Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Zehnter Abschnitt. Die Knickfestigkeit

urn:nbn:at:at-ubi:2-7796

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

§ 61. Ableitung der Eulerschen Formel für Stäbe mit Spitzenlagerung.

Zunächst nehme ich an, der Stab, der einer Druckbelastung ausgesetzt werden soll, sei vorher genau gerade gewesen. Es ist freilich nicht möglich, einen Stab vollkommen gerade zu richten und von den kleinen unvermeidlichen Abweichungen von der Geraden hängt das Verhalten des Stabes bei der Beanspruchung auf Zerknicken im Gegensatze zu den anderen Belastungsarten wesentlich ab. Ich werde indessen nachher auf diesen Umstand besonders eingehen und will einstweilen davon absehen. Dagegen soll von vornherein darauf Rücksicht genommen werden, daß es auch nicht möglich ist, die Belastung absolut genau zentrisch aufzubringen, also so, daß die Richtungslinie der beiden Druckkräfte, die an den Enden des Stabes angreifen, genau mit der durch die Querschnittsschwerpunkte gelegten Stabachse zusammenfiele. Immerhin sollen aber die Abweichungen beider Linien voneinander als klein gegenüber den Querschnittsabmessungen angesehen werden; ich setze also mit anderen Worten voraus, daß man sich bemüht hatte, die Belastung möglichst genau zentrisch aufzubringen, daß dies aber nicht völlig gelungen ist und daß man daher auch nicht wissen kann, nach welcher Richtung und in welcher Größe Abweichungen vorgekommen sind. Darin unterscheidet sich der Fall der Knickfestigkeit von dem früher behandelten Falle der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung.

Für jeden Querschnitt des Stabes kann man sich die Kraft P nach dem Schwerpunkte verlegt denken. Bei dieser

Parallelverlegung tritt aber noch ein kleines Kräftepaar auf, das neben der gleichförmig verteilten Druckbelastung noch eine Verteilung von Biegungsspannungen zur Folge hat. Hierdurch wird die vorher gerade Stabachse etwas gekrümmt und die Entfernung zwischen dem Querschnittsschwerpunkte und der Richtungslinie von P vergrößert sich dadurch ein wenig. Bei der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung braucht man darauf keine Rücksicht zu nehmen, weil dort angenommen wird, daß die Exzentrizität von vornherein verhältnismäßig groß war, so daß die geringe Vergrößerung durch die kleine Ausbiegung des Stabes dagegen nicht in Betracht kommt. Hier aber, wo die ursprüngliche Exzentrizität schon sehr gering war, kann es leicht vorkommen, daß die Änderung, die sie durch die Ausbiegung erfährt, von gleicher Größenordnung mit ihr ist oder sie selbst noch übertrifft.

Der Einfachheit wegen will ich annehmen, daß man durch die Kraftangriffslinie der P und durch die vorher gerade Stabachse AA eine Ebene legen kann. Abb. 77 möge dann, freilich

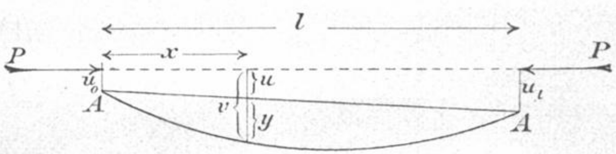

Abb. 77.

in sehr starker Verzerrung, die Lage beider Linien gegeneinander angeben. Die zwischen A und A gezogene krumme Linie gebe die Gestalt an, in die die vorher gerade Stabachse durch die Biegung übergeht. Die ursprüngliche Exzentrizität u des Kraftangriffs im Querschnitte x geht in $u + y$ über und nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, haben wir für das Biegungsmoment M im Querschnitte x

$$M = P(u + y).$$

Die Gleichung der geraden Linie AA lautet

$$u = u_0 \cdot \frac{l - x}{l} + u_l \cdot \frac{x}{l}$$

und für die krumme Linie AA gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -P(u+y).$$

Setzt man noch

$$v = u + y,$$

so kann diese auch geschrieben werden

$$E\Theta\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv. \tag{244}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form

$$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x, \tag{245}$$

in der A und B die beiden Integrationskonstanten sind, während α, wie man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung überzeugt,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \tag{246}$$

gewählt werden muß, damit die Differentialgleichung identisch erfüllt wird. Die Integrationskonstanten sind mit Hilfe der Grenzbedingungen zu bestimmen. Für $x = 0$ muß $v = u_0$ und für $x + l$ muß $v = u_l$ werden. Daraus folgt

$$B = u_0 \quad \text{und} \quad A\sin\alpha l + u_0\cos\alpha l = u_l.$$

Löst man die letzte Gleichung nach A auf und setzt die Werte beider Konstanten in Gl. (245) ein, so geht sie über in

$$v = \frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l}(u_l - u_0\cos\alpha l) + u_0\cos\alpha x. \tag{247}$$

Damit ist die Gestalt der elastischen Linie vollständig bekannt. Wir wollen jetzt zusehen, unter welchen Umständen es vorkommen kann, daß v erheblich größer wird, als die ursprüngliche Exzentrizität u. Der in der Gleichung für v vorkommende Klammerwert und das letzte Glied $u_0\cos\alpha x$ sind immer von derselben Größenordnung wie die u selbst, da ein Kosinus immer ein echter Bruch ist. Wenn also v viel größer als die u werden soll, kann dies nur dadurch geschehen, daß der Faktor $\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}$ vor der Klammer sehr groß wird. Denkt man sich zunächst die Belastung P sehr klein, so daß auch α nach Gl. (246) sehr klein ist, so kann $\sin \alpha x = \alpha x$ und $\sin \alpha l = \alpha l$ gesetzt werden und der Faktor vor der Klammer ist gleich $\frac{x}{l}$, also überall ein echter Bruch. Dies trifft auch so lange jedenfalls noch zu, als der Winkel αl kleiner als ein Rechter, d. h. αl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sobald aber P und damit α noch weiter wächst, nimmt nun $\sin \alpha l$ wieder ab, während $\sin \alpha x$ z. B. in der Mitte vorläufig noch weiter zunimmt. Zu sehr großen Werten wird der Faktor aber erst dann gelangen können, wenn sich beim weiteren Anwachsen von P der Winkel αl einem Gestreckten, sein Sinus also sich der Null nähert, während $\sin \alpha x$ dann immer noch größere Werte hat und sich für $x = \frac{l}{2}$ sogar dem größten Werte nähert, den ein Sinus annehmen kann. Zuletzt, wenn

$$\alpha l = \pi \tag{248}$$

geworden ist, liefert Gl. (247) sogar einen unendlich großen Wert für v. Natürlich ist dies nur so zu verstehen, daß kurz vorher schon v so groß wird, daß sich der Stab dauernd verbiegt, womit die Gültigkeitsgrenze unserer Betrachtungen überschritten ist. Setzt man α aus Gl. (246) in Gl. (248) ein und löst nach P auf so erhält man

