Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

Seite

$$\sigma = \frac{P}{F} \qquad (1)\ \mathbf{8}$$

σ bezogene Spannung, P Zug- oder Druckkraft, F Querschnitt.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad (4)\ \mathbf{21}$$

τ_{xy} Schubspannungskomponente in der Richtung der Y-Achse für eine Schnittfläche, deren äußere Normale in der Richtung der positiven X-Achse geht.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)\ \mathbf{23}$$

Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben; X, Y, Z sind die Komponenten der an der Volumeneinheit angreifenden Massenkraft (Gewicht oder Trägheitskraft).

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned}\right\}, \qquad (6)\ \mathbf{25}$$

Gleichgewicht am Tetraeder; besonders angewendet für Elemente an der äußeren Umgrenzung des Körpers, wobei p_{nx} usf. die Komponenten der äußeren Druckkraft auf die Oberfläche mit der Normalen n bedeuten.

Ebener Spannungszustand.

Hier ist Seite

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \qquad (8) \; \mathbf{26}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2}, \qquad (11) \; \mathbf{28}$$

Gleichung zur Bestimmung der Hauptrichtungen des Spannungszustandes, φ der Winkel, den die Hauptschnittrichtung mit der X-Achse bildet.

$$\sigma'_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}, \qquad (12) \; \mathbf{29}$$

$\sigma'_{\max}$ und $\sigma'_{\min}$ die Hauptspannungen.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}, \qquad (13) \; \mathbf{29}$$

Gleichung zur Bestimmung der Schnittrichtung, für die die Schubspannung τ' zu einem Maximum oder Minimum wird. Für die Grenzwerte selbst hat man

$$\tau'_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \qquad (14) \; \mathbf{30}$$

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma, \qquad (18) \; \mathbf{42}$$

Hookesches Gesetz; ε bezogene Dehnung, E Elastizitätsmodul, α Dehnungskoeffizient.

$$\varepsilon = f(\sigma) \text{ oder umgekehrt } \sigma = \varphi(\varepsilon) \qquad (20) \; \mathbf{46}$$

allgemeiner Ausdruck für das Elastizitätsgesetz.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi'(\varepsilon) \qquad (21) \; \mathbf{47}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (22) \; \mathbf{47}$$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind im allgemeinen voneinander verschieden; jeder von beiden Werten wird gelegentlich als Elastizitätsmodul bezeichnet. Eine dritte Definition von E folgt aus Seite

$$E = (\varphi'(\varepsilon))_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\sigma}{f(\sigma)}\right)_{\sigma=0}, \qquad (23)\ \mathbf{48}$$

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m, \qquad (24)\ \mathbf{48}$$

Potenzgesetz; α und m sind Konstanten, die aus Versuchen entnommen werden.

$$\Delta dx = \alpha dx \sigma_x = \frac{1}{E} dx \sigma_x, \qquad (26)\ \mathbf{50}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad (27)\ \mathbf{50}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E}, \qquad (28)\ \mathbf{50}$$

Formeln für die einfache Längsspannung nach dem Hookeschen Gesetze; $\frac{1}{m}$ Konstante von Poisson, liegt gewöhnlich zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \qquad (29)\ \mathbf{51}$$

$$e = \frac{m-2}{m}\varepsilon_x = \frac{m-2}{mE}\sigma_x, \qquad (30)\ \mathbf{51}$$

Formeln für die kubische Ausdehnung e.

$$\gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G}, \qquad (31)\ \mathbf{53}$$

γ elastische Änderung eines ursprünglich rechten Winkels, die zur Schubspannung τ gehört; β Schiebungskoeffizient, G Schubelastizitätsmodul.

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E, \qquad (32)\ \mathbf{55}$$

Zusammenhang zwischen den drei Elastizitätsmaßen.

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}}, \qquad (34)\ \mathbf{61}$$

Formel zur Berechnung der reduzierten Spannung σ_{red} beim ebenen Spannungszustande; σ_{I} und σ_{II} die beiden Hauptspannungen.

