

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Achter Abschnitt. Die Festigkeit von Gefäßen unter innerem oder äußerem Überdrucke

Achter Abschnitt.

Die Festigkeit von Gefäßen unter innerem oder äußerem Überdrucke.

§ 54. Kugelmessel und zylindrische Kessel unter innerem Überdrucke.

Ich betrachte zunächst einen kugelförmigen Kessel, dessen Wandstärke h als klein gegenüber dem innern Halbmesser r betrachtet werden kann. Eine Durchmessersebene zerlegt ihn in zwei Halbkugeln. Als äußere Kräfte treten an der Halbkugel die Druckkräfte der eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Kesselwand auf. Diese setze ich zu einer Resultierenden zusammen. Schon bei der Lösung von Aufg. 31 wurde darauf hingewiesen, daß man die Resultierende von hydrostatischen Druckkräften, die gleichmäßig über einen Teil einer geschlossenen Fläche verteilt sind, durch die Resultierende für den Rest dieser geschlossenen Fläche ersetzen kann. Der Rest ist hier die kreisförmige Fläche des Schnittes durch den Innenraum des Kessels. Wenn der Flüssigkeitsdruck, in atm ausgedrückt, mit p bezeichnet wird, bildet demnach die Resultierende der äußeren Kräfte eine Kraft, die durch den Mittelpunkt geht, senkrecht zur Schnittebene steht und die Größe

$$\pi r^2 p$$

hat. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Druck in der Tat überall gleich groß ist, daß also die Druckunterschiede, die durch das Gewicht der Flüssigkeit in verschiedenen Höhen bedingt sind, vernachlässigt werden können. Bei den praktisch vorkommenden Fällen ist dies fast immer zulässig.

Mit dieser äußeren Kraft müssen die in der Schnittfläche übertragenen Wandspannungen im Gleichgewichte stehen. Der Symmetrie wegen sind diese Wandspannungen Normalspannungen σ und längs des Umfanges sind sie gleichmäßig verteilt. Aber auch in der Richtung des Radius müssen sich die Spannungen σ nahezu gleichförmig über die Blechdicke verteilen. Um dies zu erkennen, bedenke man, daß sich der Kessel unter dem Einflusse des inneren Überdruckes etwas ausdehnt; der Radius wächst also etwa von r auf $r + \Delta r$. Durch diese elastische Dehnung werden erst die Spannungen σ hervorgerufen. Nun kann sich aber der äußere Kesselradius nicht merklich weniger dehnen, als der innere, denn der etwaige Unterschied würde gleich der elastischen Verkürzung der Wandstärke h sein und diese ist sicher sehr gering, da schon h selbst klein war. Freilich lehrt diese Überlegung zugleich, daß bei Wandstärken, die nicht klein im Vergleiche zum Radius r sind, eine gleichförmige Spannungsverteilung über die ganze Wanddicke nicht zu erwarten ist und daß daher die hier abzuleitenden Formeln immer nur auf dünnwandige Gefäße angewendet werden dürfen.

Für diese aber gestaltet sich die Gleichgewichtsbedingung sehr einfach. Der Schnitt durch die Wand hat den Inhalt $2\pi rh$, wenn man auf den kleinen Unterschied zwischen dem mittleren Radius und dem Innenradius keine Rücksicht nimmt. Daraus folgt

$$2\pi rh\sigma = \pi r^2 p \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{pr}{2h} \quad (199)$$

Durch einen gegebenen Punkt einer Kugelfläche kann man sehr viele Durchmessersebenen legen und jeder dieser Schnittrichtungen entspricht dieselbe Normalspannung σ . Nach der Mohrschen Theorie der Bruchgefahr gibt der Wert von σ unmittelbar die Anstrengung des Materials an. Nach der gewöhnlichen Annahme wird diese dagegen durch die reduzierte Spannung gemessen, die sich zu

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{m} \sigma = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{pr}{2h} = 0,35 \frac{pr}{h} \quad \left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right) \quad (200)$$

berechnet. — Wo Nietungen vorkommen, muß natürlich bei der Berechnung des Kessels auf die dadurch veranlaßte Schwächung Rücksicht genommen werden; ebenso auf die etwa in Aussicht zu nehmende Verminderung der Wandstärke durch Rosten usw. Aus diesen Gründen liefern die für die Bemessung der Kesselstärke in der Praxis gebräuchlichen Formeln größere Werte, als sie aus Gl. (200) hervorgehen würden.

Von dem zylindrischen Kessel setze ich voraus, daß er nicht zu kurz im Vergleiche zum Durchmesser sei. Die an die Kesselböden stoßenden Teile des Mantels sind nämlich mehr oder weniger gegen eine Ausdehnung gestützt und sie nehmen

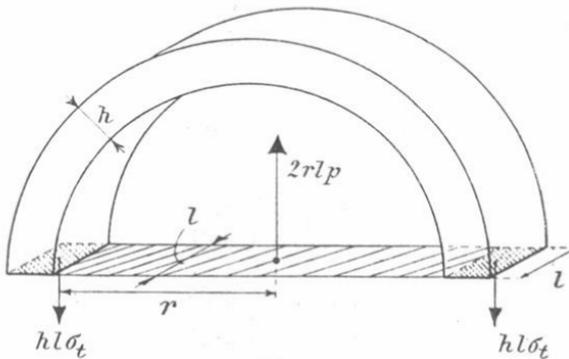


Abb. 63.

daher geringere Wandspannungen auf als die in der Mitte gelegenen Teile. Dieser Einfluß kann sich aber nur auf eine geringe Strecke hin bemerklich machen, da sich das dünne Blech leicht um so viel abbiegt, als dem Unterschiede zwischen den Dehnungen Δr in der Mitte und am Ende entspricht. Ich betrachte jetzt nur einen aus der Mitte herausgegriffenen Streifen von der Länge l in der Richtung der Zylinderachse. Diesen zerlege ich noch durch einen Längsschnitt in zwei Halbzylinder.

