Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Dynamik

Föppl, August

1909

Zweiter Abschnitt. Dynamik des Punkthaufens

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des Punkthaufens.

Vorbemerkung. Schon im ersten Bande dieser Vorlesungen wurde die Mechanik beliebiger Körper dadurch an die Mechanik des materiellen Punktes angeknüpft, daß wir diese Körper als Punkthaufen auffaßten. Denselben Weg müssen wir auch hier wieder einschlagen. Die Beziehungen, die zwischen den Punkten des Haufens anzunehmen sind, richten sich nach den physikalischen Eigenschaften des Körpers oder des Verbandes verschiedener Körper, mit dem wir es gerade zu tun haben, sowie nach der Genauigkeit, mit der wir dem wirklichen Verhalten im besonderen Falle Rechnung tragen wollen. Halten wir es z. B. für genügend, von der Gestaltänderung, die ein fester Körper in einem bestimmten Falle erfährt, abzusehen, so gelangen wir zu dem Bilde des starren Körpers, unter dem wir uns einen Punkthaufen von unveränderlicher Gestalt zu denken haben. In diesem Abschnitte soll aber zunächst ganz allgemein von Punkthaufen die Rede sein, die beliebigen Bedingungen unterworfen sind, und von starren Körpern, die freilich das wichtigste Anwendungsgebiet der hier anzustellenden Betrachtungen ausmachen, nur nebenher und insoweit, als es sich um die Anführung von Beispielen zur Erläuterung der vorgetragenen Lehren handelt Im folgenden Abschnitte wird erst der starre Körper ausführlich für sich behandelt werden.

§ 15. Das Prinzip von d'Alembert.

Wir betrachten einen Punkthaufen, der in beliebiger Bewegung begriffen sein soll, also so, daß sich auch seine Gestalt dabei im allgemeinen fortwährend ändert. An einem einzelnen Punkte des Haufens, auf den wir unser Augenmerk richten wollen, greifen verschiedene Kräfte an, die sich in äußere und innere einteilen lassen. Das ist schon im ersten Bande näher besprochen worden und in Übereinstimmung mit den damals gebrauchten Bezeichnungen sei $\mathfrak{P}$ die Resultierende der äußeren und $\Sigma\mathfrak{J}$ die Resultierende der inneren Kräfte. Wenn man unter m die Masse des Punktes und unter $\mathfrak{r}$ den von einem festen Anfangspunkte nach ihm gezogenen Radiusvektor versteht, hat man nach der dynamischen Grundgleichung

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \Sigma\,\mathfrak{J}, \tag{88}$$

und eine Gleichung von dieser Form gilt für jeden Punkt des Haufens.

Wir wollen uns ferner den Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt und Lage und unter Aufrechterhaltung aller übrigen Bedingungen jetzt noch ein zweites Mal gegeben denken; nur mit dem Unterschiede, daß an jedem Punkte noch eine fernere äußere Kraft $\mathfrak{H}$ willkürlich zugefügt sein soll, die nach Größe und Richtung entsprechend der Gleichung

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \tag{89}$$

gewählt ist, in der die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ so einzusetzen ist, wie sie bei der wirklichen Bewegung des ersten Punkthaufens im Augenblicke der Betrachtung gerade stattfindet.

Im zweiten Punkthaufen haben wir dann, da die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}$ unverändert beibehalten wurden, die aus der Verbindung der beiden vorhergehenden folgende Gleichung

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} + \mathfrak{H} = 0, \tag{90}$$

d. h. alle Kräfte halten sich jetzt an dem Punkte im Gleichgewichte, und zwar gilt dies für jeden Punkt des zweiten Punkthaufens.

Endlich wollen wir uns drittens noch einen starren Körper denken, der groß genug ist, um den ganzen Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt darauf abbilden zu können. Damit ist gemeint, daß jedem Punkte des Punkthaufens ein Punkt des starren Körpers zugewiesen werden soll, so daß die zugewiesenen Punkte ein dem Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt kongruentes und parallel liegendes Gebilde ausmachen. An jedem dieser Punkte des starren Körpers denken wir uns hierauf alle Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ angebracht, die vorher an dem entsprechenden Punkte des zweiten Punkthaufens vorkamen. Die Kräfte $\mathfrak{J}$ sollen dabei ebenso wie die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ als äußere Kräfte am starren Körper angebracht werden, ohne jede Rücksicht darauf, daß sie bei dem ersten Punkthaufen sich unter den gegebenen Bedingungen von selbst als innere Kräfte in dieser Größe und Richtung einstellten.

Da sich alle Kräfte, die wir anbrachten, an jedem Angriffspunkte für sich im Gleichgewichte befinden, wird der starre Körper, wenn er vorher in Ruhe war, auch weiterhin in Ruhe bleiben. Zwischen den Kräften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ müssen ferner auch alle Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein, die wir für Kräfte am starren Körper schon im I. Bande näher besprochen haben.

Hierbei ist aber zu beachten, daß nach der allgemeinen Fassung des Wechselwirkungsgesetzes auf jeden Fall die Kräfte $\mathfrak{J}$ unter sich ein Gleichgewichtssystem am starren Körper bilden müssen (vgl. § 21, Bd. I, S. 134 d. 3. Aufl.) Daher müssen auch die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ unter sich im Gleichgewichte stehen und allen früher hierfür aufgestellten Bedingungen genügen. Insbesondere muß

$$\Sigma\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{H} = 0$$

sein, wenn man die Summe über alle $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ an allen Punkten des starren Körpers erstreckt. Diese Bedingung ist indessen nur eine notwendige und nicht zugleich eine hinreichende. Vielmehr muß außerdem für jeden Momentenpunkt die Summe der Momente aller $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ gleich Null sein und ebenso muß für jede virtuelle Verschiebung des starren Körpers die Summe der Arbeitsleistungen aller $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ gleich Null sein.

In der zuletzt gegebenen Form wird das d'Alembertsche Prinzip gewöhnlich in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik dargestellt. Denkt man sich nämlich irgendeine unendlich kleine virtuelle Verschiebung des starren Körpers vorgenommen, und bezeichnet man den Weg, den der zunächst ins Auge gefaßte Punkt dabei zurücklegt, mit $\delta\mathfrak{s}$, so lautet die notwendige und zugleich auch hinreichende Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ an allen Punkten des starren Körpers

$$\Sigma(\mathfrak{P} + \mathfrak{H})\delta\mathfrak{s} = 0$$

gültig für jede virtuelle Verschiebung. Setzt man $\mathfrak{H}$ aus Gl. (89) ein, so geht sie über in

$$\Sigma\left(\mathfrak{P} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)\delta\mathfrak{s} = 0. \tag{91}$$

Bezeichnet man die Komponenten von $\mathfrak{P}$ nach den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit XYZ, die Komponenten von $\mathfrak{r}$ mit xyz, und die Komponenten von $\delta\mathfrak{s}$ mit δx, δy, δz, so läßt sich dafür auch schreiben

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0, \tag{92}$$

und das ist die Formel, die gewöhnlich als die Aussage des d'Alembertschen Prinzips angegeben wird. Es entspricht aber eigentlich mehr dem ursprünglichen Sachverhalte, das d'Alembertsche Prinzip darin zu erblicken, daß man durch die Zufügung der Kraft $\mathfrak{H}$ an dem Punkthaufen ein System von Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ erhält, das allen Gleichgewichtsbedingungen an einem starren Körper genügt. Ob man dieses Gleichgewicht nachher mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten oder mit Hilfe des Satzes von den statischen Momenten untersucht — was oft bequemer ist —, bleibt nebensächlich.

Die Hauptleistung von d'Alembert bei der Aufstellung seines Prinzips kann freilich vielleicht darin gefunden werden, daß er erkannt hat, daß sich die inneren Kräfte, weil sie für sich im Gleichgewichte stehen, aus den Gleichgewichtsbedingungen fortheben. Aber darum zu sagen, daß hierin der Kern des d'Alembertschen Prinzips zu erblicken sei, halte ich für unzweckmäßig, weil eben die Tatsache, daß die inneren Kräfte für sich ein Gleichgewichtsystem bilden, schon durch das Wechselwirkungsgesetz ihrem vollen Inhalte nach zum Ausdrucke kommt. Und darüber hinaus lehrt das Prinzip nur noch, daß man durch den Kunstgriff der Einführung der Kräfte $\mathfrak{H}$ ein Gleichgewichtssystem der $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ herstellen kann, wodurch es möglich wird, Aufgaben der Dynamik auf statische Aufgaben zurückzuführen.

Die Kräfte $\mathfrak{H}$ werden gewöhnlich als „Trägheitskräfte" bezeichnet und ich werde mich dieser Bezeichnung ihrer Kürze wegen anschließen. Man hat freilich gegen den Gebrauch dieses Wortes öfters eingewendet, daß es zu Mißdeutungen oder falschen Vorstellungen Veranlassung geben könne, da hiermit eine Größe als Kraft bezeichnet wird, die als solche physikalisch gar nicht existiert und die nur zur Vereinfachung der Betrachtungen zu den wirklich vorhandenen Kräften willkürlich zugefügt wird. Daß die Trägheitskräfte in der Tat nur in diesem Sinne als Hilfsgrößen und nicht als an dem ersten Punkthaufen, den wir eigentlich untersuchen wollen, wirklich angreifende Kräfte aufzufassen sind, darf man freilich nicht aus den Augen verlieren. Sofern dies geschieht, wird man aber jene Bedenken fallen lassen können, und ich habe auch, gerade um nach dieser Richtung keinen Zweifel zu lassen, ausdrücklich von zwei Punkthaufen und einem starren Körper gesprochen, von denen der erste Punkthaufen den unmittelbaren Gegenstand unserer Untersuchung bildet und an dem die Kräfte $\mathfrak{H}$ fehlen, während der zweite und der starre Körper, an dem die Kräfte $\mathfrak{H}$ angreifen sollen, nur zum Vergleiche mit dem ersten gebraucht werden. Ich trage auch um so weniger Bedenken gegen die gewählte Bezeichnung, als schon die „fingierte" Zentrifugalkraft, von der im ersten Bande die Rede war, unter den Begriff der Trägheitskräfte fällt und man schon mit Rücksicht auf den in diesem Falle fest eingewurzelten Sprachgebrauch genötigt ist, zwischen den fingierten oder von uns willkürlich zugefügten Kräften und den physikalisch nachweisbaren oder, wie wir sagen, wirklich vorhandenen sorgfältig zu unterscheiden.

Man sieht leicht ein, wie den vorgehenden Betrachtungen noch eine allgemeinere Form gegeben werden kann. Anstatt den ganzen Punkthaufen auf einem starren Körper abzubilden, wie es vorher geschehen war, können wir ebenso mit einem beliebig herausgegriffenen Teil verfahren. Der starre Körper, der diesen Teil abbildet und an dem alle zugehörigen Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ angebracht sind, ist unter dem Einflusse dieser Kräfte jedenfalls im Gleichgewichte. Dagegen bilden jetzt nicht mehr alle Kräfte $\mathfrak{J}$ ein Gleichgewichtssystem, sondern nur jene davon untereinander, die auch für den in dieser Weise herausgegriffenen Teil des Punkthaufens noch als innere zu bezeichnen sind. Rechnen wir aber die übrigen, also die von den fortgelassenen Teilen des Punkthaufens auf die beibehaltenen übertragenen Kräfte jetzt zu den äußeren, so daß sie an dem starren Körper mit unter den $\mathfrak{P}$ erscheinen, so bleiben die vorhergehenden Schlüsse und Aussagen ohne Änderung auch für das Teilstück bestehen.

