindig gemacht, unter anderem auch die Wahl eines nicht geeigneten geotechnischen Berechnungsverfahrens. Nachrechnungen der Baugrube mit einer undrainierten, tiefenabhängigen Scherfestigkeit c_u ergaben wesentlich größere und realitätsnähere Wandverformungen. Abbildung 2(a) zeigt die mit den beiden Berechnungsverfahren prognostizierten Wandverformungen, sowie die gemessenen Wandverformungen nach Hight [11].

(a) Simulation eines CD Versuchs mit dem MC Modell: Die maximal auftretenden Schubspannungen $q_{\max}$ stimmen gut überein.

(a) Simulation of CD triaxial test with the MC model: The maximum shear stresses $q_{\max}$ are in good agreement.

(b) CU Versuch: Die maximal auftretende Schubspannung $q_{\max}$ wird mit dem Mohr-Coulomb Modell stark überschätzt; derselbe Wert q/p' bzw. derselbe maximal mobilisierbare Reibungswinkel φ'_m wird erreicht.

(b) CU triaxial test: The maximum shear stress $q_{\max}$ is overestimated by the MC model; the same value for q/p' and the same maximum mobilised friction angle φ'_m is predicted.

Abbildung 1: Simulationen von normalkonsolidierten Triaxialversuchen (CD, CU) mit Weald Clay (aus Mařín [15], Daten von Parry [20]) mit dem MC Modell.

Figure 1: Simulations of normal consolidated triaxial test (CD, CU) on Weald Clay (from Mařín [15], data from Parry [20]) with the MC model.

(a) Berechnete und gemessene Wandverformung für den Schadensfall Nicoll Highway beim letzten Aushubschritt. Abgebildet sind (1) die Ergebnisse nach [30] für eine Berechnung mit den effektiven Scherparametern c' , φ' und (2) die Ergebnisse für eine Berechnung mit der undrainierten Kohäsion c_u im Vergleich zur gemessenen Wandverformung für die südliche Baugrubenwand nach [11].

(a) Calculated and measured deformation of the pit wall in the last excavation step of Nicoll Highway failure. Results with (1) effective shear parameters c' , φ' after [30] for undrained conditions and with (2) undrained cohesion c_u are displayed in comparison to the measured displacement of the southern pit wall after [11].

(b) Die mit dem Materialmodell nach MC berechnete Scherfestigkeit für undrainierte Zustände mit den effektiven Scherparametern c' , φ' (1) im Vergleich zur Scherfestigkeit bestimmt mit der undrainierten Kohäsion c_u (2), vgl. Anhang A. 2. Nur im Punkt A stimmen beide Ergebnisse überein. Ausgehend vom gleichen Spannungsniveau wird die Scherfestigkeit für normalkonsolidierte Böden überschätzt.

(b) Calculated shear strength (1) with the MC constitutive model with effective shear parameters for undrained conditions and (2) with undrained cohesion, see also appendix A. 2. Both models yield the same results only at point A. Starting from the same stress level the shear strength is overestimated for normal consolidated soils.

Abbildung 2: Einfluss des gewählten Modells zur Berechnung von undrainierten Bedingungen auf die Wandverformung einer Baugrubenwand und auf die Scherfestigkeit.

Figure 2: Influence of the constitutive model for undrained conditions on results of the deformation of a pit wall and on the shear strength.

(a) Schnitte unterschiedlicher Fließflächen mit der Deviatorebene $p \approx 167 \text{ kPa}$. Versagenspunkte mit San Francisco Bay Mud ($\varphi'_c = 30,6^\circ$) aus [14] werden hier gezeigt.

(a) Sections of different yield surfaces with the deviatoric plane $p \approx 167 \text{ kPa}$. Failure points of San Francisco Bay Mud ($\varphi'_c = 30,6^\circ$) after [14] are shown.

(b) Berechnungsergebnisse der Versagenspunkte auf der jeweiligen Fließfläche. Die Abbildung wurde von Grammatikopoulou u. a. [10] übernommen und geringfügig abgeändert.

(b) Calculated failure points on the corresponding yield surface. Figure slightly modified after Grammatikopoulou et al. [10].

Abbildung 3: Fließflächen in der Deviatorebene.

