universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Dynamik

Föppl, August

1909

Dritter Abschnitt. Dynamik des starren Körpers

urn:nbn:at:at-ubi:2-7870

Dritter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers.

§ 22. Das Trägheitsellipsoid.

Schon früher haben wir wiederholt gesehen, daß für die Drehbewegungen eines starren Körpers das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment eine ähnliche Bedeutung hat, wie die Masse für die Bewegung eines materiellen Punktes. Hierbei besteht jedoch der wesentliche Unterschied, daß die Masse für alle Bewegungsrichtungen denselben unveränderlichen Wert behält, während das Trägheitsmoment für verschiedene Richtungen der durch den Schwerpunkt gezogenen Drehachsen ganz verschiedene Werte annimmt. Diese Abhängigkeit zu untersuchen, soll unsere nächste Aufgabe bilden. Für die Trägheitsmomente von Querschnittsflächen in bezug auf alle Achsen, die in der Ebene des Querschnitts enthalten sind, ist diese Aufgabe schon im dritten Bande (§ 19, S. 88 d. 3. Aufl.) gelöst worden. Damit allein kommen wir aber in der Dynamik des starren Körpers nicht aus und wir müssen daher jene früheren Betrachtungen entsprechend ergänzen.

Wir wählen irgendeinen Punkt O auf dem starren Körper aus und nehmen an, daß der Körper in einem bestimmten Augenblicke eine Drehbewegung um irgendeine durch den Punkt O gehende Achse ausführe. Die Winkelgeschwindigkeit sei, als gerichtete Größe aufgefaßt, mit $\mathfrak{u}$ bezeichnet. Die Richtung von $\mathfrak{u}$ gibt die Richtung der Drehachse und der Pfeil von $\mathfrak{u}$ den Umdrehungssinn an, wie es schon im ersten Bande (S. 120 d. 3. Aufl.) ausführlich auseinandergesetzt wurde. Bei den wichtigsten Anwendungen, die von den nachfolgenden Entwicklungen gemacht werden sollen, fällt der Punkt O mit dem Schwerpunkte S zusammen. Auf diesen Fall bezieht sich

auch die nebenstehende Abb. 24, in der $\mathfrak{u}$ in der besprochenen Weise von S aus abgetragen ist. Indessen könnte an Stelle von S auch irgendein anderer Punkt O des Körpers treten, ohne daß dadurch an der Gültigkeit der nachstehenden Betrachtungen etwas geändert würde.

Der Radiusvektor, den man von O aus nach irgendeinem Massenteilchen m des starren Körpers ziehen kann, sei mit $\mathfrak{r}$ und die augenblickliche Geschwindigkeit von m mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Dann ist nach Bd. I, Gl. (58)

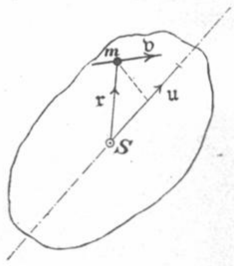

Abb. 24.

$$\mathfrak{v} = -\,V\mathfrak{u}\mathfrak{r},$$

wobei nur zu beachten ist, daß der damals mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnete Vektor jetzt $\mathfrak{r}$ geschrieben ist.

Wir berechnen jetzt die lebendige Kraft L des Körpers bei dem vorausgesetzten Bewegungszustande. Allgemein hat man

$$L = \sum \tfrac{1}{2} m \mathfrak{v}^2,$$

und durch Einsetzen des Wertes von $\mathfrak{v}$ geht dies über in

$$L = \tfrac{1}{2} \sum m (V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Dieser Ausdruck kann noch auf verschiedene Art weiter umgestaltet werden. Bezeichnet man die zu $\mathfrak{u}$ senkrecht stehende Komponente von $\mathfrak{r}$, also den rechtwinkligen Abstand der Masse m von der Drehachse mit p, so erhält man für das Quadrat des äußeren Produkts aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ einfach $u^2 p^2$, wobei u den Absolutwert von $\mathfrak{u}$ bedeutet. Hiermit findet man

$$L = \tfrac{1}{2} u^2 \sum m p^2 = \tfrac{1}{2} u^2 \Theta, \tag{110}$$

wenn das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die gegebene Drehachse mit Θ bezeichnet wird.

Andererseits denken wir uns ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem XYZ mit dem Ursprunge in O gezogen. Zerlegen wir die Vektoren in ihre Komponenten nach diesem

Koordinatensystem, so erhalten wir durch Anwendung der in Gl. (53), Bd. I, S. 94 d. 3. Aufl. gegebenen Rechenvorschrift

$$\mathfrak{v} = -V\,\mathfrak{u}\mathfrak{r} = -\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{f} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathfrak{i}(u_3 y - u_2 z) + \mathfrak{j}(u_1 z - u_3 x) + \mathfrak{f}(u_2 x - u_1 y),$$

wobei die Koeffizienten von $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{f}$ die Komponenten von $\mathfrak{v}$ bilden. Daraus ergibt sich für das Quadrat der Geschwindigkeit der Ausdruck

$$\mathfrak{v}^2 = (u_3 y - u_2 z)^2 + (u_1 z - u_3 x)^2 + (u_2 x - u_1 y)^2,$$

und wenn man dies in L einsetzt, ausquadriert und die Summe in ihre einzelnen Glieder zerlegt, erhält man

$$L = \tfrac{1}{2} u_1^2 (\Sigma m z^2 + \Sigma m y^2) + \tfrac{1}{2} u_2^2 (\Sigma m z^2 + \Sigma m x^2) + \tfrac{1}{2} u_3^2 (\Sigma m y^2 + \Sigma m x^2) - u_1 u_2 \Sigma m x y - u_1 u_3 \Sigma m x z - u_2 u_3 \Sigma m y z.$$

Nun ist aber nach dem pythagoreischen Lehrsatze $y^2 + z^2$ gleich dem Quadrate des senkrechten Abstandes der Masse m von der X-Achse. Bezeichnen wir also das Trägheitsmoment des starren Körpers für die X-Achse mit Θ_x, so wird

$$\Theta_x = \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2. \tag{111}$$

Außerdem setzen wir, wie früher schon in der Festigkeitslehre,

$$\Phi_{xy} = \Sigma m x y$$

und nennen Φ_{yz} das Zentrifugalmoment des Körpers für die X- und Y-Achse. Hiermit geht der Ausdruck für L über in

$$L = \tfrac{1}{2} u_1^2 \Theta_x + \tfrac{1}{2} u_2^2 \Theta_y + \tfrac{1}{2} u_3^2 \Theta_z - u_1 u_2 \Phi_{xy} - u_1 u_3 \Phi_{xz} - u_2 u_3 \Phi_{yz}. \tag{112}$$

Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (110), in der

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

gesetzt werden kann, gestattet das zu irgendeiner Achse $\mathfrak{u}$ gehörige Trägheitsmoment Θ in den auf die Koordinatenachsen bezogenen Momenten Θ und Φ auszudrücken. Be-

quemer ist es aber, den Zusammenhang zwischen diesen Größen durch eine einfache geometrische Darstellung zum Ausdrucke zu bringen.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns eine große Zahl von Strahlen durch den Punkt O gelegt und für jeden dieser Strahlen ermittelt denken, mit welcher Winkelgeschwindigkeit der starre Körper um diesen Strahl als Achse rotieren müßte, wenn die zugehörige lebendige Kraft einen bestimmt vorgeschriebenen Wert L_0 annehmen sollte. Auf jedem Strahle sei die aus dieser Bedingung ermittelte Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so wie es in Abb. 24 für einen von ihnen geschehen war, als Vektor abgetragen. Die Endpunkte aller dieser $\mathfrak{u}$ liegen auf einer Fläche, die den Punkt O von allen Seiten her umgibt. Die Koordinaten eines Punktes dieser Fläche im Koordinatensysteme XYZ sind $u_1 u_2 u_3$ und Gl. (112) stellt daher, wenn wir uns für L den beliebig gewählten, aber unveränderlichen Wert L_0 eingesetzt denken, die Gleichung der Fläche dar. Sie ist für die $u_1 u_2 u_3$ vom zweiten Grade. Die Fläche muß daher, da wir außerdem wissen, daß sie sich nach keiner Richtung hin ins Unendliche erstrecken kann, ein Ellipsoid sein. Der Punkt O ist der Mittelpunkt des Ellipsoids, weil die Gleichung immer noch erfüllt ist, wenn man darin $u_1 u_2 u_3$ durch $-u_1, -u_2, -u_3$ ersetzt.

Führen wir ferner in Gl. (110) an Stelle des Trägheitsmoments Θ den Trägheitshalbmesser i ein, indem wir

$$\Theta = Mi^2$$

setzen, also unter M die Masse des ganzen Körpers verstehen, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{2} u^2 i^2 M . \tag{113}$$

Hiernach ist jeder Halbmesser u des Ellipsoids, für das L den konstanten Wert L_0 hat, dem auf die gleiche Achse bezogenen Trägheitshalbmesser i umgekehrt proportional. Wegen dieses Zusammenhangs mit den Trägheitsmomenten wird das Ellipsoid als das Trägheitsellipsoid bezeichnet.

Im allgemeinen ist das Ellipsoid dreiachsig und seine drei

Hauptachsen heißen zugleich die drei Hauptträgheitsachsen des Körpers für den Punkt O. Das Ellipsoid kann aber auch ein Umdrehungsellipsoid sein, und dann wird jede in der Äquatorebene liegende Achse als eine Hauptträgheitsachse bezeichnet. Geht das Ellipsoid endlich in eine Kugel über, so kann jede Achse als eine Hauptachse angesehen werden.

In allen Fällen gilt aber für eine Hauptachse die Beziehung

$$\delta \Theta = 0, \tag{114}$$

wenn man unter $\delta \Theta$ die Änderung versteht, die das Trägheitsmoment beim Übergange von einer Achse zu einer ihr unendlich nahe benachbarten erfährt. Gl. (114) gibt nämlich die Bedingung dafür an, daß das Trägheitsmoment für die betreffende Achse ein Maximum oder Minimum oder im Falle der Kugel, daß Θ konstant ist.

Bisher verstanden wir unter XYZ ein beliebig orientiertes Koordinatensystem. Nachdem wir aber erkannt haben, daß man stets mindestens auf eine Art drei zu einer senkrecht stehende Hauptachsen angeben kann, ist es für die weitere Untersuchung von Vorteil, die drei Koordinatenrichtungen mit diesen Hauptachsen zusammenfallen zu lassen. Dann vereinfacht sich auch Gl. (112). Um dies zu erkennen, wollen wir von irgendeinem Punkte des Trägheitsellipsoids zu einem Nachbarpunkt übergehen, der ebenfalls auf dem Ellipsoid liegt und die Änderungen, die die Koordinaten $u_1 u_2 u_3$ bei diesem Übergange erfahren mit $\delta u_1 \delta u_2 \delta u_3$ bezeichnen. Mit $L = L_0$ ist Gl. (112) für jeden Punkt der Fläche erfüllt und zwischen den δu muß daher die Beziehung bestehen, die aus Gl. (111) durch Bildung der Differentialien hervorgeht, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 \delta u_1 \Theta_x + u_2 \delta u_2 \Theta_y + u_3 \delta u_3 \Theta_z - u_1 \delta u_2 \Phi_{xy} - u_2 \delta u_1 \Phi_{xy} - \\ - u_1 \delta u_3 \Phi_{xz} - u_3 \delta u_1 \Phi_{xz} - u_2 \delta u_3 \Phi_{yz} - u_3 \delta u_2 \Phi_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Das gilt für jede Stelle des Ellipsoids und für jeden Übergang zu einer Nachbarstelle. Wenden wir dagegen die Gleichung für einen der auf der X-Achse liegenden Punkte des Ellipsoids an, so ist $u_2 = u_3 = 0$ zu setzen und die Gleichung

vereinfacht sich zu

$$u_1 \delta u_1 \Theta_x - u_1 \delta u_2 \Phi_{xy} - u_1 \delta u_3 \Phi_{xz} = 0 .$$

Da wir uns aber dafür entschieden hatten, die X-Achse mit einer Hauptachse zusammenfallen zu lassen, haben wir an dieser Stelle außerdem auch noch

$$\delta u_1 = 0$$

zu setzen, womit die Gleichung übergeht in

$$\delta u_2 \Phi_{xy} + \delta u_3 \Phi_{xz} = 0 .$$

Das muß gelten für jede Richtung, in der wir vom Scheitelpunkt zu einem Nachbarpunkt übergehen, also für jedes Verhältnis von δu_2 zu δu_3. Daraus folgt, daß zugleich

$$\Phi_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_{xz} = 0$$

sein muß. Hiermit ist bewiesen, daß die Zentrifugalmomente für die Hauptachsen gleich Null sind, denn derselbe Schluß wie für die X-Achse würde sich auch für die anderen Hauptachsen wiederholen lassen.

Wenn die Koordinatenachsen mit Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, vereinfacht sich daher Gl. (112) zu

$$L = \frac{1}{2} u_1^2 \Theta_x + \frac{1}{2} u_2^2 \Theta_y + \frac{1}{2} u_3^2 \Theta_z . \tag{115}$$

Bezeichnet man die Winkel, die irgendeine Achse mit den drei Hauptachsen bildet mit $\alpha\beta\gamma$, so folgt für das dieser Achse zugehörige Θ aus dem Vergleiche der Gleichungen (110) und (115)

$$\Theta = \Theta_x \cos^2\alpha + \Theta_y \cos^2\beta + \Theta_z \cos^2\gamma . \tag{116}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt haben, vollständig gelöst.

§ 23. Drall und Drall-Ellipsoid.

So wie vorher für die lebendige Kraft bilden wir jetzt auch den Ausdruck für den Drall $\mathfrak{B}$ des mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um den beliebigen Punkt O rotierenden starren Körpers, und zwar für den Punkt O selbst als Momentenpunkt. Hierbei mag jedoch gleich bemerkt werden,

daß, wenn O mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt, die Wahl des Momentenpunktes gleichgültig ist, da, wie wir in § 18 unter b) fanden, der Drall für jeden Momentenpunkt denselben Wert annimmt, wenn der Schwerpunkt ruht.

Allgemein war nach der Definition des Dralls

$$\mathfrak{B} = \Sigma \mathfrak{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r},$$

und wenn man für $\mathfrak{v}$ den hier zutreffenden Wert einsetzt, geht dies über in

$$\mathfrak{B} = -\Sigma \mathfrak{V}(m \mathfrak{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{r}$$

oder nach Vertauschung der Faktoren in dem einen der äußeren Produkte

$$\mathfrak{B} = \Sigma m \mathfrak{V} \mathfrak{r} \mathfrak{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r}. \tag{117}$$

Man muß also zunächst das äußere Produkt aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ bilden, dann dieses selbst wieder als zweiten Faktor eines äußeren Produkts ansehen, dessen erster Faktor $\mathfrak{r}$ ist, um hierauf nach Multiplikation mit m und Summierung über alle Teile m des Körpers $\mathfrak{B}$ zu erhalten. Das ist eine sehr umständliche Rechenvorschrift, die sich aber durch eine weit einfachere ersetzen läßt. Nach einer der bekanntesten Formeln der Vektoralgebra kann nämlich, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ beliebige Vektoren bedeuten, stets

$$\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B} \tag{118}$$

gesetzt werden. Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei Gliedern, von denen das erste den Vektor $\mathfrak{B}$ als Faktor enthält und daher mit ihm gleichgerichtet ist; denn der andere Faktor $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist ein inneres Produkt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ und als solches eine Größe ohne Richtung. Ebenso ist das zweite Glied mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichtet.

Bisher ist die Formel (118) in diesem Buche nicht vorgekommen. Ich werde daher nicht unterlassen dürfen, hier einen Beweis dafür einzuschieben. Erfreulicherweise hat ja allerdings das Rechnen mit Vektoren in den letzten Jahren sehr zugenommen, und im Zusammenhange damit hat man auch damit begonnen, die einfachsten Rechengesetze für Vektoren in

den mathematischen Vorlesungen an einzelnen Hochschulen zu behandeln. Wenn das schon allgemein eingeführt wäre, könnte ich von einem Beweise für Formel (118), der an sich von rein mathematischer Art ist und mit der Dynamik sachlich so wenig zu tun hat, wie irgendeine andere mathematische Formel, absehen. So wie die Dinge heute liegen, muß ich mich aber doch zur Wiedergabe des Beweises entschließen.

Nach Gl. (53), Bd. I, S. 94 der 3. Aufl. ist

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathfrak{i}(B_2C_3 - B_3C_2) + \mathfrak{j}(B_3C_1 - B_1C_3) + \mathfrak{k}(B_1C_2 - B_2C_1)$$

und hiernach auch

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{A}\,\mathrm{V}\,\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2C_3 - B_3C_2) & (B_3C_1 - B_1C_3) & (B_1C_2 - B_2C_1) \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante, so erhält man zunächst für die $\mathfrak{i}$-Komponente

$$\mathfrak{i}(A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_3B_1C_3),$$

oder wenn man $A_1B_1C_1$ einmal als positives und einmal als negatives Glied zufügt,

$$\mathfrak{i}\{B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)\},$$

d. h. wenn man sich der Bedeutung der in den runden Klammern stehenden Summen erinnert

$$\mathfrak{i}\{B_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}.$$

Genau ebenso findet man für die $\mathfrak{j}$-Komponente

$$\mathfrak{j}\{B_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$$

und entsprechend auch die letzte Komponente. Faßt man aber alle drei Komponenten wieder zusammen, so erhält man nach Herausheben der drei gemeinsamen Faktoren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{i}B_1 + \mathfrak{j}B_2 + \mathfrak{k}B_3) - \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{i}C_1 + \mathfrak{j}C_2 + \mathfrak{k}C_3),$$

d. h. genau den in Gl. (118) angegebenen Wert. Hiermit ist der verlangte Beweis erbracht.

Kehren wir nach dieser Unterbrechung wieder zu Gl. (117) zurück, so geht sie durch Anwendung der in Gl. (118) ausgesprochenen Rechenvorschrift über in

$$\mathfrak{B} = \Sigma m(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}),$$

oder nach Spaltung des Ausdrucks in zwei Glieder in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u} \cdot \Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}. \tag{119}$$

Diese Gleichung ist sehr wichtig und wir müssen sie daher noch näher im einzelnen besprechen.

Der Drall $\mathfrak{B}$ stellt sich hiernach als eine geometrische Summe aus zwei Gliedern dar. Hiervon ist das erste Glied gleichgerichtet mit $\mathfrak{u}$ und auch proportional mit der absoluten Größe der Winkelgeschwindigkeit. Der andere Faktor des ersten Gliedes ist richtungslos und stets positiv; er stellt das polare Trägheitsmoment des Körpers für den Punkt O dar. Setzt man

$$\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und beachtet die durch Gl. (111) ausgesprochenen Beziehungen, so erhält man

$$\Sigma m\mathfrak{r}^2 = \frac{1}{2}(\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z). \tag{120}$$

Wenn man z. B. imstande ist, die Trägheitsmomente des Körpers für die drei durch den Punkt O gehenden Hauptachsen anzugeben, kennt man hiernach das erste Glied in dem Ausdrucke für $\mathfrak{B}$ vollständig. — Das zweite Glied macht etwas mehr Schwierigkeiten; insbesondere läßt sich nicht unmittelbar erkennen, in welcher Richtung es geht. Man kann es indessen auch leicht auf die schon in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft vorkommenden Summenausdrücke zurückführen. Für $\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ hat man nämlich in der Koordinatendarstellung

$$\mathfrak{u}\mathfrak{r} = u_1 x + u_2 y + u_3 z$$

und die X-Komponente von $\Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}$ geht daher über in

$$\Sigma mx(u_1 x + u_2 y + u_3 z).$$

Wenn die Koordinatenachsen mit den Trägheitshauptachsen zusammenfallen, heben sich die Zentrifugalmomente fort und

man behält

$$u_1 \Sigma m x^2$$

und entsprechend bei den anderen Komponenten.

Zerlegt man auch den Drall $\mathfrak{B}$ selbst in seine Komponenten nach den Hauptträgheitsachsen, so erhält man aus Gl. (119) zunächst für die $\mathfrak{i}$-Komponente, die wir mit B_1 bezeichnen

$$B_1 = u_1 \Sigma m \mathfrak{r}^2 - u_1 \Sigma m x^2 = u_1 \Sigma m (\mathfrak{r}^2 - x^2) = \\ = u_1 \Sigma m (y^2 + z^2) = u_1 \Theta_x .$$

Im ganzen läßt sich daher $\mathfrak{B}$ auch in der folgenden Weise darstellen:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{i} u_1 \Theta_x + \mathfrak{j} u_2 \Theta_y + \mathfrak{k} u_3 \Theta_z \qquad (121)$$

gültig für das mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallende Koordinatensystem.

Diese Formel ist sehr nützlich. In vielen Fällen wird es aber vorzuziehen sein, an ihrer Stelle die ursprüngliche Gl. (119) zu verwenden, wenn es möglich ist, den Wert $\Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}$ auf einfache Art zu ermitteln. Wie dies bei beliebig gegebener Körpergestalt mit hinlänglicher Genauigkeit sofort geschehen kann, möge in Anlehnung an Abb. 25 besprochen werden. Man teile den Körper durch Schnitte, die senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gezogen sind, in eine Anzahl von Scheiben ein, so daß sich die Scheibendicke näherungsweise als unendlich klein betrachten läßt. Eigentlich hätte man dazu unendlich viele Schnitte zu führen; aber der Fehler, der daraus entsteht, daß man nur eine geringe Zahl annimmt, macht nicht viel aus, wenn man die Schnitte nur sonst passend wählt. Eine der Scheiben, die in Abb. 25 schraffiert ist, möge die Ordnungsnummer n tragen. Für alle Massen m, die zu ihr gehören, hat $\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ denselben Wert, nämlich $u a_n$, wenn mit a_n der senkrechte Abstand der

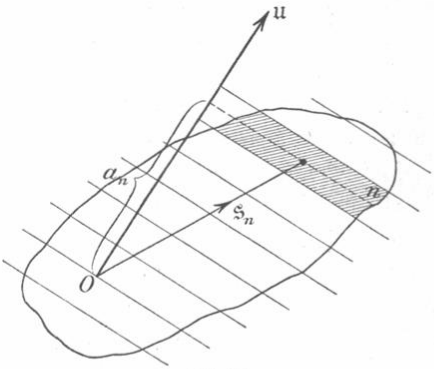

Abb. 25.

Scheibe von O bezeichnet wird. Zu der Summe $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$, die wir berechnen wollen, liefert daher die Scheibe n den Beitrag

$$u a_n \Sigma_n m\mathfrak{r} = u a_n M_n \mathfrak{s}_n,$$

wenn mit $\mathfrak{s}_n$ der nach dem Schwerpunkt der Scheibe gezogene Radiusvektor und mit M_n die Masse der Scheibe bezeichnet wird. Für jede Scheibe wird man also den Schwerpunkt aufzusuchen und hierauf den vorstehenden Ausdruck zu bilden haben. Man braucht nachher nur die geometrische Summe durch graphische Aneinanderreihung aller dieser Werte unter Zugrundelegung eines geeigneten Maßstabes zu bilden, um sofort $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ nach Richtung und Größe zu erhalten. Hierbei ist übrigens zu beachten, daß jene Abstände a, die im Sinne von $\mathfrak{u}$ hin liegen, positiv, jene aber, die nach der entgegengesetzten Richtung zählen, negativ einzusetzen sind.

Das Verfahreu gestattet namentlich eine sehr schnelle ungefähre Schätzung der Richtung des Gliedes $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ vom Dralle. Man sieht z. B. sofort, daß bei einer länglichen Gestalt des Körpers, wie in Abb. 25, für einen nicht weit von der Achse liegenden Punkt O die Richtung von $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ jedenfalls nicht viel von der Figurenachse abweichen kann, während das erste Glied von $\mathfrak{B}$ in die Richtung von $\mathfrak{u}$ fällt. Hieraus läßt sich auch erkennen, in welchem Sinne die Richtung von $\mathfrak{B}$ von der Richtung von $\mathfrak{u}$ abweichen wird. Man darf dabei natürlich nicht vergessen, daß wegen des Minuszeichens vor $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ in Gl. (119) der Pfeil zuvor umzukehren ist. Ferner ist zu beachten, daß der Absolutwert von $\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ jedenfalls kleiner ist, als der des anderen Gliedes $\mathfrak{u}\Sigma m\mathfrak{r}^2$. Auf Grund dieser Erwägungen vermag man z. B. leicht einzuschätzen, daß bei der in Abb. 26 angedeuteten Körpergestalt zu der dort angegebenen Richtung von $\mathfrak{u}$ ungefähr die ebenfalls eingetragene Richtung von $\mathfrak{B}$ gehören wird. Diese Bemerkungen sind deshalb von Wichtigkeit, weil bei den Anwendungen der Theorie eine ungefähre Abschätzung oft schon vollständig genügt.

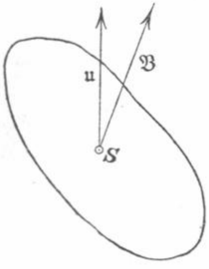

Abb. 26.

Übrigens kann der Winkel, den die Richtungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ untereinander einschließen, unter allen Umständen nur ein spitzer, niemals ein stumpfer oder rechter sein. Man erkennt dies, wenn man das innere Produkt aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ bildet. Dafür erhält man nach Gl. (119)

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = \mathfrak{u}^2 \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2$$

oder auch, wenn man $\mathfrak{u} = u\mathfrak{u}_1$ setzt, also unter u den Absolutwert der Winkelgeschwindigkeit und unter $\mathfrak{u}_1$ einen in der Richtung der Drehachse gezogenen Einheitsvektor versteht,

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = u^2(\Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2) = u^2 \Sigma m (\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2) = \\ = u^2 \Sigma m p^2 = u^2 \Theta = 2L, \qquad (122)$$

wenn p und L in derselben Bedeutung wie im vorigen Paragraphen gebraucht werden. Da die lebendige Kraft L jedenfalls positiv und von Null verschieden ist, kann der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ nur ein spitzer sein.

Die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf die Drehachse sei mit B' bezeichnet. Dann ist B' zugleich der Drall bezogen auf die Drehachse als Momentenachse, wie aus der Lehre von den auf Achsen bezogenen statischen Momenten bekannt ist (vgl. § 17, Bd. I, S. 90 d. 3. Aufl.). Das innere Produkt aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ wird gleich uB' und die vorige Gleichung geht über in

$$B' = u\Theta. \qquad (123)$$

Wir haben uns ferner die Frage vorzulegen, unter welchen Umständen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ auf dieselbe Richtungslinie fallen. Das können wir am einfachsten auf Grund von Gl. (121) entscheiden. Ist z. B. $u_2 = u_3 = 0$, so folgt aus dieser Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{i} u_1 \Theta_x = \mathfrak{u} \Theta_x,$$

d. h. Drall und Winkelgeschwindigkeit sind immer dann gleich gerichtet, wenn sich der Körper um eine Hauptträgheitsachse dreht. Allgemein lautet die Bedingung für gleiche Richtung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ nach Gl. (121)

$$u_1 \Theta_x : u_2 \Theta_y : u_3 \Theta_z = u_1 : u_2 : u_3,$$

und diese kann für einen Körper mit dreiachsigem Trägheitsellipsoid nur dann erfüllt sein, wenn zwei der drei Winkel-

geschwindigkeitskomponenten $u_1 u_2 u_3$ gleich Null sind, d. h. nur für eine Drehung um eine der drei Hauptachsen. Ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel, also $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z$, so sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ stets gleich gerichtet, aber dann kann auch jede Achse als Hauptachse angesehen werden. Ist dagegen nur $\Theta_y = \Theta_z$, das Trägheitsellipsoid daher ein Umdrehungsellipsoid, so ist die Bedingung erfüllt, wenn entweder $u_2 = u_3 = 0$, oder auch wenn $u_1 = 0$ ist, während in diesem Falle u_2 und u_3 beliebige Werte haben können, d. h. also sowohl für die Umdrehungsachse des Ellipsoids als auch für jede in der Äquatorebene liegende Achse. Aber auch diese Achsen sind zugleich Hauptträgheitsachsen. Wir können daher den vorhin ausgesprochenen Satz dahin erweitern, daß Drall und Winkelgeschwindigkeit immer dann, aber auch nur dann gleich gerichtet sind, wenn sich der Körper um eine Hauptträgheitsachse dreht.