An einem dieser Halbzylinder (Abb. 63) greifen zunächst Kräfte an, die parallel zur Achse gehen, nämlich in den beiden Querschnitten. Diese stehen unter sich im Gleichgewichte und es ist vorerst nicht nötig, auf sie zu achten. Außerdem müssen

die in dem Längsschnitte übertragenen Wandspannungen, die sich auf zwei rechteckige Streifen vom Flächeninhalte hl verteilen, im Gleichgewichte mit dem Flüssigkeitsdrucke auf die Innenwand stehen. Dieselbe Überlegung wie beim Kugelkessel liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$2hl\sigma_t = 2rlp \quad \text{oder} \quad \sigma_t = \frac{pr}{h}. \quad (201)$$

Die Wandspannung σ_t in der Richtung der Tangente an den Kreisumfang ist daher beim zylindrischen Kessel doppelt so groß als beim Kugelkessel von demselben Durchmesser.

Für die Spannungen σ_a in der Richtung der Zylinderachse die in einem Querschnitte übertragen werden, gilt dagegen dieselbe Gleichgewichtsbedingung (199) wie für den Kugelkessel. Für die reduzierte Spannung hat man daher

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_a = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{pr}{h} = 0,85 \frac{pr}{h} \left(\text{für } m = \frac{10}{3} \right). \quad (202)$$

Wenn die Kesselböden Halbkugeln bilden, ist ihre Berechnung schon durch jene des Kugelkessels erledigt. In anderen Fällen wird man sie als Kugelhauben ansehen können und man berechnet dann die Wandspannung in ihnen so, als wenn sie Bestandteile eines ganzen Kugelkessels von dem betreffenden Halbmesser wären. Unter Umständen käme auch, wenn die Böden etwa durch ebene gußeiserne Platten gebildet sein sollten, die Berechnung nach den Lehren des vorigen Abschnitts in Betracht.

Anmerkung. Hierzu muß jedoch bemerkt werden, daß an den Übergangsstellen des zylindrischen Kesselteils in die Kesselböden, die etwa als Kugelhauben ausgebildet sind, unter dem Einflusse der Belastung nicht nur Dehnungen, die sich gleichmäßig über die ganze Blechdicke erstrecken, sondern außerdem auch Verbiegungen auftreten, die eine erheblich höhere Materialbeanspruchung herbeiführen können. Die Übergangsstelle bildet daher, namentlich wenn der unendlich große Krümmungshalbmesser des geradlinigen Teiles des Kessellängsschnittes plötzlich in einen sehr kleinen Krümmungshalbmesser bei der Umbördelung des Kesselbodens übergeht, den schwächsten Punkt des Kessels. Durch einen allmählichen Übergang aus dem einen Krümmungshalbmesser in den anderen kann man die zusätzliche Beanspruchung durch die Verbiegung vermeiden. Näheres hierüber findet

man in einer im Zentralblatte der Bauverwaltung 1903, S. 146 von mir veröffentlichten Abhandlung.

§ 55. Röhren von ovalem Querschnitte und Röhren von kreisförmigem Querschnitte unter äußerem Überdrucke.

Eine Röhre von ovalem Querschnitte kann genau so berechnet werden, wie es im fünften Abschnitte für einen Ring auseinander-gesetzt wurde. Der durch Abb. 48, S. 209 dargestellte Fall entspricht fast vollständig dem hier vorliegenden; man muß sich nur die Lasten gleichförmig über den ganzen Umfang verteilt denken. Die Durch-führung der Rechnungen bietet auch keine besonderen Schwierig-keiten. Es wäre daher nicht nötig, hier noch näher darauf einzu-gehen — umso weniger, als Röhren von ovalem Querschnitte, wegen des geringen Widerstandes, den sie einer Verbiegung entgegensetzen, zur Herstellung von Gefäßen, die einem größeren Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt sind, nur ganz selten verwendet werden — wenn nicht eine Frage von ganz eigener Art dazu führte. Man denke sich näm-lich ein ursprünglich genau kreisrundes Rohr durch einen zufälligen Umstand in der einen Richtung etwas elastisch zusammengedrückt, so daß der Querschnitt eine längliche Gestalt annimmt. Wenn die Ver-anlassung zur Verbiegung wegfällt, geht das Rohr ohne Zweifel wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurück, wenn es einem inneren Überdrucke ausgesetzt ist. Man kann aber im Zweifel sein, ob dies auch zutrifft,

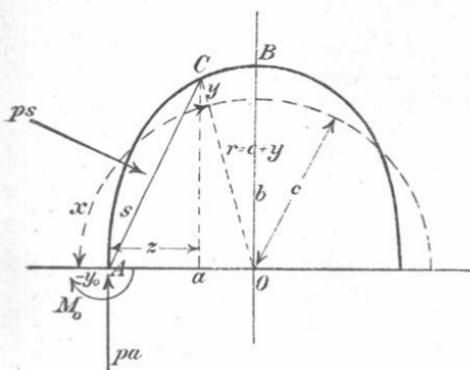


Abb. 64.

wenn das Rohr unter einem äußeren Überdrucke steht. Denn ohne jede Rechnung sieht man schon ein, daß ein äußerer Überdruck die vorher bewirkte Abplattung aufrecht zu halten und noch zu vergrößern sucht. Es fragt sich also, ob diese Wirkung des äußeren Über-drucks oder ob die elastischen Kräfte, die dem Rohre die ursprüngliche Gestalt zurück-zugeben suchen, die Ober-hand behalten. Diese prak-tisch recht wichtige Frage

(man denke nur an die Flammröhren der Dampfkessel) erfordert zu ihrer Beantwortung eine eingehende Rechnung.