Figure 3: Yield surfaces in the deviatoric plane.

4.3 Betrachtungen in der Deviatorebene

Die Wahl der Fließfläche kann für allgemeine Zustände einen großen Einfluss auf Standsicherheitsberechnungen haben. Abbildung 3(a) zeigt unterschiedliche Fließflächen in der Deviatorebene. Experimentelle Ergebnisse von San Francisco Bay Mud aus Lade [14] werden gezeigt. Für axialsymmetrische triaxiale Kompression stimmen die Prognosen aller Fließflächen $f = 0$ überein. Für allgemeine Zustände gibt es Abweichungen.

4.3.1 Fallbeispiel Schüttdamm

Grammatikopoulou u. a. [10] untersuchen den Einfluss der Fließfunktion f und des plastischen Potentials g auf die Versagenshöhe einer Aufschüttung. Die Aufschüttung wird mit dem MC-Modell modelliert. Der Untergrund besteht aus Tonablagerungen, die mit dem *two-surface "bubble" model* von Al Tabbaa and Wood [1] modelliert werden. Grammatikopoulou [9] erweiterte das Modell u.a. um die Möglichkeit verschiedene Kombinationen der Fließfunktion und des plastischen Potentials für die Simulationen mit dem Finite Elemente Programm

ICFEP zu verwenden. Sie wählen für ihre Berechnungen Kombinationen von f und g laut Tabelle 1. Die unterschiedlichen Kombinationen des plastischen Potentials und der Fließfunktion führen auf stark unterschiedliche Berechnungsprognosen, vgl. Tabelle 1. Abbildung 3(b) zeigt die Versagenspunkte der jeweiligen Kombination in der Deviatorebene. *Fall 3* liefert die größte Versagenshöhe, 41% höher als im *Fall 1*, die Versagenshöhe für den *Fall 2* ist um rund 30% höher als im *Fall 1*. Der maximal mobilisierte Reibungswinkel ist im *Fall 2* am größten, die Versagenshöhe jedoch im *Fall 3*. Interessant ist, dass sich die Versagenshöhen in *Fall 2* und *Fall 3* um rund 8% unterscheiden, obwohl sich die Berechnung nur in der Wahl des plastischen Potentials unterscheidet.

5 Schlussfolgerung

Die Aussage in den EANG [6] über die Rolle von Stoffmodellen bei der Ermittlung der Standsicherheit entbehrt zwar nicht einer Berechtigung, sie veranlasste uns aber dennoch zu einigen Anmerkungen in diesem Aufsatz, die dazu beitragen sollten, die Wichtigkeit der Stoffmodelle auch für die Standsicherheitsermittlung hervorzuheben. Denn wir sind überzeugt, dass der heutige Kenntnisstand immernoch nicht erlaubt, die Frage nach dem richtigen Stoffmodell, sei-

Tabelle 1: Untersuchte Kombinationen von Fließfunktion f und plastischem Potenzial g und der Einfluss auf die Berechnungsergebnisse, aus Grammatikopoulou u. a. [10], vgl. dazu auch Abbildung 3(b).

Table 1: Different combinations of yield function f and plastic potential g and their effect on the calculated results, from Grammatikopoulou et al. [10], see also Fig. 3(b).

Fall	Fließfunktion f	Form des plastischen Potentials g in der Deviatorebene	Versagenshöhe der Aufschüttung	Maximal mobilisierter Reibungswinkel
1 ●	Mohr-Coulomb	Kreis	3,95 m	27,0°
2 ○	Lade	Kreis	5,12 m	32,7°
3 ◇	Lade	Lade	5,55 m	31,3°

ner Kalibrierung, seiner numerischen Implementierung, seiner eventuellen Regularisierung und Interpretation als erledigt zu betrachten. Daher ist es auch immer notwendig das verwendete Materialmodell und die verwendeten Materialparameter anzugeben. Eine anspruchsvolle numerische Simulation wird vorgenommen, wenn es auf wichtige “Details“, wie der Einfluss der Lagerungsdichte (bzw. Porenzahl) und des Druckniveaus, ankommt. Diese Effekte werden durch das herkömmliche Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb nicht berücksichtigt. Können diese vernachlässigt werden, so reicht eine Analyse von Bruchmechanismen (etwa Gleitkreisen) aus. Der Arbeitskreis 1.6 „Numerik in der Geotechnik“ der DGGT beabsichtigt demnächst neue und tiefgründigere Empfehlungen zur Anwendung der φ' - c' -Reduktion herauszugeben (Mündliche Information des Obmans des Arbeitskreis 1.6 „Numerik in der Geotechnik“, P. A. von Wolffersdorff (2015)).