Im vorigen Paragraphen hatten wir alle möglichen Drehbewegungen um die durch O gehenden Achsen besprochen, die sämtlich zu demselben Werte L_0 für die lebendige Kraft führten. Jetzt wollen wir zu jeder dieser Bewegungen mit konstanter lebendiger Kraft auch den zugehörigen Drall ermitteln und alle diese Vektoren $\mathfrak{B}$ nach Richtung und Größe vom Punkte O aus abtragen. Die Endpunkte aller dieser Strecken liegen auf einer Fläche, von der sich leicht zeigen läßt, daß sie ebenfalls ein Ellipsoid ist, das wir das Drall-Ellipsoid nennen wollen.

Zum Beweise dieser Behauptung mache ich zunächst darauf aufmerksam, daß $\mathfrak{B}$ nach den Gl. (119) oder (121) linear von $\mathfrak{u}$ abhängig ist. Zerlegt man nämlich $\mathfrak{u}$ in irgend zwei Teile $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}''$ und berechnet die zu $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{u}''$ gehörigen Drallwerte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$, so ist auch der ganze zu $\mathfrak{u}$ gehörige Drall $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''$, wie aus den Gleichungen unmittelbar hervorgeht. Hiernach entsprechen allen Strahlen $\mathfrak{u}$, deren Endpunkte auf einer beliebigen Geraden liegen, zugeordnete Strahlen $\mathfrak{B}$, deren Endpunkte ebenfalls auf einer anderen Geraden enthalten sind. Hiernach wird durch die Gleichungen (119) oder (121) jedem Punkte des Raumes (als Endpunkt von $\mathfrak{u}$ betrachtet) ein an-

derer Punkt des Raumes (als Endpunkt von $\mathfrak{B}$) zugeordnet in der Weise, daß eine kollineare Abbildung des Raumes entsteht. Nun lagen die Endpunkte jener $\mathfrak{u}$, die alle zu demselben Werte L_0 für die lebendige Kraft führten, auf dem Trägheitsellipsoid und die Endpunkte aller $\mathfrak{B}$ liegen daher auf einer Fläche, die als die kollineare Abbildung des Trägheitsellipsoids angesehen werden kann. Die kollineare Abbildung des Ellipsoids kann aber nur wieder ein Ellipsoid mit denselben Richtungen der Hauptachsen sein.

Anstatt sich auf diese Eigenschaften der kollinearen Abbildung zu stützen, kann man aber den Beweis natürlich auch unmittelbar auf Grund der Gl. (119) oder (121) führen. So erhält man aus Gl. (121) für die Komponenten von $\mathfrak{B}$

$$B_1 = u_1 \Theta_x; \quad B_2 = u_2 \Theta_y; \quad B_3 = u_3 \Theta_z,$$

und zwischen den Koordinaten $u_1 u_2 u_3$ des Trägheitsellipsoids besteht die Gleichung

$$\frac{u_1^2}{u_x^2} + \frac{u_2^2}{u_y^2} + \frac{u_3^2}{u_z^2} = 1,$$

wenn mit $u_x u_y u_z$ die Halbachsen des Trägheitsellipsoids bezeichnet werden. Drückt man die $u_1 u_2 u_3$ in den $B_1 B_2 B_3$ aus und setzt sie in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{B_1^2}{u_x^2 \Theta_x^2} + \frac{B_2^2}{u_y^2 \Theta_y^2} + \frac{B_3^2}{u_z^2 \Theta_z^2} = 1,$$

und das ist die Gleichung des Drallellipsoids, dessen Koordinaten $B_1 B_2 B_3$ sind. Man kann sie noch etwas einfacher schreiben, indem man bedenkt, daß $u_x \Theta_x = B_x$, d. h. gleich dem Drall für eine Bewegung um die X-Achse ist, womit die Gleichung übergeht in

$$\frac{B_1^2}{B_x^2} + \frac{B_2^2}{B_y^2} + \frac{B_3^2}{B_z^2} = 1.$$

Um den Zusammenhang zwischen beiden Ellipsoiden noch weiter zu erforschen, bilden wir die Änderung $\delta\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{B}$ erfährt, wenn man $\mathfrak{u}$ irgendeinen unendlich kleinen Zuwachs $\delta\mathfrak{u}$ erteilt. Aus Gl. (119) findet man

$$\delta\mathfrak{B} = \delta\mathfrak{u} \cdot \Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r} \cdot \delta\mathfrak{u}\mathfrak{r},$$

und wenn man dies mit $\mathfrak{u}$ auf innere Art multipliziert

$$\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} = \mathfrak{u}\delta\mathfrak{u}\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{u}\mathfrak{r}\cdot\delta\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$
$$= \delta\mathfrak{u}\{\mathfrak{u}\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{u}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}\} = \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u}.$$

Wir haben also die bemerkenswerte Beziehung

$$\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} \tag{124}$$

gefunden, und zwar gültig für beliebige Zuwüchse $\delta\mathfrak{u}$. Betrachten wir aber weiterhin nur solche Zuwüchse $\delta\mathfrak{u}$, die einen Halbmesser $\mathfrak{u}$ des Trägheitsellipsoids in einen benachbarten Halbmesser $\mathfrak{u}+\delta\mathfrak{u}$ überführen, oder die mit anderen Worten unendlich kleine Bögen auf dem Trägheitsellipsoid bilden, so folgt ferner aus Gl. (122), nämlich

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = 2L_0$$

durch Differentiation auch

$$\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = 0.$$

Da aber beide Glieder auf der linken Seite schon als gleich erkannt sind, folgt, daß jedes von ihnen gleich Null sein muß. Man hat also

$$\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = 0. \tag{125}$$

Diese Gleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Alle unendlich kleinere Bögen $\delta\mathfrak{u}$, die man von einem Punkte des Ellipsoids aus in verschiedenen Richtungen ziehen kann, sind nämlich in der durch diesen Punkt gehenden Tangentialebene des Ellipsoids enthalten. Die Gleichung $\mathfrak{B}\delta\mathfrak{u}=0$ sagt daher aus, daß die Richtung von $\mathfrak{B}$ senkrecht auf dieser Tangentialebene steht. Ebenso folgt aus der Gleichung $\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B}=0$, daß jedes $\mathfrak{u}$ senkrecht steht zu der Tangentialebene, die man im Endpunkte des zugehörigen $\mathfrak{B}$ an das Drall-Ellipsoid legen kann. Hierdurch sind wir in den Besitz eines einfachen Verfahrens gebracht, um die Richtung des zu einem gegebenen $\mathfrak{u}$ gehörigen $\mathfrak{B}$ oder umgekehrt auf geometrischem Wege zu finden.

In Abb. 27 sind die beiden Ellipsoide für den Fall eines Umdrehungskörpers mit der Symmetrieachse mm dargestellt und zwei zusammengehörige Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ nebst den Spuren

ihrer Tangentialebenen eingetragen. Durch passende Wahl der Maßstäbe, in denen man $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ aufträgt, kann man es erreichen, daß die beiden Meridiankurven kongruente Ellipsen bilden, die nur um 90^0 gegeneinander gedreht sind. Aus Gl. (122)

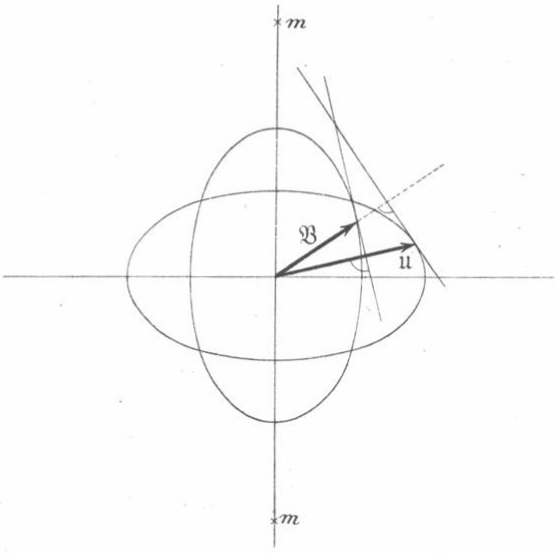

Abb. 27.

folgt nämlich

$$u_x B_x = u_y B_y = u_z B_z = 2 L_0 ,$$

d. h. die Hauptachsen der beiden Ellipsen sind miteinander umgekehrt proportional. Je kleiner die Winkelgeschwindigkeit ist, die L_0 hervorbringt, desto größer ist der zugehörige Drall, wenn man nur die Hauptachsen miteinander vergleicht.

§ 24. Die freien Achsen.

Ein starrer Körper möge anfänglich eine beliebige Bewegung besitzen und hierauf ohne Einwirkung äußerer Kräfte sich selbst überlassen werden. Wir schließen nach Schwerpunkts- und Flächensatz von neuem, daß sowohl die Bewegungsgröße des ganzen Körpers als auch der Drall konstant bleiben müssen. In jedem Augenblicke kann man sich die Bewegung in eine Translation zerlegt denken mit jener Ge-

schwindigkeit, die dem Schwerpunkte zukommt und in eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Die Translation geht nach dem Schwerpunktssatze gleichförmig vor sich und interessiert uns kaum. Viel wichtiger ist jetzt für uns die Frage nach der Rotationsbewegung. Wir wollen daher von der Translation ganz absehen, also annehmen, daß der Schwerpunkt des starren Körpers schon von Anfang an ruhte; beim Fehlen aller äußeren Kräfte wird er dann auch dauernd in Ruhe bleiben, so daß wir es in der Tat nur noch mit den Rotationen zu tun haben. Im übrigen muß aber betont werden, daß auch im allgemeineren Falle das, was jetzt von den Rotationsbewegungen für sich ausgesagt werden soll, unverändert gültig bleibt, und daß dann nur noch die von den Rotationen unabhängige und hier gleichgültige konstante Translationsbewegung hinzutritt.

Wir werden das wichtige Problem, die Bewegung eines sich selbst überlassenen starren Körpers anzugeben, nur schrittweise in Angriff nehmen. Hier beschränken wir uns auf die Beantwortung der Frage, ob die Rotationsachse ihre Richtung im Raume und im Körper dauernd beibehält oder nicht.

Wer sich diese Frage, zum ersten Male vorlegt, ohne vorher davon gehört zu haben, wird leicht geneigt sein, die Konstanz der Rotationsachse für alle Fälle von vornherein anzunehmen. Schon die oft nicht ganz stichhaltige Fassung des Trägheitsgesetzes, wonach ein Körper seine augenblickliche Bewegung beim Fehlen äußerer Kräfte unverändert beibehalten müsse, verleitet oft zu dieser gleichwohl irrigen Annahme. Im allgemeinen verändert sich vielmehr die Lage der Rotationsachse mit der Zeit sowohl relativ zum Körper als zum absoluten Raume. Sie kann freilich auch konstant bleiben und jede im Körper gezogene (und jedenfalls durch den Schwerpunkt gehende) Achse, um die sich der Körper ohne Zwang dauernd zu drehen vermag, heißt eine freie Achse (oder auch permanente Drehachse).

Auf Grund des Trägheitsgesetzes vermag man nur zu schließen, daß ein einzelner materieller Punkt die Bewegung,

die er hatte, ohne Einwirkung äußerer Kräfte beibehält oder daß das gleiche auch von der Schwerpunktsbewegung eines beliebigen Punkthaufens gilt. Die Rotationsbewegung wird aber von der Aussage des Trägheitsgesetzes nicht unmittelbar berührt und mittelbar nur insofern, als aus dem Trägheitsgesetze in der Dynamik des materiellen Punktes eine Reihe von Folgerungen gezogen wurde, die sich später auf die Dynamik des Punkthaufens übertragen ließen, und die daher jetzt an Stelle des Trägheitsgesetzes zur Untersuchung der Rotationserscheinungen verwendet werden können.

Man wird aber nicht leicht die Forderung fallen lassen, daß sich irgendeine mit der Rotationsbewegung zusammenhängende Größe beim Fehlen äußerer Kräfte als konstant erweisen müsse, schon deshalb, weil man stets gewohnt ist, die Kräfte als Ursachen von Veränderungen anzusehen. In der Tat kann man zwei sehr wichtige Größen angeben, die nur durch das Eingreifen äußerer Kräfte geändert werden können. Die erste ist die lebendige Kraft des starren Körpers, von der dies schon im ersten Bande dieses Werkes gezeigt wurde und die andere ist der Drall, der nach dem Flächensatze (vgl. § 18 unter b) der Zeit nach konstant und hier überdies noch für jeden Momentenpunkt gleich groß ist. Die zweite Bedingung sagt übrigens mehr aus als die erste, denn die lebendige Kraft ist eine Größe ohne Richtung und die Bedingung, daß sie konstant sei, wird daher durch eine einzige Beziehung zwischen Zahlengrößen ausgesprochen. Der Drall ist dagegen eine gerichtete Größe und die Bedingung, daß er sich nicht ändere, schließt neben der Konstanz des Absolutwertes auch die Konstanz der Richtung ein. Die Vektorgleichung, die dies ausspricht, läßt sich in drei voneinander unabhängige Komponentengleichungen zerlegen, enthält also drei Zahlenbeziehungen. In der Tat ist daher auch das Moment der Bewegungsgröße von noch größerer Bedeutung für die Beurteilung der Rotationserscheinungen als selbst die lebendige Kraft.

Aus der Bedingung, daß sich der Drall nicht ändern kann, ergibt sich nun leicht, welche Drehungsachsen des starren

Körpers freie Achsen sind. Es sind jene, für die $\mathfrak{B}$ gleichgerichtet mit $\mathfrak{u}$ ist, d. h. die Hauptträgheitsachsen und nur diese sind freie Achsen. Im anderen Falle nämlich, wie er etwa durch Abb. 26, S. 174 angegeben ist, kann man zwar den Körper auch dazu zwingen, daß er sich dauernd um die durch $\mathfrak{u}$ angegebene Achse dreht, indem man ihn z. B. mit Hilfe von Zapfen in einem Gestell lagert. Aber in diesem Falle bleibt der Drall $\mathfrak{B}$ nicht konstant, sondern der Vektor $\mathfrak{B}$ beschreibt eine Kegelfläche um $\mathfrak{u}$ als Achse. Das folgt daraus, daß sich alle Radienvektoren nach den einzelnen Massenteilchen um diese Achse und um denselben Winkel gedreht haben, während $\mathfrak{u}$ konstant blieb. Solange dies zutrifft, bleibt auch $\mathfrak{B}$ relativ zum Körper genommen konstant und dreht sich daher mit dem Körper zusammen gegen den festen Raum. Nach dem Flächensatze müssen aber äußere Kräfte einwirken, um irgendeine Änderung von $\mathfrak{B}$ gegen den festen Raum hervorzubringen, auch wenn sich diese Änderung nur auf die Richtung und nicht auf die Größe des Dralls bezieht. Daraus folgt, daß $\mathfrak{u}$ in Abb. 26 unmöglich eine freie Achse sein kann; vielmehr muß von den Lagern her ein Zwang auf den Körper übertragen werden, der sich auf ein Kräftepaar zurückführen läßt. Das Moment dieses Kräftepaares kann auch nach der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma \mathfrak{V} \mathfrak{P}\mathfrak{r}$$

berechnet werden, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben sind. An einer späteren Stelle werden wir diese Berechnung vornehmen.

Rotiert dagegen der Körper um eine Hauptträgheitsachse, so bleibt das in die Richtung von $\mathfrak{u}$ fallende $\mathfrak{B}$ konstant und mit $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ wird auch $\Sigma \mathfrak{V} \mathfrak{P}\mathfrak{r}$ zu Null, d. h. der Körper dreht sich dauernd um dieselbe Achse weiter, ohne daß ein Zwang dazu aufgewendet zu werden braucht. Damit ist die vorher aufgestellte Behauptung bewiesen.

Auch in diesem Falle kann übrigens an Stelle des Flächensatzes das d'Alembertsche Prinzip verwendet werden. Man kommt

dann zu denselben Schlüssen, wie hier noch gezeigt werden soll. Wenn nämlich ein Körper gezwungen ist, stets um dieselbe Achse $\mathfrak{u}$ zu rotieren, bestehen die Trägheitskräfte, die man nach diesem Satze anbringen muß, um die dynamische Aufgabe auf eine statische zurückzuführen, in Zentrifugalkräften. Bezeichnet man die in Abb. 28 von der Drehachse $\mathfrak{u}$ rechtwinklig nach dem Massenteilchen m gezogene Strecke mit $\mathfrak{p}$, so ist die Zentrifugalkraft $\mathfrak{C}$ nach Bd. I, § 26, S. 174 d. 3. Aufl.

$$\mathfrak{C} = mu^2\mathfrak{p}$$

zu setzen, wofür auch

$$\mathfrak{C} = mu^2\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{u}_1\mathfrak{r})$$

geschrieben werden kann, wenn man beachtet, das $\mathfrak{p}$ als geometrische Summe der beiden anderen in Abb. 28 vorkommenden Dreieckseiten dargestellt werden kann. Aus der angeführten Stelle des ersten Bandes ist schon bekannt, daß die geometrische Summe aller $\mathfrak{C}$ gleich Null ist, wenn der Körper um den Schwerpunkt rotiert. Die äußeren Kräfte, die an dem Körper angreifen, müssen nun nach dem d'Alembertschen Prinzip mit den Trägheitskräften $\mathfrak{C}$ im Gleichgewicht stehen, und wenn keine äußeren Kräfte nötig sein sollen, um die Bewegung aufrecht zu erhalten, müssen daher die $\mathfrak{C}$ selbst ein Gleichgewichtssystem bilden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür besteht, da die geometrische Summe der $\mathfrak{C}$ jedenfalls Null ist, darin, daß für irgendeinen Momentenpunkt die geometrische Summe der statischen Momente verschwindet. Wählen wir S als Momentenpunkt, so lautet demnach die Bedingungsgleichung für die freie Achse

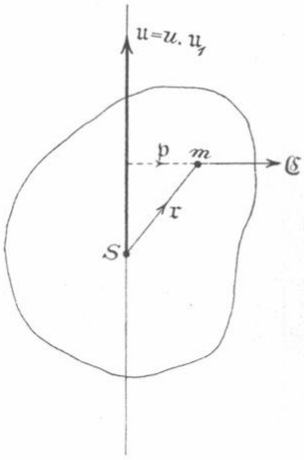

Abb. 28.

$$\Sigma m \,\mathfrak{V}(\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{u}_1\mathfrak{r})\mathfrak{r} = 0.$$

Da das äußere Produkt aus $\mathfrak{r}$ mit sich selbst verschwindet, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\Sigma m\,\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}\,\mathfrak{V}\mathfrak{u}_1\mathfrak{r} = 0.$$

Da $\mathfrak{u}_1$ konstant ist, läßt sich dafür auch schreiben

$$\mathfrak{V}\mathfrak{u}_1\,\Sigma m\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} = 0.$$

Das äußere Produkt kann aber, da beide Faktoren von Null verschieden sind, nur dadurch zu Null werden, daß beide Faktoren gleich

gerichtet sind. Die Bedingung für die freie Achse läßt sich daher auch dahin aussprechen, daß

$$\Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}_1\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}_1$$

sein muß, oder schließlich auch, wenn man mit u multipliziert

$$\Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}.$$

Wenn dies zutrifft, ist aber nach Gl. (119) S. 172 auch $\mathfrak{B}$ parallel mit $\mathfrak{u}$ und hiermit ist von neuem bewiesen, daß die Hauptträgheitsachsen und nur diese freie Achsen sind.

§ 25. Wirkung eines Kräftepaares auf einen freien starren Körper.

Ein starrer Körper sei frei, d. h. allen übrigen äußeren Kräften entzogen und vorher in Ruhe. Dann soll irgendein Kräftepaar auf ihn einwirken; es fragt sich, welche Bewegung der Körper annimmt.

Wir wissen schon, daß sich der Schwerpunkt nicht verschieben kann; die Bewegung muß also in einer Drehung um eine Schwerpunktsachse bestehen. Es fragt sich zunächst, um welche Achse er beginnen wird, sich zu bewegen, und welche Winkelbeschleunigung ihm von dem Kräftepaare um diese Achse erteilt werden wird.

Hinsichtlich des Kräftepaares muß zunächst daran erinnert werden, daß alle Kräftepaare am starren Körper, die in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, äquivalent sind, wenn sie dasselbe statische Moment haben (Band II, § 22). Um das Kräftepaar für unsere Zwecke eindeutig zu beschreiben, genügt es daher, den Momentenvektor $\mathfrak{N}$ des Kräftepaares nach Größe und Richtung anzugeben. Da dieser ein völlig freier Vektor ist, d. h. auch parallel zu sich selbst willkürlich verschoben werden darf, ist es gleichgültig, von welchem Punkte aus wir ihn uns gezogen denken wollen. Am einfachsten ist es, wenn wir ihn uns vom Schwerpunkt aus abgetragen denken.

Auch hier muß wieder vor voreilig gefaßten Meinungen gewarnt werden. Es könnte nämlich bei flüchtiger Betrachtung scheinen, daß die Drehung $\mathfrak{u}$, die von $\mathfrak{N}$ hervorgebracht

wird, mit $\mathfrak{K}$ gleich gerichtet sein müsse. Zu dieser Meinung kann namentlich der Vergleich des Kräftepaares mit einer Einzelkraft leicht verleiten. Wir haben schon im ersten Bande gesehen, daß sich beide in der Tat in vieler Hinsicht gleichen. Die Einzelkraft bringt am materiellen Punkte eine Verschiebung in ihrer Richtung hervor. Das Kräftepaar bringt eine Drehung um eine Schwerpunktsachse hervor. Aber hier besteht nun der erhebliche Unterschied, daß die Richtung der Drehachse im allgemeinen keineswegs mit der Richtung von $\mathfrak{K}$ zusammenfällt. Unter besonderen Umständen trifft dies freilich zu und wir wollen hier vor allen Dingen untersuchen, unter welchen Umständen.

Mit Hilfe des Flächensatzes wird sich dies leicht entscheiden lassen. Beachten wir, daß an Stelle von $\Sigma \mathfrak{V} \mathfrak{P} \mathfrak{r}$ jetzt kürzer $\mathfrak{K}$ geschrieben werden kann, so wird der Flächensatz hier durch die einfache Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{126}$$

ausgesprochen. Hat das Kräftepaar $\mathfrak{K}$ einige Zeit hindurch auf den Körper eingewirkt, so folgt hieraus auch durch Integration

$$\mathfrak{B} = \int \mathfrak{K} dt. \tag{127}$$

Wenn $\mathfrak{K}$ während der ganzen Zeit konstant war, ist hiernach $\mathfrak{B}$ gleich gerichtet mit $\mathfrak{K}$, und zwar gilt dies für jede beliebige Gestalt des Körpers und für jede beliebige Richtung von $\mathfrak{K}$. Im allgemeinen fällt aber, wie wir aus § 23 wissen, die Richtung von $\mathfrak{u}$ keineswegs mit der Richtung von $\mathfrak{B}$ zusammen, und daher ist auch $\mathfrak{u}$ anders gerichtet als $\mathfrak{K}$. Nur dann, wenn zufällig $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{u}$, ist auch $\mathfrak{K} \parallel \mathfrak{u}$. Diese Bedingung ist aber nur für die freien Achsen erfüllt und wir erkennen damit, daß die Achse der Drehung, die durch ein Kräftepaar hervorgerufen wird, nur dann senkrecht auf der Ebene des Kräftepaares steht, wenn diese Senkrechte eine freie Achse des Körpers ist.

In diesem Falle läßt sich auch Gl. (126) in weiter ausgerechneter Form darstellen. Auf die Richtungen, die mit-

einander zusammenfallen, brauchen wir dann, da sie selbstverständlich sind, nicht mehr ausdrücklich zu achten, und für die Größe von $\mathfrak{B}$ können wir den in Gl. (123) ausgerechneten Wert von B' einsetzen. Wir haben dann

$$\frac{d(u\Theta)}{dt} = K$$

oder, da Θ der Zeit nach konstant ist,

$$\Theta\frac{du}{dt} = K. \tag{128}$$

Wir sind damit eigentlich nur zu einem einfachen Resultate zurückgelangt, das schon im ersten Bande (S. 200, Gl. (81) der 3. Aufl.) gefunden wurde. Die frühere Ableitung bezog sich zwar auf einen zwangläufig drehbaren Körper und sie gilt für diesen allgemein. Aber auch der freie Körper, den wir hier untersuchen, kann bei seiner Drehung um eine freie Achse als drehbar gelagert angesehen werden, da gar keine Kräfte von dem Gestelle auf ihn übertragen werden, um die Beibehaltung der freien Drehachse zu erzwingen.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeineren Falle über, daß der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ nicht in die Richtung einer Hauptträgheitsachse fällt, so läßt sich die Richtung der Umdrehungsachse der durch $\mathfrak{K}$ hervorgebrachten Drehbewegung leicht nach den Lehren von § 23 ermitteln. Denn dort ist gezeigt, wie man die Richtung von $\mathfrak{u}$ findet, die zu einer gegebenen Richtung von $\mathfrak{B}$ gehört, falls das Trägheitsellipsoid des Körpers bekannt ist.

Um ferner auch die Größe der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ zu ermitteln, zerlegen wir $\mathfrak{K}$ in drei Komponenten $K_1 K_2 K_3$ nach den Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Für die erste Komponente folgt dann, da sie mit einer freien Achse zusammenfällt, nach Gl. (128)

$$\Theta_1\frac{du_1}{dt} = K_1$$

und entsprechend für die übrigen. Die wirkliche Winkelbeschleunigung erhalten wir dann nach dem Satze über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen durch geo-

metrische Summierung der drei Komponenten. Versteht man also unter $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren, die in den Richtungen der drei Hauptachsen gezogen sind und unter $\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3$ die zugehörigen Trägheitsmomente, so hat man

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\,\frac{K_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{K_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{K_3}{\Theta_3}, \tag{129}$$

und hieraus durch Integration nach der Zeit auch $\mathfrak{u}$ selbst.

Anstatt dessen kann man auch von Gl. (121) ausgehen, aus der

$$u_1 = \frac{B_1}{\Theta_1}; \quad u_2 = \frac{B_2}{\Theta_2}; \quad u_3 = \frac{B_3}{\Theta_3}$$

mit den hier gebrauchten Bezeichnungen folgt, woraus sich $\mathfrak{u}$ zusammensetzen läßt zu

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\,\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{B_3}{\Theta_3}. \tag{130}$$

Da $\mathfrak{B}$ und daher auch seine Komponenten schon aus Gl. (127) bekannt sind, ist hiermit die Aufgabe gelöst.

