

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Elfter Abschnitt. Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie.

§ 67. Ableitung der Grundgleichungen.

Zwischen den Spannungskomponenten an irgendeiner Stelle des Körpers bestehen nach den allgemeinen und jedenfalls streng richtigen Lehren der Statik zunächst nur die im ersten Abschnitte abgeleiteten Gleichungen (4) und (5). Durch die Gleichungen (4) werden die neun Spannungskomponenten auf sechs zurückgeführt und diese sind dann nur noch durch die drei Gleichungen (5) miteinander verbunden. Aus drei Gleichungen kann man aber sechs unbekannte Größen unter keinen Umständen eindeutig bestimmen; die Aufgabe, die Spannungsverteilung zu ermitteln, ist daher, wie wir schon früher geschlossen haben, statisch unbestimmt, so lange keine weiteren Angaben hinzutreten. Diese Unbestimmtheit zu heben, haben wir in den vorausgehenden Abschnitten verschiedene Hypothesen zugrunde gelegt, die nur durch Berufung auf die Übereinstimmung der aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung gerechtfertigt werden konnten. Wenn nun auch ein solches Verfahren den Ansprüchen, die man vom Standpunkte der praktischen Anwendung an die technische Mechanik stellen kann, ganz wohl genügt, so befriedigt es doch nach anderer Richtung nicht vollständig. Unser Erkenntnisdrang verlangt eine Zurückführung der zusammengesetzteren Erscheinungen auf die einfachsten und möglichst einwandfrei feststellbaren Erfahrungstatsachen. Diesem Verlangen sucht die mathematische Theorie der Elastizität zu entsprechen. Sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderung und den Spannungs-

zustand eines von gegebenen äußeren Kräften beanspruchten elastischen Körpers ohne Zuhilfenahme besonderer Hypothesen zu berechnen, indem sie sich dabei außer auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur noch auf das Elastizitätsgesetz stützt. Für verschiedene Körper ist nun freilich, wie im zweiten Abschnitte auseinandergesetzt wurde, das Elastizitätsgesetz oder der Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten und den Formänderungen von verschiedener Gestalt. Viele der für die praktische Anwendung wichtigsten Stoffe befolgen indessen das Hookesche Gesetz und auf diese allein beziehen sich die Entwicklungen der mathematischen Elastizitätstheorie, soweit sie bis heute abgeleitet wurden.

Daß es überhaupt möglich ist, die gestellte Aufgabe zu lösen, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die elastischen Verschiebungen, die ein Punkt des Körpers mit den Koordinaten x, y, z unter dem Einflusse der Belastung erfährt, seien für die Richtungen der Koordinatenachsen mit ξ, η, ζ bezeichnet. Da es nicht auf die Bewegungen ankommt, die der Körper etwa als Ganzes erfährt, sondern nur auf die relativen Verschiebungen einzelner Teile des Körpers gegeneinander, wird es sich empfehlen, das Koordinatensystem, auf das die x, y, z und die ξ, η, ζ bezogen sind, auf dem Körper selbst festzulegen, also etwa so, daß der Ursprung stets mit einem beliebig ausgewählten Punkte des Körpers zusammenfällt, die X -Achse stets durch einen zweiten und die XY -Ebene durch einen dritten Punkt des Körpers geht. Wenn sich der Körper ohne Formänderung nur als Ganzes bewegt, bleiben dann ξ, η, ζ in jeder Lage gleich Null; die drei Größen sind also bei diesen näheren Festsetzungen sehr geeignet, die elastische Formänderung zu beschreiben. Häufig ist es am bequemsten, den zweiten und dritten der vorher angeführten drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen dürfen, deren Auswahl aber sonst beliebig getroffen werden kann, unendlich nahe bei dem ersten anzunehmen. Nach dem Elastizitätsgesetze sind die Spannungskomponenten von den Formänderungen an der betreffenden Stelle des Körpers abhängig. Wenn ξ, η, ζ als Funktionen von

x, y, z bekannt und hiermit die elastische Formänderung, die der Körper erfährt, in allen Einzelheiten gegeben wäre, könnte man nach dem Elastizitätsgesetze auch die Spannungskomponenten an jeder Stelle des Körpers angeben. Jedenfalls ist es also möglich, alle Spannungskomponenten in den drei unbekanntem Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ auszudrücken. Damit werden aber die sechs unbekanntem Größen des Problems auf drei zurückgeführt, zu deren Ermittlung die durch die drei Gleichungen (5) ausgesprochenen Gleichgewichtsbedingungen im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Körpers gerade hinreichen.

In einem Falle haben wir von diesem Verfahren schon Gebrauch gemacht, nämlich bei der Untersuchung der dickwandigen Röhren in § 56. In der Tat handelte es sich dort nur um einen besonders einfachen Fall, der nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie, ohne daß von diesen bis dahin die Rede war, sofort vollständig gelöst werden konnte. Dasselbe Verfahren ist jetzt ganz allgemein auszuarbeiten und wer sich mit jener früheren Untersuchung hinreichend vertraut gemacht hat, wird nun mit geringer Mühe den Erweiterungen der dort durchgeführten Betrachtung, um die es sich hier handelt, folgen können. Darin besteht ja überhaupt der große Vorzug des Ganges von den einfacheren Erscheinungen zu den verwickelteren, daß man von vornherein ein ungefähres Bild davon besitzt, was man zu erwarten hat und nahezu erraten kann, welche Wege der Vortrag einschlagen wird. Deshalb habe ich diese allgemeineren Betrachtungen an das Ende meiner Vorlesungen, und nicht, wie es in den von den Mathematikern ausgearbeiteten Lehrbüchern zu geschehen pflegt, an den Anfang gestellt. Darin würde nur eine nutzlose, dem Verständnisse der Sache aber sehr gefährliche Erschwerung liegen.

Die elastischen Verschiebungen ξ, η, ζ sollen als sehr klein im Vergleiche zu den Abmessungen des Körpers im natürlichen Zustande, also gegenüber den Koordinaten x, y, z , vorausgesetzt werden. Wir wollen zunächst die bezogenen Dehnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ in den Richtungen der Koordinatenachsen ausdrücken. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte, die ursprünglich um dx auseinander lagen. Die Koordinaten dieser beiden Punkte im natürlichen Zustande sollen also

$$x, y, z \quad \text{und} \quad x + dx, y, z$$

gewesen sein. Nach der Formänderung gehen sie über in

$$x + \xi, y + \eta, z + \zeta$$

und

$$x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \quad y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

wobei darauf zu achten war, daß sich ξ, η, ζ um die angegebenen Differentiale ändern, wenn man zum Nachbarpunkte weiter rückt.

Aus der Strecke dx ist also durch die Formänderung die Strecke $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ geworden. Unter Benutzung unserer früheren Schreibweise haben wir also für die elastische Änderung Δdx der Strecke dx

$$\Delta dx = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die bezogene Dehnung ε_x ist aber das Verhältnis zwischen Δdx und der ursprünglichen Länge dx , also finden wir die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (276)$$

Die beiden anderen folgen auf demselben Wege, wenn man die Schicksale einer in der Richtung der Y -Achse gezogenen Strecke dy oder einer in der Richtung der Z -Achse gezogenen Strecke dz verfolgt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung liefert uns auch den Ausdruck für die kleine elastische Änderung γ_{xy} , die der ursprünglich rechte Winkel zwischen zwei Strecken dx und dy erfährt, die von dem Punkte xyz in den Richtungen der X - und

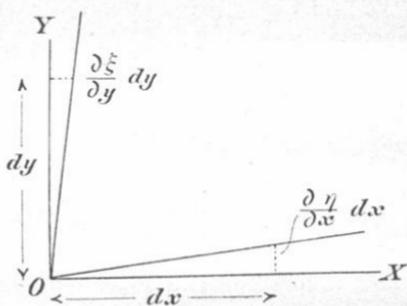


Abb. 82.

Y -Achse gezogen wurden. Um die Größe dieses Winkels nach der Formänderung mit der ursprünglichen zu vergleichen, denke ich mir den einen Winkel parallel verschoben, so daß beide Scheitel zusammenfallen. So sind sie in Abb. 82 gezeichnet. Wir brauchen dabei nur auf die kleinen Abweichungen jedes

Schenkels in der Richtung des anderen Schenkels zu achten, denn wenn auch ein Schenkel in einer Richtung senkrecht zur Ebene der Abb. 82 ein wenig abgelenkt wird, so trägt dies zur Winkeländerung nichts bei; eine solche Ablenkung, die etwa der in der Richtung der X -Achse verlaufende Schenkel erfährt, kommt nämlich auf eine Drehung des Winkels um die Y -Achse hinaus, die zu keiner Änderung der Größe des Winkels führt. Auch die Dehnung in der Richtung der X -Achse kann keinen Beitrag zur Winkeländerung γ_{xy} liefern. Wir brauchen also nur darauf zu achten, daß sich der Endpunkt der Strecke dx relativ zum Anfangspunkte um eine kleine Strecke in der Richtung der Y -Achse verschoben hat, die wir schon vorher zu $\frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ berechnet haben und daß sich ebenso der Endpunkt von dy um $\frac{\partial \xi}{\partial y} dy$ gegen den Winkelscheitel in der Richtung der X -Achse verschoben hat. Die Beträge beider Ablenkungen sind in Abb. 82 eingeschrieben. Zugleich sehen wir noch, daß der ursprünglich rechte Winkel in einen spitzen übergeht, wenn beide Differentialquotienten positiv sind.

Die Richtungsänderungen sind sehr klein; wir können daher die zugehörigen Winkel in Bogenmaß gleich ihren trigonometrischen Tangenten setzen. Die Richtungsänderung von dx trägt daher $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ zu γ_{xy} bei und ähnlich ist es mit dy . Im ganzen haben wir daher

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und diese Formel ist als streng richtig zu betrachten, falls ξ , η , ζ unendlich klein gegenüber x , y , z sind. Diese Voraussetzung trifft nun freilich bei der wirklichen Formänderung eines elastischen Körpers nicht genau zu; sie ist aber in der Regel nahezu erfüllt und man sieht ein, daß ein Fehler, der etwa hieraus entspringen könnte, gewöhnlich gar nicht in Betracht kommen wird. — Natürlich läßt sich dieselbe Betrachtung auch für die Winkeländerungen zwischen den Richtungen von dx und dz und von dy und dz wiederholen. Es ist aber

gar nicht nötig, dies wirklich auszuführen, da keine Koordinatenrichtung vor der anderen etwas voraus hat, so daß sich das vorige Resultat ohne weiteres auch auf γ_{xz} und γ_{yz} übertragen läßt. Mit Wiederholung der vorigen Formel haben wir daher den Gleichungssatz

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (277)$$

Außerdem soll noch die bezogene Volumenänderung berechnet werden, die der Körper an der betrachteten Stelle erfährt. Man denke sich ein rechtwinkliges Parallelepipid von den Kantenlängen dx , dy , dz . Mit diesem denken wir uns zuerst die Winkeländerungen γ_{xy} usf. zwischen den Kanten vorgenommen. Wenn γ_{xy} endliche Größen wären, würde dadurch das Volumen geändert. So würde z. B. die Rechteckfläche $dx \cdot dy$ in ein Parallelogramm von der Fläche

$$dx \cdot dy \cdot \cos \gamma_{xy}$$

übergehen. Wenn γ_{xy} klein von der ersten Ordnung ist, weicht aber der Kosinus dieses Winkels nur um eine Größe zweiter Ordnung von der Einheit ab. Die Änderung des Volumens durch diese Richtungsänderungen kann daher vernachlässigt werden; streng ist dies freilich auch wieder nur dann zulässig, wenn ξ , η , ζ wirklich unendlich klein sind.

Hierauf sollen die Kantenlängen um Δdx usf. geändert werden. Dadurch tritt eine Änderung des Volumens ein, die im Vergleiche zum ursprünglichen Volumen nur von der ersten Ordnung klein ist. Diese Änderung kommt daher allein in Betracht. Das Volumen nach der Streckung der Kanten ist

$$dx(1 + \varepsilon_x)dy(1 + \varepsilon_y)dz(1 + \varepsilon_z)$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren und die kleinen Größen höherer Ordnung fortlassen

$$dxdydz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Als bezogene Volumenänderung e bezeichnen wir das Verhältnis zwischen der Änderung des Volumens und dem ursprünglichen Volumen und wir haben daher

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

oder nach den Gl. (276)

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (278)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt auch die Spannungskomponenten in ξ , η , ζ ausdrücken. Am einfachsten gelingt dies mit den Schubspannungen, denn nach Gl. (12), die wegen des Superpositionsgesetzes ohne weiteres auf unseren Fall übertragen werden kann, ist z. B.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

und mit Rücksicht auf die Gl. (277) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (279)$$

Nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze bestehen zwischen den Dehnungen und den Normalspannungen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\}. \quad (280)$$

Wenn wir sie addieren und für die Summe der bezogenen Dehnungen die bezogene Volumenänderung e einführen, erhalten wir daraus

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} Ee. \quad (281)$$

Die erste der vorausgehenden Gleichungen läßt sich aber schreiben

$$E\varepsilon_x = \frac{m+1}{m} \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{m+1}{m} \sigma_x - \frac{Ee}{m-2}$$

und deren Auflösung nach σ_x liefert

$$\sigma_x = \frac{mE}{m+1} \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right). \quad (282)$$

Man kann diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, wenn man sich erinnert, daß nach Gl. (32)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

gesetzt werden kann. — Die Gl. (280) waren für σ_x , σ_y , σ_z ganz symmetrisch gebaut; wir können daher die Lösung (282) ohne weitere Bemühungen sofort auch auf die beiden anderen Unbekannten σ_y und σ_z übertragen. Mit Benutzung der angeführten Vereinfachung und mit Rücksicht auf die Gl. (276) erhalten wir daher die Ausdrücke für die Normalspannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

Damit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt hatten, gelöst. Wir haben jetzt die unbekanntenen Spannungskomponenten auf nur noch drei unbekanntene Größen ξ , η , ζ zurückgeführt und es bleibt uns nur noch übrig, diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die durch die Gl. (5) ausgesprochen werden, einzusetzen.