Davon kann man z. B. Gebrauch machen bei einer Maschine, die aus Teilen zusammengesetzt ist, von denen jeder für sich genommen genau genug als starrer Körper betrachtet werden kann, während sich die Teile gegeneinander bewegen. Man kann dann eine zweite Maschine angeben, die im übrigen vollständig mit der vorigen übereinstimmt, die aber in Ruhe ist und dauernd in Ruhe bleibt, wenn man an jedem Teile der Maschine dieselben Kräfte $\mathfrak{P}$ wie bei der ersten Maschine und außerdem noch die Trägheitskräfte $\mathfrak{H}$ anbringt. Zu den Kräften $\mathfrak{P}$ gehören dann auch die Kräfte zwischen den einzelnen Maschinenteilen, also etwa Gelenkdrücke o. dgl., die bei der ruhenden Maschine ebenso anzunehmen sind, wie bei der bewegten. Wenn man dann aus der Gleichgewichtsbetrachtung an der ruhenden Maschine die Gelenkdrücke usw. gefunden hat, kennt man sie zugleich für die bewegte Maschine.

Entsprechend läßt sich auch das Anwendungsgebiet von Gl. (91) oder (92) erweitern. Zuerst war gesagt, daß sich die Formeln nur auf eine Bewegung ohne Gestaltänderung beziehen sollten, denn darauf kam es ja hinaus, wenn wir den Punkthaufen auf einen starren Körper abbildeten.

Die Formeln gelten aber auch noch in einem allgemeineren Falle, nämlich immer dann, wenn zwar eine Gestaltänderung eintritt, die inneren Kräfte aber dabei trotzdem keine Arbeit leisten. Denn in der Tat bestand ja der einzige Gebrauch, den wir vorher von der Voraussetzung der unveränderlichen Gestalt gemacht hatten, nur darin, daß wir die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte gleich Null setzen konnten. Das ist immer erfüllt bei Bewegungen ohne Gestaltänderung; es kann aber auch noch in anderen Fällen erfüllt sein. Sobald es aber zutrifft, bleibt auch die Gültigkeit der Gleichungen (91) oder (92) bestehen.

Man denke sich z. B. zwei starre Körper, die in einem Gelenke ohne Reibung drehbar miteinander verbunden sind. Das System beider Körper kann als ein Punkthaufen von veränderlicher Gestalt aufgefaßt werden. Betrachten wir nun eine virtuelle Verschiebung des Punkthaufens, bei der zwar jeder starre Körper unveränderlich bleibt, während sich aber die beiden Körper gegeneinander drehen, so ist die Summe der Arbeiten aller inneren Kräfte immer noch Null, wenigstens dann, wenn zwischen beiden Körpern nur im Gelenke eine Kraft übertragen wird. Trügen beide Körper Magnete, die Fernkräfte aufeinander ausübten, so wäre dies freilich nicht mehr richtig und die Gleichungen (91) oder (92) blieben nicht mehr anwendbar. Man könnte sich in diesem Falle jedoch dadurch helfen, daß man die magnetischen Fernkräfte nicht als innere Kräfte des Systems, sondern als unmittelbar gegebene äußere Kräfte auffaßte und sie daher in die $\mathfrak{P}$ mit einrechnete, womit die Anwendbarkeit der Formeln gewahrt bliebe.

In der analytischen Mechanik denkt man bei der Anwendung von Gl. (92) gewöhnlich an solche virtuelle Verschiebungen, für die die inneren Kräfte keine Arbeit leisten, obschon Gestaltänderungen dabei nicht ausgeschlossen sein sollen. Man kann dies, weil man sich die Körper, die das System oder den Punkthaufen ausmachen, nur in solcher Weise miteinander in Verbindung gebracht denkt, daß bei den hierdurch zugelassenen Verschiebungen der Teile gegeneinander in der Tat keine inneren Arbeiten geleistet werden. Um dies zum Ausdrucke zu bringen, pflegt man zu sagen, daß unter den in Gl. (92) auftretenden Verschiebungskomponenten nur solche zu verstehen seien, die zwar sonst willkürlich, aber dabei mit den Systembedingungen verträglich seien. Das kommt aber darauf hinaus, daß $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\delta\mathfrak{s}$ gleich Null sein soll. Insbesondere sollen keine elastischen Formänderungen mit der virtuellen Verschiebung verbunden sein und keine Reibungen an den Berührungsstellen der verschiedenen Körper auftreten.

§ 16. Festigkeitsberechnungen für bewegte Körper.

In der Festigkeitslehre untersucht man die Spannungen und die Formänderungen eines elastischen Körpers unter der Voraussetzung, daß die an ihm angreifenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte miteinander stehen und der Körper in Ruhe ist. In der Technik muß man aber auch öfters Festigkeitsaufgaben für bewegte Körper lösen. Dazu dient das d'Alembertsche Prinzip, mit dessen Hilfe man diese Aufgaben auf solche an ruhenden Körpern zurückführen kann.

Bei einem beliebig bewegten Körper stehen nämlich die an einem Volumenelemente angreifenden Spannungen und die an ihm wirkenden äußeren Kräfte nicht im Gleichgewichte miteinander, sondern sie liefern eine Resultierende, durch die die Beschleunigung der in dem Volumenelemente enthaltenen Masse herbeigeführt wird. Sobald man sich aber die Trägheitskraft als fernere äußere Kraft an dem Volumenelemente angebracht denkt, herrscht wieder überall Gleichgewicht. Dadurch wird die Möglichkeit eröffnet, die inneren Kräfte, die man in diesem Zusammenhange als Spannungen bezeichnet, am ruhenden Körper untersuchen zu können, der neben den Lasten $\mathfrak{P}$ auch noch die Lasten $\mathfrak{H}$ trägt.

Um streng zu sein, muß man hierbei jedoch noch eine weitere Erwägung eintreten lassen. Man weiß nämlich aus der Festigkeitslehre, daß es nicht möglich ist, die Spannungen, die zu gegebenen Lasten gehören, ausschließlich auf Grund von Gleichgewichtsbetrachtungen zu ermitteln. Es könnte daher vorkommen, daß in dem ruhenden Körper, der die Lasten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ trägt, ein anderes System von Spannungen zustande käme, wie bei dem ihm entsprechenden bewegten Körper. Zunächst wenigstens können wir nur behaupten, daß die Spannungen, die am Umfange jedes Volumenelements angreifen, in beiden Fällen statisch gleichwertig sein müssen, d. h., daß sie dieselbe Resultierende ergeben müssen. Darum brauchen sie aber noch nicht notwendig auch in den Einzelheiten miteinander übereinzustimmen. Vielmehr könnten sich beide Spannungssysteme derart voneinander unterscheiden, daß ihr Unterschied einem Systeme von Eigenspannungen entspräche, also einem Systeme von Spannungen, das auch in einem unbelasteten Körper unter gewissen Umständen auftreten kann, wie es z. B. bei den sogenannten Gußspannungen zutrifft.

Um hierüber eine Entscheidung treffen zu können, müssen wir nochmals auf die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen zurückkommen.

Wir hatten neben dem ersten Punkthaufen, auf den sich die Untersuchung bezog, einen zweiten eingeführt, an dem die Trägheitskräfte $\mathfrak{H}$ zugefügt waren, während sich sonst nichts geändert haben sollte. Jetzt wollen wir an Stelle des starren Körpers, auf den wir hierauf alle Kräfte übertrugen, einen dritten Punkthaufen annehmen, der sich von dem zweiten dadurch unterscheidet, daß seine Punkte zur gegebenen Zeit in Ruhe sein sollen. Die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ wirken an ihm gerade so wie vorher an dem zweiten Punkthaufen. Dagegen dürfen wir jetzt nicht willkürlich annehmen, daß die Kräfte $\mathfrak{J}$ bei ihm genau dieselben seien, wie bei dem ersten Punkthaufen. Bei dem starren Körper konnten wir dies in den Betrachtungen des vorigen Paragraphen unbedenklich tun, da für ihn die Kräfte $\mathfrak{J}$ überhaupt nicht als innere aufzufassen waren, sondern gerade so wie die äußeren nach Belieben angebracht werden konnten, indem es nur darauf ankam, daß sie sich, wenn dies geschieht, nach dem Wechselwirkungsgesetze aus den Gleichgewichtsbedingungen hinwegheben. Das wird aber ganz anders, wenn wir die inneren Kräfte selbst und ihre nähere Verteilung am dritten Punkthaufen berechnen wollen, und zwar nicht auf Grund von Gleichgewichtsbetrachtungen allein, sondern auch auf Grund von anderen Erwägungen, und wenn wir sie dann später denen im ersten Punkthaufen gleich setzen wollen.

Diese anderen Erwägungen bestehen darin, daß der Spannungszustand durch die übrigen Bedingungen schon im einzelnen mitbestimmt ist. Wir haben uns also zu fragen, ob nach den besonderen physikalischen Eigenschaften der Körper, die durch die Punkthaufen dargestellt werden sollen, beim dritten Punkthaufen dieselben inneren Kräfte zu erwarten sind, wie beim ersten. Offenbar ist diese Frage nur dann zu bejahen, wenn wir es als Erfahrungstatsache ansehen dürfen, daß die inneren Kräfte nur von jenen Bedingungen abhängen, in denen beide Punkthaufen miteinander übereinstimmen und nicht von jenen, in denen sie sich voneinander unterscheiden. Die Punkthaufen unterscheiden sich in dem Augenblicke, auf den sich unsere Betrachtung bezieht, dadurch voneinander, daß der eine in Bewegung begriffen, der andere aber in Ruhe ist. Hat man es also mit einem Körper von solcher Beschaffenheit zu tun, daß die inneren Kräfte nicht nur von der augenblicklichen Gestalt, sondern auch von der Geschwindigkeit der Gestaltänderung abhängen, so ist die aufgeworfene Frage zu verneinen.

Bei allen Körpern, die elastische Nachwirkungen erkennen lassen, trifft dies zu. Gewöhnlich aber darf man bei den zu praktischen Zwecken vorzunehmenden Festigkeitsberechnungen annehmen, daß die Geschwindigkeiten ohne Einfluß auf die Ausbildung der inneren Kräfte sind. Soviel wir bis jetzt wenigstens wissen, hängen die Spannungen in den elastischen Körpern, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist und daher merkliche elastische Nachwirkungen nicht in Frage kommen, nur von den Formänderungen selbst und nicht von deren Änderungsgeschwindigkeiten ab.

Mit den ausgesprochenen Vorbehalten dürfen wir daher die vorher aufgeworfene Frage bejahen. Hiermit sind wir aber in der Tat berechtigt, die Festigkeitsbetrachtung am ruhenden Körper vorzunehmen und die Rechnungsergebnisse ohne Änderung auf den bewegten Körper anzuwenden. Einige Beispiele unter den Aufgaben werden den Rechnungsgang, der dabei einzuschlagen ist, noch näher erläutern.

§ 17. Das physische Pendel.

