

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Siebenter Abschnitt. Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen
Umfange unterstützt sind

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstützt sind.

§ 48. Genauere Theorie der kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung.

Als Belastung nehme ich hier entweder eine Einzellast in der Mitte oder einen gleichförmig über die ganze Fläche verteilten Druck an, obschon die Aufgabe in ganz gleicher Weise auch für eine andere Lastverteilung gelöst werden kann, wenn diese nur symmetrisch ist, d. h. wenn sie in gleichen Abständen von der Mitte ringsum gleich ist.

Ferner setze ich voraus, daß auch die Stützung der Platte am Rande überall in der gleichen Weise erfolgt und zwar entweder so, daß die Platte am Rande eingeklemmt ist, oder so, daß sie frei aufliegt. Der letzte Fall ist im Gegensatze zur Biegungstheorie des Balkens schwieriger zu behandeln, als der andere. Bei der frei aufliegenden Platte beteiligen sich nämlich auch die über den Auflagerkreis hinausreichenden Teile der Platte an der Kraftübertragung, und es ist daher keineswegs gleichgültig, um wieviel die Platte übersteht. Ich werde indessen annehmen, daß sie nur wenig übersteht, so daß die Spannungen in dem überstehenden Teile unberücksichtigt bleiben können.

Von vornherein ist klar, daß die Untersuchung in einer gewissen Verwandtschaft mit der Biegungstheorie des Balkens steht. An die Stelle der elastischen Linie tritt hier die elastische Fläche, in die die Mittelebene der Platte (so soll die in der halben Plattendicke parallel zu den Grenzflächen gezogene Ebene genannt werden) durch die Formänderung übergeführt wird. Wie früher beim Balken nehmen wir an, daß die Ordinaten y

der elastischen Fläche, von der ursprünglichen Lage der Mittelebene an gerechnet, klein bleiben. Der Symmetrie wegen hängt y nur von dem Abstände x von der Symmetrieachse (d. h. von der im Mittelpunkte der Mittelebene zu dieser errichteten Senkrechten) ab; die elastische Fläche ist also eine Umdrehungsfläche. Dann sollen auch die etwa parallel zur Mittelebene auftretenden elastischen Verschiebungen von Punkten der Mittelebene gegenüber den Ordinaten y vernachlässigt werden, wie es schon beim Balken geschehen ist.

Auch eine Voraussetzung über die besondere Art der Formänderung, die der Bernoullischen Annahme entspricht, daß die Querschnitte des Balkens bei der Biegung eben bleiben, ist hier erforderlich. Wir setzen als hinreichend genau

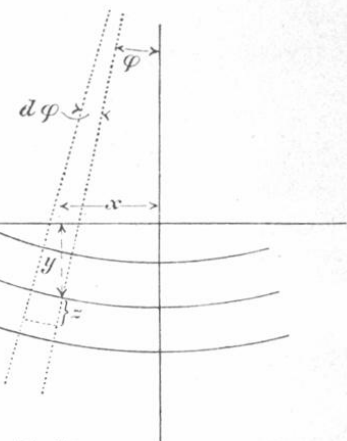


Abb. 58.

zutreffend voraus, daß alle Punkte der Platte, die vorher auf einer zur Mittelebene senkrecht gezogenen Geraden lagen, auch nach der Formänderung noch auf einer Geraden liegen, die der Symmetrie wegen die Symmetrieachse der Platte schneiden muß (wenn sie nicht parallel zu ihr bleibt). Ein ringförmig um die Symmetrieachse gezogener zylindrischer Schnitt, der etwa dem Querschnitte beim Balken entspricht, soll also durch die Formänderung nur in eine Kegelfläche übergehen können.

Nach diesen Festsetzungen müssen wir, wie es früher beim Balken geschehen ist, zunächst einen Ausdruck für die Längenänderungen aufstellen, die bei der Biegung eintreten, und daraus einen Schluß über die Spannungsverteilung ziehen. In einem Punkte, der den Abstand x von der Symmetrieachse und den Abstand z von der Mittelebene hat (vgl. Abb. 58), treten Deh-

nungen in tangentialer und in radialer Richtung auf, die wir mit ε_t und ε_r bezeichnen. Der durch den Punkt gehende Kreis vom Radius x hat sich nämlich wegen der Neigung φ , die die Normale zur elastischen Fläche gegen die Symmetrieachse angenommen hat, um den Betrag $z\varphi$ vergrößert. Der Neigungswinkel φ wird als hinreichend klein vorausgesetzt, um den Bogen an Stelle des Sinus nehmen zu können. In demselben Verhältnisse wie der Radius wächst auch der Umfang eines Kreises und hierdurch kommt die spezifische Dehnung ε_t in tangentialer Richtung zustande. Man hat daher

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}. \quad (147)$$

Um die Dehnung in radialer Richtung zu ermitteln, ziehe ich im Abstände dx eine zweite Normale zur elastischen Fläche. Der Winkel zwischen beiden Normalen ist mit $d\varphi$ zu bezeichnen. Die durch den Punkt z gehende Faser ist zwischen beiden Normalen um $z d\varphi$ länger geworden, als die Faser in der Mittelebene, die unverändert blieb. Die bezogene Dehnung ε_r folgt daraus durch Division mit der ursprünglichen Länge dx , also

$$\varepsilon_r = \frac{z d\varphi}{dx}. \quad (148)$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem früher für den Balken festgestellten; dagegen kommt bei der Platte die Dehnung ε_t hinzu, die beim Balken gleichgültig blieb. Es treten daher hier neben den Spannungen in radialer Richtung σ_r (entsprechend den Biegungsspannungen des Balkens) auch noch solche in tangentialer Richtung σ_t auf, die mit den Dehnungen nach dem Elastizitätsgesetze durch die Gleichungen

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right)$$

zusammenhängen. Durch Auflösen dieser Gleichungen nach σ_t und σ_r erhält man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_r + \varepsilon_t), \quad (149)$$

oder nach Einführung der Werte für die Dehnungen aus den Gleichungen (147) und (148)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right). \quad (150)$$

Die Spannungsverteilung längs einer Normalen, sowohl die von σ_r als die von σ_t , befolgt daher ein lineares Gesetz; die Spannungen sind den Abständen von der Mittelebene proportional.

Nachdem diese Ausdrücke für die Spannungen ermittelt sind, müssen wir das Gleichgewicht eines Plattenelementes untersuchen. Zu diesem Zwecke denke ich mir durch die Symmetrieachse zwei Meridianebenen gelegt, die einen beliebigen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ miteinander bilden; von der Formänderung bleibt dieser unberührt. Zwischen beiden Ebenen lege ich ferner zwei zylindrische Schnitte mit den Radien x und $x + dx$. Hierdurch wird das in Abb. 59 in Aufriß und Grundriß gezeichnete Plattenelement abgegrenzt. An den

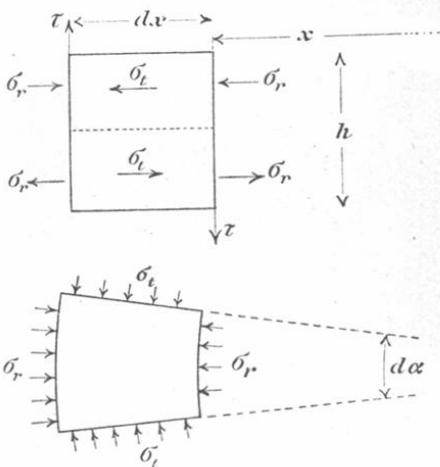


Abb. 59.

vier Schnittflächen treten zunächst die Spannungen σ_r und σ_t auf, die sich an jeder Schnittfläche zu einem Kräftepaare zusammensetzen lassen. Außerdem kommen aber an den zylindrischen Schnittflächen noch die Schubspannungen τ vor, durch die die Last im mittleren Teile der Platte nach dem Auflager übertragen wird. Wir haben eine Gleichung aufzustellen, durch die die Bedingung für das Gleichgewicht aller dieser Kräfte an dem Plattenelemente zum Ausdruck gebracht wird.