Seite

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{I}} - \frac{1}{m}(\sigma_{\text{II}} + \sigma_{\text{III}}), \qquad (35) \quad 61$$

dasselbe für den allgemeinsten Spannungszustand.

$$\tau_{\text{zul}} = \frac{m}{m+1}\sigma_{\text{zul}}, \qquad (36) \quad 62$$

τ_{zul} die zulässige Spannung bei der reinen Schubbeanspruchung, σ_{zul} die zulässige Normalspannung beim einachsigen Spannungszustande.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}, \qquad (37) \quad 63$$

Formel zur Berechnung der reduzierten Spannung bei Übereinanderlagerung einer reinen Schubbeanspruchung mit einem einachsigen Spannungszustande.

$$A = \frac{P'}{\Delta l}\int_0^{\Delta l} x\,dx = \tfrac{1}{2}P'\Delta l, \qquad (38) \quad 64$$

A Formänderungsarbeit für die Kraft P' und die zugehörige Längenänderung Δl.

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}, \qquad (39) \quad 65$$

A bezogene Formänderungsarbeit beim einachsigen Spannungszustande;

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right), \qquad (40) \quad 65$$

für den ebenen Spannungszustand,

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right), \qquad (41) \quad 65$$

beim allgemeinsten Spannungszustande; und

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\tau\gamma = \tfrac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}, \qquad (42) \quad 66$$

für den Fall der reinen Schubbeanspruchung.

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

Seite

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \text{ oder } \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}, \qquad (43) \quad 80$$

Geradliniengesetz von Navier für die Spannungsverteilung bei der Biegung, σ und σ_0 Spannungen in den Abständen y und y_0 von der Nullinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0, \qquad (46) \quad 82$$

Biegungsgleichung, M Biegungsmoment, Θ Trägheitsmoment.

$$\sigma = \frac{M}{W}, \qquad (48) \quad 82$$

W Widerstandsmoment.

$$\Phi_{yz} = 0 \qquad (50) \quad 84$$

Bedingung für die Anwendbarkeit der einfachen Biegungsformel. Φ_{yz} Zentrifugalmoment.

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F, \qquad (51) \quad 86$$

Θ Trägheitsmoment für die Schwerlinie, Θ_a für eine dazu parallele Achse im Abstande a, F Querschnittsfläche.

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\,\Theta_y + \sin^2\alpha\,\Theta_z - \sin 2\alpha\,\Phi_{yz}, \qquad (52) \quad 87$$

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha, \qquad (53) \quad 87$$

Trägheitsmoment und Zentrifugalmoment für eine Schwerlinie, die mit der Y-Achse den Winkel α bildet.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}, \qquad (54) \quad 87$$

durch diese Gleichung werden die Richtungen α der Querschnittshauptachsen bestimmt.

$$i_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \qquad (56) \quad 89$$

i_α Trägheitshalbmesser.

$$i_\alpha^2 = \cos^2\alpha\, i_y^2 + \sin^2\alpha\, i_z^2, \qquad (57) \quad 89$$

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z, \qquad (61) \quad 92$$

Θ_p das polare Trägheitsmoment.

Seite

$$\sigma = \frac{M \cos\alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin\alpha}{\Theta_y} \cdot z, \qquad (62) \; \mathbf{94}$$

Spannungsberechnung bei schiefer Belastung. Speziell für den rechteckigen Querschnitt:

$$\sigma = \frac{6\,Mc}{b^2 h^2}, \qquad (63) \; \mathbf{96}$$

c Breite der Horizontalprojektion des Balkens, b und h Rechteckseiten.

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2}\right), \qquad (64) \; \mathbf{97}$$

Formel für die Spannungsverteilung bei exzentrischer Zug- oder Druckbelastung, u, v Koordinaten des Angriffspunktes von P, y und z Koordinaten der Stelle, zu der σ gehört, a und b Hauptträgheitshalbmesser.

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1, \qquad (65) \; \mathbf{97}$$

Gleichung der Nullinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k} = \frac{M}{W}, \qquad (68) \text{ und } (69) \; \mathbf{107}$$

Biegungsgleichung für schiefe Belastung, k Kernweite, $W = Fk$ das Widerstandsmoment im erweiterten Sinne.

$$V = \frac{dM}{dx}, \qquad (70) \; \mathbf{111}$$

Zusammenhang zwischen Scherkraft V und Biegungsmoment M.