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{249}$$

Diese Formel wurde zuerst von Euler abgeleitet. Der Wert P_E gibt die kritische Belastung an, die nicht ganz erreicht werden darf, ohne den Stab zum Bruche oder zu einer bleibenden seitlichen Ausbiegung zu bringen.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die ursprünglichen Exzentrizitäten u in Gl. (249) gar nicht mehr vorkommen. Solange die u überhaupt nur klein sind, ist es ganz gleichgültig, wie groß sie nun im einzelnen Falle sind; die kritische Belastung P_E wird davon nicht berührt. Freilich sieht man nach Gl. (247) auch ein, daß, je größer die u ursprünglich waren, um so eher jene Ausbiegungen v erreicht werden, die schon vor dem vollständigen Ausknicken zu einer Überanstrengung des Materials führen. Wenn die u klein waren, wird dies aber immer erst kurz vor der Erreichung des kritischen Wertes P_E eintreffen. Vorausgesetzt wird dabei, daß die bloße Druckbelastung an sich (also wenn sich der Stab nicht ausbiegen würde) erheblich unter der Proportionalitätsgrenze liegt, daß also selbst P_E noch kleiner als

$$P_D = F \cdot \sigma_{zul} \tag{250}$$

ist. Es hängt von der Länge l ab, ob dies zutrifft und bei gegebenem Querschnitte wird das Ausknicken um so eher eintreten, je länger der Stab ist. Kurze Stäbe sind daher nur auf einfache Druckbelastung, längere auf Ausknicken zu berechnen. Von welcher Grenze ab die Knickgefahr in Frage kommt, ist durch einen Vergleich der Formeln (249) und (250) leicht zu entscheiden; unter den Aufgaben wird ein solcher Fall erörtert werden.

Anmerkung. Man kann die Knickfestigkeit, sowohl in dem vorausgehenden einfachsten Falle, als in den weiterhin zu behandelnden (oder auch noch verwickelteren) Fällen auch auf graphischem Wege untersuchen, wie Herr Luigi Vianello (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1898, S. 1436) gezeigt hat. Das Verfahren schließt sich eng an das in § 46 auseinandergesetzte an. Man nimmt zunächst nach Gutdünken irgend eine Form der elastischen Linie an, von der man erwarten kann, daß sie sich von der tatsächlich zustande kommenden nicht allzusehr unterscheidet. Damit werden die Hebelarme der Knicklast und hiermit die Biegungsmomente für diese Form der Ausbiegung bekannt. Man kann dann die zu diesen Biegungsmomenten gehörige elastische Linie nach dem aus der graphischen Statik bekannten Verfahren konstruieren. Der Vergleich mit der zuerst willkürlich angenommenen Form dieser Linie führt zur Lösung der Aufgabe. Sind beide ihrem allgemeinen Verlaufe nach (abgesehen also von dem absoluten Werte der Ausbiegungen) zu weit voneinander verschieden, so kann man die erste Annahme entsprechend verbessern und die Konstruktion hiermit noch einmal wiederholen. Auf jeden Fall kommt es nachher auf das Verhältnis der absoluten Größe der Ordinaten für die gewählte und für die nach dieser Annahme konstruierte elastische Linie an. Das Verhältnis zwischen beiden liefert die Knicksicherheit, denn man müßte die Last in diesem Verhältnisse vergrößern, um beide zur Deckung zu bringen. Im übrigen verweise ich auf die angegebene Quelle.

§ 62. Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.

Ich werde jetzt noch zeigen, daß auch eine anfängliche Krümmung des Stabes, wenn der zugehörige Pfeil nur überhaupt klein gegen die Querschnittsabmessungen ist, keinen merklichen Unterschied herbeiführt. Dazu soll jetzt von der Exzentrizität der Kraftangriffslinie abgesehen und vorausgesetzt werden, daß die Stabmittellinie anfänglich eine sehr flache Kurve von dem Pfeile f_0 bildete. Diesen flachen Bogen kann man genau genug als Bogen einer Sinuslinie ansehen, also

$$u = f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \tag{251}$$

setzen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet wie vorher

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(u + y)$$

oder nach Einsetzen von u

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}\left(y + f_0 \sin \pi \frac{x}{l}\right). \tag{252}$$

Die schon den Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) angepaßte Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l}, \tag{253}$$

wenn mit f zur Abkürzung der Wert

$$f = \frac{f_0}{\pi^2 \frac{E\Theta}{Pl^2} - 1} \tag{254}$$

bezeichnet wird. Die geometrische Bedeutung von f geht aus Gl. (253) ohne weiteres hervor; es ist der größte Wert, den y annehmen kann und dieser tritt ein, wenn $\frac{\pi x}{l}$ einen rechten Winkel angibt, also für $x = \frac{l}{2}$, d. h. f ist die elastische Ausbiegung nach der Seite hin, die die Mitte des Stabes unter der Belastung P erfährt. Mit Rücksicht auf Gl. (249) kann man f auch in der Form

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1} \tag{255}$$

schreiben, und man erkennt, daß auch in diesem Falle, wenn der ursprüngliche Krümmungspfeil f_0 klein war, eine größere Ausbiegung f, also eine Bruchgefahr durch Ausknicken erst dann eintritt, wenn sich P dem Eulerschen Werte P_E nähert.

Der Winkel, um den sich die Endtangente der elastischen Linie bei der Formänderung dreht, sei mit φ bezeichnet. Solange φ klein ist, kann der Bogen gleich der trigonometrischen Tangente gesetzt werden und man hat daher

$$\varphi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (253)

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}. \tag{256}$$

Denkt man sich bei einem Knickversuche mit einem Stabe, dessen anfänglicher Krümmungspfeil f_0 einige mm, also merklich mehr beträgt, als die unvermeidliche Exzentrizität der Kraftangriffslinie, die Lasten P als Abszissen und die zugehörigen Biegungspfeile f, die man mit einer geeigneten Vorrichtung gemessen hat, als Ordinaten aufgetragen, so muß man nach Gl. (255) — abgesehen natürlich von unvermeidlichen Versuchsfehlern — eine Hyperbel erhalten. Der Winkel, um den sich die Stabenden drehen, wächst nach Gl. (256) proportional mit f. Wenn man also auch φ mißt, was mit einer Spiegelablesung leicht möglich ist und es in derselben Weise aufträgt, so muß gleichfalls eine Hyperbel entstehen. Die senkrechten Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen dem Eulerschen Werte $P = P_E$.

Diese Folgerungen der Theorie habe ich vor einigen Jahren durch den Versuch geprüft und sie gut bestätigt gefunden.

§ 63. Die wirkliche Knickbelastung P_K.

