

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Neunter Abschnitt. Die Verdrehungsfestigkeit

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

§ 57. Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

Ein Stab, der auf Verdrehen beansprucht wird, heißt im Maschinenbau eine Welle. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, kann man von vornherein erwarten, daß alle Punkte, die vorher auf einer Querschnittsebene enthalten waren, nach der Formänderung auch noch in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen. In der Tat lehrt auch die Erfahrung, daß die auf Grund dieser Annahme abgeleiteten Formeln in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Verdrehungsversuche mit Stäben von kreisförmigem Querschnitte stehen. Es muß jedoch sofort hinzugefügt werden, daß dies nur für den kreisförmigen Querschnitt gilt. Wenn der Querschnitt eine andere Gestalt hat, bleibt er bei der Torsion des Stabes nicht eben. Darauf wird später zurückgekommen werden.

Bei der Verdrehung einer Welle von kreisförmigem Querschnitte geht jede zur Achse parallelgezogene Gerade

in ein Stück einer Schraubenlinie über. Zwei Halbmesser, die in zwei um die Länge l voneinander entfernten Querschnitten parallel zueinander gezogen waren, bilden nach der Verdrehung einen Winkel miteinander, den man den Verdrehungswinkel heißt, und den wir mit $\Delta\varphi$ bezeichnen. In Abb. 71 ist ein

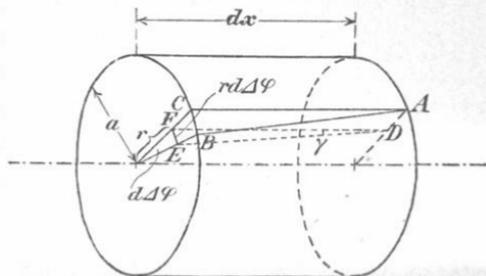


Abb. 71.

Wellenelement von der Länge dx gezeichnet. AB ist das Element der Schraubenlinie, das ursprünglich mit der Zylindererzeugenden zusammenfiel. Der Verdrehungswinkel für die Länge dx sei $d\Delta\varphi$, dann ist

$$d\Delta\varphi = \Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Die Schraubenlinie AB bildet jetzt irgend einen spitzen Winkel mit der Querschnittsebene, während die durch dieselben Teilchen vor der Formänderung gezogene Linie AC rechtwinklig zum Querschnitte stand. Einer solchen Winkeländerung entspricht eine Schubspannung τ im Querschnitte, die nach dem Elastizitätsgesetze daraus berechnet werden kann.

Wir finden die relative Verschiebung von zwei im Abstände r von der Achse in benachbarten Querschnitten ursprünglich einander gegenüberliegenden Punkten D und F , wenn wir den Winkel, um den sich die Querschnitte gegeneinander drehen, mit dem Halbmesser r multiplizieren, also gleich

$$rd\Delta\varphi \quad \text{oder} \quad r\Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Um soviel ist der eine Endpunkt der Strecke dx , die die gleich gelegenen Punkte beider Querschnitte verbindet, gegen den anderen und zwar in der Richtung senkrecht zum Radius r verschoben worden. Der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und der Querschnittsfläche hat sich dabei um einen Betrag γ geändert und zwar so, daß γdx ebenfalls ein Ausdruck für die relative Verschiebung ist. Ein Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\gamma = \frac{r\Delta\varphi}{l}.$$

Nach dem Elastizitätsgesetze folgt aber die Schubspannung aus γ durch Multiplikation mit dem Schubelastizitätsmodul, also

$$\tau = G\gamma = \frac{Gr\Delta\varphi}{l}. \quad (221)$$

Daß τ senkrecht zum Radius gerichtet ist, folgt daraus, daß auch die elastische Verschiebung in diesem Sinne erfolgte.

Aus Gl. (221) erkennen wir, daß die Schubspannungen τ

nach einem Geradliniengesetze über den Querschnitt verteilt sind, nämlich proportional mit den Abständen r von der Mitte zunehmen. In der Mitte wird τ zu Null und die größte Beanspruchung des Materials findet am Umfange statt. Bezeichnen wir die Spannung am Rande mit τ' und den Halbmesser des Querschnittes mit a , so ist nach Gl. (221)

$$\tau = \frac{\tau' r}{a} \quad (222)$$

und zur Berechnung von τ' steht uns eine Momentengleichung zur Verfügung. Alle Schubspannungen, die sich über den Querschnitt verteilen, lassen sich zu einem Kräftepaare zusammensetzen, dessen statisches Moment gleich dem von den äußeren Kräften herrührenden Verdrehungsmomente sein muß. Bezeichnen wir das Torsionsmoment mit M , so ist

$$M = \int \tau dF r = \frac{\tau'}{a} \int r^2 dF = \frac{\tau'}{a} \Theta_p.$$

Hier ist mit Θ_p das polare Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnittes bezeichnet, also $\Theta_p = \frac{\pi a^4}{2}$. Durch Auflösen nach τ' erhält man

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a \quad (223)$$

oder auch nach Einsetzen des Wertes von Θ_p

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}. \quad (224)$$

Man gibt häufig der Form (223) den Vorzug, weil sie sich genau an die Formel für die Biegung anschließt. Früher freilich, als man noch glaubte, daß auch die Querschnitte von anderer Gestalt bei der Verdrehung eben blieben, bezog man die ganze Entwicklung, die hier nur für kreisförmige Querschnitte abgeleitet ist, sofort auch auf jene und Gl. (223) galt als die allgemeine Formel für die Berechnung der Torsionsspannungen. Da man jetzt weiß, daß Gl. (223) nur für den kreisförmigen Querschnitt gültig ist, hat es keinen Zweck, Θ_p in dieser allgemeinen Form stehen zu lassen, sondern man tut

besser, sofort den Wert dafür einzusetzen, also Gl. (224) zu benutzen.