Im vorigen Abschnitte wurde die Pendelbewegung unter Voraussetzung eines einfachen Pendels untersucht. Man dachte sich die ganze schwingende Masse in einem einzigen Punkte vereinigt, der in unveränderlicher Entfernung vom Aufhängepunkte gehalten und dadurch zur Ausführung einer kreisförmigen Bewegung genötigt sein sollte. Mit diesem Bilde reicht man aber nur in seltenen Fällen aus. Gewöhnlich sind die Massen von Körpern, die Pendelschwingungen ausführen, räumlich so ausgedehnt, und namentlich in so verschiedenen Abständen von der festen Drehachse verteilt, daß es von vornherein an jedem Anhaltspunkte dafür fehlt, wo man sich etwa die ganze Masse vereinigt denken müßte, um das Pendel als ein einfaches behandeln zu können. Hier hilft nun — obschon auch andere Wege zum Ziele führen — am besten das d'Alembertsche Prinzip zur Lösung der Aufgabe.

In Abb. 22 sei O der Drehpunkt, d. h. die Projektion der Drehachse auf die senkrecht dazu gedachte Zeichenebene, S der Schwerpunkt des Pendels und m irgendein Massenteilchen im Abstande x, das wir als einen der materiellen Punkte des ganzen Haufens auffassen. Wenn alle übrigen Massen gegenüber m vernachlässigt werden könnten, hätten wir ein einfaches Pendel von der Länge x vor uns und die Schwingungsdauer könnte aus x nach den Lehren des vorigen Abschnitts berechnet werden. Jene Massen m, die nahe beim Drehpunkte O liegen, suchen, für sich genommen, eine kleine,

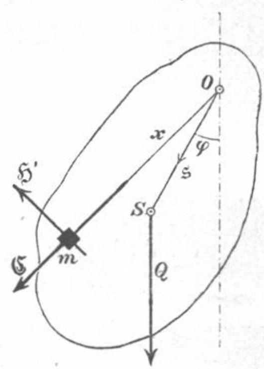

Abb. 22.

die weiter abstehenden eine größere Schwingungsdauer des Pendels herbeizuführen, und die wirkliche Schwingungsdauer wird einen gewissen Mittelwert annehmen.

Die augenblickliche Stellung des Pendels sei durch den Winkel φ beschrieben, den der vom Aufhängepunkte nach dem Schwerpunkte gezogene Radiusvektor $\mathfrak{s}$ mit der Lotrichtung bildet. In der Gleichgewichtslage des Pendels ist hiernach $\varphi = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{d\varphi}{dt}$ und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Kehren wir nun zum Massenteilchen m

zurück, so kann dessen Geschwindigkeit gleich $x \frac{d\varphi}{dt}$ und die Tangentialkomponente der Beschleunigung, die es im Augenblicke erfährt, gleich $x \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gesetzt werden. Dazu kommt dann noch eine Normalkomponente der Beschleunigung wegen der Richtungsänderung der Geschwindigkeit. — Wir führen jetzt die Trägheitskraft

$$\mathfrak{H} = - m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

ein, die wir ebenso wie die Beschleunigung in eine Tangentialkomponente $\mathfrak{H}'$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{C}$ spalten können. Die letzte ist nichts anderes als die *Z*entrifugalkraft. Die Tangentialkomponente $\mathfrak{H}'$ hat den Absolutwert

$$H' = mx \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Sie ist, wie in Abb. 22 eingetragen, nach außen und obenhin gerichtet. Schwingt nämlich das Pendel nach außen, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ positiv und der Absolutbetrag nimmt ab; schwingt es dagegen nach der Gleichgewichtslage hin, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ negativ und der Absolutbetrag nimmt zu. In jedem Falle ist daher $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ negativ und die Tangentialbeschleunigung nach innen und abwärts gerichtet. Die Trägheitskraft hat aber die entgegengesetzte Richtung wie die zu ihr gehörige Beschleunigung; sie ist also stets nach oben und außen gerichtet.

Nachdem die Trägheitskräfte $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{C}$ überall zugefügt sind, haben wir ein System von Kräften vor uns, die sich an dem Körper im Gleichgewichte halten. Zur Untersuchung des Gleichgewichts betrachten wir den Körper, da er sich um eine feste Achse dreht, als einen Hebel. Wir schreiben daher die Bedingung an, daß die Summe der statischen Momente für den Drehpunkt gleich Null sein muß. In dieser Momentensumme kommen die Normalkomponenten $\mathfrak{C}$ der Trägheitskräfte nicht vor, da sie alle durch den Momentenpunkt gehen. Die Tangentialkomponenten $\mathfrak{H}'$ haben alle gleiches Momentenvorzeichen und die Summe ihrer Momente muß daher gleich dem Momente der entgegengesetzt drehenden Kraft Q sein. Wir erhalten damit die Gleichung

$$-\Sigma m x^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Qs \sin\varphi\,. \tag{93}$$

Das Minuszeichen auf der linken Seite ist beigefügt, weil wir erkannt hatten, daß $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ an sich negativ ist. Der Faktor $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ist allen Gliedern gemeinsam und kann daher auch vor das Summenzeichen gestellt werden. Die dann noch zurückbleibende Summe $\Sigma m x^2$ stellt das Trägheitsmoment für die Drehachse dar und soll, wie früher, mit Θ bezeichnet werden. Hiermit geht die vorige Gleichung über in

$$-\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Qs \sin\varphi\,. \tag{94}$$

Aus dieser Differentialgleichung läßt sich φ als Funktion von t ermitteln, womit die Pendelbewegung bekannt ist. Anstatt dessen verfährt man aber einfacher und umgeht ausführliche Rechnnngen, die jetzt von neuem anzustellen wären, wenn man die Theorie des physischen Pendels auf jene des einfachen Pendels zurückführt. Man gibt nämlich ein einfaches Pendel an, das mit dem gegebenen genau gleich schwingt, so daß es zur Berechnung der Schwingungsdauer usw. an die Stelle des zusammengesetzten Pendels gesetzt werden kann. Die Länge des gleichwertigen einfachen Pendels wird die reduzierte Pendellänge des zusammengesetzten Pendels genannt. Trägt man die reduzierte Pendellänge l vom Drehpunkte O aus auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Radiusvektor $\mathfrak{s}$ ab, so wird der Endpunkt dieser Strecke der Schwingungsmittelpunkt des Pendels genannt. Denkt man sich nämlich alle übrigen Massen des Pendels verschwindend klein gegenüber einer in diesem Punkte vereinigten Masse m, so geht das Pendel in ein einfaches über, das gleiche Schwingungen wie das gegebene ausführt. Man kann also sagen, daß die an dieser Stelle befindliche Masse von den übrigen nicht beeinflußt wird, sondern daß sie gerade so schwingt, als wenn die anderen nicht vorhanden wären.

Um nun das gleichwertige einfache Pendel wirklich zu finden, wenden wir Gl. (94) auf den Fall an, daß nur eine Masse m auf dem Radiusvektor $\mathfrak{s}$ im Abstande l vom Drehpunkte vorhanden sei. Auch auf den Fall dieses einfachen Pendels läßt sich Gl. (94) anwenden, da sie nach ihrer Ableitung für jede beliebige Massenverteilung gültig bleibt. In diesem Falle ist $\Theta = ml^2$ und $s = l$, also geht Gl. (94) über in

$$-ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgl \sin\varphi$$

oder kürzer

$$-l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \sin\varphi . \tag{95}$$

Von dieser Gleichung kennen wir aber die Lösung bereits, da t schon in § 12 als Funktion von φ dargestellt wurde.

Soll nun das zusammengesetzte Pendel genau gleich mit dem einfachen schwingen, d. h. so, daß zu gleichen Zeiten stets auch gleiche Ausschläge gehören, so genügt es, daß die Anfangsbedingungen bei beiden gleich waren, und daß ferner die Gleichungen (94) und (95) in den konstanten Koeffizienten miteinander übereinstimmen. Freilich ist dazu nicht nötig, daß die Koeffizienten jeder Seite einzeln gleich sind; es genügt vielmehr die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Koeffizienten auf beiden Seiten. Man überblickt dies am besten, wenn man beide Gleichungen in der Form

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Qs}{\Theta} \sin\varphi \quad \text{und} \quad -\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin\varphi$$

anschreibt. Beide Gleichungen werden miteinander identisch, wenn man

$$\frac{Qs}{\Theta} = \frac{g}{l}$$

setzt und hieraus folgt für die reduzierte Pendellänge l

$$l = \frac{g\,\Theta}{Qs} . \tag{96}$$

Führt man an Stelle des Trägheitsmomentes den Trägheitsradius i ein, so geht Gl. (96) über in

$$l = \frac{i^2}{s} . \tag{97}$$

Wie schon vorher bemerkt wurde, kann man das Problem des physischen Pendels auch ohne Benutzung des d'Alembertschen Prinzips nach mehreren anderen Methoden lösen. Namentlich der Satz von der lebendigen Kraft führt in allen Fällen, bei denen es sich, wie hier, um Bewegungen eines Körpers oder eines Systems von Körpern handelt, die nur einen Freiheitsgrad besitzen oder die, wie man sagt, zwangläufig erfolgen, schnell zum Ziele. Es sei daher noch gezeigt, wie sich die Lösung auf diesem Wege gestaltet. Bezeichnet man den größten Ausschlag mit α, so liefert die Gleichsetzung der von dem Gewichte Q geleisteten Arbeit mit der lebendigen Kraft, gerade so wie früher beim einfachen Pendel, die Gleichung

$$\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Qs(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{98}$$

die hierauf entweder unmittelbar weiter integriert oder so wie vorhin mit der entsprechenden Gleichung für das gleichschwingende einfache Pendel verglichen werden kann. Gl. (98) ist, wie man sich leicht überzeugt, ein erstes Integral von Gl. (94), wobei die auftretende Integrationskonstante schon der Grenzbedingung, daß der größte Ausschlag α sein soll, angepaßt ist.

Dieser Weg ist vielleicht noch kürzer und einfacher als der vorher eingeschlagene. Wenn aber z. B. zugleich verlangt würde, die Biegungsbeanspruchung zu berechnen, die das Pendel erfährt, müßte man doch wieder zur Benutzung des d'Alembertschen Prinzips zurückgreifen und schon aus diesem Grunde ist es nützlich, die Aufgabe von vornherein mit dem d'Alembertschen Prinzip zu behandeln; ganz abgesehen davon, daß hier auch an einem möglichst einfachen Beispiele der Gebrauch dieses Prinzips erläutert werden sollte.

§ 18. Schwerpunkts- und Flächensätze für den Punkthaufen.