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y\,dF, \qquad (71) \; \mathbf{112}$$

τ_{xy} Schubspannung im gebogenen Stabe, b Querschnittsbreite im Abstande u von der Nullinie. Das Integral ist das statische Moment des jenseits u liegenden Teiles der Querschnittsfläche.

$$P = \int \Delta\sigma\,dF = \frac{Ve}{\Theta} \int y\,dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \qquad (73) \; \mathbf{119}$$

P Kraft, die von einem Niete in einem genieteten Träger zu übertragen ist, e Nietteilung, S statisches Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittsteiles.

Seite

$$d\varphi = dx\frac{M}{E\Theta}, \qquad (74)\ 120$$

$d\varphi$ Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte gegeneinander.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{E\Theta}{M}, \qquad (75)\ 120$$

ϱ Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M, \qquad (76)\ 121$$

Differentialgleichung der elastischen Linie.

$$f = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384}\frac{Ql^3}{E\Theta}, \qquad (79)\ 123$$

f Biegungspfeil eines Balkens für die gleichförmig verteilte Last Q, l Spannweite.

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta}, \qquad (82)\ 124$$

desgl. für die Einzellast P in der Mitte.

$$du = \varkappa du' = \varkappa\frac{Vdx}{GF}, \qquad (83)\ 129$$

du Einsenkung wegen des Einflusses der Schubspannungen auf die Biegungslinie, $\varkappa$ ein von der Gestalt des Querschnitts abhängiger Zahlenfaktor, nämlich

$$\varkappa = \frac{F\int \tau^2 dF}{V^2}. \qquad (84)\ 130$$

$$f' = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} + 0{,}3\frac{Pl}{Gbh} = \frac{Pl}{4Ebh}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right), \qquad (86)\ 132$$

f' Biegungspfeil für Einzellast P in der Mitte bei rechteckigem Querschnitte mit Berücksichtigung der Schubspannungen, h Balkenhöhe.

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta}dx, \qquad (87)\ 152$$

dA Formänderungsarbeit im Balkenelemente dx bei der reinen Biegung.

Seite

$$A = \tfrac{1}{2}\int\frac{M^2}{E\Theta}dx + \tfrac{1}{2}\int\frac{\varkappa V^2}{GF}dx, \qquad (89)$$ 154

Formänderungsarbeit des ganzen Balkens mit Berücksichtigung der Schubspannungen.

$$A = \tfrac{1}{2}\sum Py, \qquad (90)$$ 156

Arbeit der äußeren Kräfte gleich der aufgespeicherten Formänderungsarbeit.

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \tfrac{1}{2}\sum P\frac{\partial y}{\partial P_i} + \tfrac{1}{2}y_i, \qquad (91)$$ 158

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P\frac{\partial y}{\partial P_i}, \qquad (92)$$ 159

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i, \qquad (93)$$ 160

Formeln von Castigliano, P_i irgend eine der Lasten, y_i die elastische Verschiebung ihres Angriffspunktes im Sinne von P_i. Für eine Auflagerkraft geht dies über in

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0, \qquad (95)$$ 161

Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

$$\tfrac{1}{2}P'f_d = nP(h + f_d), \qquad (100)$$ 172

stoßweise Belastung, h Fallhöhe von P, P' die gleichwertige statische Belastung, f_d der dynamische Biegungspfeil, n ein echter Bruch, der am besten aus Versuchen zu entnehmen ist.

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}, \qquad (103)$$ 174

Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}, \qquad (111)$$ 187

Gleichung für die Änderung der Krümmung durch ein Biegungsmoment M.

Seite

$$\Delta d\varphi = ds \frac{M}{E\Theta}, \qquad (112)\ \mathbf{187}$$

$\Delta d\varphi$ elastische Verdrehung zweier Querschnitte gegeneinander.

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{a^2}\right) = \pm M, \qquad (114)\ \mathbf{189}$$

Formel für die Verbiegung eines ursprünglich kreisförmigen Stabes, x Bogenlänge von einem festen Anfangspunkte, y Ausweichung in radialer Richtung, a Radius.

