Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Dynamik

Föppl, August

1909

Fünfter Abschnitt. Die Relativbewegung

urn:nbn:at:at-ubi:2-7870

Fünfter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

§ 45. Vorbemerkungen.

Vom Begriffe der Relativbewegung ist schon im ersten Bande wiederholt Gebrauch gemacht worden und ich kann hier als bekannt voraussetzen, was damals hierüber ermittelt wurde. Bei jenen früheren Gelegenheiten erstreckte sich indessen die Untersuchung immer nur auf den Fall, daß das Fahrzeug, von dem aus die Bewegung des materiellen Punktes oder des Körpers beobachtet werden sollte, nur eine Translationsbewegung und keine Drehung ausführte. Es macht sich daher jetzt noch eine Ergänzung erforderlich für den Fall, daß sich das Fahrzeug in ganz beliebiger Weise bewegt.

Zuvor sei aber noch auseinandergesetzt, zu welchem Zwecke und für welchen Gebrauch die hier vorzunehmenden Untersuchungen bestimmt sind. Bei den meisten Aufgaben der Dynamik hat man gar keine Veranlassung, Relativbewegungen ins Auge zu fassen; man löst sie am einfachsten, wenn man sich den Beobachter im festen Raume aufgestellt denkt: also in einem Raume, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist. Bei den vorausgehenden Untersuchungen dieses Bandes ist dies auch stets geschehen. In manchen Fällen vermag man aber entweder überhaupt nicht gut die Untersuchung der Bewegung von einem Fahrzeuge aus zu vermeiden oder man würde wenigstens, wenn die Vermeidung auch möglich wäre, auf erhebliche Vereinfachungen verzichten müssen, die durch die Hereinziehung der Relativbewegungen erzielt werden können.

Kaum zu vermeiden ist die Betrachtung der Relativbewegung bei solchen irdischen Bewegungsvorgängen, die von der Eigenbewegung des Erdballs gegen den festen Raum merklich beeinflußt sind. Diese Fälle sind freilich selten; gewöhnlich braucht man auf die Eigenbewegung der Erde nicht zu achten, kann vielmehr das Trägheitsgesetz, wie es auch bisher stillschweigend schon immer geschehen ist, als gültig in bezug auf den von der Erde her ausgemessenen Raum betrachten. Dadurch wird man aber der Verpflichtung natürlich nicht enthoben, eine genauere Untersuchung anzustellen, um sich zu überzeugen, inwieweit die Vernachlässigung zulässig ist und um für jene Fälle, in denen sie nicht mehr zulässig ist, eine andere geeignete Untersuchungsmethode ausfindig zu machen.

So erwähnte ich z. B. schon früher einmal, daß ein Stein nicht genau in einer lotrechten geraden Linie zur Erde fällt, sondern daß sich wegen der Drehung der Erde gegen den festen Raum, in dem das Trägheitsgesetz gilt, eine Seitenablenkung einstellt, die freilich sehr gering und nur durch genaue Versuche nachweisbar ist. Freilich steht nichts im Wege, selbst in solchen Fällen den Beobachtungsposten im festen Raume zu wählen, von hier aus die absolute Bahn des fallenden Steins zu ermitteln und dann erst nachträglich unter Berücksichtigung der Eigenbewegung der Erde den „relativen“ oder „scheinbaren“ Weg des Steins gegen die Erde, für den wir uns interessieren, und der allein unmittelbar beobachtet werden kann, daraus abzuleiten. Ein solches Verfahren wäre aber sehr umständlich. Außerdem sind wir auch in der Mechanik der irdischen Bewegungsvorgänge so sehr darauf angewiesen, die Erde selbst als Aufstellungsort des Beobachters zu wählen, daß man auch in solchen Ausnahmefällen nicht darauf verzichten möchte. Die nachfolgenden Betrachtungen werden uns zeigen, wie man die früheren Untersuchungen nötigenfalls zu ergänzen hat, um den irdischen Standpunkt unter allen Umständen festhalten zu können.

Bei einer anderen Klasse von Problemen liegt zwar keine so dringende Nötigung vor, auf die Relativbewegungen einzugehen; man erleichtert die Untersuchung aber auch bei ihnen oft sehr erheblich, wenn man davon Gebrauch macht. Hierher gehören namentlich die Flüssigkeitsbewegungen, die im Innern einer Zentrifugentrommel oder im Laufrade einer Turbine vor sich gehen. Die Eigenbewegung der Erde kommt hierbei übrigens nicht in Frage; man kann vielmehr ohne Bedenken die von der festen Erde her gesehenen Bewegungen dabei als absolute auffassen. Betrachtet man aber die Flüssigkeitsströmungen in der rotierenden Trommel als Relativbewegungen gegen das Gefäß, so führt man die Aufgabe auf Wasserbewegungen in ruhenden Gefäßen zurück, also auf einfachere Betrachtungen, die schon früher erledigt wurden. Auch hierüber, wie dies möglich ist, soll unsere Untersuchung Aufschluß geben.

Um die aufgezählten Aufgaben lösen zu können, müssen wir die Wege, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte im bewegten Raume mit jenen vergleichen, die vom absoluten Raume her festgestellt werden. Die Massen der bewegten Körper sind als Eigenschaften dieser Körper und daher in beiden Fällen als gleich anzusehen. Von den Kräften gilt dies aber nicht; wir müssen vielmehr von vornherein erwarten, daß an dem Körper, dessen Bewegung untersucht werden soll, noch andere Kräfte angebracht werden müssen, wenn die Bewegung auf ein bewegtes Fahrzeug, als wenn sie auf den festen Raum bezogen werden soll, für den das Trägheitsgesetz gilt. — Außer den schon aufgezählten werden auch noch andere dynamische Größen, wie Arbeiten, statische Momente, Antriebe, lebendige Kräfte usf. in Betracht zu ziehen sein; wir können aber von diesen einstweilen absehen, da sie aus den zuerst angeführten später leicht abgeleitet werden können.