Zunächst fasse ich die Spannungen σ_t ins Auge. Zu jedem Flächenelemente dF des einen Meridianschnittes gehört ein

Flächenelement des anderen, in dem die Spannung σ_t ebenso groß ist. Die Richtungslinien beider Kräfte $\sigma_t dF$ schneiden sich in der Symmetrieebene des Plattenelementes, und ich will mir beide an diesem Angriffspunkte zu einer Resultierenden vereinigt denken. Diese fällt selbst in die Symmetrieebene, und sie hat die Größe $\sigma_t dF \cdot d\alpha$. In der Symmetrieebene lassen sich alle diese Kräfte, die zu den verschiedenen Flächenelementen dF eines Meridianschnittes gehören, zu einem resultierenden Kräftepaare vereinigen, dessen Moment leicht festgestellt werden kann. Für einen auf der Mittelebene gelegenen Momentenpunkt hat nämlich die Kraft $\sigma_t dF d\alpha$ das Moment $\sigma_t z dF d\alpha$, und im ganzen ist daher, mit Berücksichtigung von Gl. (150),

$$\text{Mom. der } \sigma_t = d\alpha \int \sigma_t z dF = d\alpha \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) \int z^2 dF.$$

Das hier noch vorkommende Integral ist das Trägheitsmoment der Meridianschnittfläche und daher

$$\int z^2 dF = dx \frac{h^3}{12}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) dx d\alpha. \quad (151)$$

Hier muß noch eine Bemerkung über das Vorzeichen beigelegt werden. Die Ordinaten z rechnete ich nach abwärts positiv. Wenn φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv sind, treten im unteren Teile Zugspannungen σ_t auf, und die Resultierende solcher Zugspannungen in beiden Meridianschnitten hat in der Symmetrieebene des Plattenelementes den Pfeil nach der Plattenmitte hin gerichtet, wie er in Abb. 59 eingetragen ist. Oben, d. h. bei negativem z , kehren sich die Richtungen um, und das aus den Spannungen σ_t resultierende Kräftepaar sucht das Plattenelement entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu drehen. Daher ist der in Gl. (151) festgestellte Wert des Momentes später mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzuführen.

Jetzt komme ich zu den Spannungen σ_r . In der Schnitt-

fläche, die zum Radius x gehört, bilden die Spannungen σ_r ein Kräftepaar, dessen Moment sich mit Rücksicht auf Gl. (150) zu

$$\int \sigma_r dF z = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right) \int z^2 dF$$

berechnet. Das Integral ist das Trägheitsmoment eines Rechteckes von der Breite $x d\alpha$ und der Höhe h ; der vorige Ausdruck geht daher über in

$$\frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m x \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \right) d\alpha.$$

Dazu kommt das Kräftepaar der Spannungen σ_r an der gegenüberliegenden Schnittfläche, das den entgegengesetzten Drehsinn hat. Es kommt also nur auf den Unterschied zwischen beiden Momenten an. Dieser Unterschied ist das Differential des vorausgehenden Ausdrucks, das einem Anwachsen des Abstandes x um dx entspricht. Durch Ausführung der Differentiation finden wir

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) dx d\alpha. \quad (152)$$

In bezug auf das Vorzeichen ist zu bemerken, daß bei positivem φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ die Spannungen σ_r in der unteren Hälfte Zugspannungen sind und daß das Kräftepaar im Schnitte x daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Im Schnitte $x + dx$ dreht es also im Uhrzeigersinne. Wenn das vorher berechnete Differential positiv ist, gibt es demnach ein im positiven Sinne drehendes Moment an, d. h. Mom. aller σ_r ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen.

Endlich führen auch noch die Schubspannungen zu einem Kräftepaare, dessen Moment berechnet werden muß. Hier müssen wir nun eine nähere Bestimmung darüber treffen, für welche Belastung die Rechnung weiter durchgeführt werden soll, während alle vorausgehenden Betrachtungen bei jeder symmetrisch verteilten Belastung in Gültigkeit bleiben. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Belastung in einem gleichförmig über die Fläche der Platte ver-

teilten Drucke p auf die Flächeneinheit bestehe. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn ein Zylinderdeckel einem Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist. — Zur Berechnung der übertragenen Scherkraft denken wir uns einen ringförmigen Schnitt mit dem Halbmesser x geführt. Der dadurch nach innen hin abgegrenzte Teil der Platte trägt dann eine Belastung von der Größe

$$\pi x^2 p$$

und ihr muß durch die Scherkräfte im Ringschnitte das Gleichgewicht gehalten werden. Auf den zwischen die beiden Meridianschnitte mit dem Zentriwinkel $d\alpha$ fallenden Teil des Ringschnittes kommt davon der Bruchteil $\frac{d\alpha}{2\pi}$, so daß also an dem Plattenelemente im Schnitte x die Scherkraft

$$\frac{x^2 p}{2} d\alpha$$

übertragen wird. Im Schnitte $x + dx$ ist die übertragene Scherkraft um ein Differential größer, so daß der Unterschied der auf das Plattenelement selbst kommenden Belastung entspricht. Bei Feststellung des Momentes kommt es aber auf den von höherer Ordnung unendlich kleinen Unterschied nicht an und wir haben

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2} d\alpha dx. \quad (153)$$

Das Vorzeichen dieses Momentes ist, wie schon ein Blick auf Abb. 59 lehrt, positiv.

Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehung erfordert, daß die algebraische Summe aller dieser Momente gleich Null ist, also

$$\text{Mom. der } \sigma_r + \text{Mom. aller } \sigma_r + \text{Mom. der } \tau = 0,$$

oder wenn wir die dafür berechneten Werte einführen und zugleich auf die Bemerkungen über die Vorzeichen achten,

$$\begin{aligned} - \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) \\ + \frac{p x^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Die gemeinsamen Faktoren $d\alpha$ und dx sind hier schon fortgehoben. Die Gleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x} \right) + \frac{p x^2}{2} = 0.$$

Zur Abkürzung beim Anschreiben der folgenden Formeln setzen wir

$$N = \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p, \quad (154)$$

so daß also N einen konstanten Wert bezeichnet, der als gegeben zu betrachten ist. Die vorige Gleichung geht dann über in

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + N x^3 = 0. \quad (155)$$

Man kennt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung; sie lautet

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + Bx + \frac{C}{x}, \quad (156)$$

worin B und C die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind. Durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in Gl. (155) überzeugt man sich leicht, daß er diese Gleichung befriedigt, und daß er die allgemeinste Lösung bildet, folgt daraus, daß er zwei unbestimmte Konstanten umfaßt.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Grenzbedingungen dient zunächst die Bemerkung, daß φ für $x = 0$ verschwinden muß. Daher ist $C = 0$ zu setzen. Die Konstante B hängt von der Bedingung ab, der die Platte am Rande unterworfen ist. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Platte eingespannt sei, daß also die elastische Fläche längs des Kreises $x = r$ von der horizontalen Ebene, mit der die Mittelebene ursprünglich zusammenfiel, berührt wird. Dann muß φ auch für $x = r$ verschwinden und aus

$$0 = -\frac{N}{8} r^3 + Br$$

folgt $B = \frac{N}{8} r^2$. Wir kennen jetzt φ vollständig, nämlich

$$\varphi = \frac{N}{8} (r^2 x - x^3) = \frac{3(m^2 - 1)}{4m^2 E h^3} p (r^2 x - x^3). \quad (157)$$

Nach den Gl. (147) und (148) findet man hiermit auch die elastischen Dehnungen und damit die Beanspruchung des Materials. Durch Einsetzen erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8} (r^2 - x^2) z; \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8} (r^2 - 3x^2) z. \quad (158)$$