Die Schwerpunktssätze sind schon im ersten Bande behandelt; des Zusammenhangs wegen werde ich aber hier Einiges noch einmal kurz wiederholen, was darüber früher ausgemacht wurde. — Zunächst erinnere ich daran, daß die Lage des Schwerpunkts, der dabei als Massenmittelpunkt aufzufassen ist, durch die Gleichung

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r} \tag{99}$$

definiert wird, in der $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor für irgendeinen materiellen Punkt m des Haufens, M die Gesamtmasse des Haufens und $\mathfrak{s}$ den Radiusvektor des Schwerpunkts bedeuten. Diese Gleichung gilt für beliebige Punkthaufen in jedem Augenblicke, auch dann, wenn sie während der Bewegung ihre Gestalt verändern. Durch Differentation nach der Zeit folgt

$$M\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \Sigma m\frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

oder mit Einführung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$

$$M\mathfrak{v}_0 = \Sigma m\mathfrak{v}, \tag{100}$$

d. h. die Bewegungsgröße des ganzen Haufens ist ebenso groß, als wenn die ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre und sich mit dessen Geschwindigkeit bewegte. Eine nochmalige Differentation nach der Zeit liefert

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \Sigma(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}) = \Sigma\mathfrak{P}, \tag{101}$$

und diese Gleichung sagt aus, daß sich der Schwerpunkt stets so bewegt, als wenn die ganze Masse in ihm vereinigt und alle äußeren Kräfte parallel nach ihm verlegt wären.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zur Übertragung des im vorigen Abschnitte für einen einzelnen materiellen Punkt bewiesenen Flächensatzes auf einen beliebigen Punkthaufen. Für jeden Punkt des Haufens besteht nach Gl. (2) oder (3), § 2 die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{V}\,m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \mathrm{V}(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J})\,\mathfrak{r} = \mathrm{V}\,\mathfrak{P}\mathfrak{r} + \mathrm{V}\,\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{r}.$$

Gegenüber der früheren Formel war hier nur nötig, alle Kräfte, die an dem Punkte angreifen, in äußere und in innere Kräfte des Haufens einzuteilen, jene zu $\mathfrak{P}$ und diese zu $\Sigma\mathfrak{J}$ zusammenzufassen und daher die Resultierende $\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}$ an die Stelle der in § 2 mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Kraft, die allein an dem materiellen Punkte angreifen sollte, treten zu lassen. Die vorstehende Gleichung gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt und für jeden Punkt des Haufens. Wir wollen sie uns für alle Punkte des Haufens unter Zugrundelegung desselben Momentenpunktes angeschrieben denken und alle so erhaltenen Gleichungen addieren. Wir finden dann

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r} + \Sigma\Sigma V\mathfrak{J}\mathfrak{r}.$$

Nach dem Wechselwirkungsgesetze verschwindet aber das letzte Glied auf der rechten Seite und wir behalten daher

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r}, \tag{102}$$

oder auch in kürzerer Schreibweise

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r}. \tag{103}$$

Der Ausdruck $\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{B}$ stellt die geometrische Summe der statischen Momente der Bewegungsgrößen aller Punkte des Haufens dar; wir wollen diese Summe als das statische Moment der Bewegungsgröße des ganzen Haufens oder als dessen Drall bezeichnen. Dabei ist indessen wohl zu beachten, daß man sich, um dieses statische Moment zu bilden, nicht etwa zuvor die Bewegungsgröße nach Gl. (100) im Schwerpunkte vereinigt denken darf, um dann von ihr das Moment zu nehmen. Das ist deshalb nicht zulässig, weil der Faktor $\mathfrak{r}$ nicht für alle Glieder der Summe konstant ist, sondern für jeden materiellen Punkt einen anderen Wert annimmt. In der „Theorie des Kreisels“ von Klein und Sommerfeld, in der auf die Anwendung des Flächensatzes ein besonderes Gewicht gelegt ist, wird die Größe $\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}$ als der „Impulsvektor“ bezeichnet. Ich glaube aber die Bezeichnung „Drall“ vorziehen zu sollen.

Der durch Gl. (102) ausgedrückte Flächensatz läßt sich in Worten wie folgt aussprechen:

Für jeden beliebigen Momentenpunkt ist die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls irgendeines Punkthaufens gleich der geometrischen Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte.

In dieser allgemeinsten Form wird indessen seltener von dem Flächensatze Gebrauch gemacht als von den einfacheren Formen, in die er übergeht, wenn besondere Bedingungen vorliegen. Namentlich durch eine geeignete Wahl des Momentenpunktes läßt er sich häufig erheblich vereinfachen, obschon damit freilich andererseits die allgemeine Gültigkeit eingeschränkt wird. Ich werde die häufigst vorkommenden Fälle dieser Art hier einzeln durchsprechen.

a) *Punkthaufen, der zu Anfang ruhte und auf den keine äußeren Kräfte wirken.*

Durch die inneren Kräfte können in diesem Falle Bewegungen hervorgerufen werden, die zu Gestaltänderungen des Haufens führen. Wir schließen zunächst nach dem Schwerpunktsatze Gl. (101), daß der Schwerpunkt jedenfalls stets in Ruhe bleibt. Ferner folgt aus dem Flächensatze, daß $\mathfrak{B}$ konstant und daher stets gleich Null bleiben muß, da es zu Anfang Null war. Auch die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf irgendeine Ebene oder irgend eine Achse muß daher zu jeder Zeit gleich Null sein. — Die Projektion eines statischen Moments auf eine Achse kann nach den Lehren des ersten Bandes stets als das statische Moment der Projektion auf eine zur Achse senkrecht stehende Ebene aufgefaßt werden. Projiziert man also alle Punkte des Haufens auf eine beliebige Ebene, so ist auch für jeden Punkt dieser Ebene als Anfangspunkt die Summe der mit den Massen m multiplizierten Flächenräume oder Sektorengeschwindigkeiten stets gleich Null. Man kann dies einfach so ausdrücken, daß ein Teil der materiellen Punkte den beliebig gewählten Punkt im Sinne des Uhrzeigers, ein anderer Teil ihn im entgegengesetzten Sinne umkreisen muß, und zwar so, daß die statischen Momente der Bewegungsgrößen für beide Umkreisungsrichtungen gleich groß sind.

b) *Punkthaufen mit sonst beliebiger Anfangsbewegung, dessen Schwerpunkt aber zu Anfang ruhte und auf den keine äußeren Kräfte wirken.*

Der Schwerpunkt muß hier wie im vorigen Falle dauernd in Ruhe und das statische Moment der Bewegungsgröße muß konstant bleiben. Dieses ist aber jetzt nicht gleich Null, sondern gleich dem durch den Anfangszustand gegebenen Werte. Bezeichnen wir diesen mit $\mathfrak{C}$, so ist

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C}.$$

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß im vorliegenden Falle die Konstante $\mathfrak{C}$ unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes ist. Um dies zu beweisen, wähle man einen zweiten Momentenpunkt, von dem die Hebelarme $\mathfrak{r}'$ gerechnet werden. Dann ist für diesen

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}' = \mathfrak{C}'.$$

Für $\mathfrak{r}'$ können wir aber schreiben

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \mathfrak{a},$$

wenn mit $\mathfrak{a}$ der Radiusvektor vom zweiten zum ersten Momentenpunkte bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\mathfrak{C}' = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{r} + \mathfrak{a}) = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} + \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}.$$

In der letzten Summe ist $\mathfrak{a}$ konstant und man hat daher

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} = V (\Sigma m \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{a} = 0$$

nach Gl (100) und der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt ruhen sollte. In der Tat wird also

$$\mathfrak{C}' = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C}.$$

Der Drall eines Punkthaufens, dessen Schwerpunkt ruht, ist daher eine von der Wahl des Momentenpunktes unabhängige und überdies, wenn keine äußeren Kräfte wirken, der Zeit nach konstante Größe. Die Bedeutung dieses Satzes möge noch an einer seiner bekanntesten und wichtigsten Anwendungen näher erläutert werden.

Wir wählen das Sonnensystem, also die Sonne samt ihren Planeten und deren Trabanten u. dgl. als den Punkthaufen, auf den wir den Satz anwenden wollen. Zugleich setzen wir voraus, daß der Schwerpunkt dieses Haufens gegenüber einem festen Raume, für den das Trägheitsgesetz gilt (vgl. Bd. I, S. 20) zu Anfang in Ruhe war, und daß die äußeren Kräfte, die von den fernen Weltkörpern des Fixsternhimmels ausgehen, so gering sind, daß sie vernachlässigt werden dürfen. — Zugleich sei übrigens bemerkt, daß man diese Voraussetzungen zum Teile auch fallen lassen kann; man würde dann auf Grund der unter c) und e) folgenden Betrachtungen zu ganz ähnlichen Schlüssen gelangen. Hier beschränke ich mich aber auf die Besprechung des einfachsten Falles.

Die Wahl des Momentenpunktes ist, wie bewiesen, gleichgültig und wir können dazu etwa den Sonnenmittelpunkt nehmen. Um diesen bewegen sich die Planeten alle in demselben Sinne und auch die Sonne besitzt eine Drehung in der gleichen Richtung. Jedenfalls wird also der Drall des Sonnensystems nicht gleich Null sein. Dagegen muß er nach Größe und Richtung konstant sein. Hierdurch ist eine, trotz aller Lagenänderungen, die vorkommen mögen, konstante Richtung gegeben. Wenn die Planetenbahnen alle in einer Ebene enthalten wären und auch die Drehbewegungen usf. alle parallel zu dieser Ebene erfolgten, wäre der Drall, als ein statisches Moment, senkrecht zu dieser Ebene gerichtet. Diese Voraussetzung ist zwar nicht erfüllt, aber die meisten Planetenbahnen usf. treten doch auch nicht sehr erheblich aus einer gewissen mittleren Ebene heraus. Hiernach liegt es nahe, nach einer solchen mittleren Ebene zu suchen, die unbeweglich im Raume festliegt, trotz aller Abweichungen und Schwankungen, die bei den einzelnen Bestandteilen der Bewegungsgröße des Haufens vorkommen mögen. Diese Ebene wird durch den Flächensatz gegeben; es ist jene, die senkrecht zu der unveränderlichen Richtung von $\mathfrak{C}$ steht. Sie heißt nach Laplace, von dem diese Betrachtung herrührt, die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Natürlich kommt es, wenn man von ihr redet, nur auf ihre Stellung, nicht auf ihre besondere Lage an. Am einfachsten ist es zwar, sie sich durch den Schwerpunkt des ganzen Haufens gezogen zu denken; aber auch jede zu dieser parallele Ebene kann als unveränderliche Ebene im Sinne unseres Satzes angesehen werden.

c) *Punkthaufen mit beliebiger Anfangsbewegung ohne Wirkung äußerer Kräfte.*

Der Schwerpunkt beschreibt eine geradlinige Bahn mit konstanter Geschwindigkeit. Der Drall bleibt für jeden Momentenpunkt der Zeit nach konstant, für verschiedene Momentenpunkte ist er aber verschieden. Zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ besteht die Beziehung (vgl. die Ableitung unter b)

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \mathrm{V}\, M\mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{a}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite ist stets senkrecht zur Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, also auch senkrecht zur Schwerpunktsbahn gerichtet. Daraus folgt, daß alle $\mathfrak{E}$ gleiche Projektionen auf die Schwerpunktsbahn haben. Ferner ist $\mathfrak{E}$ für alle Momentenpunkte gleich, die auf einer Parallelen zur Schwerpunktsbahn liegen, denn für zwei solche Momentenpunkte ist der Abstand $\mathfrak{a}$ parallel zu $\mathfrak{v}_0$ und das äußere Produkt aus beiden wird daher zu Null.

Zum Begriffe der unveränderlichen Ebene gelangen wir hier, wenn wir von jedem Punkte des Haufens nur die Relativgeschwindigkeit zum Schwerpunkte betrachten, also den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = \Sigma\, \mathrm{V}\, m(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) \cdot \mathfrak{r}$$

bilden. Dieser ist für alle Momentenpunkte gleich; denn für einen zweiten Momentenpunkt hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}' &= \Sigma\, \mathrm{V} m(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}) \\ &= \Sigma\, \mathrm{V} m(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)\, \mathfrak{r} + \mathrm{V}\, \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} - \mathrm{V} M \mathfrak{v}_0 \mathfrak{a} = \mathfrak{K}, \end{aligned}$$

da sich die beiden letzten Glieder nach Gl. (100) gegeneinander fortheben. Die unveränderliche Ebene steht senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{K}$.