In Abb. 64 ist eine Hälfte des Rohrquerschnitts gezeichnet, von dem ich annehme, daß er nur wenig von der gleichfalls gestrichelt

eingetragenen ursprünglichen Kreisform abweiche. Ich nehme ferner an, daß der Rohrumriß nach der Formänderung zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen besitze, so daß es genügt, die Betrachtung auf den einen Quadranten AB zu beschränken. Über die besondere Gestalt des Rohrumrisses wird dagegen im übrigen keine nähere Annahme gemacht; vielmehr wird sie sich aus der weiteren Untersuchung von selbst ergeben. Ich betrachte einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohrachse, um die Mitschleppung eines konstanten Faktors in allen Gliedern der Gleichungen, der sich nachher doch wieder weghebt, von vornherein zu vermeiden.

Die an der Schnittstelle A übertragenen Spannungen lassen sich genau so wie bei der bereits in § 41 durchgeführten Berechnung eines (nur in etwas anderer Weise belasteten) Ringes durch eine zentrisch angreifende Druckkraft pa und ein Biegemoment M_0 ersetzen, das vorläufig unbekannt ist. Auch das Biegemoment M an der Stelle C erhält man in der schon von früher bekannten Weise zu

$$M = M_0 + paz - p \frac{s^2}{2}.$$

Hierbei ist der Flüssigkeitsdruck auf den Bogenumfang AC durch den auf die zugehörige Sehne s ersetzt; p gibt den äußeren Überdruck auf die Flächeneinheit an. Aus dem Dreiecke ACO folgt

$$r^2 = s^2 + a^2 - 2az, \quad \text{also} \quad \frac{s^2}{2} - az = \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Setzt man dies ein, so geht der Wert von M über in

$$M = M_0 - p \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Nun kann $r = c + y$ und $a = c + y_0$ gesetzt werden, wobei zu beachten ist, daß alle y kleine Größen sind gegenüber dem Kreishalbmesser c und daß ferner y positiv zählen soll, wenn es über den Kreis hinaus reicht (so daß also die Strecke y_0 in der Zeichnung einen negativen Wert bedeutet). Die vorige Gleichung geht damit über in

$$M = M_0 - p \frac{2cy + y^2 - 2cy_0 - y_0^2}{2} = M_0 - pc(y - y_0), \quad (203)$$

wenn y gegenüber c vernachlässigt wird.

Für y besteht nach Gl. (114), S. 189 die Beziehung

$$E\Theta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{c^2} \right) = \pm M.$$

Das früher unbestimmt gelassene Vorzeichen von M richtet sich nach den Festsetzungen, die über die Vorzeichen der Momente M und der

Strecken y getroffen sind. Man erkennt aus Abb. 64, daß y mit wachsendem x innerhalb des ganzen Quadranten fortwährend zunimmt, daß also $\frac{dy}{dx}$ überall positiv ist; nur an den Enden des Quadranten bei A und bei B hat $\frac{dy}{dx}$ den Wert Null, weil die deformierte Kurve an diesen Stellen eine zur Kreistangente parallele Tangente hat. Hier nach nimmt $\frac{dy}{dx}$ von A aus mit wachsendem x zunächst zu und später wieder ab. So lange x nicht zu groß wird, ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ jedenfalls positiv. An diesen Stellen ist aber auch M positiv, da ein rechtsdrehendes Moment als positiv angesehen wurde. Wir haben daher in Gl. (114) in diesem Falle das positive Vorzeichen zu wählen. Setzen wir außerdem den vorher festgestellten Wert von M ein, so erhalten wir

$$E\Theta \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{c^2} \right) = M_0 - pcy + pcy_0,$$

wofür auch

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = M_0 + pcy_0 - \left(pc + \frac{E\Theta}{c^2} \right) y \quad (204)$$

gesetzt werden kann.

Diese Differentialgleichung spricht das Gesetz aus, nach dem sich eine Formänderung des ursprünglich kreisförmigen Rohrquerschnittes vollzogen haben muß, wenn die neue Form unter der Einwirkung der vorhandenen Lasten eine Gleichgewichtsfigur bilden soll.

Die allgemeine Lösung von Gl. (204) lautet

$$y = \frac{M_0 + pcy_0}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}} + A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad (205)$$

in der A und B die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind, während α eine Konstante ist, die so ermittelt werden muß, daß die Lösung richtig ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man, daß diese durch den angegebenen Ausdruck identisch befriedigt wird, sofern man der Konstanten α den Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{pc}{E\Theta} + \frac{1}{c^2}} \quad (206)$$

belegt. Die Integrationskonstanten sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen. Am Anfange des Quadranten, also für $x = 0$, muß

$\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = y_0$ werden. Die erste Bedingung liefert $A = 0$ und aus der zweiten folgt

$$B = \frac{\frac{E\Theta}{c^2} y_0 - M_0}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}},$$

womit Gl. (205) übergeht in

$$y = \frac{M_0 + pc y_0 + \left(\frac{E\Theta}{c^2} y_0 - M_0\right) \cos \alpha x}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}}. \quad (207)$$

Außerdem muß auch noch am anderen Ende des Quadranten, also für $x = \frac{\pi c}{2}$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ zu Null werden. Diese Bedingung liefert

$$\sin \frac{\pi \alpha c}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha c = 2. \quad (208)$$