Die Gl. (5) lauteten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der durch die Gl. (279) und (283) gegebenen Werte geht die erste von ihnen über in

$$\begin{aligned} 2G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) \\ + G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \end{aligned}$$

Um diese auf eine übersichtlichere Form zu bringen, nehmen wir noch einige kleine Änderungen mit ihr vor. Zunächst erhält man durch Division mit G und etwas geänderte Zusammenfassung der einzelnen Glieder

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}\right) + \frac{2}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Für die drei in der ersten Klammer zusammengefaßten Glieder benutzen wir eine in der mathematischen Physik sehr häufig gebrauchte Bezeichnung. Es macht sich nämlich fast in allen physikalischen Theorien nötig, von den unbekanntenen Funktionen, die in ihnen auftreten, die Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den drei Achsenrichtungen zu nehmen. Zuerst geschah dies in der Potentialtheorie von Laplace. Man bezeichnet daher die Rechenvorschrift, die Summe dieser drei zweiten Differentialquotienten nach den Achsenrichtungen zu bilden, als die Laplacesche Operation. Um diese Rechenvorschrift anzugeben, setzen wir vor die Funktion, auf die sie Anwendung finden soll, das Zeichen ∇^2 . Oft wird dafür auch nur einfach Δ geschrieben; wegen des Zusammenhanges mit anderen Lehren, auf die es hier nicht weiter ankommt, entscheide ich mich aber für das zuerst genannte Zeichen. Um kurz anzudeuten, was ich eben ausführlicher auseinandersetzte, kann man

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (284)$$

schreiben. Natürlich ist dies in solcher Form noch keine Gleichung im eigentlichen Sinne; man hat vielmehr in Gedanken überall hinter die Operationszeichen die Veränderlichen zu setzen, auf die sich die Operationen beziehen sollen.

Ich komme jetzt zu den in der zweiten Klammer zusammengefaßten Gliedern der vorausgehenden Gleichung. Jedes dieser Glieder ist ein Differentialquotient nach x , und ihre Summe kann daher gleich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \text{ oder gleich } \frac{\partial e}{\partial x}$$

gesetzt werden. Diese Summe kann daher mit dem nächstfolgenden Gliede der Gleichung zusammengefaßt werden. Hiermit nimmt die Gleichung, die die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen gegen ein Verschieben nach der X-Richtung ausspricht, die übersichtlichere Form an

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0, \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0, \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

Ich habe sofort die für die beiden anderen Koordinatenrichtungen geltenden Gleichungen hinzugefügt, die genau auf dieselbe Weise gefunden werden wie die erste.

Die Gl. (285) bilden die Ausgangsgleichungen für alle ferneren Untersuchungen der mathematischen Elastizitätstheorie. Ich möchte noch einmal betonen, daß sie nichts anderes sind, als die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben, die früher in den Gl. (5) ihren Ausdruck gefunden hatten. In der neuen Form sieht man den Gl. (285) ihre physikalische Bedeutung nicht so leicht an; es ist aber durchaus nötig, daß man sich diesen Sinn der Gleichungen stets vor Augen hält, und es ist daher sehr anzuraten, daß man sich die vorausgegangene Ableitung so lange genau im einzelnen überlegt, bis man nicht mehr darüber im Zweifel sein kann.

Schließlich bemerke ich noch, daß man die drei Komponenten-gleichungen (285) auch zu einer einzigen Gleichung zwischen gerichteten Größen zusammenfassen kann, deren physikalische Bedeutung dann darauf hinausläuft, daß die geometrische Summe aller an dem Umfange eines Körperelementes auftretenden Spannungen gleich Null sein muß. Wird nämlich die Verschiebung des Punktes xyz der Größe und Richtung nach mit \mathbf{v} bezeichnet, so also, daß ξ, η, ζ die Komponenten von \mathbf{v} sind, ferner die äußere Kraft mit \mathfrak{P} , so gehen die Gl. (285) über in

$$\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{m}{m-2} \nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0. \quad (286)$$

Ich mache von dieser Form in der Folge nicht Gebrauch und will mich daher nicht damit aufhalten, die Bedeutung des Zeichens

∇ noch näher, als schon aus dem Zusammenhange hervorgeht, zu erklären. In der Dynamik wird dies geschehen. Auch nur ganz gelegentlich erwähne ich für Leser, die schon näher mit der mathematischen Physik auf anderen Gebieten (namentlich mit der Elektrizitätslehre) vertraut sind, daß Gl. (286) auch noch

$$\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0 \quad (287)$$

geschrieben werden kann. Obschon ich übrigens in diesem Bande von dem Rechnen mit gerichteten Größen keinen Gebrauch gemacht habe, wird man doch schon bei einem einfachen Vergleiche der Gl. (286) oder (287) mit (285) begreiflich finden, daß es Leute gibt — zu denen ich gehöre — die es als einen Fortschritt der Theorie betrachten, wenn mit den gerichteten Größen unmittelbar gerechnet wird, anstatt daß man jede einzelne Tatsache durch drei verschiedene Gleichungen zum Ausdrucke bringt.

§ 68. Wellenbewegungen in elastischen Körpern.

Bei den meisten Aufgaben der Festigkeitslehre spielt die auf die Masse des Körpers übertragene Fernkraft \mathfrak{P} mit den Komponenten X, Y, Z gar keine Rolle. Gewöhnlich besteht sie nur aus dem Gewichte des Körpers und häufig genug würde sich der Spannungszustand kaum merklich ändern, wenn der Körper ganz gewichtslos wäre und nur die an der Oberfläche übertragenen äußeren Kräfte an ihm wirkten. In solchen Fällen vereinfachen sich die Gl. (285) entsprechend, indem die letzten Glieder auf der linken Seite fortfallen. Mit derartigen Fällen werde ich mich in den folgenden Paragraphen ausschließlich beschäftigen; hier soll aber auf eine Anwendung der Gl. (285) aufmerksam gemacht werden, bei der diese Glieder beibehalten werden müssen.

Wenn der Körper nicht im Gleichgewichte, sondern in ungleichförmiger Bewegung begriffen ist, müssen sich die an dem Umfange eines Körperelementes übertragenen Spannungen samt dem Gewichte des Elementes zu einer Resultierenden zusammensetzen, die nach dem dynamischen Grundgesetze aus der Beschleunigung des Elementes berechnet werden kann.

Ein rechtwinkliges Parallelepipid von den Kantenlängen dx , dy , dz hat die Masse

$$\mu dx dy dz,$$

wenn mit μ die spezifische Masse (das spezifische Gewicht, geteilt durch die Beschleunigung der Schwere) bezeichnet wird. Die elastischen Verschiebungen ξ , η , ζ sollen jetzt nicht nur Funktionen des Ortes, sondern auch Funktionen der Zeit t sein. Die Komponenten der Beschleunigung, die das Körperelement in einem gegebenen Augenblicke erfährt, werden durch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

dargestellt und die Resultierende aller an dem Körperelemente angreifenden Kräfte muß nach dem dynamischen Grundgesetze die Komponenten

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx dy dz,$$

haben. Anstatt die Aussage in dieser Form zu machen, kann man sich auch eine Kraft an jedem Körperelemente zugefügt denken, deren Komponenten den soeben angegebenen entgegengesetzt sind. Die wirklich vorhandenen Kräfte mit Einschluß dieser willkürlich zugefügten müssen dann im Gleichgewichte stehen. Das ist die Überlegung, nach der man jeden Fall der Bewegung auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. In der Dynamik wird davon weiter die Rede sein; ich will aber jetzt schon erwähnen, daß man eine solche Schlußweise mit dem Namen des d'Alembertschen Prinzips bezeichnet.

Die willkürlich zugefügte Kraft, durch die wir den Fall auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen, ist wie das Gewicht und wie andere Fernkräfte dem Volumen des Körperelementes proportional. Es ist daher am einfachsten, wenn wir sie unmittelbar mit \mathfrak{P} , oder ihre Komponenten mit X , Y , Z vereinigen. Man hat dann nur den Faktor $dx dy dz$ von den vorausgehenden Ausdrücken zu streichen, um die Kraft auf die Volumeneinheit zu beziehen und die zurückbleibenden Fak-

toren mit gewechselten Vorzeichen zu X bzw. Y oder Z zu addieren.

Gegenüber diesen nach dem d'Alembertschen Prinzip zugefügten Massenkräften, die bei schnellen Schwingungen sehr groß werden können, ist das Eigengewicht des Körperelements gewöhnlich unbedeutend. Dieses hat übrigens ohnehin auf die elastischen Schwingungen, die wir untersuchen wollen, keinen Einfluß, da es keinem periodischen Wechsel unterworfen ist, sondern stets unter den gleichen Bedingungen und in gleicher Richtung und Größe auf den Körper einwirkt. Wir können uns daher den Körper ebenso gut auch als gewichtslos — aber nicht als masselos! — denken, d. h. wir können uns ihn etwa auf den Mond oder an eine andere Stelle mit noch kleinerer Beschleunigung der Schwere versetzt denken, ohne daß sich an den elastischen Bewegungen etwas ändern würde, vorausgesetzt, daß nur alle übrigen Bedingungen ungeändert blieben.

Dann bleibt als Massenkraft nur die Kraft $-\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ in der Richtung der X -Achse usf. zurück, und die Gl. (285) nehmen die Form an

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (288)$$

Diese Gleichungen sprechen das Gesetz aus, nach dem sich eine elastische Formänderung im Verlaufe der Zeit innerhalb eines elastischen Körpers ausbreiten muß. Wir wissen schon aus der Erfahrung, daß dies in Form einer Welle geschieht; eine besondere Art dieser Wellen kennen wir als die Schallwellen. Wir wollen zunächst sehen, was aus den Gl. (288) über die Schallwellen zu schließen ist.

Betrachten wir eine ebene Schallwelle, die sich in der Richtung der X -Achse ausbreitet und erinnern wir uns, daß nach den Lehren der Experimentalphysik die Schallbewegung

als eine periodische Bewegung aufzufassen ist, die bei einem einfachen Tone als eine Sinusfunktion der Zeit dargestellt werden kann, so werden wir zu der Ansicht geführt, daß

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad (289)$$

eine mögliche Schwingungsform des elastischen Körpers darstellen müsse. Wenn ich vorher sagte, daß eine Sinusfunktion aus den Versuchen zu entnehmen wäre, so ist damit natürlich nur gemeint, daß sich die Versuchsergebnisse ungefähr so darstellen lassen. Ob der gewählte Ansatz genau richtig ist, kann erst geschlossen werden, indem man prüft, ob er die Gl. (288) erfüllt. Im übrigen bemerke ich noch zu den Konstanten, die in den Ausdruck für ξ aufgenommen wurden, daß A den größten Wert darstellt, den ξ während der Schwingung erreicht; man nennt A die Amplitude oder den Ausschlag der Schwingung. Die Konstante λ hat die Bedeutung der Wellenlänge der Schwingung, denn wenn man x um λ vermehrt, ohne die Zeit zu ändern, vergrößert sich der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um 2π , die frühere Wertreihe des Sinus wiederholt sich also von diesem Punkte an wieder, wenn wir darüber hinausgehen. Ebenso hat τ die Bedeutung der Dauer einer vollen Schwingung, da die Änderung von t um τ oder um ein Vielfaches davon nichts an dem Sinus oder an ξ ändert. Denkt man sich gleichzeitig x und t ein wenig vermehrt, so kann ξ denselben Wert beibehalten; man sagt dann, die Welle habe sich in der Zeit Δt um die Strecke Δx fortbewegt. In der Tat finden sich nach Δt alle Zustände (alle Phasen, wie man zu sagen pflegt) in derselben Aufeinanderfolge, aber um die Strecke Δx in der Richtung der X -Achse, verschoben, falls nur

$$\frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{\tau} = 0$$

ist. Man kann nun auch von der Geschwindigkeit reden, mit der sich die Welle fortpflanzt. Dabei muß man nur beachten, daß hier nicht, wie sonst in der Mechanik, darunter die Be-

wegung eines Körpers, also etwa die Bewegung gemeint ist, die das Volumenelement im gegebenen Augenblicke ausführt, sondern nur die Geschwindigkeit, mit der ein gewisser genau definierbarer Zustand fortschreitet. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallbewegung mit v , so ist v bestimmt durch