Schließlich möge noch ein Gebrauch von Gl. (127) erwähnt werden, der zur Erzielung einer einfacheren Ausdrucksweise zuweilen gemacht wird. Gl. (127) hat nämlich die Form des Satzes vom Antriebe. An Stelle des Impulses einer Einzelkraft steht bei ihr das ebenso gebildete Zeitintegral des Kräftepaares, das daher auch als der Impuls des Kräftepaares bezeichnet werden kann. Ebenso tritt an die Stelle der Bewegungsgröße hier das statische Moment der Bewegungsgröße. Man kann daher Gl. (127) in Worten auch dahin aussprechen, daß der Impuls des Kräftepaares gleich dem von ihm erzeugten Dralle ist. Dabei könnte $\mathfrak{K}$ sehr groß und die Zeit, während der es einwirkte, sehr klein sein, so daß wir es mit einem „Drehstoße“ zu tun hätten. Wenn ferner die Drehbewegung des Körpers in einem bestimmten Augenblicke ganz willkürlich gegeben ist, so kann man sich stets das zugehörige $\mathfrak{B}$ ermittelt und hiermit nach Gl. (127) auch das ihm gleiche $\int \mathfrak{K}\,dt$ berechnet denken. Man kann daher die augenblickliche Bewegung auch dadurch beschreiben, daß man sagt,

sie sei ebenso, als wenn sie aus der Ruhe durch den Impuls eines Drehstoßes hervorgegangen wäre. Sobald dieser Impuls $\int \mathfrak{N} dt$ angegeben wird, ist auch die augenblickliche Bewegung dadurch gekennzeichnet. Manche Schriftsteller ziehen diese Art der Darstellung vor und gebrauchen dann die Bezeichnung „Impulsvektor“ als gleichbedeutend mit „Moment der Bewegungsgröße“ oder „Drall“. Natürlich ist dies im Grunde genommen gegenüber der von mir gewählten Ausdrucksweise nur ein Unterschied im Wortlaute, der das Wesen der Sache ganz unberührt läßt.

§ 26. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äußere Kräfte.

Wir machen nach allen diesen Vorbereitungen jetzt den letzten und wichtigsten Schritt zur Untersuchung der Bewegungen, die ein vollständig sich selbst überlassener Körper mit gegebener Anfangsbewegung weiterhin ausführt. Hierin besteht wenigstens das Hauptziel, das wir uns in diesem Paragraphen stecken, wenn auch die Überschrift etwas anderes anzukündigen scheint. Um diese zu erklären, erinnere ich zunächst daran, daß wir bei dieser Untersuchung von einer etwaigen Translationsbewegung ganz absahen, uns den Schwerpunkt also von Anfang an und daher, beim Fehler äußerer Kräfte, auch dauernd in Ruhe denken wollten. Damit ist der Schwerpunkt schon von selbst ein „fester Punkt“ des Körpers. Es kann auch nichts ausmachen, wenn wir uns diesen ohnehin schon am Orte bleibenden Punkt überdies noch mit einem festen Gestelle verbunden denken, falls nur dem Körper dabei durch Anordnung eines Kugelgelenkes die Möglichkeit erhalten bleibt, sich nach allen Richtungen hin ohne Widerstand zu drehen.

Dies allein würde allerdings noch nicht genügen, um die Einführung einer neuen Bezeichnung zu rechtfertigen, die ausdrücklich darauf hinweist, daß der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Es kommt aber hinzu, daß es für die wirkliche Ausführung

der Untersuchung fast ganz gleichgültig ist, ob der Körper im Schwerpunkte oder in irgendeinem anderen Punkte festgehalten ist, um den er sich frei zu drehen vermag. Auch dieser Fall ist für viele Anwendungen der Mechanik von großer Bedeutung und er muß daher ebenfalls behandelt werden. Da nun der Fall des frei beweglichen Körpers in ihm schon als Sonderfall mit enthalten ist, so tut man, um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, am besten, sogleich den allgemeineren Fall in Angriff zu nehmen. Es bleibt aber jedem, der sich für diesen etwa nicht interessiert, unbenommen, sich unter dem festen Punkte, von dem weiterhin die Rede ist, überall den Schwerpunkt vorzustellen und hiernach von einer Lagerung im Gestelle ganz abzusehen.

Im allgemeineren Falle wird natürlich ein Zwang von dem Gestelle auf den bewegten Körper übertragen werden müssen, durch den der feste Punkt auch wirklich an seinem Orte festgehalten wird. Von Reibungen u. dgl. soll abgesehen werden und der Zwang kann daher nur in einer Auflagerkraft bestehen, die sich im festen Punkte überträgt. Diese Kraft ist die einzige äußere Kraft, die am bewegten Körper angreift. Sie kann keine Arbeit leisten, da ihr Angriffspunkt in Ruhe bleibt und wir schließen daraus zunächst, daß die lebendige Kraft des Körpers konstant sein muß. Außerdem ist auch das statische Moment des Auflagerdrucks stets gleich Null, wenn wir den festen Punkt zum Momentenpunkte wählen. Hiernach folgt aus dem Flächensatze, daß auch der Drall $\mathfrak{B}$ — diesmal freilich nur für diese besondere Wahl des Momentenpunktes — nach Größe und Richtung unverändert bleiben muß.

Auf Grund dieser beiden Bedingungen läßt sich die auf einen gegebenen Anfangszustand folgende weitere Bewegung des Körpers leicht voraussehen, falls das Trägheitsellipsoid und mit ihm das Drallellipsoid des Körpers bekannt sind. Trägt man zunächst in die Zeichnung des in der Anfangslage gegebenen Körpers den zur Anfangsbewegung gehörigen Drall $\mathfrak{B}$ ein und legt durch den Endpunkt von $\mathfrak{B}$ eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem festen Punkte zusammenfällt, so

schneidet die Kugel das Drall-Ellipsoid nach einer Raumkurve. Nun sind das Trägheits- und das Drallellipsoid im Körper festgeheftet und bewegen sich mit ihm zusammen. Da $\mathfrak{B}$ vom festen Raume her betrachtet konstant bleibt, muß demnach die Bewegung von der Art sein, daß die soeben konstruierte Raumkurve, zu der alle Halbmesser des Drallellipsoids von der anfänglich gegebenen Größe von $\mathfrak{B}$ gehören, stets durch die im festen Raume konstante Richtung von $\mathfrak{B}$ hindurchgeht.

Durch diese Bemerkung allein ist die Bewegung freilich noch nicht völlig bestimmt. Wir greifen daher auf Gl. (122), nämlich

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = 2L$$

zurück, in der die lebendige Kraft L, wie wir vorher sahen, eine Konstante bedeutet. Um das innere Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{B}$ zu bilden, wollen wir uns jetzt $\mathfrak{u}$ auf die Richtung von $\mathfrak{B}$ projiziert denken. Bezeichnen wir die Projektion mit u' und die Größe von $\mathfrak{B}$ mit B, so hat man

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = u'B = 2L,$$

und daraus erhält man

$$u' = \frac{2L}{B} \tag{131}$$

Da aber L und B konstant sind, folgt aus dieser Gleichung, daß auch die Projektion u' von $\mathfrak{u}$ auf die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$ konstant bleiben muß.

Diese Bemerkung gestattet uns schon, einen besseren Überblick über die fernere Bewegung des Körpers bei gegebenem Anfangszustande zu gewinnen. Man trage in die Zeichnung der Anfangslage zunächst das Trägheitsellipsoid sowie die Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ ein, die einen Halbmesser des Ellipsoids bildet. Im Endpunkte von $\mathfrak{u}_0$ konstruiere man die Tangentialebene von α an das Ellipsoid und ziehe zu dieser eine Senkrechte vom festen Punkte O aus (vgl. Abb. 29). Aus den Lehren von § 23 wissen wir schon, daß diese Senkrechte die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$ angibt. Auf $\mathfrak{B}$ schneidet

die Ebene α eine Strecke ab, die u' darstellt. Denkt man sich hierauf dieselbe Konstruktion für eine spätere Stellung des Körpers wiederholt, so wird sich in der Zeichnung die Lage des Ellipsoids und die Richtung von $\mathfrak{u}$ in ihm geändert haben. Dagegen müssen wir nach dem, was bewiesen wurde, immer wieder auf dasselbe $\mathfrak{B}$ und dasselbe u' geführt werden. Durch die Richtung von $\mathfrak{B}$ und die Größe von u' ist aber auch die Ebene α festgelegt, die man daher als die unveränderliche Ebene des Problems bezeichnet. Die Bewegung des Körpers muß nun in solcher Art erfolgen, daß das Ellipsoid jederzeit die unveränderliche Ebene α berührt. Dabei gleitet das Ellipsoid niemals auf dieser Ebene, da ja in jedem Augenblicke die Drehachse durch den Berührungspunkt hindurchgeht. Die Bewegung des Ellipsoids besteht daher in einem Rollen auf der unveränderlichen Ebene.

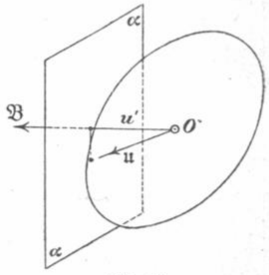

Abb. 29.

Man denke sich ferner das ganze Ellipsoid durch ein Bündel von Tangentialebenen eingehüllt. Unter allen diesen Tangentialebenen suche man jene auf, deren Abstand vom festen Punkte gleich u' ist. Die zugehörigen Berührungspunkte werden einen oder auch zwei getrennte, in sich geschlossene Kurvenzüge bilden. Alle Punkte dieser Kurven können durch geeignete Drehung des Ellipsoids in die Ebene α übergeführt werden, so daß sie die Berührungspunkte zwischen α und dem Ellipsoide bilden.

Hiermit ist nun auch entschieden, welche durch O gehenden Strahlen nach und nach als Drehachsen dienen werden: es sind die Verbindungslinien von O nach den Punkten der vorher konstruierten Kurve. Poinsot, von dem die hier auseinandergesetzte geometrische Lösung des Problems herrührt, hat die Kurve als die Polodie (oder den Polweg) bezeichnet. Er hat ferner noch eine zweite Kurve zur Beschreibung des ganzen Vorgangs benützt. Auch in der Ebene α wird nämlich der Berührungspunkt mit dem Ellipsoid, der in jedem Augen-

blicke als der Pol der Bewegung bezeichnet werden kann, nach und nach andere Lagen einnehmen. Der Berührungspunkt beschreibt dabei eine Kurve, die als die Herpolodie bezeichnet wird. Die Bewegung des Ellipsoids kann nun als ein Rollen der Polodie auf der Herpolodie aufgefaßt werden.

Diese einfache geometrische Beschreibung der im übrigen so schwierig zu behandelnden Bewegung genügt meist, um sich ohne Rechnung einen schnellen Überblick über die Erscheinungen zu verschaffen, die man zu erwarten hat. Von der Gestalt des Trägheitsellipsoids des Körpers wird man sich im gegebenen Falle meist sehr schnell eine ziemlich genau zutreffende Vorstellung machen können, ohne vorher viel rechnen zu müssen. Wie die Polodie aussieht, läßt sich dann auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften ebenfalls schnell genug erkennen. Die Herpolodie ist nicht so leicht anzugeben; aber man braucht sie auch kaum, um sich eine deutliche Vorstellung von dem Rollen des Ellipsoids auf der unveränderlichen Ebene zu machen. — Der Hauptmangel der vorausgehenden Betrachtungen besteht nur noch darin, daß die Zeit, die während der Bewegung des Körpers aus der Anfangslage in irgendeine andere verstreicht, daraus nicht unmittelbar entnommen werden kann. — Darauf werde ich in § 28 zurückkommen.

§ 27. Die stabilen Drehachsen.

Wir können sofort eine wichtige Anwendung der vorhergehenden Lehren machen. Früher fanden wir nämlich, daß jeder Körper mindestens drei freie Achsen hat, die mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Sie sind aber, wie sich jetzt zeigen wird, nicht alle „stabile“ Drehachsen.

Der Begriff der „Stabilität“ ist aus der Lehre vom Gleichgewichte entnommen. Er ist dort ein ganz eindeutig bestimmter Begriff; wenn er aber auf Bewegungen übertragen werden soll, bedarf er in jedem einzelnen Falle einer neuen Definition. Was man unter Stabilität einer Bewegung verstehen soll, ist nämlich in vielen Fällen einstweilen noch ganz streitig, so daß verschiedene Autoren zuweilen ganz verschiedene Begriffe mit

demselben Worte verbinden. Ich werde daher zunächst erklären, was man unter der Stabilität einer Drehachse versteht, ohne mich aber darauf einzulassen, eine Definition für die Stabilität einer Bewegung überhaupt geben zu wollen.

Man denke sich, daß ein Körper nicht genau, sondern nur nahezu um eine freie Achse rotiere. Würde er genau um die freie Achse rotieren, so könnte sich die Drehachse niemals ändern und der Körper würde nach jeder Umdrehung immer wieder in die Anfangslage zurückkehren. Völlig genau läßt sich dieser Zustand aber niemals erreichen und es fragt sich, welche Folgen eine geringe Abweichung davon nach sich zieht. Wenn der Körper sich dauernd nahezu so verhält, als rotierte er um die stets in nächster Nachbarschaft bleibende freie Achse, so heißt diese freie Achse eine stabile Drehachse. Bringt dagegen eine noch so geringe anfängliche Abweichung von der freien Achse eine mit der Zeit immer weiter fortschreitende Ablenkung der Bewegung von der zur freien Achse gehörigen hervor, so nennt man die Rotation um eine solche freie Achse eine labile Bewegung, weil schon der geringste Anstoß genügt, um die Art der Bewegung allmählich vollständig zu ändern.

Von den drei freien Achsen, die im allgemeinen bei einem Körper vorkommen, sind bloß zwei, nämlich jene, die zum allergrößten und zum allerkleinsten Trägheitsmomente gehören, stabile Drehachsen; die Bewegung um die dritte freie Achse ist labil.

Man erkenne dies ohne jede Schwierigkeit an der Hand einer Figur. In Abb. 30 sei OA die größte Halbachse des Trägheitsellipsoids, also zugleich die Achse des kleinsten Trägheitsmoments. Weicht die Drehachse im Anfangszustande nur wenig von der Richtung OA ab, so erlangt die Polodie die durch die kreuzpunktierte Linie angedeutete Gestalt. Nur in nächster Nachbarschaft von A lassen sich nämlich Punkte ausfindig machen, deren Tangentialebenen einen senkrechten Abstand

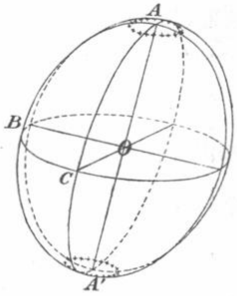

Abb. 30.

von O haben, der nur wenig kleiner ist als OA selbst. Die Polodie umgibt demnach als geschlossene Kurve den Punkt A. Diametral gegenüber, um A' läßt sich zwar ebenfalls eine Kurve angeben, die der gleichen Bedingung genügt. Da sie mit der ersten nicht zusammenhängt, ist aber kein stetiger Übergang aus der einen in die andere möglich. Hiernach durchläuft der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ in der Tat stets die sehr kleine Kurve um A und die auf der unveränderlichen Ebene beschriebene Herpolodie kann sich ebenfalls nur auf eine kleine Fläche erstrecken, so daß auch gegenüber dem festen Raume keine erheblichen Richtungsveränderungen von OA zu erwarten sind.

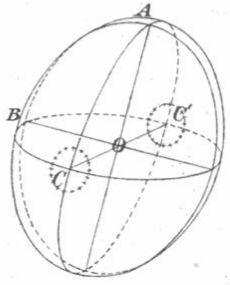

Abb. 31.

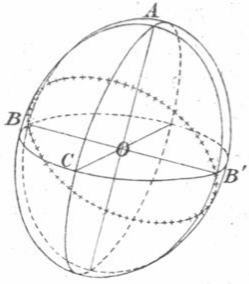

Abb. 32.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Figur und die Betrachtung für den Fall, daß die anfängliche Drehachse nahezu mit dem kleinsten Halbmesser des Ellipsoids OC (oder mit der Achse des größten Trägheitsmoments) zusammenfiel (Abb. 31). Auch hier kann die Polodie nur in einer den Punkt C eng umschließenden Kurve bestehen, und zwar deshalb, weil nur an dieser Stelle des Ellipsoids Tangentialebenen möglich sind, die so nahe an den Mittelpunkt des Ellipsoids heranrücken. Die Achse OC ist demnach nicht nur eine freie, sondern zugleich auch eine stabile Drehachse.

Anders ist es aber mit der dritten freien Achse OB. Wie man aus Abb. 32 sofort erkennt, ist keine Polodie möglich, die den Punkt B in kleinem Abstande umkreist, sondern die Polodie umfaßt das ganze Ellipsoid. Auch auf dem Meri-

diane AC gibt es Punkte, deren Tangentialebenen denselben Abstand vom Mittelpunkte O haben, als die in der Nachbarschaft von B gezogenen und ebenso auf allen übrigen durch A gelegten Meridianen. Die freie Achse OB ist hiernach eine labile Drehachse.

§ 28. Die Eulerschen Gleichungen.

Die in § 26 nach Poinsot vorgetragene Theorie der Bewegung des starren Körpers um einen festen Punkt gibt nur über die Lagen Aufschluß, die der Körper der Reihe nach einnimmt. Wieviel Zeit währenddessen verstreicht, ist daraus nicht zu entnehmen. Um auch dies zu erreichen, muß man die rein geometrische Darstellung verlassen und sich wieder mehr der analytischen zuwenden. Der zeitliche Verlauf ergibt sich nämlich aus der Integration der Differentialgleichungen des Problems, die schon von Euler aufgestellt wurden und die ich jetzt ableiten will.

Die Absicht bei Aufstellung der Eulerschen Gleichungen kommt darauf hinaus, die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ als Funktion der Zeit t darzustellen. Am besten rechnet man hierbei, wie ich von vornherein bemerken möchte, mit den rechtwinkligen Komponenten $u_1 u_2 u_3$ von $\mathfrak{u}$. Auf diese beziehen sich die Eulerschen Gleichungen.

Bei der Untersuchung der Veränderlichkeit von $\mathfrak{u}$ kann man übrigens zwei ganz verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man nämlich die Lagen angibt, die $\mathfrak{u}$ der Reihe nach gegen den starren Körper oder gegen den festen Raum durchläuft. Alle $\mathfrak{u}$ im ersten Falle bilden den Polodie-, alle $\mathfrak{u}$ im zweiten Falle den Herpolodiekegel. Wir müssen uns also für eine bestimmte Aufstellung des Beobachters, der die Veränderlichkeit von $\mathfrak{u}$ nach Richtung und Größe konstatiert, entscheiden, oder wir müssen mit anderen Worten das Koordinatensystem, auf das sich die Projektionen $u_1 u_2 u_3$ beziehen, entweder im festen Raum ruhen lassen oder es an dem bewegten Körper festheften. Euler hat sich für den letzten Fall entschieden. Stellt man sich etwa vor, unsere Erde sei der Einwirkung

aller anderen Weltkörper entzogen und drehe sich nicht genau um eine freie Achse, so wird man sich in erster Linie dafür interessieren, welche Linien der Erde im Laufe der Zeit als Drehachsen dienen, d. h. wie sich etwa der Nordpol der Erde im Laufe der Zeit auf der Erde selbst verschiebt. Wir beziehen dann die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ auf ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem, folgen also der Eulerschen Darstellung.

Bei diesem Probleme erfolgt die Zerlegung der gerichteten Größe $\mathfrak{u}$ in drei rechtwinklige Komponenten übrigens nicht bloß willkürlich oder aus Verlegenheit, weil man etwa keine bessere Methode zur Behandlung gerichteter Größen kennt, sondern sie ist im Wesen der Sache selbst begründet. In jedem Körper haben wir nämlich drei aufeinander senkrecht stehende ausgezeichnete Richtungen, die Richtungen der Hauptträgheitsachsen, für die sich die Rotationserscheinungen besonders einfach gestalten. Durch eine Zerlegung nach diesen Richtungen vereinfacht sich daher auch in anderen Fällen die Untersuchung der Rotationen und wir sind so von vornherein auf die Benutzung eines nach diesen drei Hauptrichtungen orientierten Koordinatensystems hingewiesen.

Davon ist auch schon bei der Ableitung von Gl. (130)

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3}$$

Gebrauch gemacht worden, in der $\mathfrak{u}$ als geometrische Summe seiner drei Koordinaten

$$u_1 = \frac{B_1}{\Theta_1}, \quad u_2 = \frac{B_2}{\Theta_2}, \quad u_3 = \frac{B_3}{\Theta_3} \tag{132}$$

dargestellt ist. Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind in den Richtungen der Hauptträgheitsachsen gezogen und Θ_1 gehört zur Achse $\mathfrak{i}$ usf.

Die Eulerschen Gleichungen entstehen aus der Gleichung für $\mathfrak{u}$, wenn man diese nach der Zeit differentiiert. Um dies ausführen zu können, muß man zunächst feststellen, wie sich der Drall $\mathfrak{B}$ relativ zum starren Körper mit der Zeit ändert. Gegen den festen Raum ist, wie wir wissen, $\mathfrak{B}$ nach dem

Flächensatze konstant. Relativ zum bewegten Körper muß $\mathfrak{B}$ daher veränderlich sein, zwar nicht der absoluten Größe, aber der Richtung nach.

Zur gegebenen Zeit ist die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers $\mathfrak{u}$. Für einen Beobachter, der sich auf dem starren Körper befindet, dreht sich der ganze äußere Raum um den starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$. Auch die Bewegung des im äußeren Raume feststehenden Vektors $\mathfrak{B}$ relativ zum starren Körper besteht in einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$. Der Endpunkt von $\mathfrak{B}$ beschreibt hierbei seinen Weg mit einer Geschwindigkeit, die nach Größe und Richtung durch

$$V\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{B}$$

dargestellt wird (Bd. I, Gl. (57) S. 121 d. 3. Aufl.). Der Weg im Zeitelemente dt ist daher

$$dt\,V\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{B},$$

und das ist jene Strecke, die zum ursprünglichen $\mathfrak{B}$ geometrisch summiert werden muß, um das nach Ablauf von dt entstehende neue $\mathfrak{B}$ zu erhalten (immer relativ zum starren Körper genommen). Hiernach wird

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{B}$$

oder, wenn man in Komponenten zerlegt,

$$\frac{dB_1}{dt} = u_2 B_3 - u_3 B_2; \quad \frac{dB_2}{dt} = u_3 B_1 - u_1 B_3;$$

$$\frac{dB_3}{dt} = u_1 B_2 - u_2 B_1.$$

Die Differentiation der Gleichung für $\mathfrak{u}$ nach der Zeit ergibt mit Benutzung dieser Werte

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\,\frac{u_2 B_3 - u_3 B_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{u_3 B_1 - u_1 B_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{\Theta_3}$$

oder, nachdem man noch die Komponenten von $\mathfrak{B}$ mit Hilfe der Gleichungen (132) in den Komponenten von $\mathfrak{u}$ ausgedrückt hat,

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\,u_2 u_3\,\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,u_3 u_1\,\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,u_1 u_2\,\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3}. \qquad (133)$$

Anstatt die Komponenten mit Hilfe der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aneinander zu reihen, kann man sie natürlich auch einzeln anschreiben. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \end{aligned}\right\}, \tag{134}$$

und das sind die Eulerschen Gleichungen in der ihnen gewöhnlich gegebenen Form. Sie sind gewöhnliche simultane Differentialgleichungen für die drei von der Zeit abhängigen Funktionen $u_1 u_2 u_3$. Die Integration ist freilich im allgemeinen Falle insofern nicht ganz einfach, als sie auf elliptische Funktionen führt. Im übrigen macht sie aber keine Schwierigkeiten.

Hier beschränke ich mich auf die Durchführung der Rechnung für den einfachen Fall, daß das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist (was z. B. bei der Anwendung auf die „Nutation" der Erdachse angenommen werden kann). Es sei also

$$\Theta_2 = \Theta_3,$$

und zur Abkürzung möge ferner

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} = \gamma$$

gesetzt werden. Dann gehen die Eulerschen Gleichungen über in

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} = \gamma u_1 u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = -\gamma u_1 u_2. \tag{135}$$

Die erste Gleichung lehrt, daß u_1 konstant ist. Multipliziert man die zweite Gleichung mit u_2 und die dritte mit u_3 und addiert, so folgt

$$u_2 \frac{du_2}{dt} + u_3 \frac{du_3}{dt} = 0,$$

also durch Integration

$$u_2^2 + u_3^2 = C,$$

worin C eine durch die Anfangsbedingungen bestimmte Kon-

stante ist. Da auch u_1^2 konstant ist, so folgt dies auch für $u_1^2 + u_2^2 + u_2^3$, d. h. der absolute Wert der Winkelgeschwindigkeit ist konstant und ebenso ihre Projektion auf die $\mathfrak{i}$-Achse. Der Vektor $\mathfrak{u}$ beschreibt demnach einen Kreiskegel um die $\mathfrak{i}$-Achse. Bis dahin sind wir nur zu einem Resultate gelangt, das uns aus der Poinsotschen Lehre von der Polodie bereits bekannt war. — Durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (135) nach t erhält man

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \gamma u_1 \frac{du_3}{dt},$$

und wenn man den Differentialquotienten von u_3 aus der dritten Gleichung einführt, wird daraus

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_2. \tag{136}$$

Ebenso wird, wenn man bei diesem Eliminationsverfahren die dritte der Gleichungen (135) mit der zweiten vertauscht

$$\frac{d^2u_3}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_3. \tag{137}$$

Diese Differentialgleichungen sind uns ihrer Form nach bereits aus der Lehre von den harmonischen Schwingungen bekannt. Ihre allgemeine Lösung ist

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t, \tag{138}$$

und diese Lösung gilt bei passender Wahl der unbestimmten Integrationskonstanten ebenso auch für u_3. Die Umlaufszeit T der Momentanachse um die Achse der Figur ergibt sich aus der Bedingung, das der Winkel $\gamma u_1 t$ währenddessen um 2π angewachsen sein muß; also

$$T = \frac{2\pi}{\gamma u_1}$$

oder nach Einsetzen des Wertes von γ

$$T = \frac{2\pi \Theta_2}{u_1(\Theta_1 - \Theta_2)}. \tag{139}$$

Die Umlaufszeit der Nutationsbewegung wird demnach um so größer, je weniger sich die Hauptträgheitsmomente voneinander unterscheiden. Sie hängt außerdem von der Projektion

der Winkelgeschwindigkeit auf die Figurenachse, im übrigen aber nicht von dem Winkel ab, den $\mathfrak{u}$ mit der Figurenachse bildet.

Will man die auf den festen Raum bezogene Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ mit der Zeit untersuchen, so schreibe man die Gleichung

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3}$$

zunächst in der folgenden Form an:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\cdot\frac{\mathfrak{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\cdot\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\cdot\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{B}}{\Theta_3}$$

in der $\mathfrak{B}$ und die Θ konstante Größen sind, während die Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$, die mit den Trägheitshauptachsen zusammenfallen, jetzt mit der Zeit veränderlich sind. Hat man die $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$ als Funktionen der Zeit dargestellt, so ist $\mathfrak{u}$ aus der vorstehenden Gleichung unmittelbar zu entnehmen. Nun beachte man, daß z. B.

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = -V\mathfrak{u}\mathfrak{i}$$

gefunden wird, und zwar auf Grund derselben Überlegung, die uns vorher auf $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ (relativ zum Körper genommen) geführt hatte. Setzen wir hier den Wert von $\mathfrak{u}$ aus der vorigen Gleichung ein und führen die Vektorprodukte aus den Einheitsvektoren aus, so erhalten wir die erste der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{i}}{dt} &= \mathfrak{k}\cdot\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2} - \mathfrak{j}\cdot\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{B}}{\Theta_3}\\ \frac{d\mathfrak{j}}{dt} &= \mathfrak{i}\cdot\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{B}}{\Theta_3} - \mathfrak{k}\cdot\frac{\mathfrak{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1}\\ \frac{d\mathfrak{k}}{dt} &= \mathfrak{j}\cdot\frac{\mathfrak{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1} - \mathfrak{i}\cdot\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2}\end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

Die anderen beiden erhält man in derselben Weise. Man hat damit drei simultane Differentialgleichungen für die Unbekannten $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$. Wenn auch die Integration bedeutende Schwierigkeiten macht, wenigstens wenn man sich nicht auf die einfacheren Sonderfälle beschränkt, so ist damit doch wenigstens das Bewegungsgesetz, dem der Körper folgt, in analytischer Form dargestellt.