Für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ erhält man nach Gl. (221)

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{Gr} = \frac{\tau' l}{Ga} = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}. \quad (225)$$

Die einzige weitere Ausdehnung, die diese Formeln zulassen, ist die auf Wellen von kreisringförmigem Querschnitte. Wenn die beiden Querschnittshalbmesser der hohlen Welle mit a und b bezeichnet werden ($a > b$), erhält man

$$\tau' = \frac{2Ma}{\pi(a^4 - b^4)}; \quad \Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi(a^4 - b^4)G}.$$

§ 58. Wellen von elliptischem Querschnitte.

Daß der Querschnitt einer solchen Welle bei der Verdrehung nicht eben bleiben kann, erkennt man am einfachsten daraus, daß in diesem Falle die Entwicklungen des vorigen Paragraphen auch für sie gültig blieben und daß daher τ überall rechtwinklig zum Radiusvektor stehen müßte, der nach der betreffenden Stelle von der Mitte aus gezogen ist. Am Umfange ist dies aber nicht möglich, indem dort nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die wir im ersten Abschnitte untersuchten und die zu den Gl. (4) führten, die Schubspannung keine Komponente in der Richtung senkrecht zum Umfange haben kann. Die Schubspannung muß vielmehr überall am Umfange in die Richtung der Tangente fallen. Diesen Satz muß man bei allen Betrachtungen über die Torsionsfestigkeit in die vorderste Stelle rücken; eine Abweichung davon könnte nur dann eintreten, wenn die Welle am Umfange nicht frei, sondern durch irgend einen anderen Körper so gestützt wäre, daß Kräfte, also etwa Reibungen, am Umfange auf sie übertragen würden, die parallel zur Achse gerichtet wären. Selbstverständliche Voraussetzung bei Untersuchung der verdrehten Welle ist indessen, daß die Welle am Umfange frei sein soll. Wenn das Ende der Welle z. B. in der Einspannvorrichtung einer Festigkeitsmaschine steckt, trifft für dieses Ende die Voraussetzung allerdings nicht zu; wie sich

die Spannungen an der Einspannstelle verteilen, kann also aus unseren Betrachtungen nicht geschlossen werden. Auf solche Fälle sollen sie sich aber auch gar nicht beziehen.

Die Gleichung der Ellipse, die den Querschnittsumriß bildet (Abb. 72), sei

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Für den Punkt mit den Koordinaten y und z hat man dann

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{z},$$

und weil die Schubspannung τ den Umfang berührt, muß die Gleichung bestehen

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}. \quad (226)$$

Diese Bedingung wird durch die Annahme erfüllt, daß die Schubspannungskomponenten in der Form

$$\tau_{xy} = k a^2 z; \quad \tau_{xz} = -k b^2 y \quad (227)$$

dargestellt werden können. An und für sich könnte der hierbei eingeführte Faktor k an verschiedenen Stellen des Querschnittes und selbst an verschiedenen Stellen des Umfanges verschiedene Werte annehmen, d. h. er ist zunächst selbst als eine unbekannte Funktion der Querschnittskordinaten anzusehen. Unsere Absicht geht aber hier darauf hinaus, eine möglichst einfache Theorie des ganzen Vorganges abzuleiten, selbst auf die Gefahr hin, daß sie nicht völlig genau mit den Tatsachen übereinstimmen sollte. Der Vergleich mit der Erfahrung bleibt uns immer offen und er würde uns bald belehren, wenn wir uns erheblich geirrt haben sollten. In der Tat ist auch die ältere Theorie der Verdrehungsfestigkeit, die von der Annahme

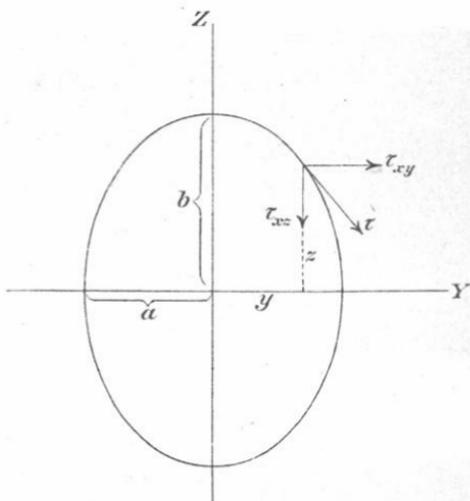


Abb. 72.

ausging, die Querschnitte blieben eben, bald widerlegt worden und nur wegen des Widerspruchs, in dem ihre Folgerungen mit den Beobachtungstatsachen standen, ließ man sie fallen; der Widerspruch mit der Saint-Vénantschen Theorie allein würde keinen Techniker gestört haben. Der Widerspruch mit der Erfahrung aber bewies, daß jene ältere Betrachtung eine Bedingung außer acht ließ, deren Vernachlässigung zu den größten Irrtümern führte. Durch die Gl. (227) haben wir diese Bedingung weiterhin als verbindlich für unsere Betrachtungen anerkannt. Nachdem dieser unerläßliche Schritt geschehen ist, wollen wir uns aber im übrigen möglichst eng an die einfachen Betrachtungen der älteren Theorie anlehnen, indem wir uns der Hoffnung hingeben, die Beobachtungstatsachen hinreichend genau wiedergeben zu können, nachdem wenigstens der größte Fehler der älteren Betrachtung gehoben ist.