§ 46. Der Satz von Coriolis.

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung eines materiellen Punktes in möglichst einfacher Weise geometrisch darstellen kann. Man betrachte zwei aufeinander folgende Zeitteilchen von der gleichen Dauer τ. Zu Anfang hatte der Punkt, dessen absolute Bewegung betrachtet werden soll, den Abstand $\mathfrak{s}_0$ von einem festen Anfangspunkte In den beiden Zeitteilchen τ ändert sich der Abstand $\mathfrak{s}$ um die Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$. Da $\mathfrak{s}$ als eine Funktion der Zeit t zu betrachten ist, hat man nach der Taylorschen Entwicklung

$$d\mathfrak{s}_1 = \tau\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

$$d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 = 2\tau\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{(2\tau)^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

zu setzen. Die Differenz der Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ ist daher

$$d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1 = \tau^2\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots.$$

Die Glieder höherer Ordnung können weggelassen werden und für die Beschleunigung zur Zeit $t = 0$ erhält man daher

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} = \frac{(d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2) - 2\,d\mathfrak{s}_1}{\tau^2}. \tag{206}$$

Nun sei BB_1B_2 in Abb. 68 der absolute Weg eines beweglichen Punktes B und BC_1C_2 der absolute Weg jenes Punktes des Fahrzeugs, mit dem B anfänglich zusammenfiel. Da die Strecken BB_1 usf. in der Grenze unendlich klein zu denken sind, schreiben wir dafür

$$BB_1 = d\mathfrak{s}_1;\quad B_1B_2 = d\mathfrak{s}_2;\quad BC_1 = d\mathfrak{p}_1;\quad C_1C_2 = d\mathfrak{p}_2.$$

Die Strecken C_1B_1 und C_2B_2 geben die relativen Wege von B gegen das Fahrzeug an, so wie sie vom festen Raume aus gesehen erscheinen. Man hat dafür

$$C_1B_1 = d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1;\quad C_2B_2 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2.$$

Die Geschwindigkeiten hängen von dem Wege im ersten Zeitteilchen allein ab. Bezeichnen wir C_1B_1 mit $d\mathfrak{r}_1$, so folgt aus der ersten dieser Gleichungen durch Division mit τ oder dt

$$\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{dt},$$

wofür auch allgemein

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \tag{207}$$

geschrieben werden kann, da es gleichgültig ist, von welchem Zeitpunkte ab wir die Wege $d\mathfrak{s}$ usf. verfolgen. In Worten heißt dies:

Die absolute Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist in jedem Augenblicke gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit gegen das Fahrzeug.

Die Relativbeschleunigung von B ist dagegen aus dem Vergleiche der Wege C_1B_1 und C_2B_2 nach der durch Gl. (206) gegebenen Anleitung zu berechnen. Dabei müssen wir aber beachten, daß der Beobachter, der diese Wege miteinander vergleicht, im Fahrzeuge selbst aufgestellt sein muß. Markiert dieser Beobachter die Punkte C_1 und B_1 nach dem ersten Zeitteilchen im Fahrzeuge, so führt die Strecke C_1B_1 des Fahrzeugs während des zweiten Zeitteilchens selbst noch eine Bewegung aus. Der Anfangspunkt C_1 gelangt dabei nach C_2 und zugleich führt die Strecke C_1B_1 noch eine Drehung um den Winkel $\mathfrak{u}\tau$ aus, wenn mit $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs während dieser Zeit bezeichnet wird. Da nun C_2B_2 in Abb. 68 so gezeichnet ist, wie es der Lage nach Ablauf des zweiten Zeitteilchens entspricht, so müssen wir, um beide Strecken auch für den innen stehenden Beobachter, der sich nach dieser zweiten Lage orientiert, vergleichbar miteinander zu machen, an Stelle von C_1B_1 die Strecke

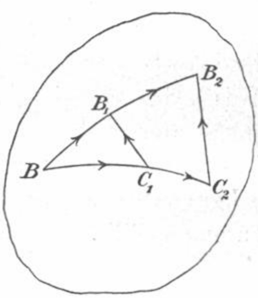

Abb. 68.

$$d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau\,\mathrm{V}\,(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}$$

setzen. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke gibt den Weg an, den der Endpunkt von C_1B_1 bei der Drehung beschreibt. Für die Relativbeschleunigung schreiben wir $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ und erhalten dafür nach Vorschrift von Gl. (206)

$$\tau^2\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2 - 2\{d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau\,\mathrm{V}\,(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{u}\}$$

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} - \frac{d\mathfrak{p}_2 - d\mathfrak{p}_1}{\tau^2} - 2\,\mathrm{V}\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}\right)\mathfrak{u} =$$

$$= \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\right)_0 - 2\,\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}, \tag{208}$$

wobei im letzten Gliede die Relativgeschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ an Stelle der ihr gleichen Differenz $\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}$ eingeführt ist. Läßt man nachträglich die Zeiger o weg, die nur darauf hinweisen, daß sich alle Größen auf den Anfangspunkt der Zeit $t = 0$ beziehen sollen, der aber ganz nach Belieben gewählt werden kann, so läßt sich Gl. (208) auch in die anschaulichere Form

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2\,\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} \tag{209}$$

bringen. Diese Gleichung spricht den Satz von Coriolis aus, der sich auch in die Worte fassen läßt:

Die absolute Beschleunigung des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeugbeschleunigung, aus der Relativbeschleunigung gegen das Fahrzeug und aus dem doppelten äußeren Produkte aus der Relativgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

Unter „Fahrzeugbeschleunigung“ ist dabei, wie aus dem Znsammenhange hervorgeht, die Beschleunigung jenes Fahrzeugpunktes zu verstehen, mit dem der bewegte Punkt gerade zusammenfällt.