§ 29. Ein einfaches Beispiel.

Ein Ring, dessen Reif erheblich mehr Masse hat, als die radial geführten Arme, die den Reif mit einer in der Mitte gelegenen Nabe verbinden, soll im Schwerpunkte auf einer

Spitze gelagert sein. Zu Anfang möge die Ringebene horizontal liegen und der Ring möge eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ um irgendeine Achse besitzen, die aber nicht mit der Figurenachse zusammenfallen soll. Im anderen Fall rotierte er nämlich um eine freie Achse und würde um diese immer weiter rotieren, ein Fall, der uns nicht weiter zu beschäftigen braucht.

Um die fernere Bewegung des Ringes angeben zu können, konstruieren wir zunächst ein Trägheitsellipsoid des Ringes, bei dem wir nur auf die Masse des Reifs zu achten brauchen, die wir uns überdies in der kreisförmigen Mittellinie vereinigt denken können. Wenn der Radius dieser Mittellinie mit r und die Masse des Reifs mit M bezeichnet werden, ist das Trägheitsmoment Θ_1 für die Figurenachse

$$\Theta_1 = Mr^2$$

und die anderen Hauptträgheitsmomente sind

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{Mr^2}{2},$$

wie sich aus Gl. (120) oder auch nach Bd. III, Gl. (61), S. 96 d. 3. Aufl. sofort schließen läßt. Auf welche zur Figurenachse senkrechten Achsen man Θ_2 und Θ_3 beziehen will, ist übrigens bei einem Rotationskörper gleichgültig, da jede derartige Achse eine Hauptträgheitsachse ist.

Die Trägheitsradien verhalten sich hiernach wie $\sqrt{2} : 1$ und die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids wie $1 : \sqrt{2}$. Hiernach kann das Zentralellipsoid in einem willkürlichen Maßstabe aufgetragen werden. In Abb. 33 ist dies geschehen. Der Schnitt durch den Reif ist durch zwei kleine schraffierte Kreise angedeutet; die Figurenachse ist OA.

Wir tragen ferner die Richtung der Anfangswinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ ein; dabei wollen wir uns die Projektionsebene von vornherein so gewählt denken, daß sie durch die Richtung von $\mathfrak{u}_0$ geht. Im Schnittpunkte von $\mathfrak{u}_0$ mit der Ellipse, deren Achsen sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten, konstruieren wir eine Tangente. Diese ist die Spur der auf der Projektionsebene senkrecht stehenden unveränderlichen Ebene α. Recht-

winklig dazu steht die in der Projektionsebene enthaltene Richtungslinie des Dralls $\mathfrak{B}$.

Von der Voraussetzung, die wir seither stets machten, daß äußere Kräfte auf den starren Körper, abgesehen vom Auflagerdrucke am festen Punkte, nicht einwirken sollten, sind wir übrigens im vorliegenden Falle bis zu einem gewissen Grade frei. Wir können uns nämlich, da der Unterstützungspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, zugleich die Schwerkraft am Körper wirkend denken. Das Gewicht wird hier einfach vom Auflagerpunkte aufgenommen, hat aber keinen Einfluß auf die Bewegung. Es leistet nämlich weder Arbeit, noch hat es ein von Null verschiedenes statisches Moment für den festen Punkt; daher muß ganz wie früher sowohl die lebendige Kraft als der Drall $\mathfrak{B}$ konstant sein und hierauf beruhten ja in der Tat alle Folgerungen der vorausgehenden Untersuchungen.

Die Polodie wird hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Figurenachse liegt und dessen Ebene senkrecht auf ihr steht. Er hat die Projektion PQ in Abb. 33. Auch die Herpolodie wird ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte von $\mathfrak{B}$ mit der unveränderlichen Ebene α zusammenfällt und der sich in Abb. 33 als Strecke PR projiziert. Die fernere Bewegung des Rings wird nun in sehr einfacher Weise durch das Rollen des Kreiskegels OPQ um den ihn von innen berührenden festen Kreiskegel OPR beschrieben.

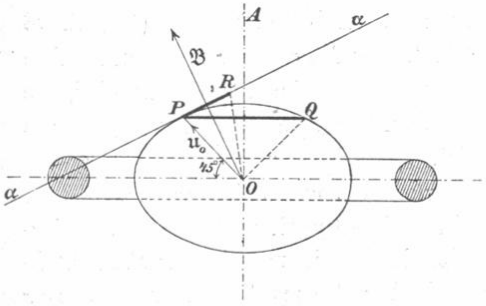

Abb. 33.

Um auch die Umlaufszeit T für ein bestimmtes Zahlenbeispiel berechnen zu können, nehme ich an, daß $\mathfrak{u}_0$ einen Winkel von 45° mit der Figurenachse bildete und gleich 20 Touren pro Sekunde war. Die Projektion u_1 auf die Figurenachse wird

hieraus durch Division mit $\sqrt{2}$ gefunden. Außerdem rechnen wir 20 Touren pro Sekunde auf Bogenmaß um und erhalten

$$u_1 = \frac{40\,\pi}{\sqrt{2}}\ \text{sec}^{-1}.$$

Ferner haben wir hier

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1 - \Theta_2} = 1$$

und, wenn wir diese Werte in Gl. (139) einsetzen, erhalten wir

$$T = 0{,}0707\ \text{sec}.$$

Nach Ablauf dieser Zeit hat die Momentanachse wieder dieselbe Lage gegen den Ring. Sie hat aber nicht dieselbe Lage im Raume. Wenn die Durchmesser PQ und PR der Polodie und der Herpolodie nicht kommensurabel miteinander sind, kann der Anfangszustand sowohl der Lage des Ringes als dem Geschwindigkeitszustande nach überhaupt niemals wieder erreicht werden. Die Zeit, die vergeht, bis $\mathfrak{u}$ den Heropolodiekegel einmal im festen Raume durchlaufen hat, verhält sich übrigens (da beide Kegel aufeinander rollen) zu T wie PR zu PQ.

Man kann noch nach der Bewegung fragen, die die Figurenachse OA ausführt. Um diese zu finden, denke man sich durch den Punkt O eine Einheitskugel gelegt. Diese Kugel schneidet die beiden aufeinander rollenden Kegel nach Kreisen und OA im sphärischen Mittelpunkte des einen Kreises. Dieser Punkt beschreibt demnach ebenfalls einen Kreis um die unveränderliche Richtung $\mathfrak{B}$. In jedem Augenblicke liegen die Momentanachse $\mathfrak{u}$, das unveränderliche Moment $\mathfrak{B}$ und die Figurenachse in einer Ebene und der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und der Figurenachse ist konstant. Hiernach macht die Figurenachse in der gleichen Zeit einen Umlauf, in der auch der Herpolodiekegel einmal von $\mathfrak{u}$ durchlaufen wird. In Abb. 34, die dies näher erläutern soll, deutet der Kreis P den Schnitt der Einheitskugel mit dem Polodiekegel, H den Schnitt mit dem Herpodiekegel an, ferner ist $\mathfrak{B}$ die Spur von $\mathfrak{B}$ auf der Einheitskugel, A die Spur der Figurenachse und der durch A gelegte punktierte Kreis gibt die Bahn an, die A auf der Einheitskugel durchläuft.

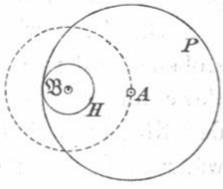

Abb. 34.

§ 30. Stöße am starren Körper.

Auf einen völlig freien starren Körper, der vorher in Ruhe war, möge ein Stoß einwirken, d. h. es soll während einer sehr kurzen Zeit an irgendeinem Angriffspunkte eine Kraft $\mathfrak{P}$ angreifen, derart daß das Zeitintegral der Kraft $\int \mathfrak{P} dt$ über die ganze Stoßzeit erstreckt von gegebener Richtung und Größe ist. Außer $\mathfrak{P}$ sollen während des Stoßvorgangs keine äußeren Kräfte an dem Körper angreifen. Es handelt sich zunächst darum, die Bewegung anzugeben, die der Körper durch den Stoß erlangt.

Hierbei ist daran zu erinnern, daß das Bild des starren Körpers keineswegs ausreicht, um alle Fragen zu beantworten, die sich auf den Stoß beziehen. Je kleiner wir uns die Stoßzeit vorstellen, desto größer muß während ihr der durchschnittliche Wert des Stoßdruckes $\mathfrak{P}$ angenommen werden, damit der Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ die vorgeschriebene Größe erlange. Allzu groß darf aber $\mathfrak{P}$ nicht werden, ohne Formänderungen von merklicher Größe oder einen Bruch des Körpers herbeizuführen. Im ersten Bande wurde dies schon ausführlich besprochen. Hier soll aber einstweilen vorausgesetzt werden, daß die Stoßzeit, wenn auch klein, so doch nicht so kurz bemessen sei, daß es nötig würde, auf die durch den Stoß bewirkten Formänderungen einzugehen. Unter dieser ausdrücklichen Voraussetzung können wir an dem Bilde des starren Körpers bei der Lösung der aufgeworfenen Frage festhalten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, die der Schwerpunkt S des gestoßenen Körpers erlangt, läßt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes sofort angeben. Wenn die Masse des Körpers mit M bezeichnet wird, ist in jedem Augenblicke während des Stoßes

$$M \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \mathfrak{P},$$

und durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{\int \mathfrak{P} dt}{M} = \frac{\mathfrak{A}}{M}, \tag{141}$$

wenn für den Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ des Stoßes außerdem noch zur Abkürzung der Buchstabe $\mathfrak{A}$ gebraucht wird.

Zur Schwerpunktsbewegung $\mathfrak{v}_0$ tritt noch eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, deren Winkelgeschwindigkeit nach Richtung und Größe mit $\mathfrak{u}$ bezeichnet werden soll. Wir finden sie, indem wir zunächst den auf den Schwerpunkt bezogenen Drall $\mathfrak{B}$ des rotierenden Körpers berechnen. Nach dem Flächensatze ist in jedem Augenblicke

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{V}\mathfrak{P}\mathfrak{p},$$

wenn $\mathfrak{p}$ den vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte des Stoßes gezogenen Radiusvektor bedeutet. Durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{V}\int \mathfrak{P} dt \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{p}. \tag{142}$$

Um von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{u}$ überzugehen, zerlegen wir $\mathfrak{B}$ in seine drei rechtwinkligen Komponenten $B_1 B_2 B_3$ nach den Richtungen der drei Hauptträgheitsachsen des starren Körpers. Werden in diesen Richtungen drei Einheitsvektoren oder Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ angegeben, so ist nach Gl. (130) S. 187

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3}.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{B}$ finden sich durch Entwicklung des äußeren Produkts $\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ zu

$$B_1 = A_2 p_3 - A_3 p_2, \quad B_2 = A_3 p_1 - A_1 p_3, \quad B_3 = A_1 p_2 - A_2 p_1,$$

und wenn man diese einsetzt, erhält man

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3}. \tag{143}$$

Nachdem $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ berechnet sind, kennt man die durch den Stoß hervorgerufene Bewegung bereits vollständig. Um auch noch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zu berechnen, die ein beliebiger Punkt des starren Körpers erlangt hat, ziehen wir nach diesem Punkte vom Schwerpunkte aus einen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und setzen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{V}\mathfrak{r}\mathfrak{u}.$$

Durch Entwicklung des äußeren Produkts und Einsetzen der

für $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ gefundenen Werte geht dies über in

$$\begin{aligned}\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\left(\frac{A_1}{M} + r_2\frac{A_1p_2 - A_2p_1}{\Theta_3} - r_3\frac{A_3p_1 - A_1p_3}{\Theta_2}\right)\\ + \mathfrak{j}\left(\frac{A_2}{M} + r_3\frac{A_2p_3 - A_3p_2}{\Theta_1} - r_1\frac{A_1p_2 - A_2p_1}{\Theta_3}\right)\\ + \mathfrak{k}\left(\frac{A_3}{M} + r_1\frac{A_3p_1 - A_1p_3}{\Theta_2} - r_2\frac{A_2p_3 - A_3p_2}{\Theta_1}\right).\end{aligned} \tag{144}$$

Hiermit sind wir auch in den Stand gesetzt, den Satz von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten zu beweisen. Man denke sich nämlich am starren Körper zwei Punkte, die jetzt mit *I* und *II* bezeichnet werden mögen, beliebig ausgewählt und außerdem an jedem von ihnen eine beliebig gewählte Richtung α und β angegeben, ganz so wie es bei dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen in der Festigkeitslehre geschieht. Dann läßt sich behaupten, daß ein Stoß am Punkte *I* in der Richtung α dem Punkte *II* eine Geschwindigkeit verleiht, deren Komponente in der Richtung β ebenso groß ist, als die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung α, die ein Stoß am Punkte *II* von gleich großem Antriebe am Punkte *I* hervorbringt.

Zum Beweise der Behauptung beachte man, daß der für $\mathfrak{v}$ aufgestellte Ausdruck sofort auch zur Berechnung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ benutzt werden kann, die der Punkt vom Radiusvektor $\mathfrak{p}$ erlangt, wenn ein Stoß von irgendeinem Impulse $\mathfrak{Z}$ am Punkte vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ angebracht wird. Man braucht nur die Bezeichnungen entsprechend zu vertauschen und erhält dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}' = \mathfrak{i}\left(\frac{J_1}{M} + p_2\frac{J_1r_2 - J_2r_1}{\Theta_3} - p_3\frac{J_3r_1 - J_1r_3}{\Theta_2}\right)\\ + \mathfrak{j}\left(\frac{J_2}{M} + p_3\frac{J_2r_3 - J_3r_2}{\Theta_1} - p_1\frac{J_1r_2 - J_2r_1}{\Theta_3}\right)\\ + \mathfrak{k}\left(\frac{J_3}{M} + p_1\frac{J_3r_1 - J_1r_3}{\Theta_2} - p_2\frac{J_2r_3 - J_3r_2}{\Theta_1}\right).\end{aligned}$$

Um auf die Komponenten von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in den Richtungen von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{A}$ zu kommen, bilden wir die inneren Produkte

$\mathfrak{v}\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{v}'\mathfrak{A}$ und subtrahieren sie des Vergleiches wegen voneinander. Dabei beachte man, daß z. B.

$$\mathfrak{v}\mathfrak{J} = J_1\left(\frac{A_1}{M} + r_2\frac{A_1p_2 - A_2p_1}{\Theta_3} - r_3\frac{A_3p_1 - A_1p_3}{\Theta_2}\right) + J_2\left(\frac{A_2}{M} + \cdots\right) + \cdots$$

zu setzen ist. Nachdem auch $\mathfrak{v}'\mathfrak{A}$ in derselben Weise entwickelt ist, heben sich beim Subtrahieren alle Glieder gegeneinander fort und man erhält daher

$$\mathfrak{v}\mathfrak{J} = \mathfrak{v}'\mathfrak{A}. \tag{145}$$

Da aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ nach Voraussetzung den gleichen absoluten Wert haben sollten, folgt hieraus, daß auch die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die Richtung von $\mathfrak{J}$ ebenso groß sein muß, wie die Projektion von $\mathfrak{v}'$ auf die Richtung von $\mathfrak{A}$, womit der Satz bewiesen ist. — Ein anderer Beweis des Satzes, der sich dem in der Festigkeitslehre gegebenen Beweise des ihm ähnlichen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen auch der Form nach aufs engste anschließt, ergibt sich aus dem Zusammenhange zwischen der vom Stoßdrucke geleisteten Arbeit und der lebendigen Kraft, die der Körper durch den Stoß erlangt.

Zwar folgt schon ohne weiteres aus dem Satze von der lebendigen Kraft, daß die Arbeit des Stoßdruckes gleich der von ihr hervorgebrachten lebendigen Kraft sein muß. Wegen des Verlustes an lebendiger Kraft, der in manchen Fällen des Stoßes eintritt, ist es aber der Vorsicht wegen, um sich nämlich vor naheliegenden irrigen Schlüssen zu schützen, ratsam, sich auch noch unmittelbar davon zu überzeugen, daß der Satz von der lebendigen Kraft in unserem Falle ebenfalls zu Recht besteht. Um diesen Nachweis zu führen, wende man den in Gl. (144) für $\mathfrak{v}$ aufgestellten Ausdruck zur Berechnung der Geschwindigkeit an, die der Angriffspunkt des Stoßes selbst erlangt hat. Dazu ist nur nötig, die Komponenten $r_1 r_2 r_3$ des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ durch die Komponenten $p_1 p_2 p_3$ von $\mathfrak{p}$ zu ersetzen. Nebenbei bemerkt, ergibt sich daraus zugleich, daß sich der Angriffspunkt des Stoßes im allgemeinen keineswegs

in der Stoßrichtung selbst, sondern in einer davon abweichenden Richtung bewegt.

Wir wollen ferner ein Zeitelement dt auswählen, das in die Stoßzeit hineinfällt. Bis zum Beginne dieses Zeitelements hat der Angriffspunkt des Stoßes noch nicht seine volle Geschwindigkeit erlangt. Wir können aber die zu dieser Zeit bereits bestehende Geschwindigkeit ebenfalls nach der früheren Formel berechnen, wenn wir darin jetzt unter $A_1 A_2 A_3$ die Komponenten jenes Teiles des ganzen Antriebs $\int \mathfrak{P}\, dt$ verstehen, der zeitlich vor dt liegt. Der Weg $d\mathfrak{s}$ des Angriffspunktes während dt ergibt sich dann zu

$$d\mathfrak{s} = dt \left\{ \mathfrak{i} \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + \mathfrak{j} \left(\cdots \right) + \mathfrak{k} \left(\cdots \right) \right\},$$

und die Arbeit des Stoßdruckes $\mathfrak{P}$ während dt wird gleich

$$dt \left\{ P_1 \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + P_2 \left(\frac{A_2}{M} + p_3 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - p_1 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right) + P_3 \left(\frac{A_3}{M} + p_1 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - p_2 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} \right) \right\}.$$

Andererseits wollen wir berechnen, um wie viel sich die lebendige Kraft des gestoßenen Körpers während dt vermehrt. Beziehen sich auch hier $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ auf den Anfang des Zeitelementes dt, so ist die zugehörige lebendige Kraft L (vgl. Gl. (115), S. 169)

$$L = \frac{1}{2} M \mathfrak{v}_0^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 u_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_3 u_3^2$$

oder, wenn man die früher berechneten Komponenten von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ einsetzt,

$$L = \frac{1}{2} \frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{(A_2 p_3 - A_3 p_2)^2}{\Theta_1} + \frac{1}{2} \frac{(A_3 p_1 - A_1 p_3)^2}{\Theta_2} + \frac{1}{2} \frac{(A_1 p_2 - A_2 p_1)^2}{\Theta_3}.$$

In diesem Ausdrucke sind nur die Komponenten von $\mathfrak{A}$

mit der Zeit veränderlich, und zwar so, daß

$$\frac{dA_1}{dt} = P_1, \qquad \frac{dA_2}{dt} = P_2, \qquad \frac{dA_3}{dt} = P_3$$

ist. Für den Zuwachs dL von L während dt findet man daher

$$dL = dt\left\{\frac{A_1P_1 + A_2P_2 + A_3P_3}{M} + (P_2p_3 - P_3p_2)\frac{A_2p_3 - A_3p_2}{\Theta_1}\right.$$

$$\left. + (P_3p_1 - P_1p_3)\frac{A_3p_1 - A_1p_3}{\Theta_2} + (P_1p_2 - P_2p_1)\frac{A_1p_2 - A_2p_1}{\Theta_3}\right\}.$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem vorher für die Arbeit des Stoßdruckes aufgestellten — abgesehen von der etwas abweichenden Anordnung der einzelnen Glieder — genau überein und die Anwendbarbeit des Satzes von der lebendigen Kraft ist hiermit auch unmittelbar bewiesen.

Ehe ich weiter gehe, möchte ich hier noch darauf aufmerksam machen, daß die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft in der gewöhnlichen Form wesentlich von der an die Spitze dieser Betrachtungen gestellten Voraussetzung abhängt, daß die Gestaltänderung des Körpers während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden dürfe. Erfährt der Körper Formänderungen, die selbst nur in der Nachbarschaft des Stoßangriffspunktes von merklicher Größe zu sein brauchen, so hört die Gültigkeit der vorhergehenden Entwicklungen auf. Der Angriffspunkt legt nämlich, wenn das Material des Körpers etwas nachgiebig ist, wegen der Zusammendrückung an der Kraftübertragungsstelle einen etwas größeren Weg zurück, als vorher berechnet wurde, und damit wird auch die Arbeit des Stoßdruckes größer als vorher und hiermit zugleich auch größer als die lebendige Kraft, die durch den Stoß hervorgebracht wird. Der Grund für diese Abweichung vom Satze von der lebendigen Kraft in der üblichen Form liegt darin, daß nun auch die inneren Kräfte Arbeit leisten. Der Überschuß der Arbeit des Stoßdrucks über die hervorgebrachte lebendige Kraft wird zur Überwindung der inneren Kräfte verwendet und falls der Körper vollkommen elastisch sein sollte, in Gestalt von Formänderungsarbeit aufgespeichert.

In je kürzerer Zeit sich ein Stoß von gegebenem Antriebe abspielt, um so mehr tritt der Einfluß der Formänderung hervor, und zwar aus doppeltem Grunde. Zunächst muß nämlich der Stoßdruck um so größer sein, je kürzer die Stoßzeit ist, damit der Impuls den vorgeschriebenen Wert behalte. Der größeren Kraft entspricht aber eine größere Formänderung. Dazu kommt ferner noch, daß zugleich der Weg, den der Angriffspunkt des Stoßes, abgesehen von der Form-

änderung, während der Stoßdauer zurücklegt, in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Stoßzeit selbst. Aus beiden Gründen wächst daher der aus der Formänderung hervorgehende Anteil des ganzen Weges, auf dem die Arbeit des Stoßdrucks geleistet wird, gegenüber dem Anteile, der von der Bewegung des als starr aufgefaßten gesamten Körpers herrührt, wenn die Stoßdauer kürzer wird. Man erkennt hieraus, in welche Widersprüche und Fehler man geraten kann, wenn man, wie es immer noch oft genug geschieht, eine Lehre vom Stoße starrer Körper bis in ihre letzten Folgerungen hinein durchführen will, ohne auf die Unzulänglichkeit des gebrauchten Bildes zu achten, sobald die Stoßdauer zu kurz wird.

Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, mögen die vorhergehenden Schlüsse auf den Fall angewendet werden, daß zwei freie Körper aufeinander stoßen. Dabei soll für den Augenblick auf die — von mir freilich keineswegs geteilte — Vorstellung eingegangen werden, daß es ein zulässiges Problem der Mechanik sei, den Stoß von Körpern zu untersuchen, die in Gedanken ohne fernere Bedingungen nur als absolut starr betrachtet werden könnten. Der Schluß liegt dann nahe, die Arbeit der inneren Kräfte wegen des Fehlens jeder Formänderung gleich Null zu setzen und daraus zu folgern, daß die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper durch den Stoß keine Änderung erfahre, während man doch im Gegenteile gewöhnlich einen Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper herausrechnet. Der Widerspruch klärt sich einfach dadurch auf, daß der auf die Formänderung verwendete Anteil der Arbeit des Stoßdruckes, sobald man den Grenzübergang zum starren Körper vollzieht, in der Form $\infty \cdot 0$ auftritt. Dies ist, solange keine weitere Bedingung hinzutritt, ein unbestimmter Ausdruck, der je nach der Art, wie man sich den Grenzübergang vollzogen denkt, verschiedene Werte annimmt. Der Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper kann daher ohne Zuhilfenahme bestimmter willkürlicher Voraussetzungen durch kein allgemein bewährtes Grundgesetz der Mechanik berechnet werden.

Nach diesen Abschweifungen kehre ich zum Satze von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten zurück. Man denke sich an den Punkten *I* und *II* in den Richtungen α und β, von denen früher die Rede war, nacheinander zwei Stöße von den Impulsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ angebracht. Dabei ist es, wenn nur beide Stöße so schnell aufeinanderfolgen, daß sich der Körper in der Zwischenzeit nicht merklich aus der anfänglichen Lage verschoben hat, nach dem Gesetze von der Super-

position der Bewegungen gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Stöße ausgeübt werden. Bei jeder Reihenfolge der Stöße erlangt der Körper dieselbe lebendige Kraft und daher muß auch die Summe der Arbeiten beider Stoßdrücke denselben Wert annehmen. Diese Arbeiten lassen sich aber sofort berechnen. Dazu möge die Geschwindigkeit von Punkt I in jedem Falle mit $\mathfrak{v}_I$, und zwar jene, die durch den Impuls $\mathfrak{A}$ am Punkte I hervorgebracht wird, speziell mit $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}}$, jene, die vom Impuls $\mathfrak{Z}$ erzeugt wird, mit $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{Z}}$ bezeichnet werden und in demselben Sinne sollen für den Punkt II die Bezeichnungen $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{Z}}$ gebraucht werden. Wird nun der Stoß $\mathfrak{A}$ zuerst und unmittelbar darauf der Stoß $\mathfrak{Z}$ ausgeführt, so legt der Angriffspunkt I von $\mathfrak{A}$, wegen des allmählichen Anwachsens der Geschwindigkeit von 0 bis $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}}$ während der Stoßzeit τ einen Weg $\frac{1}{2}\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}} \cdot \tau$ zurück und die Arbeit von $\mathfrak{A}$ während der ganzen Stoßzeit ist daher gleich

$$\frac{1}{2}\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Angriffspunkt II von $\mathfrak{Z}$ hat zu Beginn des zweiten Stoßes bereits die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}}$, und dazu summiert sich noch während des Stoßes die von 0 bis zu ihrem Endwerte anwachsende Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{Z}}$. Die Arbeitsleistung des zweiten Stoßes berechnet sich daher zu

$$\left(\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{Z}}\right) \cdot \mathfrak{Z}.$$

Die der erzeugten lebendigen Kraft gleiche Arbeitsleistung beider Stöße ergibt sich daher zu

$$\frac{1}{2}\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{Z} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Z}.$$

Erfolgen dagegen beide Stöße in umgekehrter Reihenfolge, so findet man die gesamte Arbeitsleistung auf dem gleichen Wege zu

$$\frac{1}{2}\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Z} + \mathfrak{v}_{I,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Beide Werte müssen einander gleich sein und der Vergleich liefert.

$$\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{v}_{I,\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Sind demnach die Antriebe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ von gleicher absoluter Größe, so folgt für die Projektionen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{J}}$ und $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}}$ auf deren Richtungslinien

$$v'_{I,\mathfrak{J}} = v'_{II,\mathfrak{A}}, \tag{146}$$

womit der Satz von neuem, und zwar diesmal auf ganz gleichem Wege wie früher der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen an elastischen Körpern bewiesen ist. — Hierbei mag noch bemerkt werden, daß die Punkte *I* und *II* auch in einen einzigen zusammenfallen dürfen, während die Richtungslinien der Stöße $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ verschieden voneinander sind. Auch für diesen Fall gilt der Satz.