Literatur

- [1] Al Tabbaa, A. and Wood, D. (1989): An experimental based ‘bubble’ model for clay. In Pietruszczak, S. and Pande, G., editors, Numerical models in geomechanics, S. 91–99. Rotterdam: Balkema.
- [2] Budhu, M. (1985): Lateral stresses observed in two simple shear apparatus. Journal of Geotechnical Engineering 111(6), S. 698–711.
- [3] Canepa, Y.; Garnier, J. (2004): Etudes experimentales du comportement des fondations superficielles - Etat de l’art, FONDSUP 2003 - Vol. 2 Magnan (Ed.). Presses de l’ENPC/LCPC. Paris, S. 155–260
- [4] Cudmani, R.O. (2001): Statische, alternierende und dynamische Penetration in nichtbindigen Böden. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik am Karlsruher Institut für Technologie.
- [5] Davis, E. H. (1968): Theories of plasticity and failure of soil masses. In Soil mechanics: selected topics (ed. I. K. Lee). New York, NY, USA, Elsevier, S. 341–354.
- [6] Deutsche Gesellschaft für Geotechnik e.V. (Ed.) (2014): Empfehlungen des Arbeitskreises “Numerik in der Geotechnik” - EANG, Ernst & Sohn.
- [7] Fellin, W. (2004): Ambiguity of safety definition in geotechnical models. In: Fellin, W.; Lessmann, H.; Oberguggenberger, M.; Vieider, R. (Hrsg.): Analyzing Uncertainty in Civil Engineering. Springer, S. 17–31.
- [8] Fellin, W. (2014): The rediscovery of infinite slope model / Die Wiederentdeckung der unendlich langen Böschung. Geomechanics and Tunnelling / Geomechanik und Tunnelbau 7(4), S. 299–305.

- [9] Grammatikopoulou, A. (2004): Development, implementation and application of kinematic hardening models for overconsolidated clays. PhD thesis, University of London.
- [10] Grammatikopoulou, A., Zdravkovic, L., and Potts, D. M. (2007): The effect of the yield and plastic potential deviatoric surfaces on the failure height of an embankment. *Géotechnique* 57, S. 795–806(11).
- [11] Hight, D.W.; Henderson, T.O.; Pickles, A.R., Marchand, S. (2009): The Nicoll Highway Collapse. Lecture at Meeting of the Hellenic Society of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (HSSMGE).
- [12] Kolymbas, D. (1985): A generalized hypoelastic constitutive law. In Proc. XI Int. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco 5, S. 2626, Balkema.
- [13] Kolymbas, D. (1991): An outline of hypoplasticity. *Archive of Applied Mechanics* 61(3), S. 143–151.
- [14] Lade, P. V. (2000): Effects of consolidation stress state on normally consolidated clay. In Rathmayer, H., editor, Proceedings of NGM-2000: XIII Nordiska Geoteknikermötet: Helsinki, Finland. Building Information Ltd.
- [15] Mašín, D. (2013): Clay hypoplasticity with explicitly defined asymptotic states. *Acta Geotechnica* 8(5), S. 481–496.
- [16] Matsuoka, H.; Nakai, T. (1974): Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. In Proceedings of JSCE 1974 232, S. 59–74.
- [17] Muir Wood, D. (2004): Geotechnical Modelling. Spon Press, London.
- [18] Naujoks, L.; Muhs, H.; Jänke, S. (1963): Flachgründungen Berichte aus der Bauforschung, Heft 32 Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin
- [19] Nova, R. (1994): Controllability of the incremental response of soil specimen subjected to arbitrary loading programmes. *Journal of the Mechanical Behaviour of Materials* 5, S. 193–201
- [20] Parry, R. (1960): Triaxial compression and extension tests on remoulded saturated clay. *Géotechnique* 10(4), S. 166–180.
- [21] Schranz, F.; Fellin, W. (in Vorbereitung): Stability of infinite slopes. (wird eingereicht bei geotechnik)
- [22] Schranz, F. (2014): Standsicherheit von unendlich langen Hängen, Diplomarbeit, Universität Innsbruck.
- [23] Sloan, S. W. (2013): Geotechnical stability analysis. *Géotechnique* 63(7), S. 531–572
- [24] Taylor, D. (1948): Fundamentals of Soil Mechanics. Wiley
- [25] Terzaghi, K.; Peck, R. (1961): Die Bodenmechanik in der Baupraxis. Springer
- [26] Teunissen, J.A.M.; Spierenburg, S.E.J. (1995): Stability of infinite slopes. *Géotechnique* 45(2), S. 321–323.
- [27] Thornton, C.; Zhang, L., (2003): Numerical simulations of the direct shear test. *Chemical Engineering & Technology* 26(2), S. 153–156.
- [28] Thornton, C.; Zhang, L., (2006): A numerical examination of shear banding and simple shear non-coaxial flow rules. *Philosophical Magazine* 86, S. 3425–3452.