Der Wert von α hängt nämlich, wie aus Gl. (206) hervorgeht, vom äußeren Flüssigkeitsdrucke p ab. Wenn dieser allmählich steigt, nimmt auch α zu. Anfänglich ist der Druck nicht ausreichend, um die verbogene Form des Rohrquerschnittes aufrecht zu erhalten. Wir sehen jetzt aus Gl. (208), wie groß α und daher auch p geworden sein muß, damit die verbogene Form eine Gleichgewichtsfigur bilden kann. Die Fälle $\alpha c = 4$ usw., bei denen der Sinus ebenfalls verschwinden würde, kommen daher nicht in Betracht. Nach Einsetzen von α aus Gl. (206) und auflösen nach p findet man aus Gl. (208) den kritischen Überdruck p_k

$$p_k = \frac{3E\Theta}{c^3}. \quad (209)$$

Ist p kleiner als p_k , so kann sich die deformierte Gestalt des Rohrquerschnittes nicht aufrecht erhalten, sondern die Verbiegung wird, sobald die störende Ursache entfernt ist, von selbst wieder rückgängig. Umgekehrt wird bei größerem p die Abplattung von selbst weiter fortschreiten und zu einem Zusammenbruche des Rohres führen. — Für das Trägheitsmoment Θ ist noch der Wert einzusetzen. Da es sich auf einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohrachse bezieht, ist es gleich $\frac{h^3}{12}$, wenn die Wandstärke des Rohres mit h bezeichnet wird, und daher

$$p_k = \frac{E}{4} \left(\frac{h}{c}\right)^3. \quad (210)$$

Der hier behandelte Fall ist der erste, bei dem ein labiles elastisches Gleichgewicht bisher vorkam; ähnliche Fälle werden uns später noch begegnen, der wichtigste unter allen ist jener, der bei der Knickfestigkeit vorliegt. In Anknüpfung daran bezeichnet man die hier untersuchte Erscheinung, die jener bei der Knickfestigkeit genau gleicht, als ein Ausknicken der Rohrwand.

Wenn das Rohr nur kurz und an den Enden durch Böden oder in anderer Weise versteift ist, kann die hier besprochene Ausknickung der Rohrwand nicht zu Stande kommen. Bei dem Flammrohre eines Dampfkessels ist die Länge immer so groß gegen den Durchmesser, daß diese Versteifung das Ausknicken des mittleren Teiles nicht zu verhüten vermag. Dagegen sucht man in solchen Fällen öfters dadurch eine größere Steifigkeit der Rohrwand herbeizuführen, daß man in gewissen Abständen Ringe aus Winkeleisen usw. herumlegt. In solchen Fällen muß man sich zur Berechnung an Stelle von Gl. (210) der Gl. (209) bedienen, indem man den Zuwachs des Trägheitsmomentes durch den Ring auf einen Streifen von der Länge 1 ausschlägt.

§ 56. Dickwandige Röhren.

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, daß das Rohr einem inneren Überdrucke ausgesetzt ist; für äußeren Überdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, daß von den drei Hauptachsen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohrachse geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohrachse aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohrachse will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t , denn man weiß schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, daß die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, daß das Rohr an den Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der

Rohrachse beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der spezifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Faktors zu vermeiden, betrachte ich wieder ein Stück des Rohres von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrößerung, die ein Radius x erfährt, der nach irgend einem Teilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Funktion von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ϵ_t und ϵ_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen: die Aufgabe wäre also gelöst. Es wird sich also vor allen Dingen darum handeln, diese Funktion u zu bestimmen.

In Abb. 65 ist ein Querschnitt des Rohres gezeichnet und durch zwei Radien, die den Zentriwinkel $d\alpha$ miteinander bilden, sowie durch zwei Kreisbögen mit den Halbmessern x und $x + dx$ ist ein Flächenelement abgegrenzt. Diesem Flächenelement entspricht ein Volumenelement des Rohres, für das wir die Bedingung für das Gleichgewicht der daran angreifenden Spannungen anschreiben wollen; dies wird uns zur Lösung der Aufgabe führen. In Abb. 66 (s. S. 288) ist das Volumelement noch besonders herausgezeichnet mit der Angabe der daran angreifenden Spannungen.

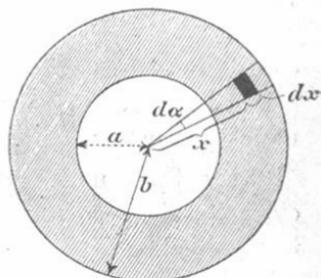


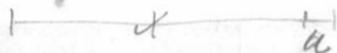
Abb. 65.

Zunächst bemerke ich, daß die spezifische Dehnung in der Richtung der Tangente

$$\epsilon_t = \frac{u}{x} \quad (211)$$

gesetzt werden kann, denn die Länge eines Kreisumfangs wächst proportional mit dem Radius. Für die spezifische Dehnung in der Richtung des Radius erhält man dagegen

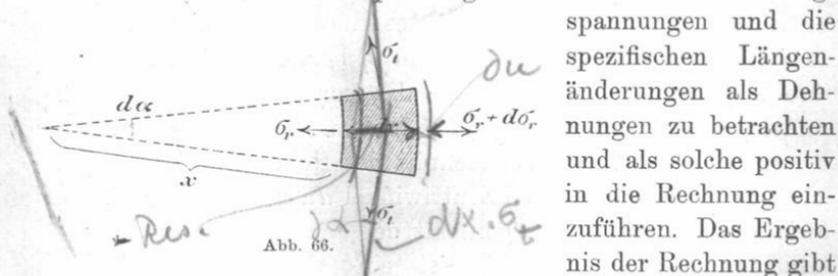
$$\epsilon_r = \frac{du}{dx} \quad (212)$$



$$\epsilon_r = \frac{u}{x+u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = \Delta r_m$$

denn aus dx wird nach der Formänderung $dx + du$. Man sieht sofort ein, daß in Wirklichkeit in der Richtung des Radius eine Verkürzung eintreten, daß also du und hiermit ε_r negativ werden muß. Ich lasse indessen die Gleichung in der angeschriebenen Form stehen. Die weitere Untersuchung muß dann von selbst zu einem negativen Werte von ε_r führen. Damit hängt es auch zusammen, daß ich σ_r in Abb. 66 mit einem Pfeile eingezeichnet habe, der eine Zugspannung bedeutet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, haben wir die vorkommenden Spannungen zunächst immer als Zugspannungen und die spezifischen Längenänderungen als Dehnungen zu betrachten und als solche positiv in die Rechnung einzuführen. Das Ergebnis der Rechnung gibt



dann durch das schließlich herauskommende Vorzeichen zu erkennen, welche der vorkommenden Spannungen in Wirklichkeit Druckspannungen sind.