Schließlich sei hier noch darauf hingewiesen, wie sich das Prinzip von d'Alembert gestaltet, wenn es auf Stöße am starren Körper angewendet wird. Solange der Stoß vom Antriebe $\mathfrak{A} = \int \mathfrak{P}\, dt$ einwirkt, bringt er an jedem Massenpunkte des Körpers eine gewisse Beschleunigung hervor, die gleich $\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$ geschrieben werden kann und die zu jeder Zeit proportional mit $\mathfrak{P}$ ist. Bringt man die Trägheitskräfte $-m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$ an, so bilden sie mit $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke ein Gleichgewichtssystem. Um dieses Gleichgewichtssystem näher zu untersuchen, kann man sich an Stelle von $\mathfrak{P}$ auch $\int \mathfrak{P}\, dt$ gesetzt denken, wenn man nur auch für jede Trägheitskraft ihr Zeitintegral, also $-m\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt} - \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0\right)$ oder mit anderen Worten $-m(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ einsetzt, falls hier unter $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit verstanden wird, die der betreffende materielle Punkt etwa schon vor dem Stoße hatte. In Worten heißt dies, daß der durch eine Kraft in irgendeinem Maßstab dargestellte Impuls mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Zuwüchsen der Bewegungsgrößen, falls man sie sich im gleichen Maßstabe durch Kräfte wiedergegeben denkt,

ein Gleichgewichtssystem bildet. Schreibt man an, daß des Gleichgewichts wegen die geometrische Summe der darstellenden Kräfte gleich Null sein, und daß die Summe ihrer statischen Momente verschwinden muß, wobei man den Schwerpunkt zum Momentenpunkte wählen kann, so gelangt man wieder zu denselben Gleichungen, die vorher aus dem Schwerpunkts- und dem Flächensatze abgeleitet worden waren.

§ 31. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper.

Unter einem starren Körper soll jetzt der Grenzfall eines weichen oder plastischen, d. h. eines Körpers vom Elastizitätsgrade Null verstanden werden, der aus einem solchen dadurch hervorgeht, daß man sich die Zusammendrückbarkeit des Körpers unter stetiger Festhaltung der genannten Eigenschaft bis auf Null vermindert denkt. Eine solche nähere Bestimmung ist, wie wir vorher erkannten, nötig, um den Aufgaben über den Stoß starrer Körper gegeneinander eine physikalisch zulässige Bedeutung zu geben. Wenn dies von anderen Autoren auch nicht ausdrücklich ausgesprochen wird, liegt diese Vorstellung doch überall stillschweigend zugrunde, wo anderwärts vom Stoße starrer Körper geredet wird oder die darüber angestellten Betrachtungen bleiben wenigstens nur dann richtig, wenn man dem unbestimmt gelassenen Begriffe des starren Körpers nachträglich überall den hier genauer angegebenen Sinn unterlegt.

Wenn zwei weiche Körper aufeinander stoßen, endigt der Stoß mit der ersten Stoßperiode, d. h. mit dem Augenblicke, in dem die Körper an der Berührungsstelle gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die durch die Zusammendrückung der Körper hervorgerufene Annäherung hat dann zugleich ihren größten Wert erreicht. Auch für den Stoß starrer Körper in dem hier definierten Sinne ist daher die Bedingung festzuhalten, daß die Körper an der Stoßstelle gleiche Geschwindigkeiten durch den Stoß erlangen. Dabei ist zunächst an den geraden Stoß gedacht. Für den allgemeinen Fall des Stoßes

zweier starrer Körper gegeneinander soll die Aussage dahin ergänzt werden, daß die Stoßstellen gleiche Geschwindigkeits-Komponenten in der Richtung der Stoßnormalen erlangen, und daß ferner einem Gleiten der Oberflächen übereinander während des Stoßes keine Reibung entgegenstehe. Die letzte Voraussetzung ist freilich abermals vollkommen willkürlich eingeführt und sie entspricht, wie wir wissen, dem wahren Verhalten der festen Körper keineswegs. Als nähere Definition des idealen starren Körpers ist sie aber zulässig, und da der Satz von Carnot, der sich auf starre Körper von den hier vorausgesetzten Eigenschaften bezieht, in manchen Teilen der technischen Mechanik eine nicht unerhebliche Rolle spielt, mag sie an dieser Stelle gelten.

Dabei möchte ich freilich sofort bemerken, daß meine Absicht bei der Behandlung des Carnotschen Satzes hauptsächlich darauf hinausgeht, meine Leser durch eine genauere Darlegung des wahren Sachverhaltes vor einer Überschätzung dieses Satzes, auf den man sich in der technischen Hydraulik sehr häufig bezieht, zu schützen und sie dadurch davor zu behüten, manche Formeln, die als Näherungsannahmen eine gewisse Berechtigung haben, für streng beweisbare und daher entsprechend zuverlässige Folgerungen aus den Grundgesetzen der Mechanik anzusehen.

Der Verlust an lebendiger Kraft beim geraden zentralen Stoße weicher (und hiermit auch der „starren“) Körper ist schon im ersten Bande ermittelt worden. Bezeichnet man die Massen beider Körper mit m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten vor dem Stoße mit v_1 und v_2, wobei $v_2 > v_1$ sein möge, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der ersten Stoßperiode, die hier vorübergehend mit w bezeichnet werden mag,

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

und der Verlust an lebendiger Kraft stellt sich zunächst in der Form

$$\text{Verl} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2)\frac{w^2}{2}$$

dar. Dieser Ausdruck kann auf verschiedene Art umgeformt werden, und zwar, um auf den Carnotschen Satz zu kommen, auch in folgender Weise

$$\text{Verl} = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2) w^2 - 2 (m_1 + m_2) w^2\right)$$

oder, wenn man in dem letzten mit w^2 behafteten Gliede für den einen Faktor w den vorher dafür festgestellten Wert einsetzt,

$$\begin{aligned}\text{Verl} &= \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_1 w^2 + m_2 w^2 - 2 w (m_1 v_1 + m_2 v_2)\right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2. \qquad (147)\end{aligned}$$

Die beiden Glieder dieses Ausdrucks haben eine einfache Bedeutung. Die Differenzen $w - v_1$ und $v_2 - w$ geben nämlich die Geschwindigkeitsänderungen an, die beide Körper durch den Stoß erfahren. Faßt man daher diese Geschwindigkeitsänderungen als selbständige Bewegungszustände auf, so ist die Summe der zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte ebenso groß als der in Wirklichkeit eintretende Verlust an lebendiger Kraft, den wir berechnen wollten. Diese Aussage spricht den Carnotschen Satz aus, der indessen, wie sich sofort zeigen wird, nicht nur für den geraden zentralen Stoß, sondern auch noch in viel allgemeineren Fällen seine Gültigkeit behält.

Zunächst gilt der Satz auch für den beliebigen — schiefen und exzentrischen — Stoß von zwei freien starren Körpern gegeneinander. Um dies zu beweisen, bezeichne ich die Geschwindigkeit der vom Stoße getroffenen Stelle des ersten Körpers in irgendeinem Augenblicke während der Stoßzeit mit $\mathfrak{w}_1$, die Geschwindigkeit der Stoßstelle des zweiten Körpers mit $\mathfrak{w}_2$. Da sich die Körper an der Stoßstelle während der ganzen Stoßdauer berühren — obschon die Oberflächen im allgemeinen zugleich übereinander gleiten —, müssen die in der Richtung der Stoßnormalen genommenen Komponenten von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gleich groß sein. Der ebenfalls in die Richtung der Stoßnormalen fallende Stoßdruck am ersten

Körper sei mit $\mathfrak{P}$, das bis zu dem betrachteten Augenblicke genommene Zeitintegral von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}$ und das über die ganze Stoßdauer erstrebte Zeitintegral mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet. Am zweiten Körper kehren sich die Richtungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ dem Wechselwirkungsgesetze zufolge um und man hat daher für ihn $-\mathfrak{P}$ bzw. $-\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}'$ zu setzen. Die Arbeit von $\mathfrak{P}$ am ersten Körper während eines Zeitelementes dt ist gleich

$$\mathfrak{P}\mathfrak{w}_1 dt,$$

und die Arbeit des Stoßdrucks am zweiten Körper gleich

$$-\mathfrak{P}\mathfrak{w}_2 dt.$$

Nach dem, was vorher über $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ bemerkt wurde, sind beide Arbeiten von gleicher Größe und entgegengesetzten Vorzeichen, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) = 0. \tag{148}$$

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ der Stoßstellen sind aber nicht jene, die diesen zukämen, wenn sie sich so bewegten, wie es dem starren Zusammenhange mit den fern von der Stoßstelle gelegenen Körpermassen entspräche. So klein auch die Formänderungen sein mögen, und wenn wir sie beim Grenzübergange vom weichen zum starren Körper schließlich selbst ganz verschwinden lassen: während der dann ebenfalls gegen Null hin konvergierenden Stoßdauer müssen wir jedenfalls darauf Rücksicht nehmen, daß sich die Stoßstelle der minimalen Formänderung wegen mit anderer Geschwindigkeit zu bewegen vermag, als es dem starren Zusammenhange mit der Hauptmasse des gestoßenen Körpers entsprechen würde. Jene Geschwindigkeiten der Stoßstellen, die den Bewegungszuständen der beiden Körper im gegebenen Augenblicke mit Vernachlässigung der Formänderung an der Stoßstelle zugehörten, seien zum Unterschiede von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bezeichnet.

Die Änderung, die die lebendige Kraft des ersten Körpers während dt erfährt, ist gleich jener Arbeit des Stoßdrucks $\mathfrak{P}$, die zum Wege $\mathfrak{v}_1 dt$ gehört, denn wir wissen schon aus den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen, daß die

Arbeit eines Impulses $\mathfrak{P}dt$ gleich der von ihr verursachten Änderung der lebendigen Kraft ist, falls während dt keine Formänderung eintritt. Der Rest, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1)dt$$

wird auf die Formänderungsarbeit am ersten Körper verwendet. Hierbei ist übrigens wohl zu beachten, daß auch beim starren Körper eine endliche Formänderungsarbeit möglich ist, denn wenn auch der Weg der Zusammendrückung gegen Null konvergiert, so konvergiert gleichzeitig die Größe des Stoßdrucks gegen Unendlich und das Produkt $0 \cdot \infty$ behält bei der hier zugrunde gelegten Definition des starren Körpers einen endlichen Wert.

Ebenso wird während des Zeitelementes dt die Arbeit

$$-\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{v}_2)dt$$

auf die Formänderung des zweiten Körpers verwendet. Die Summe beider Formänderungsarbeiten ist gleich dem Verluste an lebendiger Kraft während dt, also

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}_2)dt,$$

und daher mit Berücksichtigung von Gl. (148) auch

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)dt.$$

Der gesamte Verlust an lebendiger Kraft während der ganzen Stoßdauer folgt daraus zu

$$\mathrm{Verl} = \int (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\mathfrak{P}dt.$$

Um die Integration nach der Zeit auszuführen, bezeichne ich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$, die dem Anfange des Stoßes entspricht, mit $\mathfrak{v}_1^0$ und die am Ende des Stoßes mit $\mathfrak{v}_1'$. Die Änderung $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ entspricht dem ganzen Stoßimpulse $\mathfrak{A}'$, die Änderung $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1^0$ bis zu dem betrachteten Augenblicke dem bis dahin bereits verstrichenen Impulse $\mathfrak{A}$ und die beiden Änderungen verhalten sich zueinander wie die absoluten Werte A und A' dieser Impulse, da die Richtung des Stoßdrucks fortwährend mit der Stoßnormalen zusammenfällt und sich daher nicht ändert. Man hat daher

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_1^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0) \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\text{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\int \mathfrak{P}\,dt + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0)\int \frac{A}{A'}\mathfrak{P}\,dt.$$

Nun ist aber $\mathfrak{P}\,dt = d\mathfrak{A}$, und daher

$$\text{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\mathfrak{A}' + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0)\cdot\frac{1}{2}\mathfrak{A}'.$$

Beachtet man ferner noch, daß am Ende des Stoßes die Projektionen von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ auf die Stoßnormale gleich groß geworden sind, so vereinfacht sich dies zu

$$\text{Verl} = \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0)\mathfrak{A}'. \tag{149}$$

Hiermit ist ein Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft gefunden, von dem nur noch gezeigt zu werden braucht, daß er mit dem nach dem Carnotschen Satze berechneten übereinstimmt. Zu diesem Zwecke sei nun irgendein fern von der Stoßstelle liegender materieller Punkt des ersten Körpers ins Auge gefaßt, dessen Geschwindigkeit vor dem Stoße mit $\mathfrak{v}^0$ und nach dem Stoße mit $\mathfrak{v}'$ (also unter Weglassung des unteren Zeigers gegenüber den vorher gebrauchten Bezeichnungen) bezeichnet werden soll. Wir können dann sagen, daß der spätere Bewegungszustand des ersten Körpers aus dem früheren dadurch hervorgeht, daß sich ihm ein Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ zugesellt. Betrachtet man, wie es bei der Aussage des Carnotschen Satzes geschieht, den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ für sich, so gehörte ihm, wenn er allein vorkäme, eine gewisse lebendige Kraft zu, die mit L_1 bezeichnet werden mag. Nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen ließe sich der Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ jedenfalls dadurch getrennt für sich hervorbringen, daß man an dem ruhend gedachten ersten Körper den Stoß vom Impulse $\mathfrak{A}'$ wirken ließe. Unter der Voraussetzung, daß sich dieser Stoß ohne Formänderung abspielte, wäre dann die lebendige Kraft L_1, die durch den Stoß hervorgebracht würde, gleich der Arbeit des Impulses zu setzen. Dabei müßte die Geschwindig-

keit der Stoßstelle während des Stoßes von Null bis zu dem Endwerte $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ wachsen. Die Arbeit des Impulses und hiermit die lebendige Kraft L_1 berechnet sich demnach zu

$$L_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0)\mathfrak{A}',$$

und ebenso findet man für den zweiten Körper

$$L_2 = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}'(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0),$$

wobei nur zu beachten ist, daß bei ihm $-\mathfrak{A}'$ an Stelle von $\mathfrak{A}'$ tritt. Die Summe liefert

$$L_1 + L_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0 - \mathfrak{v}_2' + \mathfrak{v}_2^0)\mathfrak{A}'.$$

Da nun, wie vorher schon bemerkt war, am Ende des plastischen Stoßes die Projektion von $\mathfrak{v}_1'$ auf die Stoßnormale oder auf die Richtung von $\mathfrak{A}'$ ebenso groß ist wie die Projektion von $\mathfrak{v}_2'$, stimmt dies genau mit dem Werte in Gl. (149) überein und man findet

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \tag{150}$$

womit der Carnotsche Satz auch für den allgemeinsten Fall des Stoßes von zwei „plastisch-starren" Körpern gegeneinander bewiesen ist.

Auch auf den Fall, daß die stoßenden Körper nicht völlig frei, sondern bestimmten Bedingungen unterworfen sind, läßt sich der Satz unter Beibehaltung der früheren Schlußweise übertragen, falls dabei nur immer vorausgesetzt wird, daß alle Körper, durch die diese Bedingungen verwirklicht sind, auch wenn sie in der Grenze als starr angesehen werden, selbst im Grenzfalle noch den Elastizitätsgrad Null haben, und daß ferner kein weiterer Verlust an lebendiger Kraft durch Reibungen herbeigeführt wird. Ich begnüge mich damit, dies hier noch an einem einfachen Falle dieser Art zu zeigen.

Ein starrer Körper möge zunächst völlig frei sein und eine beliebige Anfangsbewegung besitzen. Dann soll irgendein Punkt von ihm durch eine geeignete Vorrichtung plötzlich festgehalten werden, so daß

sich der Körper von da ab nur noch um diesen festen Punkt weiter zu drehen vermag. Man soll angeben, wie er sich weiterhin bewegt und wie groß der Verlust an lebendiger Kraft ist, den er durch den Stoß erleidet.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes vor dem Stoße sei wieder mit $\mathfrak{v}^0$, die nach dem Stoße mit $\mathfrak{v}'$ bezeichnet, die Geschwindigkeiten der Stoßstelle insbesondere, sofern von der Formänderung abgesehen wird, mit $\mathfrak{v}_1^0$ und $\mathfrak{v}_1'$, wobei freilich zu beachten ist, daß auch hier wieder während der Stoßzeit die wahre Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_1$ des Punktes, den man festzuhalten im Begriffe ist, der unvermeidlichen Formänderung wegen, von $\mathfrak{v}_1$ verschieden ist. Die Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_1'$ ist übrigens nach der im vorliegenden Falle vorgeschriebenen Bedingung gleich Null zu setzen. — Durch den Stoß wird der Bewegungszustand um $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ abgeändert und wir können uns einen selbständigen Bewegungszustand denken, der sich dem vorhergehenden überlagert und bei dem jeder Punkt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$, die Stoßstelle also speziell die Geschwindigkeit $-\mathfrak{v}_1^0$ besitzt. Der Stoßimpuls, von dem zunächst nur der Angriffspunkt gegeben ist, muß jedenfalls so gerichtet und von solcher Größe sein, daß er für sich den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ hervorruft, insbesondere also seinem Angriffspunkte die gegebene Geschwindigkeit $-\mathfrak{v}_1^0$ erteilt. Dadurch ist aber, wie aus § 30 hervorgeht, der Stoßimpuls schon vollständig bestimmt. Nach Gl. (144) (S. 206) folgt nämlich, wenn man darin die Komponenten von $\mathfrak{r}$ noch speziell durch die von $\mathfrak{p}$ ersetzt, die zu einem gegebenen Stoßimpulse $\mathfrak{A}$ gehörige Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Angriffspunktes von $\mathfrak{A}$. Zerlegt man diese Gleichung in drei Komponentengleichungen nach den Richtungen der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so lassen sich diese drei Gleichungen auch nach den Komponenten $A_1 A_2 A_3$ von $\mathfrak{A}$ auflösen, indem sie für diese Unbekannten vom ersten Grade sind. Nachdem dies geschehen ist, kennt man den Stoßimpuls $\mathfrak{A}$ nach Richtung und Größe, der auf den festzuhaltenden Punkt vom Gestelle aus übertragen werden muß. Hiermit ist auch

der Bewegungszustand nach dem Stoße als bekannt zu betrachten.

Für den Verlust an lebendiger Kraft können wir ohne weiteres den Ausdruck in Gl. (149) in Anspruch nehmen, wenn wir unter dem zweiten Körper, auf den sich $\mathfrak{v}_2^0$ bezieht, das Gestell verstehen, also die Vorrichtung, durch die der betreffende Punkt genötigt wird, nach Ablauf des Stoßes in Ruhe zu bleiben. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2^0$ selbst ist daher gleich Null zu setzen und man hat

$$\text{Verl} = -\frac{1}{2}\mathfrak{v}_1^0\mathfrak{A}'.$$

Das hier auftretende Minuszeichen erklärt sich leicht damit, daß $\mathfrak{A}'$ den Stoßimpuls am ersten Körper bedeutet, der die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1^0$ vernichtet, also ungefähr — wenn auch keineswegs genau — entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{v}_1^0$ sein muß. Das innere Produkt $\mathfrak{v}_1^0\mathfrak{A}'$ hat daher an sich einen negativen, der Verlust an lebendiger Kraft dagegen, des Minuszeichens wegen, einen positiven Wert.

Nun beachte man, daß der Stoßimpuls $\mathfrak{A}'$ am ruhend gedachten Körper den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ hervorbrächte. Die diesem zugehörige lebendige Kraft sei wieder mit L_1 bezeichnet. Dann ist L_1 ebenso groß wie die Arbeit des Stoßimpulses $\mathfrak{A}'$, wenn dieser den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ aus dem Ruhestande heraus hervorbringt. Dabei steigt aber die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von $\mathfrak{A}'$ von Null an bis auf $-\mathfrak{v}_1^0$ an und für die Arbeit von $\mathfrak{A}'$ und hiermit zugleich für L_1 erhält man daher

$$L_1 = -\frac{1}{2}\mathfrak{v}_1^0\mathfrak{A}'.$$

Mit dem vorher für Verl gefundenen Werte stimmt dies aber genau überein und wir finden daher auch hier den Carnotschen Satz durch die Gleichung

$$\text{Verl} = L_1$$

bestätigt.

Man sieht nun auch leicht ein, daß sich derselbe Beweisgang auch auf andere Arten von Zwangsbedingungen übertragen läßt, solange es sich um einen rein plastischen Stoß

handelt, für den die zu Gl. (149) führende Betrachtung stets ohne Änderung übernommen werden kann.

Dagegen wird der Carnotsche Satz stets ungültig, sobald der Stoß entweder nicht ganz unelastisch ist oder sobald (etwa beim schiefen Stoße) Reibungen vorkommen, die sich dem Übereinanderweggleiten der Stoßstellen widersetzen.

§ 32. Die Kreiselbewegung.

Wir nehmen jetzt die schon in § 26 behandelte Bewegung eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt reibungsfrei zu drehen vermag, von neuem wieder auf, jedoch mit dem Unterschiede, daß außer dem Auflagerdrucke am festen Punkte jetzt auch noch das Eigengewicht des Körpers als weitere äußere Kraft zur Geltung kommen soll. Ein Körper, der diesen Bedingungen unterworfen ist, wird gewöhnlich als ein Kreisel bezeichnet, wenigstens dann, wenn ihm von vornherein eine große Winkelgeschwindigkeit erteilt wurde. Die sich hieran unter den angegebenen Bedingungen anschließende Bewegung heißt die Kreiselbewegung. Indessen bezeichnet man zuweilen auch schon den in § 26 behandelten Körper, der um einen festen Punkt rotierte, ohne daß andere Kräfte als der Auflagerdruck im festen Punkt an ihm angriffen, als einen „kräftefreien Kreisel“ und im Gegensatze den jetzt zu untersuchenden Körper, an dem außerdem noch das Eigengewicht angreift, als einen „schweren“ Kreisel.

Die Theorie des schweren Kreisels ist erheblich schwieriger als die des kräftefreien Kreisels und für den allgemeinsten Fall eines Kreisels mit dreiachsigem Trägheitsellipsoid hat die Aufgabe, die weitere Bewegung bei beliebig gegebenen Anfangsbedingungen vorauszusagen, bisher überhaupt noch keine strenge Lösung gefunden. Nur für einzelne Fälle und insbesondere für den praktisch sehr wichtigen Fall des „symmetrischen“ Kreisels ist die Lösung der Aufgabe gelungen. Symmetrisch wird der Kreisel genannt, wenn er die Gestalt eines Umdrehungskörpers hat und der Unterstützungspunkt auf der

Umdrehungsachse liegt. Die Umdrehungsachse wird auch als „Figurenachse“ oder „Kreiselachse“ bezeichnet. Bei den meisten Anwendungen der Kreiseltheorie liegt dieser Fall vor. Indessen kommt es eigentlich auf die besondere Gestalt des Kreiselkörpers gar nicht an. Wesentlich ist nur, daß das auf den festen Punkt bezogene Trägheitsellipsoid des Körpers ein Umdrehungsellipsoid ist und der Schwerpunkt des Kreisels auf der Umdrehungsachse des Ellipsoids enthalten ist. Man kann daher auch jeden Kreisel, von dem dies gilt, als einen „symmetrischen“ Kreisel im Sinne der Kreiseltheorie betrachten.

Ein besonderer Fall des symmetrischen Kreisels, für den sich die Theorie noch etwas einfacher gestaltet, ist der des „Kugelkreisels“. Man versteht darunter einen Kreisel, dessen Trägheitsellipsoid, bezogen auf den festen Punkt, eine Kugel bildet, gleichgültig, wie nun der Kreisel im übrigen gestaltet sein möge.

Die allgemeine Kreiselbewegung umfaßt auch die Pendelbewegung als einen besonderen Fall. Setzt man nämlich die Anfangsrotation gleich Null, so führt der Körper unter dem Einflusse des Eigengewichtes ebene Pendelbewegungen aus. Ebenso kommt bei passend gewählten Anfangsbedingungen eine Bewegung zustande, bei der der Körper als Zentrifugalpendel schwingt. An diese Grenzfälle denkt man aber nicht, wenn man von der Kreiselbewegung im engeren Sinne des Wortes redet; man meint vielmehr jene Bewegungen, die der Körper ausführt, wenn ihm eine besonders große Anfangsrotation, und zwar meist um eine Achse, die nicht viel von der Figurenachse abweicht, erteilt wurde. Man kommt dadurch auf einen anderen Grenzfall, der zumal für die praktischen Anwendungen von besonderer Wichtigkeit ist.

Um diesen Grenzfall näher zu kennzeichnen, mache ich zunächst darauf aufmerksam, daß bei der allgemeinen Kreiselbewegung die lebendige Kraft nicht konstant bleibt. Der Auflagerdruck leistet zwar, wie schon beim kräftefreien Kreisel, auch hier keine Arbeit; wohl aber das Eigengewicht. Wenn

sich der Schwerpunkt bei der Bewegung senkt, wächst die lebendige Kraft um den Betrag der Arbeit an, die hierbei von dem Gewichte geleistet wird. Bezeichnet man das Kreiselgewicht mit Q und den Abstand des Schwerpunktes mit s, so vermag sich die lebendige Kraft im Verlaufe der Kreiselbewegung höchstens um den Betrag $2\,Qs$ zu ändern, und um so viel auch nur dann, wenn dabei der Schwerpunkt aus der höchsten in die tiefste Lage oder umgekehrt übergegangen sein sollte. Hatte man aber dem Kreisel eine sehr große Anfangsrotation erteilt, so ist die ihr entsprechende lebendige Kraft weit größer, als $2\,Qs$. Unter diesen Umständen vermag sich die lebendige Kraft während der Kreiselbewegung im Verhältnisse zu ihrem Anfangswerte und zu allen späteren Werten überhaupt nur um geringfügige Beträge zu ändern.

Der Grenzfall, von dem ich vorher sprach, liegt dann vor, wenn die lebendige Kraft L_0 der Anfangsrotation so groß ist, daß sie genau genug als unendlich groß gegenüber $2\,Qs$ betrachtet werden kann. Mit demselben Grade der Annäherung kann man dann L als konstant betrachten; geradeso wie beim kräftefreien Kreisel, bei dem ja auch L nur deshalb als konstant angesehen werden konnte, weil man die niemals ganz zu vermeidenden Bewegungswiderstände vernachlässigte. Durch diese Bemerkung wird die Theorie für den Grenzfall bedeutend vereinfacht und die Ergebnisse, zu denen man auf Grund dieser Voraussetzung gelangt, können für die meisten praktischen Anwendungen als vollkommen hinreichende Annäherungen gelten.

Beim kräftefreien Kreisel war außer L auch noch der Drall $\mathfrak{B}$ konstant. Dagegen dürfen wir beim schweren Kreisel, selbst in unserem Grenzfalle, $\mathfrak{B}$ nicht als näherungsweise konstant betrachten. Zwar wird mit L auch $\mathfrak{B}$ unendlich groß. Aber die Änderungen, die $\mathfrak{B}$ im Laufe der Zeit zu erfahren vermag, sind nicht, wie bei der lebendigen Kraft, in bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen, sondern sie vermögen nach Ablauf einer hinlänglichen Zeit über jede Grenze hinaus zu wachsen. Nach dem Flächensatze ist nämlich, wenn man jetzt unter $\mathfrak{K}$ das statische Moment

des Gewichtes in bezug auf den festen Punkt versteht,

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K} \quad \text{und hieraus} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \int_0^t \mathfrak{K}\, dt.$$

Wie groß man nun auch $\mathfrak{B}$ bei einem bestimmt gegebenen $\mathfrak{K}$ annehmen möge, so wird doch nach Verstreichen einer entsprechenden Zeit t das Zeitintegral von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{B}_0$ von gleicher Größenordnung werden können.

Nur dies ist von vornherein klar, daß es jedenfalls um so längerer Zeiten bedürfen wird, bis sich $\mathfrak{B}$ merklich von $\mathfrak{B}_0$ unterscheidet, je größer die Anfangsrotation war, die wir dem Kreisel erteilten. Um so langsamer ändert sich dann der Drall. Für eine kürzere Zeit, die immerhin noch eine Anzahl von Umdrehungen des Kreisels um seine Drehachse umfassen kann, ist dann freilich die Änderung von $\mathfrak{B}$ geringfügig im Vergleiche zum Anfangswerte $\mathfrak{B}_0$ und für einen solchen kurzen Zeitabschnitt kann daher auch $\mathfrak{B}$ annähernd als konstant angesehen werden.