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

oder, wenn man das Verhältnis der Werte Δx und Δt aus der vorausgehenden Gleichung entnimmt,

$$v = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (290)$$

Nach diesen Vorbemerkungen müssen wir prüfen, ob der durch die akustischen Erscheinungen nahegelegte Ansatz (289) die Gl. (288) befriedigt. Dabei ist wohl zu bedenken, daß diese Gleichungen auf allgemeinen Gesetzen der Mechanik, an deren strenger Gültigkeit kein Zweifel bestehen kann und außerdem nur noch auf dem Hookeschen Elastizitätsgesetze beruhen. Sofern auch dieses letzte bei dem betreffenden Stoffe erfüllt ist, können wir den Ergebnissen der Gleichungen (288) unbedingtes Vertrauen entgegenbringen. — Wir bilden zunächst die spezifische Volumenänderung e . Durch Einsetzen der Werte (289) in Gl. (278) finden wir

$$e = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

und hiermit werden die Differentialquotienten von e

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (288) sind erfüllt, da sich jedes der in ihnen vorkommenden Glieder auf Null reduziert. Ferner ist nach (289)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Daher reduziert sich in diesem Falle $\nabla^2 \xi$ auf

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

d. h. auf denselben Wert wie $\frac{\partial e}{\partial x}$. Auch nach t läßt sich ξ ohne weiteres differenzieren und wenn man alle diese Werte in die erste der Gl. (288) einsetzt, geht sie über in

$$-\frac{2m-2}{m-2} A \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) = -\frac{\mu}{G} A \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right).$$

Man sieht, daß diese Gleichung in der Tat identisch erfüllt ist, ohne Rücksicht auf den Wert der Amplitude A , d. h. der Stärke des Schalls, falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{2m-2}{m-2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu}{G} \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)^2$$

zwischen Wellenlänge λ und Schwingungsdauer τ befriedigt ist. Beide müssen notwendig voneinander abhängen und zwar so, daß das Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur von den physikalischen Eigenschaften des Stoffes abhängig ist. Durch Auflösen der Gleichung nach $\frac{\lambda}{\tau}$ erhält man

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu} \cdot \frac{2m-2}{m-2}}. \quad (291)$$

Diese Folgerung der Theorie ist nun in der Tat in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung; namentlich der Schluß, daß lange und kurze Wellen ebenso wie schwache oder starke Wellen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden müssen, hat sich bisher vollständig bewährt.

Natürlich gilt diese ganze Ableitung nur für die Schallwellen in den elastischen festen Körpern; für die Schallwellen in der Luft läßt sich eine ähnliche Entwicklung anstellen, die ebenfalls zu einer mit Gl. (291) verwandten Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führt. — Nimmt man für Flußeisen $m = \frac{10}{3}$, $G = 850\,000$ atm und das spezifische Gewicht = 7,7, d. h. die spezifische Masse

$$\mu = \frac{0,0077 \text{ kg}}{1 \text{ cm}^3 \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = 785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4},$$

so wird

$$v = \sqrt{\frac{850\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4}}} \cdot 3,5 = 616 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 6160 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist bekanntlich $333 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Die im Flußeisen haben wir fast 20 mal so groß berechnet. In der Tat zeigt aber auch der Versuch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern viel größer ist als in der Luft.

Der Umstand, daß die Fortpflanzungsgesetze für den Schall auch bei Steinen, Mauerwerk usf. ganz gut mit den aus dem Hookeschen Gesetze abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen, gibt den stärksten Grund für die Vermutung ab, daß auch diese Körper bei sehr kleinen elastischen Formänderungen, wie sie bei Schallschwingungen vorkommen, ziemlich genau dem Hookeschen Gesetze gehorchen, obschon sie bei größeren Formänderungen erheblich davon abweichen.

Setzt man in Gl. (291) $m = 2$, so liefert sie $v = \infty$. Wir sahen schon früher (siehe S. 51), daß m nie kleiner als 2 werden kann, und daß bei $m = 2$ der Körper keine Volumenänderungen unter dem Einflusse des Spannungszustandes erfährt, daß er also unzusammendrückbar ist. In einem unzusammendrückbaren (raumbeständigen) Körper würde sich also eine longitudinale Welle, wie wir sie jetzt behandeln, mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen, d. h. von einer eigentlichen Wellenbewegung könnte gar nicht mehr die Rede sein, sondern nur von einer augenblicklichen Übertragung der an einer Stelle hervorgebrachten Störung über den ganzen Raum, den der Körper einnimmt.

Außer den longitudinalen kommen in der Physik noch die transversalen Wellenbewegungen vor. Um eine Transversalwelle analytisch darzustellen, setze ich

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0. \quad (292)$$

Die Schwingungen erfolgen hier immer noch, wie bei den Gl. (289), in der Richtung der X-Achse; dagegen fällt der Wellenzug jetzt in die Richtung der Y-Achse. Weil die Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle steht, wird die Welle als Transversalwelle bezeichnet. Für die Konstanten A , λ und τ gelten dieselben Bemerkungen wie vorher; namentlich ist auch hier immer noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wir überzeugen uns, ob der Ansatz (292) die Gleichungen (288) erfüllt. Für e erhalten wir hier

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Transversalwellen haben also die Eigentümlichkeit, daß sie ohne Änderung des Volumens vor sich gehen. Die longitudinalen Wellen werden daher im Gegensatze zu ihnen auch als Kompressionswellen bezeichnet. Ein unzusammendrückbarer Körper, wie man sich bei der Elastizitätstheorie des Lichtes den Lichtäther dachte, kann daher wohl transversale, aber keine longitudinalen Wellen fortpflanzen. Damit stimmte überein, daß das Licht aus den Polarisationserscheinungen als transversale Wellenbewegung erkannt wurde. Im Sinne dieser älteren theoretischen Optik beschrieben die Gleichungen (292) einen einfarbigen, eben polarisierten Lichtstrahl; einfarbig, weil nur Schwingungen von derselben Wellenlänge λ vorkommen und eben polarisiert, weil die Schwingungen nur in der Richtung der X-Achse, oder, wie man auch sagen kann, in der XY-Ebene erfolgen. Als Polarisationsebene wurde nach der Theorie von Fresnel die XZ-Ebene, nach der Neumannschen dagegen die XY-Ebene selbst angesehen. Mit Rücksicht auf $e = 0$ vereinfachen sich für die Transversalwellen die Gleichungen (288) zu

$$\nabla^2 \xi = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \eta = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \zeta = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (293)$$

und diese bilden die Grundlage der theoretischen Optik und zwar nicht nur der älteren, sondern auch der neueren elektromagnetischen Lichttheorie. Merkwürdigerweise führt nämlich die letztgenannte Theorie von ganz verschiedenen Ausgangspunkten doch zu fast genau denselben Gleichungen wie die Elastizitätstheorie. Die Gleichungen (293) sind daher auch allgemein unter dem Namen der Wellengleichungen bekannt.

Durch den Ansatz (292) sind die beiden letzten der Wellen-

gleichungen ohne weiteres befriedigt. Für die in der ersten vorkommende Größe $\nabla^2 \xi$ erhalten wir

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right).$$

Die Wellengleichungen sind also identisch erfüllt, wenn

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\mu}{G} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2$$

gesetzt wird und daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_t der Transversalwellen

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}. \quad (294)$$

Diese ist also immer kleiner als die Fortpflanzung der Schallwellen. Flüssigkeiten können keine Transversalwellen, sondern nur longitudinale Wellen fortleiten; so kommt es, daß die Transversal-schwingungen der gewöhnlichen festen elastischen Körper zu keinen Sinnesempfindungen Anlaß geben, weil sie durch die Luft nicht zu den Sinnesorganen (also etwa zum Ohre) fortgepflanzt werden.

§ 69. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

Bei allen folgenden Untersuchungen nehme ich an, daß die Körper in Ruhe sind und daß das Eigengewicht jenes Körpers, dessen Spannungs- und Formänderungszustand untersucht werden soll, unerheblich gegenüber den Lasten ist, die an seiner Oberfläche auf ihn übertragen werden. Diese Lasten sind außerdem überall als gegeben zu betrachten.

Man nehme nun an, daß irgend ein System von Verschiebungen ξ, η, ζ vorgeschlagen sei, von dem sich nachweisen läßt, daß es die Grundgleichungen befriedigt. Diese Grundgleichungen selbst lassen sich hier übrigens mit Rücksicht auf die ausgesprochene Voraussetzung in der einfacheren Form

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

anschreiben. Wir wollen der kürzeren Ausdrucksweise wegen ein solches System von Verschiebungen, das diese Gleichungen befriedigt, ein mögliches nennen. Damit wird nur gesagt, daß dieses System nicht gegen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verstößt, die zwischen den Spannungen an jedem Körperelemente bestehen müssen, — unter der Voraussetzung natürlich, daß der Stoff, aus dem der Körper besteht, dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorcht. Die wirklichen Verschiebungen müssen also jedenfalls zu den möglichen gehören; es fragt sich aber noch, ob die vorgeschlagenen Werte von ξ , η , ζ mit den wirklichen übereinstimmen.

Um dies zu prüfen, erinnern wir uns, daß nach den Gl. (279) und (283) zu jedem Zwangszustande — wie wir den durch die Verschiebungen ξ , η , ζ beschriebenen Zustand nennen können — ein eindeutig bestimmter Spannungszustand gehört. Mit der Annahme eines Zwangszustandes ξ , η , ζ erhalten wir daher auch überall an der Oberfläche des Körpers Spannungen, die dort mit den von außen her übertragenen Lasten im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Gleichgewichtsbedingungen an der Körperoberfläche werden durch die Gleichungen (6) ausgesprochen und sie müssen ebenfalls an jeder Stelle des Umfanges erfüllt sein, wenn der mögliche Spannungszustand mit dem wirklichen, der der besonderen Art der Belastung entspricht, übereinstimmen soll. Wir wollen jetzt annehmen, daß der aus dem vorgeschlagenen Zwangszustande abgeleitete Spannungszustand auch dieser Bedingung überall genüge. Dann läßt sich in der Tat behaupten, daß der vorgeschlagene Zwangszustand mit dem wirklichen übereinstimmt. Mit anderen Worten heißt dies, daß es nur ein einziges System von Verschiebungen ξ , η , ζ gibt, das die Grundgleichungen (295) befriedigt und zugleich zu Spannungen führt, die an der Oberfläche des Körpers den dort bestehenden Grenzbedingungen genügen.

Um dies zu beweisen, wollen wir zunächst annehmen, es wäre noch ein zweites System von Verschiebungen ξ' , η' , ζ' möglich, das alle Bedingungen ebenfalls erfüllte. Dann geben auch die Differenzen

$$\xi'' = \xi - \xi'; \quad \eta'' = \eta - \eta'; \quad \zeta'' = \zeta - \zeta'$$

ein mögliches System von Verschiebungen an, wie man durch Einsetzen dieser Werte in die Grundgleichungen (295) erkennt. Denn man hätte z. B.

$$e'' = e - e' \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi'' = \nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi'$$

und die erste der Grundgleichungen würde für das neue Verschiebungssystem übergehen in

$$\nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e'}{\partial x} = 0.$$

Nach der Voraussetzung, daß schon ξ und ξ' mögliche Verschiebungen waren, muß aber für sich

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e'}{\partial x} = 0$$

sein. In der Tat ist also dann auch

$$\nabla^2 \xi'' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e''}{\partial x} = 0$$

und ebenso bei den beiden anderen Gleichungen. Der Grund für die Möglichkeit dieser Superposition liegt darin, daß die Grundgleichungen linear sind.

Dem möglichen Verschiebungssysteme ξ'' , η'' , ξ'' entspricht nun auch ein bestimmter Spannungszustand des Körpers. Auch diese Spannungen folgen aus den früheren, für beide Fälle bestehenden durch Bildung der Differenzen, wie aus den Gleichungen (279) und (283) hervorgeht. Man hat also z. B.

$$\sigma_x'' = \sigma_x - \sigma_x'$$

usf. Wir nahmen ferner an, daß ξ , η , ξ und ξ' , η' , ξ' auch allen Grenzbedingungen genügen sollten. An jeder Stelle der Körperoberfläche bilden also sowohl die Spannungen σ_x usf. als die σ_x' usf. ein Gleichgewichtssystem mit den von außen her übertragenen Druckkräften. Die Spannungen σ_x'' usf. verlangen daher, wenn sie an der Oberfläche des Körpers auftreten sollen, daß dort gar keine Druckkräfte von außen her übertragen werden. Gehörte zu den Grenzbedingungen, daß ein bestimmter Punkt des Körpers festgehalten sei, so mußte dort sowohl $\xi = 0$ als $\xi' = 0$ usf. und daher auch $\xi'' = \xi - \xi' = 0$ sein.