In diesen Sätzen habe ich wenigstens die Auffassung geschildert, mit der man — meiner eigenen Meinung nach — an diese Untersuchungen herantreten sollte. Es ist ganz unerheblich, wenn ich noch hinzufüge, daß die Theorie, zu der man so gelangt, bei der Welle mit elliptischem Querschnitte mit der im letzten Abschnitte dieses Bandes besprochenen strengen Theorie der Torsion in den Resultaten völlig übereinstimmt.

Ich nehme also jetzt willkürlich an, daß es genüge, den Faktor k in den Gl. (227) als eine Konstante zu betrachten. Dann wächst die Schubspannung τ , wenn wir von der Mitte aus längs eines Halbmessers nach dem Umfange hin weiter gehen, immer noch in demselben Verhältnisse wie der Abstand von der Mitte und sie behält in allen Punkten des Halbmessers dieselbe Richtung. Für Punkte, die auf verschiedenen Halbmessern in gleichem Abstände von der Mitte liegen, ist τ jetzt allerdings verschieden groß, und auch der Winkel, den die Richtung von τ mit der Richtung des Halbmessers bildet, wechselt mit dem Halbmesser. Darin liegt die einzige Abweichung von den Annahmen der älteren Theorie, zu der wir uns notgedrungen entschließen mußten.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Konstante k in den Gl. (227) zu berechnen. Natürlich hängt deren Größe von dem Werte des Verdrehungsmomentes M ab und zu ihrer Ermittlung wird uns daher eine Momentengleichung verhelfen. Für den Mittelpunkt als Momentenpunkt ist das statische Moment der in einem Flächenelemente dF übertragenen Spannung τdF gleich

$$\tau_{xy} dF \cdot z - \tau_{xz} dF \cdot y,$$

und nach Einsetzen der Werte aus den Gl. (227) erhält man daher die Momentenbedingung

$$M = k a^2 \int z^2 dF + k b^2 \int y^2 dF. \quad (228)$$

Die Integrale sind über den ganzen Querschnitt auszu dehnen und stellen die Trägheitsmomente für die Koordinatenachsen dar. Man kennt die Trägheitsmomente für die Ellipse (vgl. § 21, S. 104), nämlich

$$\int y^2 dF = \pi \frac{b a^3}{4}; \quad \int z^2 dF = \pi \frac{a b^3}{4}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (228) ein und löst diese dann nach k auf, so erhält man

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3}. \quad (229)$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Spannung τ an jeder Stelle nach Größe und Richtung anzugeben. Es fragt sich jetzt noch, wo τ seinen größten Wert annimmt. Jedenfalls muß dies irgendwo am Umfange geschehen, denn τ wächst, je weiter wir auf einem gegebenen Halbmesser von der Mitte abrücken. Am nächsten liegt wohl die Vermutung, daß τ am Ende der großen Achse den größten Wert erreiche und nach der älteren Theorie nahm man dies früher in der Tat allgemein an. Die Vermutung ist aber irrig. Um uns davon zu überzeugen, setzen wir nach dem Pythagoräischen Satze und nach den Gl. (227)

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = k^2 (a^4 z^2 + b^4 y^2).$$

Da nur die Spannungen am Umfange in Frage kommen, können wir z nach der Ellipsengleichung in y ausdrücken und erhalten

$$\tau^2 = k^2 b^2 (a^4 + y^2 [b^2 - a^2]).$$

Wenn b größer als a ist, wie in Abb. 72 angenommen wurde, müssen wir y möglichst groß annehmen, um den größten Wert von τ^2 zu erhalten. Der größte Wert von y ist aber a , d. h. die größte Spannung tritt am Ende der kleinen Achse auf. Wir erhalten

$$\tau_{\max} = kab^2$$

oder nach Einsetzen von k aus Gl. (229)

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}. \quad (230)$$

Am Ende der großen Halbachse, also für $y = 0$, wird

$$\tau = ka^2 b = \frac{2M}{\pi ab^2},$$

also im Verhältnisse $a : b$ kleiner.

§ 59. Wellen von rechteckigem Querschnitte.

Auch für diesen Querschnitt soll eine Näherungstheorie nach denselben Grundsätzen wie im vorigen Paragraphen entwickelt werden; ich bemerke aber sofort, daß die Formel, auf die man hierbei geführt wird, in der Tat nur eine Näherungsformel bleibt und nicht nachträglich durch die genauere Untersuchung nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie bestätigt wird.

Zunächst müssen wir hier unser Augenmerk auf die Symmetrieeigenschaften lenken, die dem rechteckigen Querschnitte zukommen. Wenn die Pfeile der Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} für ein im ersten Quadranten liegendes Flächenelement die in Abb. 73 (s. S. 307) angenommene Richtung haben, müssen die Pfeile in den drei anderen Quadranten die ebenfalls dort eingetragenen Richtungen annehmen, da die Verdrehung in allen Quadranten überall in derselben Drehrichtung vor sich geht, die Spannungen also überall ein

Moment von demselben Vorzeichen in Bezug auf den Koordinatenursprung annehmen müssen. Außerdem folgt, daß bei spiegelbildlich zueinander liegenden Flächenteilen die Absolutbeträge der in derselben Achsenrichtung gehenden Komponenten einander gleich sind. Wir können dies dahin ausdrücken, daß

τ_{xy} eine gerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von z ist, während umgekehrt τ_{xz} eine ungerade Funktion von y und eine gerade von z sein muß.