In der Mitte der Platte, also für $x = 0$, werden ε_r und ε_t einander gleich und zwar gleich $\frac{N}{8} r^2 z$. Dies war auch von vornherein zu erwarten, denn dieselbe Dehnung, die für einen Meridianschnitt als ε_t zu bezeichnen ist, d. h. die zu dieser Meridianebene senkrecht steht, gilt hier für einen anderen Meridianschnitt, der in der Richtung der Dehnung gelegt ist, als ε_r . Nach außen zu (bei wachsendem x) nehmen sowohl ε_t als ε_r ab; am Rande wird ε_t zu Null und $\varepsilon_r = -\frac{N}{4} r^2 z$, also dem Absolutbetrage nach doppelt so groß als in der Mitte. Am Rande tritt also die größte Beanspruchung des Materials auf; man hat zu erwarten, daß der Bruch der Platte durch die Bildung eines ringförmigen Risses längs des Auflagers eingeleitet wird. Betrachtet man, wie es gewöhnlich geschieht, die reduzierte Spannung als Maß für die Beanspruchung des Materials, so findet man für diese aus ε_r , nachdem darin $x = r$ und $z = \frac{h}{2}$ gesetzt ist, durch Multiplikation mit dem Elastizitätsmodul E

$$\sigma_{\text{red}} = E \frac{Nr^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3(m^2 - 1)}{4m^2} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0,68 p \frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3}. \quad (159)$$

Die Spannungen σ_t und σ_r kann man nach den Gl. (149) oder (150) ebenfalls sofort anschreiben, nachdem φ , bzw. die Dehnungen ε_t und ε_r ermittelt sind.

Nur die Frage nach der Gestalt der elastischen Fläche bleibt jetzt noch zu beantworten. Dazu bemerke ich, daß φ zugleich den Neigungswinkel angibt, den die Tangente an die Meridianlinie der elastischen Fläche mit der Richtung der X-Achse bildet. Mit Rücksicht auf die aus Abb. 58 ein-

zusehenden Festsetzungen über die positiven Richtungen hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Da der Winkel φ klein ist, kann an Stelle der Tangente auch der Winkel selbst gesetzt werden; mit Rücksicht auf Gl. (157) hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{8} (x^3 - r^2 x). \quad (160)$$

Durch Integration erhält man daraus

$$y = \frac{N}{8} \left(\frac{x^4}{4} - r^2 \frac{x^2}{2} \right) + C$$

und die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Bedingung, daß für $x = r$ die Einsenkung y zu Null werden muß. Dies liefert

$$C = \frac{Nr^4}{32}$$

und daher schließlich

$$y = \frac{N}{32} (x^4 - 2r^2 x^2 + r^4) = \frac{N}{32} (x^2 - r^2)^2. \quad (161)$$

Von besonderem Interesse ist die Einsenkung, die die Platte in der Mitte erfährt, also die Ordinate y für $x = 0$. Wir wollen sie, wie früher beim Balken, den Biegungspeil f nennen und erhalten

$$f = \frac{Nr^2}{32}.$$

Nach Einsetzen des Wertes von N aus Gl. (154) und mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$f = \frac{3(m^2 - 1)}{16 m^2 E h^3} P r^4 = 0,17 \frac{P r^4}{E h^3}. \quad (162)$$

§ 49. Fortsetzung für den Fall einer Einzellast P in der Mitte.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen bleiben gültig bis nach Gl. (152). Die Scherkraft, die in einem ringförmigen Schnitte übertragen wird, ist aber hier gleich P und auf den zu dem Plattenelemente gehörigen Teil dieses Schnittes

kommt davon $P \frac{d\alpha}{2\pi}$. Für das Moment des aus den Scherspannungen gebildeten Kräftepaares hat man daher

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{P}{2\pi} d\alpha dx \quad (163)$$

an Stelle von Gl. (153). Die Momentengleichung, die die Bedingung für das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehen ausspricht, lautet daher hier

$$-\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(mx \frac{d^2\varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{P}{2\pi} = 0,$$

woraus man, wie früher, nach Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$Q = \frac{6(m^2-1)P}{\pi m^2 E h^3} \quad (164)$$

für φ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0 \quad (165)$$

erhält. Auch die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt; sie lautet

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Bx + \frac{C}{x}, \quad (166)$$

wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Die Integrationskonstante C muß wieder gleich Null gesetzt werden, damit φ in der Mitte zu Null wird, und für B erhält man, falls die Platte am Rande eingespannt ist, aus der Bedingung $\varphi = 0$ für $x = r$

$$B = \frac{Q}{2} \lg r.$$

Damit geht Gl. (166) über in

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x}. \quad (167)$$

Aus den Gl. (147) und (148) erhält man für die spezifischen Dehnungen

$$\varepsilon_t = \frac{Q}{2} z \lg \frac{r}{x}; \quad \varepsilon_r = \frac{Q}{2} z \left(\lg \frac{r}{x} - 1 \right). \quad (168)$$

Für $x = 0$ werden diese Ausdrücke unendlich groß, d. h. die Platte müßte zerbrechen, wenn es möglich wäre, den Druck P in einem einzigen Punkte zu konzentrieren, wie es bei Ableitung der Formeln vorausgesetzt war. In Wirklichkeit wird sich aber die Belastung immer auf eine kleine Fläche verteilen und die Gl. (168) sind daher zur Berechnung der Beanspruchung des Materials in der Mitte unbrauchbar. Für das Verhalten der Platte am Rande ist es dagegen gleichgültig, ob die Last genau oder nur angenähert in der Mitte konzentriert ist; wir können also die Formeln zur Berechnung der Beanspruchung am Umfange benutzen. Mit $x = r$ erhalten wir $\varepsilon_t = 0$ und $\varepsilon_r = -\frac{Q}{2} z$, also ist dort mit $z = \frac{h}{2}$ und $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2 - 1)}{2\pi m^2} \frac{P}{h^2} = 0,43 \frac{P}{h^2}. \quad (169)$$

Die Beanspruchung am Rande ist also ganz unabhängig vom Radius der Platte.

Um über die tatsächlich in der Mitte zu erwartende Beanspruchung des Materials ins Klare zu kommen, nehmen wir an, daß sich die Last P über einen kleinen Kreis vom Halbmesser a gleichförmig verteile. Die Meridianlinie der elastischen Fläche setzt sich aus zwei Ästen zusammen, von denen der eine von $x = 0$ bis $x = a$ reicht und der Gl. (156) entspricht, während für den anderen von $x = a$ bis $x = r$ Gl. (166) gilt. Für den ersten Ast hat man also

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + Bx$$

und für den zweiten Ast, wenn man jetzt die Integrationskonstanten mit anderen Buchstaben bezeichnet,

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Dx + \frac{F}{x}.$$

Beide Äste müssen sich ohne Knick aneinanderschließen; zwischen den Konstanten B, D, F besteht daher die erste der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{N}{8}a^3 + Ba &= -\frac{Q}{2}a \lg a + Da + \frac{F}{a}, \\ -\frac{3N}{8}a^2 + B &= -\frac{Q}{2} \lg a - \frac{Q}{2} + D - \frac{F}{a^2}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt daraus, daß zu beiden Seiten des ringförmigen Schnittes $x = a$ die Spannung σ_r nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion von gleicher Größe sein muß. Dazu gehört aber nach Gl. (150), daß auch $\frac{d\varphi}{dx}$ an der Anschlußstelle für beide Äste gleich groß ist.