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (117)\ \mathbf{192}$$

H Horizontalschub eines Bogens mit zwei Gelenken; M_b Biegungsmoment, das ein Balkenträger unter derselben Belastung an der gleichen Stelle aufzunehmen hätte, z Ordinate der Bogenmittellinie, ds Bogenelement. In der Formel ist nur auf den Einfluß der Biegungsmomente Rücksicht genommen.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int z^2 ds}, \qquad (118)\ \mathbf{192}$$

dasselbe, wenn E und Θ konstant sind.

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \qquad (119)\ \mathbf{193}$$

Horizontalschub für gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit im Grundrisse, h Pfeilhöhe, l Spannweite.

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}, \qquad (120)\ \mathbf{195}$$

Formel für den Horizontalschub mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft; F Querschnittsfläche.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + i^2) ds}, \qquad (121)\ \mathbf{196}$$

Seite

dasselbe, wenn E, Θ und F konstant sind, i Trägheitshalbmesser.

$$\Delta l = \int z \Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds, \qquad (122)$$ 197

Δl Spannweitenvergrößerung eines gekrümmten Stabes unter dem Einflusse gegebener Momente M.

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (123)$$ 201

Horizontalschub für eine Temperaturänderung des Bogens; η Produkt aus Temperaturunterschied und Ausdehnungskoeffizient.

$$\frac{\partial A}{\partial U} = -u \qquad (124)$$ 201

tritt an die Stelle der Gl. (95) von Castigliano, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden.

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l h^2}, \qquad (125)$$ 207

σ Biegungsspannung in einem Ringe von rechteckigem Querschnitte, der längs eines Durchmessers mit P zusammengedrückt wird; r mittlerer Halbmesser, h Wandstärke, l andere Querschnittsseite.

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l h^2}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right) \qquad (127)$$ 208

dasselbe, mit Berücksichtigung der Normalkraft.

$$\Delta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{Elh^3}, \qquad (128)$$ 209

Δd elastische Vergrößerung des zur Kraftrichtung senkrechten Durchmessers.

$$\Delta \varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l, \qquad (130)$$ 212

$\Delta \varphi$ Winkel, um den man eine ebene Spiralfeder aufziehen muß, bis die Kraft am äußeren Ende zu P wird; p Entfernung des äußeren Federendes von der Spindelmitte, l Länge der Spirallinie.

Seite

$$A = \tfrac{1}{2} M \Delta\varphi = \frac{(Pp)^2}{2E\Theta} l, \qquad (131) \; \mathbf{213}$$

A Formänderungsarbeit, die in der Spiralfeder aufgespeichert wird.

$$A = \frac{\sigma^2 b h l}{24E} = \frac{\sigma^2}{24E} \cdot V, \qquad (133) \; \mathbf{213}$$

dasselbe für rechteckigen Querschnitt, V das Volumen der Feder, σ die größte zulässige Spannung.

$$\sigma = \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M}{\Theta'}, \qquad (134) \; \mathbf{216}$$

Formel für die hyperbolische Spannungsverteilung unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben; r Krümmungshalbmesser der Stabachse, Θ' ein Ausdruck

$$\Theta' = \int y^2 dF - \frac{1}{r} \int y^3 dF + \frac{1}{r^2} \int y^4 dF - \cdots,$$

der von dem Trägheitsmomente Θ gewöhnlich nicht viel abweicht.

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

$$\frac{dV}{dx} = p. \qquad (135) \; \mathbf{231}$$

V Scherkraft, dx Längenelement des Stabes, p Druck für die Längeneinheit auf die Unterlage; hierfür auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p, \qquad (136) \; \mathbf{231}$$

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -p, \qquad (137) \; \mathbf{232}$$

Differentialgleichung für die elastische Linie der Eisenbahnschwelle usf.

$$p = ky \qquad (138) \; \mathbf{232}$$

k Bettungsziffer.

Seite

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x$$
$$+ C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \qquad (140) \quad 232$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E \Theta}}, \qquad (141) \quad 232$$

endliche Gleichung der elastischen Linie für die Eisenbahnschwelle. Für die Konstantenbestimmung dienen die Gleichungen (142) bis (146).

