universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Dynamik

Föppl, August

1909

Sechster Abschnitt. Hydrodynamik

urn:nbn:at:at-ubi:2-7870

Sechster Abschnitt.

Hydrodynamik.

§ 48. Die Ansätze der Hydrodynamik.

Bei allen Naturvorgängen spielen viele Umstände mit, von denen einige von großem, andere von weit geringerem Einflusse sind. Um zu einer einfachen und doch hinreichend genauen Theorie zu gelangen, muß man sich daher vor allem ein Urteil darüber verschaffen, welche von jenen Umständen im gegebenen Falle die wichtigsten sind, und welche anderen man ohne Schaden außer acht lassen darf. Die Antwort auf diese Frage wird nicht in allen Fällen dieselbe sein. Was in einem Falle außer Ansatz bleiben durfte, wird vielleicht in einem anderen Falle so viel mehr hervortreten, daß man unbedingt darauf achten muß, um die Theorie in hinreichende Übereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen.

Ich erinnere daran, daß das schon in der Mechanik der festen Körper gilt. Häufig genügt es, einen festen Körper als starr zu betrachten; ein andermal muß man auf die Formänderungen achten, die er erfährt; es genügt aber noch, diese als vollkommen elastische zu betrachten und das Hookesche Elastizitätsgesetz darauf anzuwenden, während man in einem dritten Falle genötigt sein kann, auf bleibende Formänderungen, auf Abweichungen vom Hookeschen Gesetze, auf Eigenspannungen u. dgl. einzugehen. Ebenso paßt auch in der Hydrodynamik nicht jeder Ansatz auf alle Fälle. Man muß dies wohl beachten, wenn man sieht, wie weit sich oft die Schlußfolgerungen der hydrodynamischen Theorien, die sich auf zu eng gefaßte Ansätze gründeten, von der Wirklichkeit entfernten.

Im ersten Bande dieser Vorlesungen habe ich schon einmal die üblichen Annahmen besprochen, die man der theore-

tischen Behandlung der Flüssigkeitsbewegungen gewöhnlich zugrunde legt. Insbesondere erinnere ich daran, daß man auf zwei physikalische Eigenschaften der tropfbaren Flüssigkeiten gewöhnlich nicht zu achten braucht, nämlich auf die Volumenänderungen elastischer und thermischer Art, die durch Änderungen des Flüssigkeitsdruckes oder der Temperatur hervorgerufen werden. Von wenigen besonderen Fällen abgesehen, die eine darauf eingehende Betrachtung erforderlich machen können, sind wir daher berechtigt, die tropfbaren Flüssigkeiten und insbesondere das Wasser unter dem zwar nicht mehr ganz aber doch hinlänglich genauen, vereinfachten Bilde einer raumbeständigen Flüssigkeit in unseren theoretischen Ansatz eingehen zu lassen.

Mittelbar freilich tragen die durch Temperaturunterschiede herbeigeführten Unterschiede in der Dichte sehr wesentlich zu einer Erscheinung bei, die man nicht immer mit dem gleichen Rechte vernachlässigen darf. Betrachtet man nämlich ein mit Wasser gefülltes Glas, das ruhig auf einem Tische steht, so wird man zwar in erster Annäherung sagen können, daß sich die Wassermasse im Gleichgewichte und in Ruhe befinde. Bei genauerem Zusehen bemerkt man aber an kleinen Teilchen, die darin herumschwimmen, daß die Wassermasse dauernd in langsamen Strömungen begriffen ist. Der Grund dafür ist in geringen Temperaturunterschieden zu erblicken, die sich unter gewöhnlichen Umständen nicht leicht vermeiden lassen und die entsprechend geringe Dichteunterschiede und hiermit eine Störung des Gleichgewichts hervorbringen. Die Meeresströmungen, wie z. B. der Golfstrom geben uns ein Beispiel von sehr mächtigen Wirkungen, die von dieser Ursache herrühren. Bei den meisten Anwendungen der Hydrostatik sind aber diese Wirkungen so unmerklich, daß man mit Recht ganz von ihnen absehen darf. Immerhin müssen wir jedoch aus dieser Betrachtung den wesentlichen Unterschied eines flüssigen Körpers gegenüber einem festen entnehmen, daß bei ihm schon durch die geringfügigsten Ursachen ein fortwährender langsamer Platzwechsel und Austausch der einzelnen Teilchen innerhalb

der ganzen Masse hervorgerufen wird, der beim festen Körper fehlt.

Der Kürze halber wollen wir die durch zufällige Umstände hervorgerufenen langsamen Strömungen der bezeichneten Art als die „Mischbewegung“ bezeichnen. Durch den Gebrauch dieses Wortes soll zugleich angedeutet werden, daß es sich um einen an sich unerheblichen Vorgang handelt, der einer Beachtung nur insoweit bedarf, als er zu einer Durcheinandermischung benachbarter Teile der Flüssigkeit führt.

Auch in einer strömenden Wassermasse fehlt die Mischbewegung nicht. Die Beobachtung der Wasserbewegung in einem Flusse läßt erkennen, daß „Mischbewegungen“ dabei vorkommen. Man bemerkt auch, daß diese weit größer sind als in einer ruhenden Masse unter sonst gleichen Umständen, also größer etwa als in einem langhin gestreckten Teiche von der gleichen Breite und Tiefe. Die Mischbewegung lagert sich über die Hauptbewegung, die das Wasser flußabwärts führt und die eben angeführte Beobachtung lehrt, daß sie von ihr beeinflußt wird. Sie ist zwar verhältnismäßig geringfügig gegenüber der Hauptbewegung. Aber vernachlässigt darf sie darum doch nicht werden, und zwar deshalb nicht, weil sie auch selbst wieder die Hauptbewegung sehr wesentlich beeinflussen kann.

Der Einfluß, den die Mischbewegung auf den Hauptvorgang auszuüben vermag, wird um so geringer, je weniger sich innerhalb eines gegebenen Bezirks die durch den Hauptvorgang bedingten Geschwindigkeiten der einzelnen Massenteilchen voneinander unterscheiden. Denn eine wesentliche Änderung des Hauptvorgangs kann nur dadurch hervorgerufen werden, daß die zum Austausche gegeneinander gelangenden Teilchen merklich verschiedene Bewegungszustände mit sich bringen.

Wenn die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Teilchen nur sehr gering sind, wird man also von einer Beachtung der Mischbewegung überhaupt absehen dürfen. In diesem Falle kommt aber überdies auch die Eigenschaft der Zähigkeit der Flüssigkeit nicht zur Geltung und man wird, wenigstens innerhalb des betreffenden Bezirks, die Flüssigkeit

mit genügender Genauigkeit unter dem Bilde einer reibungsfreien oder „vollkommenen“ Flüssigkeit in den theoretischen Ansatz eintreten lassen können.

Zwischen der Zähigkeit und dem Einflusse, den die Mischbewegung ausübt, ist aber im übrigen wohl zu unterscheiden. Schon Newton hatte erkannt, daß man in der Hydrodynamik auf die physikalische Eigenschaft der Zähigkeit in vielen Fällen Rücksicht nehmen muß und von ihm rührt der erste Ansatz her, durch den sie in die Rechnung eingeführt wird. Bei den zähen Flüssigkeiten treten, wie schon in Band I besprochen wurde, während der Bewegung Schubspannungen oder „innere Reibungen“ auf, die man, und zwar wie es scheint mit genügender Genauigkeit, als linear abhängig von den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach den Koordinatenrichtungen betrachten kann. Darauf wird später noch näher einzugehen sein.

Aber je zäher eine Flüssigkeit ist, um so geringer fällt bei ihr unter sonst gleichen Umständen die Mischbewegung und hiermit auch deren Einfluß auf den Hauptvorgang aus. Es ist daher nicht möglich, beide Umstände zusammenzuwerfen und sie etwa beide durch einen einheitlichen Ansatz zum Ausdruck zu bringen. Sie müssen vielmehr getrennt behandelt werden.

Die übliche Hydrodynamik der zähen Flüssigkeit sieht in der Regel von der Mischbewegung vollständig ab und in zahlreichen Fällen mit vollem Rechte. Man muß indessen beachten, daß eine theoretische Lösung, die auf diesem Wege gewonnen wurde, für ein dickes Öl noch sehr genau richtig sein kann unter Umständen, bei denen dieselbe Lösung für eine weniger zähe Flüssigkeit, etwa für Wasser, schon vollständig versagt. Und zwar selbstverständlich auch dann, wenn man in die gleiche Formel die sehr verschiedenen Werte des Zähigkeits-Koeffizienten für beide Flüssigkeiten einsetzt. Der Grund dafür liegt darin, daß im ersten Falle die Vernachlässigung des Einflusses der Mischbewegung berechtigt, im anderen Falle aber unzulässig war.

Meiner Meinung nach geht aus diesen Bemerkungen hervor, daß außer den üblichen Ansätzen für die vollkommene und die zähe Flüssigkeit noch ein Ansatz fehlt, der unter gewissen Umständen an deren Stelle zu treten hätte und bei dem der Einfluß der Mischbewegung in geeigneter Weise zum Ausdruck kommt. Oder genauer gesprochen: ich würde es als einen großen Fortschritt der Hydrodynamik betrachten, wenn es gelingen sollte, schon für den ersten Ansatz, also für die Differentialgleichungen der Bewegung eine Form zu finden, die den Einfluß der Mischbewegung mit einer für die überwiegende Mehrzahl aller Fälle genügenden Genauigkeit derart zum Ausdruck bringt, daß man sich, nachdem dies geschehen ist, weiterhin nicht mehr um sie zu kümmern braucht. In einzelnen Fällen lassen sich solche Ansätze zwar verhältnismäßig leicht ausfindig machen. Das Ziel, einen brauchbaren allgemein gültigen Ansatz zu finden, wird freilich nicht leicht zu erreichen sein. Als der erste Schritt dazu darf es aber immerhin gelten, wenn dieses Ziel zunächst einmal aufgerichtet wird.

§ 49. Die Darstellungsmittel der Hydrodynamik.

Abgesehen von den physikalischen Eigenschaften und ihrer Berücksichtigung oder Vernachlässigung wird die Fassung der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen auch noch von der Wahl der Darstellungsmittel beeinflußt, die man zur Untersuchung anwenden will. Am einfachsten fällt die Betrachtung aus, wenn man sich mit der Untersuchung der durchschnittlichen Bewegung einer größeren, in bestimmter Weise abgegrenzten Wassermasse begnügt. Dabei muß man freilich auf die Besprechung der feineren Einzelheiten und auf wichtige Erkenntnisse, die sich darauf stützen, verzichten. Immerhin sind aber die Ergebnisse, zu denen man auf diesem Wege gelangt, von großer Bedeutung und in bezug auf ihre praktische Nutzbarkeit stellen sie überhaupt den wertvollsten Schatz dar, den wir zurzeit auf dem Gebiete der Mechanik der flüssigen Körper besitzen. Was auf diesem Wege gefunden werden kann, ist aber schon im ersten Bande hinreichend besprochen worden.

Hier werde ich daher zur Ergänzung der früheren Betrachtungen den anderen Weg einschlagen, der von der Untersuchung der Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten, den Beschleunigungen und den Kräften an einem unendlich kleinen Flüssigkeitselemente ausgeht. Man führt dadurch die verwickelten Erscheinungen in endlichen Raumgebieten auf ein Zusammenwirken der einfachsten gesetzmäßigen Vorgänge zwischen benachbarten Teilen zurück.

Ihren Ausdruck finden die Elementargesetze, auf die man in solcher Weise das gesamte Verhalten der Flüssigkeit zurückzuführen sucht, durch partielle Differentialgleichungen. Diese werden natürlich verschieden ausfallen müssen, je nachdem man die Flüssigkeit als „vollkommen“ oder als „zäh“ betrachtet oder auch je nachdem man den Einfluß der Mischbewegung vernachlässigen oder ihn in passender Weise von vornherein berücksichtigen will.