Die Spannungen σ_t in Abb. 66 fassen wir zunächst zu einer Resultierenden zusammen. Auf jeder der beiden Seitenflächen haben wir $dx \cdot \sigma_t$ und wenn wir diese beiden Kräfte mit Hilfe eines Kraftdreiecks zu einer Resultierenden vereinigen, erhält diese die Größe

$$R_w = dx \sigma_t da. \quad I$$

Nun betrachten wir die Spannungen σ_r . Auf der inneren Fläche haben sie die Größe

$$\sigma_r dF = \sigma_r x da, \quad II$$

denn der zum Radius x und zum Zentriwinkel da gehörende Bogen ist gleich $x da$. Gegenüber liegt die Spannung $\sigma_r + d\sigma_r$, die sich über die Fläche $(x + dx) da$ erstreckt. Beide Kräfte gehen in entgegengesetzter Richtung; es kommt also nur auf ihren Unterschied an, der auch unmittelbar als

$$\sigma_r x da - (\sigma_r x da + \sigma_r dx da + d\sigma_r x da)$$

$$\frac{\partial(\sigma_r x)}{\partial x} da = - \sigma_r dx da + \sigma_r x da.$$

Differential des vorausgehenden Ausdruckes, also in der Form

$$\frac{d}{dx}(\sigma_r x) dx d\alpha$$

angeschrieben werden kann. Wenn σ_r und der Differentialquotient positiv sind, bedeutet dies eine Resultierende, deren Pfeil nach außen hin geht. Die Resultierende der σ_t geht dagegen bei positivem Werte von σ_t nach innen. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung des Radius erfordert daher, daß

$$\sigma_t = \frac{d}{dx}(\sigma_r x) \quad (213)$$

ist. Um diese Gleichung zur Ermittlung von u verwenden zu können, müssen wir zunächst die Spannungen in den Dehnungen ausdrücken. Nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right)$$

und durch Auflösen nach σ_t und σ_r erhält man daraus

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_r + \varepsilon_t),$$

oder, wenn man die Werte der Dehnungen aus den Gl. (211) und (212) einsetzt,

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) \cdot X$$

Diese Ausdrücke führen wir in Gl. (213) ein. Sie geht dann über in

$$m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(m x \frac{du}{dx} + u \right) = m \frac{du}{dx} + m x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx}$$

Ich möchte noch ausdrücklich die Aufmerksamkeit auf den Zweck hinlenken, der diesen Umrechnungen zugrunde liegt. Gl. (213) gilt nämlich offenbar ganz allgemein, gleichgültig, ob der Körper dem Hookeschen Gesetze folgt oder nicht. Sie enthält aber zwei unbekannte Größen σ_t und σ_r , und da andere Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Verfügung stehen, wäre es nicht möglich, beide Unbekannten aus dieser

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{x} + \mu \frac{du}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right)$$

einen Gleichung zu bestimmen. Das Problem ist und bleibt statisch unbestimmt, so lange man nicht auf Grund der elastischen Eigenschaften des Körpers noch eine andere Beziehung angeben kann. In der Tat hat die Untersuchung der elastischen Formänderung hier und in allen solchen Fällen nur den Zweck, die in größerer Zahl vorkommenden Spannungskomponenten auf eine kleinere Zahl unbekannter Formänderungsgrößen zurückzuführen und dadurch die Lösung der Gleichungen zu ermöglichen. So sind wir hier jetzt dazu gelangt, die Gl. (213) so umzuformen, daß nur noch die eine Unbekannte u in ihr vorkommt.

Die letzte Gleichung vereinfacht sich nach Ausführung der Differentiation auf der rechten Seite zu

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = 0. \quad (214)$$

Sie stimmt fast genau überein mit der Differentialgleichung (155) für die Meridiankurve der elastischen Fläche einer kreisförmigen Platte und in der Tat gleicht auch die vorausgehende Entwicklung in vielen Punkten und namentlich in dem ganzen Plane der Untersuchung der damals durchgeführten. Man braucht in Gl. (155) nur $N = 0$ zu setzen und die unabhängige Veränderliche mit u anstatt mit φ zu bezeichnen, um sie in Gl. (214) überzuführen. Daher gilt hier auch das frühere Integral, Gl. (156), in der Form

$$u = Bx + \frac{C}{x}. \quad (215)$$

Es fehlt jetzt nur noch die Ermittlung der Integrationskonstanten B und C . Für u selbst sind hier gar keine Grenzbedingungen vorgeschrieben, wohl aber für σ_r , denn für $x = a$, also an der Innenfläche, muß $\sigma_r = -p$ und für $x = b$, also außen, muß $\sigma_r = 0$ werden. Um diese Bedingungen zur Berechnung der Integrationskonstanten verwerten zu können, muß man zunächst den Ausdruck für σ_r aufstellen. Durch Einsetzen von u aus Gl. (215) geht dieser über in

$$\sigma_r = \frac{mE}{m-1} B - \frac{mE}{m+1} \cdot \frac{C}{x^2}.$$

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{x^2}$$

Zur Abkürzung wollen wir dafür

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{x^2}$$

$$B' = \frac{m \cdot E \cdot B}{216}$$

$$C' = \frac{m-1}{m+1} \frac{E \cdot e}{a^2} \quad (216)$$

schreiben. Für die neuen Konstanten B' und C' hat man nun die Gleichungen

$$p = B' - \frac{C'}{a^2}; \quad 0 = B' - \frac{C'}{b^2},$$

Innen druck.

aus denen durch Auflösen folgt

$$B' = p \frac{a^2}{b^2 - a^2}; \quad C' = p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (217)$$

Für u hat man daher jetzt

$$E \cdot \epsilon = u = p \frac{a^2}{m E (b^2 - a^2)} \left((m-1)x + (m+1) \frac{b^2}{x} \right). \quad (218)$$

Ferner folgt für σ_r und σ_t

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x^2 - b^2}{x^2} \\ \sigma_t &= p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x^2 + b^2}{x^2} \end{aligned} \right\} \times \quad (219)$$

für Innendruck.