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstüzt sind.

$$\varepsilon_t = \frac{z \varphi}{x}, \qquad (147) \quad 246$$

ε_t Dehnung in tangentialer Richtung, x Abstand von der Achse, z Abstand von der Mittelfläche, φ Neigung der Normalen zur elastischen Fläche gegen die Achse.

$$\varepsilon_r = \frac{z\, d\varphi}{dx}, \qquad (148) \quad 246$$

ε_r Dehnung in radialer Richtung.

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1}(m \varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}(m \varepsilon_r + \varepsilon_t), \qquad (149) \quad 246$$

Spannungen in den beiden Hauptrichtungen.

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha, \qquad (151) \quad 248$$

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha, \qquad (152) \quad 249$$

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2}\, d\alpha\, dx; \qquad (153) \quad 250$$

bei der letzten Formel ist vorausgesetzt, daß die Platte eine gleichförmig über die Fläche verteilte Belastung p für die Flächeneinheit trägt.

Seite

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Nx^3 = 0, \qquad (155)$$ 251

Differentialgleichung des Problems; N eine Konstante, gegeben durch Gl. (154).

$$\varphi = \frac{N}{8}(r^2 x - x^3) = \frac{3(m^2-1)}{4m^2Eh^3} p(r^2x - x^3). \qquad (157)$$ 251

Lösung der Gleichung mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, wobei die Platte am Rande als eingespannt vorausgesetzt wird.

$$\sigma_{\text{red}} = E\frac{Nr^2}{4}\cdot\frac{h}{2} = \frac{3(m^2-1)}{4m^2}\cdot\frac{r^2}{h^2}p = 0{,}68\,p\frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3}, \qquad (159)$$ 252

σ_{red} Anstrengung des Materials (wird am Rande am größten).

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2, \qquad (161)$$ 253

Gleichung der elastischen Fläche.

$$f = \frac{3(m^2-1)}{16m^2Eh^3}pr^4 = 0{,}17\frac{pr^4}{Eh^3}, \qquad (162)$$ 253

f Biegungspfeil in der Mitte.

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0, \qquad (165)$$ 254

Differentialgleichung für eine Einzellast P in der Mitte; Q eine Konstante (Gl. 164).

$$\varphi = \frac{Q}{2}x\lg\frac{r}{x}, \qquad (167)$$ 254

Lösung der Gleichung, Platte am Rande eingespannt.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)}{2\pi m^2}\frac{P}{h^2} = 0{,}43\frac{P}{h^2}, \qquad (169)$$ 255

σ_{red} Anstrengung des Materials am Umfange.

$$\sigma_{\text{red}} = 0{,}43\frac{P}{h^2}\lg\frac{r}{a}, \qquad (173)$$ 257

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte; a Halbmesser des kleinen Kreises, über den man sich P verteilt denken kann (Logarithmus zur Basis e zu nehmen).

Seite

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}22\,\frac{Pr^2}{Eh^3}, \qquad (177)\ \mathbf{259}$$

Biegungspfeil (immer noch eingespannte Platte).

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3\right), \qquad (180)\ \mathbf{260}$$

tritt an Stelle von Gl. (157), wenn die Platte frei aufliegt und nicht merklich über den Auflagerkreis hinaus reicht.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0{,}87\,\frac{r^2}{h^2} p, \qquad (182)\ \mathbf{260}$$

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte, wo sie am größten wird.

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2-1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} r^4 = 0{,}70\,\frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}, \qquad (185)\ \mathbf{261}$$

f Biegungspfeil für die frei aufliegende Platte.

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}55\,\frac{Pr^2}{Eh^3}, \qquad (188)\ \mathbf{262}$$

dasselbe für Einzellast P in der Mitte.

$$\sigma = p\,\frac{r^2}{h^2}, \qquad (190)\ \mathbf{266}$$

Formel der Näherungstheorie für die kreisförmige Platte.

$$\sigma = \frac{3a-2b}{a} \cdot p\,\frac{b^2}{h^2}, \qquad (196)\ \mathbf{272}$$

Näherungsformel für elliptische Platte, a und b Halbachsen der Ellipse ($a > b$).

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p\,\frac{a^2}{h^2}, \qquad (197)\ \mathbf{274}$$

Näherungsformel für quadratische Platten, a Halbseite;

$$\sigma = 2p\,\frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{b^2}{h^2} = p\,\frac{c^2}{2h^2}, \qquad (198)\ \mathbf{275}$$

desgleichen für die rechteckige Platte, a und b Rechteckhalbseiten.