Man erhält durch Auflösen nach F und D

$$\begin{aligned} F &= \frac{a^2}{8}(Na^2 - 2Q), \\ D &= B - \frac{Na^2}{4} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{2} \lg a. \end{aligned}$$

Dann muß noch beim zweiten Aste $\varphi = 0$ sein für $x = r$, also

$$0 = -\frac{Q}{2}r \lg r + Dr + \frac{F}{r}.$$

Setzt man hier die Werte von F und D ein und löst dann die Gleichung nach B auf, so erhält man

$$B = \frac{Q}{2} \lg \frac{r}{a} + \frac{Na^2}{4} + \frac{a^2}{8r^2}(2Q - Na^2) - \frac{Q}{4}.$$

Nun ist noch auf die Beziehung zu achten, die hier zwischen N und Q besteht. Der Ausdruck N in Gl. (154) geht hier, weil $p = \frac{P}{\pi a^2}$ zu setzen ist, über in

$$N = \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} \cdot \frac{P}{\pi a^2}$$

und der Vergleich mit dem Ausdrucke Q in Gl. (164), der hier keine Änderung erleidet, zeigt, daß

$$Na^2 = Q$$

ist. Für die Integrationskonstante B hat man daher auch

$$B = \frac{Q}{8} \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (170)$$

und schließlich für den ersten Ast (von $x = 0$ bis $x = a$)

$$\varphi = \frac{Q}{8} x \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (171)$$

Damit sind wir in den Stand gesetzt, auch die Dehnungen und die Beanspruchung des Materials in dem kleinen Mittelstücke anzugeben. Nach den Gl. (147) und (148) wird nämlich

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{Q}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ \varepsilon_r &= \frac{Q}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{3x^2}{a^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Beide Dehnungen nehmen den größten und zwischen beiden übereinstimmenden Wert an der Stelle $x = 0$ an. Die reduzierte Spannung in der Mitte ist daher

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{EQ}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

oder nach Einführung des Wertes von Q und mit $z = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2 - 1)}{8\pi m^2} \cdot \frac{P}{h^2} \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Das letzte Glied in der Klammer kann gegen das erste vernachlässigt werden, wenn a in der Tat klein gegen r ist; hiermit und nach Einführung von $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\sigma_{\text{red}} = 0,43 \frac{P}{h^2} \lg \frac{r}{a}. \quad (173)$$

Mit der Spannung am Rande würde dies übereinstimmen, wenn $r = 2,718 \dots a$ wäre; wenn a kleiner ist, wird aber das Material am meisten in der Mitte beansprucht. Für $a = 0,1r$ z. B. wird

$$\sigma_{\text{red}} = 1,00 \frac{P}{h^2}$$

und für $a = 0,01r$

$$\sigma_{\text{red}} = 1,98 \frac{P}{h^2}.$$

Man sieht daraus, daß die Beanspruchung allerdings erheblich zunimmt, wenn sich die Last mehr konzentriert, daß aber ein Unendlichwerden, wie es nach den Gl. (168) zu erwarten gewesen wäre, in Wirklichkeit nicht zu befürchten ist. Auf besondere Zuverlässigkeit können übrigens die zuletzt angeschriebenen Formeln keinen Anspruch machen, weil in der Nähe der Lastangriffsstelle noch lokale Wirkungen und infolgedessen Abweichungen von den sonst hinreichend genau zutreffenden Annahmen über die Formänderung und die Spannungsverteilung hinzutreten, die in der Theorie nicht berücksichtigt sind. Die Formeln sollen vielmehr nur ein ungefähres Bild von der Beanspruchung geben, die man etwa zu erwarten hat.

Schließlich sei noch die Gestalt der elastischen Fläche und der Biegungspfeil für diesen Belastungsfall ermittelt. Dabei ist es nicht nötig, den inneren Ast der Meridianlinie besonders zu berücksichtigen, da das Gesetz der Meridianlinie längs dieses kleinen Abschnitts nicht von merklichem Einflusse auf den Biegungspfeil sein kann. Aus Gl. (167) schließen wir, wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x}. \quad (174)$$

Durch Integration folgt daraus

$$y = -\frac{Qx^2}{4} \lg r + \frac{Qx^2}{4} \lg x - \frac{Qx^2}{8} + C. \quad (175)$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bedingung, daß y am Rande verschwinden muß. Daraus folgt

$$C = \frac{Qr^2}{8}$$

und man hat

$$y = Q \frac{r^2 - x^2}{8} - \frac{Qx^2}{4} \lg \frac{r}{x}. \quad (176)$$

Diese Gleichung lassen wir aus dem vorher angegebenen Grunde bis zur Mitte hin gelten. Für $x = 0$ nimmt das zweite Glied der rechten Seite die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; der richtige Wert ist aber, wie man leicht einsieht, Null, denn ein Logarithmus wächst viel langsamer als der Numerus, zu dem

er gehört. Darum wird schon $x \lg x$ zu Null für $x = 0$ und $x^2 \lg x$ umsomehr. Für den Biegungspfeil f erhalten wir demnach aus Gl. (176)

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2 - 1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0,22 \frac{Pr^2}{Eh^3}, \quad (177)$$

wenn $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird. Der Vergleich von Gl. (177) mit Gl. (162) lehrt, daß der Biegungspfeil viermal so groß wird, wenn die Last P in der Mitte konzentriert ist, als wenn sie sich gleichmäßig über die ganze Fläche der Platte verteilt.

§ 50. Fortsetzung für den Fall, daß die Platte am Rande frei aufliegt.

Für den Fall einer gleichförmig verteilten Belastung bleiben hier alle Betrachtungen von § 48 bis nach Gl. (156) gültig. Die Integrationskonstante C von Gl. (156) ist auch hier gleich Null zu setzen; dagegen nimmt die Integrationskonstante B in

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + Bx \quad (178)$$

einen anderen Wert an als dort. Vorausgesetzt, daß die Platte am Rande nur knapp übersteht, muß dort σ_r zu Null werden und diese Bedingung gestattet uns, B zu ermitteln. Im anderen Falle, wenn die Platte um ein größeres Stück über den Auflagerkreis hinausreicht, muß noch der äußere Ast der Meridiankurve der elastischen Fläche näher untersucht und zuletzt die Bedingung eingeführt werden, daß am Rande der Platte die Spannungen in radialer Richtung zu Null werden. Daß σ_r hier verschwindet folgt daraus, daß der ringförmige Schnitt hier die Grenze des Körpers bildet und daß der Voraussetzung zufolge äußere Kräfte an dieser Stelle nicht einwirken.

Die hier angedeutete Rechnung bietet nun zwar an und für sich keine besonderen Schwierigkeiten, vielmehr kann das Gesetz des äußeren Meridianastes leicht aus den Formeln für den inneren Ast entnommen werden, wenn man darin $N = 0$ setzt. Immerhin erfordert aber die Durchführung einige Zeit,

da man außer B in Gl. (178) auch noch zwei Integrationskonstanten für den äußeren Ast aus den Grenzbedingungen ermitteln muß. (Zu diesen Grenzbedingungen gehört natürlich auch der stetige Übergang aus dem inneren Aste in den äußeren). Ich sehe deshalb von dieser umständlicheren Betrachtung ab und nehme an, daß σ_r schon für $x=r$ (oder schon unmittelbar nach $x=r$) verschwinden muß, weil die Platte dort zu Ende ist und keine Auflagerkräfte an der ringförmigen Schnittfläche übertragen werden.

Für σ_r hat man nach Gl. (150)

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2-1} z \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right).$$

Der Klammerwert muß also für $x=r$ verschwinden. Nun ist nach Gl. (178)

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(3m+1) \frac{Nx^2}{8} + (m+1)B.$$

Für $x=r$ hat man daher die Bedingungsgleichung

$$B = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{Nr^2}{8}, \quad (179)$$

womit die Konstante B ermittelt ist. Hiermit geht Gl. (178) über in

$$\varphi = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3 \right). \quad (180)$$

Für die Dehnungen ε_r und ε_t erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right); \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right). \quad (181)$$

Die größte Dehnung tritt in der Mitte auf; man hat dort

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{N}{8} z \frac{3m+1}{m+1} r^2$$

und daraus folgt für die reduzierte Spannung, wenn man den Wert von N aus Gl. (154) einführt, $z = \frac{h}{2}$ und schließlich noch $m = \frac{10}{3}$ setzt:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0,87 \frac{r^2}{h^2} p. \quad (182)$$

Im Gegensatze zu der Platte mit eingeklemmtem Rande wird hier das Material in der Mitte am meisten angestrengt; der Bruch wird also von hier aus beginnen. Die Beanspruchung wird hier im Verhältnisse $87 : 68 = 1,28$ mal größer an der ungünstigsten Stelle als im früheren Falle.