Schon in § 61 ist darauf hingewiesen worden, daß der Stab schon etwas früher, als der Eulersche Wert P_E erreicht ist, zum Bruche oder zu bleibenden Formänderungen gelangt. Wieviel eher dies geschieht, hängt von dem anfänglichen Krümmungspfeile f_0 in Verbindung mit der anfänglichen Exzentrizität der Kraftangriffslinie ab. Um eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, wie groß die aus diesem Grunde zu erwartenden Abweichungen sind, führe ich die Rechnung für den Fall durch, daß der Stab anfänglich etwas gekrümmt war, während von einer Berücksichtigung der anfänglichen Exzentrizität abgesehen werden soll, um die Rechnung nicht zu weitläufig zu machen.

Die größte Anstrengung des Materiales tritt im Mittelquerschnitte auf. Man hat dort für irgendeine Belastung P

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f+f_0)}{\Theta} \cdot a,$$

wenn a den Abstand der betreffenden Faser von der zur Nulllinie parallelen Schwerlinie angibt. Für f kann man den Wert aus Gl. (255) einsetzen. Die wirkliche Knickbelastung P_K wird schon dann nahezu erreicht, wenn die größte im Querschnitte vorkommende Spannung σ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, denn sobald dies geschehen ist, wachsen die Ausbiegungen schneller als nach den vorausgehenden Formeln, und der Bruch wird dadurch alsbald herbeigeführt. Wir erhalten daher P_K durch Auflösung der Gleichung

$$F\sigma' = P + \frac{PaF}{\Theta}\left(f_0 + f_0 \frac{P}{P_E - P}\right)$$

nach P, wenn wir darin unter σ' die Proportionalitätsgrenze des Materiales gegen Druck und unter a den Abstand der äußersten Kante von der Schwerlinie verstehen. Für $F\sigma'$ sei zur Abkürzung wieder P_D geschrieben, also jene Belastung unter diesem Zeichen verstanden, die bei einfacher Druckbelastung eines kurzen Abschnittes des Stabes zur Überschreitung der Proportionalitätsgrenze führt. Die Gleichung ist vom zweiten Grade für P, und ihre Auflösung liefert, wenn wir zur Abkürzung die absolute Zahl

$$\frac{aFf_0}{\Theta} = \eta$$

setzen, für P_K

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}. \quad (257)$$

Von den beiden Werten ist immer der kleinere zu nehmen, das Wurzelvorzeichen also stets so zu wählen, daß das Wurzelglied negativ wird. Mit $f_0 = 0$, also bei einem ursprünglich geraden Stabe, wird $\eta = 0$ und $P_K = P_E$, vorausgesetzt, daß $P_D > P_E$ ist. Sollte dagegen $P_D < P_E$ sein, also bei einem kurzen Stabe, so erhält man nach der Bemerkung über das Wurzelvorzeichen $P_K = P_D$. Auf diese Weise unterscheidet die Formel auch zwischen dem Falle der Knickfestigkeit und der bloßen Druckbelastung. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie groß der Unterschied zwischen P_K und P_E werden kann, führe ich folgende Zahlen an.

Der Stab sei ein gleichschenkliges Winkeleisen von 70 mm Schenkellänge und 9 mm Schenkelstärke, der Elastizitätsmodul sei gleich 2110000 atm und die Proportionalitätsgrenze gleich 2000 atm. Der anfängliche Krümmungspfeil f_0 sei zu 1 mm angenommen. Dann erhält man für die Länge von 2 m:

$$P_D = 23{,}6t, \quad P_E = 11{,}8t, \quad P_K = 10{,}4t,$$

für die Länge von 3 m:

$$P_D = 23{,}6t, \quad P_E = 5{,}2t, \quad P_K = 5{,}0t,$$

im ersten Falle also schon ziemlich erheblich verschiedene Werte von P_E und P_K. Der Unterschied zwischen beiden wächst schnell, wenn man f_0 vergrößert. Bei dem längeren Stabe ist bei dem gewählten f_0 der Unterschied geringer; man muß aber beachten, daß es um so schwieriger ist, einen Stab hinreichend genau gerade zu richten, je länger er ist.

Unter der Voraussetzung, daß η ein kleiner Bruch ist (daß also f_0 klein ist gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Querschnittes), kann man den unter dem Wurzelzeichen in Gl. (257) stehenden Ausdruck mit Vernachlässigung des mit η^2 behafteten Gliedes näherungsweise ersetzen durch

$$\frac{1}{4}\left(P_D^2 + 2(\eta + 1)P_D P_E + (2\eta + 1)P_E^2 - 4P_D P_E\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)\right).$$

Wenn ferner P_D erheblich größer als P_E ist, also bei einem recht schlanken Stabe, kann man genau genug

$$\sqrt{(P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)} = P_D - P_E + \eta\frac{P_E(P_D + P_E)}{P_D - P_E}$$

setzen, und Gl. (257) geht damit näherungsweise über in

$$P_K = P_E - \eta\frac{P_E^2}{P_D - P_E}. \tag{258}$$

Diese Gleichung gestattet einen bequemen Überschlag über die ungefähr zu erwartende Abweichung der wirklichen Knickbelastung P_K von dem Eulerschen Werte P_E. Wenn P_D nicht erheblich größer als P_E ist, muß man aber natürlich auf die ursprüngliche Gl. (257) zurückgehen.

Wie ich schon erwähnte, kann Gl. (257) auch dann angewendet werden, wenn ein eigentliches Ausknicken gar nicht zu erwarten, wenn also P_D kleiner ist als P_E. Der unmittelbaren Anwendung steht aber die Schwierigkeit im Wege, daß man in der Regel im Ungewissen darüber ist, welchen Wert von f_0 oder von η man im gegebenen Falle als den wahrscheinlichsten anzusehen hat. Außerdem ist bei der Ableitung von Gl. (257) auch noch nicht auf die unvermeidliche Exzentrizität des Kraftangriffes Rücksicht genommen. Die Anwendung einer empirischen Formel, die Herr v. Tetmajer aus zahlreichen Versuchen mit Stäben aus verschiedenen Stoffen abgeleitet hat, ist daher in solchen Fällen mehr zu empfehlen. Bezeichnet man den kleinsten Trägheitshalbmesser des Querschnittes mit i, so kann nach v. Tetmajer für $P_D > P_E$

$$P_K = aF - b\frac{lF}{i} \tag{259}$$

gesetzt werden. Die Konstanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

Schweißeisen	$a = 3030$ atm,	$b = 12{,}90$ atm.
Weiches Flußeisen . .	$a = 3100$ „	$b = 11{,}40$ „
Härteres Flußeisen . .	$a = 3210$ „	$b = 11{,}60$ „
Lufttrocknes Nadelholz .	$a = 293$ „	$b = 1{,}94$ „

Für Gußeisen reicht Gl. (259) mit zwei Konstanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{i} = 5$ bis 80 setzt Herr v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53\left(\frac{l}{i}\right)^2 - 120\frac{l}{i} + 7760\right)\text{atm.} \tag{260}$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Eulerschen Formel empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, daß die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

§ 64. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

Wenn das eine Ende des Stabes fest eingespannt und das andere ganz frei beweglich ist, verhält sich der Stab genau so wie eine Hälfte des beiderseits auf Spitzen gelagerten Stabes von der doppelten Länge. Es ist daher nicht nötig, diesen Fall besonders zu untersuchen; man kann vielmehr die früher abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man darin nur überall l durch $2l$ ersetzt. Ein etwas allgemeinerer Fall wird unter den Aufgaben behandelt werden.