Als letztes Ziel gilt freilich auch hier die Erkenntnis der Bewegung endlicher Wassermassen in ihren wichtigsten Einzelheiten. Von den Differentialgleichungen aus kann dieses Ziel nur durch eine Integration unter Berücksichtigung der im einzelnen Falle näher vorgeschriebenen Bedingungen erreicht werden. Der ganze Untersuchungsplan schließt sich sehr eng an jenen an, der den Lesern des dritten Bandes schon von der mathematischen Elastizitätstheorie her bekannt ist. Er hat den Vorzug, daß er wenigstens den Grundzügen nach alle Flüssigkeitsbewegungen zu umfassen gestattet und auf Sätze von sehr allgemeiner Gültigkeit zu führen vermag. Freilich werden die Integrationen, die zur Ableitung brauchbarer Ergebnisse aus den Differentialgleichungen erforderlich sind, immer nur in einer beschränkten Anzahl einfacherer Fälle wirklich ausführbar bleiben. Ganz wird daher die sich auf die Differentialgleichungen stützende „höhere“ Theorie die im ersten Bande wiedergegebenen elementaren Betrachtungen niemals entbehrlich machen können, selbst wenn es in der Folge gelingen sollte, das Gebiet, in dem sie zu wirklich richtigen (d. h. zu physikalisch genauen) Lösungen führt, erheblich zu erweitern.

Der Bewegungszustand in einer Flüssigkeit kann auf zwei verschiedene Arten analytisch dargestellt werden. Wir können zunächst unser Augenmerk auf eine bestimmte Stelle des Raumes richten, in dem die Flüssigkeitsströmung erfolgt. Der augenblickliche Zustand der Strömung an dieser Stelle wird vollständig durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ beschrieben, mit der die Bewegung hier gerade nach Richtung und Größe vor sich geht. Bezeichnen wir den von einem festen Anfangspunkte nach dieser Stelle gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$ und die Zeit mit t, so wird durch eine Funktion

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t). \tag{217}$$

die Geschwindigkeit für jede Stelle des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes und für jeden Augenblick angegeben werden können. Will man in Koordinaten rechnen, so kann man dafür auch

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(x, y, z, t) \\ v_2 &= \varphi_2(x, y, z, t) \\ v_3 &= \varphi_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

schreiben und das ganze Problem wird nun darauf hinauskommen, die Vektor-Funktion φ oder ihre Komponenten-Funktionen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ zu ermitteln, denn damit wird zugleich die Bewegung in allen Einzelheiten und für den ganzen Verlauf des Vorgangs bekannt.

Der durch diese Betrachtung angewiesene Weg zur Untersuchung des ganzen Vorgangs ist zuerst von Euler beschritten worden. Die Gleichungen, zu denen man auf diesem Wege geführt wird, bezeichnet man daher als die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen. Gewöhnlich ist diese Untersuchungsmethode die bequemste. Zuweilen führt aber auch eine zweite, die von Lagrange weiter ausgearbeitet wurde, besser zum Ziele und die Gleichungen, die sich auf diese beziehen, bezeichnet man als die hydrodynamischen Gleichungen von Lagrange, obwohl auch Euler selbst, der um ein Menschenalter früher lebte, mit diesem zweiten Wege ebenfalls schon ganz gut bekannt war.

Das zweite Verfahren besteht nämlich darin, daß man das Augenmerk nicht auf eine bestimmte Stelle des Raumes richtet und zusieht, wie sich die Geschwindigkeit hier im Laufe der Zeit ändert, sondern indem man die Schicksale eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens im Laufe des Bewegungsvorgangs verfolgt. Um anzugeben, was für ein Teilchen man meint, zieht man einen Radiusvektor $\mathfrak{r}_0$ von einem festen Anfangspunkte nach jener Stelle, die das Teilchen zu einer gewissen Zeit, die zum Ausgange der Untersuchung gewählt wird, inne hatte. Nach Verlauf einer Zeit t wird es sich an einer anderen Stelle befinden, deren Radiusvektor $\mathfrak{r}$ sei. Die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \psi(\mathfrak{r}_0, t) \tag{219}$$

gibt dann bei konstantem $\mathfrak{r}_0$ die Bahnkurve des Teilchens an. Wenn die Funktion ψ für alle möglichen Werte von $\mathfrak{r}_0$ bekannt ist, hat man ebenfalls eine erschöpfende Beschreibung des ganzen Bewegungsvorgangs. Auch bei der Untersuchungsmethode von Lagrange handelt es sich daher im wesentlichen um die Bestimmung einer Funktion ψ. Natürlich kann auch Gl. (219) durch drei Komponentengleichungen ersetzt werden.

§ 50. Die hydrodynamischen Gleichungen von Euler.

Bis jetzt ist die Untersuchungsmethode, die hier einzuhalten ist, nur im allgemeinen geschildert worden, ohne jede Rücksicht auf die Bedingungen, denen eine Flüssigkeitsbewegung unterworfen ist. Die Formulierung dieser Bedingungen wird uns zu den hydrodynamischen Gleichungen führen. Die Bedingungen sind von zweifacher Art. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar anzusehen ist, muß die Strömung jedenfalls immer in solcher Weise erfolgen, daß aus einem gegebenen Teile des festen Raumes, der ganz im Innern der Flüssigkeit liegt, jederzeit ebenso viel ausströmt, als durch andere Teile der Grenzfläche einströmt. Diese Bedingung ist eine rein kinematische oder geometrische; sie wird als die Konti-

nuitätsbedingung bezeichnet und die Gleichung, die ihr Ausdruck gibt, spielt bei hydrodynamischen Untersuchungen stets die Hauptrolle. Hierzu kommt aber noch die fernere Bedingung, daß die Bewegung des Wassers den allgemeinen Sätzen der Mechanik, also namentlich der dynamischen Grundgleichung, unterworfen ist. Daß die Gleichungen, die dies aussprechen, erst in zweiter Linie, nämlich nach der Kontinuitätsgleichung, in Betracht kommen, rührt davon her, daß die an den Wasserteilchen wirkenden Kräfte auch erst nachträglich so gewählt werden können, daß irgendeine an sich (d. h. geometrisch) mögliche Bewegung zustande kommt, während eine Bewegung, die der Kontinuitätsbedingung nicht von vornherein genügt, überhaupt nicht verwirklicht werden kann.

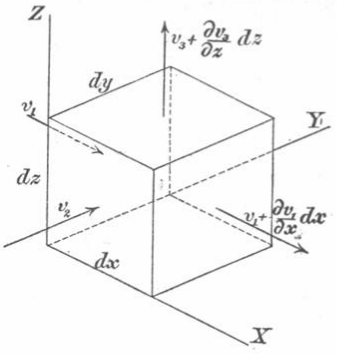

Abb. 70.

Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung in der Eulerschen Form betrachte man das in Abb. 70 gezeichnete Raumelement mit den Kantenlängen dx, dy, dz. Wir fragen uns zunächst, wie viel Wasser, auf die Zeiteinheit bezogen, im Augenblicke durch das in der YZ-Ebene liegende Rechteck einströmt Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sei ebenfalls in ihre rechtwinkligen Komponenten v_1, v_2, v_3 zerlegt. Die Komponenten v_2 und v_3 tragen hier zur Einströmung nichts bei; es kommt bei dem fraglichen Rechtecke nur auf die Normalkomponente v_1 an. Wenn diese positiv ist, also im Sinne der positiven X-Achse geht, findet eine Einströmung statt, die während der Zeiteinheit dem Parallelepipede das Wasservolumen $v_1\, dy\, dz$ zuführt. Gleichzeitig strömt durch die gegenüberliegende Seitenfläche eine Wassermenge aus, die ebenso groß wäre, als die zugeführte, wenn sich v_1 mit x nicht änderte. Im allgemeinen wächst aber v_1 um das Differential $\frac{\partial v_1}{\partial x} dx$, wenn man um dx

weiter geht. Wenn man beide Flächen zusammenfaßt, hat man daher einen Überschuß der Ausströmung über die Einströmung vom Betrage

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} dx \cdot dy\, dz.$$

In gleicher Weise kann man auch eine Zusammenfassung für die beiden zur Y-Achse senkrecht stehenden Seitenflächen vornehmen und erhält dann als Überschuß der Ausströmung über die Einströmung

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} dy \cdot dx\, dz$$

und ebenso für die beiden zur Z-Achse senkrechten Seitenflächen. Im ganzen strömt daher auf die Zeiteinheit bezogen aus dem Parallelepiped das Flüssigkeitsvolumen

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

mehr aus, als ein. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar (und unausdehnbar) angesehen wird, kann jedoch nur ebenso viel ausströmen, als einströmen und man erkennt daraus, daß $\mathfrak{v}$ in diesem Falle keine ganz willkürliche Funktion von $\mathfrak{r}$ sein kann, sondern nur eine solche, die den vorhergehenden Ausdruck zu Null macht. Es macht aber hier gar keine Schwierigkeit, die Betrachtung gleich noch etwas allgemeiner zu fassen und wir wollen daher die Voraussetzung der Unzusammendrückbarkeit für den Augenblick fallen lassen. Dann kann während eines Zeitelementes dt in der Tat mehr Flüssigkeit aus dem Raumelemente ausströmen, als einströmt, und zwar geschieht dies auf Kosten des darin enthaltenen Vorrats an Flüssigkeit, die sich dabei ausdehnt. Zur näheren Verfolgung dieses Zusammenhangs führe ich den Begriff der bezogenen Masse μ ein, also jener Masse, die bei überall gleicher Dichte auf die Raumeinheit käme. Für die zusammendrückbare Flüssigkeit ist μ nicht konstant, sondern nach der Eulerschen Darstellung eine Funktion von $\mathfrak{r}$ und t.

Die durch eine Seitenfläche des Raumelementes strömende Flüssigkeitsmasse wird aus deren Volumen durch Multiplikation

mit μ gefunden. Hiernach erhält man für die im ganzen während des Zeitelementes dt aus dem Raumelemente mehr aus- als einströmende Flüssigkeitsmasse den Wert

$$\left(\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \cdot dt.$$

Andererseits kann die Änderung, die der Flüssigkeitsvorrat $\mu\, dx\, dy\, dz$ in dem Raumelemente während der Zeit dt erfuhr, auch durch

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}\, dt \cdot dx\, dy\, dz$$

ausgedrückt werden. Dieser Ausdruck würde indessen bei positivem Vorzeichen eine Zunahme, der andere eine Abnahme des Flüssigkeitsinhalts angeben; beide sind daher von gleichem Werte, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Hiermit erhält man sofort die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z} = -\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{220}$$

Setzen wir dagegen weiterhin die Flüssigkeit wieder als unzusammendrückbar voraus, so ist μ konstant und die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0. \tag{221}$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurden allen Größen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Man erkennt aber, daß die Summe der drei Differentialquotienten auf der linken Seite von der speziellen Wahl, die man für dieses Koordinatensystem getroffen hat, ganz unabhängig ist, oder daß sie, wie man sich ausdrückt, eine invariante Größe ist. Dies folgt aus der physikalischen Bedeutung, die dieser Summe zukommt: wir sahen nämlich, daß das Produkt der Summe mit dem Volumen des Raumelementes, die während der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge angibt. Daß dies auch für jedes anders gestaltete Raumelement noch zutrifft, folgt daraus, daß sich ein solches aus Elementen höherer Ordnung von parallelepipedischer Gestalt zusammensetzen läßt. Die Summe der drei Differential-

quotienten gibt demnach an, wieviel Flüssigkeit, auf die Raumeinheit und auf die Zeiteinheit bezogen, aus irgendeinem Volumenelemente an der betreffenden Stelle und zur gegebenen Zeit ausströmt.