Achter Abschnitt.

Seite

Die Festigkeit von Gefäßen unter innerem oder äußerem Überdrucke.

$$\sigma = \frac{pr}{2h}, \qquad (199) \; \mathbf{279}$$

σ Wandspannung in einem dünnwandigen Kugelkessel, r Radius, p innerer Überdruck, h Wandstärke.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{m}\sigma = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{pr}{2h} = 0{,}35\,\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right), \qquad (200) \; \mathbf{279}$$

Ermittelung der zu σ gehörigen reduzierten Spannung.

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_a = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{pr}{h} = 0{,}85\,\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right), \qquad (202) \; \mathbf{281}$$

gilt für den zylindrischen Kessel.

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{c}\right)^3, \qquad (210) \; \mathbf{285}$$

p_k der kritische äußere Überdruck, der das Ausknicken der Wand eines langen zylindrischen Rohres herbeiführt, c Kreishalbmesser (Anwendung auf Flammrohre).

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - u = 0, \qquad (214) \; \mathbf{290}$$

Differentialgleichung für die elastische Verschiebung u in radialer Richtung bei dickwandigen Röhren; x Abstand von der Rohrachse.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2-b^2}{x^2} \\ \sigma_t &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2+b^2}{x^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (219) \; \mathbf{291}$$

$$\sigma_{\text{red}} = E[\varepsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2-a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right), \qquad (220) \; \mathbf{291}$$

Formeln für die Spannungen in radialer und tangentialer Richtung und für die reduzierte Spannung an der Innenseite des Rohrs; a innerer, b äußerer Halbmesser.

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

Seite

$$\tau = \frac{\tau' r}{a}, \qquad (222)\ \mathbf{301}$$

τ und τ' Torsionsspannungen in der Welle von kreisförmigem Querschnitte in den Abständen r und a.

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a, \qquad (223)\ \mathbf{301}$$

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}, \qquad (224)\ \mathbf{301}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\tau' l}{G a} = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}, \qquad (225)\ \mathbf{302}$$

Formeln für die Torsion von Wellen kreisförmigen Querschnitts, τ' Spannung am Rande, a Halbmesser, $\Delta\varphi$ Verdrehungswinkel für die Länge l, M Verdrehungsmoment.

$$\tau_{xy} = k a^2 z; \quad \tau_{xz} = -k b^2 y, \qquad (227)\ \mathbf{303}$$

Spannungsverteilungsgesetz für die Welle von elliptischem Querschnitte, a und b Halbachsen der Ellipse in der Richtung der y und z, k eine Konstante, die aus

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3} \qquad (229)\ \mathbf{305}$$

folgt.

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}, \qquad (230)\ \mathbf{306}$$

wenn $a < b$ ist.

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2, \qquad (231)\ \mathbf{308}$$

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2, \qquad (232)\ \mathbf{308}$$

für annäherungsweise Berechnung angenommenes Spannungsverteilungsgesetz für die Welle von rechteckigem Querschnitte; c_1 und k_1 Konstanten, die weiterhin berechnet werden, a und b Halbseiten des Rechtecks.

Seite

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3}z\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\\ \tau_{xz} &= -\frac{9M}{16a^3b}y\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\end{aligned}\right\},\qquad (236)\ \mathbf{310}$$

$$\tau = \frac{9M}{2a_1{}^2b_1},\qquad (238)\ \mathbf{311}$$

ebenfalls für den rechteckigen Querschnitt; in der letzten Formel ist τ die größte Spannung, a_1 die ganze kleinere und b_1 die ganze größere Rechteckseite.

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3},\qquad (240)\ \mathbf{313}$$

$$w = P\frac{4nr^3}{a^4G},\qquad (242)\ \mathbf{316}$$

$$A = P^2\frac{2nr^3}{a^4G},\qquad (243)\ \mathbf{316}$$

Formeln für die zylindrischen Torsionsfedern, r Zylinderhalbmesser, a Querschnittshalbmesser, w Zusammendrückung der Feder unter der Last P, A aufgespeicherte Formänderungsarbeit.