Anders ist es, wenn der Stab an beiden Enden festgehalten wird und dort als fest eingespannt betrachtet werden kann. Freilich ist es schwer möglich, diese Voraussetzung genau zu verwirklichen, die Anordnung an den Stabenden also so zu treffen, daß in der Tat jede kleine Drehung der Endtangenten der elastischen Linie verhindert wird. Es ist aber immerhin nützlich, sich Rechenschaft darüber zu geben, wie groß die Knicklast in diesem Falle würde, wenn man auch bei der praktischen Anwendung besser tun wird, auf die genaue Erfüllung der genannten Bedingung nicht zu rechnen, die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes also entsprechend niedriger einzuschätzen. Diese Einschätzung muß dem Ermessen des Konstrukteurs im einzelnen Falle überlassen bleiben; sie wird sich in erster Linie nach dem Vertrauen zu richten haben, das man im gegebenen Falle in die Güte der Einspannung setzen kann. Wenn z. B. ein Stab einfach mit stumpfen Enden zwischen die Druckplatten einer Festigkeitsmaschine eingespannt wird, wird man bedenken müssen, daß eine geringe Unebenheit der Endquerschnitte eine Drehung trotzdem ermöglichen kann oder daß sich auch die Druckplatten selbst unter Umständen etwas schief stellen können, wenn sie nicht ganz besonders gut geführt sind. Bei der Ausführung eines Knickversuches dieser Art kann man sich von der Wirksamkeit der Einspannung übrigens leicht dadurch überzeugen, daß man an dem Stabende einen kleinen Spiegel anbringt, auf den man ein Fernrohr richtet, um das Spiegelbild eines festen Maßstabes darin zu beobachten. Bei genauer Einspannung darf sich der Spiegel nicht drehen.[1])

Bei der folgenden Rechnung nehme ich indessen an, daß die feste Einspannung genau verwirklicht sei. Die beiden Endtangenten der elastischen Linie in Abb. 78 fallen dann

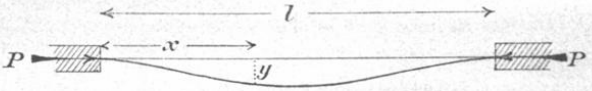

Abb. 78.

miteinander und mit der ursprünglichen Lage der Stabachse oder auch mit der Richtungslinie der Kräfte P zusammen,

1) Einen Belastungsversuch mit einer großen gußeisernen Säule habe ich auf diese Art ausgeführt. Die Belastung wurde auf $^1/_3$ der zu erwartenden Knicklast gesteigert. Es zeigte sich, daß sich die Stabenden fast um dasselbe Maß drehten, das man bei einer Spitzenlagerung der Enden hätte erwarten können. Dieses Resultat bestätigt von neuem, wie wenig man sich auf die durch eine stumpfe Auflagerung der Kopf- und der Fußplatte bewirkte Einspannung verlassen kann (Mitteilungen meines Laborat., Heft 27).

wenn wir jetzt der Einfachheit wegen von der Berücksichtigung der anfänglichen Exzentrizität der Kraftangriffslinie ebenso wie von der ursprünglichen Krümmung des Stabes absehen. Wir wollen untersuchen, bei welchem Werte von P der durch Abb. 78 angegebene Gleichgewichtszustand bestehen kann.

Für den Querschnitt mit der Abszisse x haben wir links vom Schnitte außer der Kraft P noch ein Kräftepaar, das auf das Stabende übertragen werden muß, um eine Drehung zu verhindern. Das Moment dieses Kräftepaares heißt das Einspannmoment oder auch das Anfangsmoment und soll mit M_0 bezeichnet werden. Das Biegungsmoment für den Querschnitt x ist dann

$$M = M_0 + Py \tag{261}$$

und die Gleichung der elastischen Linie liefert

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -(M_0 + Py). \tag{262}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_0}{P}, \tag{263}$$

wenn unter α, wie schon früher, zur Abkürzung der Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

verstanden wird, während A und B die beiden Integrationskonstanten sind. Für $x = 0$ muß y verschwinden, daher ist

$$B = \frac{M_0}{P}$$

zu setzen. Ferner muß wegen der Einspannung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 0$ als für $x = l$ verschwinden. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x,$$

und daher zunächst $A = 0$ und ferner

$$B\alpha \sin \alpha l = 0.$$

In der letzten Gleichung ist sowohl der Faktor B als der Faktor α von Null verschieden, daher muß $\sin \alpha l = 0$ sein. Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muß daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, daß auch y für $x = l$ verschwinden muß. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, daß sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y-Achse verschieben könnte. Um der letzten Grundbedingung zu genügen, muß vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1, wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Wert von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{264}$$

Der kritische Wert der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so groß als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Exzentrizität des Kraftangriffs usf., der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Änderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, daß der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muß beachten, daß an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabachse gerichtete Kraft V übertragen werden muß, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y-Achse zu schützen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx \tag{265}$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Vx, \tag{266}$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x, \tag{267}$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationskonstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muß die Gleichung

$$0 = -\frac{V \alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schließlich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessieren wir uns aber nicht und in der Tat wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werte von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transzendente Gleichung für αl, die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 79 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten

Abb. 79.

zu können. Man sieht leicht ein, daß αl jedenfalls größer als π werden muß, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probieren findet man, daß ungefähr

$$\alpha l = 4{,}49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E\Theta}{l^2}, \tag{268}$$

also ziemlich genau das doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Wertes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, daß der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwertige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (264) dahin gedeutet werden, daß als gleichwertige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muß, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.

§ 65. Knicken bei gleichzeitiger Biegungsbelastung.