Es ist wünschenwert, diese Größe, die an sich mit einem Koordinatensysteme gar nichts zu schaffen hat, wenn sie auch auf ein solches bezogen werden kann, in einfacherer Weise zu bezeichnen. Man hat dafür die Bezeichnungen Divergenz oder Quelle eingeführt. In der Tat divergiert ja die Flüssigkeit — indem sie sich ausdehnt — an der betreffenden Stelle, wenn die Summe der drei Differentialquotienten positiv ist und man kann auch sagen, daß die Strömung nach außen hin so ist, als wenn sie durch eine im Inneren gelegene Quelle hervorgerufen wäre. In den Formeln schreibt man Divergenz abgekürzt div, setzt also

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{222}$$

womit der Begriff der Divergenz seine nähere Feststellung erhält. Mit Benutzung dieser Bezeichnung kann die Eulersche Kontinuitätsgleichung für die unzusammendrückbare Flüssigkeit auch in der einfachen Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{223}$$

angeschrieben werden.

Die Flüssigkeitsbewegung muß ferner auch dem dynamischen Grundgesetze unterworfen sein. Um dies in einer Gleichung aussprechen zu können, müssen wir zunächst einen Ausdruck für die Beschleunigung und einen für die Resultierende der an einem Massenteilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte aufstellen. Die Beschleunigung wird hier nicht dadurch gefunden, daß man die durch die Gl. (217)

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t)$$

als Funktion der Zeit t dargestellte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nach t differentiiert. Der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ gibt vielmehr nur an, wie sich die Geschwindigkeit an dem gerade ins Auge gefaßten Orte im Laufe der Zeit ändert, während die Beschleuni-

gung die Geschwindigkeitsänderung eines bestimmten Massenteilchens darstellt. Man bedenke, daß sich ein zur Flüssigkeit gehöriger materieller Punkt im Laufe der Zeit dt um $\mathfrak{v}\,dt$ verschoben hat. Wenn nun, wie in der Eulerschen Untersuchungsmethode, $\mathfrak{v}$ als Funktion der Zeit und des Ortes dargestellt ist, setzt sich die Änderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des bestimmten Massenteilchens zusammen aus der Änderung wegen der Verschiebung $\mathfrak{v}\,dt$ nach einem anderen Orte und aus der Änderung, die $\mathfrak{v}$ auch ohne diese Verschiebung während der Zeit dt schon am gleichen Orte erfährt. Wir wollen dies in der Form

$$d\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}\,dt + (\mathfrak{v}\,dt \cdot \nabla)\,\mathfrak{v}$$

anschreiben, zu deren Erklärung die Bemerkung genügt, daß das Zeichen ∇ einen Differentialoperator vorstellt, der nach Hinzutritt des Faktors $\mathfrak{v}\,dt$ die durch die Verschiebung um $\mathfrak{v}\,dt$ hervorgebrachte Änderung von $\mathfrak{v}$ angibt. Die Beschleunigung mag im Gegensatze zu dem vorher schon eingeführten partiellen Differentialquotienten als totaler Differentialquotient von $\mathfrak{v}$ nach t angeschrieben werden. Man findet dann aus der vorhergehenden Gleichung nach Division mit dt

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla) \cdot \mathfrak{v}. \tag{224}$$

Ich habe diese Beziehung zunächst in Gestalt einer Vektorgleichung angeschrieben, weil sie so am anschaulichsten hervortritt. Da aber die vollständige Durchführung der Rechnung mit Vektoren den damit weniger vertrauten Lesern Schwierigkeiten bereiten würde, ziehe ich es vor, weiterhin die gewohnte Kartesische Darstellungsweise zu benützen.

Ich spalte also Gl. (224) in drei Gleichungen, von denen die erste den Wert von $\frac{dv_1}{dt}$, also die Beschleunigungskomponente in der Richtung der X-Achse anzugeben hat. Man erhält dafür

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}. \tag{225}$$

Dieses Resultat kann entweder unmittelbar aus Gl. (224) abgelesen werden, indem man sich des zuvor angegebenen Sinnes der Operation $(\mathfrak{v}\nabla)$ erinnert oder man kann auch auf Grund derselben Überlegung, die schon zu Gl. (224) führte, unmittelbar zu Gl. (225) gelangen. Auch die Änderung der Geschwindigkeitskomponente v_1 während eines Zeitelementes dt für einen bestimmten materiellen Punkt setzt sich zusammen aus der Änderung, die v_1 unabhängig von der Verschiebung während dt erleidet und aus der Änderung, die mit dem Ortswechsel verbunden ist. Da sich der materielle Punkt in den Richtungen der Achsen während dt um die Strecken $v_1 dt$, $v_2 dt$, $v_3 dt$ verschiebt, setzt sich auch die mit dem Ortswechsel verbundene Änderung von v_1 aus drei Gliedern zusammen, die durch Multiplikation dieser Wege mit den Differentialquotienten von v_1 nach den drei Achsenrichtungen erhalten werden. Dividiert man die auf solche Art erhaltene Gleichung mit dt, so erhält man Gl. (225). Dieser lassen sich natürlich noch zwei andere für v_2 und v_3 anreihen und im ganzen wird daher Gl. (224) durch den Verein der folgenden drei Gleichungen ersetzt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\\
\frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \qquad (226)$$

Wir kommen jetzt zu den Kräften, die diese Beschleunigungen hervorbringen. Von außen her wirkt auf die im Innern liegenden Teile der Flüssigkeit in der Regel nur das Gewicht ein; allgemein mögen aber die drei Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen äußeren Kraft nach den Koordinatenachsen mit XYZ bezeichnet werden. Außerdem wirkt an jedem Massenteilchen noch der Druck der ringsum angrenzenden Flüssigkeit. Man denke sich wieder ein Parallelepiped wie in Abb. 70 aus der Flüssigkeit abgegrenzt. Wenn wir uns zunächst auf die Betrachtung einer reibungsfreien Flüssigkeit

beschränken, steht der Druck auf jede Seitenfläche senkrecht zur Seitenfläche und geht durch deren Schwerpunkt, also auch durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds. Die Druckkräfte auf allen Seitenflächen lassen sich daher zu einer Resultierenden zusammensetzen, die ebenfalls durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds geht. Auch die äußere Kraft, also in den gewöhnlich vorliegenden Fällen das Gewicht, geht durch diesen Mittelpunkt. Hieraus erkennt man schon, daß die Kräfte an dem in der angegebenen Weise abgegrenzten Wasserkörper keine Drehung, sondern nur eine Translation hervorzubringen suchen; auf diesen Punkt wird in der Folge noch zurückzukommen sein.

Wir wollen jetzt die in der Richtung der X-Achse gehende Komponente der Resultierenden aller an dem betrachteten Wasserkörper angreifenden Kräfte berechnen. Sie setzt sich zusammen aus der Komponente $X dx dy dz$ der äußeren Kraft und aus dem Unterschiede des Flüssigkeitsdruckes auf den beiden zur X-Achse senkrecht stehenden Seitenflächen. Der Flüssigkeitsdruck auf die Flächeneinheit bezogen sei p; falls p wächst, wenn man in der X-Richtung weitergeht, überwiegt der Druck auf jener Seite, deren äußere Normale in die positive X-Richtung fällt und auf der der Druck daher dieser positiven Richtung entgegengesetzt ist. Demnach erhält man für die X-Komponente der Resultierenden

$$X dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy dz .$$

Diese Komponente bringt die Beschleunigungskomponente $\frac{dv_1}{dt}$ der Masse $\mu dx dy dz$ hervor. Nach der dynamischen Grundgleichung hat man daher bei Weglassung des gemeinsamen Faktors $dx dy dz$ die Beziehung

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (227)$$

und für die beiden anderen Koordinatenrichtungen gilt eine entsprechende Gleichung. Setzt man noch die Werte der Beschleunigungskomponenten aus den Gl. (226) ein, so erhält man

die Eulerschen Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)&\\
= X-\frac{\partial p}{\partial x}&=-\frac{\partial}{\partial x}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)&\\
= Y-\frac{\partial p}{\partial y}&=-\frac{\partial}{\partial y}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)&\\
= Z-\frac{\partial p}{\partial z}&=-\frac{\partial}{\partial z}(V+p)
\end{aligned}\right\}. \qquad (228)$$

Die Umformung, die noch mit den rechten Seiten vorgenommen wurde, bezieht sich auf den Fall, daß die äußere Massenkraft mit den Komponenten XYZ von einem Potentiale V abgeleitet werden kann, was in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, daß diese Kraft nur in dem Gewichte besteht, stets zutrifft. Dabei ist die Flüssigkeit als unzusammendrückbar vorausgesetzt. Man erkennt übrigens leicht, wie die vorausgehende Entwicklung auch für den Fall einer elastischen Flüssigkeit benutzt werden kann. — Durch die Kontinuitätsgleichung in Verbindung mit den Gl. (228) und auch in Verbindung mit den Grenz- und Anfangsbedingungen ist die Bewegung der unzusammendrückbaren Flüssigkeit dynamisch vollständig gekennzeichnet; bei den elastischen Flüssigkeiten muß noch eine aus der Erfahrung zu entnehmende Beziehung zwischen μ und p hinzutreten, um das Problem eindeutig zu umgrenzen.

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß sich die Gl. (228) auch in eine einzige Gleichung zwischen gerichteten Größen zusammenfassen lassen, nämlich in die Gleichung

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\right)=\mathfrak{P}-\nabla p=-\nabla(V+p), \qquad (229)$$

in der $\mathfrak{P}$ die Resultierende der XYZ bedeutet.

§ 51. Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung.

Die in der Überschrift angedeutete Einteilung der Flüssigkeitsbewegungen in zwei wesentlich voneinander verschiedene Klassen ist von größter Bedeutung für die Hydrodynamik. Man betrachte den augenblicklichen Bewegungszustand der Flüssigkeit zu irgendeiner Zeit. Jedem Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ist dann eine bestimmte augenblickliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zugeordnet (die auch gleich Null sein kann). Man grenze ferner in der Flüssigkeit noch einen einfach zusammenhängenden Raum von im übrigen beliebiger Gestalt ab und ziehe innerhalb dieses Raumes eine zum Anfangspunkt zurücklaufende, sonst aber beliebige Linie. Ein Element dieser Linie sei mit $d\mathfrak{s}$, die Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ soll das innere Produkt genommen und dann soll die Summe dieser Produkte für alle Linienelemente der geschlossenen Linie gebildet werden. Diese Summe heißt das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs des durch die beliebig gewählte geschlossene Linie dargestellten Integrationsweges. Wenn das Linienintegral stets gleich Null wird, wie man auch den Integrationsweg innerhalb des Bezirks, den wir zu diesem Zwecke willkürlich abgegrenzt hatten, wählen möge, wird die Bewegung innerhalb des Bezirks als wirbelfrei bezeichnet. Trifft dasselbe Kennzeichen auch noch zu für jeden Bezirk, den man abgrenzen mag und auch für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum, so ist die Bewegung überall wirbelfrei. In Form der Gleichung

$$\int_0^0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0, \tag{230}$$

die sich auf einen beliebigen, vom Anfangspunkte O ausgehenden und nach diesem wieder zurückführenden Integrationsweg bezieht, läßt sich demnach die Bedingung, der die wirbelfreie Bewegung genügen muß, in einfachster Weise aussprechen.