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}},\qquad (246)\ \mathbf{322}$$

$$v = \frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l}(u_l - u_0\cos\alpha l) + u_0\cos\alpha x,\qquad (247)\ \mathbf{322}$$

Gleichung der elastischen Linie, wenn die u die ursprünglichen Exzentrizitäten sind.

$$P_E = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2},\qquad (249)\ \mathbf{323}$$

Eulersche Formel für Lagerung zwischen Spitzen.

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P}-1},\qquad (255)\ \mathbf{326}$$

f Ausbiegung der Mitte eines vorher schon ein wenig (um f_0) gekrümmten Stabes unter der Last P.

Seite

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}, \tag{256}$$ 326

φ Drehungswinkel des Stabendes.

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1) P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1) P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}, \tag{257}$$ 328

P_K wirkliche Knickbelastung, P_D Belastung eines kürzeren Stückes bei Erreichung der Proportionalitätsgrenze, η die absolute Zahl

$$\eta = \frac{a F f_0}{\Theta}.$$

$$P_K = a F - b \frac{l F}{i} \tag{259}$$ 329

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53 \left(\frac{l}{i}\right)^2 - 120 \frac{l}{i} + 7760\right) \mathrm{atm}, \tag{260}$$ 330

empirische Formeln von v. Tetmajer, die letzte für Gußeisen, i kleinster Trägheitshalbmesser des Querschnitts.

$$P = 4 \pi^2 \frac{E \Theta}{l^2}, \tag{264}$$ 333

Eulersche Formel für beiderseits eingespannte Stäbe.

$$P = 20 \frac{E \Theta}{l^2}, \tag{268}$$ 335

desgl. für Einspannung auf einer Seite, während das andere Ende drehbar befestigt ist.

$$f = \frac{Q}{2 P \alpha} \left\{ \mathrm{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right\}, \tag{269}$$ 336

Biegungspfeil, wenn eine Knicklast P mit einer Biegungslast Q in der Mitte zusammenwirkt.

$$f = \frac{Q l^3}{48 E \Theta} \left(1 + \frac{P l^2}{10 E \Theta}\right), \tag{270}$$ 337

dasselbe, weiter entwickelt.

$$p = \varkappa \frac{l^2}{a}, \tag{273}$$ 339

Annahme für die Exzentrizität p, die der Navier-Schwarz-Rankineschen Formel zu Grunde liegt, $\varkappa$ Erfahrungskoeffizient.

Seite

$$P_{\text{zul}} = \frac{F\sigma_{\text{zul}}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} \qquad (275) \; \mathbf{340}$$

ist diese Formel selbst.

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad (276) \; \mathbf{351}$$

ε_x usf. die bezogenen Dehnungen in den Richtungen der Koordinatenachsen, ausgedrückt in den Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad (277) \; \mathbf{353}$$

γ_{xy} die Änderung des ursprünglich rechten Winkels zwischen zwei parallel zur X- und zur Y-Achse gezogenen Geraden.

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad (278) \; \mathbf{354}$$

e bezogene Volumenänderung (kubische Ausdehnung).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \qquad (279) \; \mathbf{354}$$

τ die Schubspannungskomponenten, ausgedrückt in den Verschiebungen, G Schubelastizitätsmodul.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2\,G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2\,G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (283) \; \mathbf{355}$$

σ die Normalspannungskomponenten, ausgedrückt in den Verschiebungen, m Verhältnisziffer zwischen Längsdehnung und Querzusammenziehung beim einachsigen Spannungszustande, gewöhnlich zwischen 3 und 4 liegend.

Seite

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (284)$$ **356**

Einführung des Laplaceschen Operators ∇^2.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2\eta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2\zeta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (285)$$ **357**

Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie, X, Y, Z sind die Komponenten der äußeren Massenkraft (Gewicht oder auch Trägheitskraft).

$$\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0, \qquad (286)$$ **357**

$$\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0; \qquad (287)$$ **358**

die auf die Koordinatenachsen bezogenen Grundgleichungen sind hier zu einer einzigen Vektorgleichung zusammengezogen, $\mathfrak{v}$ die Verschiebung mit den Komponenten ξ, η, ζ; $\mathfrak{P}$ die Kraft mit den Komponenten X, Y, Z; div ein aus anderen Teilen der mathematischen Physik bekanntes Operationszeichen.

$$\xi = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \qquad (289)$$ **361**

Schwingungsbewegung in einer ebenen Schallwelle, λ Wellenlänge, τ Schwingungsdauer.