Der Stab möge in der Mitte eine Biegungslast Q tragen (vgl. Abb. 80). Für das Biegungsmoment im Querschnitte x erhält man

$$M = \frac{Q}{2}x + Py$$

und hieraus

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Q}{2}x + Py\right),$$

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{Q}{2P}x.$$

Die elastische Linie zerfällt in zwei Äste, die sich in der Mitte aneinander schließen. Für jeden Ast sind die Konstanten A und B gesondert zu bestimmen; hier genügt es indessen der Symmetrie

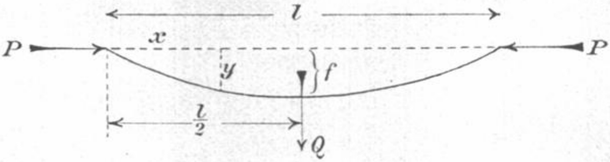

Abb. 80.

wegen, nur einen Ast näher ins Auge zu fassen. Wir wählen den linken; für $x = 0$ muß $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Die erste Grenzbedingung liefert $B = 0$ und aus der zweiten folgt

$$A = \frac{Q}{2P\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für y ein und wählt darin nachträglich $x = \frac{l}{2}$, um die größte Ausweichung, nämlich den Biegungspfeil f zu erhalten, so wird

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right\}. \tag{269}$$

Die Formel liefert einen unendlich großen Wert für f, wenn $\frac{\alpha l}{2}$ zu einem rechten Winkel, αl also $= \pi$ und daher $P = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2}$ wird. Die Biegungsbelastung ändert also in diesem Sinne nichts an der kritischen Belastung auf Zerknicken, die ebenso groß bleibt, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Dieser Schluß ist aber mit Vorsicht aufzunehmen, denn er bezieht sich ja nur auf die rein elastischen Erscheinungen und nimmt auf die schon vor der Erreichung der kritischen Belastung eintretende Überschreitung der Proportionalitätsgrenze keine Rücksicht. So wie wir schon früher fanden, daß P_K wegen der Exzentrizität des Kraftangriffs usf. kleiner ist als P_E, muß auch hier die wirkliche Knickbelastung kleiner ausfallen als der Eulersche Wert und zwar um so mehr, je größer Q ist.

Für die Spannung in einer Faser des mittleren Querschnittes erhält man bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei der ähnlichen Untersuchung in § 63

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(\frac{Ql}{4} + Pf\right)\frac{a}{\Theta}.$$

In diese Gleichung ist f nach Gl. (269) einzuführen, ebenso für α der Wert einzusetzen und hierauf die Gleichung nach P aufzulösen, womit man ebenso wie in § 63 P_K erhält. Dabei tritt freilich die Schwierigkeit auf, daß die Gleichung transzendent ist; um darüber leichter hinweg zu kommen, ersetze ich Gl. (269) noch durch eine Näherungsformel, indem ich von der Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

Gebrauch mache, die konvergent ist bis $x = \frac{\pi}{2}$. Bei Festigkeitsberechnungen wird es sich meistens um Lasten handeln, die erheblich unter der Bruchbelastung bleiben, da man noch eine gewisse Sicherheit nötig hat. Jedenfalls ist daher auch $\frac{\alpha l}{2}$ bei einem Falle der praktischen Anwendung erheblich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und selbst noch kleiner als die Einheit. In diesem Falle konvergiert die Reihe ziemlich schnell und für eine Annäherung wird es genügen, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen. Man erhält dann an Stelle von Gl. (269)

$$f = \frac{Q\alpha^2 l^3}{48P}\left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{10}\right)$$

oder, wenn man noch den Wert von α einsetzt,

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta}\left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right). \qquad (270)$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Biegungspfeile für $P = 0$ und stimmt auch in der Tat mit dem früher für die

Biegungsbelastung Q gefundenen Pfeile (Gl. (82)) genau überein. Schreiben wir für diesen Anteil, also auch für den Faktor vor der Klammer f_0 und beachten wir, daß im zweiten Gliede der Faktor 10 im Nenner nahezu mit π^2 übereinstimmt und daß sich dieses Glied daher in der Form $\frac{P}{P_E}$ schreiben läßt, so vereinfacht sich Gl. (270) noch weiter zu

$$f = f_0 \cdot \frac{P_E + P}{P_E}. \tag{271}$$

Die Gleichung für σ geht jetzt, nach Multiplikation mit F und mit $F\sigma = P_D$ über in

$$P_D = P + \left(\frac{Ql}{4} + P \cdot \frac{P_E + P}{P_E} f_0\right)\frac{aF}{\Theta}, \tag{272}$$

die ohne weiteres nach P aufgelöst werden kann und damit P_K liefert, Solange P erheblich kleiner bleibt als P_E, erkennt man übrigens schon aus Gl. (271), daß der Biegungspfeil durch die Zufügung von P gegenüber f_0 nur wenig geändert wird. Daraus ist zu schließen, daß die Biegungsspannungen auch nur ungefähr in demselben Verhältnisse wachsen, wozu dann freilich noch die gleichförmig über den Querschnitt verteilte Belastung $\frac{P}{F}$ kommt.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (272) nach P hat man übrigens für f_0 nachträglich wieder den Wert einsusetzen, für den es zur Abkürzung diente; von der weiteren Ausrechnung, die gar keine Schwierigkeiten mehr bietet, möge hier abgesehen werden.

Anmerkung. Eng verwandt mit dem hier besprochenen Falle ist ein anderer, der nicht ohne praktische Bedeutung ist und der von Herrn M. Tolle ausführlich behandelt wurde (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 855). Man denke sich zunächst die Richtung der Kräfte P in Abb. 80 umgekehrt. Von einem Ausknicken kann dann zwar nicht mehr die Rede sein, da die Zugkraft P die durch die Biegungslast Q bewirkte Ausbiegung im Gegenteile zu verkleinern sucht. Dies hindert indessen nicht, daß die allgemeinen Betrachtungen zu Anfang des Paragraphen beibehalten werden können, falls man nur in den Formeln P überall negativ setzt.

Ferner denke man sich den Stab als eine dünne und lange Zugstange, etwa von kreisförmigem Querschnitte, die nur durch ihr Eigengewicht auf Biegung beansprucht wird. Auch dann kann man mit geringen Änderungen die vorausgehenden Entwicklungen benutzen; man braucht nur das durch die Einzellast Q hervorgerufene Biegungsmoment durch das von der Eigenlast herrührende zu ersetzen. Schließlich nehme man an, daß die Zugstange an beiden Enden festgehalten ist, so daß die zur Biegungslinie gehörige Bogensehne die unveränderliche Länge l behalten muß. Damit kommt man auf den von Tolle behandelten Fall; die zugehörige Biegungslinie wird von ihm als eine „steife Kettenlinie" bezeichnet. Die Zugkraft P ist jetzt nicht mehr gegeben, sondern aus den Bedingungen der Aufgabe zu ermitteln. Die Lösung findet man natürlich im wesentlichen auf dieselbe Art wie vorher, indem man zuerst die Differentialgleichung der elastischen Linie aufstellt, diese integriert und die Integrationskonstanten den Grenzbedingungen gemäß bestimmt, wobei sich auch der Wert von P ergibt. Man kann aus dieser Betrachtung nützliche Schlüsse über die beste Anordnung solcher Zugstangen ziehen, worüber aber hier nur auf die Quelle verwiesen werden kann.