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als

eine „wirbelfreie“ bezeichnet, ergibt sich aus einer einfachen Betrachtung. In der Umgangssprache bezeichnet man als „Wasserwirbel“ eine Bewegungsform, bei der die einzelnen Wasserteilchen in sich zurücklaufende Bahnen beschreiben. Allgemein bekannt ist die Erscheinung aus der Beobachtung der Strömung in Flußläufen, bei der sich namentlich in der Nähe von Bewegungshindernissen, etwa von Brückenpfeilern, leicht Wirbel ausbilden, die sich an den Bewegungen kleiner Körper, die von dem Wasser mitgeführt werden, leicht erkennen lassen. Es macht dabei auch nichts aus, wenn zu dieser wirbelnden Bewegung noch andere Bewegungskomponenten hinzutreten, die etwa den Wirbel flußabwärts führen. Beschränkt sich die Wasserbewegung auf die Bewegung längs geschlossener Bahnen und wählt man eine dieser Bahnen als den Integrationsweg für die Bildung des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$, so ist dieses jedenfalls positiv, da $\mathfrak{v}$ mit $d\mathfrak{s}$ überall gleichgerichtet ist. Die in Gl. (230) als Kennzeichen für die wirbelfreie Bewegung aufgestellte Bedingung ist daher im vorliegenden einfachsten Falle schon in bester Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche. Wir bemerkten aber schon, daß zu der wirbelnden Bewegung auch noch andere Bewegungskomponenten hinzutreten können, die zu den Wirbeln selbst nichts beitragen. Diesem Umstande trägt die vorher aufgestellte Definition Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermaßen als wirbelverdächtig zu betrachten. Zu einer in sich längs einer solchen Bahn zurücklaufenden Bewegung tragen nur jene Geschwindigskomponenten etwas bei, die überall in die Bahnrichtung fallen und nur diese sind es auch in der Tat, die in dem inneren Produkte $\mathfrak{v}d\mathfrak{s}$ zur Geltung kommen. Hat also das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ einen von Null verschiedenen Wert, so zeigt dies wenigstens einen Überschuß der tangentialen Bewegungskomponenten in einem Umlaufssinne über die im entgegengesetzten Sinne an und man kann sagen, daß im ganzen genommen die Wasserbewegung mit einem bestimmten Umlaufsinne längs des Integrationsweges übereinstimmt. — Freilich ist das durch Gl. (230) angegebene

Kennzeichen mit dem Begriffe der Wirbelbewegung in der Umgangssprache, der keine strenge Abgrenzung besitzt, nicht geradezu identisch; es widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder als eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden. Bei der wissenschaftlichen Untersuchung einer allgemein bekannten und vom Volksmunde nach seiner Art schon beschriebenen Erscheinung ist man nur selten in der glücklichen Lage, wie hier, ohne weiteres an den gewöhnlichen Sprachgebrauch anknüpfen zu können.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen betrachte ich noch die Bewegung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig in sich geschlossenen Rohres. Die Bewegung kann in diesem Falle so erfolgen, das etwa für jeden kugelförmigen Bezirk, den man im Innern der Flüssigkeit abgrenzen mag, Gl. (230) erfüllt ist. Für einen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise schließt, ist sie aber natürlich nicht erfüllt. Der Grund für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, daß der Sitz des Wirbels in diesem Falle an den Flüssigkeitsgrenzen liegt. Im ganzen genommen ist die Bewegung jedenfalls nicht wirbelfrei, wenn sie auch für jeden einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbelfrei sein kann.

Die allgemeinste Bewegung einer Flüssigkeit ist natürlich eine solche, mit der Wirbel verbunden sind; die wirbelfreie Bewegung stellt nur einen besonders einfachen Ausnahmefall dar. Ganz streng ist die Bewegung der Wirbelfreiheit bei einer wirklichen Wasserbewegung überhaupt niemals erfüllt. Die Bewegung kann sich aber der wirbelfreien unter gewissen Umständen sehr nähern und es ist daher von Interesse, die Gesetze dieser einfachsten Bewegungsart kennen zu lernen. In der Tat beziehen sich auch ihrem Umfange nach die meisten Untersuchungen der heutigen Hydrodynamik auf die wirbelfreie Bewegung. Daß eine solche Abgrenzung des Untersuchungsgebietes möglich und in sich einwandfrei ist, beruht auf einem von Lagrange aufgestellten Satze, der hier abgeleitet werden soll.

In einem bestimmten Augenblicke sei in der Wassermasse eine beliebige geschlossene Linie gezogen und für diese das in Gl. (230) vorkommende Linienintegral von $\mathfrak{v}$ berechnet. Die Bewegung braucht jetzt nicht wirbelfrei zu sein und das Linienintegral wird daher im allgemeinen irgendeinen von Null verschiedenen Wert A

$$A = \int \mathfrak{v} d\mathfrak{s}$$

annehmen. Nach Ablauf eines Zeitelementes dt haben sich die einzelnen Wasserteilchen um Strecken $\mathfrak{v} dt$ verschoben und jene, die vorher auf dem gewählten Integrationswege lagen, werden, wenn keine diskontinuierlichen Bewegungen vorkommen, abermals auf einer stetigen geschlossenen Linie liegen. Für diese und für den jetzt herrschenden Bewegungszustand soll das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ ebenfalls berechnet sein. Der Unterschied gegenüber dem früheren Werte sei mit δA bezeichnet. Dann ist

$$\delta A = \int \delta \mathfrak{v} d\mathfrak{s} + \int \mathfrak{v} \delta d\mathfrak{s}, \tag{231}$$

wobei zunächst

$$\delta \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} dt$$

gesetzt werden kann. Die Beschleunigung $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ folgt aus dem dynamischen Grundgesetze, und zwar, wenn wir zur Abkürzung die im vorigen Paragraphen erklärten Bezeichnungen benutzen, zu

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{1}{\mu}(\mathfrak{P} - \nabla p) = -\frac{1}{\mu}\nabla(V + p).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die äußere Kraft $\mathfrak{P}$ von einem Potentiale V abgeleitet werden kann.

Um $\delta d\mathfrak{s}$ zu berechnen, beachten wir, daß sich der Vektor $d\mathfrak{s}$ durch eine Parallelverschiebung nicht ändert, und daß daher $\delta d\mathfrak{s}$ nur von dem Unterschiede der Verschiebungen der Endpunkte von $d\mathfrak{s}$, dieser aber von dem Geschwindigkeitsunterschiede abhängt. Wir können daher setzen

$$\delta d\mathfrak{s} = (d\mathfrak{s}\nabla)\mathfrak{v} dt,$$

wenn wir das Operationszeichen $(d\mathfrak{s}\nabla)$ in dem durch den Zusammenhang selbst schon genügend erklärten Sinne verwenden. Ferner wird aber, wenn wir beachten, daß es sich dabei um eine Differentiation nach einer bestimmt vorgeschriebenen Richtung handelt

$$\mathfrak{v}\delta d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}(d\mathfrak{s}\nabla)\mathfrak{v}dt = (d\mathfrak{s}\nabla)\frac{\mathfrak{v}^2}{2}dt$$

und im ganzen erhält man daher für δA

$$\delta A = -\frac{1}{\mu}dt\int(d\mathfrak{s}\nabla)(V+p) + dt\int(d\mathfrak{s}\nabla)\frac{\mathfrak{v}^2}{2}.$$

Die Summe der Änderungen einer stetigen und eindeutigen Funktion längs der Linienelemente einer Kurve ist aber gleich dem Unterschiede der Funktionswerte im Endpunkte und Anfangspunkte des Kurvenstücks und daher für eine geschlossene Kurve gleich Null. Wir erhalten daher unter den gemachten Voraussetzungen, von denen noch besonders hervorzuheben ist, daß μ konstant, die Flüssigkeit reibungsfrei und das Kraftfeld der äußeren Kräfte wirbelfrei sein sollte,

$$\delta A = 0. \tag{232}$$

Das gilt auch noch von einer Wirbelbewegung unter den angenommenen Voraussetzungen. War aber A anfänglich für jeden geschlossenen Integrationsweg gleich Null, so bleibt es auch dauernd gleich Null.

Wenn die Bewegung einer raumbeständigen und reibungsfreien Flüssigkeit, auf die von außen her nur solche Massenkräfte einwirken, die sich (wie das Gewicht) von einem Potentiale ableiten lassen, zu irgendeiner Zeit wirbelfrei war, so bleibt sie auch weiterhin wirbelfrei. Insbesondere ist die Bewegung wirbelfrei, wenn sie unter dem Einflusse von Kräften der bezeichneten Art aus dem Ruhezustande hervorgegangen ist.

Das ist der Satz von Lagrange, für den sein Urheber freilich keinen stichhaltigen Beweis gegeben hatte. Der hier wiedergegebene Beweis rührt (den Grundzügen nach) von Lord Kelvin her.

Erst durch diesen Satz erlangen die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung die ihnen in der Hydrodynamik mit Recht eingeräumte Bedeutung. Es ist nur zu billigen, daß man sich zunächst Rechenschaft darüber zu geben sucht, was geschehen müßte, wenn weder die Zähigkeit noch die durch Dichteunterschiede hervorgerufene Mischbewegung in Betracht käme. Freilich darf man aber dabei nicht vergessen, daß keine genaue Übereinstimmung zwischen diesem einfachsten Falle und dem wirklichen Bewegungsvorgange erwartet werden darf.

Um zu zeigen, welche Vereinfachungen der theoretischen Behandlung entstehen, wenn man sich auf die Untersuchung wirbelfreier Strömungen beschränkt, erinnere ich an die Betrachtungen des ersten Abschnittes über die Kraftfelder.

An die Stelle des Linienintegrals der Kraft ist hier nur das Linienintegral der Geschwindigkeit getreten, während sich sonst nichts geändert hat. Es ist daher nicht nötig, die in § 3 durchgeführten Betrachtungen über das Potential hier nochmals zu wiederholen; wir können vielmehr die Schlüsse, zu denen wir damals gelangten, auf den jetzt vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen. Von diesen ist für uns namentlich von Wichtigkeit, daß sich im wirbelfreien Felde der Vektor des Feldes durch Differentiation aus einer richtungslosen Größe ableiten läßt, die früher als das Potential des Kraftfeldes bezeichnet wurde. Auch bei der wirbelfreien Wasserbewegung muß sich aus denselben Gründen wie damals zu jedem Punkte des Raumes in einem gegebenen Augenblicke eine Größe ohne Richtung angeben lassen, aus der die Geschwindigkeitskomponente nach irgendeiner Richtung durch Differentiation nach dieser Richtung abgeleitet werden kann. Man bezeichnet diese Größe, um die enge Verwandtschaft mit den früheren Betrachtungen über die Kraftfelder ausdrücklich hervorzuheben, als das Geschwindigkeitspotential, obschon die sprachliche Herkunft des Wortes Potential mit der Verwendung, die das Wort hier findet, nichts zu tun hat. Das Geschwindigkeits-

potential sei in der Folge mit Φ bezeichnet; ich setze dann

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{233}$$

Hier findet freilich eine Abweichung im Vorzeichen von den früheren Festsetzungen über das Potential der Kraftfelder (vgl. Gl. (12), S. 21) statt. Damals war es mir von Wichtigkeit, an dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten des Potentials festzuhalten, weil das Potential des Kraftfeldes nur bei dieser Vorzeichenfestsetzung mit der potentiellen Energie des Feldes gleichbedeutend werden kann. Beim Geschwindigkeitspotential fällt aber ein solcher bestimmender Grund weg und wir können uns daher das Vorzeichen von Φ von vornherein so gewählt denken, daß die Differentialquotienten, ohne daß ein Vorzeichenwechsel vorauszugehen brauchte, unmittelbar die Geschwindigkeitskomponenten angeben. In der Tat ist es allgemeiner Brauch, das Geschwindigkeitspotential mit der durch die Gl. (233) bereits zum Ausdrucke gebrachten Vorzeichenfestsetzung zu benutzen.