Je kleiner x ist, desto größere Werte nehmen beide Hauptspannungen an. Das Material wird also am meisten an der Innenseite des Rohres beansprucht, was sich übrigens schon auf Grund einer einfachen Überlegung, die in § 54 angestellt wurde, voraussehen ließ. Nimmt man an, daß die Anstrengung des Materials von der größten Dehnung, also von σ_{red} abhängt, so findet man hierfür

$$\sigma_{\text{red}} = E[\epsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2 - a^2} \left(\frac{m-1}{m} a^2 + \frac{m+1}{m} b^2 \right). \quad (220)$$

Aufgaben.

41. Aufgabe. Eine biegsame Membran verschließt eine kreisförmige Öffnung und ist einem Überdrucke von der einen Seite her ausgesetzt. Man soll die entstehende Ausbauchung und die Spannung berechnen.

Lösung. Die Mittelebene geht in eine Kugelhaube über, deren Pfeil f als klein gegenüber dem Halbmesser r der Öffnung angesehen

frei Innendruck:

$$\sigma_x = p \cdot \frac{r^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2}$$

$$\sigma_t = p \cdot \frac{r^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x^2 + a^2}{x^2}$$

werden kann (vgl. Abb. 67). Wenn man den Radius der Kugelhaube mit R bezeichnet, hat man nach dem Pythagoräischen Satze

$$R^2 = r^2 + (R - f)^2,$$

woraus genau genug

$$f = \frac{r^2}{2R}$$

folgt. Der Winkel, den der äußerste Radius der Kugelhaube mit der Symmetrieachse bildet, sei mit φ bezeichnet, dann ist auch, da φ klein ist,

$$r = R \sin \varphi = R \varphi$$

und daher

$$f = \frac{r}{2} \varphi.$$

Der zu φ und zum Radius R gehörige Bogen ist gleich $R\varphi$; ursprünglich war diese Länge

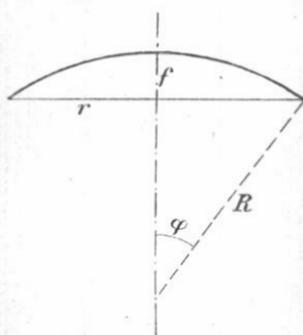


Abb. 67.

wir nicht $\sin \varphi$ mit φ vertauschen, weil es gerade darauf ankommt, die kleine Dehnung, die die Membran bei der Formänderung erfährt, zu berechnen. Bezeichnen wir die spezifische Dehnung mit ε , so wird

$$\varepsilon = \frac{R\varphi - R \sin \varphi}{R\varphi} = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{6}.$$

Den letzten Wert erhält man durch Entwicklung der Sinusreihe, von der es genügt, die beiden ersten Glieder beizubehalten. Aus der Dehnung folgt die Spannung σ der Membran in der Richtung des Meridians. Es genügt, wenn wir setzen

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\varphi^2}{6}.$$

Andererseits müssen aber die Spannungen im Gleichgewichte mit den Druckkräften stehen, denen die Membran ausgesetzt ist. Dazu können wir uns der Gl. (199) bedienen, da es hierfür keinen Unterschied macht, ob die Kugelhaube zu einer ganzen Kugel gehört oder ob sie in anderer Weise gestützt ist. Wir haben also auch

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert, wenn wir vorher noch beiderseits mit φ multiplizieren,

$$\frac{pr}{2h} = \frac{E\varphi^3}{6},$$

woraus

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}$$

folgt. Man braucht diesen Wert nur in die vorher schon aufgestellten Formeln für f und σ einzusetzen, um die Aufgabe zu lösen, also

$$f = \frac{r}{2} \sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{p^2 E}{24} \cdot \frac{r^2}{h^2}}.$$

Die Lösung ist freilich nicht streng richtig, weil σ nicht nur von der Dehnung ε in der Richtung des Meridians, sondern auch von der in der Richtung des Parallelkreises abhängt, über die sich nur aussagen läßt, daß sie am Umfange gleich Null ist. Ebenso ist auch nicht sicher, ob die Dehnung ε in der Tat über die ganze Fläche hin gleich groß ist, wie es bei der Berechnung angenommen wurde. Für die praktische Anwendung sind die Formeln aber jedenfalls genau genug.

42. Aufgabe. Ein dünnwandiges Gefäß hat die Gestalt eines Rotationsellipsoids und ist einem inneren Überdrucke ausgesetzt; man soll den Spannungszustand der Gefäßwand untersuchen.

Anmerkung. Ein Ellipsoid und überhaupt jedes Gefäß von überall endlicher Krümmung (bei dem also an keiner Stelle einer der Hauptkrümmungsradien unendlich groß wird) kann einem inneren oder äußeren Überdrucke widerstehen, wenn die Wand auch so dünn ist, daß sie keinen merklichen Widerstand gegen Biegung leisten kann, während ein Zylinder dazu im allgemeinen nicht imstande ist.