§ 47. **Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung.**

Für den im Fahrzeuge stehenden Beobachter ist das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung nicht erfüllt, wenn er nur die tatsächlich an dem bewegten Punkte angreifenden Kräfte ins Auge faßt. Als „tatsächlich angreifende“ oder „physikalisch existierende“ Kräfte sind hierbei jene bezeichnet, die auch für den im festen Raume aufgestellten Beobachter nachweisbar sind. Mit der dynamischen Grundgleichung würden aber auch alle anderen Folgerungen der Dynamik hinfällig werden. Um die Lehren der Dynamik auch für den im Fahrzeuge aufgestellten Beobachter, der von der absoluten Bewegung seines Fahrzeuges gar keine Notiz nimmt, anwendbar zu machen, kann man aber den Kunstgriff benützen, an dem bewegten Punkte B Zusatzkräfte von der Art anzubringen, daß nachher die dynamische Grundgleichung auch für den bewegten Raum gültig bleibt. Dies ist leicht zu erreichen. Man multipliziere Gl. (208) mit der Masse m des bewegten Punktes. Dann wird

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - 2m\,V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}. \tag{210}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt nach dem dynamischen Grundgesetze die „physikalisch existierende“ Kraft $\mathfrak{P}$ an dem materiellen Punkte (oder die Resultierende, wenn mehrere vorkommen) dar. Die beiden anderen Glieder müssen, wenn wir die dynamische Grundgleichung auch für die Relativbewegung aufrecht erhalten wollen, ebenfalls als Kräfte gedeutet werden. Diese Kräfte sollen als „erste“ und „zweite“ Zusatzkraft bezeichnet werden.

Die erste Zusatzkraft ist jene, die schon beim d'Alembertschen Prinzip vorkam. In der Tat hängt ja der Fall der Relativbewegung in sehr einfacher Weise mit dem d'Alembertschen Prinzip zusammen. Wenn sich ein starrer Körper bewegt, sind alle seine materiellen Punkte im Gleichgewichte (und in Ruhe) relativ zu einem auf dem starren Körper selbst aufgestellten Beobachter. Für diesen Beobachter müssen daher, wenn er die Lehren der Mechanik auf seinen Raum bezieht, alle an dem starren Körper angreifenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden. Er muß aber dann, wie wir schon früher auf anderem Wege und jetzt von neuem fanden, außer den physikalisch existierenden Kräften auch die „Trägheitskräfte“ $\mathfrak{H}$, nämlich

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$$

anbringen. Bei dieser Anwendung von Gl. (210) fallen nämlich, da keine Relativbewegungen vorkommen, die Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ fort. Behalten wir die frühere Bezeichnung für die „Trägheitskräfte“ auch in dem allgemeineren Falle bei, so geht Gl. (210) über in

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{H} - 2m\,\mathrm{V}\,\mathfrak{v}\mathfrak{u}\,, \tag{211}$$

wobei noch der Kürze halber die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet ist.

Die Anwendung von Gl. (211) soll zunächst an dem Beispiele des fallenden Steines gezeigt werden. An einem materiellen Punkte, den wir von der Erde aus beobachten, wirken zunächst von physikalisch existierenden Kräften die Anziehung der Erde, der Sonne und aller anderen Weltkörper, die wir uns zu einer Resultierenden $\mathfrak{P}_0$ zusammengefaßt denken. Ferner können noch andere physikalisch existierende Kräfte, wie Luftwiderstand, Widerstand einer Bahn, überhaupt Druck von seiten eines anderen Körpers, elektrische Anziehung o. dgl. daran angreifen, deren Resultierende $\mathfrak{P}_1$ sei, so daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ ist. Wenn der Punkt an seinem Orte auf der Erde unter der Einwirkung aller dieser Kräfte festgehalten werden soll, muß nach Gl. (211)

$$0 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H})$$

sein. Hieraus wird die Bedeutung von $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ klar, denn wir wissen, daß wir an einem materiellen Punkte, an dem andere physikalisch existierende Kräfte nicht angreifen, eine dem Gewichte des Punktes entgegengesetzt gleiche Kraft $\mathfrak{P}_1$ anbringen müssen, um ihn an seiner Stelle auf der Erde festzuhalten. Die Summe $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ ist daher selbst das Gewicht des Körpers, das mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden soll. Hiermit geht Gl. (211) über in

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{P}_1 - 2m\,\mathrm{V}\,\mathfrak{v}\mathfrak{u}\,. \tag{212}$$