Differentiiert man die erste der Gl. (233) nach y und die zweite nach x und subtrahiert, so erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

und dazu treten noch zwei andere Gleichungen, die in derselben Weise gewonnen werden können. Diese Gleichungen geben die Bedingung an, der die Geschwindigkeitskomponenten genügen müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll. Damit werden wir in den Stand gesetzt, die Bedingung für die wirbelfreie Bewegung noch in anderer Form auszusprechen, als dies schon mit Hilfe des Linienintegrals in Gl. (230) geschehen war. Man bilde nämlich eine gerichtete Größe $\mathfrak{w}$, deren Komponenten nach den Achsenrichtungen gleich den Differenzen von Differentialquotienten sind, die in dem vorausgehenden Ausdrucke vorkommen, nämlich

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \tag{234}$$

Die Größe $\mathfrak{w}$ wird nur dann zu Null, wenn alle drei Komponenten für sich verschwinden. Wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll, also wenn die Bewegung wirbelfrei sein soll, müssen aber diese Komponenten, wie aus dem Vergleiche mit den Gl. (233) hervorgeht, sämtlich zu Null werden. Als Bedingung für die wirbelfreie Wasserbewegung kann man daher auch die Gleichung

$$\mathfrak{w} = 0 \tag{235}$$

an Stelle von Gl. (230) aufstellen. Jedenfalls ist diese Bedingung eine notwendige; daß sie auch hinreichend ist, läßt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen noch nicht erkennen. Da dieser Nachweis für die Folge nicht nötig ist, werde ich davon absehen, ihn hier ebenfalls zu führen; näheres darüber findet man in meiner „Geometrie der Wirbelfelder". Nur dies möchte ich noch erwähnen, daß man mit Hilfe eines von Stokes aufgestellten Satzes den unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Gl. (230) und (235) in einfachster Weise erkennen kann.

Wenn das Feld nicht wirbelfrei ist, entsteht das Bedürfnis nach einem Maße für den Wirbel, oder vielleicht besser gesagt, nach einem Maße dafür, in welchem Grade und in welcher Art die Bewegung von der wirbelfreien abweicht. Hierzu kann die durch Gl. (234) definierte gerichtete Größe $\mathfrak{w}$ ohne weiteres benützt werden, da ihr Verschwinden die Bedingung für das Nichtvorhandensein von Wirbeln innerhalb eines Bezirks bildet, der der gerade betrachteten Stelle eng benachbart ist. An Stelle der Größe $\mathfrak{w}$ selbst kann auch irgendein Vielfaches davon als Maß des Wirbels benutzt werden. Helmholtz, dem man die ersten Untersuchungen über die Wirbelbewegungen verdankt, hat dazu die Hälfte von $\mathfrak{w}$ gewählt, und zwar auf Grund eines Vergleichs der Wasserbewegung in einem engen Bezirke mit der Bewegung eines starren Körpers. Die Hälfte von $\mathfrak{w}$ entspricht dann der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers.

Die große Bedeutung des Wirbelbegriffes beschänkt sich

übrigens nicht auf die Hydrodynamik, sondern sie tritt in der Elektrizitätslehre fast noch mehr hervor. Es hat sich daher die Notwendigkeit herausgestellt, eine einfache Bezeichnung für den analytischen Zusammenhang zwischen dem Wirbel $\mathfrak{w}$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ einzuführen. Gl. (234) gestattet zunächst, $\mathfrak{w}$ unter Zugrundelegung eines Koordinatensystems zu berechnen, wenn $\mathfrak{v}$ überall gegeben ist. Aus der physikalischen Bedeutung des Vektors $\mathfrak{w}$ folgt aber schon, daß $\mathfrak{w}$ von der besonderen Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein muß. Es ist daher zweckmäßiger, bei der Angabe des Zusammenhangs zwischen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ die Bezugnahme auf ein Koordinatensystem zu vermeiden. Man nennt $\mathfrak{w}$ den Quirl von $\mathfrak{v}$, und setzt mit Benutzung der ursprünglichen englischen (von Maxwell eingeführten) Bezeichnung

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} \tag{236}$$

(curl = Quirl). Bei der wirklichen Ausrechnung von $\mathfrak{w}$ ist man freilich sehr oft genötigt, auf die mit Gl. (236) gleichbedeutenden Gl. (234) wieder zurückzugehen.

§ 52. Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfreie Bewegung.

Die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen werden für den Fall der wirbelfreien Bewegung am besten so umgeformt, daß alle Geschwindigkeitskomponenten im Geschwindigkeitspotentiale Φ mit Hilfe der Gl. (233) ausgedrückt werden. Sie vereinfachen sich dann erheblich. Die Kontinuitätsgleichung (221) nimmt dann die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{237}$$

an, wofür man mit Benutzung des schon von früher her bekannten Laplaceschen Operators ∇^2 kürzer

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{238}$$

schreiben kann. Ferner findet man für den in Gl. (225) angegebenen Ausdruck für die Beschleunigungskomponente in

der X-Achse, nämlich

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}$$

nach Einsetzen von

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

jetzt

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}.$$

Die drei letzten Glieder in diesem Ausdrucke bilden den partiellen Differentialquotienten nach x von

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] \text{ oder von } \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2,$$

wenn $\mathfrak{v}$ wieder die Gesamtgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle nach Größe und Richtung bedeutet, wobei man beachten möge, daß das Quadrat (oder das innere Produkt mit sich selbst) einer gerichteten Größe eine Größe ohne Richtung angibt. Setzt man dies ein, so erhält man die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{239}$$

Die in Gl. (228) zusammengestellten Eulerschen Gleichungen gehen nun — immer unter der Voraussetzung, daß die äußere Massenkraft von einem Potentiale V abgeleitet werden kann — über in

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} &= -\frac{\partial}{\partial x}(V+p) \\ \mu\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} &= -\frac{\partial}{\partial y}(V+p) \\ \mu\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} &= -\frac{\partial}{\partial z}(V+p) \end{aligned}\right\}. \tag{240}$$

Da nun μ für die raumbeständige Flüssigkeit, um die es sich bei diesen Betrachtungen allein handelt, konstant ist,

lassen sich die Gl. (240) zu einer einzigen Integralgleichung zusammenfassen. Sie sprechen ja in der Tat nur aus, daß sich die Größen, deren Differentialquotienten nach x, y und z miteinander übereinstimmen, nur um eine Größe voneinander unterscheiden können, die von diesen Veränderlichen unabhängig ist, während sie von t abhängig sein kann. Bezeichnen wir diese Größe mit $f(t)$, so liefert die Integration der Gl. (240)

$$\mu\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\} + V + p = f(t). \tag{241}$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Beziehung bei der stationären Flüssigkeitsströmung, also bei einer Bewegung, die sich dauernd in der gleichen Weise fortsetzt. Dann sind $\mathfrak{v}$, Φ, p zwar immer noch mit dem Orte veränderlich, an jedem Punkte des festen Raumes bleiben sie aber der Zeit nach konstant. Der Differentialquotient von Φ verschwindet dann in der vorausgehenden Gleichung und auch $f(t)$ muß der Zeit nach konstant, also überhaupt eine Konstante sein, weil alle übrigen in der Gleichung vorkommenden Größen von t unabhängig sind. Für die stationäre wirbelfreie Strömung hat man daher die einfache Beziehung

$$\frac{1}{2}\mu\mathfrak{v}^2 + V + p = C \tag{242}$$

oder in Worten: die Summe aus der kinetischen Energie, dem Potentiale der äußeren Kräfte (d. h. der potentiellen Energie) und dem Flüssigkeitsdrucke hat zu jeder Zeit und für alle Stellen des Raumes denselben Wert, wenn man diese Größen auf die Raumeinheit bzw. auf die Flächeneinheit bezieht. Dieses Resultat stimmt nahezu überein mit einem, das schon im ersten Bande § 58 auf viel einfacherem Wege gefunden und durch Gl. (139), 3. Aufl., ausgedrückt wurde. In einer Hinsicht besteht indessen zwischen beiden Resultaten doch ein sehr wesentlicher Unterschied. Das frühere Resultat galt nur für die Veränderlichkeit des Druckes in dem gleichen Stromfaden und es bleibt in diesem begrenzten Umfange, wie aus der Ableitung hervorgeht, auch dann noch gültig, wenn die Bewegung nicht wirbel-

frei ist, falls dabei nur von der Flüssigkeitsreibung abgesehen werden kann. Gl. (242) ist insofern viel allgemeiner gültig, als sie die Veränderlichkeit des Druckes auch dann noch angibt, wenn man von einem Punkte eines Stromfadens zu einem Punkte irgendeines anderen Stromfadens übergeht. Andererseits ist dagegen die Gültigkeit dieser erweiterten Beziehung an die Bedingung geknüpft, daß die Bewegung wirbelfrei ist. Ich bitte auf diesen wesentlichen Unterschied sorgfältig zu achten, da der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck bei der Theorie der hydraulischen Motoren in der theoretischen Maschinenlehre sehr häufig zum Ausgangspunkte der ganzen Entwicklung gemacht wird.

§ 53. Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit.

Ein fester kugelförmiger Körper möge sich in einer Flüssigkeit geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Es fragt sich, was für eine Kraft von außen her an ihm wirken muß, um diese Bewegung aufrecht zu erhalten. Dabei soll angenommen werden, daß sich der Körper hinlänglich weit von den Grenzflächen der Flüssigkeit entfernt befindet, um den Einfluß benachbarter Wände usf. vernachlässigen zu können. Wir drücken diese Voraussetzung am einfachsten dahin aus, daß wir die Flüssigkeit nach allen Seiten hin als unbegrenzt ansehen. In größerer Entfernung von der sich bewegenden Kugel soll die Flüssigkeit ruhen; in der Nachbarschaft der Kugel treten natürlich Strömungen auf, da die Flüssigkeit der Kugel während ihres Fortschreitens vorn ausweichen muß, während sie sich hinter ihr wieder zusammenschließt.

Wenn die Kugel in Ruhe wäre, würde die Flüssigkeit einen hydrostatischen Auftrieb an ihr ausüben und es müßte daher, um sie in Ruhe zu erhalten, eine lotrechte Kraft an ihr angebracht werden, die mit dem Gewichte der Kugel und

dem hydrostatischen Auftriebe Gleichgewicht herstellte. Denken wir uns nachher die Kugel in horizontaler Richtung durch die Flüssigkeit bewegt, so wird immer noch, um ein Verschieben in der lotrechten Richtung zu verhüten, durch eine äußere Kraft Gleichgewicht zwischen dem Auftriebe und dem Kugelgewichte hergestellt werden müssen. Diese Kraft ist einfach zu ermitteln und sie interessiert uns hier weiter nicht; von Interesse ist für uns nur die Kraft, die man in der Bewegungsrichtung aufwenden muß, um den Widerstand der Flüssigkeit gegen die Bewegung zu überwinden. Wir wollen uns deshalb die Kugel von vornherein von gleichem spezifischem Gewichte mit dem Wasser vorstellen, so daß sie im Ruhestande darin von selbst schwimmt. Wir können dann von der Einwirkung der Schwerkraft auf die Kugel und die Flüssigkeit ganz abgesehen; der Vorgang erfolgt so, als wenn die Schwere überhaupt nicht vorhanden wäre.