Wir haben also in dem Zwangs- und Spannungszustande, der durch die Werte ξ'' usf. und σ_x'' usf. beschrieben ist, einen Zustand des Körpers vor uns, bei dem gar keine äußeren Kräfte auf diesen übertragen werden; mit anderen Worten, dieser Zustand entspricht dem natürlichen Zustande des Körpers. Nun habe ich freilich schon früher einmal darauf aufmerksam gemacht, daß selbst im unbelasteten Zustande des Körpers unter Umständen Spannungen bestehen können, z. B. die sogenannten Gußspannungen. Diese hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu tun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann. Wir wollen nur jene Spannungen ermitteln, die durch die Lasten hervorgerufen werden. Wir nehmen daher an, daß im natürlichen Zustande keine Spannungen auftreten und setzen σ_x'' usf. = 0. Ausdrücklich müssen wir uns dabei freilich daran erinnern, daß etwaige Eigen-

spannungen von unserer Untersuchung überhaupt nicht berührt werden. Mit $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, $\zeta'' = 0$ folgt aber

$$\xi' = \xi; \quad \eta' = \eta; \quad \zeta' = \zeta,$$

d. h. die beiden vorgeschlagenen Zwangszustände, die alle Bedingungen mit Einschluß der Grenzbedingungen erfüllen sollten, müssen identisch miteinander sein. Die Lösung der Aufgabe ist daher eine eindeutige, und wir sind sicher, den wahren Spannungszustand ermittelt zu haben, wenn wir nachweisen können, daß er allen aufgestellten Bedingungen entspricht.

Anmerkung. Auf einen Nachweis darüber, unter welchen Umständen man sicher sein kann, daß im unbelasteten Zustande des Körpers keine Spannungen auftreten können, habe ich hier verzichtet, anstatt dessen vielmehr ausdrücklich vorausgesetzt, daß dies im gegebenen Falle zutrefte. Manche Kritiker haben mir daraus einen schweren Vorwurf gemacht. Aber für die Zwecke, die ich hier zu verfolgen habe, reicht man mit dem unter der einschränkenden Voraussetzung gegebenen Beweise vollständig aus, und ich sehe mich daher nicht veranlaßt, an dieser Stelle weiter auf den Gegenstand einzugehen.

§ 70. Die Lösung von de Saint-Venant.

Als in den vorausgehenden Abschnitten die Biegung und die Verwindung eines Stabes untersucht wurde, nahm ich überall ohne weiteren Beweis an, daß die parallel zur Stabachse verlaufenden Fasern keinen merklichen Querdruck oder Querkzug und auch keine Schubspannungen in der Richtung quer zur Stabachse aufeinander übertrügen. Mit anderen Worten, wenn wie seither stets die X -Achse in die Richtung der Stabmittellinie gelegt ist, wurde

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad (296)$$

gesetzt. Wenn dies auch nicht gerade ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wurde doch auf Spannungen in diesen Richtungen weder bei der Biegung noch bei der Torsion niemals Rücksicht genommen. Sie wurden stillschweigend entweder als nicht vorhanden oder doch als unerheblich gegenüber jenen Spannungen angesehen, deren Berechnung durchgeführt wurde.

Man kann sich jetzt nachträglich darüber Rechenschaft geben, inwiefern dies nach der strengen Theorie zulässig ist und zu welchen weiteren Schlüssen diese strenge Theorie für einen solchen Spannungszustand führt, bei dem die Gl. (296) genau erfüllt sind. Diesen Weg hat de Saint-Venant bei seiner berühmten Untersuchung eingeschlagen.

Zunächst ist klar, daß ein solcher Spannungszustand genau nur dann verwirklicht sein kann, wenn auf die Mantelfläche des Stabes keine Druckkräfte und auch keine Reibungen oder überhaupt keine tangentialen Kräfte in der Richtung quer zur Stabachse übertragen werden, denn sonst müßten, zunächst wenigstens an der Mantelfläche selbst, wo solche äußere Kräfte angebracht wären, die in Gl. (296) aufgeführten Spannungskomponenten von Null verschieden sein, um die durch die Gl. (6) ausgesprochenen Grenzbedingungen zu erfüllen. Die Saint-Vénantsche Theorie kann daher nur für solche Stäbe genau richtig sein, bei denen nur an den beiden Endquerschnitten von außen her Lasten übertragen werden; allenfalls könnten dazu noch tangentiale äußere Kräfte an der Mantelfläche treten, die der Stabachse parallel sind. Der letzte Fall kommt aber bei den Anwendungen kaum in Frage.

Wenn wir die Spannungen mit Hilfe der Gl. (279) und (283) in den Verschiebungen ausdrücken, können wir die Gl. (296) auch durch die folgenden

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

ersetzen oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von e auch durch

$$e = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (297)$$

Die Grundgleichungen (295) gehen hiermit über in

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (298)$$

Hier sind die Werte von e , von $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ und von $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ aus den Gleichungen (297) schon eingesetzt. Dagegen ist auf die letzte der Gl. (297) noch keine Rücksicht genommen. Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, ob die Gl. (298) mit den Gl. (297) in der Tat vereinbar sind, ob also kein Widerspruch zwischen beiden besteht und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies zutreffe. Zu diesem Zwecke ist es am besten, zunächst alle Differentialquotienten nach Möglichkeit in solchen von ξ auszudrücken, um zu Gleichungen zu gelangen, die diese Veränderliche allein enthalten. Wir beginnen mit denen von η . Nach der letzten der Gleichungen (297) ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}$$

und daher, unter Berücksichtigung der zweiten der Gleichungen (297),

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = +\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \quad (299)$$

Setzen wir diesen Wert in die zweite der Gleichungen (298) ein, so geht sie über in

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \quad (300)$$

Gerade so verfahren wir, um die Differentialquotienten von ξ in η auszudrücken. Aus der letzten der Gl. (297)

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z}$$

folgt mit Rücksicht auf die zweite der Gl. (297)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = +\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} \quad (301)$$

und, wenn wir dies in die letzte der Gl. (298) einsetzen, auch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}. \quad (302)$$

Außerdem liefert die letzte der Gl. (297), wenn wir sie zweimal nach x differenzieren,

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

und hier können wir für die zweiten Differentialquotienten nach x ihre Werte aus den Gl. (300) und (302) einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \quad (303)$$

und damit haben wir schon eine sehr einfache Bedingung gefunden, der die Verschiebung ξ parallel zur Stabachse jedenfalls genügen muß, wenn der durch die Gl. (296) ausgedrückte de Saint-Vénantsche Gleichgewichtszustand verwirklicht sein soll. Wir können aber sofort auch noch einige andere Beziehungen angeben, denen die dritten Differentialquotienten von ξ unterworfen sein müssen.

Zunächst ist nach Gl. (300)

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2}$$

und andererseits nach der zweiten der Gl. (297) bei zweimaliger Differentiation nach x

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}$$

Der Vergleich beider Werte liefert

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \quad (304)$$

In derselben Weise finden wir aus Gl. (302)

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2}$$

und aus der zweiten der Gl. (297) durch Differentiation

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3},$$

also aus dem Vergleiche beider Werte

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \quad (305)$$

Bis jetzt haben wir noch keinen Gebrauch von der ersten der Gleichungen (298) gemacht, die überhaupt nur Differentialquotienten von ξ enthält. Da wir schon ziemlich viel über die dritten Differentialquotienten dieser Veränderlichen aus-

gemacht haben, wollen wir diese Gleichung noch einmal nach x differenzieren; wir finden dann

$$2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0$$

und hier können wir für das zweite und dritte Glied auf der linken Seite die in den Gl. (304) und (305) gefundenen Werte einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad (306)$$

und damit folgt zugleich auch

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0. \quad (307)$$

Durch die Gl. (303), (306) und (307) wird über die Eigenschaften der Unbekannten ξ schon ein recht genauer Einblick gewonnen. Wir können diese Gleichungen übersichtlich in folgender Weise zusammenfassen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0. \quad (308)$$

Die Form der Funktion ξ selbst läßt sich daraus zwar noch nicht bestimmen, wohl aber, was fast noch wichtiger ist, der analytische Ausdruck von $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ d. h. von der spezifischen Dehnung in der Richtung der Stabmittellinie. Diese kann nämlich, wie aus den Gl. (308) hervorgeht, x nur in der ersten Potenz enthalten (denn der zweite Differentialquotient nach x verschwindet nach diesen Gleichungen) und ebenso muß sie linear in Bezug auf y und auf z sein. Außerdem kann auch kein Glied darin auftreten, das y und z zugleich enthielte. Der allgemeinste Ausdruck, der mit den Gl. (308) verträglich ist, lautet daher

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz, \quad (309)$$

in der die a konstante Größen, also unabhängig von x, y, z sind, während sie von der Größe der Belastung des Stabes abhängig sein können und müssen.

Betrachten wir nun noch etwas näher, was wir hiermit gefunden haben. Nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

da die anderen Spannungen σ_y und σ_z Null sind. Durch Multiplikation von Gl. (309) mit E finden wir daher auch die Normalspannungen σ_x . Uns interessiert jetzt nur der Umstand, daß σ_x hierdurch als eine lineare Funktion der Querschnittskordinaten dargestellt wird. Das war aber die Annahme, von der wir willkürlich bei den Untersuchungen des dritten Abschnittes über die Biegungsfestigkeit der Stäbe ausgingen und wir finden jetzt nachträglich, daß diese Annahme gar nicht so willkürlich ist, wie sie damals hingestellt wurde, daß sie vielmehr für Körper, die dem Hookeschen Gesetze folgen, eine notwendige Folge aus der anderen Annahme ist, daß kein Anlaß zur Übertragung von Spannungen σ_y , σ_z und τ_{yz} zwischen den einzelnen Fasern gegeben sei.

Damit ist für den Fall der Biegung jede weitere Untersuchung überflüssig gemacht. Wir müßten, wenn wir die Betrachtung nach dieser Richtung hin fortsetzen wollten, notwendig wieder zu den früheren Ergebnissen gelangen, denn nachdem die Annahme von der linearen Spannungsverteilung einmal hypothetisch eingeführt war, schloß sich daran das Übrige folgerichtig und es zeigte sich namentlich, daß sich überall Gleichgewicht herstellen läßt, ohne daß Kräfte σ_y , σ_z , τ_{yz} zu Hilfe genommen werden mußten. Wir brauchen daher jetzt nicht noch einmal nachzuweisen, daß die Gl. (297) und (298), falls man die notwendige Biegung (309) erfüllt, in der Tat in Übereinstimmung miteinander sind und einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen, der bei passender Anbringung der äußeren Kräfte an den Endquerschnitten des Stabes auch sofort verwirklicht werden kann.

§ 71. Rückblick auf die vorige Entwicklung.

Wer die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zum ersten Male kennen lernt, wird sie zunächst umständlich und langwierig finden. Nachdem man sich aber einmal dazu entschlossen hat, Schritt für Schritt die ganze Betrachtung nachzuprüfen, wird man sich überzeugen, daß jeder Schritt für sich genommen ganz einfach und leicht verständlich ist. Nur die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse liegt nicht so klar zu Tage; man sieht zuerst nicht recht ein, zu was es nützen soll, die verschiedenen Differentiationen auszuführen und die Ergebnisse in der Weise, wie es geschehen war, miteinander zu vergleichen. Man bedenke aber, daß es sich darum handelte, die Verträglichkeit von sechs Gleichungen zwischen drei Unbekannten miteinander zu prüfen. Auch wenn es sich gar nicht um Differentialgleichungen, sondern um gewöhnliche Gleichungen der Algebra gehandelt haben würde, hätte man in diesem Falle danach streben müssen, zwei der Unbekannten zu eliminieren, um zu Beziehungen zu gelangen, die für die dritte Unbekannte erfüllt sein müssen. Von diesem Bestreben ist der ganze Gedankengang des vorigen Paragraphen beeinflußt und es kann nach den Erfahrungen, die man schon in der gewöhnlichen Algebra beim Auflösen von Gleichungen macht, nicht überraschen, daß gewisse Verbindungen, die den Eindruck von Kunstgriffen machen, schneller zu dem gewünschten Ziele führen, als wenn eine solche Anleitung fehlte.