Lösung. In Abb 68 ist ein Meridianschnitt durch das Ellipsoid gezeichnet; die X-Achse sei die Rotationsachse. Ich lege zunächst einen Parallelkreisschnitt AA und betrachte das Gleichgewicht der dadurch abgegrenzten Haube. Der Symmetrie wegen sind die Spannungen σ_t (wie ich sie nennen will) dem ganzen Umfange nach gleichförmig verteilt. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente an den Meridianschnitt bei

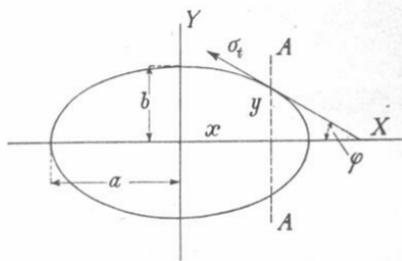


Abb. 68.

dem betreffenden Parallelkreise mit der Rotationsachse bildet mit φ , so ist

$$\sigma_t \cdot 2\pi y h \cdot \cos \varphi = \pi y^2 p$$

die Gleichgewichtsbedingung, aus der sich σ_t zu

$$\sigma_t = \frac{p y}{2 h \cos \varphi}$$

berechnet.

So weit gleicht also das Verfahren vollständig dem bei der Berechnung des Kugelkessels angewendeten. Um aber auch die Ringspannungen σ_r zu finden, die in einem Meridianschnitte übertragen werden, genügt es nicht, das Gleichgewicht der einen Hälfte des Gefäßes ins Auge zu fassen, weil man nicht wissen kann, wie sich die

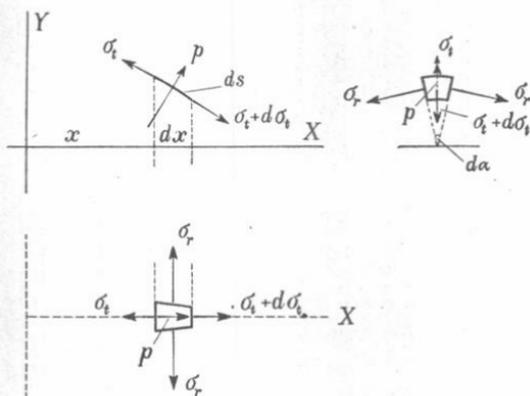


Abb. 69.

Ringspannungen über den Umfang des Meridianschnittes verteilen. Man grenze daher (vgl. Abb. 69) aus der Kesselwand ein Element ab, das zwischen zwei Meridianschnitten, die den Winkel $d\alpha$ miteinander bilden, und zwischen zwei Parallelkreisschnitten, im Abstände dx voneinander, liegt. An den vier Umfangseiten des Elementes wirken die Spannungen

σ_r und σ_t , und dazu kommt der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche des Elementes. Die fünf Kräfte müssen im Gleichgewichte miteinander stehen; wir brauchen dabei nur auf die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der Y -Achse zu achten, denn die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben parallel zur Rotationsachse ist zur Berechnung von σ_t schon verwendet worden.

Das zwischen beiden Parallelkreisen liegende Element des Meridians (also das Bogenelement der Ellipse) sei mit ds bezeichnet. Die Spannungen σ_r an beiden Meridianschnittflächen geben zusammen die Resultierende

$$\sigma_r h ds \cdot d\alpha$$

mit dem Pfeile nach unten zu gerichtet. Die Spannung σ_t im ersten Parallelkreisschnitte (vom Radius y) hat die Größe $\sigma_t h y d\alpha$ und die Komponente ist gleich $\sigma_t h y d\alpha \sin \varphi$; der Pfeil ist nach außen gekehrt.

Entgegengesetzt gerichtet ist aber die Komponente am zweiten Parallelkreisschnitte. Der Unterschied zwischen beiden Komponenten ist das Differential des vorhergehenden Ausdruckes, also

$$\frac{d}{dx}(\sigma_t y \sin \varphi) h d\alpha dx,$$

und bedeutet eine nach abwärts gekehrte Kraft. Der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche endlich hat die Komponente

$$p ds y d\alpha \cos \varphi \quad \text{oder} \quad p y d\alpha dx,$$

die nach außen hin gewendet ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach, wenn man mit $d\alpha \cdot dx$ dividiert und vorher den Wert von σ_t einsetzt,

$$\sigma_r h \frac{ds}{dx} - p y + \frac{d}{dx} \left(p \frac{y^2 \operatorname{tg} \varphi}{2} \right) = 0,$$

woraus man mit $dx = ds \cos \varphi$

$$\sigma_r = \frac{p}{h} \cos \varphi \left(y - \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right)$$

erhält. — Bis dahin gilt die Betrachtung für jede beliebige Gestalt des Meridianschnittes. Nachträglich kann man aus der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

den Winkel φ mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{dy}{dx}$$

in den Koordinaten ausdrücken und durch Einsetzen in den vorhergehenden Ausdruck σ_r als Funktion von x darstellen.

43. Aufgabe. Die Berechnung der Spannungen eines dünnwandigen ringförmigen Gefäßes von kreisförmigem Querschnitte, das unter einem inneren Überdrucke steht, soll in allgemeinen Umrissen angegeben werden.