Wir erkennen hieraus, daß sich der Kreisel in unserem Grenzfalle während eines verhältnismäßig kürzeren Zeitabschnitts nahezu ebenso bewegt, wie ein kräftefreier Kreisel, daß aber daneben langsame Änderungen einherlaufen, die sich mit der Zeit derart anhäufen, daß der Bewegungszustand späterhin vollständig von dem verschieden ist, der beim kräftefreien Kreisel nach Ablauf der gleichen Zeit zu erwarten wäre.

§ 33. Die pseudoreguläre Präzession.

Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung des symmetrischen Kreisels, dem eine so schnelle Anfangsrotation erteilt wurde, daß man den vorher besprochenen Grenzfall als genau genug zutreffend erachten kann. Außerdem wollen wir noch annehmen, daß die Achse der Anfangsrotation nicht viel von der Figurenachse abweicht, so daß man den Richtungsunterschied zwischen beiden nahezu als unendlich klein betrachten kann. Die Bewegung, die der Kreisel unter dem Einflusse des Eigengewichts bei diesen Anfangsbedingungen

ausführt, wird als eine pseudoreguläre Präzession bezeichnet.

Um diese Bezeichnung zu erklären, weise ich darauf hin, daß auch die ganze Erde neben ihrer Planetenbewegung, die sie um die Sonne beschreibt, zugleich eine Kreiselbewegung ausführt. Sie rotiert dabei zwar nicht um einen festen Punkt, sondern um ihren Schwerpunkt. Dieser Unterschied ist aber, wie es schon beim kräftefreien Kreisel besprochen wurde, unwesentlich. Wesentlich ist dagegen, daß die von der Sonne auf die einzelnen Massenteilchen der Erde ausgeübten Anziehungskräfte wegen der etwas verschiedenen Abstände, die sie in einem gegebenen Augenblicke vom Sonnenmittelpunkte haben, nicht einfach den Massen proportional sind, und daß sie sich daher auch nicht zu einer einzigen, durch den Erdmittelpunkt gehenden Resultierenden zusammensetzen lassen. Wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde tritt vielmehr noch ein Kräftepaar von freilich nur sehr geringfügigem Betrage auf. Die am Schwerpunkt angebrachte geometrische Summe aller Anziehungskräfte bringt die Bewegung des Schwerpunktes längs der planetarischen Bahn der Erde hervor. Das Kräftepaar dagegen beeinflußt die Rotationsbewegung, die die Erde außerdem noch um durch ihren Schwerpunkt gehende Achsen ausführt und so gering es auch ist, bringt es doch in längeren Zeiträumen sehr erhebliche Wirkungen hervor. Die Rotationsachse der Erde beschreibt infolge davon im Laufe von etwa 21000 Jahren einen Kegel gegen den Fixsternhimmel und diese Bewegung macht sich schon innerhalb kürzerer Zeiträume durch ein Fortschreiten des Frühlingspunktes oder, wie man dafür auch sagt, durch die Präzession der Tag- und Nachtgleichen bemerklich. Diese wurde schon von dem griechischen Astronomen Hipparch durch die Beobachtung festgestellt und später von Newton auf die angegebene Ursache zurückgeführt.

An diesem Beispiele hat sich die Kreiseltheorie überhaupt zuerst entwickelt und man hat daher in Anlehnung daran später jede Kreiselbewegung, bei der die Figurenachse einen Kreiskegel beschreibt, als eine Präzessionsbewegung bezeichnet.

Ist der Kegel genau ein Kreiskegel, so spricht man von einer regulären Präzession. Bei dem schnell rotierenden schweren Kreisel, mit dem wir uns hier vor allem beschäftigen wollen, erfolgt dagegen die Bewegung nur näherungsweise nach einem Kreiskegel, dessen Achse in die Richtung der Lotlinie fällt und die Bewegung wird, weil sie von einer regulären nicht viel abweicht, als eine pseudoreguläre Präzession bezeichnet.

Die Theorie der pseudoregulären Präzession ist sehr einfach, so lange man sich nur auf die Untersuchung des durch den Grenzfall bezeichneten Hauptvorganges einläßt und auf die geringen Abweichungen nicht achtet, die durch die unvollkommene Erfüllung der sich darauf beziehenden Voraussetzungen bedingt sind. Wir erkannten schon, daß für einen kurzen Zeitabschnitt, der nur wenige Umdrehungen des Kreisels umfaßt, die Bewegung nicht viel von der eines kräftefreien Kreisels abweichen kann. Innerhalb dieser Zeit kann $\mathfrak{B}$ als konstant angesehen werden und die Figurenachse sowohl als die Drehachse (d. h. die Richtung $\mathfrak{u}$) beschreiben, genau so wie wir es schon in § 29 an einem Beispiele näher besprochen haben, Kreiskegel von sehr kleinem Öffnungswinkel um die Richtung von $\mathfrak{B}$ als Achse. Während eines solchen Umlaufs hat der auf der Figurenachse liegende Radiusvektor $\mathfrak{s}$ des Schwerpunkts, der zugleich den Hebelarm des Gewichts bildet, etwas verschiedene Richtungen; im Mittel für den ganzen Umlauf fällt aber die Richtung von $\mathfrak{s}$ mit der von $\mathfrak{B}$ zusammen. Bezeichnen wir also einen in der augenblicklichen Richtung von $\mathfrak{B}$ gezogenen Einheitsvektor mit $\mathfrak{b}$, so kann als Durchschnittswert des Momentes $\mathfrak{K}$ für einen Umlauf der Ausdruck

$$\mathfrak{K} = s \mathfrak{V} \mathfrak{C} \mathfrak{b} \tag{151}$$

angeschrieben werden, wenn $\mathfrak{C}$ das Kreiselgewicht nach Größe und Richtung angibt. Die sehr kleine Änderung $d\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{B}$ während der sehr kurzen Zeit dt erfährt, in der der Kreisel nur wenige Umläufe machen konnte, ist daher

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{K} dt = s dt \mathfrak{V} \mathfrak{C} \mathfrak{b}. \tag{152}$$

Der Zuwachs $d\mathfrak{B}$ steht hiernach senkrecht zu $\mathfrak{b}$, d. h. zu $\mathfrak{B}$ selbst. Dadurch kann $\mathfrak{B}$ nur eine Richtungsänderung, aber keine Änderung der absoluten Größe erfahren. Ferner steht $d\mathfrak{B}$ auch senkrecht zu $\mathfrak{Q}$, d. h. zur Lotlinie. Demnach ist $d\mathfrak{B}$ horizontal und senkrecht zu der durch $\mathfrak{Q}$ gelegten Lotebene gerichtet. Die Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}$ liegen daher so zueinander wie zwei aufeinander folgende Erzeugende eines geraden Kreiskegels, dessen Achse in die Richtung der Lotlinie fällt. Das gilt für jeden folgenden Zeitabschnitt dt ebenso, und hiermit ist bewiesen, daß $\mathfrak{B}$ in der Tat im Laufe der Zeit den genannten Kreiskegel vollständig und später immer wieder von neuem durchlaufen muß.

Daß die Präzession indessen nur eine pseudoreguläre und keine reguläre ist, ergibt sich daraus, daß innerhalb eines jeden Kreiselumlaufs wegen der etwas verschiedenen Richtungen von $\mathfrak{s}$ kleine Schwankungen von $\mathfrak{B}$ um den mittleren Wert herum stattfinden müssen, die bei den vorhergehenden Betrachtungen außer acht gelassen wurden, da wir nur nach den Mittelwerten aller Größen für eine Umdrehung fragten. Im Grenzfalle des unendlich schnell rotierenden Kreisels werden diese Schwankungen übrigens unendlich klein.

Wir kennen jetzt die langsam erfolgende Änderung von $\mathfrak{B}$ gegen den festen Raum. Es fragt sich aber noch, wie sich $\mathfrak{B}$ relativ zum Kreiselkörper verschiebt. Auch darauf läßt sich sofort eine Antwort erteilen, indem man sich darauf stützt, daß die lebendige Kraft L als konstant angesehen werden kann, und zwar hier um so mehr, als sich der Schwerpunkt, wie wir schon sahen, abgesehen von den kleinen Schwankungen innerhalb eines Umlaufs nur in horizontaler Richtung verschiebt. Alle mit diesem Werte von L verträglichen $\mathfrak{B}$ liegen nach § 23 auf dem zugehörigen Drallellipsoide Da sich aber $\mathfrak{B}$, wie schon bewiesen ist, der Größe nach nicht ändert, so können nur jene Radienvektoren des Drallellipsoids in Frage kommen, die unter sich von gleicher Größe sind und diese bilden, da das Drallellipsoid hier ein Umdrehungsellipsoid ist, einen Kreiskegel, dessen Achse mit der Figurenachse, d. h. der Hauptträgheits-

achse zusammenfällt. Hiermit ist bewiesen, daß von den kleinen Schwankungen innerhalb eines Umlaufs abgesehen, der Drall $\mathfrak{B}$ im Mittel auch relativ zum Körper, und zwar um die Figurenachse herum einen Kreiskegel beschreibt. Da außerdem noch vorausgesetzt war, daß $\mathfrak{B}$ in der Anfangsrichtung nur wenig von der Figurenachse abweichen sollte, so hat dieser Kreiskegel nur einen sehr kleinen Öffnungswinkel, d. h. die Kreiselachse muß stets in der nächsten Nachbarschaft von $\mathfrak{B}$ bleiben. Mit der Bewegung von $\mathfrak{B}$ gegen den festen Raum ist daher auch die Bewegung der Figurenachse gegen den festen Raum hinlänglich genau bekannt.

Es muß übrigens noch bemerkt werden, daß die zuletzt angestellte Beweisführung versagt, wenn es sich um einen Kugelkreisel handelt, da dann alle Radienvektoren des in eine Kugel übergehenden Drallellipsoids gleich groß sind. Aber auch in diesem Falle kann sich die Richtung von $\mathfrak{B}$ oder der mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallenden Drehachse $\mathfrak{u}$ nicht merklich von der Kreiselachse, die durch den Schwerpunkt des Körpers gelegt ist, entfernen. Schreibt man nämlich $\mathfrak{K}$ in der Form an

$$\mathfrak{K} = V\mathfrak{Q}\mathfrak{s}, \quad \text{womit} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V\mathfrak{Q}\mathfrak{s}$$

wird, so folgt daraus durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{s}$

$$\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0.$$

Da ferner $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ die augenblickliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes angibt und daher auf der Drehachse $\mathfrak{u}$ und hiernach auch auf $\mathfrak{B}$ senkrecht steht, so ist auch

$$\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = 0.$$

Im ganzen wird, wie man aus beiden Gleichungen erkennt, also auch

$$\frac{d(\mathfrak{B}\mathfrak{s})}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{s} = \text{konstant}.$$

Demnach kann sich beim Kugelkreisel die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{s}$ nicht ändern. Bei der pseudoregulären Präzession ändert sich aber auch die Größe von $\mathfrak{B}$ nicht merklich und daher muß auch der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{s}$ nahezu konstant sein. Wenn er von Anfang an sehr klein war, bleibt er daher auch dauernd klein.

Es bleibt noch übrig, die Umlaufzeit T der Präzession oder auch an deren Stelle die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ zu ermitteln, mit der sich die Richtung von $\mathfrak{B}$ und hiermit die Kreiselachse um die durch den festen Punkt gelegte Lotlinie drehen. Jedenfalls muß der Vektor $\mathfrak{w}$ der Bedingung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\mathrm{V}\,\mathfrak{w}\mathfrak{B}$$

genügen und da andererseits schon in Gl. (152)

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = s\,\mathrm{V}\,\mathfrak{Q}\mathfrak{b}$$

gefunden war, so muß, damit beide Gleichungen miteinander übereinstimmen, $\mathfrak{w}$ entgegengesetzt mit $\mathfrak{Q}$ gerichtet sein, also nach oben hin gehen. Außerdem muß

$$wB = sQ \quad \text{oder} \quad w = \frac{sQ}{B} = \frac{sQ}{u\Theta} \tag{153}$$

sein. Hierbei ist zu beachten, daß wegen des nahen Zusammenfallens von $\mathfrak{B}$ mit der Kreiselachse $B = u\Theta$ gesetzt werden konnte. Für die Umlaufzeit T der Kreiselachse um die Lotlinie erhält man daher

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\frac{u\Theta}{sQ}. \tag{154}$$

Wir finden hiermit bestätigt, daß die Umlaufzeit um so größer ist, die Präzession daher um so langsamer erfolgt, je schneller der Kreisel rotiert.

Schließlich mag noch erwähnt werden, daß die geringen Abweichungen, die die Kreiselachse während einer Kreiselumdrehung von der vorher allein in Betracht gezogenen mittleren Richtung für diese Umdrehung erfährt, als die Nutation der Kreiselbewegung bezeichnet werden. Mit demselben Grade der Annäherung, den wir bisher schon als genügend ansahen, kann nachträglich auch noch die Nutationsbewegung angegeben werden. Wir erkannten nämlich vorher schon, daß bei der pseudoregulären Präzession während einer Umdrehung der Drall $\mathfrak{B}$ als konstant angesehen werden kann, und daß sowohl die Richtung von $\mathfrak{u}$ als die Kreiselachse Kreiskegel um diese Richtung von $\mathfrak{B}$ beschreiben. Die Nutation besteht also

in dieser mit der Winkelgeschwindigkeit u um die Richtung von $\mathfrak{B}$ erfolgenden Drehbewegung der Kreiselachse, die sich der vorher allein betrachteten Präzessionsbewegung überlagert. Der Schwerpunkt beschreibt dabei einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{B}$ steht und dessen Mittelpunkt auf $\mathfrak{B}$ liegt. Der Halbmesser des Kreises ergibt sich aus dem Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und der Kreiselachse, ist also nach unseren Voraussetzungen jedenfalls sehr klein. Er hängt davon ab, um wieviel zu Anfang der Bewegung die Richtung von $\mathfrak{B}$ von der Kreiselachse abwich, während es bei der Präzession auf den genaueren Wert dieser Abweichung, falls sie nur überhaupt als klein angesehen werden konnte, nicht ankam.

§ 34. Einwirkung eines Stoßes auf den schnell rotierenden Kreisel.

Die Zeitdauer eines Stoßes wird stets als sehr klein betrachtet. Da aber bei dem schnell rotierenden Kreisel auch die Zeitdauer einer Umdrehung sehr klein ist, so daß sie bei den vorausgehenden Untersuchungen sogar als unendlich klein angesehen werden konnte, wird hier zur Beurteilung der Wirkung eines Stoßes eine nähere Festsetzung darüber erforderlich, wie sich die beiden sehr kleinen Zeiten der Größenordnung nach zueinander verhalten sollen. Wir begnügen uns hier damit, nur die beiden Grenzfälle zu besprechen, daß die Stoßzeit entweder als sehr klein oder als sehr groß gegenüber der Zeitdauer einer Kreiselumdrehung angesehen werden kann. Es wird sich zeigen, daß sich der Kreisel in beiden Fällen gegen die Wirkung eines Stoßes von gegebener Größe (diese gemessen durch den Antrieb, also das Zeitintegral der Stoßkraft) sehr verschieden verhält.

Im ersten Falle, wenn sich also der Kreisel während der Stoßzeit nur sehr wenig weiter bewegt hat, kann man die durch den Stoß hervorgebrachte Änderung des Dralls genau so berechnen, als wenn der Kreisel in der augenblicklichen Lage in Ruhe gewesen wäre, also etwa nach den in § 30 gegebenen

Anleitungen. Anstatt darauf zurückzugreifen, kann man aber auch unmittelbar

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \int \mathfrak{K} dt = \mathfrak{B} + \mathfrak{V}\left(\int \mathfrak{P} dt\right)\mathfrak{p}$$

setzen, wenn $\mathfrak{B}$ den Drall vor, $\mathfrak{B}'$ den nach dem Stoße und $\mathfrak{p}$ den vom festen Punkte gerechneten Hebelarm der Stoßkraft $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Da sich der Kreisel inzwischen nur wenig weiter bewegt hat, ist die Richtungsänderung des Dralls relativ zum Kreiselkörper als ebenso groß anzusehen wie die gegenüber dem festen Raum. Wenn also der Kreisel vorher um eine nahezu mit der Kreiselachse zusammenfallende Drehachse rotierte, trifft dies nach dem Stoße nicht mehr zu. Die Kreiselbewegung wird daher durch einen solchen kurzdauernden Stoß auch der Art nach vollständig geändert.

Ganz anders ist es, wenn sich beim gleichen Wert des Antriebs die Stoßdauer so in die Länge zieht, daß der Kreisel inzwischen eine größere Anzahl von Umdrehungen ausführen konnte. Über die Art, wie der Stoß vor sich gehen soll, werde vorausgesetzt, daß die Stoßkraft $\mathfrak{P}$ während der ganzen Stoßdauer die gleiche Richtung beibehält und sich der Größe nach stetig (im Verlaufe einer Umdrehung daher nur wenig) ändert, sowie daß sie stets an demselben Angriffspunkte des Kreiselkörpers wirkt. Man denke sich also etwa einen Stab oder eine andere Hervorragung an dem Kreiselkörper angebracht, an deren Ende die Stoßkraft angreift.

Da $\int \mathfrak{P} dt$ einen endlichen gegebenen Wert haben soll, muß unter diesen Voraussetzungen jener Teil des Antriebs, der auf eine einzelne Umdrehung entfällt, klein sein. Daher ändert sich auch $\mathfrak{B}$ während einer Umdrehung nur wenig; es wird also genügen, wenn wir diese Änderung als ein Differential ansehen. Der Hebelarm $\mathfrak{p}$ der Stoßkraft beschreibt während einer Umdrehung eine Kegelfläche und die mittlere Richtung von $\mathfrak{p}$ fällt aus denselben Gründen wie im vorigen Paragraphen mit der Richtung von $\mathfrak{B}$ zusammen. Bezeichnen wir also die Dauer einer Umdrehung mit dt, so finden wir für das zugehörige $d\mathfrak{B}$

$$d\mathfrak{B} = dtp' \mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{b},$$

wobei p' die Projektion von $\mathfrak{p}$ auf die Richtung von $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{b}$ bedeutet. Jedenfalls steht hiernach $d\mathfrak{B}$ senkrecht zu $\mathfrak{b}$ oder zu $\mathfrak{B}$ selbst und daher erfährt $\mathfrak{B}$ nur eine Richtungsänderung und keine Änderung der absoluten Größe. Auch die lebendige Kraft erfährt für den ganzen Umlauf keine Größenänderung, da der Angriffspunkt von $\mathfrak{P}$ eine geschlossene Bahn durchläuft, das Linienintegral oder die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$, da $\mathfrak{P}$ während dieser Zeit als konstant betrachtet werden kann, daher zu Null wird. Hieraus folgt durch dieselbe Schlußweise wie im vorigen Paragraphen, daß sich die Richtung von $\mathfrak{B}$ relativ zum Kreiselkörper im Falle des langsam verlaufenden Stoßes nicht merklich zu verschieben vermag. Die pseudoreguläre Präzession bleibt daher als solche bestehen. Der ganze Erfolg des Stoßes besteht darin, daß sich die Richtung von $\mathfrak{B}$, mit ihr aber zugleich auch die Kreiselachse um einen endlichen Winkel gegen den festen Raum gedreht hat.

Von Wichtigkeit ist es noch, auf die Richtung zu achten, nach der der Kreisel unter dem Einflusse eines langsam verlaufenden Stoßes ausweicht. Abb. 35 zeigt dies an einem Beispiele, bei dem der Einfachheit halber vorausgesetzt ist, daß es sich um einen Kugelkreisel handle. Vor dem Stoße soll der Kreisel, der in kegelförmiger Gestalt gezeichnet ist, in aufrechter Lage um eine mit der Kreiselachse zusammenfallende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ rotiert haben. Die Stoßkraft $\mathfrak{P}$ ist in horizontaler Richtung angenommen. Der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$ ist ebenfalls horizontal und senkrecht zu $\mathfrak{P}$ gerichtet. In der Stoßdauer t, während der $\mathfrak{P}$ konstant sein mag, ändert sich der Drall um $\mathfrak{K}t$ und die Winkelgeschwindigkeit daher um $\frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$. Dadurch geht $\mathfrak{u}_0$ über in $\mathfrak{u}$, wie aus der Abbildung zu entnehmen ist. Mit $\mathfrak{u}$ hat sich aber auch die Kreisel-

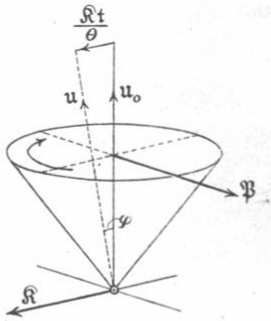

Abb. 35.

achse (ungefähr wenigstens) in der gleichen Richtung verschoben; obschon beide nachher nicht mehr genau zusammenfallen. Der Kreisel führt dann nach dem Stoße unter dem Einflusse des Eigengewichts eine pseudoreguläre Präzession von der uns bereits bekannten Art aus.

Die Kreiselachse verschiebt sich also im Mittel bei einem langsam verlaufenden Stoß rechtwinklig zur Richtung der Stoßkraft $\mathfrak{P}$ und hierin besteht eine der bemerkenswertesten Eigenschaften des schnell rotierenden Kreises.

Ferner erkennt man, was ja auch schon aus der Erfahrung hinlänglich bekannt ist, daß die Bewegung des Kreisels um die aufrechte Achse stabil ist. Durch den Stoß wird die Bewegung in eine pseudoreguläre Präzession umgewandelt, die der vorhergehenden Bewegung nahe benachbart ist, wenn der Antrieb des Stoßes nicht zu groß war. Der Kreisel wird durch einen solchen Stoß nicht „umgeworfen", wie es sein müßte, wenn er gar nicht oder nur langsam rotierte. Je schneller er sich umdreht, um so geringer ist die Ablenkung, die er durch einen Stoß von gegebenem Antrieb aus der anfänglichen Bewegung erfährt.

§ 35. Die strenge Lösung des Kreiselproblems für den symmetrischen schweren Kreisel.

In den meisten Fällen der praktischen Anwendung wird man mit den vorhergehenden Betrachtungen vollständig auskommen. Für den symmetrischen Kreisel, an dem nur das Eigengewicht angreift, kann man aber die weitere Bewegung, die auf einen beliebig gegebenen Anfangszustand folgt, auch in aller Strenge angeben. „Streng" ist die Theorie freilich auch hier nur im mathematischen Sinn und nicht im physikalischen, da die Bewegungswiderstände, die sich niemals ganz beseitigen lassen, dabei vernachlässigt werden müssen.

Immerhin hat aber die mathematisch strenge Kreiseltheorie auch einen gewissen praktischen Wert und ich werde daher hier einen kurzen Abriß davon geben, wobei ich mir vorbehalte, im 6. Bande dieses Werkes später nochmals ausführ-

licher hierauf und auf die Kreiseltheorie überhaupt zurückzukommen.

Wenn das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, kann man für den Drall $\mathfrak{B}$ des rotierenden Körpers einen für die weitere Behandlung besonders geeigneten Ausdruck aufstellen, den ich zunächst ableiten werde. Man denke sich die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt, von denen die eine in die Richtung der Figurenachse, die andere in die Äquatorebene des Trägheitsellipsoids fällt. Bezeichnet man die Größen dieser beiden Komponenten mit u_1 und u_2, ferner einen in der Richtung der Figurenachse gezogenen Einheitsvektor mit $\mathfrak{s}_1$ und einen in die Richtung der Projektion von $\mathfrak{u}$ auf die Äquatorebene fallenden Einheitsvektor mit $\mathfrak{a}_1$, so wird die besprochene Zerlegung durch die Gleichung

$$\mathfrak{u} = u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1 \tag{155}$$

zum Ausdruck gebracht. Da die beiden Komponenten von $\mathfrak{u}$ mit Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallen, findet man das zu $\mathfrak{u}$ gehörige $\mathfrak{B}$ in derselben Weise wie schon in Gl. (121) S. 173, indem man jede der beiden Komponenten mit den zugehörigen Hauptträgheitsmomenten multipliziert. Bezeichnet man diese mit Θ_1 und Θ_2, so folgt zunächst

$$\mathfrak{B} = u_1 \Theta_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \Theta_2 \mathfrak{a}_1 .$$

Daraus entsteht durch eine einfache Umformung

$$\mathfrak{B} = \Theta_2 (u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1) + u_1 \mathfrak{s}_1 (\Theta_1 - \Theta_2),$$

wofür man nach Gl. (155) kürzer

$$\mathfrak{B} = \Theta_2 \mathfrak{u} + u_1 (\Theta_1 - \Theta_2) \mathfrak{s}_1 \tag{156}$$

schreiben kann. Das ist der Ausdruck, den ich ableiten wollte und von dem weiterhin ausgegangen werden soll.

Nach dem Flächensatze gilt in jedem Augenblicke streng die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = s \bigvee \mathfrak{D} \mathfrak{s}_1, \tag{157}$$

die hier an die Stelle der nur näherungsweise gültigen Gleichung (152) S. 227 tritt, die wir zum Ausgangspunkt der Theorie der

pseudoregulären Präzession gemacht hatten. Unter s ist wie früher der Schwerpunktsabstand, vom festen Punkt aus gerechnet, zu verstehen.

Außerdem gilt noch die schon mehrfach benutzte, aus Band I, § 20 übernommene Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -\mathfrak{V}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{s}_1, \tag{158}$$

in der auf der linken Seite die augenblickliche Geschwindigkeit des auf der Kreiselachse im Abstande Eins vom festen Punkte liegenden Punktes steht.

Aus den drei zuletzt angeschriebenen Gleichungen kann man die Variabeln $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ eliminieren, womit man auf eine Differentialgleichung kommt, die nur noch die Unbekannte $\mathfrak{s}_1$ enthält, von der also die Bewegung der Kreiselachse gegen den festen Raum unmittelbar abhängt.

Zu diesem Zwecke überzeuge man sich zunächst, daß

$$\frac{d(\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1)}{dt} = \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0 \tag{159}$$

wird. Man findet dies nämlich bestätigt, wenn man $\mathfrak{B}$ aus Gl. (156) und die Differentialquotienten von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{s}_1$ aus den Gleichungen (157) und (158) einsetzt und sich dabei erinnert, das jeder Ausdruck von der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zu Null werden muß, weil $\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ senkrecht zu $\mathfrak{A}$ steht.

Das innere Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1$ ist aber nichts anderes als die Projektion B_1 von $\mathfrak{B}$ auf die Kreiselachse und aus Gl. (159) geht hervor, daß diese Projektion konstant ist. Andererseits kann aber diese Komponente B_1 von $\mathfrak{B}$, wie schon aus den auf Gl. (155) folgenden Bemerkungen hervorgeht, auch

$$B_1 = u_1 \Theta_1$$

gesetzt werden und hieraus folgt, daß auch die in die Richtung der Kreiselachse fallende Komponente u_1 der Winkelgeschwindigkeit während der ganzen Bewegung konstant bleibt.