Wenn $\mathfrak{K}$ zu Anfang Null war, muß es auch Null bleiben. Man kann dies dahin ausdrücken, daß ein unveränderlicher Körper, der zu Anfang keine Rotation ausführte, sich nicht von selbst (durch innere Kräfte) umdrehen kann. Ein veränderlicher Körper kann es aber, wenn auch für ihn immer noch $\mathfrak{K}$ gleich Null bleiben muß; auf diesen interessanten und auch praktisch sehr wichtigen Fall werde ich nachher ausführlicher eingehen.

d) Punkthaufen, auf den äußere Kräfte einwirken, die alle von einem festen Punkte ausgehen.

In diesem Falle bezieht man den Flächensatz gewöhnlich nur auf den festen Punkt als Momentenpunkt. Da für ihn das Moment der äußeren Kräfte immer noch gleich Null ist, bleibt auch der auf ihn bezogene Drall konstant. Als unveränderliche Ebene wird auch hier oft jene bezeichnet, die senkrecht zu diesem statischen Momente steht. — Hierher gehört namentlich die Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt festgehalten ist (Kreisel), solange man die Wirkung der Schwere vernachlässigen kann. Als einzige äußere Kraft kommt dann der Auflagerdruck an dem festgehaltenen Punkte in Betracht.

e) *Punkthaufen, auf den parallele äußere Kräfte wirken.*

Zu einer einfachen Aussage gelangt man in diesem Falle dadurch, daß man den Punkthaufen auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zur Richtung der äußeren Kräfte steht und nun die Bewegung in dieser Projektionsebene verfolgt. Die Projektion von $\mathfrak{v}$ sei $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{r}'$ sei ein von einem beliebigen Momentenpunkte in der Projektionsebene nach der Projektion von m gezogener Hebelarm. Dann ist $V m\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}'$ zugleich das statische Moment von $m\mathfrak{v}$ in bezug auf eine durch den gewählten Momentenpunkt senkrecht zur Projektionsebene gezogene Achse. Ebenso ist $V\mathfrak{P}'\mathfrak{r}'$ zugleich das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für diese Achse. Nun gilt für jeden Momentenpunkt im Raume der Flächensatz in der Form

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r}.$$

Aus jeder Gleichung zwischen gerichteten Größen läßt sich aber sofort eine Gleichung zwischen den Projektionen auf irgendeine Achse ableiten. Projizieren wir also auf eine Achse, so gilt auch

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}' = \Sigma V \mathfrak{P}' \mathfrak{r}'.$$

Dies gilt zunächst für jede beliebig gerichtete Achse. Für die parallel zu den Kräften $\mathfrak{P}$ gewählte Achse wird dagegen das statische Moment der Kräfte $\mathfrak{P}$ zu Null, da die Projektion $\mathfrak{P}'$ auf die zur Achse senkrecht stehende Projektionsebene verschwindet. Hiernach geht die Gleichung über in

$$\Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}' = \mathfrak{C}.$$

Wählt man einen anderen Momentenpunkt in der Projektionsebene, setzt also an Stelle von $\mathfrak{r}'$ etwa $\mathfrak{r}' + \mathfrak{a}$, so kommt ein neues Glied in den Ausdruck für $\mathfrak{C}$ hinein, das gleich

$$\Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{a} = V(\Sigma m \mathfrak{v}') \cdot \mathfrak{a} = V M \mathfrak{v}_0' \cdot \mathfrak{a}$$

gefunden wird. War die Schwerpunktsgeschwindigkeit von vornherein entweder Null oder parallel zur Richtung der Kräfte $\mathfrak{P}$, so beibt $\mathfrak{v}_0'$ stets gleich Null und der in der Projektionsebene genommene Drall $\mathfrak{C}$ hat für jeden Momentenpunkt denselben Wert. Natürlich kommt es dabei nicht auf die Richtung von $\mathfrak{C}$ an, die selbstverständlich ist (nämlich rechtwinklig zur Projektionsebene), sondern nur auf die Größe von $\mathfrak{C}$.

§ 19. **Einfache Anwendungen des Flächensatzes.**

Die einfachste und eine der wichtigsten Anwendungen des Flächensatzes besteht in der Entscheidung der Frage, ob und unter welchen näheren Umständen ein sich selbst überlassener Punkthaufen, zwischen dessen einzelnen Teilen beliebige innere Kräfte auftreten, sich selbst im Raume umzudrehen vermag. Fast immer wird hierbei der Flächensatz in Verbindung mit dem Schwerpunktssatze gebraucht. Nach diesem vermag sich der Punkthaufen durch innere Kräfte nicht selbst fortzubewegen, da trotz aller relativen Bewegungen zwischen den einzelnen Punkten des Haufens der Schwerpunkt stets in Ruhe bleiben muß. Früher hat man öfters in Anlehnung hieran den Flächensatz dahin ausgesprochen, daß sich ein Punkthaufen ohne fremde Beihilfe, d. h. ohne Auftreten äußerer Kräfte an ihm, auch nicht selbst umzudrehen vermöge. Dies war aber nur eine irrige Deutung des Flächensatzes, die freilich lange Zeit fast allgemein verbreitet war und als Irrtum erst erkannt wurde, nachdem ein Widerspruch zwischen ihr und den Erfahrungstatsachen festgestellt war. An der Aussage des Satzes selbst, an den Formeln, Ableitungen und Beweisen dafür brauchte übrigens nicht das Geringste geändert zu werden; nur bei der Anwendung auf den konkreten Fall muß, wie sich hierbei herausstellte, mit größerer Vorsicht verfahren werden als früher.

Diese Frage wurde erst vor nicht sehr langer Zeit — nämlich im Jahre 1894 in der Pariser Akademie der Wissenschaften — angeregt und entschieden. Es handelte sich darum, eine mechanische Erklärung dafür zu finden, wie es eine Katze fertig bringt, beim Fallen aus größerer Höhe stets mit den Füßen voran auf den Boden zu kommen. Von den Vertretern der Mechanik wurde auf Grund der üblichen älteren Deutung des Flächensatzes zunächst die Ansicht ausgesprochen, daß die Drehung nur die Folge eines Abstoßes sei, der im Augenblicke des Herabfallens, so lange also die Katze noch mit anderen Körpern in Berührung war, erteilt wurde. Man schloß auf Grund des Flächensatzes ungefähr so: Wenn der Körper während des Herabfallens zunächst keine Drehbewegung hätte, so könnte etwa die Katze den Vorderkörper nach einer ihr genehmen Richtung umdrehen. Hierbei müßte aber dem Flächensatze zufolge gleichzeitig auch eine Drehung des Hinterkörpers in entgegengesetzer Richtung zustande kommen. Wenn nun etwa vorher alle vier Beine der Katze nach oben gestanden hätten, so müßte sie, um nachher alle vier nach unten zu bringen, Vorder- und Hinterkörper nach Art eines Schraubenumlaufs gegeneinander verdreht haben.

Diese Betrachtung war an sich nicht unrichtig; es wurde dabei nur übersehen, daß noch andere Möglichkeiten einer relativen Drehbewegung der Körperteile gegeneinander bestehen, als die hier allein in Aussicht genommene zwischen

Vorder- und Hinterkörper. Daß solche noch möglich sein mußten, ergab sich alsbald durch einwandfreie Versuche, indem man Katzen mit den Beinen nach oben an Schnüren aufhing und diese vorsichtig durchschnitt, so daß die Katze außer Berührung mit anderen Körpern kam, bevor sie sich noch durch einen Abstoß eine Rotationsgeschwindigkeit zu erteilen vermochte. Sie fiel dann in einen dunklen Raum hinab, dessen Fallhöhe sie nicht vorherzusehen vermochte und kam trotzdem bei sehr verschiedenen (nicht zu kleinen) Fallhöhen stets mit den Füßen zuerst auf dem Boden an. Außerdem hat man auch die Körperbewegungen, die sie während des Fallens ausführte, noch durch eine Reihe schnell aufeinanderfolgender Momentphotographien ermittelt.

Nachdem erst die Tatsache des Umdrehens einwandfrei festgestellt war, kam man auch bald auf die mechanische Erklärung dafür. Es hätte natürlich keinen Zweck, wenn ich diese gerade an dem historischen Beispiele geben wollte; ich werde vielmehr, um das Wesen der Sache zu erklären, ein einfacheres wählen. — Der Fehler, den man früher begangen hatte, bestand vor allem darin, daß man nicht beachtet hatte, daß sich Teile eines Körpers gegen den Rest beliebig oft im gleichen Sinne zu drehen vermögen, ohne daß sich nach jedem Umlaufe die Gestalt des Körpers irgendwie verändert hätte. Faßt man z. B. mit der rechten Hand eine Stange, einen Säbel oder dgl., streckt hierauf den Arm senkrecht nach oben aus und führt mit der Stange in horizontaler Richtung eine kreisförmige Bewegung um das Handgelenk herum aus, so vermag man diese Bewegung beliebig oft im gleichen Sinne zu wiederholen. Ein Mensch, der allen äußeren Kräften entzogen frei im Raume schwebte und vorher in Ruhe wäre, müßte, wenn er die beschriebene Bewegung ausführte, sich selbst im entgegengesetzten Sinne umdrehen, als die Stange, die er über seinem Kopfe rotieren läßt. Denkt man sich ihn etwa auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zu seiner Längsachse oder senkrecht zur Rotationsachse des Stabes steht, so bestimmt sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, die er selbst ausführt, sehr einfach aus der Bedingung, daß für jeden Momentenpunkt, also etwa für die Projektion der Längsachse, das Produkt aus den Sektorengeschwindigkeiten und den Massen seines Körpers ebenso groß ist, als das gleiche für die Massen des Stabes gebildete Produkt. So lange der Stab weiter herumgeschwungen wird, dreht sich auch der Mensch im entgegengesetzten Sinne; sobald aber der Stab angehalten wird, hört auch der Mensch auf, sich weiter zu drehen. Er kommt dann wieder ganz zur Ruhe, sieht aber jetzt nach einer ganz anderen Richtung als zu Anfang. Durch das angegebene Mittel hätte er es also in der Hand, sich nach Wunsch jede beliebige Stellung im Raume zu geben.

Setzt man etwa an die Stelle des Stabes im vorigen Beispiele bei der herabfallenden Katze den Schwanz, der ebenfalls beliebig oft um die Längsachse des Körpers herumgedreht werden kann, so hat man schon eine Möglichkeit für die Wendung des Körpers nach abwärts. Es ist aber nicht einmal die einzige, wie aus den folgenden Betrachtungen leicht hervorgehen wird.