Wenn die von der Erde her gesehenen Bewegungen in Übereinstimmung mit den auf den festen Raum bezogenen Lehren der Mechanik stehen sollen, müssen wir uns daher außer dem Gewichte $\mathfrak{G}$ und anderen etwa noch daran angreifenden Kräften $\mathfrak{P}_1$ noch die „zweiten Zusatzkräfte“ $-2m\,\mathrm{V}\,\mathfrak{v}\mathfrak{u}$

daran angebracht denken. Die zweite Zusatzkraft ist aber hier unter gewöhnlichen Umständen sehr gering wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Drehung der Erde gegen den festen Raum und hiervon allein kommt es, daß man in der Mehrzahl der Fälle von der Eigenbewegung der Erde ganz absehen, die Bewegungen relativ zur Erde also ohne weiteres als Absolutbewegungen betrachten kann. Ein Zahlenbeispiel möge dies noch zeigen. Die Erde dreht sich in einem Sterntage einmal um ihre Achse und voraussichtlich ist diese Winkelgeschwindigkeit als jene gegen den absoluten Raum aufzufassen. Ein Sterntag unterscheidet sich aber nicht viel von einem Sonnentage und man pflegt daher bei solchen Rechnungen die Winkelgeschwindigkeit der Einfachheit wegen auf den Sonnentag zu beziehen. Dann ist

$$u = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{sec}^{-1} = \frac{1}{13760}\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Wenn die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ etwa $10\,\mathrm{m\,sec}^{-1}$ beträgt, und senkrecht zur Erdachse steht (also bei jener Richtung, in der das äußere Produkt seinen größten Wert annimmt) erhält man für die zweite Zusatzkraft den Wert

$$m \cdot \frac{20\,\mathrm{m\,sec}^{-1}}{13760} \cdot \mathrm{sec}^{-1} \text{ oder } m \cdot \frac{1}{688}\,\mathrm{m\,sec}^{-2}.$$

Das Gewicht von m ist $m \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,sec}^{-2}$; die zweite Zusatzkraft beträgt daher rund $\frac{1}{7000}$ des Gewichtes, ist also unter gewöhnlichen Umständen unmerklich.

Lassen wir bei dem fallenden Steine den Luftwiderstand außer Berücksichtigung, so ist $\mathfrak{P}_1 = 0$ zu setzen und die Differentialgleichung der Fallbewegung lautet

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} - 2m\,\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{u}$$

oder, wenn wir an Stelle des Gewichtes das Produkt aus Masse und Fallbeschleunigung $\mathfrak{g}$ einführen,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2\,\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{u}. \tag{213}$$

Gewöhnlich vernachlässigt man das zweite Glied der rechten

Seite gegenüber $\mathfrak{g}$. Dann wird $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}t$, wenn man die Zeit t von Beginn der Fallbewegung an rechnet. Es wird daher, um eine bessere Annäherung zu erhalten, genügen, wenn man im Korrektionsgliede $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}t$ setzt. Der damit begangene Fehler ist jedenfalls erst von höherer Ordnung klein, als die Abweichung von dem Falle in lotrechter Richtung; es ist daher für unsere Zwecke zunächst nicht nötig, die Differentialgleichung (213) streng zu integrieren. Wir können sie vielmehr genau genug ersetzen durch

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2t V \mathfrak{g}\mathfrak{u}$$

und durch Integration erhält man daraus, wenn die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ von der Ausgangsstelle der Fallbewegung aus gerechnet werden,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g}\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} V \mathfrak{g}\mathfrak{u}. \tag{214}$$

Das letzte Glied ist das Korrektionsglied. Das äußere Produkt aus $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ ist gleich $ug\cos\varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes der Erde ist, an dem der Versuch angestellt wird. Die Richtung von $V\mathfrak{g}\mathfrak{u}$ steht senkrecht zu $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$, ist also horizontal und nach Westen hin gekehrt. Wegen des negativen Vorzeichens stellt daher das Korrektionsglied eine östliche Abweichung des fallenden Steins aus der Lotrichtung dar. Am größten wird die Abweichung am Äquator, weil dort $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ senkrecht zueinander stehen und daher $\cos\varphi = 1$ ist. Aber auch dort ist sie nur gering. Selbst bei $t = 10$ sec Fallzeit erreicht das Korrektionsglied erst die Größe

$$\frac{1000\,\text{sec}^3}{3} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \frac{1}{13760}\,\text{sec}^{-1} = 0{,}238\ \text{m},$$

während der in dieser Zeit in lotrechter Richtung zurückgelegte Weg bei Außerachtlassung des Luftwiderstandes gegen 500 m beträgt.

Es mag übrigens noch bemerkt werden, daß sich Gl. (213) auch streng integrieren läßt. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{g} - 2V\mathfrak{v}\mathfrak{u},$$

so lautet das erste Integral

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{g}t - \frac{(1-\cos 2\,ut)}{2\,u^2}\,\mathrm{V}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{u} + \frac{2\,ut - \sin 2\,ut}{2\,u^3}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{u}^2), \quad (215)$$

wobei noch eine willkürliche Integrationskonstante $\mathfrak{v}_0$ beigefügt werden könnte, die die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ angeben würde, die aber wegen der hier vorliegenden Anfangsbedingung gleich Null zu setzen ist und daher weggelassen worden ist. Durch Einsetzen des Wertes in die Differentialgleichung überzeugt man sich leicht, daß sie davon befriedigt wird.