Ein lineares Gesetz für die Verteilung der Spannungskomponenten über den Querschnitt ist hier nicht möglich, da z. B. τ_{xy} sowohl für $y = a$ als im Koordinatenursprunge verschwinden muß. Wir wollen aber, indem wir diesen Grenzbedingungen am Umfange vollständig

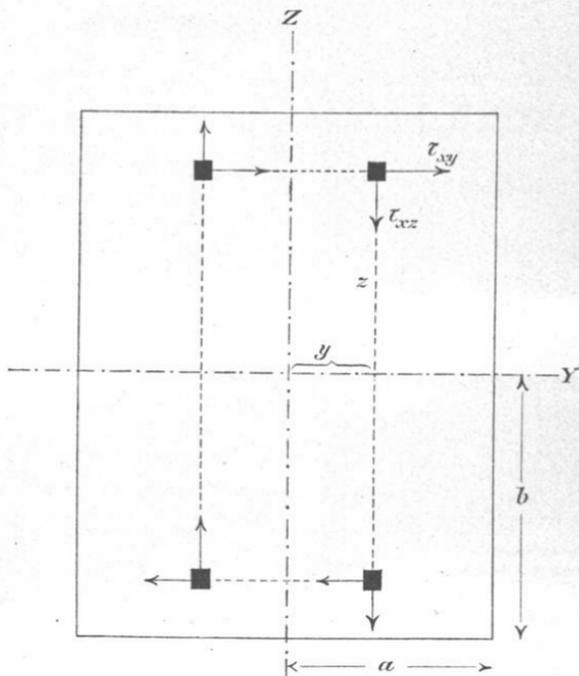


Abb. 73.

Rechnung tragen, das damit noch verträgliche, sonst aber möglichst einfach gestaltete Spannungsverteilungsgesetz zugrunde legen. Vor allem wollen wir also annehmen, daß die Spannungskomponenten hinreichend genau durch algebraische Funktionen der Querschnittskordinaten y und z dargestellt werden können und wir wollen ferner den Grad dieser Funktionen so niedrig annehmen, als es möglich ist, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen. Dazu reicht eine Funktion dritten Grades aus. Mit Rücksicht darauf, daß τ_{xy} gerade in Beziehung auf y und

ungerade in Beziehung auf z sein soll,⁸ setzen wir daher zunächst

$$\tau_{xy} = c_1 z + c_2 z y^2 + c_3 z^3.$$

Nun muß an den zur Z -Achse parallelen Querschnittsseiten, also für $y = \pm a$ dieser Ausdruck identisch, d. h. für jedes z , verschwinden. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = c_1 z + c_2 a^2 z + c_3 z^3,$$

aus der, weil sie identisch erfüllt sein muß,

$$c_3 = 0; \quad c_2 = -\frac{c_1}{a^2}$$

folgt. Damit ist τ_{xy} bis auf eine Konstante bestimmt, nämlich

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2. \quad (231)$$

Ähnlich verfahren wir mit τ_{xz} ; wir setzen zunächst

$$\tau_{xz} = k_1 y + k_2 y z^2 + k_3 y^3.$$

Für $z = \pm b$ muß dies verschwinden, also

$$0 = k_1 y + k_2 y b^2 + k_3 y^3$$

und hieraus

$$k_3 = 0; \quad k_2 = -\frac{k_1}{b^2}.$$

Setzt man dies ein, so erhalten wir den mit den aufgestellten Bedingungen verträglichen, möglichst einfachen Ausdruck für τ_{xz}

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2. \quad (232)$$

Zwischen den Konstanten c_1 und k_1 in (231) und (232) muß aber außerdem noch eine Bedingungsgleichung erfüllt sein, um das Gleichgewicht zwischen den Spannungen an irgendeinem Volumenelemente zu sichern. Die erste der Gleichungen (5), durch die die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik ausgedrückt wurden, lautete

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Hier ist sowohl X als σ_x gleich Null zu setzen, denn zum Auftreten einer Normalspannung im Querschnitte der Welle ist kein Anlaß gegeben, wenn neben der Torsion der Welle

nicht eine Biegung oder eine achsiale Belastung nebenher läuft. Von einer solchen zusammengesetzten Beanspruchung der Welle sollte aber hier nicht die Rede sein. Beachtet man noch, daß $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ zu setzen ist, so vereinfacht sich jene Gleichgewichtsbedingung hier zu

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Nach Eintragen der Werte aus den Gl. (231) und (232) geht sie über in

$$- 2yz \frac{c_1}{a^2} = 2yz \frac{k_1}{b^2}.$$

Sie wird also in der Tat identisch erfüllt, falls man

$$k_1 = - \frac{c_1 b^2}{a^2} \quad (233)$$

setzt und dies zeigt uns zugleich, daß das in dieser Weise näher bestimmte System der Spannungen vom Gesichtspunkte der Statik starrer Körper aus möglich ist. Eine andere Frage wäre es natürlich, ob dieses Spannungssystem zugleich mit den elastischen Eigenschaften eines bestimmten Materials, z. B. mit dem Hookeschen Gesetze in Übereinstimmung stehe. Auf eine solche Untersuchung haben wir aber hier, in der Absicht zu einem möglichst einfachen, wenn auch nur näherungsweise richtigen Resultate zu gelangen, von vornherein verzichtet. Mit Rücksicht auf Gl. (233) geht jetzt Gl. (232) über in

$$\tau_{xz} = - \frac{c_1 b^2}{a^2} y + \frac{c_1}{a^2} y z^2. \quad (234)$$

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der einzigen, bisher unbekannt gebliebenen Konstanten c_1 übrig und man sieht leicht ein, daß diese aus der Momentengleichung, ganz wie früher bei dem elliptischen Querschnitte, berechnet werden kann. Die Momentengleichung lautet

$$M = \int dF (\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y)$$

oder nach Einsetzen der Werte aus (231) und (234)

$$M = c_1 \int (z^2 - 2 \frac{z^2 y^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} y^2) dF.$$