Lösung. Ein Schnitt mm (Abb. 70) senkrecht zur Rotationsachse trifft die Gefäßwand nach zwei Kreisen. Wenn man nun aber auch aus Symmetriegründen schließen kann, daß die Spannungen σ_t längs des Umfanges jedes dieser Kreise gleichförmig verteilt sind, so sind sie doch sicher im inneren Kreise verschieden von denen längs des äußeren Kreises, und man kommt daher mit der Betrachtung des Gleichgewichtes des oben abgeschnittenen Teils nicht aus. Deshalb

denken wir uns den oberen Teil noch durch einen Ringschnitt nn in zwei Hälften geteilt. In diesem Ringschnitte treten nur horizontal gerichtete Kräfte auf; wir können daher eine Gleichgewichtsbedingung für Verschieben jeder Hälfte in vertikaler Richtung aufstellen, in der das zugehörige σ_t als einzige Unbekannte auftritt. So hat man für

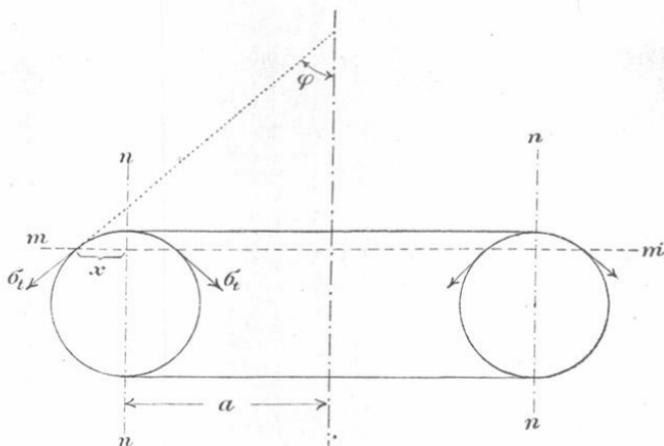


Abb. 70.

den nach außen hin liegenden Teil unter Benutzung der in die Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen

$$\sigma_t 2\pi(x+a)h \cos \varphi = p\pi((a+x)^2 - a^2),$$

woraus mit Berücksichtigung der Beziehung $\cos \varphi = \frac{x}{r}$

$$\sigma_t = p \frac{r}{h} \cdot \frac{2a+x}{2a+2x}$$

folgt. Nachdem die Spannungen σ_t bekannt sind, können die Ringspannungen genau auf die Art wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe ermittelt werden.

44. Aufgabe. Wie stark muß die Wand eines Flammrohres von 80 cm Durchmesser gewählt werden, wenn der äußere Überdruck 10 atm beträgt und fünffache Sicherheit gegen Ausknicken verlangt wird?

Lösung. Der kritische Überdruck ist nach Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{4} \left(\frac{h}{r}\right)^3.$$

Wir setzen in diese Gleichung, der verlangten fünffachen Sicherheit wegen, $p_k = 50 \text{ atm}$, $r = 40 \text{ cm}$ und $E = 2 \cdot 10^6$ (für Schweißbeisen) ein und lösen sie nach h auf; wir erhalten

$$h = r \sqrt[3]{\frac{4p_k}{E}} = 40 \sqrt[3]{\frac{200}{2 \cdot 10^6}} = 1,856 \text{ cm.}$$

Bei Anwendung von Versteifungsringen kann h schwächer gewählt werden; es muß nur dafür gesorgt werden, daß die Ringe nicht zu weit auseinander sitzen und daß das Trägheitsmoment des Versteifungsringes das Trägheitsmoment des Blechs von der berechneten Stärke h auf eine Länge, die gleich dem Abstände der Versteifungsringe voneinander ist, mindestens ersetzt.

45. Aufgabe. Man soll die in § 56 für die dickwandigen Röhren gegebene Rechnung auf den Fall eines kugelförmigen Gefäßes von größerer Wandstärke übertragen.

Lösung. Abb. 65 bedeute jetzt den Querschnitt durch die Kugel; in diesem Sinne verwenden wir alle dort eingeschriebenen Bezeichnungen. Die Gl. (210) und (211) für die Dehnungen bleiben bestehen. Das Element, an dem das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, gehöre zu einem Kreiskegel mit dem Winkel $d\alpha$ an der Spitze. Die Komponente der σ_t in der Richtung des Radius ist dann

$$\frac{1}{2} \sigma_t \pi x d x d \alpha^2.$$

Die Spannungen σ_r an der zum Radius x gehörigen Basisfläche beitragen zusammen $\sigma_r \frac{\pi}{4} (x d \alpha)^2$, und das Differential davon ist

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 \sigma_r) dx d \alpha^2.$$

An Stelle von Gl. (213) erhalten wir daher

$$\sigma_t \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 \sigma_r).$$

Die beiden Unbekannten σ_r und σ_t sind jetzt in u auszudrücken. Dabei ist zu beachten, daß hier

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\frac{m-1}{m} \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{2}{m} \sigma_t \right)$$

ist, weil die Spannungen σ_t hier von allen Seiten her wirken (d. h. zwei der drei Hauptspannungen sind gleich σ_t). Die Auflösung liefert

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2} (m \varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left((m-1) \varepsilon_r + 2 \varepsilon_t \right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (211) und (212)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left((m-1) \frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} \right).$$

Die Differentialgleichung geht nach Einführen dieser Werte über in

$$2x \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left((m-1)x^2 \frac{du}{dx} + 2ux \right)$$

oder nach Ausführung der Differentiation, Wegheben der Glieder, die gegeneinander fortfallen und Division mit $(m-1)$

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} - 2u = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u = Bx + \frac{C}{x^2}.$$

Damit folgt für σ_r

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left((m+1)B - (m-2) \frac{2C}{x^3} \right) \\ &= \frac{mE}{m-2} B - \frac{2mE}{m+1} \cdot \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Wenn der Überdruck von innen her wirkt (im entgegengesetzten Falle wäre ganz ähnlich zu verfahren) ist $\sigma_r = 0$ für $x = b$ und $\sigma_r = -p$ für $x = a$, also

$$\frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)b^3} = 0; \quad \frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)a^3} = -\frac{p}{mE}$$

und hieraus

$$B = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{a^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{p}{E}; \quad C = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{p}{E}.$$

Nachdem die Integrationskonstanten bestimmt sind, findet man alle Spannungen und die Anstrengung des Materials genau so wie bei den dickwandigen Röhren in § 56.