Es fragt sich ferner, was nun mit dem Resultate, zu dem wir gelangt sind, für die Biegungstheorie gewonnen ist. Dabei müssen wir uns vor allen Dingen daran erinnern, daß nach den Untersuchungen von § 69 jede mögliche Lösung zur wirklichen Lösung wird, sobald die von außen her auf die Körperoberfläche übertragenen Lasten an jeder Stelle in Übereinstimmung mit dem Spannungszustande stehen, der zu dieser Lösung gehört. Denken wir uns etwa einen Balken, der auf der einen Seite eingemauert ist und an dem frei herausragenden Ende eine Last trägt. Wenn die Saint-Vénantsche

Lösung die wirkliche für diesen Balken sein soll, muß zunächst die ganze Mantelfläche des Balkens frei von Lasten sein, was hier von vornherein erfüllt ist. Ferner darf aber auch an dem Endquerschnitte die Last nicht in beliebiger Weise angebracht sein, sie muß vielmehr über die ganze Fläche dieses Endquerschnittes in der Weise verteilt sein, wie wir sie früher für die Verteilung der Schubspannungen im gebogenen Balken gefunden haben. Und schließlich muß auch die Befestigung an der Einmauerungsstelle so beschaffen sein, daß die zu der möglichen Lösung gehörigen Formänderungen, also die Querdehnung der gedrückten Fasern und die Querverkürzung der gezogenen dadurch nicht gehindert wird.

Wenn alle diese Bedingungen genau erfüllt wären, außerdem auch der Stoff, aus dem der Balken hergestellt ist, dem Hookeschen Gesetze gehorchte, könnte kein Zweifel darüber bestehen, daß die Saint-Vénantsche Lösung streng richtig wäre. In den praktisch vorkommenden Fällen kann aber von einer strengen Erfüllung der genannten Bedingungen kaum jemals die Rede sein und die ganze Betrachtung würde durch diesen Umstand sehr an Wert verlieren, wenn man nicht zeigen könnte, daß eine Verletzung dieser Bedingungen bis zu einem gewissen Grade ohne wesentlichen Einfluß auf den wirklichen Spannungszustand ist.

Man achte z. B. auf die Bedingung, daß sich die Last über den Endquerschnitt nach dem für die Schubspannungen gültigen Gesetze verteilen muß. Wenn anstatt dessen ein Strick um das freie Stabende geschlungen ist, an dem die Last aufgehängt wird, kann kein Zweifel darüber bestehen, daß in unmittelbarer Nachbarschaft des Stabendes die Spannungsverteilung durchaus von der de Saint-Vénantschen verschieden ist, da der wirkliche Spannungszustand hier jetzt ganz anderen Grenzbedingungen unterworfen ist. Je weiter man aber von dem Stabende abrückt, desto weniger Unterschied macht es aus, wie die Last in Wirklichkeit am Stabende angreift. Um dies zu erkennen, stelle man sich ein Gleichgewichtssystem äußerer Lasten vor, so daß ein Teil mit der de Saint-Venant-

schen Angriffsweise der Last am Endquerschnitte übereinstimmt, während der Rest überall genau entgegengesetzt mit den von dem Stricke übertragenen Oberflächenkräften ist. Wenn man das so zusammengesetzte Lastensystem zu dem durch den Strick verursachten hinzufügt, kommt genau die de Saint-Vénantsche Belastungsweise heraus. Der Unterschied zwischen den Spannungszuständen in beiden Fällen der Angriffsweise der Last am dem Ende wird daher durch jenen Spannungszustand angegeben, der dem angeführten Gleichgewichtssysteme der Lasten entspricht. Nun ist aber von vornherein klar, daß ein am Stabende dicht zusammengedrücktes Lastensystem, das dort im Gleichgewichte steht, zwar in der Nachbarschaft erhebliche Formänderungen und Spannungen hervorrufen kann, daß aber der Einfluß schnell verschwinden muß, wenn wir uns von dem Stabende entfernen. Mit anderen Worten: wenn ich etwa eine Schiene von einigen Metern Länge am einen Ende in einem Schraubstocke der Quere nach zusammendrücke oder sie sonst in irgend einer Weise beanspruche, so daß die hier übertragenen Kräfte unter sich im Gleichgewichte stehen, so muß der Einfluß der Behandlung, die dieses Schienenende erfährt, schnell verschwinden, je weiter entfernt von dem Ende gelegene Teile man ins Auge faßt. Damit ist aber gezeigt, daß die genauere Art der Lastübertragung von wesentlichem Einflusse nur in der nächsten Nachbarschaft der Angriffsstelle der Last ist. Auch bei einer anderen Art des Lastangriffs kann daher in einiger Entfernung von der Belastung die Saint-Vénantsche Lösung noch als hinreichend genau zutreffend angesehen werden. Bei einer Entfernung, die etwa das Drei- bis Vierfache der größten Querschnittsabmessung bildet, ist jedenfalls keine merkliche Abweichung mehr zu erwarten. Durch diesen Umstand gewinnt die im vorigen Paragraphen vortragene Theorie erst ihren vollen Wert.

Die Absicht, die uns bei dem Eintritte in die Untersuchungen der strengen Elastizitätstheorie leitete, nämlich eine befriedigendere Grundlage für die Formeln der Festigkeitslehre zu gewinnen, als sie die hypothetische Aufstellung von Form-

änderungs- oder Spannungsverteilungsgesetzen für die besonderen Fälle bildet, ist jetzt erreicht. Freilich handelt es sich dabei bis jetzt mehr um eine nachträgliche bestätigende Kritik, als um die Gewinnung neuer Ergebnisse. Immerhin ist wohl zu betonen, daß nur das lineare Spannungsverteilungsgesetz Naviers und nicht etwa die Bernoullische Annahme, daß die Querschnitte eben blieben, nachträglich als richtig erkannt wurde.

§ 72. Reine Verdrehungsbeanspruchung.

Die Untersuchungen in § 70 bezogen sich auf einen Stab, der gleichzeitig auf Biegung und auf Torsion beansprucht sein konnte. Nachdem wir die Folgerungen hervorgehoben haben, die sich aus der allgemeinen Untersuchung für die Biegunsspannungen ergeben, ist es besser, wenn wir jetzt weiterhin die Aufgabe dadurch vereinfachen, daß wir die Beanspruchung auf Verwinden für sich untersuchen. Zu diesem Zwecke setze ich also jetzt überall $\sigma_x = 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (310)$$

Mit Gl. (309) ist dieser Ansatz verträglich; er geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man annimmt, daß in dem besonderen Falle, den wir fernerhin betrachten wollen, alle mit a bezeichneten Konstanten verschwinden.

Aus Gl. (310) folgt

$$\xi = \varphi(y, z), \quad (311)$$

wenn φ irgend eine bis jetzt unbekannte Funktion der Querschnittskordinaten bedeutet. Mit Gl. (310) gehen ferner die Gl. (297), die den von de Saint-Venant untersuchten Spannungszustand näher beschreiben, in die einfachere Form

$$e = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (312)$$

über. Auch die durch die Gl. (298) ausgesprochenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich hier erheblich. Sie lauten jetzt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Außerdem gelten auch alle übrigen Gleichungen, die wir in § 70 gefunden haben, da der hier zu behandelnde Fall in dem früheren mit enthalten ist. So erhalten wir aus den Gl. (299) und (300)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (314)$$

und aus den Gl. (301) und (302)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (315)$$

Wir wissen jetzt soviel von den Differentialquotienten der Funktionen η und ξ , daß wir deren analytische Form im allgemeinen angeben können. Die Funktion η muß nämlich nach Gl. (312) unabhängig von y sein und nach Gl. (314) muß sie linear sein in bezug auf x und z . Sie ist daher von der Form

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \quad (316)$$

in der die b unbekannt, aber konstante Größen sind. Ebenso folgt für ξ

$$\xi = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x). \quad (317)$$

Fügen wir dazu noch die Gl. (311)

$$\xi = \varphi(yz),$$

so ist damit ein Wertsystem der Verschiebungen ξ , η , ξ angegeben, das zunächst einem möglichen Zwangszustande entspricht, falls nur die unbekannt Funktion $\varphi(yz)$ so gewählt wird, daß sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2} = 0 \quad (318)$$

genügt, und das außerdem auch die Bedingungsgleichungen (312) befriedigt, falls wir die Konstanten b und c so wählen, daß

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

wird. Nach Einsetzen aus Gl. (316) und Gl. (317) geht diese Bedingungsgleichung über in

$$b_2 + b_3 x + c_2 + c_3 x = 0,$$

und da diese identisch erfüllt sein muß, folgt für die Konstanten

$$c_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = -b_3. \quad (319)$$

Die Verschiebungen ξ , η , ζ wollten wir (vgl. § 67) auf ein Koordinatensystem beziehen, das auf dem Körper selbst festgelegt ist. Im Ursprunge ist daher

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Da ferner die X -Achse stets durch denselben unendlich benachbarten Punkt gehen sollte, so wird im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,$$

und da schließlich die XY -Ebene durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geführt sein sollte, muß im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

sein. Diese Festsetzungen gestatten die Bestimmung der meisten Konstanten b und c . Aus der ersten Reihe folgt nämlich

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 0,$$

aus der zweiten

$$b_1 = 0; \quad c_1 = 0,$$

und aus der dritten Bedingung

$$c_2 = 0.$$

Hierdurch und durch die Gl. (319) werden alle Konstanten b und c bis auf eine, nämlich $b_3 = -c_3$ bekannt. Diese eine noch unbekannt gebliebene Konstante sei kurz mit c bezeichnet.

Dann vereinfachen sich die Werte für die Verschiebungskomponenten wie folgt

$$\eta = cxz; \quad \xi = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \quad (320)$$

Die im Verhältnisse zu y und z nach Voraussetzung sehr kleinen Verschiebungskomponenten η und ξ lassen sich hier nach als Projektionen eines Kreisbogenelementes auf die Y - und Z -Achse auffassen, dessen Mittelpunkt auf der X -Achse liegt und das zum Zentriwinkel cx gehört. Die Konstante c bedeutet daher den auf die Längeneinheit der Welle bezogenen Verdrehungswinkel.

Die einzige erhebliche Schwierigkeit des Problems besteht jetzt noch in der Bestimmung der Funktion $\xi = \varphi(yz)$, die der Differentialgleichung (318) genügen muß. Man beachte, daß $\xi = \varphi(yz)$ für $x=0$ die Gleichung der Fläche angibt, in die der Querschnitt $x=0$ durch die Formänderung übergeht. Alle anderen Querschnitte nehmen dieselbe Gestalt an, da ξ unabhängig von x ist. Früher, als die heute als richtig erkannte de Saint-Vénantsche Theorie der Torsion noch nicht bekannt war, nahm man an, daß die Querschnitte eben blieben. Wir wollen zusehen, inwiefern dies richtig sein konnte. Nach dieser Annahme müßte ξ eine lineare Funktion von y und z sein; wir setzen also versuchsweise

$$\xi = \varphi(yz) = a_1 y + a_2 z, \quad (321)$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (318) in der Tat befriedigt, also zu einem möglichen Spannungszustande führt. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Welle zu erfüllen. Bei gewöhnlichen Torsionsaufgaben ist die Mantelfläche der Welle, abgesehen von den Stellen, wo Räder oder Riemenscheiben aufgekeilt sind, frei von äußeren Kräften. Außer den schon von vornherein gleich Null gesetzten Spannungskomponenten $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ muß also an der Oberfläche auch noch jene Schubspannungskomponente gleich Null sein, die in der durch die Stabachse und die Normale zur Oberfläche bestimmten Ebene liegt. Oder mit anderen Worten: die Schubspannung muß über den Querschnitt jeden-

falls so verteilt sein, daß sie den Umfang überall berührt: Das war die Grenzbedingung, die wir bei der Behandlung der Torsionsfestigkeit im neunten Abschnitte überall voranstellten und sie muß natürlich auch hier noch berücksichtigt werden. Bisher war von ihr noch nicht die Rede; sie ist es aber gerade, die die noch ausstehende Bestimmung der unbekanntenen Funktion ξ oder φ ermöglicht oder die umgekehrt lehrt, unter welchen Umständen eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung (318) wie die in Gl. (321) gegebene der Wirklichkeit entspricht.

Um diese Bedingung in Form einer Gleichung ausdrücken zu können, gehe ich auf die Werte für die Spannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} in den Gl. (279) zurück. Danach war

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Wenn die Gleichung des Querschnittsumrisses (oder auch eines Teiles des ganzen Querschnittsumrisses) in der Form

$$z = f(y)$$

angeschrieben wird, so muß, damit die aus den Komponenten τ_{xy} und τ_{xz} resultierende Schubspannung den Querschnittsumfang berührt,

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} \quad (322)$$

sein. Also haben wir noch für den Querschnittsumfang die Bedingungsgleichung

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}} = \frac{dz}{dy}, \quad (323)$$

oder, wenn man die Werte von η und ξ aus Gl. (320) einsetzt,

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}. \quad (324)$$

Dieser Gleichung muß ξ überall an der Oberfläche genügen, wenn die Oberfläche frei von äußeren Kräften sein soll und

zwar nicht nur für den besonderen Fall, den wir hier untersuchen, sondern ganz allgemein.