Eine Integration nach t liefert nun auch sofort $\mathfrak{r}$ als Funktion der Zeit. Beachtet man auch hier die Anfangsbedingung $\mathfrak{r} = 0$ für $t = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{g}t^2}{2} &- \frac{2\,ut - \sin 2\,ut}{4\,u^3}\,\mathrm{V}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{u} \\ &+ \frac{2\,u^2t^2 + \cos 2\,ut - 1}{4\,u^4}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{u}^2).\end{aligned} \quad (216)$$

Bei einer Fallzeit von einigen Sekunden dreht sich die Erde nur um einen sehr kleinen Winkel ut weiter; daher können $\sin 2\,ut$ und $\cos 2\,ut$ in sehr schnell konvergierende Reihen entwickelt werden. Behält man dabei nur die Glieder bis zur Größenordnung $(ut)^3$ bei, so kommt man wieder auf die Näherungsformel (214). Man kann aber auch noch kleinere Glieder mitnehmen und erhält z. B. mit Berücksichtigung der Glieder bis zur Ordnung $(ut)^4$

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{g}t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\mathrm{V}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{u} + \frac{t^4}{6}\,(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{u}^2).$$

Der Ausdruck $(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{g} - \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{u}^2)$ bedeutet, wie die geometrische Betrachtung lehrt, einen im Meridian liegenden, senkrecht zur Erdachse nach außen hin gehenden Vektor von der Größe $u^2g\,\cos\varphi$. Er läßt sich zerlegen in eine lotrechte Komponente, die aber gegenüber dem Gliede $\frac{\mathfrak{g}t^2}{2}$ von verschwindender Größe ist und in eine horizontale Komponente, die für einen auf der nördlichen Halbkugel gelegenen Punkt nach Süden hin geht, von der Größe $u^2g\,\cos\varphi\,\sin\varphi$.

Hiernach liefert die bis auf Glieder von der Ordnung $(ut)^4$ genaue Integration der Fallgleichung außer einer östlichen Abweichung, die vorher schon besprochen war, auch noch eine südliche Ablenkung des fallenden Körpers von der Größe

$$\frac{t^4}{6}\,u^2g\,\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Setzt man die geographische Breite $\varphi = 45^0$ und $t = 10$ sec, so geht dies über in

$$0{,}000043 \text{ m},$$

d. h. die südliche Ablenkung beträgt hiernach selbst bei einer Fallzeit von 10 sec nur einige hundertstel Millimeter, ist also durch Messung überhaupt nicht nachweisbar.

Wenn man eine Genauigkeit der Rechnung bis auf so kleine Glieder anstrebt, muß man übrigens auch noch einen anderen Umstand beachten. Wir haben nämlich $\mathfrak{g}$ als eine Konstante betrachtet, während in Wirklichkeit $\mathfrak{g}$ an jedem Orte der Bahn etwas (wenn auch nur sehr wenig) verschieden ist. Hierbei ist namentlich zu bedenken, daß das Gewicht $\mathfrak{G}$ den Summanden $\mathfrak{H}$ enthält, der in verschiedenen Höhen, d. h. in verschiedenen Abständen von der Erdachse verschiedene Größen hat. Zieht man eine Kraftlinie, deren Richtung überall mit der von $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{g}$ zusammenfällt, so hat diese daher selbst schon eine geringe Krümmung in der Meridianebene, vorausgesetzt, daß man sich weder am Pole noch am Äquator befindet. Auch hierdurch wird eine geringe Ablenkung des fallenden Steins von der Lotlinie in der Nord-Südrichtung hervorgerufen, die der Größe nach mit der vorher berechneten vergleichbar, hiermit aber ebenfalls so klein ist, daß sie unmöglich durch einen Fallversuch nachgewiesen werden kann.

Die genauere Theorie der Fallbewegung lehrt daher, daß ein fallender Körper nur eine östliche Ablenkung von merklichem Betrage erfahren könne. Merkwürdigerweise haben aber die meisten Beobachter, die solche Versuche anstellten, außer der östlichen Abweichung auch noch eine südliche wahrgenommen oder wenigstens wahrzunehmen geglaubt. Diese viel umstrittene südliche Ablenkung ist nach den besten Beobachtungen jedenfalls viel kleiner, als die durch Messung leicht nachzuweisende östliche Ablenkung, aber immerhin nach den Angaben der Beobachter weit größer, als sie nach der vorgetragenen Theorie erwartet werden dürfte. Man nimmt daher gewöhnlich an, daß die Beobachtungen ungenau gewesen seien und manche Gelehrten stellen es sogar als gewiß hin, daß dies so sein müsse, weil die südliche Ablenkung mit der Theorie nicht übereinstimmt. Ich betrachte dies aber als unzulässig. Aus bekannten Gründen läßt sich die südliche Ablenkung freilich nicht erklären; aber dies beweist noch keineswegs, daß die Beobachter unrecht haben müßten. Es wäre ja sehr wohl möglich, daß die Theorie noch unvollständig wäre. Wenn das genauere Gesetz der etwa doch noch tatsächlich bestehenden südlichen Ablenkung später einmal durch verfeinerte Beobachtungen festgestellt werden sollte, würde man daraus die wichtigsten Schlüsse auf die Verbesserungen ziehen können, die an der Theorie anzubringen wären. Daraus erklärt sich die große Bedeutung solcher Versuche.

Eng verwandt mit der Seitenablenkung des fallenden Steins ist auch die eines Geschosses. Wenn ein Geschütz z. B. in der Richtung nach Norden hin abgefeuert wird, tritt wegen der Erddrehung eine seitliche Ablenkung des Geschosses nach Osten hin ein. Schießt man nach Süden, so ist die Seitenablenkung westlich, d. h. in beiden Fällen nach rechts vom Schützen aus gesehen. Vorausgesetzt wird dabei, daß man sich auf der nördlichen Halbkugel befinde; am Äquator ist die Ablenkung Null uud auf der südlichen Halbkugel entgegengesetzt. Auch wenn man nach Osten oder Westen hin schießt, hat man stets eine Ablenkung nach rechts hin vom Geschütze aus gesehen. Auch der Betrag dieser Ablenkung kann unter Voraussetzung einer flachen Flugbahn leicht berechnet werden. Wenn sich das Geschoß z. B. nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 350 m $\sec^{-1}$ ungefähr in horizontaler Richtung bewegt, ist in der geographischen Breite φ die zweite Zusatzkraft von der Größe