Um noch den Biegungspfeil zu berechnen, setze ich wieder

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi = \frac{N}{8} \left(x^3 - \frac{3m+1}{m+1} r^2 x \right), \quad (183)$$

woraus durch Integration folgt

$$y = \frac{N}{8} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^2 x^2}{2} \right) + C. \quad (184)$$

Für $x = r$ muß y verschwinden; daraus erhält man die Integrationskonstante C

$$C = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right).$$

Wenn in Gl. (184) $x = 0$ gesetzt wird, erhält man $y = C$, d. h. die Integrationskonstante C gibt zugleich den Biegungspfeil f an. Setzt man den Wert von N ein und später auch noch $m = \frac{10}{3}$, so wird daher

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} r^4 = 0,70 \frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}. \quad (185)$$

Der Biegungspfeil wird also hier, wie ein Vergleich mit Gl. (162) lehrt, etwas mehr als viermal so groß, als bei eingeklemmtem Rande. Bei Versuchen über das Verhalten kreisförmiger Platten bei gleichförmiger Belastung kann die Wirksamkeit einer Einspannung am Rande am besten dadurch beurteilt werden, daß man den Biegungspfeil mißt und ihn mit den Formeln (162) und (185) vergleicht.

Schließlich soll auch noch eine frei aufliegende Platte betrachtet werden, die eine Einzellast in der Mitte trägt. Dabei will ich mich aber auf die Ermittlung der Gestalt der elastischen Fläche und die Berechnung des Biegungspfeiles beschränken, da im anderen Falle die etwas weitläufige Untersuchung von § 49 wiederholt werden müßte, ohne daß ein besonderer Gewinn dabei herauskäme.

Daß die Platte am Rande eingespannt sei, setzte ich in § 49 erst nach der Ableitung von Gl. (166) voraus, um die Konstante B zu ermitteln. Ich habe also hier auszugehen von der Gl. (166)

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Bx,$$

denn C ist auch hier gleich Null zu setzen. Wie im Eingange dieses Paragraphen haben wir zur Bestimmung von B die Bedingung zu benutzen, daß für $x = r$ der Ausdruck

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}$$

verschwinden muß. Setzt man den hier gültigen Wert von φ ein, so erhält man

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(m+1) \frac{Q}{2} \lg x + (m+1) B - m \frac{Q}{2}$$

und die Grenzbedingung liefert

$$B = \frac{Q}{2} \lg r + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{Q}{2}.$$

Damit wird nun

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{Q}{2} x. \quad (186)$$

Das Negative davon ist gleich $\frac{dy}{dx}$ zu setzen und die Integration liefert

$$y = -\frac{Q}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} \lg \frac{r}{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{x^2}{2} \right\} + C. \quad (187)$$

Für $x = r$ muß y wieder zu Null werden; daraus folgt für die Integrationskonstante C

$$C = \frac{Q}{2} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{r^2}{2} \right).$$

Dies ist zugleich der Wert von y für $x = 0$; also der Biegunspfeil. Nach Einsetzen von Q aus Gl. (164) und mit $m = \frac{10}{3}$ erhält man daher

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0,55 \frac{Pr^2}{Eh^3}. \quad (188)$$

Der Biegunspfeil wird also bei dieser Belastung für die frei aufliegende Platte, wie ein Vergleich mit Gl. (177) lehrt,

etwa $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als bei unwandelbar fest eingespanntem Rande.

Anmerkung. Nachdem durch Gl. (187) die Einsenkung y an jeder Stelle für eine in der Mitte angreifende Last dargestellt ist, kann man nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen umgekehrt auch den Biegungspfeil in der Mitte für jede beliebige Lastverteilung, die nicht symmetrisch zu sein braucht, angeben. Man hat dafür

$$f = \frac{\int q dF y}{Q}$$

zu bilden, wo q die beliebig gegebene Flächendichte der Last an dem Flächenelemente dF und die Integration über die ganze Plattenfläche auszudehnen ist. Für y ist der aus Gl. (187) zu entnehmende Ausdruck einzusetzen.

§ 51. Bachsche Näherungstheorie für kreisförmige Platten.

Dieselbe Aufgabe, die in den vorhergehenden Paragraphen eine genauere Untersuchung erfahren hat, soll jetzt noch einmal auf einfachere Art behandelt werden. Bei vielen Aufgaben über die Festigkeit von Platten wird nämlich eine genauere Untersuchung nach dem Muster der vorhergehenden, falls sie überhaupt durchführbar ist, zu verwickelt, als daß man für den praktischen Gebrauch darauf zurückgreifen könnte. Man ist dann auf eine mehr schätzungsweise Berechnung angewiesen. Wie man zu diesem Zwecke vorzugehen hat, erkennt man aber am besten, wenn man das Näherungsverfahren zuerst für einen Fall entwickelt, mit dessen Einzelheiten man sich vorher schon durch eine eingehende Betrachtung bekannt gemacht hat.

Wir wollen uns die Platte als frei aufliegend vorstellen. Dies rechtfertigt sich dadurch, daß bei dieser Auflagerung, wie wir uns vorher überzeugten, eine größere Anstrengung des Materials zustande kommt, als bei einer Einspannung am Rande. Da man nun gewöhnlich im Zweifel sein wird, bis zu welchem Grade sich die Einspannung als wirksam erweist, ist es zweckmäßig, bei der Berechnung den ungünstigeren Fall zugrunde zu legen. Man nimmt auch in der Tat bei der Berechnung von Balken, die an den Enden eingespannt sind, sehr häufig

keine Rücksicht auf diesen Umstand, weil man unsicher darüber ist, ob die getroffenen Vorkehrungen wirklich ausreichen, um ganz kleine Winkeldrehungen der Stabenden zu verhüten.

Durch die frei aufliegende Platte (Abb. 60) denke man sich einen Meridianschnitt AB gezogen und betrachte das Gleichgewicht der in dem Schnitte übertragenen Spannungen mit den an der linken Hälfte der Platte angreifenden äußeren Kräften. Schubspannungen sind der Symmetrie wegen in

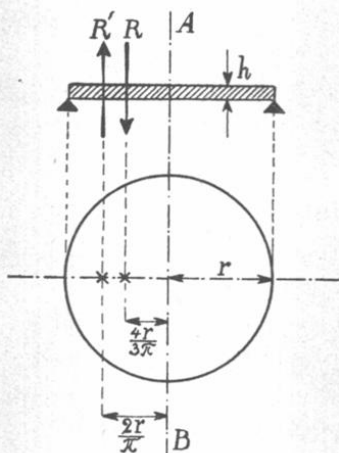


Abb. 60.