Wenn die Aufgabe in dieser Weise gestellt wird, haben wir es nicht mit einer stationären Strömung zu tun, da die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem bestimmten Punkte des festen Raumes wechselt, wenn die Kugel auf ihrer Bahn fortschreitet. Relativ zu einem Raume, der sich mit der Kugel ohne Drehung gleichförmig weiter bewegt, wird die Bewegung dagegen, nachdem sie schon längere Zeit angedauert hat, stationär sein. Man vereinfacht daher die Aufgabe, wenn man die Bewegung von einem solchen Raume aus beobachtet; Zusatzkräfte der Relativbewegung brauchen dabei nicht angebracht zu werden, da sich der Raum weder dreht, noch eine Translationsbeschleunignng besitzt. Einfacher läßt sich dies auch dahin ausdrücken, daß man sich die Kugel von vornherein an ihrer Stelle festgehalten denkt, während die Flüssigkeit an ihr vorüberströmt. Man kann sich die Kugel etwa in das Wasser eines Flusses versenkt denken, so daß sie hinreichend weit von dem Umfange des Flußbettes und der Wasseroberfläche entfernt bleibt. Bewegte sich das Wasser an dieser Stelle vor dem Einsenken der Kugel gleichförmig, so nämlich, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sowohl dem Orte als der Zeit nach in

diesem Bezirke konstant war, so wird dieselbe Kraft an der Kugel angebracht werden müssen, um sie vor dem Fortreißen mit der Strömung zu schützen, als wenn das Wasser ruhte und die Kugel sich im entgegengesetzten Sinne mit konstanter Geschwindigkeit bewegte. In dieser Form läßt sich die Aufgabe am einfachsten weiter behandeln.

Wir betrachten die Flüssigkeit als reibungsfrei und nehmen hiermit zugleich an, daß die Bewegung wirbelfrei sei. Die Wasserströmung ist dann vollständig bekannt, wenn man das von der Zeit unabhängige Geschwindigkeitspotential Φ anzugeben vermag. Da das Problem durch die auferlegten Bedingungen physikalisch vollständig bestimmt ist, muß auch Φ bis auf eine willkürliche Konstante, die man ihm nach Belieben zufügen darf, ohne an den daraus abgeleiteten Geschwindigkeitskomponenten etwas zu ändern, vollständig bestimmt sein. Falls man daher einen Ausdruck von Φ kennt, der allen Bedingungen genügt, ist dieser — abgesehen von jener willkürlichen Konstanten — der richtige. Wenn man will, kann man dies auch noch strenger beweisen, indem man zuerst annimmt, es wären zwei Werte von Φ möglich, die allen Bedingungen genügen, dann ihre Differenz bildet und zeigt, daß diese notwendig eine Konstante sein muß.

Dirichlet hat den Ausdruck von Φ, der den Bedingungen unserer Aufgabe genügt, gefunden, nämlich

$$\Phi = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right). \qquad (243)$$

Dabei ist angenommen, daß die positive Z-Achse in jene Richtung gelegt ist, in der die ungestörte Strömung der Flüssigkeit erfolgt; a ist die Geschwindigkeit dieser Strömung, ϱ der Radius der festgehaltenen Kugel und r die Entfernung jenes Punktes in der Flüssigkeit, für den Φ durch Gl. (243) angegeben wird, vom Kugelmittelpunkte, der als Koordinatenursprung dient. Auf die Orientierung der X- und der Y-Achse kommt offenbar nichts an, da rings um die Z-Achse alles symmetrisch ist. Für r hat man übrigens nach dem pythagoreischen

Lehrsatze die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{244}$$

mit deren Hilfe sofort die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \tag{245}$$

gebildet werden können. Um zu beweisen, daß der für Φ angegebene Ausdruck in der Tat die Lösung unseres Problems bildet, ermitteln wir zunächst die Geschwindigkeitskomponenten, die sich daraus ergeben. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichungen (245)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}xz \\ v_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}yz \\ v_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = a\left(\frac{\varrho^3}{2r^3}+1\right) - az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\frac{\partial r}{\partial z} \\ &= a\frac{\varrho^3}{2r^3} + a - a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z^2 \end{aligned}\right\}. \tag{246}$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten müssen vor allem der Kontinuitätsbedingung genügen. Um dies zu prüfen, stellen wir die Differentialquotienten nach x, y, z auf, nämlich

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z + a\frac{15\varrho^3}{2r^6}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot xz = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5x^2}{r^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5y^2}{r^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z - 2az\frac{3\varrho^3}{2r^5} + a\frac{15\varrho^3}{2r^7}z^3 = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5z^2}{r^2}-3\right).$$

Die Summe dieser drei Differentialquotienten oder $\nabla^2\Phi$ muß Null ergeben. In der Tat findet man aber beim Zusammenzählen

$$\nabla^2\Phi = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5x^2+5y^2+5z^2}{r^2}-5\right)$$

und dies wird mit Rücksicht auf Gl. (244) identisch zu Null. Damit ist zunächst gezeigt, daß die durch Φ angegebene Flüssigkeitsbewegung in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit geometrisch möglich ist.

Hierzu kommen noch die Grenzbedingungen. An der Kugeloberfläche muß die Flüssigkeit der Kugel ausweichen, d. h. die Geschwindigkeit der Flüssigkeit kann dort überall nur tangential gerichtet sein. Um dies zu untersuchen, denke man sich an irgendeiner Stelle der Kugeloberfläche eine Normale n nach außen hin gezogen. Die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung dieser Normalen wird erhalten, wenn man Φ in der Richtung der Normalen differentiiert, und wenn die Lösung richtig sein soll, muß dieser Wert überall gleich Null sein. Wir bilden den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = a\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right)\frac{\partial z}{\partial n} - az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Wenn man in der Richtung der Normalen um ∂n von der Kugelfläche weiter geht, wächst r um ∂n und man hat daher

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1.$$

Projiziert man ferner ∂n auf die Z-Achse, so erhält man das zugehörige ∂z, und da ∂n mit dem zur betreffenden Stelle gezogenen Radius r, dessen Projektion z ist, gleiche Richtung hat, besteht die Proportion

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{z}{r}.$$

Setzt man diese Werte ein, so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{az}{r}\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right) - az\frac{3\varrho^3}{2r^4} = \frac{az}{2r^4}(\varrho^3 + 2r^3 - 3\varrho^3)$$

und an der Kugeloberfläche wird dies in der Tat überall zu Null, weil dort $r = \varrho$ ist.

Schließlich muß noch in größerer (oder streng genommen in unendlicher) Entfernung von der Kugel die Flüssigkeit überall parallel zur Z-Achse mit der Geschwindigkeit a strömen. In der Tat wird aber, wie man aus den Gleichungen (246) erkennt, für $r = \infty$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = a.$$

Die Flüssigkeit strömt demnach überall so, wie es den geometrischen Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es bleibt

jetzt nur noch übrig, auf die Erfüllung der aus der dynamischen Grundgleichung hervorgegangenen Eulerschen Gleichungen zu achten. Für den Fall der stationären Strömung sind diese bereits in der Integralgleichung (242) zusammengefaßt. Da wir auf die Veränderlichkeit des Druckes mit der Höhe jetzt nicht zu achten brauchen, weil der Vorgang, wie bereits bemerkt, im übrigen so erfolgt, als wenn die Flüssigkeit und die Kugel der Schwere überhaupt nicht unterworfen wären, können wir diese Gleichung hier noch dadurch vereinfachen, daß wir das Potential konstant setzen und es in die Konstante C mit einrechnen. Wir haben dann

$$\frac{1}{2}\mu\mathfrak{v}^2 + p = C.$$

In unendlicher Entfernung von der Kugel wird $\mathfrak{v}^2 = a^2$ und wir erkennen daraus, daß dort auch überall derselbe Druck herrscht, so als wenn die Kugel nicht vorhanden wäre. Bezeichnen wir diesen Druck an den fernen Grenzen mit p_0, so findet man damit auch die Konstante C, nämlich

$$C = \frac{1}{2}\mu a^2 + p_0$$

und der Druck an irgendeiner anderen Stelle ist

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\mu(a^2 - \mathfrak{v}^2). \tag{247}$$

Hiermit ergibt sich auch der Druck, den die Flüssigkeit auf irgendeine Stelle der Kugeloberfläche ausübt, indem man

$$\mathfrak{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

bildet und die Werte aus den Gleichungen (246) einführt, wobei noch darauf zu achten ist, daß an der Kugeloberfläche $r = \varrho$ zu setzen ist und xyz Koordinaten eines Punktes der Kugelfläche bedeuten. Führt man dies aus und bezeichnet man die Geschwindigkeit irgendwo in nächster Nähe der Kugelfläche mit $\mathfrak{v}_\varrho$, so wird

$$\mathfrak{v}_\varrho^2 = \frac{9a^2}{4}\left(1 - \frac{z^2}{\varrho^2}\right). \tag{248}$$

Dort, wo die Z-Achse die Kugeloberfläche schneidet, wird $z = \varrho$

und daher $\mathfrak{v}_\varrho$ gleich Null, was schon von vornherein zu erwarten war. Am größten wird die Geschwindigkeit am Äquator der Kugel, der in die XY-Ebene fällt und für den $z = 0$ ist. Die Flüssigkeit strömt dort mit der Geschwindigkeit $\frac{3a}{2}$ an der Kugel vorüber. Der Druck p_ϱ an der Kugelfläche ist nach Gl. (247)

$$p_\varrho = p_0 + \frac{\mu a^2}{8}\left(9\frac{z^2}{\varrho^2} - 5\right). \tag{249}$$

In den Endpunkten des in der Richtung der Strömung gezogenen Durchmessers nimmt p_ϱ seinen größten Wert $p_{\max}$ an, nämlich

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\mu a^2}{2},$$

und zwar wird der Druck, worauf wohl zu achten ist, an der der Strömung abgekehrten Seite ebenso groß als an der der Strömung zugekehrten. Der kleinste Druck $p_{\min}$ herrscht am Äquator der Kugel, nämlich

$$p_{\min} = p_0 - \frac{5\mu a^2}{8}.$$

Wir setzen dabei voraus, daß p_0 groß genug ist, damit $p_{\min}$ positiv bleibt, weil sonst die Ausbildung eines Hohlraumes zu erwarten wäre.

Im übrigen ist p_ϱ eine gerade Funktion von z. Es ist daher für p_ϱ gleichgültig, ob das Vorzeichen von z positiv oder negativ ist, d. h. der Druck ist an entsprechenden Stellen der der Strömung abgewendeten Halbkugel genau ebenso groß als auf der ihr zugewendeten Halbkugel. Daraus folgt ohne weiteres, daß sich alle von der Flüssigkeit auf die Kugel übertragenen Druckkräfte im Gleichgewichte miteinander halten. Wir kommen daher zu dem unerwarteten Resultate, daß man überhaupt keine Kraft an der Kugel anzubringen braucht, um sie bei der wirbelfreien Strömung in der vollkommenen Flüssigkeit an ihrer Stelle festzuhalten; sie bleibt vielmehr von selbst stehen und läßt

die Flüssigkeit um sich herumfließen, ohne sich von der Stelle zu rühren.

Zugleich folgt daraus auch, daß sich der geradlinig gleichförmigen Bewegung einer Kugel durch eine vollkommene Flüssigkeit kein Widerstand entgegensetzt. Wenn das Wasser eine vollkommene Flüssigkeit wäre, in der auch keine Mischbewegungen vorkämen, brauchte man keine Arbeit aufzuwenden, um darauf zu fahren; nur zu Beginn der Fahrt wäre ein Anstoß erforderlich, um die Anfangsgeschwindigkeit herzustellen.