Die rechte Seite zerfällt in drei Glieder, von denen das erste und das letzte ohne weiteres angegeben werden können, da die Trägheitsmomente des Rechtecks darin auftreten. Das zweite Glied führt auf ein Moment vierten Grades des Querschnittes und muß besonders berechnet werden. Wir dehnen die Integration zunächst auf den im ersten Quadranten liegenden Teil des Querschnittes aus und finden dafür

$$\int y^2 z^2 dF = \int_0^b dz \cdot z^2 \int_0^a y^2 dy = \frac{a^3 b^3}{9}.$$

Für den ganzen Querschnitt liefert das Integral den vierfachen Wert. — Die Momentengleichung geht hiermit über in

$$M = c_1 \left(\frac{4ab^3}{3} - \frac{8ab^3}{9} + \frac{4ab^3}{3} \right) = c_1 \cdot \frac{16ab^3}{9}.$$

Daraus folgt für die Konstante c_1

$$c_1 = \frac{9M}{16ab^3}. \quad (235)$$

Die Spannungskomponenten sind hiermit vollständig bestimmt; wir schreiben dafür

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3} z \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \\ \tau_{xz} &= - \frac{9M}{16a^3b} y \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right) \end{aligned} \quad (236)$$

Längs der beiden Symmetrieachsen stehen demnach die Spannungen τ rechtwinklig zu dem vom Ursprunge gezogenen Radiusvektor und sie wachsen proportional mit diesem. Am Umfange sind die Spannungen parallel mit den Umfangsseiten gerichtet und die Spannungsverteilung ist eine parabolische; in den Ecken werden die Spannungen zu Null und sie wachsen von da nach den Mitten der Umfangsseiten hin, wo sie ein Maximum erreichen. Längs einer Diagonale sind die Spannungen überall parallel zur anderen Diagonale gerichtet und das Spannungsverteilungsdiagramm ist eine kubische Parabel. Für einen anderen Radiusvektor, der vom Ursprunge aus gezogen wird, ändert die Spannung τ fortwährend ihre Richtung, wenn man weiter nach außen hin geht.

Es fragt sich jetzt noch, an welcher Stelle τ den absolut größten Wert annimmt.

Am Umfange nimmt, wie wir schon fanden, τ seinen größten Wert in den Mitten der Rechteckseiten an und zwar wird, wenn wir $y = a$ und $z = 0$ setzen,

$$\tau = \frac{9M}{16a^2b}. \quad (237)$$

Den Wert von τ in der Mitte der anderen Rechteckseite erhält man daraus durch Vertauschung von a mit b . Hieraus folgt, daß τ an jener Stelle des Umfanges am größten wird, die dem Mittelpunkte des Rechtecks am nächsten liegt. Dieses Ergebnis stimmt mit jenem überein, das schon für den elliptischen Querschnitt gefunden war. Bei der Anwendung von Gl. (237) zur Berechnung der Beanspruchung einer Welle ist daher unter a die kleinere Rechteckhalbseite zu verstehen.

Führt man an Stelle der halben Rechteckseiten die ganzen Seiten $a_1 = 2a$ und $b_1 = 2b$ ein, so geht Gl. (237) über in

$$\tau = \frac{9M}{2a_1^2b_1}. \quad (238)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß τ an keiner Stelle im Innern des Querschnittes einen größeren Wert annehmen kann. Aus den Gleichungen (236) erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

$$\tau^2 = \left(\frac{9M}{16a^2b}\right)^2 \cdot \left[\frac{a^2z^2}{b^4}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2}\left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^2\right]. \quad (239)$$

Es fragt sich daher, ob der Wert in der eckigen Klammer, der zur Abkürzung mit K bezeichnet sei, irgendwo im Innern gleich oder größer werden kann, als Eins. Da nun im Innern $z < b$ und $y < a$, ferner auch $a < b$ ist, wird jedenfalls

$$K < \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2},$$

denn K unterscheidet sich von dem rechtsstehenden Ausdrucke dadurch, daß zu den beiden Gliedern noch Faktoren hinzu-

treten, die echte Brüche sind. Die Ungleichung läßt sich aber auch schreiben

$$K < 1 - \frac{y^2}{a^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right),$$

und daraus folgt, daß K ein echter Bruch, daß also τ im Innern nirgends so groß sein kann, wie der in Gl. (237) angegebene Wert am Umfange.¹⁾

§ 60. Berechnung der Torsionsfedern.