dem Meridianschnitte nicht zu erwarten und die Normalspannungen sind die in den vorausgehenden Paragraphen mit σ , bezeichneten. Alle Normalspannungen für die ganze Schnittfläche lassen sich zu einem Kräftepaare zusammenfassen, gerade so, wie etwa die Spannungen in dem Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Balkens. Nehmen wir ferner an, daß die Platte eine gleichförmig verteilte Belastung zu tragen hat, so läßt sich die davon auf die eine Plattenhälfte entfallende zu einer Resultierenden R zusammen-

setzen, die durch den Schwerpunkt der Halbkreisfläche geht, von der Größe

$$R = \frac{\pi r^2}{2} p,$$

wenn die Buchstaben die frühere Bedeutung behalten. Von äußeren Kräften kommen dann noch die längs des Auflagerkreises übertragenen Auflagerkräfte in Betracht. Der vollständigen Symmetrie wegen müssen diese gleichförmig über den ganzen Umfang verteilt sein. Die an der einen Plattenhälfte angreifenden Auflagerkräfte denken wir uns ebenfalls zu einer Resultierenden R' vereinigt. Diese geht dann der gleichförmigen Verteilung wegen durch den Schwerpunkt des Halbkreisbogens und sie ist ebenso groß, aber entgegengesetzt

gerichtet, wie die von der Plattenhälfte aufgenommene Belastung. Alle äußeren Kräfte des einen Plattenstücks sind damit auf ein Kräftepaar zurückgeführt, das mit dem Kräftepaare der Spannungen im Gleichgewichte stehen muß. Das Moment des Kräftepaares der äußeren Kräfte wollen wir, wie früher bei der Untersuchung des Balkens, als das Biegemoment M bezeichnen. Es ist gleich dem vorher festgestellten Werte der Belastung der Plattenhälfte multipliziert mit dem Abstände der beiden Schwerpunkte, die als Angriffspunkte der beiden Kräfte des Paares dienen.

Der Schwerpunkt eines Halbkreisbogens hat den Abstand $\frac{2r}{\pi}$ und der Schwerpunkt der Halbkreisfläche den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$ von dem Durchmesser. Der Abstand beider Schwerpunkte voneinander ist daher gleich $\frac{2r}{3\pi}$; mit r ist der Radius der Platte bezeichnet. Demnach ist das Biegemoment

$$M = \frac{\pi r^2}{2} p \cdot \frac{2r}{3\pi} = \frac{p r^3}{3}, \quad (189)$$

und ebenso groß muß das Moment der Spannungen σ , oder wie wir sie hier der Kürze halber nennen wollen, der Spannungen σ sein.

Bis dahin ist die Betrachtung durchaus streng und einwandfrei; man kann sie aber in so untadelhafter Weise nicht zu Ende führen, weil man von vornherein nicht wissen kann, nach welchem Gesetze sich die Spannungen σ mit der Entfernung x von der Plattenmitte ändern. Die früheren Untersuchungen sollen zur Ergänzung dieser Lücke nicht benutzt werden, da die Bachsche Näherungstheorie ganz selbständig vorgeht. Jedenfalls kann man aber eine untere Grenze für die größte Kantenspannung finden, die mindestens erreicht werden muß. Man setze nämlich willkürlich voraus, daß die Spannungen σ unabhängig von x seien. Die Verteilung der Spannungen über den Meridianschnitt gleicht dann vollständig jener, die für den Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens gilt. Daher kann auch zur Ableitung der Kantenspannung aus

dem Biegemomente unmittelbar die für den Balken mit rechteckigem Querschnitte bekannte Formel

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2}$$

benutzt werden. An Stelle von b tritt hier der Durchmesser $2r$ der Platte, während h stehen bleiben kann, da wir mit diesem Buchstaben ohnehin schon die Dicke der Platte bezeichnet hatten. Nach Einsetzen von M aus Gl. (189) folgt daher

$$\sigma = p \frac{r^2}{h^2}. \quad (190)$$

Dies ist nun freilich nur eine untere Grenze für die in Wirklichkeit zu erwartende größte Spannung σ , denn wenn die Kantenspannungen in verschiedenen Entfernungen von der Mitte verschieden groß sind, müssen sie notwendig an einigen Stellen größer, an anderen kleiner sein als der berechnete Durchschnittswert. Ehe man in die Anwendung von Gl. (190) hinreichendes Vertrauen setzen kann, muß man sich daher auf irgend eine Art ein Urteil darüber verschaffen, ob der Überschuß des größten Wertes über den Durchschnittswert nicht so erheblich ist, daß die Berechnung nach Gl. (190) zu ganz groben Fehlern führt. Es ist ganz gerechtfertigt, wenn man dazu Versuche über die Festigkeit solcher Platten zu Hilfe nimmt. Man kann dann etwa so vorgehen, daß man an Stelle von Gl. (190)

$$\sigma = \eta p \frac{r^2}{h^2}$$

schreibt, wo nun η ein Erfahrungskoeffizient ist, von dem von vornherein bekannt ist, daß er jedenfalls größer als 1 sein muß. Herr v. Bach hat in der Tat die Anwendbarkeit seiner Formel auf dem Wege des Versuches nachgewiesen und es zeigte sich, daß es genügt, η gleich 1 zu setzen, die Abweichung von diesem kleinsten Werte, der überhaupt in Frage kommen kann, also zu vernachlässigen.

Natürlich bleibt ein solcher Versuch immer nur für solche Bedingungen beweiskräftig, die mit den Bedingungen des Versuches ganz oder nahezu übereinstimmen. Unter anderen Ver-

hältnissen, die nicht besonders geprüft sind, könnten die Abweichungen leicht größer werden. Es ist daher angenehm, daß wir hier in der Lage sind, die Bachsche Formel (190) mit der aus der genaueren Theorie abgeleiteten zu vergleichen. In § 50 ist die Spannung σ_t nicht berechnet; wir können dies aber leicht nachträglich tun. Nach den Gl. (150) ist nämlich

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

und nach Gl. (180) werden in unserem Falle φ und sein Differentialquotient durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3 \right), \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right) \end{aligned}$$

dargestellt. Setzt man dies ein und macht $x=0$, um die größte Spannung σ_t in der Mitte zu erhalten, ebenso $z = \frac{h}{2}$, so findet man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{N}{8} (3m+1) r^2.$$

Mit dem Werte von N aus Gl. (154) und schließlich mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$\sigma_t = \frac{3(3m+1)}{8m} p \frac{r^2}{h^2} = 1,24 p \frac{r^2}{h^2}. \quad (191)$$

Damit ist die Größe der Abweichung des Wertes aus Gl. (190) von der genaueren Formel für die größte Spannung σ_t festgestellt.

Geht man von der Annahme aus, daß die Bruchgefahr von der reduzierten Spannung abhängt, so ist übrigens die Näherungsformel (190), nach der die Beanspruchung des Materials unmittelbar bemessen werden soll, nicht mit Gl. (191), sondern mit Gl. (182)

$$\sigma_{\text{red}} = 0,87 p \frac{r^2}{h^2}$$

zu vergleichen, und es zeigt sich, daß die Anstrengung des Materials sogar noch kleiner ist, als sie von der Näherungsformel angegeben wird.

Freilich ist nach der Mohrschen Theorie der Materialbeanspruchung, die mit den Erfahrungstatsachen besser übereinstimmt, als die Bemessung nach den reduzierten Spannungen, die Bruchgefahr hier, wo es sich um ein Zusammenwirken von Spannungen des gleichen Vorzeichens handelt, unmittelbar nach dem Werte von σ_t zu beurteilen. Andererseits ist aber auch von der Berücksichtigung einer Einspannung am Rande ganz abgesehen, während sich bei den gewöhnlichen Befestigungsarten wenigstens eine teilweise Einspannung geltend machen wird. In der Regel wird es daher gar keinen Bedenken unterliegen, nach Gl. (190) zu rechnen.

Falls die frei aufliegende Platte eine Einzellast P in der Mitte trägt, hat man für das Biegemoment

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{2r}{\pi} = \frac{Pr}{\pi},$$

und die Spannung σ wird nach dem Näherungsverfahren

$$\sigma = \frac{3P}{\pi h^2}. \quad (192)$$

Wir sahen indessen früher, daß die größte Anstrengung des Materials hier wesentlich davon abhängt, wie die Last P in der Mitte sich innerhalb eines kleinen Bereiches verteilt. Ein unmittelbarer Vergleich mit früheren Rechnungen ist daher hier nicht wohl durchführbar, und leider sind auch ausreichende Versuche, die zur Prüfung der Formel (192) dienen könnten, nicht bekannt. Man wird daher jedenfalls nur mit Vorsicht davon Gebrauch machen können.