Wir prüfen jetzt, unter welchen Umständen der in Gl. (321) aufgestellte Wert von ξ auch dieser Grenzbedingung genügt. Gl. (324) geht hier über in

$$\frac{a_2 - cy}{a_1 + cz} = \frac{dz}{dy}.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kann sofort integriert werden. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$(a_2 - cy)dy = (a_1 + cz)dz$$

oder nach Integration

$$a_1 z + \frac{c}{2} z^2 - a_2 y + \frac{c}{2} y^2 = K.$$

Das ist aber, wie man aus der Gleichheit der Koeffizienten von y^2 und z^2 erkennt, die Gleichung eines Kreises. Damit ist bewiesen, daß nur bei kreisförmigen Querschnitten nach der Torsion alle Punkte, die vorher auf einem Querschnitte lagen, auch nachher noch in einer Ebene enthalten sein können. In allen anderen Fällen geht die Querschnittsebene in eine gekrümmte Fläche über. Die Kritik, die wir jetzt üben, fällt daher bei der Verdrehung ganz anders aus als bei der Biegung. Während dort wenigstens die Spannungsverteilung der Navierschen Theorie bestätigt wurde, erkennen wir hier, daß die ältere Theorie der Torsion falsch war mit einziger Ausnahme des kreisförmigen Querschnittes und man muß wohl beachten, daß dieser wichtige Aufschluß, der inzwischen freilich schon auf die ganze Gestaltung der elementaren Theorie der Torsion zurückgewirkt hat, erst durch die strenge Elastizitätstheorie gegeben wurde. — Zugleich bildet übrigens das eben gewonnene Resultat eine willkommene Bestätigung der früher vorgetragenen Theorie der Torsion für Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

§ 73. Fortsetzung für den elliptischen Querschnitt.

Für Gl. (318) kann man beliebig viele Lösungen angeben. Jede dieser Lösungen entspricht einem möglichen Spannungszustande. Damit dieser wirklich zustande komme, muß man aber noch für die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Körperoberfläche Sorge tragen. Besteht die Grenzbedingung an der Mantelfläche des Stabes darin, daß diese frei von äußeren Kräften sein soll, so wird sie, wie wir schon sahen, durch Gl. (324) zum Ausdrucke gebracht. Man kann nun entweder so verfahren, daß man irgendeine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung (318) annimmt und dann nach Gl. (324) die Gestalt des Querschnittes bestimmt, für die diese Lösung zutrifft oder man kann umgekehrt verlangen, für eine gegebene Querschnittsform die passende Lösung der Gl. (318) zu finden. Die letzte Aufgabe ist indessen weitaus schwieriger zu lösen und für beliebig gegebene Querschnittsformen, also z. B. für einen I-förmigen Querschnitt oder dgl. ist sie bisher überhaupt nicht streng gelöst worden. Für den rechteckigen Querschnitt ist dies allerdings gelungen. In Band V kann man die Lösung finden; sie ist aber zu schwierig, als daß sie hier hätte Platz finden können.

Viel einfacher ist dagegen das andere Verfahren, zunächst irgendeine Lösung der Gl. (318) anzunehmen und dann die Gestalt des Querschnittes aufzusuchen, für die diese Lösung zutrifft. Die allgemeinste Lösung der Gl. (318) ist nämlich wohlbekannt; sie lautet

$$\xi = \varphi(yz) = f_1(y + iz) + f_2(y - iz), \quad (325)$$

wenn i die imaginäre Einheit und f_1 und f_2 ganz beliebige Funktionszeichen sind. Daß Gl. (325) die Differentialgleichung (318) befriedigt, folgt durch Einsetzen des Wertes, und daß Gl. (325) zugleich die allgemeinste Lösung angibt, folgt daraus, daß sie zwei willkürliche Funktionen enthält. Je nach den Formen der Funktionen f_1 und f_2 kann man nun beliebig viele partikuläre Lösungen angeben und zwar bildet sowohl der reelle als der imaginäre Teil von Gl. (325) für sich genommen

eine Lösung. Man kann also z. B. auch die allgemeinste Form von Potenzreihen, die mit Gl. (318) verträglich ist, hiernach ohne weiteres anschreiben, nämlich, wenn wir uns auf ganze positive Exponenten beschränken,

$$\xi = a_0 + a_1(y + iz) + a_2(y + iz)^2 + \dots \left. \vphantom{\xi} \right\}, \quad (326)$$

$$+ b_1(y - iz) + b_2(y - iz)^2 + \dots$$

in der die a und b ganz beliebige Koeffizienten sein können.

In diesen vielgestaltigen Formen ist als eine der einfachsten auch die folgende enthalten

$$\xi = \varphi(yz) = ayz. \quad (327)$$

Daß sie überhaupt die Gl. (318) befriedigt, erkennt man beim Einsetzen in diese Gleichung sofort. Daß sie aber auch in der Form (326) mit enthalten ist, folgt daraus, daß man sie als den imaginären Anteil von

$$\xi = \frac{a}{4}(y + iz)^2 - \frac{a}{4}(y - iz)^2$$

betrachten kann. Wir wollen für diese besondere Form des Wertes von ξ den zugehörigen Querschnittsumriß nach Gl. (324) bestimmen. Diese Gleichung geht hier über in

$$\frac{(a-c)y}{(a+c)z} = \frac{dz}{dy}, \quad (328)$$

die sich auch in der Form

$$(a+c)zdz + (c-a)ydy = 0$$

schreiben läßt. Die Integration liefert

$$(a+c)\frac{z^2}{2} + (c-a)\frac{y^2}{2} = K,$$

wofür man auch

$$\frac{y^2}{a+c} + \frac{z^2}{c-a} = \frac{2K}{(a+c)(c-a)} = K' \quad (329)$$

schreiben kann, wenn K' irgendeine neue unbekannte Integrationskonstante bedeutet. In Gl. (329) erkennt man aber die Mittelpunktsleichung einer Ellipse, deren Achsen in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen. Das Achsenverhältnis

ist $\sqrt{c+a} : \sqrt{c-a}$. Voraussetzung ist, daß a dem Absolutwerte nach jedenfalls kleiner ist, als c .

Für die Schubspannungskomponenten erhält man durch Einsetzen in die früheren Formeln

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz \right) = G(a + c)z, \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy \right) = -G(c - a)y. \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

Damit diese Lösung eine wirkliche sei, ist jetzt nur noch erforderlich, daß an den Endquerschnitten des Stabes das verdrehende Moment der äußeren Kräfte in derselben Verteilung über den Querschnitt angebracht sei, wie wir sie hier für die Schubspannungsverteilung in irgendeinem anderen Querschnitte gefunden haben. Tatsächlich wird dies freilich in praktisch vorkommenden Fällen nicht zutreffen. Man muß sich aber dann an die Auseinandersetzungen in § 71 erinnern, nach denen es für solche Stellen, die weit genug vom Lastangriffe entfernt liegen, ziemlich gleichgültig ist, auf welche besondere Art die Last angebracht ist.

Wenn wir das Resultat, zu dem wir jetzt gelangt sind, mit der früheren Untersuchung über die Verdrehungsfestigkeit der elliptischen Welle vergleichen, finden wir, daß die damals hypothetisch angesetzten Gleichungen (227), S. 303

$$\tau_{xy} = ka^2z; \quad \tau_{xz} = -kb^2y$$

der Form nach vollständig mit den Gl. (330) übereinstimmen. Jener willkürliche Ansatz hat sich daher bei der eingehenderen Untersuchung jetzt als genau richtig erwiesen. Es ist daher nicht nötig, hier noch weitere Folgerungen aus den Gl. (330) zu ziehen; vielmehr genügt es, auf die früheren Darlegungen im neunten Abschnitte zu verweisen.

Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Gl. (327) ist zugleich die Gleichung der krummen Fläche, in die der vormals ebene Querschnitt durch die Verdrehung übergeht. Das ist aber die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides. Denkt man sich, nachdem die Verwindung erfolgt

ist, von neuem eine Anzahl ebener Schnitte senkrecht zur Achse gelegt, so schneiden diese die krummen Flächen, in die die vorher ebenen Querschnitte übergegangen sind, in gleichseitigen Hyperbeln; Schnitte, die durch die Achse gelegt sind, ergeben Parabeln.

§ 74. Hydrodynamisches Gleichnis.

Oft genug läßt sich eine Aufgabe aus einem Gebiete der theoretischen Physik auf eine Aufgabe aus einem ganz anderen Gebiete zurückführen. Jeder Vergleich dieser Art ist lehrreich und nützlich. Eine strenge Lösung wird zwar, da sie bei jeder von beiden Aufgaben gleich schwer zu finden ist, durch den Vergleich vielleicht nicht erleichtert. Dagegen sind näherungsweise Lösungen bei einer von beiden Aufgaben oft mit Leichtigkeit anzugeben und hiermit auf die andere Aufgabe zu übertragen, bei der sie sonst viel schwerer zu finden gewesen wären.

Für das Torsionsproblem hat man zwei Vergleiche dieser Art aufgestellt, die sich als sehr fruchtbar erwiesen haben. Den einen davon, das „hydrodynamische Gleichnis“, werde ich hier kurz besprechen, während ich mir vorbehalte, im 5. Bande darauf von neuem zurückzukommen und auch den anderen von Prandtl herrührenden Vergleich des Torsionsproblems mit der Gestalt einer belasteten Membran beizufügen. Indessen ist auch hier schon von der Arbeit von Prandtl einiges benützt.

Man denke sich, von einem Punkte des Querschnittes ausgehend, eine Linie gezogen, die in der Richtung der resultierenden Schubspannung τ immer weiter verlängert wird. Alle Linien, die sich in dieser Weise ziehen lassen, wollen wir uns in den Querschnitt eingetragen denken, so daß durch jeden Punkt eine davon geht. Der einfacheren Bezeichnung wegen sollen diese Linien die Spannungslinien und die Gesamtheit der Linien, die den ganzen Querschnitt ausfüllen, das Spannungsfeld genannt werden. Von solchen Konstruktionen macht man oft Gebrauch, um sich über die Verteilung einer gerichteten Größe von irgend einer Art in einem gegebenen

Gebiete Klarheit zu verschaffen. Am meisten bekannt ist dieses Verfahren in der Lehre vom Magnetismus, wo man die in dieser Weise gezogenen Linien als die Kraftlinien bezeichnet.

Immer, wenn man von dieser Veranschaulichung Gebrauch macht, ist es nützlich, sich noch eines damit zusammenhängenden Bildes zu erinnern. Man kann sich nämlich eine Flüssigkeit vorstellen, die überall in der Richtung der Kraftlinien, oder hier der Spannungslinien strömt, so daß zugleich die Geschwindigkeit der Strömung überall proportional der Größe der Kraft oder der Spannung ist. Diese Flüssigkeitsbewegung ist ebenfalls sehr geeignet, ein anschauliches Bild von dem Felde zu entwerfen, mit dem man es gerade zu tun hat und in der Lehre vom Magnetismus spielt der daraus hervorgegangene Begriff des „Kraftflusses“ eine große Rolle.

Wir wollen jetzt sehen, wie wir die allgemeinen Bedingungsgleichungen, denen unsere Aufgabe unterworfen ist, umformen müssen, um sie der neu gewählten Darstellungsweise anzupassen. Am einfachsten gelingt dies mit der Grenzbedingung, die durch Gl. (324) ausgesprochen war. Wir können sie jetzt einfach dahin in Worte fassen, daß die Flüssigkeitsströmung am Umfange überall in der Richtung der Tangente erfolgen muß, d. h. gerade so wie eine Flüssigkeitsströmung ohnehin erfolgt, wenn sie rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung mit v_y und v_z , und versteht man unter m einen Proportionalitätsfaktor, durch den der bei der Abbildung zugrunde gelegte Maßstab zum Ausdrucke gebracht wird, so hat man

$$\left. \begin{aligned} v_y &= m\tau_{xy} = mG \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz \right) \\ v_z &= m\tau_{xz} = mG \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy \right) \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

Die Gleichgewichtsbedingung der Spannungen am Volumenelemente gegen Verschieben in der Richtung der X-Achse erfordert, daß

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

ist, woraus sofort

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (332)$$

folgt. Setzt man in diese Gleichung die Werte aus (331) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

womit auch Gl. (318) erfüllt ist.

Gl. (332) spricht die „Kontinuitätsbedingung“ der Hydrodynamik aus, wie im 4. Bande näher erörtert wird. Sie sagt daher aus, daß eine gewöhnliche Wasserströmung zur Abbildung des Spannungsfeldes ausreicht, ohne daß es nötig wäre, Quellen oder Sickerstellen anzunehmen, um den Fluß in dieser Form zu ermöglichen.

Um ferner noch die Bedingung auszusprechen, daß sich v_y und v_z nach den Gl. (331) in derselben Funktion ξ darstellen lassen müssen, differenzieren wir die erste dieser Gleichungen nach z und die zweite nach y und subtrahieren hierauf beide voneinander. Dadurch erhalten wir

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2mGc. \quad (333)$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Intensität des „Wirbels“ der Flüssigkeitsströmung dar und die Gleichung spricht aus, daß die Flüssigkeit an allen Stellen mit derselben Stärke $2mGc$ wirbelt.