§ 66. **Knickformel von Navier, Schwarz, Rankine.**

Die Zuverlässigkeit der Eulerschen Theorie der Knickfestigkeit wurde lange Zeit hindurch angezweifelt. Erst nachdem sich bei der Ausführung genauer Versuche in den letzten Jahrzehnten herausgestellt hatte, daß die Eulersche Theorie in sehr guter Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Verhalten auf Knicken beanspruchter Stäbe steht, kam sie in allgemeinere Aufnahme in der ausübenden Technik. Vorher behalf man sich mit anderen Formeln, von denen die in der Überschrift genannte am meisten angewendet wurde. Sie wird auch jetzt noch häufig gebraucht und darf daher hier nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Diese Formel ist zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Wegen gefunden worden und sie wird daher bald als die Naviersche, bald als die Schwarzsche, bald als die Rankinesche bezeichnet. Man geht bei ihrer Ableitung am einfachsten von der an sich ganz berechtigten Annahme aus, daß die Kraft P wegen zufälliger Abweichungen der Stabsachse von der geraden Linie und wegen der unvermeidlichen Exzentrizität des Kraftangriffes von vornherein an einem Hebelarme p wirkt. Für diesen Hebelarm setze man hypothetisch

$$p = \varkappa \frac{l^2}{a} \tag{273}$$

worin $\varkappa$ eine absolute Zahl ist, die aus Versuchen zu bestimmen ist. Zur Rechtfertigung für den Ansatz (273) kann man anführen, daß Abweichungen der genannten Art um so eher eintreten, je größer die Länge l im Vergleiche zu dem Abstande a der äußersten Faser von der in Frage kommenden Schwerlinie ist. Freilich ließe sich diese Überlegung auch noch auf andere Art zum Ausdrucke bringen und Gl. (273) haftet daher eine Willkür an, die nur durch die nachträgliche Bestätigung durch die Erfahrung gehoben werden könnte. Nimmt man Gl. (273) aber an, so ist damit der Fall der Knickfestigkeit auf den der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung zurückgeführt. Für die Spannung an der äußersten Faser erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\Theta}a = \frac{P}{F}\left(1 + \varkappa\frac{l^2}{i^2}\right), \tag{274}$$

wenn mit i der Trägheitsradius bezeichnet wird.

Der zulässige Wert der Druckbelastung folgt daraus

$$P_{\text{zul}} = \frac{F\sigma_{\text{zul}}}{1 + \varkappa\frac{l^2}{i^2}} \tag{275}$$

und das ist die Formel, um deren Ableitung es sich handelte. Als ein Vorzug dieser Formel darf es betrachtet werden, daß sie die gewöhnliche Druckbeanspruchung für kleine Stablängen l zugleich mit umfaßt. Sie trägt hierbei dem Umstande Rechnung, daß eine zunehmende Exzentrizität des Kraftangriffes bei wachsender Stablänge in der Regel auch dann schon zu erwarten ist, wenn ein Ausknicken überhaupt noch nicht in Frage kommt. Für jene Längenverhältnisse l/i, bei denen die Knickgefahr eintritt, stimmt sie dagegen mit den Versuchsergebnissen weniger gut überein, als die Eulersche Formel. Natürlich ist es immer möglich, Gl. (275) zur Übereinstimmung mit irgend einem bestimmten Versuchsergebnisse zu bringen, wenn man die Konstante $\varkappa$ passend wählt. In dieser Hinsicht haben alle Formeln, in die man einen aus den Versuchen selbst erst zu bestimmenden Koeffizienten einführt, einen Vorsprung vor anderen, die auf rationellerem Wege abgeleitet sind, wie die Eulersche Formel, die schon durch einen einzigen Versuch widerlegt werden könnte, wenn sie auf einer falschen Grundlage beruhte. Es ist auch klar, daß man Gl. (275) ohne Besorgnis auf eine ganze Gruppe verwandter Fälle anwenden kann, wenn man $\varkappa$ aus einem Knickversuche entnimmt, der unter ganz ähnlichen Umständen angestellt wurde. Bei Festigkeitsberechnungen dieser Art handelt es sich ja ohnehin mehr um eine ungefähre Abschätzung, als um die Gewinnung genau richtiger Werte. Eine wissenschaftliche Bedeutung könnte man Gl. (275) aber nur dann zusprechen, wenn die Konstante $\varkappa$ nur von dem Baustoffe abhängig wäre und bei allen Längenverhältnissen des Stabes wirklich als konstant betrachtet werden dürfte. Das trifft aber, wie namentlich aus den Versuchen v. Tetmajers hervorgeht, keineswegs zu. In jedem anderen Falle der Anwendung müßte man, um ganz sicher zu gehen, einen anderen Wert von $\varkappa$ einführen und die Brauchbarkeit des Resultates hängt davon ab, ob man den im gegebenen Falle zutreffenden Wert von $\varkappa$ richtig eingeschätzt hat.

Aufgaben.

49. Aufgabe. Bei welchem Verhältnisse der Querschnittseite a zur Länge l beginnt die Knickgefahr für einen quadratischen Stab nach der Eulerschen Formel?

Lösung. Man setze

$$\frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} = F\sigma$$

und verstehe unter σ die Proportionalitätsgrenze für Druck. Da $\Theta = \frac{a^4}{12}$ und $F = a^2$ ist, erhält man durch Auflösung der Gleichung nach l

$$l = a\pi\sqrt{\frac{E}{12\sigma}}.$$

Wenn z. B. für Flußeisen $E = 2\,100\,000$, $\sigma = 2000$ atm gesetzt wird, liefert dies

$$\frac{l}{a} = 29{,}4.$$

Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, daß die Stabenden frei drehbar sind.

50. Aufgabe. Wie groß ist die Last, die eine gußeiserne Säule von 20 cm äußerem Durchmesser und 2 cm Wandstärke bei 6 m Höhe a) nach der Eulerschen, b) nach der Schwarzschen Formel mit Sicherheit tragen kann, wenn $F = 1\,000\,000$ atm, $\sigma_{zul} = 700$ atm, $\varkappa = 0{,}0002$ *gesetzt wird?*

Lösung. Die Querschnittsfläche F ist

$$F = \pi(10^2 - 8^2) = 113 \text{ cm}^2.$$

Das Trägheitsmoment Θ ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4630 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad i^2 = \frac{4630}{113} = 41 \text{ cm}^2.$$

Bei Anwendung der Eulerschen Formel setzen wir voraus, daß das obere Ende der Säule durch das Gebälk, das sie trägt, gegen eine Verschiebung in horizontaler Richtung gestützt sei. Gewöhnlich wird dies zutreffen; natürlich ist aber im gegebenen Falle sorgfältig darüber nachzudenken, ob die Voraussetzung wirklich berechtigt ist. Sonst ist die doppelte Länge in die Formel einzuführen. Dagegen sehen wir von der Berücksichtigung einer etwaigen Einspannung der Enden der Sicherheit wegen ab. Die Knicklast wird dann nach der Eulerschen Formel

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2} = 10 \cdot \frac{10^6 \cdot 4630}{600^2} = 128\,600 \text{ kg}.$$

Man pflegt bei Gußeisen eine sechsfache Sicherheit gegen Ausknicken zu verlangen, daher setzen wir

$$P_{zul} = \tfrac{1}{6} P_E = 21\,400 \text{ kg}.$$

Nach der Schwarzchen Formel wird dagegen

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{zul}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} = \frac{113 \cdot 700}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{600^2}{41}} = 28\,600 \text{ kg}.$$

Ich selbst würde dem ersten Resultate den Vorzug geben, hätte aber auch gegen die Belastung mit 28 600 kg nicht viel einzuwenden, da der Sicherheitsgrad im ersten Falle ziemlich willkürlich eingeschätzt ist.