§ 52. Näherungstheorie für die gleichförmig belastete elliptische Platte.

Hier wird die Aufgabe schwieriger, weil man nicht von vornherein anzugeben vermag, wie sich der Auflagerdruck längs des Umfangs verteilt. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, denke man sich die elliptische Öffnung durch zwei sich rechtwinklig kreuzende Stäbe AB und CD (Abb. 61) von

gleichem Querschnitte überdeckt. In der Mitte sollen diese Stäbe miteinander verbunden sein, oder man kann sich anstatt dessen auch das Kreuz $ABCD$ aus der Platte selbst ausgeschnitten denken, wie es in der Zeichnung angedeutet ist. Nach den Lehren des dritten Abschnitts kann man leicht berechnen, wie groß die Auflagerkräfte sind, die an den vier Stützpunkten A, B, C, D übertragen werden, wenn die Stäbe irgendwie gegebene, also z. B. gleichförmig verteilte Lasten tragen. (Man vergleiche z. B. Aufgabe 22.) Auch ohne diese Rechnung durchzuführen, erkennt man bereits, daß der Auflagerdruck bei C und D größer sein muß als bei A und B , weil der Stab AB der größeren Spannweite wegen viel biegsamer ist als der kürzere Stab CD . Wenn eine Einzellast im Kreuzungspunkte der Stäbe aufgebracht wäre, müßten sich z. B. die Anteile, die von beiden Stäben aufgenommen würden, wie aus der Lösung von Aufgabe 22 hervorgeht, umgekehrt wie die dritten Potenzen der Stablängen oder der Halbachsen a und b verhalten. Nicht so groß ist der Unterschied zwischen den Auflagerkräften bei der gleichförmig verteilten Belastung, die von der Platte in Wirklichkeit getragen wird.

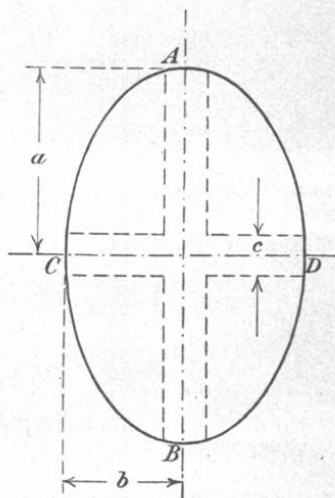


Abb. 61.

Natürlich kann diese Betrachtung nicht dazu dienen, das Verhältnis der Auflagerkräfte, die bei der elliptischen Platte an den Enden der Durchmesser AB und CD übertragen werden, genauer zu berechnen. Bei der Platte wird der Streifen AB nicht nur von dem mittleren Querstreifen CD gestützt, sondern auch noch von einer Reihe anderer, die man sich zu beiden Seiten von CD und parallel zu CD hinzugefügt denken muß. Andererseits sind auch diese Querstreifen CD nicht von dem Längsstreifen AB allein belastet, sondern auch von anderen,

die neben diesem parallel zu ihm gezogen sind. Die genaue Lösung kann daher nur durch eine verwickelte Betrachtung und zwar durch Integration einer partiellen Differentialgleichung gefunden werden.* Im 5. Bande ist dies näher besprochen; hier genügt es aber, wenn man sich nur klar darüber geworden ist, daß der Auflagerdruck der gleichförmig belasteten elliptischen Platte jedenfalls am kleinsten an den Enden der großen Achse ausfallen muß und daß er von da aus nach den Endpunkten der kleinen Achse hin zunehmen wird.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Ellipse sehr langgezogen, die Achse AB also sehr viel größer sei, als die kleine Achse CD . Dann kann in dem Streifen CD und den sich beiderseits an ihn anschließenden mittleren Teilen der Platte die Steifigkeit oder der Biegungswiderstand der Platte in der Längsrichtung AB gegen den in der Querrichtung CD vernachlässigt werden. Die Platte wird sich, wenigstens in diesen mittleren Teilen, nahezu so verhalten, als wenn sie durch eine Reihe von Schnitten parallel zur kleinen Achse in eine Schicht nebeneinander liegender Balken CD usf. getrennt wäre. Für diesen Fall läßt sich daher die Beanspruchung in der Platte ohne weiteres auf die eines einzelnen Balkens CD zurückführen, der ohne Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Platte steht und die auf ihn treffende Last selbständig aufzunehmen hat. In der Tat macht sich hier nur insofern ein Unterschied geltend, als der Balken CD an jenen Stellen seines Querschnitts, die gezogen sind, gleichzeitig eine Verkürzung der Quere nach, an den gedrückten dagegen eine Querdehnung erfahren würde, die in der Platte durch den Zusammenhang mit den benachbarten Streifen verhindert oder wenigstens erschwert wird. Dies kann aber nur zur Folge haben, daß die Platte widerstandsfähiger ist als der einzelne Balken, und da es uns jetzt nur darauf ankommt, die Beanspruchung unter den ungünstigsten Voraussetzungen zu ermitteln, wollen und dürfen wir von diesem Unterschiede absehen.

Bezeichnet man die willkürlich gewählte Breite des Balkens CD mit c , so trifft auf ihn die Oberfläche $2bc$ der

Platte und daher die Last $2bcp$. Das Biegemoment in der Mitte ist

$$M = 2bcp \cdot \frac{2b}{8} = cp \frac{b^2}{2}.$$

Die Biegungsformel für den Balken liefert daher die Kanten-
spannung

$$\sigma = \frac{6M}{ch^2} = 3p \frac{b^2}{h^2}. \quad (193)$$

Die Streifenbreite c ist aus der Formel wieder fortgefallen, wie man von vornherein erwarten mußte. — Zugleich ist auch klar, daß man hiermit in der Tat die größte in der Platte zu erwartende Spannung gefunden hat, denn ein Streifen, der in der Richtung AB herausgeschnitten wäre, würde zwar in der Mitte denselben Biegungspfeil aufweisen wie CD ; wegen der größeren Spannweite wäre er aber viel weniger gekrümmt als CD . Von dem Krümmungshalbmesser hängen aber die spezifischen Längenänderungen der äußersten Fasern ab, und daher sind auch die Spannungen in CD am größten. Diese sind also jedenfalls am größten im mittelsten Querschnitte des Balkens CD , oder mit anderen Worten in dem längs der großen Achse AB gezogenen Querschnitte der Platte. Längs der Linie AB muß man daher auch den Bruch der Platte bei entsprechender Steigerung der Belastung erwarten. Dies wurde auch durch Versuche v. Bachs bestätigt.

Wenn die Ellipse weniger langgestreckt ist, als bisher angenommen wurde, kommt eine Entlastung der Balken CD durch die Längssteifigkeit der Platte und hiermit eine Verminderung der Spannung σ zustande. Im allgemeinen gibt daher Gl. (193) die Spannung und damit die Bruchgefahr zu groß an. Geht die Ellipse in einen Kreis über, so können wir nach den vorigen Paragraphen

$$\sigma = p \frac{r^2}{h^2} = p \frac{b^2}{h^2} \quad (194)$$

setzen, und je mehr sich die Ellipse dem einen oder dem anderen Grenzfalle nähert, um so mehr wird sich auch die in Wirklichkeit auftretende größte Spannung dem einen oder

anderen der durch die Gleichungen (193) und (194) gegebenen Werte nähern.