Hiermit ist die Flüssigkeitsbewegung vollständig bestimmt; nur auf eine einzige Art ist es nämlich möglich, daß die Wirbelstärke überall einen gegebenen konstanten Wert hat, wenn die inkompressible Flüssigkeit in dem durch den Querschnitt angegebenen Raume stetig herumfließen soll und dabei rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Die Vorstellung unserer Aufgabe unter diesem Bilde kann nun insofern von Nutzen sein, als dadurch gewisse Schätzungen oder auch genaue Rechnungen nach den Lehren der Hydrodynamik erleichtert werden. Als Beispiel dafür wollen wir zunächst ein auf Verwindung beanspruchtes Flacheisen betrachten, also einen Stab von rechteckigem Querschnitt, von dem eine

Querschnittsseite viel größer ist, als die andere. Die Strömungs- oder Spannungslinien müssen wegen der ihnen auferlegten Bedingungen ungefähr so im Querschnitte verlaufen, wie in Abb. 83 angegeben ist. Die äußerste Stromlinie fällt nämlich mit dem Umrisse zusammen und auch die etwas weiter nach innen zu liegenden laufen den Langseiten auf längere Strecken

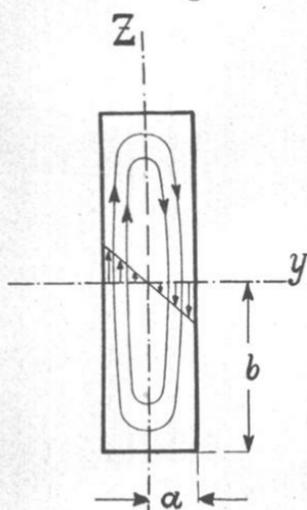


Abb. 83.

hin ohne merkliche Krümmung nahezu parallel. An diesen Stellen kann daher v_y und auch $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ genau genug gleich Null gesetzt werden, woraus nach Gl. (333)

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = -2mGc \quad (334)$$

folgt. Wegen der Bedeutung von v_z kann dies auch in der Form

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2Gc \quad (335)$$

geschrieben werden. Die Spannung längs der Y-Achse wächst daher proportional mit dem Abstände von der Z-Achse und das Spannungsverteilungsdiagramm nimmt die in Abb. 83 eingetragene geradlinige Gestalt an. — Daß die Spannung in der Mitte der Langseite größer wird, als an irgend einer anderen Stelle des Querschnittes, folgt daraus, daß sich die Stromlinien an dieser Stelle dichter zusammendrängen müssen, als in der Nähe der Schmalseiten; die Geschwindigkeit der Strömung und hiermit die Spannung ist daher größer, als dort.

Man betrachte ferner zwei unendlich benachbarte Spannungslinien, die auf der Y-Achse um dy voneinander entfernt sind. Die Spannung τ_{xz} an dieser Stelle ist

$$\tau_{xz} = \tau_{\max} \cdot \frac{y}{a}, \quad (336)$$

wenn y den Abstand vom Ursprunge bedeutet. Alle Spannungen, die in dem zwischen beiden Spannungslinien liegenden schmalen

Streifen übertragen werden, setzen sich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Moment mit dM bezeichnet werden möge. Um dM zu berechnen, beachte man, daß durch jeden Querschnitt des Streifens dieselbe Flüssigkeitsmenge fließt und daß daher in jedem Längenelemente ds eine Spannung übertragen wird, die überall mit ds proportional ist und gleich

$$\tau_{\max} \frac{y}{a} dy ds$$

gesetzt werden kann, wenn hier immer noch dy den Abstand der beiden Spannungslinien oder die Streifenbreite auf der Y -Achse bedeutet. Diese Spannung geht überall in der Richtung der Tangente an die Spannungslinie und wenn man den senkrechten Abstand der Tangente vom Ursprunge, der als Momentenpunkt gewählt wird, mit p bezeichnet, hat man

$$dM = \int \tau_{\max} \cdot \frac{y}{a} p dy ds = \tau_{\max} \frac{y}{a} dy \int p ds$$

wobei die Integration über den ganzen Umfang der Spannungslinie auszudehnen ist. Das Integral hat aber eine einfache Bedeutung, denn $p ds$ gibt den doppelten Inhalt des Dreiecks an, dessen Grundlinie ds ist, während der Ursprung die gegenüberliegende Ecke bildet. Die Summe aller dieser Dreiecke stellt den Inhalt der Fläche dar, die von der im Abstände y vom Ursprunge die Y -Achse treffenden Spannungslinie eingeschlossen wird. Bezeichnet man diesen Flächeninhalt mit F , so erhält man

$$dM = \tau_{\max} \frac{y}{a} dy \cdot 2F \quad \text{und daher} \quad M = 2 \frac{\tau_{\max}}{a} \int_0^a Fy dy,$$

wobei M das Torsionsmoment ist. Nun kann freilich die Integration nicht ausgeführt werden, solange man F nicht als Funktion von y darstellen kann, d. h. solange man nicht genau weiß, wie die Spannungslinien verlaufen. Ungefähr kennt man aber ihren Verlauf; man weiß namentlich, daß die äußeren Spannungslinien, auf die es hauptsächlich ankommt, weil bei ihnen sowohl die Spannungen als die Hebelarme am größten

sind, nicht viel von Rechtecken verschieden sein können. Setzt man daher näherungsweise

$$F = 4yb,$$

so wird man zwar F sicher zu groß rechnen, aber bei einem sehr schmalen Rechtecke (schmäler als es in Abb. 83 der Deutlichkeit wegen gezeichnet war) kann der Fehler nicht sehr groß ausfallen. Es mag noch bemerkt werden, daß eine genauere Theorie, auf die erst im 5. Bande eingegangen werden kann, lehrt, daß man an Stelle von b in dem vorhergehenden Ausdrucke eigentlich $b - 0,63a$ setzen sollte. Wenn b weit größer ist, als a , kommt es aber auf diese geringfügige Verbesserung nicht an. Ich setze also F so ein, wie angegeben und erhalte

$$M = 8 \frac{\tau_{\max}}{a} b \int_0^a y^2 dy = \frac{8}{3} \tau_{\max} a^2 b,$$

hiermit wird endlich

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8a^2b} = \frac{3M}{a_1^2 b_1}, \quad (337)$$

wenn mit a_1 und b_1 die ganzen Rechteckseiten bezeichnet werden.

Diese Formel liefert, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, die Spannung τ_{\max} sicher etwas zu klein. Bei sehr schmalen Rechtecken kommt dieser Wert aber der Wahrheit erheblich näher, als die in § 59 abgeleitete Formel (238)

$$\tau_{\max} = \frac{9M}{2a_1^2 b_1},$$

die im übrigen bei Rechtecken, die sich nicht allzuviel von Quadraten unterscheiden, den Vorzug vor Gl. (337) verdient.

Auch die Konstante c , die nach § 72 den auf die Längeneinheit der Welle bezogenen Verdrehungswinkel angibt, kann jetzt leicht berechnet werden. Nach Gl. (336) hat man für die auf der Y -Achse gelegenen Punkte

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\tau_{\max}}{a} = \frac{3M}{8a^2 b}$$

und nach Gl. (335) folgt daraus für c , vom Vorzeichen, das hier gleichgültig ist, abgesehen

$$c = \frac{3M}{16a^3bG}. \quad (338)$$

Für die Länge l wird daher der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$, wenn man noch die ganzen Rechteckseiten a_1 und b_1 einführt,

$$\Delta\varphi = \frac{3Ml}{a_1^3b_1G}. \quad (339)$$

Indessen ist auch diese Formel nur für schmale Rechtecke zu verwenden; bei Rechtecken, deren Seiten von gleicher Größenordnung sind, ist die auf S. 317 für $\Delta\varphi$ abgeleitete Näherungsformel als genauer zu betrachten.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein sogenanntes E-Eisen, d. h. einen Stab von der in Abb. 84 gezeichneten Querschnittsgestalt. Auch hier müssen die Stromlinien ihrem allgemeinen Verlaufe nach den Umrißlinien

des Querschnittes folgen. In den geradlinigen Teilen des Querschnittes gleicht daher der Verlauf der Spannungslinien und hiermit auch die Spannungsverteilung der im vorigen Beispiele besprochenen. Die Torsionssteifigkeit des Stabes kann daher nicht höher veranschlagt werden, als die eines Flacheisens, das aus ihm durch Umbiegen der beiden Flanschen erhalten werden könnte. Damit sie auch nur so hoch werden

kann, muß überdies vorausgesetzt werden, daß die nach innen zu einspringenden Ecken eine hinreichende Abrundung erhalten haben, um eine stärkere Zusammendrängung der Stromlinien, und hiermit eine größere Spannung an diesen Stellen zu vermeiden.

Weit höher fällt dagegen die Torsionssteifigkeit aus, wenn der Querschnitt eine ringförmig geschlossene Figur bildet, etwa

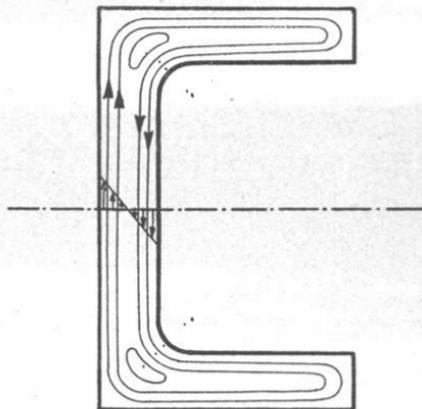


Abb. 84.

wie in Abb. 85. Bei einem solchen Rohre können die benachbarten Stromlinien alle im gleichen Sinne weiterfließen, ohne durch denselben Schenkel auch wieder zurücklaufen zu müssen.

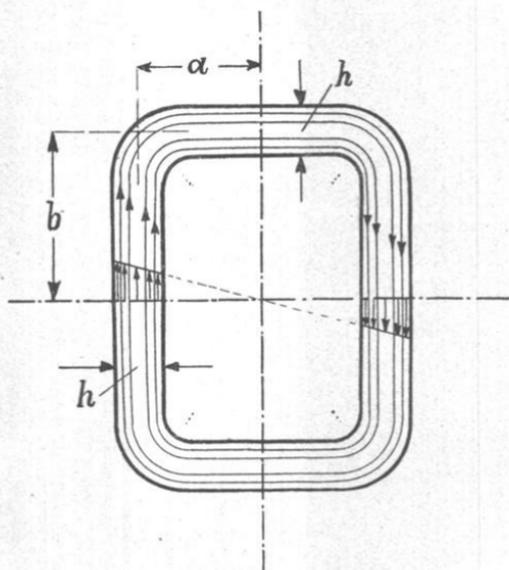


Abb. 85.

Das sich hiernach ergebende Spannungsverteilungsdiagramm ist in die Abbildung eingetragen. Man sieht, daß bei sehr dünner Rohrwand die Spannung an allen Stellen nahezu gleich groß wird. Der Mittelwert τ der Spannung folgt für den in der Abbildung dargestellten Fall aus der größten Spannung τ_{\max} an der äußeren Kante zu

$$\tau = \tau_{\max} \cdot \frac{a}{a + \frac{1}{2}h}$$

und die Momentengleichung für das Gleichgewicht zwischen den Spannungen und dem Verdrehungsmomente kann genau genug in der Form

$$\tau \cdot 4bh \cdot a + \tau \cdot 4ah \cdot b = M$$

angeschrieben werden, woraus

$$\tau_{\max} = \frac{a + \frac{1}{2}h}{a} \cdot \frac{M}{8abh} \quad (340)$$

folgt. Auch hierbei ist eine hinreichende Ausrundung der nach innen hin einspringenden Ecken vorausgesetzt, da sonst die Spannung an diesen Stellen erheblich größer werden könnte, als an den äußeren Kanten.

Sobald aber ein solches Rohr der Länge nach aufgeschlitzt wird, womit der Querschnitt die in Abb. 86 (s. S. 395) dargestellte Gestalt annimmt, verliert es den größten Teil seiner Torsionssteifigkeit. Die Stromlinien müssen jetzt an der Schlitzstelle wieder umkehren; ihr Verlauf ist daher ganz ähnlich wie

in Abb. 84 und die Torsionsfestigkeit ist ungefähr ebenso niedrig einzuschätzen, wie bei einem Flacheisen von derselben Dicke, dessen Breite gleich der Länge des Umfanges ist.

Auch auf die vielfach angewendeten I- und L-Eisen können diese Betrachtungen sofort übertragen und zur Abschätzung ihrer Torsionssteifigkeit verwendet werden.

Zu einem bemerkenswerten Resultate gelangt man durch die hydrodynamische Betrachtung auch, wenn man sie auf den Fall anwendet, daß irgendwo im Querschnitte ein kleiner Sprung (Gußfehler od. dgl.) auftritt. Wir wollen annehmen, daß dieser Fehler durch ein kleines kreisförmiges Loch im Querschnitte dargestellt werden kann. Dadurch wird das Spannungsfeld nur in der Umgebung des Loches merklich geändert; die Spannungslinien können jetzt nicht mehr durch die Fläche des Loches weiter gehen, sondern müssen ausbiegen und um den Rand des Loches herumfließen. Man sieht schon ohne weiteres ein, daß an den Rändern des Loches die Geschwindigkeit dadurch gesteigert werden muß.