- [29] Zhao, L.; Yang, F.; Zhang, Y.; Dan, H.; Liu, W. (2015): Effects of shear strength reduction strategies on safety factor of homogeneous slope based on a general nonlinear failure criterion, *Computers and Geotechnics* 63, S. 215–228.
- [30] Whittle, A.J. (2006): Nicoll Highway Collapse: Evaluation of Geotechnical Factors Affecting Design of Excavation Support System. *International Conference on Deep Excavations*, Singapore.
- [31] von Wolffersdorff, P. A. (1995): A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 1, S. 251—271.

A. 1 Nachrechnen eines CU-Versuchs mit dem *MC-Modell*

Es wird ein konventioneller konsolidierter, undrainierter (CU) Triaxialversuch berechnet. Es handelt sich daher um *axialsymmetrische Zustände*, d.h. $\sigma'_2 = \sigma'_3$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und triaxiale Kompression. Die hier angegebenen Formeln gelten nur hierfür.

Elastischer Bereich

$$\begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_e \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{vol}} \\ \dot{\varepsilon}_q \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_e = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.1})$$

Plastischer Bereich

Für den Fall des plastischen Fließens ist die elastoplastische Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{D}_{\text{ep}}$, folgendermaßen definiert, vgl. z.B. Muir Wood [17]:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{\text{ep}} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{vol}} \\ \dot{\varepsilon}_q \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{\text{ep}} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}^T \mathbf{D}_e}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}^T \mathbf{D}_e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} \quad (\text{A.2})$$

darin ist die Fließfunktion f für kohäsionslosen Boden (p' - q Formulierung):

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = f(p', q) = q - Mp' \quad \text{mit} \quad M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'} \quad (\text{A.3})$$

und das plastische Potential g :

$$g(\boldsymbol{\sigma}') = g(p', q) = q - M^*p' + k \quad \text{mit} \quad M^* = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi} \quad , \quad k: \text{Integrationskonstante} \quad (\text{A.4})$$

Mit $\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ und $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ aus den Gleichungen A.3, A.4 kann nun die elastoplastische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{D}_{\text{ep}}$ (in Gleichung A.2) wie folgt angeschrieben werden, vgl. z.B. Muir Wood [17]:

$$\mathbf{D}_{\text{ep}} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{pmatrix} - \frac{1}{KMM^* + 3G} \begin{pmatrix} MM^*K^2 & -3M^*GK \\ -3MGK & 9G^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

bzw.