Man nehme jetzt nämlich an, daß ein seiner Gestalt nach veränderlicher Körper auf irgendeine Art schon eine gewisse Rotationsgeschwindigkeit erlangt hat. Äußere Kräfte sollen entweder ganz fehlen oder wie bei einem herabfallenden Körper parallel und den Massen proportional sein. Auf die Umdrehung des Körpers können sie dann keinen Einfluß haben und wir können daher, wenn es sich nur um die Drehbewegungen handelt, von ihnen absehen. Wenn keine äußeren Kräfte wirken, muß das Moment der Bewegungsgrößen konstant bleiben. Stellen wir uns jetzt vor, daß sich der Körper zusammenzieht, so nehmen die etwa von der Projektion des Schwerpunkts gezogenen Hebelarme ab, und da das Produkt aus ihnen und den Bewegungsgrößen konstant bleibt, muß die Winkelgeschwindigkeit der Drehung zunehmen. Wir können z. B. daraus sofort schließen, daß ein Himmelskörper, der um seine Achse rotiert, seine Winkelgeschwindigkeit vergrößert sobald er sich zusammenzieht. Würde sich etwa unser Erdball infolge von Abkühlungen zusammenziehen, so müßte die Dauer eines Tages dadurch verkürzt werden.[1])

Man betrachte ferner einen Gymnastiker, der sich bei einem Sprunge in der Luft überschlägt (sog. Salto mortale). Der Schwerpunkt beschreibt in der Luft eine Parabel. Schon beim Absprunge hat der Springer seinem Körper eine gewisse Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Schwerpunkt gehende horizontale Rotationsachse gegeben. Diese würde aber nicht ausreichen, den Körper während des Fluges durch die Luft so weit umzudrehen, daß er wieder mit den Beinen auf den Boden käme. Der Gymnastiker, der diese Bewegung freilich nur auf Grund seiner Erfahrung und ohne Kenntnis des Flächensatzes ausführt, hat es aber in der Hand, die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehbewegung beträchtlich zu steigern, dadurch, daß er seinen Körper während des Sprunges stark zusammenzieht (durch Anziehen der Arme und Beine usf.). Hierdurch gelingt es ihm, während der für das Durchlaufen der Wurfparabel gegebenen Zeit eine hinreichende Drehung des Körpers zu veranlassen, die ihn wieder mit den Beinen den Boden erreichen läßt.

Betrachtet man ferner einen vorher ruhenden Körper, der aus zwei ungefähr gleichen Teilen besteht, die sich nicht vollständig, sondern nur um einen gewissen Winkel gegeneinander zu drehen vermögen, so kann eine Umdrehung des ganzen Körpers, an deren Schluß die Anfangsgestalt wieder erreicht wird, auch auf folgende Art bewirkt werden. Man drehe zuerst den Hauptteil I in dem gewünschten Sinne, wobei frei-

---

1) Diese Aussage setzt natürlich voraus, daß eine Zeiteinheit angegeben werden kann, die als unveränderlich betrachtet werden darf. Um die etwaige Veränderlichkeit der Tagesdauer während eines längeren Zeitraumes zu prüfen, kann man sich etwa die Aufgabe stellen, die Anzahl der Lichtschwingungen für Licht von einer genau definierten Farbe oder Wellenlänge abzuzählen, die in die Dauer eines Tages hineinfallen. Hiermit ist zunächst wenigstens theoretisch die Möglichkeit gegeben, Abweichungen in der Tagesdauer nachzuweisen. Außer dem angegebenen gibt es indessen auch noch eine Reihe anderer Mittel, die zu dem gleichen Zwecke benutzt werden könnten.

lich der Hauptteil II eine entgegengesetzte Drehung ausführt. Während dieser ersten Periode soll aber durch passende Anordnung (bei einem lebenden Wesen etwa durch Ausstrecken oder Anziehen der Arme und Beine) der Hauptteil I möglichst zusammengezogen, der Hauptteil II möglichst auseinandergespreizt sein. Dann wird I eine viel größere Winkelgeschwindigkeit erlangt haben als II. Nach einiger Zeit wird die relative Drehung beider Körperteile gegeneinander eingestellt. Sofort hört damit die weitere Drehbewegung auf. Der Hauptteil I hat aber jetzt schon einen großen Winkel in dem gewünschten, der Hauptteil II nur einen kleinen Winkel im unerwünschten Sinne durchlaufen. Hierauf werde umgekehrt der Hauptteil I möglichst ausgespreizt und der Hauptteil II möglichst zusammengezogen. Wenn jetzt eine Drehung beider Teile gegeneinander vorgenommen wird, die Hauptteil II im erwünschten Sinne dreht, so wird dieser eine große und Hauptteil I eine kleine Winkelgeschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne annehmen. Wenn diese Drehung so weit vorgeschritten ist, daß beide Teile wieder in ihrer normalen Lage zueinander sind, wird sich der ganze Körper bereits um die Differenz des im erwünschten Sinne zurückgelegten großen und des im unerwünschten Sinne zurückgelegten kleinen Winkels gedreht haben. Man sieht nun ein, daß durch genügend häufige Wiederholung beider aufeinanderfolgender Relativbewegungen jede beliebige Wendung des Körpers herbeigeführt werden kann.

Die Zahl der Beispiele, bei denen man auf ähnliche Art, also bloß auf Grund der einfachsten Überlegungen ohne jede Rechnung wenigstens zu einem qualitativen Resultate kommt, ist sehr groß. Einige davon sollen noch zur weiteren Erläuterung angeführt werden.

Man nehme an, daß die Insassen eines Luftballons den Wunsch haben, ihr Fahrzeug so zu drehen, daß etwa eine andere Seite des Ballons oder der Gondel die Richtung nach der Sonne hin einnehme. Sie können dies ausführen, indem sie etwa selbst im entgegengesetzten Sinne im Korbe herumlaufen oder sich auch nur um ihre Achse drehen oder, wenn ihnen dies zu unbequem ist, indem sie einen Stab über dem Kopfe so herumschwingen, wie dies früher beschrieben wurde. Wenn dies oft genug geschehen ist, wird die gewünschte Wendung des Fahrzeugs ausgeführt sein, und sobald mit der Drehbewegung aufgehört wird, verharrt auch der Ballon in seiner neuen Stellung zur Sonne.

Ein Schiff, das ruhig auf dem Wasser liegt, kann auf einfachere Weise gewendet werden, da es leicht möglich ist, mit Hilfe von Rudern oder von Stangen, die bis auf den Grund reichen, äußere Kräfte von hinreichendem Betrage darauf wirken zu lassen, um es bald in die gewünschte Richtung zu bringen. Aber auch wenn solche Mittel nicht vorhanden oder nicht zugänglich wären, ließe sich die Wendung auf dieselbe Art bewirken, wie beim Luftballon. Hätte man etwa ein Rad, das auf dem Schiffe um eine vertikale Achse drehbar angebracht wäre, so brauchte ein Passagier dieses Rad nur hinreichend oft in einem gewissen Sinne umzudrehen, um eine Wendung des Schiffes nach der entgegengesetzten Richtung herbeizuführen. Wenn das Rad etwa in der Kajüte ohne jede Verbindung nach außen hin angebracht wäre, brauchte man diesen Raum gar nicht zu verlassen, um die gewünschte Richtungsänderung des Schiffes zu bewirken. Man könnte sogar, um einen extremen Fall zu nennen, behaupten, daß schon die genügend oft im gleichen Sinne wiederholte Drehung eines Fingerrings um den in lotrechter Richtung gehaltenen Finger mit der Zeit eine Wendung des Schiffes herbeiführen müßte, wenn die Wirkung nicht so gering wäre, daß sie neben den niemals ganz zu vermeidenden zufälligen äußeren Einflüssen verschwindet und daher durch die Beobachtung nicht bestätigt werden kann.

Zu den als „zufällig“ bezeichneten äußeren Einflüssen gehört übrigens bei den jetzt erwähnten Beispielen einer, der für den Erfolg sehr wesentlich ist und auf den, da er stets zu erwarten ist, hier noch besonders aufmerksam gemacht werden soll. Der Luftballon oder das Schiff werden nämlich, sobald sie sich infolge der auf ihnen ausgeführten Drehbewegungen selbst in umgekehrter Richtung drehen, hierbei auf einen Luft- oder Wasserwiderstand stoßen, der die Bewegung zwar zunächst nicht verhindert, ihre Geschwindigkeit aber allmählich verringert. Man kann diesem Übelstande auch nicht ohne weiteres dadurch abhelfen, daß man die Drehbewegung auf dem Fahrzeuge selbst einstellt und sie später von neuem wieder aufnimmt. Hat sich nämlich nach der ersten Ausführung der Drehbewegungen die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs durch den Luftwiderstand usf. vermindert, und man stellt hierauf die Drehbewegung ein, so verharrt das Fahrzeug nun nicht mehr in seiner augenblicklichen Stellung, sondern es dreht sich sofort entgegengesetzt der ursprünglichen Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit, die gleich dem durch Reibung oder dgl. verursachten Verluste an der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit ist. Wenn man von den vorhergehenden Ausführungen praktischen Gebrauch machen wollte, müßte man dies wohl im Auge behalten. Durchführbar wäre aber, wie man leicht erkennt, die gewünschte Wendung immer, wenn andere äußere Einflüsse außer einem derartigen Bewegungswiderstande nicht vorkämen.

Wenn alle Eisenbahnzüge der Erde und alle Schiffe, die sich auf der Fahrt befinden, die Erde stets parallel zum Äquator, etwa in der Richtung von Westen nach Osten, also im gleichen Sinne mit der Rotationsbewegung der Erde umkreisten und keine im entgegengesetzten Sinne, so müßte dadurch die Winkelgeschwindigkeit der Erde etwas herabgesetzt werden, d. h. die Dauer eines Tages müßte sich vergrößern. Sobald die Schiffe und die Züge zur Ruhe gebracht würden, müßte auch der Tag seine frühere Länge wieder annehmen. Der Einfluß wäre freilich gering; er könnte aber für genaue astronomische Messungen merklich werden, wenn es sich um die bewegten Massen von Meeresströmungen oder von Winden handelte, die eine stetige Umkreisung der Erde im gleichen Sinne ohne Kompensation durch andere damit zusammenhängende Strömungen in der entgegengesetzten Richtung ausführten.

Auch wenn ein Knabe eine Schaukel, auf der er vorher in Ruhe saß, ohne äußeren Anstoß in Bewegung setzen will, beginnt er damit, durch Anfassen der Aufhängeschnüre mit den Händen, Ausstrecken der Beine in horizontaler Richtung und Überneigen des Oberkörpers nach hinten sich selbst eine Drehbewegung zu erteilen. Betrachtet man den Aufhängepunkt der Schnüre als Momentenpunkt, so muß für ihn das Moment der Bewegungsgröße vorläufig noch Null bleiben, da die Schnurspannung durch den Momentenpunkt geht und die einzige andere äußere Kraft an der Schaukel, das Eigengewicht, zunächst ebenfalls noch. Der einen Drehung muß daher eine entgegengesetzte entsprechen und diese besteht in einer Drehung des ganzen Punkthaufens um den Aufhängepunkt, womit die gewünschte Pendelbewegung zunächst einmal eingeleitet ist. — Ich begnüge mich hier mit diesen Andeutungen, möchte aber die Bewegungen, die zum Ingangsetzen der Schaukel führen, einem genaueren Nachdenken empfehlen, da das Beispiel nach manchen Richtungen hin lehrreich ist. Man mache sich namentlich auch darüber klar, daß die Schaukel überhaupt nicht ohne äußeren Anstoß in regelmäßige Pendelbewegungen gebracht werden könnte, wenn die Aufhängeschnüre unendlich lang wären. Anstatt dessen kann man, um bei praktisch zu verwirklichenden Verhältnissen zu bleiben, auch sagen, daß es nur sehr schwer und nach sehr lange fortgesetzten zweckmäßigen Bewegungen möglich wäre, Pendelschwingungen von größerem Ausschlage herbeizuführen, wenn die Schnüre sehr lang wären, wie etwa die Seile in einem Glockenturme bei festgehaltener Glocke.

§ 20. Massenausgleich bei Schiffsmaschinen nach dem Verfahren von Schlick.