$$m \cdot 700 \cdot \frac{1}{13760} \sin\varphi$$

anzubringen, wofür rund $\frac{Q}{200} \sin\varphi$ gesetzt werden kann, wenn Q das Geschoßgewicht ist. Eine konstante Kraft von dieser Größe bringt z. B. während einer Flugzeit von 20 sec nach den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung einen in ihre Richtung fallenden Weg von rund

$$10 \text{ m} \cdot \sin\varphi \quad \text{oder von} \quad 7{,}7 \text{ m}$$

zustande, wenn $\varphi = 50^0$ gesetzt wird. Wenn es verlangt wird, kann man die Rechnung natürlich auch noch genauer durchführen; es sollte sich jetzt nur um eine Abschätzung handeln.

Beträchtlich wird die Zusatzkraft, wenn man die Bahn eines zur Erde fallenden Meteorsteines betrachtet, weil es sich in diesem Falle um sehr große Geschwindigkeiten handelt. Zugleich wird aber dann auch der Luftwiderstand so groß, daß die vorher für die Fallbewegung ohne Luftwiderstand abgeleiteten Formeln keine Anwendung finden können.

Auch an einem schnell umlaufenden Schwungrade wirkt wegen der Erddrehung ein freilich bei den praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten nur sehr geringfügiges Kräftepaar der „zweiten Zusatzkräfte“, das leicht berechnet werden kann. Es kann übrigens auch nach den in § 37 gegebenen Anleitungen sofort ermittelt werden, denn das Schwungrad wird von der Erde bei ihrer Bewegung im absoluten Raume genau ebenso mitgenommen wie der dort betrachtete Schwungring, der auf einer Lokomotive gelagert sein sollte.

Aus der dynamischen Grundgleichung sind alle übrigen Sätze der Mechanik, soweit sie nicht an und für sich für jeden Aufstellungsort des Beobachters gültig sind, abgeleitet worden. Sobald wir daher durch Einführung der Zusatzkräfte Sorge dafür tragen, daß die dynamische Grundgleichung auch für die Bewegungen relativ zur Erde erfüllt bleibt, können wir auch alle daraus abgeleiteten Folgerungen ohne weiteren Beweis anwenden, d. h. die Gültigkeit der zunächst auf den absoluten Raum bezogenen Betrachtungen der Mechanik wird damit auch für den auf der Erde fußenden Beobachter gerettet.

Selbstverständlich bleiben übrigens die bisher auf die Bewegung relativ zur Erde bezogenen Betrachtungen ohne weiteres auch für die Bewegungen relativ zu irgendeinem anderen Fahrzeuge anwendbar. Man kann also z. B. die Wasserbewegung im Laufrade einer Turbine genau so untersuchen, als wenn das Laufrad ruhte, falls man nur die beiden Zusatzkräfte an jedem Wasserteilchen anbringt. Die erste Zusatzkraft reduziert sich übrigens in diesem Falle auf die Zentrifugalkraft. Beide Zusatzkräfte erlangen hier sehr große Werte wegen der großen Winkelgeschwindigkeit u, die viele Tausende mal größer ist als die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Schließlich bemerke ich noch, daß ich im 6. Bande nochmals ausführlicher auf die Relativbewegung zurückzukommen beabsichtige.

Aufgaben.

34. Aufgabe. Eine Scheibe rotiert um eine zur Scheibenebene senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit u_1. Relativ zur Scheibe beschreibt ein materieller Punkt eine kreisförmige Bahn, deren Ebene gleichfalls senkrecht zur Umdrehungsachse der Scheibe steht *und deren Mittelpunkt auf dieser Umdrehungsachse liegt. Die Winkelgeschwindigkeit der Relativbewegung sei mit u_2 bezeichnet. Man soll die Ergänzungs- oder Zusatzkräfte der Relativbewegung angeben.*

Lösung. Immer wenn die Fahrzeugbewegung in einer gleichförmigen Drehung besteht, ist die erste Zusatzkraft die Zentrifugalkraft, genommen für einen im Fahrzeuge fest liegenden Punkt. Sie ist also radial nach außen gekehrt und hat die Größe $mu_1^2 a$, wenn m die Masse des bewegten Punktes und a den Kreishalbmesser bedeutet. Die zweite Zusatzkraft hat die Richtung, von $-V\mathfrak{v}\mathfrak{u}_1$, geht also ebenfalls in radialer Richtung, und zwar nach außen hin, wenn die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ denselben Umlaufssinn hat, wie die Fahrzeugbewegung. Im entgegengesetzten Falle ist sie auf den Mittelpunkt zu gerichtet. Die Größe ist in jedem Falle gleich $2mvu_1$ oder, da $v = u_2 a$ gesetzt werden kann, gleich $2mu_1u_2a$. Wenn die beiden Winkelgeschwindigkeiten u_1 und u_2 im gleichen Umdrehungssinne gehen, wollen wir u_2 positiv, im entgegengesetzten Falle negativ rechnen. Dann kann für beide Fälle die Resultierende aus beiden Zusatzkräften gleich einer radial nach außen gehenden Kraft vom Betrage

$$ma\,(u_1^2 + 2u_1u_2)$$

gesetzt werden, wobei ein etwa herauskommendes negatives Vorzeichen eine entgegengesetzte Richtung der Resultierenden bedeutet.