Die Mittellinie eines Drahtes besitze im spannungslosen Zustande eine schraubenförmige Gestalt (Abb. 74). Durch zwei Kräfte P , deren Richtungslinien mit der Zylinderachse zusammenfallen, soll die Feder — wie wir den Draht nennen wollen — entweder auseinandergezogen oder zusammengedrückt werden. Dabei stellen sich verschiedene Fragen ein: zunächst will man wissen, wie groß die Belastung P der Feder werden darf, ohne daß die zulässige Beanspruchung des Materials überschritten wird, ferner um wieviel sich die Feder unter der Belastung streckt oder zusammendrückt und im Zusammenhange damit endlich, wieviel Formänderungsarbeit in ihr aufgespeichert werden kann.



Abb. 74.

Man denke sich die Feder an irgendeiner Stelle durchgeschnitten. Die in diesem Querschnitte übertragenen Spannungen müssen dann im Gleichgewichte mit der an dem zugehörigen Federende angreifenden Kraft P stehen. Bei der Verlegung der Kraft P nach dem Schwerpunkte des Querschnittes tritt ein Kräftepaar auf, dessen Ebene durch den nach diesem Schwerpunkte gezogenen Radius und die Zylinderachse bestimmt ist. Gewöhnlich ist die Steigung der Schraubenlinie nur gering und in diesem Falle, den wir der weiteren Untersuchung zugrunde legen wollen, steht die Ebene des Kräftepaares nahezu senkrecht zur Schraubenlinie oder der Momentenvektor des Kräftepaares fällt nahezu mit dieser Linie

1) Diesen einfachen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Wernicke in Braunschweig.

zusammen. Ein solches Kräftepaar bewirkt eine Beanspruchung auf Verdrehung. Denkt man sich das Kräftepaar in zwei andere zerlegt, von denen die Ebene des einen genau senkrecht steht zur Schraubenlinie, während die des zweiten durch diese Linie hindurchgeht, so wird durch diese zweite Komponente außerdem noch eine Beanspruchung auf Biegung hervorgerufen. Gewöhnlich ist aber diese Biegungsbeanspruchung unerheblich gegenüber der Beanspruchung auf Verdrehen und ich sehe daher davon ab, sie hier zu berechnen, obschon dies leicht auszuführen wäre. Auch die nach dem Schwerpunkte des Querschnittes verlegte Kraft P bringt, für sich genommen, Spannungen hervor und zwar vorwiegend Schubspannungen. Auch diese sind aber, wenn der Halbmesser des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, einigermaßen groß ist gegen die Querschnittsabmessungen des Drahtes, gering gegenüber den Spannungen, die dem Verdrehungsmomente entsprechen. Es genügt daher für die Zwecke, die man mit einer Festigkeitsberechnung verfolgt, vollständig, wenn man nur auf die Hauptbeanspruchung auf Verdrehen achtet.

Bezeichnet man den Zylinderhalbmesser mit r , so kann das Verdrehungsmoment M

$$M = Pr$$

gesetzt werden. Wenn der Querschnitt der Feder ein Kreis vom Halbmesser a ist, folgt für τ nach Gl. (224)

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3} \quad (240)$$

und daraus ergibt sich die Tragkraft der Feder. Außer dem kreisförmigen kommt gewöhnlich nur noch der rechteckige Querschnitt in Betracht, für den man nach Gl. (238)

$$\tau = \frac{9Pr}{2a_1^2 b_1} \quad (241)$$

erhält, worin a_1 die kleinere und b_1 die größere Rechteckseite bedeuten.

Oft genug ist die Mittellinie der Feder nicht nach einer gewöhnlichen, sondern nach einer Kegelschraubenlinie gekrümmt, z. B. bei den allgemein bekannten Pufferfedern der

Eisenbahnwagen. In diesem Falle ist unter r die Entfernung jenes Querschnittes von der Achse zu verstehen, auf den sich a_1 und b_1 beziehen, oder wenn etwa a_1 und b_1 konstant wären, der größte Wert von r . Sind a_1 und b_1 veränderlich, so muß man τ für verschiedene Querschnitte berechnen und die ungünstigste Stelle aufsuchen. Man kann auch die Aufgabe umkehren und den Querschnitt so verändern, daß die Beanspruchung überall die gleiche bleibt. Dann müßte also z. B., wenn die Dicke a_1 konstant gewählt wird, die Höhe b_1 des rechteckigen Querschnittes der Pufferfeder mit der Entfernung r proportional zunehmen. Diese Andeutungen mögen genügen.

Um die Streckung oder Zusammendrückung zu berechnen, die die Feder unter der Belastung erfährt, müssen wir uns auf die Formel für den Verdrehungswinkel stützen. Diese ist bisher nur für den kreisförmigen Querschnitt abgeleitet worden und ich werde mich daher auch an dieser Stelle auf die Behandlung dieses Falles beschränken. Indessen mache ich darauf aufmerksam, daß bei den nachfolgenden Aufgaben die Berechnung des Verdrehungswinkels für den elliptischen und für den rechteckigen Querschnitt ausgeführt ist und daß man diese Ergebnisse ohne weiteres auf die hier durchzuführende Untersuchung übertragen kann.

Für ein Längenelement ds der Feder (gemessen längs der Schraubenlinie) sei der Verdrehungswinkel $d\Delta\varphi$. Wir wollen uns zunächst vorstellen, daß nur das eine Element ds die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfahre, während alle übrigen Teile der Feder ihre Gestalt ungeändert beibehalten sollen. Denken wir uns dann etwa den unteren Teil der Feder festgehalten, so wird der jenseits ds liegende obere Teil eine Drehung um ds und um den Winkel $d\Delta\varphi$ ausführen. Die Achse des oberen Teils wird dadurch aus ihrer Richtung abgelenkt und der ganze obere Teil steht nun etwas schief. Darauf brauchen wir aber nicht weiter zu achten, denn wenn ein dem ds diametral gegenüber liegendes Element der Feder später ebenfalls die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfährt, stellt sich der obere Teil wieder gerade. Die Achse bleibt daher bei der ganzen Formänderung

ohne Ablenkung. Dagegen summieren sich die Verschiebungen in der Richtung der Achse, die bei den Verdrehungen der einzelnen Elemente ds vorkommen, einfach zueinander und die Summe dieser Verschiebungen ergibt die ganze Streckung, die wir an der belasteten Feder beobachten.