In einem Kahne, der von mehreren Personen besetzt ist, kann man sehr deutlich wahrnehmen, wie jede Bewegung eines Insassen zu einer Bewegung des Fahrzeuges führt, die auf Grund der Schwerpunkts- und Flächensätze mit Berücksichtigung der besonderen Bedingungen, denen der hier als äußere Kraft auftretende Auftrieb des Wassers unterworfen ist, leicht vorausgesehen werden kann. Man weiß auch, daß selbst unmerkliche Bewegungen, die nur in gleichen Zwischenräumen wiederholt werden, mit der Zeit zu einem starken Schaukeln des Bootes führen können. Das Boot führt dann erzwungene Schwingungen aus, die im Falle der Resonanz sehr groß werden können.

Auf einem großen Dampfschiffe macht es nichts aus, wenn einer oder mehrere Fahrgäste darin auf und ab gehen. Einerseits sind hier die bewegten Massen zu klein im Vergleiche zur Masse des ganzen Schiffes und andererseits dauert es auch zu lange, bis die herumgehenden Personen etwa von einer Schiffsseite zur anderen gelangen. Sie müßten schon sehr schnell laufen, um im gleichen Takte mit den Eigenschwingungen des Schiffes herüber und wieder hinüber gelangen zu können, um es so zu kräftigeren erzwungenen Schwingungen anzuregen.

Anders ist es aber mit den großen Dampfmaschinen, die zur Fortbewegung des Schiffes dienen. Die bewegten Teile sind hier einerseits sehr schwer, so daß sie selbst gegenüber den Massen des ganzen Schiffes nicht vernachlässigt werden können und andererseits bewegen sie sich auch mit großen Geschwindigkeiten. Es läßt sich daher leicht voraussehen, daß die Schiffe durch die Massenverschiebungen, die sich in regelmäßigem Wechsel in ihnen wiederholen, zu Schwingungen veranlaßt werden, die sich oft sehr unangenehm bemerkbar gemacht haben. Man hat daher auf Abhilfe gesonnen und diese ist in praktisch befriedigender Weise durch das von Schlick angegebene Massenausgleichsverfahren gefunden worden.

Die Forderungen, die erfüllt sein müssen, damit die bewegten Massen ganz ohne Einfluß auf die Bewegungen des Schiffes bleiben, lassen sich auf sehr einfache Weise in folgenden beiden Sätzen aussprechen:

1. Der Schwerpunkt der beweglichen Massen muß stets in relativer Ruhe zum Schiffe bleiben.

2. Der Drall der beweglichen Massen muß für

jeden auf dem Schiffe liegenden Momentenpunkt in jedem Augenblicke gleich Null sein.

Denkt man sich nämlich ein Schiff zuerst in Ruhe auf ruhigem Wasser und hierauf die Maschinen im Leerlaufe (mit abgekuppelten Schaufelrädern oder Schrauben) in Bewegung gesetzt, so muß nach dem Schwerpunktssatze der Gesamtschwerpunkt des ganzen Punkthaufens nach wie vor in Ruhe bleiben. Wenn nun dafür gesorgt ist, daß sich auch der Schwerpunkt der beweglichen Teile für sich genommen nicht verschiebt, so folgt, daß sich auch der Schwerpunkt des Schiffskörpers nicht verschieben kann. — Ferner muß nach dem Flächensatze der Drall des ganzen Punkthaufens für jeden Momentenpunkt gleich Null bleiben, da sich die äußeren Kräfte (Gewicht und Auftrieb) gegenseitig aufheben. Wird diese Bedingung aber schon von den beweglichen Massen für sich genommen erfüllt, so muß auch das Moment der Bewegungsgröße des Schiffskörpers dauernd gleich Null bleiben. Das ist aber für den als starren Körper aufzufassenden Schiffskörper nur möglich, wenn er keine Rotationsbewegung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse annimmt.

Hiermit ist bewiesen, daß der Schiffskörper, der vorher in Ruhe war, auch dauernd in Ruhe bleibt, wenn die Maschinen zu laufen beginnen. Eine Massenausgleichung, die die vorher aufgestellten beiden Forderungen erfüllt, ist demnach eine vollkommene. — Es möge hier die Bemerkung eingeschaltet werden, daß der Flächensatz (bis vor kurzem wenigstens) in technischen Kreisen längst nicht die Beachtung gefunden hat, die er in Wirklichkeit verdient. Am deutlichsten geht dies aus dem Umstande hervor, daß in den zahlreichen Arbeiten, die über den Massenausgleich bald nach seiner Einführung in deutschen und ausländischen Zeitschriften erschienen sind, niemals von dem Flächensatze Gebrauch gemacht wurde. Man kann diesen Satz freilich auch vermeiden; er ist niemals unentbehrlich, läßt sich vielmehr stets, wenn es verlangt wird, durch die Anwendung anderer Sätze ersetzen. Und zwar ist es im vorliegenden Falle das Prinzip von d'Alembert, mit dessen Hilfe die Aufgabe ebenfalls ohne Schwierigkeit gelöst werden kann. Bringt man nämlich an den bewegten Maschinenteilen die Trägheitskräfte an, so müssen diese für jede Stellung der Maschine den Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte an einem starren Körper genügen, wenn der Massenausgleich vollkommen sein soll. Für die rasche und übersichtliche Durchführung der Rechnungen und für die anschauliche Fassung ihrer Ergebnisse eignet sich aber bei diesem Beispiele der Flächensatz besser, als das d'Alembertsche Prinzip. Zugleich sei noch bemerkt, daß man überhaupt in vielen Fällen bei der Behandlung einer Aufgabe die Wahl hat, ob man sich dazu des Prinzips von d'Alembert oder des Flächensatzes bedienen will. Dabei ist aber nicht immer der Flächensatz im Vorteile. Man muß sich vielmehr mit beiden wichtigen Hilfsmitteln vollständig vertraut machen, um im einzelnen Falle das am schnellsten zum Ziele führende anwenden zu können.

Das Schlicksche Verfahren entspricht den aufgestellten Forderungen nicht streng, sondern nur annähernd. Es läßt sich ferner (von gewissen Ausnahmefällen abgesehen) nur an Maschinen zur Anwendung bringen, die mindestens vier Zylinder haben. Solche kommen bei den großen Dampfern, die Maschinen mit dreistufiger Expansion besitzen, ohnehin gewöhnlich vor, da an Stelle eines einzigen Niederdruckzylinders, der zu groß ausfallen würde, besser zwei genommen werden. Bei den großen Schnelldampfern hat man neuerdings auch Maschinen mit sechs Zylindern ausgeführt. In diesem Falle kann man sich dem vollkommenen Massenausgleiche noch mehr nähern, als bei vier Zylindern. Hier genügt es aber, wenn ich das Verfahren für den einfachsten Fall der vierzylindrigen Maschinen bespreche.

Abb. 23 gibt eine schematische Darstellung der Maschine in zwei Ansichten, mit den Zylindern I bis IV. Geachtet wird nur auf die Bewegungskomponenten der Kolben, Kolbenstangen, Pleuelstangen und Kurbeln in der Richtung der Zylinderachsen. Die dazu senkrechten Bewegungskomponenten führen gegenüber den anderen nur zu kleinen Bewegungsgrößen, die ebenso wie die Bewegungsgrößen der Steuerungsteile, Pumpen usw. vernachlässigt werden sollen, da es sich nur um die Gewinnung einer angenäherten Lösung handelt.

Der Kolbenweg x_1 des ersten Kolbens, von dessen Totpunktlage aus gerechnet, kann wie früher im I. Bande, S. 210 der 3. Auflage in erster Annäherung

$$x_1 = r_1 - r_1 \cos\varphi_1 \tag{104}$$

gesetzt werden, wenn r und φ die aus der Abbildung ersichtliche Bedeutung haben. Will man sich mit dieser Annäherung nicht begnügen, so kann man, wie hier eingeschaltet werden mag, nach den in § 32 des ersten Bandes angestellten Entwicklungen in zweiter Annäherung

$$x_1 = r_1\left(1 - \cos\varphi_1 + \frac{r_1}{l_1}\left(1 - \frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\right) \tag{105}$$

setzen, wenn die Länge der Pleuelstange mit l bezeichnet wird. Man spricht von einem Massenausgleiche „zweiter Ordnung“, wenn bei der Berechnung von dieser genaueren Formel ausgegangen wird. Bei der vierzylindrischen Maschine, auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken, kann aber nur der Ausgleich „erster Ordnung“ durchgeführt werden, der sich auf die vorhergehende einfachere Formel für x stützt.

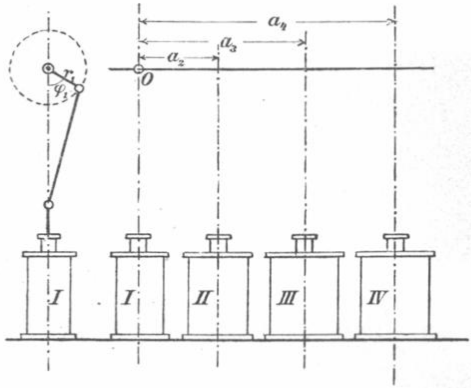

Abb. 23.

Aus dieser Formel für x folgt für die Geschwindigkeit v_1 der mit M_1 bezeichneten Masse des ersten Kolbens und seiner Zubehörteile

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = r_1 \sin\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Alle Kurbeln sind auf derselben Welle aufgekeilt und daher ist

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d\varphi_4}{dt} = u.$$

Von der Winkelgeschwindigkeit u der Schiffswelle wird angenommen, daß sie als konstant betrachtet werden könne. Gestützt wird diese Annahme durch die Überlegung, daß schon geringe Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit u zu erheblichen Änderungen in dem Drucke zwischen der Schiffsschraube und dem Fahrwasser führen, also auch eine große Mehrarbeit des Dampfes gegenüber der durchschnittlichen verlangen. Wie groß die Schwankungen von u sind, die etwa erwartet werden können, soll jetzt nicht weiter untersucht, jedenfalls soll aber an der Schickschen Annahme festgehalten werden.[1])

Für die Bewegungsgröße der Masse M_1 hat man

$$M_1 v_1 = M_1 u r_1 \sin\varphi_1 .$$

Die Richtung ist hier nicht besonders hervorgehoben; sie ist in jedem Falle als lotrecht anzusehen und geht nach oben oder unten, je nachdem $\sin\varphi$ positiv oder negativ ist. — Für die Bewegungsgröße der zum Zylinder II gehörigen verschieblichen Massen erhält man ebenso

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 \sin\varphi_2$$

oder, wenn man den konstanten Winkelunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$ mit α_2 bezeichnet,

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_2 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_2)$$

und ebenso für die Massen M_3 und M_4.