Anmerkung. Als Beispiel mag hier noch erwähnt werden, daß nach der Münchener Bauordnung für die Berechnung gußeiserner Säulen die Anwendung der Schwarzschen Formel mit den Koeffizienten $\varkappa = 0{,}0006$ und $\sigma_{zul} = 1000$ atm vorgeschrieben ist. Damit würde $P_{zul} = 18\,000$ kg. Sonst werden aber beide Koeffizienten gewöhnlich kleiner angenommen, als nach dieser Vorschrift.

51. Aufgabe. Ein aufrecht stehender Stab ist am unteren Ende fest eingespannt. Das obere Ende ist frei drehbar und kann sich zugleich in horizontaler Richtung etwas verschieben. Dabei soll aber ein elastischer Widerstand auftreten, der der Größe der Ausweichung proportional ist. Man denke sich etwa das obere Ende durch horizontale Zugstangen gehalten, die bei einer Ausweichung des Befestigungspunktes in Spannung geraten. Man soll die Knickfestigkeit des Stabes berechnen.

Lösung. Die Ausweichung des oberen Endes sei y_0 und von diesem Ende aus seien die Abszissen x gerechnet. Dann tritt hier eine horizontale Kraft H auf, die

$$H = cy_0$$

gesetzt werden kann. Der Faktor c hängt von der Elastizität der Zugstangen ab, die das obere Ende halten und ist hier als gegeben zu betrachten. Für den Querschnitt mit der Abszisse x hat man

$$M = Hx + P(y - y_0)$$

und die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -cy_0x - Py + Py_0$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c}{P} y_0 x + y_0,$$

wenn α dieselbe Bedeutung wie früher hat. Für $x = 0$ muß $y = y_0$ sein; daraus folgt $B = 0$. Ferner ist für $x = l$ sowohl x als $\frac{dy}{dx}$ gleich Null. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha l - \frac{cy_0 l}{P} + y_0,$$

$$0 = \alpha A \cos \alpha l - \frac{cy_0}{P}.$$

Löst man beide nach A auf, so erhält man

$$A = y_0 \cdot \frac{cl - P}{P \sin \alpha l}; \qquad A = y_0 \cdot \frac{c}{P\alpha \cos \alpha l}.$$

Damit diese Gleichungen miteinander bestehen können, muß

$$\frac{cl - P}{\sin \alpha l} = \frac{c}{\alpha \cos \alpha l}$$

sein. In anderer Form läßt sich diese Bedingungsgleichung auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha P}{c}$$

oder, wenn man P in α ausdrückt

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \cdot \frac{E\Theta}{c l^3}.$$

Die kleinste Wurzel dieser transzendenten Gleichung, die im einzelnen Falle durch Probieren aufzulösen ist, liefert αl und hiermit die Knicklast P.

Setzt man $c = \infty$, so ist der Stab oben ganz festgehalten und wir kommen damit auf den schon in § 64 ausführlich behandelten Fall. Wenn umgekehrt $c = 0$ gesetzt wird, ist das obere Stabende in horizontaler Richtung frei beweglich und die Gleichung geht über in $\operatorname{tg} \alpha l = \pm \infty$. Diese liefert die Lösung $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ und daher

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\Theta}{l^2},$$

wie auch schon in den Eingangssätzen von § 64 durch eine einfache Betrachtung festgestellt worden war.

52. *Aufgabe. Der Querschnitt eines Stabes, der an beiden Enden in Spitzen gelagert ist, sei in der Stabmitte auf eine Strecke l', die klein gegenüber der ganzen Stablänge ist, durch Einschnitte verschwächt, so daß das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes dadurch von Θ auf Θ' herabgesetzt wird. Man soll die Knickfestigkeit des verschwächten Stabes mit der des unverschwächten vergleichen.*

Lösung. Der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des kurzen mittleren Stückes bei gegebenem Biegungsmomente gegeneinander verdrehen, ist in dem Verhältnisse $\frac{\Theta}{\Theta'}$ größer, als wenn der Querschnitt unverändert durchginge. Man denke sich nun einen zweiten Stab von überall gleichem Trägheitsmomente Θ, aber von etwas größerer Länge, so nämlich, daß das Mittelstück von der Länge l' durch ein solches von der Länge $l' + l''$ ersetzt ist, wenn

$$l'' = \frac{\Theta - \Theta'}{\Theta'} l'$$

genommen wird. Dann würden sich die Endquerschnitte des Mittelstückes dieses Stabes bei gegebenem Biegungsmomente um denselben Winkel gegeneinander verdrehen, wie beim verschwächten Stabe. Falls nun das Mittelstück an und für sich kurz ist, wird auch der Biegungspfeil in der Mitte beim zweiten Falle nicht merklich größer sein als im ersten Falle, wenn die Biegungslinien in den äußeren Stababschnitten in beiden Fällen miteinander übereinstimmen. Man erkennt daraus, daß die Querschnittverschwächung in der Mitte so wirkt, als wenn der Querschnitt unverändert geblieben, die Stablänge aber um den vorher berechneten Betrag l'' vergrößert wäre. Danach kann die Knicklast leicht berechnet werden.

Zur Prüfung des hier erörterten Falles habe ich eine größere Versuchsreihe angestellt, und durch die Versuchsergebnisse wurde ich erst zu der hier gegebenen Lösung geführt. Dabei zeigte sich indessen, daß man für l' einen etwas größeren Wert als die Länge einzusetzen hat, auf die sich die Verschwächung des Stabquerschnittes erstreckt. Auch in den unmittelbar an das Mittelstück angrenzenden Teilen des Stabes kann sich nämlich nicht sofort der volle Querschnitt wirksam erweisen; die an die Lücke angrenzenden Kanten müssen vielmehr ebenfalls zunächst noch spannungslos sein. Bei meinen Versuchen zerknickte ich Winkeleisen, bei denen der Querschnitt durch beiderseitige Einschnitte von 2,5 bis 60 mm Länge (in der Richtung der Stabachse gemessen) so geschwächt war, daß Θ' nur $^1/_4$ bis $^1/_5$ von Θ war. Dabei mußte man die Einschnittlänge um 2 bis 4 cm vermehren, um die vorausgehende Rechnung in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu bringen.