Der mit ds in gleicher Höhe liegende Punkt der Achse des oberen Federteiles beschreibt bei der Verdrehung einen Kreisbogen vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel $d\Delta\varphi$ in einer Richtung, die nahezu mit der Achsenrichtung zusammenfällt. Wir können daher die Verschiebung in der Richtung der Achse gleich

$$r d\Delta\varphi$$

setzen. Um ebensoviel verschiebt sich auch jeder andere Punkt der Achse des oberen Federteiles in der Richtung der Achse, wie aus Abb. 75 sofort hervorgeht. Darin bedeutet nämlich AA die Achse und in P soll sich das Element ds projizieren, das die Verdrehung $d\Delta\varphi$ ausführte. Da die Steigung der Schraubenlinie gering, ds also nahezu senkrecht zur Achse sein sollte, projiziert sich ds in Abb. 75 nahezu als Punkt und so ist es daher auch gezeichnet. Ein Punkt B der Achse führt eine Drehung um P aus und der dabei beschriebene Bogen ist gleich $z d\Delta\varphi$. Die Projektion des Bogens auf die Achse wird daraus durch Multiplikation mit $\cos \psi$, also gleich $z \cdot d\Delta\varphi \cdot \cos \psi$ gefunden. Mit Rücksicht auf $z \cos \psi = r$ geht dies aber in $r \cdot d\Delta\varphi$ über, woraus man sieht, daß sich in der Tat alle Punkte der Achse um gleich viel in der Achsenrichtung verschieben.

Die ganze Streckung oder Zusammendrückung w der Feder ist gleich der über die ganze Länge der Schraubenlinie ausgedehnten Summe dieser Glieder, also

$$w = \int r d\Delta\varphi.$$

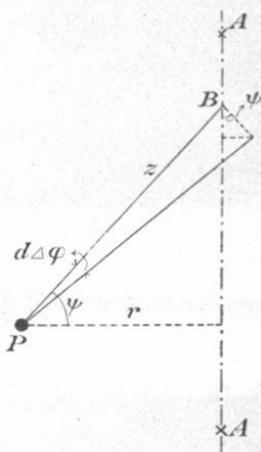


Abb. 75.

Für $d\Delta\varphi$ schreiben wir nach Gl. (225)

$$d\Delta\varphi = \frac{2Prds}{\pi a^4 G}$$

und daher

$$w = \frac{2Pr^2}{\pi a^4 G} \int ds = P \frac{4nr^3}{a^4 G}. \quad (242)$$

Unter n ist hier die Zahl der Umläufe zu verstehen, die die Schraubenlinie macht und die Länge eines Umlaufes konnte genau genug gleich dem Umfange eines Kreises vom Radius r genommen werden.

Beachtet man, daß beim Belasten der Feder die Last proportional mit w wächst, so erhält man für die aufgespeicherte Formänderungsarbeit A das halbe Produkt aus der Last und dem zurückgelegten Wege w , also

$$A = P^2 \frac{2nr^3}{a^4 G}. \quad (243)$$

Aufgaben.

46. Aufgabe. Man soll den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für eine Welle von elliptischem Querschnitte berechnen.

Lösung. Das Verdrehungsmoment sei M ; dann ist die von den äußeren Kräften zur Verwindung der Welle geleistete Arbeit gleich $\frac{1}{2} M\Delta\varphi$ und ebenso groß muß die Summe der in den einzelnen Volumenelementen aufgespeicherten Arbeiten sein, die nach Gl. (42) berechnet werden können. Man erhält also

$$\frac{1}{2} M\Delta\varphi = \int \frac{\tau^2}{2G} dv,$$

wenn mit dv ein Volumenelement der Welle bezeichnet wird, das auch gleich $dF \cdot dl$, wo dl ein Element der Länge l der Welle ist, gesetzt werden kann. Die Integration nach l kann sofort ausgeführt werden, da τ für alle Querschnitte an der entsprechenden Stelle gleich groß ist. Für τ^2 setzen wir $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$ und für diese beiden Glieder führen wir ihre in § 58, Gl. (227) berechneten Werte ein. So erhalten wir

$$M\Delta\varphi = \frac{l}{G} \int k^2 (a^4 z^2 + b^4 y^2) dF$$

oder mit Benutzung von k aus Gl. (229)

$$M \Delta \varphi = \frac{l}{G} \cdot \frac{4 M^2}{\pi^2 a^6 b^6} \left\{ a^4 \int z^2 dF + b^4 \int y^2 dF \right\}.$$

Die Integrale in der Klammer sind die Trägheitsmomente der Ellipse. Setzt man diese ein, so wird

$$\Delta \varphi = \frac{l}{G} \cdot \frac{4 M}{\pi^2 a^6 b^6} \left\{ \frac{\pi a^5 b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b^5}{4} \right\}$$

oder nach entsprechender Vereinfachung

$$\Delta \varphi = \frac{l M (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G}.$$

Mit $b = a$ liefert dies wieder den schon aus Gl. (225) bekannten Wert des Verdrehungswinkels für die kreisförmige Welle.