Außer den beiden Zusatzkräften greift an dem bewegten Punkt noch eine tatsächlich vorhandene Kraft an, die etwa durch einen Faden oder durch eine Federspannung darauf übertragen wird. Die Resultierende aus dieser und den Zusatzkräften gibt die gesamte Kraft an, die man sich an dem Punkte angebracht denken muß, um die Relativbewegung so behandeln zu können, als wenn sie eine absolute Bewegung wäre, die durch diese Kraft hervorgebracht würde. Da die Relativbewegung eine Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit u_2 ist, entspricht ihr eine resultierende Kraft die nach innen hin gekehrt ist, nämlich die Zentripetalkraft vom Betrage mau_2^2. Hieraus läßt sich auch erkennen, wie groß die an dem bewegten Punkt wirklich vorhandene (durch den Faden u. dgl. übertragene Kraft) sein muß. Sie muß radial nach innen gehen, zunächst die nach außen gehende Resultierende der beiden Zusatzkräfte ausgleichen und darüber hinaus noch einen nach dem Mittelpunkte hin gerichteten Überschuß von dem berechneten Betrage mau_2^2 liefern. Sie hat daher die Größe

$$ma\,(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2).$$

Das ist aber nichts anderes als der Wert, den man unmittelbar erhalten hätte, wenn man die absolute Bewegung des materiellen Punktes mit der Winkelgeschwindigkeit $u_1 + u_2$ betrachtet hätte, zu der eine Zentripetalkraft von der Größe $ma\,(u_1 + u_2)^2$ gehören muß.

In diesem Beispiele führt daher die Betrachtung der Relativbewegung zu einem Umwege; immerhin ist es nützlich, ihn einmal einzuschlagen, um den Zusammenhang der allgemeinen Lehren mit den hier vorliegenden Verhältnissen zu überblicken.

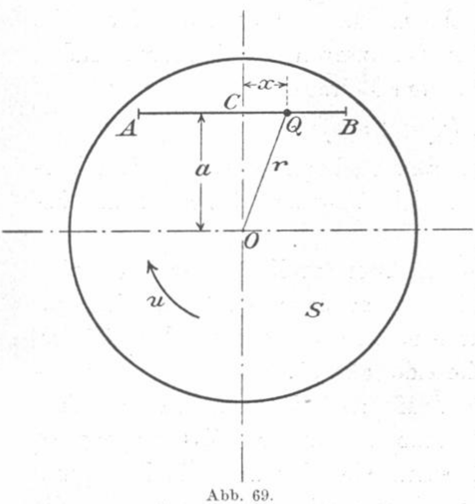

Abb. 69.

35. *Aufgabe. Auf einer Scheibe S (Abb. 69), die sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit u um die durch den Scheibenmittelpunkt O senkrecht zur Scheibenebene gehende Achse dreht, ist eine Führungsstange AB befestigt, längs deren sich ein als materieller Punkt vom Gewichte Q aufzufassender Körper reibungsfrei zu verschieben vermag. Der Körper Q ist an einer Feder befestigt, die ihn bei einem Ausschlage x mit einer elastischen Kraft von der Größe cx nach der Stangenmitte C zurückzieht. Wenn der Körper durch einen Anstoß aus der Gleichgewichtslage C gekommen ist, führt er Schwingungen relativ zur rotierenden Scheibe aus. Man soll die Zusatzkräfte der Relativbewegung angeben, die Differentialgleichung der Schwin-*

gungsbewegung aufstellen und die Schwingungsdauer berechnen. Unter welcher Größe muß die Winkelgeschwindigkeit u liegen, wenn solche Schwingungen überhaupt möglich sein sollen?

Lösung. Die erste Ergänzungskraft ist wieder eine Zentrifugalkraft von der Größe

$$\frac{Q}{g} u^2 r,$$

wenn mit $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ der augenblickliche Abstand des Körpers Q von O bezeichnet wird. Die zweite Zusatzkraft steht senkrecht zur Führungsstange AB, hat die Größe

$$2 \frac{Q}{g} u \frac{dx}{dt}$$

und hat bei einem positiven $\frac{dx}{dt}$ einen nach außen gekehrten Pfeil, falls sich die Scheibe, wie in Abb. 69 angenommen ist, im Uhrzeigersinne dreht.

Bei Körpern, die sich längs Führungen reibungsfrei bewegen, hat die zweite Ergänzungskraft keinen Einfluß auf den Bewegungsvorgang, da sie stets senkrecht zur Geschwindigkeit und daher zur Führung steht und von der Führungsstange aufgenommen wird. Das gilt wenigstens so lange, als die Rückwirkung des Führungsdrucks auf die Fahrzeugbewegung vernachlässigt werden kann, jedenfalls also hier, wo ausdrücklich vorausgesetzt wurde, daß sich die Scheibe mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewege.

Aus demselben Grunde kommt auch von der ersten Zusatzkraft nur die in die Richtung der Führungsstange fallende Komponente zur Geltung. Diese hat die Größe

$$\frac{Q}{g} u^2 x$$

und ist mit x gleich gerichtet. Die Schwingungsbewegung erfolgt nun unter dem Einflusse dieser Kraft und der tatsächlich vorhandenen Kraft, nämlich dem Federzuge cx, der entgegengesetzt gerichtet ist. Überwiegt der Federzug, so lassen sich beide Kräfte zu einer Resultierenden

$$x\left(c - \frac{Q}{g} u^2\right)$$

zusammensetzen, die auf die Gleichgewichtslage C hin gerichtet ist. Die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung lautet daher, wenn die Masse von Q mit m bezeichnet wird,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(c - mu^2)\, x$$

Sie unterscheidet sich von der Differentialgleichung (16) für die einfache harmonische Schwingung nur dadurch, daß an die Stelle des die Feldstärke der elastischen Kraft bezeichnenden Faktors c jetzt der in der Klammer enthaltene Ausdruck getreten ist. Hiernach kann die Schwingungsdauer sofort nach Gl. (20) angegeben werden, nämlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c - mu^2}}.$$

Für $c = mu^2$ wird T unendlich groß und für größere Werte von u imaginär. Das weist darauf hin, daß nur bis zu dieser Grenze hin Schwingungen möglich sind. Wenn die Scheibe schneller rotiert, geht Q bis zum Ende der Führungsstange und bleibt dort stehen. Die Gleichgewichtslage in C entspricht dann einem labilen Gleichgewichte.