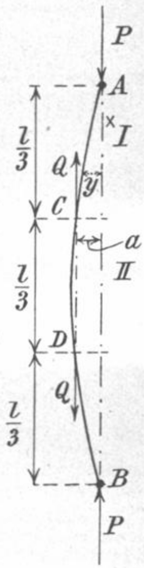

Abb. 81.

53. *Aufgabe. Ein zwischen Spitzen gelagerter Stab von 1,5 m Länge und rechteckigem Querschnitt von 3 cm und 5 cm Seitenlänge wird durch die Lasten P an den Enden A und B (Abb. 81) gedrückt. Außerdem greifen an den Punkten C und D noch Lasten Q an, die den mittleren Teil des Stabes auf Zug beanspruchen. Man soll die Knicklast P für den Fall berechnen, daß $Q = \frac{1}{2}P$ und $E = 2.10^6$ atm gesetzt werden kann.*

Lösung. Für den zwischen A und C liegenden Ast I der elastischen Linie des ausgebogenen Stabes hat man die Differentialgleichung

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -Py,$$

woraus, wie in § 61,

$$y_{\mathrm{I}} = A\sin\alpha x$$

folgt. Die eine Integrationskonstante ist hierbei schon der Grenzbedingung $y = 0$ für $x = 0$ angepaßt. Bezeichnen wir die Ordinate an der Stelle C mit a, so ist

$$a = A\sin\frac{\alpha l}{3}.$$

Für Ast II nehmen wir die Linie CD als X-Achse und C als Koordinatenursprung an. Die Differentialgleichung dieses Astes lautet dann

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -P(y+a) + Qy$$

deren allgemeine Lösung sofort in der Form

$$y = C\sin\beta x + D\cos\beta x - \frac{P}{P-Q}a$$

angegeben werden kann. Dabei hat die Konstante β den Wert

$$\beta = \sqrt{\frac{P-Q}{E\Theta}}.$$

Die Integrationskonstanten C und D bestimmen wir aus den Bedingungen, daß für den zweiten Ast y zu Null wird für $x = 0$ und für $x = \frac{l}{3}$. Daraus folgt

$$D = \frac{P}{P-Q}a; \qquad C = \frac{P}{P-Q}a\,\frac{1-\cos\frac{\beta l}{3}}{\sin\frac{\beta l}{3}}.$$

Schreiben wir jetzt zum Unterschiede vom ersten Ast y_{II} für y, so haben wir

$$y_{\text{II}} = \frac{P}{P-Q}a\left(\left(1-\cos\frac{\beta l}{3}\right)\frac{\sin\beta x}{\sin\frac{\beta l}{3}} + \cos\beta x - 1\right).$$

Außerdem haben wir aber noch die Bedingung, daß sich beide Äste ohne Knick aneinander schließen müssen, daß also

$$\left(\frac{dy_{\text{I}}}{dx}\right)_{x=\frac{l}{3}} = \left(\frac{dy_{\text{II}}}{dx}\right)_{x=0}$$

sein muß. Setzen wir die Werte ein, so geht diese Gleichung nach einfacher Umformung über in

$$\frac{\alpha}{\beta}\cos\frac{\alpha l}{3} = \frac{P}{P-Q}\left(1-\cos\frac{\beta l}{3}\right)\frac{\sin\frac{\alpha l}{3}}{\sin\frac{\beta l}{3}}$$

aus der a herausgefallen ist. Da β von α in einfacher Weise abhängt, kann sie nach α aufgelöst werden, womit man auch die verlangte Knicklast P findet.

Bisher konnte Q noch irgendeinen Wert haben, der kleiner als P ist. Setzen wir $Q=0$, so entspricht dies dem einfachsten Falle der Knickfestigkeit, was wir zur Prüfung der Richtigkeit der Rechnung verwenden können. Die Gleichung geht dann, da in diesem Falle $\beta = \alpha$ wird, über in

$$\cos\frac{\alpha l}{3} = 1 - \cos\frac{\alpha l}{3}, \quad \text{woraus} \quad \frac{\alpha l}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ (oder } = 60^0)$$

folgt. Für P folgt daraus in der Tat der Eulersche Wert in Gl (249).

Setzen wir dagegen, wie es die Aufgabe verlangt, $Q = \frac{1}{2}P$, so wird $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ und die Gleichung für α lautet

$$\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha l}{3} = 2\left(1-\cos\frac{\alpha l}{3\sqrt{2}}\right)\frac{\sin\frac{\alpha l}{3}}{\sin\frac{\alpha l}{3\sqrt{2}}}$$

die nun durch Probieren aufzulösen ist. Zur Abkürzung der Rechnung dient dabei die Bemerkung, daß die Knicklast P, wenn Q hinzutritt, jedenfalls größer ausfallen muß, als wenn Q fehlt. Daher ist der Winkel $\frac{\alpha l}{3}$ jedenfalls größer als 60^0. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{1-\cos\frac{\alpha l}{3\sqrt{2}}}{\cos\frac{\alpha l}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha l}{3}}{\sin\frac{\alpha l}{3\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

so wird die linke Seite zu Null für $\alpha l = 0$. Für $\alpha l = \pi$ nimmt sie, wie die Zahlenrechnung lehrt, den Wert 0,672 an, für $\frac{\alpha l}{3} = 65^0$ den Wert 0,909 und für $\frac{\alpha l}{3} = 61^0$ den Wert 0,713 Es genügt daher, $\frac{\alpha l}{3} = 60{,}85^0$ zu setzen.

Hiernach wird durch die Mitwirkung von Q die Konstante α im Verhältnisse $60{,}85 : 60 = 1{,}014$ vergrößert und die Knicklast im Verhältnisse 1,028, da sie nach Gl. (246) mit dem Quadrate von α wächst.

Mit $l = 150$ cm, $\Theta = \frac{5\cdot 3^3}{12} = 11{,}25\ \text{cm}^4$ und $E = 2\cdot 10^6$ wird die Eulersche Knicklast beim Fehlen von Q nach Gl. (249)

$$P_E = 9870\ \text{kg}.$$

Wirkt Q in der Größe von $\frac{1}{2}P$ mit, so erhöht sich dies um 2,8‰, also auf

$$P_E' = 10150\ \text{kg}.$$

Anmerkung. Wenn Q entgegengesetzt gerichtet sein sollte, läßt sich die Lösung ebenfalls bis zu der Stelle benutzen, an der man den besonderen Wert von Q einsetzte; man muß dann nur das Vorzeichen von Q umkehren.