Anmerkung. Ebenso kann auch der Verdrehungswinkel für die Welle mit rechteckigem Querschnitte berechnet werden. Führt man τ^2 aus Gl. (239) ein, so wird

$$M \Delta \varphi = \frac{l}{G} \left[\frac{9 M}{16 a^3 b^3} \right]^2 \int \{ z^2 (a^2 - y^2)^2 + y^2 (b^2 - z^2)^2 \} dF.$$

Die Ausführung der Integrationen liefert

$$\int z^2 (a^2 - y^2)^2 dF = \frac{32}{45} a^5 b^3; \quad \int y^2 (b^2 - z^2)^2 dF = \frac{32}{45} a^3 b^5$$

und hiermit

$$\Delta \varphi = \frac{9}{40} \cdot \frac{l}{G} \cdot \frac{M (a^2 + b^2)}{a^3 b^3}.$$

Will man mit den ganzen Seiten a_1 und b_1 an Stelle der Halbseiten a und b rechnen, so geht dies über in

$$\Delta \varphi = 3,6 \frac{l}{G} \cdot \frac{M (a_1^2 + b_1^2)}{a_1^3 b_1^3}.$$

Natürlich ist aber auch diese Formel nur als eine Näherungsformel zu betrachten, der keine strenge Gültigkeit zukommt, wie allen Untersuchungen von § 59, auf die sie sich stützt.

47. Aufgabe. Ein Holzbalken mit quadratischem Querschnitte (vgl. Abb. 76) von 20 cm Seite ist am einen Ende in eine Mauer eingelassen und ragt um 100 cm vor. Am freien Ende ist ein horizontaler Arm angeschraubt, der rechtwinklig zum

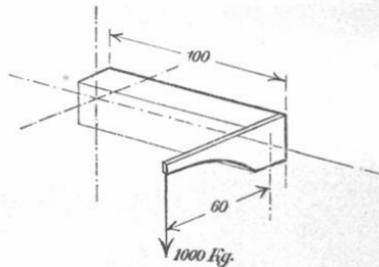


Abb. 76.

Balken, also parallel zur Mauerfläche, um 60 cm vorsteht. Am freien Ende dieses Armes ist eine Last von 1000 kg aufgehängt. Wie groß ist die Anstrengung des Holzes?

Lösung. Der Holzbalken wird gleichzeitig auf Biegung und auf Verwindung beansprucht. Das Verdrehungsmoment ist für alle Querschnitte des Balkens gleich groß, nämlich gleich $1000 \times 60 = 60000$ cmkg. Das Biegemoment ist dagegen am größten am Einspannquerschnitte, wo es sich auf 100000 cmkg stellt. Dort tritt daher auch die größte Anstrengung des Materiales ein. Wir berechnen zunächst die Biegungsspannungen für sich; dafür erhalten wir

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 100000}{20^3} = 75 \text{ atm.}$$

Für die durch das Verdrehungsmoment hervorgerufene größte Schubspannung finden wir nach Gl. (238)

$$\tau = \frac{9M}{2\alpha_1^2 b_1} = \frac{9 \cdot 60000}{2 \cdot 20^3} = 33,75 \text{ atm.}$$

Das größte σ und das größte τ treten an derselben Stelle auf, nämlich in den Mitten der horizontalen Seiten des Einspannquerschnitts. — Außer den jetzt berechneten Spannungen kommen auch noch Schubspannungen vor, die sich wegen der Biegung über den Querschnitt verteilen und deren Resultierende = $P = 1000$ kg ist. Wir sahen aber früher, daß die Schubspannungen im gebogenen Balken am größten in der Nulllinie werden und nach den stärker beanspruchten Querschnittsteilen hin abnehmen. Dort, wo die größte Biege- mit der größten Torsionsspannung zusammenfällt, wird die Beanspruchung auf gewöhnliche Scherfestigkeit zu Null und wir brauchen daher in der Tat nur auf die soeben berechneten Werte von σ und τ zu achten.

Nach der gewöhnlichen Annahme, die freilich gerade bei einem so wenig isotropen Körper wie Holz sehr willkürlich ist, wird die Beanspruchung des Materials nach der reduzierten Spannung an der gefährlichsten Stelle bemessen. Nach Gl. (37) finden wir dafür mit

$$m = \frac{10}{3}$$

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2},$$

also nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \cdot 75 + 0,65 \sqrt{67,5^2 + 75^2} = \text{rund } 92 \text{ atm.}$$

48. Aufgabe. Eine Torsionsfeder ist aus 20 mm starkem Rundstahle gefertigt und hat 10 Windungen von 100 mm Radius. Wie

groß ist die Tragkraft und die aufgespeicherte Energie, wenn τ gleich 2000 atm gewählt wird?

Lösung. Aus Gl. (240) folgt

$$P = \frac{\pi a^3 \tau}{2r} = \frac{3,14 \cdot 1^3 \cdot 2000}{2 \cdot 10} = 314 \text{ kg.}$$

Für die aufgespeicherte Arbeit liefert Gl. (243), wenn man darin P aus Gl. (240) entnimmt und $G = 900\,000$ atm setzt,

$$A = P^2 \frac{2nr^3}{a^4 G} = \frac{\pi^2 a^2 r n \tau^2}{2G} = 2220 \text{ cmkg.}$$