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu}\cdot\frac{2m-2}{m-2}}, \qquad (291)$$ **363**

v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, μ die spezifische Masse, d. h. das Gewicht der Raumeinheit geteilt durch die Beschleunigung der Schwere.

$$\xi = A\sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0, \qquad (292)$$ **364**

für die transversale Schwingung.

Seite

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}, \qquad (294) \ \mathbf{366}$$

v_t Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen.

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \qquad (296) \ \mathbf{369}$$

diese Gleichungen kennzeichnen den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0, \qquad (308) \ \mathbf{373}$$

diese Bedingungen muß die spezifische Dehnung $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ in der Richtung der Stabachse erfüllen, wenn der durch die Gleichungen (296) angegebene Spannungszustand zustande kommen soll.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz, \qquad (309) \ \mathbf{373}$$

folgt daraus durch Integration. Damit wird die Naviersche Spannungsverteilung bei der Biegung bestätigt.

$$\xi = \varphi(y, z), \qquad (311) \ \mathbf{378}$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \qquad (316) \ \mathbf{379}$$

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x). \qquad (317) \ \mathbf{379}$$

Lösung der Grundgleichungen für den Fall der reinen Torsion; die Verschiebungskomponente ξ muß noch der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2} = 0 \qquad (318) \ \mathbf{379}$$

genügen. Bei geeigneter Festlegung des Koordinatensystems vereinfachen sich die vorigen Formeln zu

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \qquad (320) \ \mathbf{381}$$

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}, \qquad (324) \ \mathbf{382}$$

Grenzbedingung, die am Umfange erfüllt sein muß, damit die Schubspannung in die Richtung der Tangente fällt.

Seite

$$\xi = \varphi(yz) = ayz, \qquad (327)$$ 385

eine partikuläre Lösung von Gl. (318), die nach Einsetzen in die Grenzbedingung Gl. (324) zur Gleichung einer Ellipse für den Querschnittsumriß führt. Die einfachere Theorie der Torsion für den elliptischen Querschnitt wird hierbei bestätigt.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad (332)$$ 389

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2mGc, \qquad (333)$$ 389

Gleichungen für das „Spannungsfeld" in dem Querschnitte einer auf Verdrehen beanspruchten Welle (hydrodynamisches Gleichnis), v die Geschwindigkeiten, die den Spannungskomponenten proportional sind, m ein Proportionalitätsfaktor.

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{a_1{}^2 b_1}, \qquad (337)$$ 392

$$\Delta\varphi = \frac{3Ml}{a_1{}^3 b_1 G}, \qquad (339)$$ 393

Formeln für die Schubbeanspruchung $\tau_{\max}$ und den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für den rechteckigen Querschnitt, wenn die eine Rechteckseite b_1 viel größer ist, als die andere a_1; l ist die Stablänge.

Formeln von Hertz für die Berührung elastischer Körper:

a) Zwei Kugeln von den Radien r_1 und r_2:

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}, \qquad (341)$$ 398

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \qquad (342)$$ 398

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\cdot\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}, \qquad (343)$$ 398

a Halbmesser der Druckfläche, σ_0 größte Druckspannung in der Mitte der Druckfläche, α Annäherung, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, P Belastung.

b) Kugel vom Halbmesser r und Platte:

Seite

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \qquad (344)\ \mathbf{398}$$

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \qquad (345)\ \mathbf{398}$$

$$\alpha = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \qquad (346)\ \mathbf{398}$$

c) Zwei rechtwinklig gekreuzte Zylinder:

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \qquad (347)\ \mathbf{398}$$

d) Zwei parallele Zylinder:

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \qquad (348)\ \mathbf{399}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{P' E \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}, \qquad (349)\ \mathbf{399}$$

P' ist die auf die Längeneinheit der Zylinderachse kommende Belastung.

e) Zylinder und Platte:

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P' r}{E}}, \qquad (350)\ \mathbf{399}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{\frac{P' E}{r}}. \qquad (351)\ \mathbf{399}$$