Der besondere Umstand, daß u_1 eine Konstante ist, ermöglicht uns die Auflösung von Gl. (158) nach $\mathfrak{u}$ in eindeutiger Weise, während sie sonst bei einer solchen Vektorgleichung

nicht möglich wäre. Multipliziert man nämlich Gl. (158) auf äußere Art mit $\mathfrak{s}_1$, so erhält man zunächst mit Anwendung des durch Gl. (118) S. 170 ausgesprochenen Rechengesetzes

$$\mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -\mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \mathfrak{V}\,\mathfrak{u}\mathfrak{s}_1 = -\mathfrak{u}(\mathfrak{s}_1)^2 + \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{s}_1.$$

Nun war aber $\mathfrak{s}_1$ ein Einheitsvektor, das Quadrat davon ist daher gleich Eins und $\mathfrak{u}\mathfrak{s}_1$ ist gleich u_1; daher läßt sich die Gleichung schreiben

$$\mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -\mathfrak{u} + u_1 \mathfrak{s}_1,$$

in der u_1 eine durch den Anfangszustand der Bewegung gegebene Konstante bedeutet. Die Auflösung nach $\mathfrak{u}$ liefert daher

$$\mathfrak{u} = u_1 \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}. \tag{160}$$

Hierauf läßt sich auch $\mathfrak{B}$ durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (156) vollständig in $\mathfrak{s}_1$ ausdrücken. Führt man dies aus, so erhält man nach Streichen von zwei sich gegeneinander weghebenden Gliedern

$$\mathfrak{B} = u_1 \Theta_1 \mathfrak{s}_1 - \Theta_2 \mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}. \tag{161}$$

Wir brauchen jetzt nur noch diesen Ausdruck in die Gleichung des Flächensatzes, also in Gl. (157) einzusetzen, um zur Differentialgleichung für $\mathfrak{s}_1$ zu gelangen. Dabei ist zu beachten, daß

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = \mathfrak{V}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2}$$

ist, indem das äußere Produkt einer Größe mit sich selbst zu Null wird. Man erhält daher

$$\Theta_2 \mathfrak{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1 \Theta_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + s\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{Q}\mathfrak{s}_1 = 0. \tag{162}$$

Damit haben wir die Hauptgleichung des Kreiselproblems für den schweren symmetrischen Kreisel aufgestellt. Alle übrigen außer $\mathfrak{s}_1$ in ihr vorkommenden Größen sind gegebene Konstanten. Wenn wir das allgemeine Integral der Gl. (162) finden, haben wir damit zugleich die Lösung des Problems, die auch alle besonderen Fälle, wie die Pendelbewegung usf. umfaßt. Denn nachdem $\mathfrak{s}_1$ als Funktion der

Zeit dargestellt ist und die in der Lösung auftretenden beiden Integrationskonstanten aus den Bedingungen ermittelt sind, daß zur Zeit $t = 0$ sowohl $\mathfrak{s}_1$ als $\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}$ gegeben sind, kennt man nach den Gleichungen (160) und (161) auch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ vollständig und damit auch den weiteren Verlauf der Bewegung in allen Einzelheiten.

Auch die Bewegung des kräftefreien Kreisels wird durch diese Theorie mit umfaßt. Man braucht hierzu nur in Gl. (162) $\mathfrak{Q} = 0$ zu setzen. Die in dieser Weise vereinfachte Gleichung läßt sich viel leichter integrieren als die vollständige Gl. (162). Ich gehe aber darauf jetzt nicht näher ein, weil die Lösung für den kräftefreien Kreisel vorher schon in anderer Weise abgeleitet wurde.

Die Integration von Gl. (162) wird durch zwei Umstände erschwert, zunächst dadurch, daß sie eine Vektorgleichung ist, die sich schwieriger behandeln läßt als eine Gleichung für eine richtungslose Größe und dann noch besonders dadurch, daß sie nicht linear ist. Man kann sie aber trotzdem lösen, wobei jedoch im allgemeinen Falle elliptische Funktionen auftreten. Im sechsten Bande werde ich darauf näher eingehen; hier begnüge ich mich damit, die partikuläre Lösung abzuleiten, die sich auf die reguläre Präzession des Kreisels bezieht.

§ 36. Die reguläre Präzession.

Jene Lösung der Hauptgleichung, Gl. (162), die der regulären Präzession entspricht, erhält man, indem man

$$\mathfrak{s}_1 = a_1 \mathbf{i} + a_2 \cos\varphi \mathbf{j} + a_2 \sin\varphi \mathbf{f} \qquad (163)$$

setzt. Dabei bedeuten $\mathbf{ijf}$ Einheitsvektoren in den Richtungen eines im festen Raume ruhenden rechwinkligen Koordinatensystems, dessen $\mathbf{i}$-Achse in lotrechter Richtung nach oben hin gezogen ist. Der Winkel φ ist eine von der Zeit t abhängige neue Variable, die wir nachträglich so zu bestimmen haben, daß Gl. (163) eine Lösung der Hauptgleichung bildet. Unter a_1 und a_2 sind Konstanten zu verstehen, die aber nicht unabhängig voneinander sind, sondern zwischen denen die Be-

dingung besteht

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \tag{164}$$

weil $\mathfrak{s}_1$ nur unter dieser Bedingung einen Einheitvektor darstellt. Man erkennt dies, indem man $\mathfrak{s}_1^2$ bildet.

Legt man dem Winkel φ in Gl. (163) verschiedene Werte bei, so liegen die Endpunkte aller zugehörigen $\mathfrak{s}_1$ auf einem horizontalen Kreise. Zunächst nämlich müssen diese Endpunkte alle auf der Kugelfläche vom Halbmesser Eins enthalten sein, weil $\mathfrak{s}_1^2 = 1$ ist für jeden Winkel φ. Außerdem liegen sie aber wegen des konstanten Gliedes $a_1 \mathfrak{i}$ auch alle auf einer horizontalen Ebene, die vom festen Punkte den Abstand a_1 hat. Man kann daher sagen, daß Gl. (163) die Gleichung des Kreises bildet, nach dem diese horizontale Ebene von der Einheitskugel geschnitten wird.

Durch Differentiation nach der Zeit erhält man aus Gl. (163)

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = a_2 \frac{d\varphi}{dt} (-\sin\varphi \cdot \mathfrak{j} + \cos\varphi \cdot \mathfrak{f})$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = a_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} (-\sin\varphi \cdot \mathfrak{j} + \cos\varphi \cdot \mathfrak{f}) - a_2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (\cos\varphi \cdot \mathfrak{j} + \sin\varphi \cdot \mathfrak{f}).$$

Diese Werte setzen wir jetzt in Gl. (162) ein, um uns zu überzeugen, ob die Gleichung durch eine passende Wahl von φ befriedigt werden kann. An Stelle von $\mathfrak{Q}$ schreiben wir dabei, mit Rücksicht auf die inzwischen für $\mathfrak{i}$ getroffene Wahl

$$\mathfrak{Q} = -Q\mathfrak{i},$$

verstehen also unter Q den Absolutwert des Gewichtes $\mathfrak{Q}$. Die in Gl. (162) vorkommenden Vektorprodukte können leicht nach der gewöhnlichen Vorschrift (siehe Band I, Gl. (53), S. 94 d. 3. Aufl.) gebildet werden. Führt man die Rechnung durch, so erhält man zunächst

$$a_2 \Theta_2 \left\{ \mathfrak{i} a_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathfrak{j} a_1 \left(-\cos\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{f} a_1 \left(-\sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \cos\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) \right\} +$$

$$u_1 \Theta_1 a_2 \frac{d\varphi}{dt} (\mathfrak{j} \sin\varphi - \mathfrak{f} \cos\varphi) + s Q a_2 (\mathfrak{j} \sin\varphi - \mathfrak{f} \cos\varphi) = 0.$$

Faßt man die Glieder in anderer Weise zusammen, so läßt sich die Gleichung schreiben

$$\Theta_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}(\mathfrak{i}a_2 - \mathfrak{j}a_1\cos\varphi - \mathfrak{k}a_1\sin\varphi) +$$
$$+ \left(a_1\Theta_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + u_1\Theta_1\frac{d\varphi}{dt} + sQ\right)(\mathfrak{j}\sin\varphi - \mathfrak{k}\cos\varphi) = 0.$$

Die linke Seite ist damit in eine geometrische Summe aus zwei Gliedern von verschiedener Richtung zerlegt. Das zweite Glied ist wegen Fehlens von $\mathfrak{i}$ horizontal gerichtet, das erste dagegen nicht. Damit die geometrische Summe zu Null wird, muß daher jedes Glied für sich jederzeit gleich Null sein. Die Gleichung zerfällt daher in die beiden folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0, \\ a_1\Theta_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + u_1\Theta_1\frac{d\varphi}{dt} + sQ &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = w,$$

wenn wir die Integrationskonstante mit w bezeichnen. Die Bedeutung von w folgt aus dem Ansatze in Gl. (163); es gibt die Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich die horizontale Komponente von $\mathfrak{s}_1$ dreht, also die Winkelgeschwindigkeit der Präzession. Wir erkennen daraus, daß die Lösung in Gl. (163) eine konstante Winkelgeschwindigkeit der Präzession verlangt.

Die zweite der Gleichungen (165) geht hiermit über in

$$a_1\Theta_2 w^2 + u_1\Theta_1 w + sQ = 0. \tag{166}$$

Wenn wir w so wählen, daß diese Gleichung befriedigt ist, erfüllt auch Gl. (163) die Hauptgleichung und wir sind damit zu einer möglichen Art der Kreiselbewegung gelangt, die auch tatsächlich eintritt, wenn die Anfangsbewegung damit übereinstimmte. Die Auflösung nach w liefert

$$w = -\frac{u_1\Theta_1}{2a_1\Theta_2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_1\Theta_1}{2a_1\Theta_2}\right)^2 - \frac{sQ}{a_1\Theta_2}}. \tag{167}$$

Man erhält immer zwei reelle Wurzeln, wenn a_1 negativ

ist, d. h. wenn der Schwerpunkt bei der durch Gl. (163) dargestellten Bewegung unterhalb des festen Punktes liegt. Gewöhnlich denkt man aber bei der Kreiselbewegung an den Fall, daß der Schwerpunkt höher liegt, als der Unterstützungspunkt. In diesem Falle muß

$$\left(\frac{u_1 \Theta_1}{2 a_1 \Theta_2}\right)^2 \geqq \frac{s Q}{a_1 \Theta_2}$$

sein, damit die betrachtete Bewegung möglich ist. In anderer Form läßt sich die Bedingung schreiben

$$u_1^2 \geqq \frac{4 a_1 Q s \Theta_2}{\Theta_1^2}. \tag{168}$$

Der Kreisel muß also mindestens so schnell rotieren, daß die Winkelgeschwindigkeits-Komponente u_1 dieser Bedingung genügt; anderenfalls ist die Bewegung in dieser Form nicht möglich.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit sehr groß ist, hat man nach Gl. (167) zwei verschiedene Werte von w, von denen der eine, der dem positiven Wurzelvorzeichen entspricht, sehr klein gegenüber dem anderen ist. Es sind dann bei gegebenen a_1 zwei verschiedene Arten der regulären Präzession möglich, die man als „langsame“ und „schnelle“ Präzession bezeichnet. Wodurch sich beide Fälle im übrigen voneinander unterscheiden, erkennt man durch Bildung der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, indem man $\mathfrak{s}_1$ aus Gl. (163) in Gl. (160) einsetzt. Man findet dann

$$\mathfrak{u} = u_1 (\mathfrak{i} a_1 + \mathfrak{j} \cdot a_2 \cos\varphi + \mathfrak{k} a_2 \sin\varphi) +$$
$$+ a_2 w (-\mathfrak{i} a_2 + \mathfrak{j} a_1 \cos\varphi + \mathfrak{k} a_1 \sin\varphi).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (164) läßt sich das aber auch in die Form

$$\mathfrak{u} = (u_1 + a_1 w)\, \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{i} w \tag{169}$$

bringen. Bei der langsamen Präzession des schnell rotierenden Kreisels ist w klein gegen u_1 und daher fällt die Richtung von $\mathfrak{u}$ nahezu mit der Richtung von $\mathfrak{s}_1$, d. h. mit der Kreiselachse zusammen. Bei der schnellen Präzession ist dagegen, wie aus Gl. 167 hervorgeht, w von gleicher Größenordnung mit u_1 (wenigstens wenn sich Θ_1 und Θ_2 nicht zu viel von-

einander unterscheiden) oder auch noch größer und die Richtung von $\mathfrak{u}$ weicht dann erheblich von der Richtung der Kreiselachse ab. Für den Fall des Kugelkreisels, also für $\Theta_1 = \Theta_2$ wird nach Gl. (167) bei der schnellen Präzession $a_1 w$ nahezu gleich $-u_1$ und daher muß, damit diese Bewegung erfolgen kann, $\mathfrak{u}$ nach Gl. (169) nahezu in die Lotrichtung fallen.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß man auch die allgemeine Lösung des Kreiselproblems aus dem Ansatze in Gl. (163) erhalten kann, wenn man die Konstante a_1 durch eine von t abhängige Variable x ersetzt. Es zeigt sich dann, daß x einer Differentialgleichung genügen muß, die man mit Hilfe von elliptischen Funktionen integrieren kann. Im sechsten Bande werde ich das näher besprechen.

§ 37. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis.

Für die praktische Technik hatte die Theorie des Kreisels lange Zeit hindurch nur eine sehr geringe Bedeutung. Das hing mit den verhältnismäßig geringen Winkelgeschwindigkeiten zusammen, die in den älteren, langsam laufenden Maschinen allein vorkamen. Als erst durch die Elektrotechnik und später noch mehr durch die Entwicklung der Dampfturbine viel schneller laufende Maschinen zur Anwendung kamen, gewann aber die Kreiseltheorie, oder allgemeiner gesagt, die Dynamik sehr schnell rotierender Körper immer mehr an Bedeutung.

Und zwar nach zwei Richtungen hin. Einerseits nämlich war es möglich, als man sehr schnell umlaufende Schwungräder herzustellen und in Gang zu halten verstand, die besonderen Eigenschaften der Kreiselbewegung unmittelbar praktisch nutzbar zu machen. Das bekannteste Beispiel dafür ist der Schlicksche Schiffskreisel, dessen Theorie ich im sechsten Bande ausführlich darzustellen beabsichtige. Andererseits aber traten, auch ohne daß man es beabsichtigt hatte, an den schnell umlaufenden Maschinen Erscheinungen auf, die man in kurzer Zusammenfassung als Kreiselwirkungen bezeichnen kann. Man wurde dadurch genötigt, sich mit der Kreiseltheorie zu beschäftigen,

um sich über diese Erscheinungen Rechenschaft geben und schädliche Folgen davon vermeiden zu können.

Nun sind freilich die Bedingungen, unter denen diese Kreiselwirkungen auftreten, von sehr verschiedener Art, so daß man nur selten die Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen ohne jede Änderung zu ihrer Erklärung verwenden kann. Aber trotz aller Unterschiede im einzelnen bleibt doch das Verfahren, das dabei eingeschlagen wurde, auch in allen anderen Fällen anwendbar. Wer sich ein Urteil über einen verwickelten Bewegungsvorgang dieser Art bilden will, wird daher vor allem danach trachten müssen, ein klares Verständnis für die unter den einfacheren Verhältnissen, die in den vorhergehenden Paragraphen vorausgesetzt wurden, zu erwartenden Bewegungserscheinungen zu gewinnen. Er wird dadurch namentlich auch in den Stand gesetzt sein, in solchen Fällen, bei denen die Rechnung zu schwierig würde oder überhaupt versagt, wenigstens eine ungefähr zutreffende Schätzung vorzunehmen, womit der Praxis oft schon vollständig gedient ist.

Zur Kreiseltheorie im weiteren Sinne gehört auch eine sehr einfache Betrachtung, die sich auf die Drehung eines Schwungrades aus seiner Ebene heraus bezieht und von der man öfters mit Nutzen Gebrauch machen kann. Ich werde sie daher zunächst besprechen. Ein Ring sitze auf einer schnell rotierenden Welle und das Gestell, in dem die Welle gelagert ist, möge vergleichsweise langsam irgendeine vorgeschriebene Bewegung ausführen. Man denke etwa an einen solchen Schwungring, der auf einer Lokomotive angebracht sein mag. Wenn die Lokomotive eine Kurve durchfährt, wird die Ebene des Schwungrings langsam gedreht. Die daneben stattfindende Translation ist hierbei gleichgültig und der Einfachheit halber wollen wir deshalb ganz von ihr absehen.

In Abb. 36 ist der Schwungring in seiner Anfangslage durch ausgezogene Striche angegeben. Die horizontale Welle, auf der er sitzt, möge durch eine Bewegung des Fahrzeugs genötigt werden, in einer gewissen Zeit t in die durch punktierte Linien angegebene neue Lage einzurücken. Natürlich

müssen, um diese Bewegung zu erzwingen, Kräfte von dem Fahrzeuge auf die Welle und durch deren Vermittlung auf das Schwungrad übertragen werden. Unter Umständen können diese sehr groß werden, so daß sie bei ungenügender Festigkeit zu einer Zerstörung der Welle oder zu einem Herausschleudern der Welle aus den Lagern zu führen vermöchten; jedenfalls wird man sich daher Rechenschaft darüber zu geben haben, von welcher Art diese Kräfte sind und wie groß sie sind.

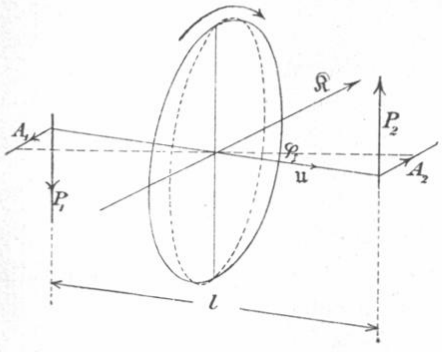

Abb. 36.

Von dem Schwungrad nehme ich an, daß es richtig ausgeglichen und genau auf die Welle aufgekeilt sei, so daß bei stillstehendem Fahrzeuge nur eine Bewegung um eine freie Achse in Frage kommt. Die Lager der Welle haben dann nur das Gewicht und etwaige sonstige Belastungen aufzunehmen, genau so, als wenn der Schwungring ebenfalls in Ruhe wäre. Diese Auflagerkräfte werden auch später noch neben den anderen, die wir suchen, weiter bestehen; sie sind aber verhältnismäßig gering und es soll deshalb weiterhin nicht ausdrücklich von ihnen die Rede sein, vielmehr soll das Schwungrad so behandelt werden, als wenn es gewichtslos (aber nicht masselos) wäre.

Um die angegebene Drehung um die lotrechte Achse auszuführen, wird man natürlich zunächst einmal ein Kräftepaar anbringen müssen, das diese Drehung auch bei dem ruhenden Schwungringe zustande brächte. Um den Schwungring in die neue Lage überzuführen, müssen wir ihn um die lotrechte Achse drehen, ihm also eine vertikale Winkelgeschwindigkeit erteilen. Dies kann etwa durch das in Abb. 36 mit A_1 A_2 bezeichnete Kräftepaar geschehen. Wenn der Schwungring während der Drehung des Fahrzeuges nicht rotierte, wäre von

den Lagern nur einfach dieses Kräftepaar auf die Welle zu übertragen. Sobald aber der Schwungring schnell umläuft, tritt dazu ein anderes von weit größerem Betrage. Der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entspricht nämlich ein Drall $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u}\Theta,$$

und um diesen um einen Winkel φ zu drehen, muß nach dem Flächensatze ein Drehimpuls $\mathfrak{K}t$ aufgewendet werden, der nach den früher gegebenen Anleitungen leicht zu

$$Kt = \varphi u \Theta$$

berechnet werden kann. Wenn man also die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Wenden des Fahrzeuges erfolgt, mit w bezeichnet, erhält man

$$K = u\Theta w, \tag{170}$$

und bei großem u und Θ kann dies selbst für kleine Werte von w schon sehr beträchtlich werden. Die Richtung des jetzt der Größe nach berechneten Moments $\mathfrak{K}$ folgt ebenfalls daraus, daß $\mathfrak{B}$ durch geometrische Summierung von $\mathfrak{K}t$ in den neuen Wert übergeht. In die Abbildung ist der Pfeil von $\mathfrak{K}$ eingetragen. Dieses Moment $\mathfrak{K}$ kann von den Lagern nur in Form eines Kräftepaars übertragen werden, so daß jedes der beiden Lager eine Kraft des Paares überträgt. Auch diese mit $P_1 P_2$ bezeichneten Auflagerkräfte sind in Abb. 36 eingetragen worden; die Pfeile ergeben sich aus den früheren Festsetzungen über den Zusammenhang des Drehsinnes eines Kräftepaares mit dem Pfeile des dazu gehörigen Momentenvektors. Daß die beiden Auflagerkräfte $P_1 P_2$ wirklich von gleicher Größe sein müssen, folgt übrigens einfach daraus, daß sich der Schwerpunkt des ganzen Systems nicht in vertikaler Richtung verschiebt. Wenn man die Länge der Welle mit l bezeichnet, hat man für jede dieser Kräfte

$$P_1 = P_2 = \frac{u\Theta w}{l}.$$

Wir sprachen bisher von den Kräften, die vom Gestelle auf die Welle und den Schwungring übertragen werden. Am Fahrzeuge selbst kommen die Reaktionen dieser Kräfte in Be-

tracht; wenn wir die Beanspruchung des Fahrzeugs durch diese Auflagerkräfte untersuchen wollen, müssen wir daher die Pfeile umkehren. Wir sehen daraus, daß das Fahrzeug am linken Lager der Welle (in der Abbildung) gehoben, am anderen niedergedrückt wird. Unter Umständen kann es dadurch vollständig umgeworfen werden.

Natürlich kann man von dieser Betrachtung auch unmittelbar Gebrauch machen, um die Abänderung in der senkrechten Komponente des Raddrucks zu berechnen, die infolge der Umdrehung der Räder beim Fahren eines Eisenbahnfahrzeugs in einer Kurve zustande kommt, denn daß hier zwei Räder auf einer Achse sitzen, während bisher nur von einem Schwungringe die Rede war, macht offenbar nichts aus. Man bezeichne den Halbmesser des Radumfangs mit r, die Fahrgeschwindigkeit des Eisenbahnzugs mit v, den Krümmungshalbmesser des Geleises mit R, so wird

$$u = \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad w = \frac{v}{R},$$

also

$$P_1 = P_2 = \frac{v^2 \Theta}{Rrl}.$$

Unter Θ ist jetzt das doppelte vom Trägheitsmomente eines einzelnen Rades zu verstehen, unter l die Spurweite. Betrachtet man zum Zwecke einer Abschätzung ein Rad nur als einfachen Reifen vom Radius r und vom Gewichte Q, so kann näherungsweise (aber sicher etwas zu groß) $\Theta = 2\frac{Q}{g}r^2$ gesetzt werden und die vorige Gleichung geht damit über in

$$P_1 = P_2 = Q \cdot \frac{2v^2 r}{gRl}.$$

Wenn v so groß wird, daß der als Faktor von Q auftretende Bruch gleich Eins wird, sinkt der Raddruck auf der nach innen hin gelegenen Schiene um das ganze Gewicht eines Rades. Eine allein auf dem Geleise dahinrollende, mit zwei aufgekeilten Rädern versehene Achse müßte bei Überschreitung der angegebenen Geschwindigkeit entgleisen.

Setzt man etwa $r = 1$ m (Lokomotivräder sind zuweilen so hoch), $R = 200$ m (scharfe Kurve, wie sie aber bei Weichen usf. vorkommt) und $l = 1{,}435$ m (Normalspur der Haupteisenbahnen), so erhält man für die fragliche Geschwindigkeit

$$v = 37{,}5 \text{ m sec}^{-1}.$$

Ein Rad, das ganz besonders schnell umläuft, ist das Laufrad einer Lavalschen Dampfturbine. Man denke sich eine solche auf einem Schiffe montiert und das Schiff möge die schaukelnden Bewegungen ausführen, die bei einem heftigen Sturme eintreten können. Wenn die Welle der Lavalschen Turbine steif konstruiert wäre, müßte sie nach Gl. (170) ein sehr erhebliches Kräftepaar K übertragen, um das Rad aus seiner Rotationsebene abzulenken, denn hier ist nicht nur u ungewöhnlich groß, sondern auch w, die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schiff seine pendelnde Bewegung ausführt, ist nicht allzu klein. Um ein Zahlenbeispiel anzuführen, setze man etwa $u = 2000$ sec^{-1} (entsprechend etwa 19000 Touren in der Minute), $w = 0{,}2$ sec^{-1}, das Gewicht des Laufrads gleich 100 kg und den Trägheitsradius gleich 0,2 m. Dann wird der Drall des Laufrads gleich 815 mkg sec und nach Gl. (170)

$$K = 163 \text{ mkg}.$$

Das Kräftepaar wirkt verbiegend auf die Welle. Die Welle ist aber so dünn konstruiert, daß sie sich schon bei kleinen Biegungsmomenten ziemlich stark verbiegt. Deshalb folgt die Rotationsebene des Rades nur zum Teile den Schwingungen des Schiffskörpers. Wenn die Welle ganz biegsam wäre, würde sich die Rotationsebene des Rades überhaupt nicht verrücken; sie würde im Raume feststehen und die durch die Schwingungen des Schiffes hervorgerufenen relativen Bewegungen würden in den Verbiegungen der Welle allein zum Ausdrucke kommen. Auch über die der pseudoregulären Präzession des Kreisels verwandten Bewegungserscheinungen, die das Laufrad zeigt, wenn der Schiffskörper etwa einfache Sinusschwingungen ausführt, vermag man sich leicht ungefähre Rechenschaft zu geben, falls man aus hinreichenden Angaben über die Stärke der

Welle, den Elastizitätsmodul und die Entfernungen des Rades von den Lagern die elastische Verbiegung der Welle für ein Biegungsmoment $K = 1$ mkg nach den Sätzen der Festigkeitslehre zuvor berechnet hat.

Bei dem eben besprochenen Beispiele konnte die Masse des Laufrades als so gering gegenüber dem schwingenden Schiffskörper angesehen werden, daß man auf die Rückwirkung, die es auf diesen ausübt, nicht zu achten brauchte. Unter anderen Umständen kann dies aber nötig werden; man muß sich dann erinnern, daß das von dem rotierenden Rade auf das Fahrzeug ausgeübte Kräftepaar dieses nicht im Sinne der Hauptdrehung, die das Rad ausführt, sondern um eine rechtwinklig dazu stehende Achse zu drehen sucht. Es wird nicht nötig sein, dies noch weiter auszuführen, da schon bei dem Beispiele des Schwungrings auf der Lokomotive darauf eingegangen wurde. Dagegen mag wenigstens erwähnt werden, daß man durch eine pendelnde Aufhängung des Schwungrads, wie sie beim Schlickschen Schiffskreisel vorkommt, eine Rückwirkung des Schwungrades auf das Schiff herbeizuführen vermag, die hemmend auf die Schiffsschwingungen einwirkt.