$$\mathbf{D}_{\text{ep}} = \frac{3GK}{KMM^* + 3G} \begin{pmatrix} 1 & M^* \\ M & MM^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Im elastischen Bereich ($f < 0$) führt die isochore Deformation $\dot{\varepsilon}_{\text{vol}} = 0$ auf $\dot{p}' = 0$, vgl. Gleichung A.1. D.h. der mittlere Druck p' bleibt konstant mit $p' = 206,2 \text{ kPa}$. Die Deviatorspannung q erhöht sich bis der Spannungspfad auf die Fließbedingung trifft, vgl. dazu Gleichung A.1: $\dot{\varepsilon}_q > 0 \rightsquigarrow \dot{q} > 0$. Sobald plastisches Fließen eintritt, werden die Spannungsrate $\dot{p}'$ und $\dot{q}$ mit den Gleichungen A.2 und A.6 berechnet. Für die konservative Schätzung mit $\psi = 0$ ($\rightsquigarrow M^* = 0$) besteht die zweite Spalte der elasto-plastischen Steifigkeitsmatrix (Gleichung A.6) aus Nullen. Damit verschwinden mit $\dot{\varepsilon}_{\text{vol}} = 0$ sowohl die Änderung des mittleren Drucks ($\dot{p}' = 0$) als auch die Änderung der Deviatorspannung ($\dot{q} = 0$). Die Spannungen p' und q bleiben also konstant. Für das genannte Beispiel lässt sich die maximal aufnehmbare Deviatorspannung daher wie folgt berechnen:

$$q_{\text{max}} = M \cdot p' = \frac{6 \sin 23,5^\circ}{3 - \sin 23,5^\circ} \cdot 206,2 \text{ kPa} \approx 190 \text{ kPa}$$

A. 2 Isochore ebene Verzerrung mit dem *MC-Modell*

Die unten stehenden Herleitungen gelten für ebene Quaderverformungen mit den Annahmen: $\dot{\epsilon}_2 = 0$, $\psi = 0$. Aus der Zwangsbedingung der volumentreuen Verzerrung $\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = 0$ folgt mit $\dot{\epsilon}_2 = 0$: $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$.

Elastischer Bereich

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}'_1 \\ \dot{\sigma}'_2 \\ \dot{\sigma}'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_e \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Für $\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = 0$ (d.h. $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$) folgt, dass der mittlere Druck konstant bleibt:

$$\dot{p}' = \frac{1}{3}(\dot{\sigma}'_1 + \dot{\sigma}'_2 + \dot{\sigma}'_3) = \frac{E}{3(1-2\nu)}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Die Deviatorspannung $\dot{q} > 0$ wächst an, bis der Spannungspfad die Fließfläche trifft.

Plastischer Bereich

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}'_1 \\ \dot{\sigma}'_2 \\ \dot{\sigma}'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{\text{ep}} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{\text{ep}} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \mathbf{D}_e}{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \mathbf{D}_e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} \quad (\text{A.9})$$

Mit der Fließfunktion f

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \varphi' - (\sigma'_1 - \sigma'_3) + 2c' \cos \varphi' \quad (\text{A.10})$$

und dem plastische Potential g

$$g(\boldsymbol{\sigma}') = (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \psi - (\sigma'_1 - \sigma'_3) + k \quad (\text{A.11})$$

lässt sich die elasto-plastische Steifigkeitsmatrix gemäß Formel A.9 für $\psi = 0$ wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}'_1 \\ \dot{\sigma}'_2 \\ \dot{\sigma}'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{\text{ep}} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{\text{ep}} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \sin \varphi' & 2\nu(1 - \sin \varphi') & 1 - \sin \varphi' \\ 2\nu & 2(1 - \nu) & 2\nu \\ 1 + \sin \varphi' & 2\nu(1 + \sin \varphi') & 1 + \sin \varphi' \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Für $\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = 0$ (i.e. $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$) bleiben der mittlere Druck p' und die Deviatorspannung q konstant, d.h. $\dot{p}' = 0$ und $\dot{q} = 0$:

$$\dot{p}' = \frac{1}{3}(\dot{\sigma}'_1 + \dot{\sigma}'_2 + \dot{\sigma}'_3) = \frac{E}{3(1-2\nu)}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\dot{\sigma}'_1 - \dot{\sigma}'_2)^2 + (\dot{\sigma}'_2 - \dot{\sigma}'_3)^2 + (\dot{\sigma}'_3 - \dot{\sigma}'_1)^2]} \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{E\sqrt{(1-2\nu)^2 + 3\sin^2 \varphi'}}{2(1+\nu)(1-2\nu)}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) = 0 \quad (\text{A.15})$$