Die Bedingung, daß der Schwerpunkt der verschieblichen Massen in Ruhe bleiben soll, kommt darauf hinaus, daß die geometrische Summe der Bewegungsgrößen fortwährend gleich Null ist. Mit Rücksicht darauf, daß hier nur gleich oder entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten in Betracht zu ziehen sind, was schon durch die Vorzeichen von $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ usf. berücksichtigt ist, haben wir daher die Gleichung

---

1) Im übrigen kommt es auf die Veränderlichkeit von u, wie aus den Sätzen 1. und 2. auf S. 154 hervorgeht, solange es sich nur um die Frage des Massenausgleichs handelt, überhaupt nicht an. Wenn jene Bedingungen für irgendeine Geschwindigkeit erfüllt sind, bestehen sie auch bei jeder anderen und daher auch bei einer beliebig veränderlichen Geschwindigkeit.

$$M_1 u r_1 \sin\varphi_1 + M_2 u r_2 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_2 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_2) + \\ + M_3 u r_3 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_3 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_3) + \\ + M_4 u r_4 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_4 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_4) = 0$$

Ordnen wir nach $\sin\varphi_1$ und $\cos\varphi_1$ und streichen den gemeinsamen Faktor u, so geht die Gleichung über in

$$\sin\varphi_1 \{ M_1 r_1 + M_2 r_2 \cos\alpha_2 + M_3 r_3 \cos\alpha_3 + M_4 r_4 \cos\alpha_4 \} + \\ + \cos\varphi_1 \{ \ 0 \ + M_2 r_2 \sin\alpha_2 + M_3 r_3 \sin\alpha_3 + M_4 r_4 \sin\alpha_4 \} = 0.$$

Diese Gleichung muß für jede Kurbelstellung, also für jeden Wert des Winkels φ_1 erfüllt sein, damit der Schwerpunkt jederzeit in Ruhe bleibe. Dazu gehört, daß die beiden Klammerwerte einzeln verschwinden. Wir gelangen damit zu zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Konstanten der Maschine, die sich kürzer in der Form

$$\Sigma Mr \cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma Mr \sin\alpha = 0 \tag{106}$$

anschreiben lassen. Die Summierung erstreckt sich hierbei jedesmal auf alle vier Massen und Winkel, α_1 ist gleich Null zu setzen, indem unter α_n nach den vorausgehenden Festsetzungen immer der Winkel zu verstehen ist, den die $n$te Kurbel mit der ersten bildet (diese Winkel im Sinne der Umlaufrichtung der Maschine gezählt). — Selbstverständlich bleiben übrigens die Bedingungsgleichungen (106) auch für Maschinen mit beliebig vielen Zylindern bestehen, von denen verlangt wird, daß keine Schwerpunktsverschiebungen vorkommen, solange man nur einen Massenausgleich erster Ordnung herbeiführen will. Für einen Ausgleich zweiter Ordnung wären dagegen die vorhergehenden Betrachtungen unter Zugrundelegung von Gl. (105) an Selle von (104) in derselben Weise zu wiederholen und die Gleichungen (106) durch vier Gleichungen zu ersetzen, in die die Bedingungsgleichung für den Schwerpunkt zerfällt, wenn sie wiederum für jeden Wert des Winkels φ_1 erfüllt sein soll.

Wir bilden jetzt die statischen Momente der Bewegungsgrößen. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig, denn wenn der Schwerpunkt ruht, ist, wie wir früher fanden, das Moment für jeden Momentenpunkt gleich groß. —

Wir wählen den in Abb. 23 mit O bezeichneten Punkt oder überhaupt irgendeinen Punkt auf der Achse des Zylinders I. Das statische Moment der Bewegungsgröße der Massen I verschwindet für diesen Momentenpunkt. Das Moment für II ist

$$M_2 v_2 a_2 = M_2 u r_2 a_2 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_2 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_2),$$

wobei mit a_2, wie aus Abb. 23 ersichtlich, der Abstand der Zylinderachse II von der Zylinderachse I bezeichnet ist. Die Richtung des Moments ist nicht besonders ersichtlich gemacht; sie steht in jedem Falle senkrecht zu der Ebene, in der alle vier Zylinderachsen enthalten sind und zwischen der Richtung nach vorn oder hinten wird durch das Vorzeichen des vorausgehenden Ausdrucks schon unterschieden. — Wenn die Summe der Momente der Bewegungsgrößen für den Momentenpunkt O und hiermit auch für jeden beliebigen Momentenpunkt verschwinden soll, muß auch die algebraische Summe der nach dem vorigen Muster gebildeten Ausdrücke für alle Massen gleich Null sein. Ordnen wir wieder wie vorher nach $\sin\varphi_1$ und $\cos\varphi_1$, so lautet die Gleichung

$$\begin{aligned}\sin\varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \cos\alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \cos\alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \cos\alpha_4\} + \\ + \cos\varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \sin\alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \sin\alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \sin\alpha_4\} = 0\end{aligned}$$

und da diese für jedes φ_1 erfüllt sein soll, zerfällt sie in die beiden Bedingungsgleichungen

$$\Sigma M r a \cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r a \sin\alpha = 0\,. \qquad (107)$$

Auch hier muß man sich die Summierung wieder auf alle vier Zylinder erstreckt denken; für die erste Zylinderachse ist nämlich sowohl a_1 als α_1 gleich Null und hiermit fallen die zugehörigen Ausdrücke, wie aus der vorigen Schreibweise zu ersehen, von selbst fort.

Das Schlicksche Verfahren beruht nun darauf, die Winkel $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ und die Abstände $a_2 a_3 a_4$, die dadurch freilich noch nicht völlig bestimmt sind, jedenfalls so zu wählen, daß die Gleichungen (106) und (107) erfüllt werden. Die Massen M und die Kurbelhalbmesser r sind bei der Vornahme des Massenausgleichs durch andere Rücksichten bereits als vorgeschrieben zu betrachten. Die drei Winkel α sind dagegen zunächst ganz zur Verfügung des Konstrukteurs und von den drei Abständen a wenigstens die Verhältnisse $\frac{a_3}{a_2}$ und $\frac{a_4}{a_2}$, die ja auch in der Tat aus den Gl. (107) allein ermittelt werden können. Einer von den Winkeln α kann also willkürlich (oder auf Grund anderer Anforderungen) gewählt werden. Dann folgen die beiden anderen aus den Gl. (106) und hierauf die Abstandsverhältnisse aus den Gl. (107). Man wird natürlich die Wahl des ersten Winkels α so einrichten müssen, daß die sich aus Gl. (107) ergebenden Abstandsverhältnisse auch wirklich ausgeführt werden können. Wenn nämlich etwa $\frac{a_4}{a_2}$ sehr groß aus der Rechnung gefunden würde, so ließe sich dies nicht ausführen, weil für a_2 ein gewisses Mindestmaß wegen der Abmessungen der Maschinen und für a_4 ein gewisses Höchstmaß wegen der Dimensionen des Schiffes vorgeschrieben ist.

Die sogenannten Schlingerbewegungen, d. h. die pendelnden Bewegungen des Schiffes werden dann zustande kommen, wenn die vorher unter 2. angeführte Bedingung, also näherungsweise wenn die Gl. (107) nicht erfüllt sind. Man erkennt hieraus, daß gerade auf diese Gleichungen viel Wert zu legen ist. Den Schwerpunkt unveränderlich festzuhalten, hat man sich auch früher schon öfters bemüht; die große Bedeutung der Gl. (107) für einen praktisch befriedigenden Massenausgleich hat aber erst Schlick erkannt und damit einen wichtigen Fortschritt im Baue der großen Ozeandampfer herbeigeführt. — Zugleich erkennt man übrigens leicht aus den Gl. (106) und (107), daß eine Maschine mindestens vier Zylinder haben muß, wenn der Ausgleich erster Ordnung allgemein möglich sein soll.

Anmerkung. Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß die ganze Maschine ein Gestell hat, das hinreichend widerstandsfähig ist, um die zwischen den einzelnen Teilen auftretenden inneren Kräfte ohne merkliche Formänderung übertragen zu können. Anderenfalls würden auch bei einem vollkommenen Massenausgleiche Schwingungen entstehen können, die nicht in Bewegungen des Schiffes als starrer Körper, sondern in Formänderungsbewegungen des Schiffskörpers bestehen würden.

§ 21. Anwendung des Flächensatzes auf die Theorie der Turbinen.

Während des gleichförmigen Ganges einer Turbine besitzt der aus dem Laufrade samt Welle und Wasserinhalt bestehende Punkthaufen stets dieselbe Bewegung. Daher behält auch der auf die Umdrehungsachse bezogene Drall B dieses Punkthaufens immer denselben Wert, falls man in jedem Augenblicke immer jene Wasserteilchen in Betracht zieht, die sich grade im Laufrade befinden. Bei der Anwendung des Flächensatzes kommt es aber nicht auf den in dieser Weise berechneten Drall an, sondern auf jenen, der stets auf dieselben materiellen Punkte bezogen wird. Dieser erfährt wegen des Weiterströmens der Wassermasse durch die Turbine eine Änderung, die für ein Zeitelement dt berechnet werden soll.

Bezeichnet man mit M die Masse des die Turbine in der Zeiteinheit durchströmenden Wassers, so tritt während dt eine Wassermasse Mdt mit irgendeiner absoluten Geschwindigkeit v_1 in das Laufrad ein und eine ebenso große Masse verläßt das Rad mit einer Geschwindigkeit v_2. Die Änderung dB des auf dieselben Massen wie zu Anfang von dt bezogenen Dralls ist dann, da sich im übrigen nichts geändert hat, gleich dem Unterschiede zwischen den statischen Momenten der Bewegungsgrößen für die austretende und für die eintretende Wassermasse Mdt.

Am einfachsten ermittelt man diese Momente, indem man die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf die Richtungen der zugehörigen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufrads projiziert. Bezeichnet man diese Projektionen mit $v_1 \cos\alpha_1$ und $v_2 \cos\alpha_2$ (wobei also unter α_1 und α_2 die Winkel zwischen den Richtungen der v und der Bewegungsrichtung des Laufrads an der gleichen Stelle zu verstehen sind) und die Abstände von der Umdrehungsachse mit r_1 und r_2, so hat man

$$dB = Mdt(v_2 \cos\alpha_2 r_2 - v_1 \cos\alpha_1 r_1).$$

Nach dem Flächensatze ist dann das ebenfalls auf diese Umdrehungsachse bezogene statische Moment K der äußeren Kräfte, die (etwa durch Vermittlung einer aufgekeilten Riemenscheibe) auf die Laufradwelle übertragen werden müssen, um diese in gleichförmigem Gange zu unterhalten,

$$K = \frac{dB}{dt} = M(v_2 \cos\alpha_2 r_2 - v_1 \cos\alpha_1 r_1). \tag{108}$$

Aus K folgt die Arbeit A, die von der Turbine in der Zeiteinheit nach außen hin abgegeben wird, durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit u, also

$$A = Mu(v_2 \cos\alpha_2 r_2 - v_1 \cos\alpha_1 r_1). \tag{109}$$

Durch einfache Umrechnungen, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, kann man die absoluten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auch in den Relativgeschwindigkeiten gegen das Laufrad in Verbindung mit den Umfangsgeschwindigkeiten ur_1 und ur_2 des Laufrads ausdrücken. Die in dieser Weise umgeformte Gleichung wird von Zeuner als die erste Hauptgleichung der Turbinentheorie bezeichnet. Eine zweite Hauptgleichung, die zur vorigen hinzutreten muß, um alle in der Aufgabe vorkommenden Größen berechnen zu können, erhält man nach Zeuner, indem man für A noch einen zweiten Ausdruck auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft aufstellt und ihn dem vorigen gleichsetzt. Aus der so erhaltenen zweiten Hauptgleichung berechnet man die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser das Rad durchströmt und hierauf nach der ersten Hauptgleichung die Leistung A der Turbine, auf deren Ermittlung es namentlich ankommt.

Die weitere Durchführung der Rechnung würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen; es handelte sich hier nur darum, zu zeigen, auf wie einfache Art man mit Hilfe des Flächensatzes zur ersten Hauptgleichung gelangen kann, die sonst auf viel umständlicherem Wege abgeleitet wird.

Die Aufgaben

zu diesem Abschnitte sind mit denen der beiden folgenden vereinigt und am Schlusse des vierten Abschnitts abgedruckt.