Ein ferneres Beispiel für Betrachtungen dieser Art bildet der Bumerang. Auf dessen Beschreibung selbst will ich hier zwar nicht eingehen, sondern ihn durch ein einfacheres Beispiel ersetzen, bei dem der Bewegungsvorgang im wesentlichen der gleiche ist. Man denke sich eine Scheibe (den Diskus der Alten) fortgeworfen, indem man ihr zugleich eine schnelle Drehung um die auf der Scheibenebene senkrechte Figurenachse erteilt. Wenn der Wurf durch den luftleeren Raum erfolgte, würde der Schwerpunkt der Scheibe einfach eine Parabel beschreiben und die Rotationsachse, die eine freie Achse ist, behielte unverändert ihre Richtung im Raume; die Scheibenebene würde also stets der Anfangslage parallel bleiben. Im lufterfüllten Raume kann aber die Bewegung nicht in dieser Weise erfolgen. Der Luftwiderstand wird sehr groß, sobald die Scheibenebene nicht mehr parallel zur Bewegungsrichtung ist. Wie sich der Luftwiderstand im vorliegenden

Falle im einzelnen verteilt, ist freilich schwer zu sagen; wir wollen es aber, um nicht in eine Erörterung darüber eintreten zu müssen, als ausgemacht ansehen, daß er sich jedenfalls in solcher Weise geltend macht, daß ein merkliches Heraustreten der Scheibenebene aus der Bewegungsrichtung durch ihn verhütet wird. Außerdem wird eine merkliche Änderung des Dralls $\mathfrak{B}$ der sehr schnell rotierenden Scheibe sobald nicht zu erwarten sein. Dann kann sich die Scheibe nahezu nur innerhalb der Ebene bewegen, die durch die Anfangslage der Scheibe gegeben ist. Der Bewegungsvorgang ist demnach ungefähr derselbe, als wenn die unterhalb an die Scheibenfläche angrenzende Luft sich wie eine starre schiefe Ebene verhielte, die sich jeder Bewegung rechtwinklig zu ihr widersetzte. An Stelle der in einer lotrechten Ebene liegenden gewöhnlichen Wurfparabel muß jetzt der Schwerpunkt der Scheibe eine in der ursprünglichen Scheibenebene liegende Bahn beschreiben. Wenn er sich anfänglich senkrecht zur Horizontalspur der Scheibenebene nach oben hin bewegte, wird er sich in dieser schief nach aufwärts gehenden geraden Linie bis zu einem höchsten Punkte hin bewegen und nachdem er diesen erreicht hat, dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung zurück durchlaufen und so zum Ausgangspunkte zurückkehren. Wirft man die Scheibe in horizontaler Richtung, so wird sie nahezu in gerader horizontaler Richtung weiterfliegen, und wenn die vorausgehenden Betrachtungen streng anwendbar wären, müßte sie, allen Fallgesetzen zum Trotze, beliebig weit fortfliegen können, ohne zu sinken. Das ist natürlich nicht genau richtig; man wird sich aber erinnern, daß geschickte Taschenspieler in ihren Vorstellungen gelegentlich Spielkarten mit großer Kunstfertigkeit so hinausschleudern, daß sie in der Tat weite Strecken durcheilen, ohne in gewohnter Weise aus der Wurfrichtung abgelenkt zu werden und das, was ich vorher auseinandersetzte, gibt wenigstens eine ungefähre Erklärung des Vorganges, der dem beim Werfen des Bumerangs gleicht.

Auch die bekannte seitliche Ablenkung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen Wurfgeschosse

gehört hierher. Der Luftwiderstand spielt hier nur eine andere Rolle. Wir wollen uns davon summarisch in folgender Weise Rechenschaft geben. In Abb. 37 sei AB ein Teil der Bahn des Schwerpunktes S. Wenn kein Luftwiderstand wirkte, hätte die Rotationsachse ihre ursprüngliche Richtung beibehalten und die Granate würde etwa die in Abb. 37 gezeichnete Stellung einnehmen. Der Luftwiderstand, dem sie in dieser Lage begegnet, sei etwa durch $\mathfrak{W}$ angegeben. Es kommt dann wesentlich darauf an, wie der Schwerpunkt S gegen die Richtungslinie von $\mathfrak{W}$ liegt. Liegt er oberhalb, wie in der Figur, so gehört zu $\mathfrak{W}$ ein statisches Moment $\mathfrak{K}$, das eine Drehung der Granate in die Richtung der Flugbahn herbeizuführen sucht. Diese Drehung setzt sich aber mit jener zusammen, die die Granate schon um ihre Längsachse ausführte. Der Erfolg wird, wie in den früheren analogen Fällen, zunächst darin bestehen, daß sich $\mathfrak{B}$ und mit ihm $\mathfrak{u}$ und die Figurenachse aus der Ebene der Flugbahn etwas herausdrehen. Auch der Sinn dieser Ablenkung ist leicht festzustellen. Wenn das Geschütz mit Linksdrall versehen ist, haben wir $\mathfrak{u}$ vom Schwerpunkte aus nach oben hin abzutragen und $\mathfrak{B}$ ist mit ihm gleichgerichtet. Das Moment von $\mathfrak{W}$ dreht in der Abbildung im Sinne des Uhrzeigers und der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ geht daher vom Zeichenblatte aus nach dem Beschauer hin. Vereinigen wir nun $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}t$, so erhalten wir eine Richtung, die nach vorn hin (d. h. nach dem Beschauer hin) etwas geneigt ist. Das vordere Ende der Granate zeigt daher auch nach dieser Richtung. Sobald das Geschoß im Grundrisse ein wenig schräg gestellt ist, erfährt es auf der vorausgehenden Seite einen größeren Luftwiderstand, als auf der ein wenig nach hinten zu gedrehten. Es wird dadurch seitlich abgelenkt, und zwar vom Geschütz aus gesehen nach rechts hin (bei Rechtsdrall nach links hin). Gerade die nun im Grundrisse etwas exzentrische Angriffslinie des Winddrucks bringt dann ein statisches Moment hervor,

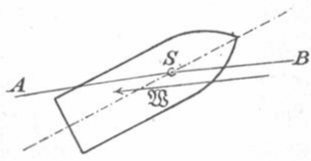

Abb. 37.

das die Geschoßachse in die Richtung der Flugbahn dreht. — Natürlich soll diese Betrachtung nur eine ungefähre Vorstellung geben; im einzelnen sind die pendelnden Bewegungen des Geschosses sehr verwickelt. Außerdem ist auch darauf zu achten, daß die Seitenablenkung nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wenn der Schwerpunkt S in Abb. 37 unterhalb von $\mathfrak{W}$ liegt. Bei den gewöhnlich verwendeten Geschoßformen scheint dies übrigens in der Regel der Fall zu sein.

Eng verwandt mit der Kreiselbewegung ist auch die Bewegung eines rollenden Rades. Die strenge Theorie dieser Bewegung ist freilich noch erheblich schwieriger, als wenigstens die Theorie des symmetrischen Kreises, und zwar namentlich deshalb, weil das auf einen Umfangspunkt des Rades bezogene Trägheitsellipsoid ein dreiachsiges ist. Das hindert aber nicht, den Bewegungsvorgang wenigstens schätzungsweise mit Hilfe einfacher Betrachtungen so weit zu verfolgen, als es für eine erste Übersicht wünschenswert erscheint. Dabei soll sich das Rad nur unter dem Einflusse seines Gewichtes bewegen und auf dem horizontalen Fußboden nur rollen und nicht gleiten.

Den Umfang des Radreifs denke ich mir etwas gewölbt, so daß das Rad — abgesehen von der elastischen Abplattung, die dabei entsteht — den Boden immer in einem Punkte berührt. Der Punkt, mit dem es im gegebenen Augenblicke auf dem Boden aufsitzt, möge als der Auflagerpunkt bezeichnet werden. Damit das Rad rollt, ohne zu gleiten, muß der Auflagerpunkt in augenblicklicher Ruhe sein, d. h. die Bewegung des Rades aus einer Lage in die folgende kann immer nur in einer Drehung um eine durch den Auflagerpunkt gezogene Achse bestehen. Die Richtung dieser Achse kann beliebig sein. In Abb. 38, die das Rad in irgendeiner seiner Stellungen an-

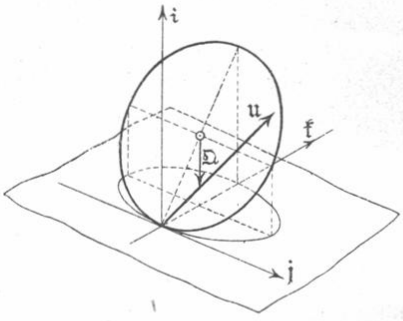

Abb. 38.

gibt, ist die Richtung der Drehachse und die Größe der Winkelgeschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{u}$ angegeben. Geschwindigkeiten kann man zerlegen wie Kräfte. Man tut hier am besten daran, $\mathfrak{u}$ nach drei zueinander rechtwinkligen Richtungen zu zerlegen, die in Abb. 38 durch die Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ kenntlich gemacht sind. Die $\mathfrak{i}$-Richtung steht senkrecht zum Fußboden, die $\mathfrak{j}$-Richtung fällt mit der Horizontalspur der Radebene zusammen und die $\mathfrak{k}$-Richtung ist schon durch die beiden vorigen mit bestimmt.

Die augenblickliche Bewegung des Rades kann man sich stets aus einem Zusammenwirken von Drehungen um die genannten Hauptrichtungen bestehend denken. Es wird daher nützlich sein, wenn man zunächst nur die Drehungen um jede der drei Hauptrichtungen für sich betrachtet. Zunächst möge das Rad nur eine Drehung um die $\mathfrak{i}$-Achse besitzen. Der Auflagerpunkt bleibt dann dauernd an seiner Stelle und das Rad kann einfach als ein dreiachsiger Kreisel aufgefaßt werden, der eine Präzessionsbewegung ausführt. Auch eine reguläre Präzession ist unter diesen Umständen möglich, und zwar so, daß jedem Neigungswinkel der Radebene gegen den Fußboden eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Achse entspricht, die zu einer regulären Präzession führt. Ich erinnere nur an das bekannte Experiment, bei dem man einen Taler auf einem Tische in dieser Weise rotieren läßt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit abnimmt, neigt sich der Taler immer mehr. Auch rechnerisch läßt sich der Zusammenhang zwischen Neigungswinkel und Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Achse leicht verfolgen; ich sehe aber hier davon ab.

Drehungen um die $\mathfrak{j}$-Achse sind als Pendelbewegungen aufzufassen; volle Pendelschwingungen können hier freilich nicht zustande kommen, die Bewegung endet vielmehr mit dem Umfallen des Rades auf den Fußboden. Überdies ist auch zu beachten, daß schon vor dem vollständigen Umfallen ein Gleiten des Rades auf dem Boden zu erwarten ist. Auch darüber kann man sich ohne Schwierigkeit Rechenschaft geben; am einfachsten wendet man dazu das d'Alembertsche Prinzip

an. Man betrachtet das fallende Rad in irgendeiner seiner Stellungen, führt die Trägheitskräfte ein und ermittelt nach der Lehre vom Gleichgewichte eines starren Körpers den im Auflagerpunkte übertragenen Druck. Solange die Richtung des Auflagerdrucks noch innerhalb des Reibungskegels liegt, tritt kein Abgleiten ein; die Bewegung setzt sich vielmehr einstweilen noch so wie eine Pendelschwingung fort. Gegen das Ende der Bewegung hin wird man aber die Bedingung nicht mehr erfüllt finden und dann gleitet der Auflagerpunkt über den Fußboden.

Die beiden bis jetzt betrachteten Drehungen führen überhaupt nicht zu einem Rollen des Rades; dieses wird nur durch die Drehung um die **f**-Achse bewirkt. Freilich kann von einer dauernden Drehung um eine festliegende **f**-Achse hier nicht die Rede sein; die Drehung führt sofort zu einem Wechsel des Auflagerpunktes und die **f**-Achse kann daher nur als Momentanachse in Betracht kommen. Wir können uns aber eine Bewegung vorstellen, bei der in jeder neuen Lage des Rades die nach der gegebenen Vorschrift stets von neuem konstruierte Richtung der **f**-Achse die augenblickliche Drehungsachse angibt. Eine solche Bewegung mag als eine rein rollende bezeichnet werden; im Gegensatze zu ihr kann die Drehung um die **i**-Achse als eine Wendung und die Drehung um die **j**-Achse als eine Fallbewegung des Rades bezeichnet werden, wobei im letzten Falle nicht ausgeschlosssen ist, daß sie im gegebenen Augenblicke auch nach oben hin erfolgt.

Im allgemeinen Falle bestehen alle drei Bewegungskomponenten zugleich und sie beeinflussen sich gegenseitig. Ein besonderes Interesse kann aber die rein rollende Bewegung, die sich leicht theoretisch behandeln läßt, immerhin beanspruchen. Um sie zu untersuchen, denke man sich eine Senkrechte zur Radebene vom Radmittelpunkte aus gezogen. Sie trifft den Fußboden auf der **f**-Achse. Vom Schnittpunkte aus als Spitze denke man sich einen Kegel konstruiert, dessen Grundlinie der Radumfang ist und der mit dem Rade fest

verbunden sein mag. Dann muß die Kegelspitze während der rollenden Bewegung des Rades dauernd in Ruhe bleiben, da sie in jedem Augenblicke auf der $\mathfrak{k}$-Achse, also auf der Momentanachse enthalten ist. Wir können daher die Bewegung geradezu durch das Rollen des Kegels auf der Bodenfläche beschreiben, d. h. der Kegel bildet in Anlehnung an die früher eingeführten Bezeichnungen den Polodiekegel für die Bewegung um die als festen Punkt anzusehende Kegelspitze. Der Herpolodiekegel ist hier in eine ebene Fläche, nämlich in die Oberfläche des Bodens ausgeartet.

Von äußeren Kräften wirken auf das Rad das Gewicht und der Auflagerdruck. Die senkrechte Komponente des Auflagerdrucks muß dem Gewichte gleich sein, da der Schwerpunkt des Rades Geschwindigkeitskomponenten in senkrechter Richtung weder besitzt noch erlangt. Daneben muß freilich zugleich eine Horizontalkomponente des Auflagerdrucks auftreten, die die Zentripetalkraft für die vom Schwerpunkte ausgeführte kreisförmige Bewegung abgibt. Die Horizontalkomponente geht hiernach in jedem Augenblicke durch die Kegelspitze, und wenn wir den Flächensatz für die Kegelspitze als Momentenpunkt anwenden ist ihr Moment stets gleich Null.

Man sieht jetzt leicht, wie die Rechnung durchzuführen ist. Wenn das Rad im Anfangszustande gegeben ist, kennt man sofort die Kegelspitze, die von ihm bei der rein rollenden Bewegung umkreist wird. Man konstruiere nun das Trägheitsellipsoid für die Kegelspitze als festen Punkt. Mit dessen Hilfe findet man in schon oft benutzter Weise die Richtung des Dralls $\mathfrak{B}$, bezogen auf den festen Punkt. Das Moment $\mathfrak{K}$ der äußeren Kräfte ist ebenfalls bekannt; es ist das statische Moment des aus dem Gewichte und der senkrechten Komponente des Auflagerdrucks bestehenden Kräftepaares. Beim Weiterrollen des Rades dreht sich mit ihm sowohl $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{K}$, die stets rechtwinklig zueinander bleiben. Die Größe von $\mathfrak{K}$ ist nur von der Neigung der Radebene gegen den Fußboden, die absolute Größe von $\mathfrak{B}$ aber zugleich von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig. Wie groß aber diese Anfangs-

geschwindigkeit sein muß, damit bei der gegebenen Neigung des Rades eine rein rollende Bewegung zustande kommen kann, folgt aus der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Auf die wirkliche Durchführung der Rechnung, die nach dem angegebenen Plane leicht erfolgen kann, gehe ich nicht ein. Dagegen mache ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam, daß die rein rollende Bewegung nur bei einer ganz bestimmten Beziehung zwischen der Schiefstellung des Rades gegen die Vertikale und der Geschwindigkeit der Rollbewegung möglich ist. Wenn das Rad im Anfangszustande eine rein rollende Bewegung hatte und die genannte Bedingung nicht erfüllt war, kann sie sich nicht in dieser Weise fortsetzen; es tritt vielmehr alsbald noch eine „Fallbewegung“ (nach unten oder auch nach oben hin) dazu. Dadurch wird die Neigung der Radebene gegen den Fußboden geändert, und zwar in solchem Sinne, daß eine Annäherung an jene Radstellung stattfindet, für die bei der gegebenen Fahrgeschwindigkeit die Bedingung des reinen Rollens erfüllt ist.

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß man zu einer allgemeineren Theorie der Radbewegung dadurch gelangen kann, daß man zwar immer noch die „Wendebewegung“ um die $\mathfrak{i}$-Achse ausschließt, dagegen das Auftreten von Drehungen um die $\mathfrak{j}$- und die $\mathfrak{k}$-Achse zugleich zuläßt. Diese würde sich dem allgemeinen Verhalten des Rades beim Rollen ziemlich genau anschließen, da die als Wendebewegung bezeichnete Drehung um die $\mathfrak{i}$-Achse auf eine „bohrende“ Reibung stößt und daher, wenn sie nicht schon anfänglich mit hinreichender Winkelgeschwindigkeit gegeben, also absichtlich herbeigeführt war, späterhin schnell erlischt und auch nicht von selbst wieder entstehen kann.

Sehr eng verwandt mit der vorigen ist auch die Bewegung einer Kugel auf einer rauhen horizontalen Ebene (Billardball) bei beliebigen Anfangsbedingungen. Man hat diese Bewegung schon sehr ausführlich behandelt; sie ist

aber praktisch von nur geringer Wichtigkeit und eigentlich nur für den Billardspieler, der zu einem theoretischen Verständnis der empirisch erworbenen Kunstfertigkeit gelangen möchte, von einigem Interesse. Die Bemerkung mag daher genügen, daß sich die Bewegung der rein rollenden Kugel (abgesehen von der rollenden Reibung) auf der rauhen Ebene genau so fortsetzt, als wenn die Ebene absolut glatt wäre. Wenn die Kugel durch einen Stoß in Bewegung gesetzt wird, tritt aber im allgemeinen (und namentlich wenn der Stoß ziemlich tief erfolgt) zugleich ein Gleiten ein, so lange bis durch die dabei auftretende gleitende Reibung der Bewegungszustand so weit abgeändert ist, daß die Kugel nachher nur noch rollt. So lange das Gleiten anhält, beschreibt der Schwerpunkt der Kugel im allgemeinen eine gekrümmte Bahn (unter gewissen Umständen eine Parabel), an die sich nach Aufhören des Gleitens eine gerade Bahn schließt.

§ 38. Ebene Bewegungen des starren Körpers.

Bisher war in diesem Abschnitte nur von der Bewegung eines starren Körpers im dreifach ausgedehnten Raum die Rede. Davon wird natürlich die ebene Bewegung, bei der alle Punkte Bahnen beschreiben, die zu einer gegebenen Ebene parallel sind, als Sonderfall mit umfaßt. Dieser Sonderfall verdient aber doch auch noch eine besondere Besprechung, zunächst weil er sehr häufig vorkommt und dann weil sich die allgemeinen Betrachtungen bei ihm sehr vereinfachen und erleichtern lassen.

Diese Vereinfachung tritt namentlich dann ein, wenn der Körper entweder eine Symmetrieebene oder wenigstens eine zum Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt gehörige Hauptträgheitsebene hat, die zur Bewegungsebene parallel ist. Die Rotationsbewegung des Körpers erfolgt dann um eine freie Achse und der zugehörige Drall fällt in dieselbe Richtung. Die Winkelgeschwindigkeit und der Drall brauchen dann nicht mehr durch Vektoren dargestellt zu werden, sondern es genügt dazu schon eine mit einem Vorzeichen versehene Zahlenangabe.

Ebenso kommt von den Trägheitsmomenten des Körpers nur das eine in Betracht, das sich auf die senkrecht zur Bewegungsebene stehende Achse bezieht. Kräfte, die in der Symmetrieebene oder in der an ihre Stelle tretenden Hauptträgheitsebene angreifen, lassen sich auf eine am Schwerpunkt angreifende Resultierende und ein Kräftepaar zurückführen, die in dieser Ebene liegen und beide können nur den Erfolg haben, daß sich die Bewegung weiter als eine ebene fortsetzt, wenn sie als solche begonnen hatte. Vom Kräftepaare folgt dies aus § 25.

Es genügt daher, wenn man sich zur Untersuchung der ebenen Bewegung den starren Körper durch eine starre Scheibe ersetzt denkt. Aber auch dieses Bild läßt sich noch weiter vereinfachen, indem man dafür zwei starr miteinander verbundene materielle Punkte setzt, deren Massen und Lagen passend gewählt sind. Hierzu erwähne ich noch, daß ein solcher Ersatz natürlich auch noch in anderer Weise möglich und auch schon vorgenommen worden ist. Aber der Ersatz durch zwei Punkte, auf den Herr Prof. Skutsch hingewiesen hat, verdient in der Regel ohne Zweifel den Vorzug.

Zunächst ist die aufgestellte Behauptung zu beweisen. Dazu dient die Bemerkung, daß sich die Bewegung eines Körpers unter dem Einflusse gegebener Kräfte vollständig auf Grund des Satzes von der Bewegung des Schwerpunkts in Verbindung mit dem Flächensatze voraussagen läßt. In den Gleichungen, die diese Sätze zum Ausdruck bringen, kommt es aber auf die besondere Gestalt und Massenverteilung überhaupt nicht an, sondern nur auf die gesamte Masse, die Lage des Schwerpunkts und auf die Gestalt des Trägheitsellipsoids. Körper, die in diesen übereinstimmen, müssen daher bei gleichem Kraftangriff auch übereinstimmende Bewegungen ausführen. Bei der ebenen Bewegung kommt es überdies, wie wir schon sahen, nur auf das Trägheitsmoment für die zur Bewegungsebene senkrechte Achse an. Es steht uns daher frei, eine beliebig gegebene Massenverteilung durch eine andere von einfacherer Art zu ersetzen, die mit der gegebenen nur in den vorher bezeichneten Stücken übereinzustimmen braucht. Wenn dann an

dieser äußere Kräfte in solcher Größe und Verteilung angebracht werden, daß die am Schwerpunkt angreifende Resultierende und das zugehörige Kräftepaar mit den am ursprünglich gegebenen Körper wirkenden übereinstimmen, müssen beide Massensysteme übereinstimmende Bewegungen ausführen.

Den gestellten Forderungen vermag man aber schon durch zwei materielle Punkte zu genügen, von denen der eine überdies noch in beliebiger Lage in der Scheibenebene angenommen werden kann, nur mit der Ausnahme, daß er nicht auf den Schwerpunkt fallen darf. Wählt man nämlich in Abb. 39, die einen Umriß der Scheibe angibt, den materiellen Punkt m_1 beliebig aus, so muß der andere auf der durch den Schwerpunkt S gezogenen Geraden zunächst so gewählt werden, daß der Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 mit S zusammenfällt. Zwischen den Abständen a_1 und a_2 (vgl. Abb. 39) und den Massen muß daher die Bedingung erfüllt sein

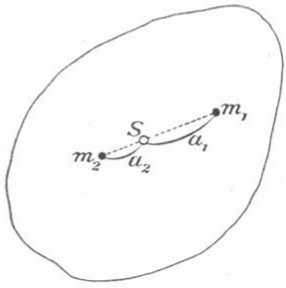

Abb. 39.

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

und außerdem, damit die Gesamtmasse in beiden Fällen dieselbe ist,

$$m_1 + m_2 = M,$$

wenn M die Scheibenmasse bedeutet. Bezeichnen wir ferner den Trägheitshalbmesser der Scheibe (bezogen auf die durch S senkrecht zur Scheibenebene gezogene Achse) mit i, so muß endlich, damit die Trägheitsmomente übereinstimmen,

$$M i^2 = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

sein. Die drei Gleichungen lassen sich nach den Unbekannten m_1, m_2 und a_2 (da a_1 beliebig gewählt war) sofort auflösen und man erhält

$$a_2 = \frac{i^2}{a_1}; \quad m_1 = \frac{M i^2}{a_1^2 + i^2}; \quad m_2 = \frac{M a_1^2}{a_1^2 + i^2}. \tag{171}$$

Das einfachste Beispiel für die Anwendung des besprochenen Verfahrens bildet das physische Pendel, das schon

in § 17 als Beispiel für die Anwendung des Prinzips von d'Alembert besprochen worden ist. Denkt man sich in Abb. 22, S. 133 eine Massenreduktion in der Art vorgenommen, daß die Masse m_1 mit dem Aufhängepunkt O zusammenfällt, während die Masse m_2 und ihr Abstand vom Schwerpunkt nach den Gleichungen (171) zu bestimmen sind, so bilden die beiden starr miteinander verbundenen Massen ein System, das dieselbe Bewegung ausführen muß, wie das physische Pendel selbst, wenn man die entsprechenden Kräfte daran wirken läßt. Von dem Eigengewicht wird dies erreicht, wenn man annimmt, daß auch den m_1 und m_2 Gewichte zukommen, die diesen Massen entsprechen. Aber auch der Auflagerdruck muß unter diesen Umständen in beiden Fällen gleich groß und gleich gerichtet sein. Ist er es nämlich, so führen beide Systeme übereinstimmende Bewegungen aus und der mit O zusammenfallende Systempunkt bleibt in beiden Fällen in Ruhe. Wollte man dagegen annehmen, daß der an m_1 als äußere Kraft angreifende Auflagerdruck in dem System der Massen m_1 und m_2 von dem vorigen verschieden wäre, so müßte dieses System auch eine andere Bewegung ausführen, und zwar so, daß sich dabei der Angriffspunkt m_1 der abgeänderten Kraft anders bewegte als zuvor, d. h. nicht in Ruhe bliebe. Wenn wir also festsetzen, daß auch in dem Systeme $m_1 m_2$ der mit O zusammenfallende materielle Punkt m_1 festgehalten sein soll, so ist dadurch schon mit bestimmt, daß auch die Auflagerkraft in diesem Systeme ebenso groß ausfallen muß, wie vorher bei dem physischen Pendel.

Man erkennt nun sofort, welchen Vorteil diese Art der Massenreduktion gewährt. Das Gewicht von m_1 wird unmittelbar vom Auflager aufgenommen und kommt nur darin zur Geltung, daß der Auflagerdruck dadurch mit bestimmt wird. Das System der m_1 und m_2 muß sich daher genau so wie ein einfaches Fadenpendel mit der Masse m_2 im Abstande $a_1 + a_2$ vom Aufhängepunkt bewegen, d. h. die reduzierte Pendellänge des physischen Pendels ist

$$l_{\text{red}} = a_1 + a_2 = s + \frac{i^2}{s} = \frac{i^2 + s^2}{s}.$$

Das stimmt mit Gl. (97), S. 136 überein, wenn man nur beachtet, daß dort der Trägheitshalbmesser i auf die Aufhängeachse, hier aber auf die Schwerpunktsachse des Körpers bezogen wurde, und daß zwischen beiden die schon aus den Untersuchungen des 3. Bandes bekannte einfache Beziehung besteht.

Diese Massenreduktion und ihre Anwendung auf das physische Pendel rührt schon von Poinsot her. Herr Skutsch, der sie von neuem aufgriff und auf ihre mannigfache Verwendbarkeit hinwies, hat in seiner kurzen Abhandlung (Sitzungsberichte d. Berliner math. Ges. v. 26. April 1905) unter anderen ein Beispiel gebracht, auf das hier noch mit wenigen Worten eingegangen werden soll. Die Aufgabe lautet: „Zwei in derselben Ebene bewegte Scheiben werden plötzlich fest miteinander verbunden; man soll die Bewegung nach der Koppelung ermitteln."

Man löst die Aufgabe, indem man jede Scheibe durch zwei Massenpunkte derart ersetzt, daß beide Punktpaare in dem Augenblicke, in dem die Verbindung der Scheiben erfolgt, miteinander zusammenfallen. Zu diesem Zwecke zieht man die Verbindungslinie beider Schwerpunkte. Auf ihren Verlängerungen nach beiden Seiten hin kann man dann leicht zwei Punkte ermitteln, deren Abstände a_1, a_2 und b_1, b_2 von den Schwerpunkten den Bedingungen $a_1 a_2 = i_1^2$ und $b_1 b_2 = i_2^2$ entsprechen, wenn i_1, i_2 die Trägheitshalbmesser der Scheiben sind. Nach diesen Punkten lassen sich dann entsprechend den Gleichungen (171) die Massen beider Scheiben verteilen und ebenso auch die gesamte Masse nach erfolgter Koppelung. Bei der Koppelung entsteht ein Stoß, durch den aber weder die Bewegungsgröße noch der Drall des ganzen Systems geändert werden können, da keine äußeren Kräfte mitwirken. Diese Bedingungen genügen, um daraus sofort die Geschwindigkeiten beider Reduktionspunkte zu berechnen, was aber jetzt nicht weiter ausgeführt werden soll.