Das wirkliche Verhalten des Wassers ist natürlich ganz anders. Wir sind mit dem Widerstande, den das Wasser der Fortbewegung eines in ihm schwimmenden Körpers entgegensetzt, so bekannt, daß wir unwillkürlich geneigt sind, diesen Widerstand mit der Eigenschaft des Flüssigseins in Verbindung zu bringen und ihn daher auch bei einer vollkommenen Flüssigkeit vorauszusetzen. Unsere Untersuchung lehrt uns aber, daß diese Meinung irrig ist. Der Widerstand, den das Wasser schwimmenden Körpern entgegensetzt, kommt nicht davon her, daß das Wasser an sich ein flüssiger Körper ist, sondern davon, daß es nicht vollkommen flüssig ist, sowie ferner auch von den Mischbewegungen, auf die bei unserem Ansatze nicht gerechnet wurde. Über solche Fragen kann daher ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat nur aus Betrachtungen gewonnen werden, die auf diese Umstände Rücksicht nehmen. Ich möchte hier nur erwähnen, daß man die Aufgabe der sich durch das Wasser bewegenden Kugel auch mit Berücksichtigung der Zähigkeit gelöst und hierbei gefunden hat, daß das Wasser der Bewegung einen Widerstand entgegensetze, der der Geschwindigkeit (bei gleichförmiger Bewegung) proportional sei. Das gilt aber nur für sehr geringe Geschwindigkeiten und außerdem auch nur unter der Voraussetzung, daß die Mischbewegungen vernachlässigt werden dürfen. Die Erfahrung hingegen lehrt, daß bei größeren Geschwindigkeiten der Widerstand proportional mit dem Quadrate der Geschwindigkeit angenommen werden kann.

Daß die vollkommene Flüssigkeit der gleichförmigen Be-

wegung eines in ihr schwimmenden Körpers beim Fehlen von Mischbewegungen kein Hindernis zu bereiten vermag, läßt sich übrigens auch auf Grund einer ganz einfachen Betrachtung erkennen. Wäre ein solcher Widerstand zu überwinden, so müßte an dem Körper, um ihn in seiner Bewegung zu erhalten, eine Arbeit von außen her geleistet werden. Wohin sollte aber diese Energie gelangen? Bei der zähen Flüssigkeit wird Energie zur Überwindung der inneren Reibungen verbraucht und in Wärme verwandelt. Dasselbe gilt von dem Stoßverluste, der durch die Michbewegung hervorgerufen wird. Bei der vollkommenen Flüssigkeit ist aber in unserem Falle kein solcher Energieaufwand möglich; sie vermag überhaupt keine mechanische Energie aufzuzehren, außer wenn eine Mischung von Wasserteilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten stattfindet, bei der ebenso wie beim Stoße plastischer Körper mechanische Energie vernichtet werden kann. Auch die lebendige Kraft des ganzen Systems behält fortwährend denselben Wert und ins Unendliche vermag sich ebenfalls die Energie nicht zu zerstreuen. Da kein Energiebedarf vorliegt, um die Bewegung zu unterhalten, braucht dem bewegten Körper auch keine Energie zugeführt zu werden, d. h. der Widerstand der Flüssigkeit ist gleich Null. Diese Überlegung hat zugleich den Vorteil, daß sie sich nicht auf den kugelförmigen Körper beschränkt, sondern auch auf Körper von beliebiger Gestalt anwendbar ist.

Vor allem interessiert natürlich den Techniker bei diesen Betrachtungen der Widerstand, den ein Schiff auf seiner Fahrt findet. Für ein unterseeisches Boot, das nicht zu nahe an der Oberfläche schwimmt, könnten für die Bewegung in der vollkommenen Flüssigkeit ohne Mischbewegung die vorausgehenden Schlüsse ohne weiteres angewendet werden. Bei einem gewöhnlichen Schiffe, das nur zum Teile im Wasser schwimmt und sich im übrigen im Luftraume fortbewegt, muß aber noch eine wichtige Ergänzung hinzutreten. Der Luftwiderstand mag dabei übrigens gegenüber dem viel größeren Widerstande des Wassers vernachlässigt werden. Wir gehen wieder

auf die Bewegung der Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit zurück. Die Kugel mag sich in horizontaler Richtung bewegen; durch die Z-Achse, die mit der Bewegungsrichtung zusammenfiel, sei eine horizontale Ebene, etwa die YZ-Ebene, gelegt. Diese teilt die Kugel und die Flüssigkeit in zwei symmetrisch zueinander liegende und sich in jeder Hinsicht genau gleich verhaltende Häften. Es strömt auch niemals während des Bewegungsvorgangs Flüssigkeit aus der einen Hälfte in die andere über. Es ändert daher nichts, wenn wir uns die eine, und zwar die obere Hälfte ganz beseitigt denken. Wir behalten dann eine Halbkugel, die sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit, mit der sie gerade abschneidet, fortbewegt. Man kann sich diese Halbkugel etwa als ein Schiffsgefäß denken, das sich auch noch über die Wasseroberfläche erheben darf, wenn der Luftwiderstand, den der emporragende Teil findet, vernachlässigt werden kann. Es scheint zunächst, als wenn für den Bewegungswiderstand des an der Oberfläche schwimmenden Schiffes dasselbe gelten müßte wie für den Widerstand an der vollständig eingetauchten Kugel.

Man muß aber bedenken, daß der Druck in der YZ-Ebene veränderlich ist, wie aus Gl. (247) hervorgeht. Solange die Flüssigkeit zusammenhing, war dies gleichgültig, da der Druck auf beiden Seiten der YZ-Ebene um gleich viel abnahm. Wenn sich aber nur auf der einen Seite Wasser und auf der anderen Luft befindet, deren Druck auf die Wasseroberfläche überall fast genau denselben Wert hat, kann der Druckunterschied in der YZ-Ebene nicht so weiter bestehen, wie er vorher berechnet war. An den Stellen, wo p nach der früheren Rechnung seinen größten Wert annahm, also an den Endpunkten des in der Bewegungsrichtung gezogenen Durchmessers, muß die Wasseroberfläche nach oben hin ausweichen, da ihr dort kein genügender Gegendruck widersteht und an den Endpunkten der Y-Achse, wo der Druck nach Gl. (249) am kleinsten wird, senkt sich der Wasserspiegel. Der Bewegungsvorgang bei einem an der Wasseroberfläche schwimmenden Schiffe ist aus diesem Grunde recht erheblich von dem bei einem unter-

seeischen Boote oder bei einem Fische verschieden. Wenn das Schiff weiterrückt, müssen sich die Hebungen und Senkungen, die der Wasserspiegel erfuhr, wieder ausgleichen und hierbei entsteht eine weitere Bewegung, die sich in Form einer Welle über die Wasseroberfläche ausbreitet. Ein an der Wasseroberfläche schwimmendes Schiff müßte hiernach auch selbst in einer vollkommenen Flüssigkeit einen Bewegungswiderstand finden; es müßte ihm nämlich fortwährend Energie zur Neubildung der Oberflächenwellen während der Fahrt zugeführt werden. Die Oberflächenwellen würden bei der seitlich unbegrenzten vollkommenen Flüssigkeit die Energie stetig ins Unendliche hinaus fortführen.

Die zuletzt gezogenen Schlüsse stimmen nun auch in der Tat wieder ganz gut mit den Beobachtungen am Wasser überein. Jedermann kennt die Oberflächenwellen, die ein in der Fahrt befindliches Schiff hervorruft und man weiß auch, daß die Kraft der Maschine bei größeren Geschwindigkeiten zum größten Teile zur Erzeugung dieser Wellen verbraucht wird. Im übrigen aber müssen wir aus dem Ergebnisse der hier durchgeführten Untersuchung schließen, daß eine physikalisch genaue Lösung der gestellten Aufgabe, den Widerstand eines im Wasser bewegten Körpers zu finden, von vornherein einen anderen Ansatz erfordert, als er bis jetzt in der Hydrodynamik üblich ist. Dieser Ansatz wird so gestaltet werden müssen, daß darin auf den Einfluß der Mischbewegungen in geeigneter Weise Rücksicht genommen wird.

§ 54. Strömung in Röhren; Zähigkeit.

Bei der Strömung des Wassers in Rohrleitungen erfolgt die Bewegung jedenfalls der Hauptsache nach in geraden Linien parallel zur Rohrachse. Daneben kann und wird freilich auch eine „Mischbewegung“ einhergehen, die ihrerseits auch den Hauptvorgang je nach den Umständen mehr oder weniger zu beeinflussen vermag.

Aus den Beobachtungen ist zu schließen, daß die Flüssig-

keit unmittelbar an der Rohrwand gegen diese nicht gleitet, sondern von ihr festgehalten wird. Das hängt, wie man alsbald sehen wird, von den besonderen Gesetzen der Flüssigkeitsreibung ab. Wenn nun von dieser ein so wesentlich bestimmender Einfluß ausgeübt wird, folgt daraus, daß man bei der Theorie der Strömung in Röhren von vornherein auf die Zähigkeit der Flüssigkeiten Rücksicht nehmen muß.

Die Zähigkeit ist eine Eigenschaft, die allen physikalischen Flüssigkeiten in mehr oder minder hohem Maße zukommt. Sie äußert sich darin, daß in der strömenden Flüssigkeit Schubspannungen auftreten, die man in diesem Falle auch als innere Reibungen bezeichnet. Über die Gesetze der inneren Reibungen hat man sich auf Grund der darüber vorliegenden Erfahrungen die folgenden Vorstellungen gebildet. Man nimmt an, daß sie — im Gegensatze zur Reibung zwischen festen Körpern — unabhängig vom Drucke sind, daß sie dagegen von den Geschwindigkeitsunterschieden zwischen verschiedenen Stellen abhängen und proportional mit ihnen wachsen. Außerdem hängen sie von der Art der Flüssigkeit und auch von ihrer Temperatur ab. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, führen wir eine Konstante k, den Zähigkeitskoeffizienten ein, dessen Wert für jede Flüssigkeit bei jeder Temperatur durch Versuche zu ermitteln ist. Wenn nun die Strömung innerhalb eines kleinen Bezirks überall in der Richtung der Z-Achse mit einer Geschwindigkeit v erfolgt, die sich der Größe nach ändert, wenn man von einem Stromfaden zu einem benachbarten übergeht, so wird in einem Flächenelemente das senkrecht zur X-Achse gelegt ist, eine auf die Flächeneinheit bezogene Schubspannung oder innere Reibung τ übertragen, die man

$$\tau = k \frac{dv}{dx} \tag{250}$$

setzt. Auf jener Seite der Schnittfläche, nach der hin v kleiner ist, geht die Schubspannung in gleicher Richtung mit v, auf der anderen Seite daher in der entgegengesetzten Richtung. Sie wirkt also, wie man sagen kann, in solchem Sinne, daß

sie die bestehenden Geschwindigkeitsunterschiede auszugleichen sucht.

Dieser Ansatz rührt schon von Newton her. Er schließt die Vorstellung in sich, daß in den Grenzflächen zwischen zwei benachbarten Stromfäden kein Gleiten vorkommen kann, da sonst $\frac{dv}{dx}$ und hiermit auch die Schubspannung unendlich groß würde. Derselbe Ansatz wie für die innere Reibung wird aber auch für die Berechnung der äußeren Reibung, d. h. für die Berechnung der Schubspannung an der Grenzfläche zwischen der Flüssigkeit und einem rauhen Körper (also etwa der Rohrwand) benutzt. Daraus folgt dann, daß auch an dieser Grenzfläche kein Gleiten stattfinden kann, was schon vorher als ein Ergebnis der Erfahrung angeführt wurde.