Bei diesem Beispiele ist, im Gegensatze zu dem in der vorigen Aufgabe behandelten die Lehre von der Relativbewegung von großem Nutzen für die Lösung der Aufgabe und durch eine andere Betrachtung in der Tat nur in sehr schwerfälliger Weise zu ersetzen.

36. Aufgabe. Wie gestaltet sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Bewegung längs der Führungsstange nicht reibungsfrei, sondern einer Reibung unterworfen ist, die dem Normaldrucke zwischen Q und der Führungstange proportional gesetzt werden kann?

Lösung. Wir betrachten die Bewegung zunächst während der Zeit, in der $\frac{dx}{dt}$ positiv ist, also vom linken Umkehrpunkte bis zum rechten hin. Der Normaldruck zwischen Q und der Führungsstange ist dann gleich der Summe aus der Normalkomponente der Zentrifugalkraft und der Corioliskraft, wie man die zweite Zusatzkraft zur Abkürzung oft nennt. Er ist also gleich

$$mu^2 a + 2mu \frac{dx}{dt}.$$

Bezeichnet man den Reibungskoeffizienten mit f und beachtet man, daß die Reibung in jedem Falle der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, hier also eine Beschleunigung im Sinne der negativen x hervorbringt, so erhält man als Differentialgleichung für diesen Teil des Schwingungsvorgangs

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(c - mu^2)x - fmu\left(ua + 2\frac{dx}{dt}\right).$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der Differentialgleichung einer auf den absoluten Raum bezogenen Schwingung überein, an der zugleich eine der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportionale Dämpfung und außerdem noch eine Dämpfung durch gewöhnliche Reibung auftritt. Ihre Lösung ergibt sich daher aus der Verbindung der in § 6 und § 7 gesondert betrachteten Lösungen. Insbesondere folgt daraus, daß die Schwingungsdauer der einfachen Schwingung, während deren $\frac{dx}{dt}$ positiv ist, unabhängig von dem konstanten Gliede auf der rechten Seite der Differentialgleichung ist. Diese Schwingungszeit T_1 kann daher aus Gl. (40) S. 49 unmittelbar entnommen werden, indem man die Hälfte davon nimmt, da es sich jetzt nur um eine einfache Schwingung handelt und außerdem c durch $c - mu^2$ und k durch $2mfu$ ersetzt. Hiermit findet man

$$T_1 = \frac{2\pi m}{\sqrt{4m(c - mu^2) - 4m^2f^2u^2}}.$$

Bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne, also bei negativem $\frac{dx}{dt}$ sind die Normalkomponenten der Zentrifugalkraft und die Corioliskraft von einander entgegengesetzter Richtung. Ihre Resultierende wird aber auch dann noch durch den Ausdruck

$$mu^2a + 2mu\frac{dx}{dt},$$

bei dem nun das zweite Glied einen negativen Wert erlangt, richtig angegeben. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ während des Verlaufs des Schwingungsvorgangs immer so klein bleibt, daß der vorstehende Ausdruck stets positiv bleibt, oder ob er einen Vorzeichenwechsel erfährt. Im letzten Falle muß man den ganzen Schwingungsweg in drei Teile zerlegen, so daß für den mittleren Teil eine andere Differentialgleichung gilt, als für die beiden äußeren.

Wir wollen uns jetzt damit begnügen, die Betrachtung für den Fall weiter zu führen, daß der Absolutbetrag von $\frac{dx}{dt}$ kleiner bleibt, als $\frac{ua}{2}$. Dann lautet die Differentialgleichung für den ganzen Schwingungsweg

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(c - mu^2)x + fmu\left(ua + 2\frac{dx}{dt}\right),$$

da die Reibung stets im Sinne der positiven x gerichtet ist. Auch die Lösung dieser Gleichung kann in derselben Weise gefunden werden, wie die der vorigen. Dabei zeigt sich, daß die Schwingungszeit T_2 für das einmalige Durchlaufen der ganzen Schwingungsbahn ebenso groß wird, wie vorher T_1 bei der Bewegung im positiven Sinne. Der Grund dafür liegt darin, daß in der Formel (40) für die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung der Dämpfungsfaktor k nur im Quadrat vorkommt, und daß es daher für das Schlußergebnis nichts ausmacht, wenn der Faktor von $\frac{dx}{dt}$ in der Differentialgleichung einen Vorzeichenwechsel erfährt. Für die Dauer T einer vollen Schwingung findet man damit

$$T = 2T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - u^2(1 + f^2)}}.$$

In bezug auf die Dämpfung unterscheiden sich dagegen die beiden Halbschwingungen, die im positiven oder negativen Sinne erfolgen, erheblich voneinander. Aus den Lösungen der Differentialgleichungen für beide Fälle läßt sich dies erkennen; von der vollständigen Durchrechnung soll aber hier abgesehen werden.