Diese Geschwindigkeit entspricht aber der Spannung und damit der Beanspruchung des Materiales in der verdrehten Welle. In der Tat kann man auch zahlenmäßig den Einfluß des Sprunges leicht nachweisen; es zeigt sich, daß die Spannung am Rande dadurch gerade auf das Doppelte erhöht wird. Auf die Durchführung der Rechnung verzichte ich hier, da sie auf hydrodynamischen Betrachtungen beruht, die ich hier noch nicht als bekannt voraussetzen kann.

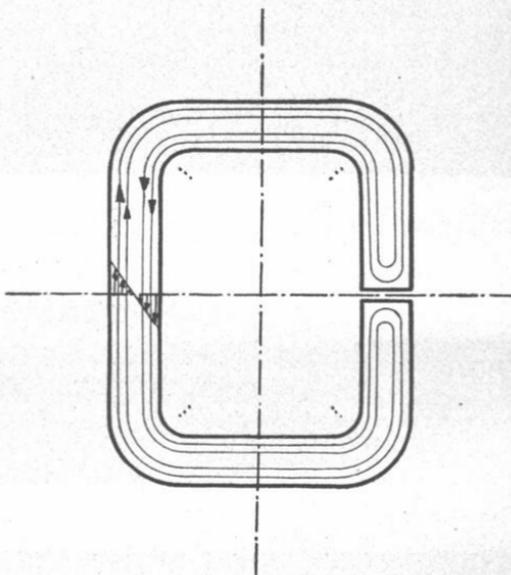


Abb. 86.

§ 75. Die Härte.

Die Härte ist eine Oberflächenfestigkeit, die dann hervortritt, wenn man zwei Körper, die sich anfänglich nur in einem Punkte oder längs einer Linie berührten, aufeinander drückt, so daß sie sich abplattten, bis sie eine Beschädigung, also entweder einen Sprung oder einen bleibenden Eindruck erfahren. Die elastische Formänderung, die bei dieser Art der Belastung eintritt, wurde von Hertz nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie untersucht. Hier beschränke ich mich auf die Angabe der wichtigsten Resultate dieser Untersuchung, während ich mir vorbehalte, im fünften Bande ausführlicher darauf zurückzukommen.

Als streng richtig sind übrigens die Hertz'schen Formeln nicht anzusehen, weil sie auf einen Umstand keine Rücksicht nehmen, der, wie es scheint, bei den Härteerscheinungen eine erhebliche Rolle spielt. Die oberflächlichen Schichten eines festen Körpers verhalten sich nämlich anders, als die nach innen hin liegenden. Bei den flüssigen Körpern sprechen sich die besonderen Eigenschaften der Oberflächenschichten in den Kapillarscheinungen aus; sie sind daher schon seit langer Zeit bekannt und genauer untersucht. Bei den festen Körpern bestehen aber, wie aus den Härteversuchen hervorgeht, solche Unterschiede offenbar ebenfalls. Daß sie nur bei der Härte und nicht bei den anderen Beanspruchungsarten eines festen Körpers hervortreten, liegt daran, daß die Härte in erster Linie auf der Festigkeit der Oberflächenschicht beruht und die inneren Teile dabei nur wenig in Mitleidenschaft gezogen werden, während sich bei allen anderen Beanspruchungsarten die Spannungen tief ins Innere des Körpers hinein erstrecken, so daß die Oberflächenschichten nur einen kleinen Teil davon aufzunehmen haben.

Immerhin haben sich die hier mitzuteilenden Formeln von Hertz im wesentlichen bewährt und sie werden daher in der Technik neuerdings häufig benutzt.

Beide Körper seien zunächst ohne Druck in einem Punkte

zur Berührung gebracht. Man denke sich alle Punkte beider Oberflächen in der nächsten Nachbarschaft des Berührungspunktes aufgesucht, die einen sehr kleinen konstanten Abstand e in der Richtung der Berührungsnormalen voneinander besitzen. Bei ihrer Projektion auf die Berührungsebene geben diese Punkte im allgemeinen eine Ellipse, die aber in den Fällen, von denen jetzt die Rede sein soll, in einen Kreis übergeht.

Bei der Abplattung, die die Körper erfahren, wenn man sie mit einer Kraft P aufeinander drückt, berühren sie sich in einer kleinen Fläche, die man als die Druckfläche bezeichnet. Auch die Druckfläche wird ein Kreis, wenn die vorher besprochene Kurve ein Kreis war. Man kann nun fragen, wie groß die Druckfläche ist, die zu einer gegebenen Last P gehört, wie sich ferner die Last P über die Druckfläche verteilt, wie groß also insbesondere der Druck in der Mitte wird, wo er am größten ausfällt, und wie groß endlich die Abplattung ist, d. h. um wieviel sich beide Körper infolge der elastischen Formänderung einander nähern.

Diese Fragen werden durch die Untersuchung von Hertz beantwortet, wobei jedoch, abgesehen von dem zuvor besprochenen verschiedenen Verhalten der oberflächlichen und der inneren Schichten, auf das keine Rücksicht genommen wird, selbstverständlich auch vorausgesetzt werden muß, daß die Last P nicht so groß werden darf, um an irgendeiner Stelle eine Überschreitung der Proportionalitätsgrenze herbeizuführen. Unter dieser Voraussetzung gilt zunächst, daß der auf die Flächeneinheit bezogene Druck σ am Rande der Druckfläche gleich Null ist und nach der Mitte hin anwächst wie die Ordinate einer über der Druckfläche konstruierten Halbkugel. Der größte Wert σ_0 von σ ist daher $1\frac{1}{2}$ mal so groß als der Durchschnittswert für die ganze Druckfläche. Ferner wächst der Halbmesser der Druckfläche proportional mit der dritten Wurzel aus der Last P . In demselben Maße wächst daher auch die Spannung σ_0 und hiermit die Beanspruchung des Materials. Die Annäherung α beider Körper infolge der

Abplattung wächst dagegen proportional mit der zweidrittelten Potenz von P .

Für zwei Kugeln aus demselben Materiale vom Elastizitätsmodul E mit den Halbmessern r_1 und r_2 erhält man, wenn die Poissonsche Verhältniszahl $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird, für den Halbmesser a der Druckfläche

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}. \quad (341)$$

Das untere Vorzeichen im Nenner ist zu nehmen, wenn die eine Kugel eine Hohlkugel ist. Ferner wird

$$\sigma_0 = 0,388 \sqrt[3]{P E^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right)^2}, \quad (342)$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \quad (343)$$

Praktisch wichtig ist namentlich der Fall, daß an Stelle der einen Kugel eine Platte tritt. Man braucht dann nur den betreffenden Halbmesser in den vorausgehenden Formeln unendlich groß zu setzen. Dadurch erhält man für eine Platte und eine Kugel vom Halbmesser r

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \quad (344)$$

$$\sigma_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{r^2}}, \quad (345)$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \quad (346)$$

Ferner erhält man für zwei rechtwinklig gekreuzte Zylinder von demselben Halbmesser r

$$\sigma_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{r^2}}. \quad (347)$$

Praktisch wichtig ist ferner noch der Fall, daß sich zwei Zylinder von den Halbmessern r_1 und r_2 längs einer Erzeugenden berühren. Man muß sich die Zylinder

unendlich lang denken. Die eine Halbachse der Druckellipse wird dann auch unendlich groß und für die andere erhält man

$$a = 1,52 \sqrt{\frac{P'}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad (348)$$

$$\sigma_0 = 0,418 \sqrt{P' E \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \quad (349)$$

Die Wurzeln sind hier Quadratwurzeln, worauf ich ausdrücklich aufmerksam mache; unter P' ist der Druck auf die Längeneinheit der Zylinder zu verstehen; P' hat daher die Dimension kg/cm.

Wenn einer der Zylinder durch eine Platte ersetzt wird (z. B. bei den Walzenlagern der Brückenträger) wird

$$a = 1,52 \sqrt{\frac{P' r}{E}}, \quad (350)$$

$$\sigma_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P' E}{r}}. \quad (351)$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß die Platte hinreichend dick ist, so daß die Spannungen sich nahezu so verteilen, als wenn die Dicke unendlich groß wäre.

Wenn man die Walzenlager eines Brückenträgers nach diesen Formeln berechnet, darf man übrigens, wie die Erfahrung lehrt, wegen der besonderen Umstände des Falles die zulässige Beanspruchung σ_0 in der Mitte der Druckfläche weit höher annehmen (vielleicht 3000 atm oder selbst noch mehr) als sonst ratsam wäre.

Wegen des besonderen Einflusses der Oberflächenschichten auf die Härte ist es nicht möglich, die Härte eines Körpers im voraus zu berechnen, wenn seine übrigen Festigkeitseigenschaften, insbesondere seine Zug- und Druckfestigkeit gegeben sind. Man muß die Härte vielmehr durch einen besonderen Versuch ermitteln. Hertz schlug vor, zwei Körper, etwa zwei Kugeln oder eine Kugel und eine Platte aus dem auf seine Härte zu prüfenden Stoffe herzustellen, sie aufeinander zu drücken, bis eine Beschädigung entsteht und hierauf die Härte in der zugehörigen Spannung σ_0 nach den vorher an-

geführten Formeln auszudrücken. Das hat sich aber als nicht ausführbar herausgestellt. Zunächst läßt sich beim Versuche gewöhnlich nicht genau erkennen, bei welcher Last die erste Beschädigung entsteht. Bei einem sehr spröden Körper kann man zwar annehmen, daß die erste Beschädigung in einem Sprunge besteht, der deutlich wahrnehmbar ist. Aber auch für solche Körper, wie z. B. Glas, gelingt es nicht, die Härte nach dem Vorschlag von Hertz zu bestimmen. Der Versuch zeigt nämlich, daß der beim Eintreten des Sprunges auftretende Wert von σ_0 von den Krümmungshalbmessern der aufeinander gedrückten Kugeln abhängt, was mit der Hertzschen Theorie im Widerspruche steht. Gerade diese Erfahrung ist der deutlichste Beweis dafür, daß die Härte von den besonderen Eigenschaften der Oberflächenschicht abhängt, die in der Hertzschen Theorie nicht berücksichtigt sind.

Bei den Metallen ist es überhaupt nicht möglich, das Eintreten der ersten Beschädigung, die in einem sehr kleinen bleibenden Eindrucke besteht, mit halbwegs ausreichender Sicherheit zu erkennen. Um zu einem zahlenmäßigen Ausdrucke für die Härte eines Metalls, z. B. einer Stahlsorte zu gelangen, muß man daher auf andere Weise vorgehen.

Die beste Versuchsanordnung besteht darin, daß man zwei Zylinder aus dem betreffenden Metalle herstellt, sie kreuzweise aufeinander legt und der Reihe nach mit verschiedenen Lasten P aufeinander drückt, so daß bleibende Eindrücke von verschiedener Größe entstehen. Wegen des verschiedenen Einflusses der Oberflächenschicht bei verschiedenen Zylinderdurchmessern soll der Durchmesser stets gleich 4 cm gewählt werden, um zu vergleichbaren Ergebnissen zu gelangen. Die Lasten P wählt man so, daß dadurch bleibende Eindrücke von $2\frac{1}{2}$ bis 4 mm Durchmesser hervorgerufen werden. Jede dieser Lasten dividiert man durch den Inhalt der zugehörigen Druckfläche. Aus den dadurch erhaltenen Zahlen, die nicht viel voneinander abweichen, nimmt man das Mittel und betrachtet dieses als Maß für die Härte des Körpers.

Da dieser Versuch immerhin etwas umständlich ist, hat

man sich neuerdings häufig damit begnügt, die Härte eines Schienenstahls dadurch zu bestimmen, daß man eine sehr harte Gußstahlkugel darauf drückt und die Härte aus den dabei verursachten Eindrücken, ähnlich wie beim vorigen Versuche, ermittelt. Die Härte eines Schienenstahls stellt sich nach dem vorher besprochenen genaueren Verfahren im Mittel auf etwa 120 kg/qmm oder 12 000 atm, während gehärteter Gußstahl auf ungefähr das Dreifache kommt. Bei der Prüfung von Schienenstahl kann daher die Gußstahlkugel ihm gegenüber nahezu als unendlich hart angesehen werden, d. h. auf die besonderen Eigenschaften der Gußstahlkugel, die man zu dem Versuche verwendet, kommt es nicht mehr wesentlich an. Darin liegt die Rechtfertigung des abgekürzten Verfahrens, das für die praktischen Versuche bei der Abnahme von Schienenmaterial als ausreichend genau angesehen werden kann.

Anmerkung: Nach einem neueren Vorschlage soll die Gußstahlkugel durch einen Kegel aus gehärtetem Stahl ersetzt werden, der in den zu prüfenden Körper eingedrückt wird. Hierdurch soll erreicht werden, daß die Härtezahl unabhängig von der Größe des Eindrucks ist. (Vgl. Dr. P. Ludwick, Z. d. österr. Ing. u. Arch.-Ver. 1907 Nr. 11 u. 12.)