Die Folgerungen, die man aus der auf dieser Grundlage aufgebauten Theorie der zähen Flüssigkeiten gezogen hat, stimmen recht gut mit der Erfahrung überein, so lange der Einfluß der Mischbewegungen, auf den dabei keine Rücksicht genommen ist, mit Recht vernachlässigt werden darf. Was nun die Mischbewegungen anbetrifft, so ist daran zu erinnern, daß sie den Hauptvorgang stets um so mehr beeinflussen, je größer die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Stellen werden. In dieser Hinsicht gleichen sie den inneren Reibungen. Andererseits treten aber im Gegensatze zu den inneren Reibungen die Mischbewegungen um so mehr hervor, je geringer die Zähigkeit ist und außerdem werden sie auch durch geometrische Bedingungen eingeschränkt. Die an die Rohrwand grenzende äußerste Flüssigkeitsschicht kann überhaupt nicht in einen Austausch mit benachbarten Stromfäden treten, da sie daran durch die Kontinuitätsbedingung gehindert wird, nach der an der Rohrwand eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Rohrwand aus geometrischen Gründen ausgeschlossen ist. Außerdem wird auch unter sonst gleichen Umständen die Mischbewegung in einem weiten Rohr mehr ausmachen, als in einem engen, bei dem sie durch die überall nahe benachbarten Wände in ihrer Ausbildung gehemmt wird.

In der Tat haben nun auch die Versuche gelehrt, daß der Einfluß der Mischbewegungen gering ist und daher vernachlässigt werden darf, wenn die Geschwindigkeit der Hauptbewegung in einem Rohre nicht zu groß ist, und zwar kommt es dabei ferner noch in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Überlegungen auch auf den Rohrdurchmesser und die Zähigkeit der Flüssigkeit an. Nach den Versuchen von O. Reynolds ändert sich die Bewegungsart plötzlich, wenn die Geschwindigkeit einen gewissen kritischen Wert v überschreitet, der

$$v = \frac{kK}{\mu d} \tag{251}$$

gesetzt werden kann, wenn man den Rohrdurchmesser mit d und die auf die Raumeinheit bezogene Masse der Flüssigkeit mit μ bezeichnet. Die Konstante K ist, wie aus den Dimensionen der in der Formel auftretenden Größen hervorgeht, eine absolute Zahl, die zu 1900 bis 2000 ermittelt ist. Für Wasser von 15° C ist k ungefähr $140 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ sec, $\mu = \frac{1000}{9.81} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ und mit $K = 2000$ erhält man

$$v = 28 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{d},$$

also z. B. $v = 0{,}28 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1$ cm oder $v = 0{,}0028 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1$ m.

Man erkennt daraus, daß die kritische Geschwindigkeit bei engen Röhren verhältnismäßig groß, bei großen Wasserleitungsröhren aber so klein ist, daß die ohne Berücksichtigung der Mischbewegungen aufgestellte Theorie für sie ganz ohne Bedeutung ist. Anders ist es aber freilich bei der Strömung von zäheren Flüssigkeiten, wie Öl, Masut u. dgl.

Für den Fall, daß die Mischbewegung vernachlässigt werden kann, läßt sich die folgende einfache Theorie der Strömung in einem Rohre aufstellen.

Der Querschnitt des Rohres wird als kreisförmig vorausgesetzt, so daß der Symmetrie wegen die Geschwindigkeit nur von dem

Abstande von der Rohrachse abhängig ist. In Abb. 71 stelle der äußere Kreis den inneren Umfang des Rohres im Querschnitte dar. Wir betrachten die Bewegung des Wassers innerhalb des durch Schraffierung hervorgehobenen Kreises von dem beliebigen Halbmesser x. Die Geschwindigkeit am Umfange dieses Kreises sei gleich v. Wenn x um dx wächst, ändert sich v um dv. Diesem Geschwindigkeitsgefälle ist die Reibung an dem Umfange des schraffierten Kreises zwischen den innerhalb und den außerhalb liegenden Stromfäden proportional zu setzen. Am Rohrumfange wird das Wasser durch die Reibung an der Rohrwand festgehalten; daher wird die Geschwindigkeit von der Mitte aus mit wachsendem x abnehmen, d. h. dv ist als negativ zu erwarten. Für die innerhalb des schraffierten Kreises liegenden Stromfäden ist die Reibung daher eine verzögernde Kraft.

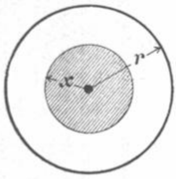

Abb. 71.

Die Wasserbewegung erfolgt nach Voraussetzung geradlinig und daher der Kontinuitätsbedingung wegen auch mit konstanter Geschwindigkeit. Demnach müssen sich alle von außen her auf ein beliebig abgegrenztes Volumenelement übertragenen Kräfte im Gleichgewichte miteinander halten. Der Kreis vom Halbmesser x bilde den Querschnitt eines Wasserzylinders, dessen Länge dz sei. Parallel zur Z-Achse, die mit der Rohrachse zusammenfällt, wirken auf diesen Wasserzylinder die Reibungen am Umfange verzögernd ein. Ihre Summe ist gleich

$$-2\pi x dz \cdot k \frac{dv}{dx}.$$

Damit Gleichgewicht bestehe, muß zwischen beiden Zylindergrundflächen ein Druckunterschied von derselben Größe auftreten. Da ferner v unabhängig von z ist, folgt, daß auch der Druckunterschied proportional mit dz ist. Daher ist

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_0 - p_l}{l} = c,$$

wenn p_0 der Druck im Anfange und p_l der Druck am Ende der Rohrlänge l ist und die Druckabnahme auf die Längeneinheit zur Abkürzung mit c bezeichnet wird. Für das Gleichgewicht der Kraftkomponenten im Sinne der Z-Achse erhalten wir hiernach die Bedingungsgleichung

$$c dz \cdot \pi x^2 = -2\pi x dz \cdot k \frac{dv}{dx}$$

oder kürzer

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2k} x. \tag{252}$$

Durch Integration folgt daraus

$$v = C - \frac{c}{4k} x^2. \tag{253}$$

Die Integrationskonstante C ist aus der Grenzbedingung am Rohrumfange zu ermitteln, nach der $v = 0$ wird für $x = r$. Damit folgt

$$C = \frac{c}{4k} r^2$$

und hiermit

$$v = \frac{c}{4k}(r^2 - x^2). \tag{254}$$

Trägt man in jedem Punkte eines Durchmessers die zugehörige Geschwindigkeit v in einem passenden Maßstabe rechtwinklig ab, so erhält man als Geschwindigkeitsverteilungsdiagramm einen Parabelbogen.

Die durch jeden Querschnitt der Röhre in der Zeiteinheit fließende Wassermenge sei mit Q bezeichnet. Man findet Q, indem man jedes Flächenelement des Querschnitts mit der zugehörigen Geschwindigkeit multipliziert und hierauf über den ganzen Querschnitt integriert. Man hat daher

$$Q = \int_0^r v 2\pi x dx = \frac{2\pi c}{4k} \int_0^r (r^2 x - x^3) dx = \frac{\pi c}{8k} r^4. \tag{255}$$

Unter der mittleren Geschwindigkeit v_m der Strömung versteht man jene Geschwindigkeit, die allen Stromfäden zukommen müßte, wenn sie bei allen gleich groß sein und die-

selbe Flüssigkeitsmenge Q durch den Querschnitt führen sollte. Man hat daher

$$v_m = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{cr^2}{8k}. \tag{256}$$

Die Geschwindigkeit in der Mitte ist daher doppelt so groß als die mittlere Geschwindigkeit.

Man verwendet diese Formeln gewöhnlich entweder, um bei gegebenem k den Druckhöhenverlust c für die Längeneinheit zu berechnen, der erforderlich ist, um eine verlangte Flüssigkeitsmenge Q durch die Röhre zu treiben, oder um k aus den übrigen Werten, die bei einem Versuche direkt beobachtet sind, zu ermitteln. Durch Auflösen nach c findet man aus Gl. (256)

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{8kv_m}{r^2}, \tag{257}$$

d. h. das Druckgefäll wird hiernach proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Rohrweite gefunden.

Bei den zuerst von Poiseuille angestellten und später sehr oft wiederholten Versuchen über die Strömung von Flüssigkeiten in engen Röhren treffen diese Folgerungen sehr gut zu. Hierin ist die wichtigste Bestätigung für die Zulässigkeit des gewählten Ansatzes zu erblicken. Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit erfolgt aber die Bewegung nach ganz anderen Gesetzen. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß in diesem Falle das Druckgefäll c ungefähr proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der ersten Potenz des Rohrdurchmessers gesetzt werden kann. Der Zähigkeitskoeffizient k scheint nur insofern von Bedeutung zu sein, als der Wert der kritischen Geschwindigkeit von ihm abhängt, während er, falls diese einmal überschritten ist, keinen wesentlich bestimmenden Einfluß auf den Bewegungsvorgang mehr zu haben scheint. Bei Wasserleitungen ist der Druckhöhenverlust für eine Röhrenlänge, die etwa das 40- bis 50-fache des Rohrdurchmessers beträgt, so groß wie der Druck, der

erforderlich ist, um dem Wasser beim Ausströmen aus dem Gefäße in die freie Luft die Geschwindigkeit v_m zu erteilen. Die Beobachtungen lehren ferner, daß die Geschwindigkeit v im mittleren Teile des Rohres nahezu konstant ist und erst in der Nähe der Wand einen starken Abfall bis auf den Wert Null an der Rohrwand erfährt.

Eine befriedigende Theorie dieses Strömungsvorgangs besitzt man bis jetzt nicht. Nur so viel ist klar, daß man, um zu ihr zu gelangen, jedenfalls auf die Mischbewegungen Rücksicht nehmen muß. Diese bewirken, daß der Flüssigkeitszylinder, dessen Gleichgewicht wir vorher betrachteten, außer durch die Reibung auch noch durch den Austausch mit den außerhalb liegenden und langsamer fließenden Wassermassen eine Verzögerung erfährt. Die Schwierigkeit besteht nur darin, einen geeigneten Ansatz für diese verzögernde Kraft ausfindig zu machen. Jedenfalls wird darin das Geschwindigkeitsgefäll $\frac{dv}{dx}$ und die Masse μ der Flüssigkeit als Faktor vorkommen müssen, außerdem aber auch noch die Geschwindigkeit, mit der sich der Austausch der Wassermassen vollzieht. Für diese fehlt es aber zunächst an jedem Anhalte. Wenn es sich ausschließlich um die Erklärung des einen Vorgangs der Strömung in Röhren handelte, könnte man z. B. an Stelle von Gl. (252)

$$k\frac{dv}{dx} + \zeta\mu r v\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2}x \tag{258}$$

setzen, worin der durch die Mischbewegungen hervorgebrachten Verzögerung durch das zweite Glied der linken Seite Rechnung getragen werden soll.

Die Integration der Gleichung mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen liefert nach Auflösung für das Druckgefäll c

$$c = \frac{4kv_0}{r^2} + 2\zeta\frac{\mu v_0^2}{r}, \tag{259}$$

wenn die Geschwindigkeit in der Rohrmitte mit v_0 bezeichnet wird. Die Konstante ζ hat die Dimension einer absoluten Zahl, die für verschiedene Flüssigkeiten verschieden sein kann.

Bei kleinem v_0 und kleinem r überwiegt das erste Glied der Gleichung, das dem Poiseuilleschen Strömungsgesetze entspricht, während es im entgegengesetzten Falle auf das zweite Glied ankommt, das mit den Beobachtungen an weiten Wasserleitungsröhren in Übereinstimmung steht.

Dieser einfache Ansatz kann aber nicht als eine Lösung der Frage betrachtet werden. Erst wenn er sich auf alle anderen Fälle der Wasserbewegung sinngemäß übertragen ließe und dort ebenfalls zu einer Übereinstimmung mit der Erfahrung führte, könnte ein Ansatz von dieser Art als eine befriedigende Lösung bezeichnet werden. Einige Bemühungen, die ich in dieser Richtung machte, haben mich nicht zu dem gewünschten Erfolge geführt; das schließt aber nicht aus, daß doch noch ein allen berechtigten Ansprüchen genügender Ansatz gefunden werden könnte.