Im allgemeinen Falle wird man daher setzen können

$$\sigma = \alpha \cdot p \frac{b^2}{h^2}, \quad (195)$$

wo nun α ein Faktor ist, von dem man zunächst nur weiß, daß er gleich 1 wird für

$$\frac{b}{a} = 1$$

und gleich 3 für

$$\frac{b}{a} = 0.$$

Man denke sich für jedes andere Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ das zugehörige α gefunden und α als Funktion von $\frac{b}{a}$ durch eine Kurve dargestellt. Solange man nichts näheres über die wirkliche Gestalt dieser Kurve weiß, von der wir nur die beiden Endpunkte kennen, liegt es für den Zweck einer ersten ungefähren Abschätzung am nächsten, sie zwischen diesen Punkten als geradlinig vorauszusetzen. Die lineare Funktion von $\frac{b}{a}$, die den beiden Bedingungen an den Grenzen genügt, lautet

$$\alpha = 3 - 2 \frac{b}{a},$$

und wenn man dies in Gl. (195) einsetzt, erhält man als Näherungsformel für die gleichförmig belastete elliptische Platte

$$\sigma = \frac{3a - 2b}{a} \cdot p \frac{b^2}{h^2}. \quad (196)$$

Mehr als eine ungefähre Schätzung bietet diese Formel freilich nicht; gewöhnlich verlangt man aber auch nur eine Abschätzung, wenn die Festigkeit elliptischer Platten in Frage kommt, und dafür wird die Formel, wie aus der Art ihrer Ableitung hervorgeht, immerhin brauchbar sein. Für die beiden Grenzfälle ist sie ohnehin schon verbürgt.

Anmerkung. Einige Versuche mit gußeisernen elliptischen Platten, die bis zum Bruche belastet wurden, sind von v. Bach aus-

geführt worden. Berechnet man aus diesen die Bruchspannung nach Gl. (196), so erhält man Werte, die bis auf 5200 atm hinaufreichen, während die an Stäben aus demselben Gußeisen durch einen Biegeversuch ermittelte und nach der gewöhnlichen Biegeformel berechnete Bruchspannung nur 2760 atm betrug. Bei diesem Vergleiche ist indessen zu berücksichtigen, daß bei der vorhergehenden Ableitung die Einspannung des Randes ganz vernachlässigt wurde, während bei jenen Versuchen durch die Art der Auflagerung und Abdichtung bis zu einem gewissen Grade eine Einspannung bewirkt wurde.

§ 53. Näherungstheorie für quadratische und rechteckige Platten.

Hier ist man für den Zweck der Abschätzung wieder in etwas günstigerer Lage. Zunächst betrachte ich eine quadratische Platte von der Seite $2a$; die Diagonale $= 2a\sqrt{2}$ sei mit d bezeichnet. Die Belastung ist $= 4pa^2$, und auf jede Seitenfläche kommt daher der Auflagerdruck pa^2 . Dieser ist jedenfalls so verteilt, daß er von der Seitenmitte nach den Ecken hin abnimmt. Wir untersuchen zwei Schnittflächen, eine parallel zu zwei Seiten und die andere in der Richtung der Diagonale. Für den ersten Schnitt haben wir zunächst den Auflagerdruck auf der dem Schnitte gegenüberliegenden Quadratseite ins Auge zu fassen. Er hat die Größe pa^2 und das Moment pa^3 . Dann kommen die Auflagerkräfte an den beiden Halbseiten, die zusammen auch gleich pa^2 sind. Die Resultierende steht sicher um weniger als $\frac{a}{2}$ von der Schnittfläche ab; bezeichnen wir diesen unbekannten Abstand mit x , so ist deren Moment $= pa^2x$ und das Biegemoment

$$M = pa^3 + pa^2x - pa^3 = pa^2x$$

und die Biegungsspannung σ nach der gewöhnlichen Formel

$$\sigma = \frac{6M}{2ah^2} = 3p \frac{ax}{h^2}.$$

Da x jedenfalls kleiner als $\frac{a}{2}$ ist, wird

$$\sigma < \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{h^2} p.$$

Bei dem Schnitte in der Richtung der Diagonale kommen zwei Auflagerkräfte vor, die beide den Abstand $\frac{d}{4}$ von der Schnittfläche haben. Der Angriffspunkt der Belastung fällt mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammen, das die eine Hälfte des Quadrats bildet; er hat daher den Abstand $\frac{d}{6}$ von der Schnittfläche. Wir können das Biegemoment M daher in diesem Falle genau angeben; es ist

$$M = 2pa^2 \cdot \frac{d}{12} = \frac{pa^2d}{6}$$

und die Biegungsspannung σ wird

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p \frac{a^2}{h^2}, \quad (197)$$

also in diesem Falle ebenso groß als bei einer kreisförmigen Platte von dem Halbmesser a . Der zuletzt gefundene Wert ist kleiner als die obere Grenze für die Spannung in dem Schnitte parallel zu zwei Seiten. So lange man nichts genaueres über den wirklichen Wert von x anzugeben vermag, befindet man sich daher im Zweifel, ob Gl. (197) den größten Wert der Beanspruchung angibt oder die Beanspruchung für den anderen Schnitt größer ist. Hier tritt wieder ein Bachscher Versuch in die Lücke, bei dem quadratische Platten längs der Diagonale aufrissen. Man kann daher Gl. (197) für die Berechnung anwenden.

Auch für rechteckige Platten, die von der quadratischen Form nicht viel abweichen, wollen wir einen in der Richtung der Diagonale geführten Schnitt als den gefährlichen Bruchquerschnitt betrachten. Die Rechteckseiten bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$, die Diagonale mit d und die zu d gehörige Höhe des Dreiecks, das die eine Hälfte des Rechtecks bildet, mit c . Wie sich nun auch der Auflagerdruck über die Rechteckseiten verteilen mag, jedenfalls kommt auf die beiden Katheten des Dreiecks der Auflagerdruck $2pab$ und die Resultierende hat den Abstand $\frac{c}{2}$ von der Diagonale. Der Ab-

stand des Dreiecksschwerpunkts ist $\frac{c}{3}$ und daher das Biegemoment

$$M = \frac{pabc}{3}.$$

Die Biegungsspannung wird daher

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = 2p \frac{abc}{dh^2}.$$

Da $cd = 4ab$, und $d^2 = 4a^2 + 4b^2$ ist, geht dies über in

$$\sigma = 2p \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{b^2}{h^2} = p \frac{c^2}{2h^2}. \quad (198)$$

Eine rechteckige Platte, deren Langseite weit größer ist, als die Schmalseite, verhält sich so wie eine elliptische Platte von demselben Achsenverhältnisse. Wir können daher Gleichung (193)

$$\sigma = 3p \frac{b^2}{h^2}$$

auch für die Berechnung der sehr langgestreckten rechteckigen Platte benutzen.

Aufgaben.

38. Aufgabe. Eine frei aufliegende kreisförmige, gußeiserne Platte von beliebigem Durchmesser hat 2 cm Stärke. Wie groß darf eine auf eine kleine Fläche in der Mitte konzentrierte Belastung sein, wenn man eine nach dem Näherungsverfahren in § 51 berechnete Biegungsspannung des Gußeisens von 200 atm als zulässig ansieht?

Lösung. Man braucht nur die Zahlenwerte in Gl. (192) einzusetzen. Man findet

$$P = \frac{\pi h^2 \sigma}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 200 = 837 \text{ kg.}$$

Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht auffällig, daß der Durchmesser der Platte gleichgültig ist, denn bei einem Stabe spielt die Größe der Spannweite eine Hauptrolle. Bei der Platte ist es aber deshalb anders, weil in demselben Verhältnisse, in dem bei größerer Öffnung die Hebelarme wachsen, auch die Breite des Querschnitts zunimmt, über den sich die Biegungsspannungen verteilen.

Bei gleichförmiger Verteilung über die ganze Platte dürfte die Last dreimal so groß sein, wie aus dem Vergleiche von Gl. (192) mit Gl. (190) hervorgeht.

Anmerkung. Da die Größe des Auflagerkreises gleichgültig ist, kann es auch nichts ausmachen, wenn sich der Auflagerdruck auf mehrere konzentrische Auflagerkreise verteilt. Wenn die Platte auf einen nachgiebigen Boden gelegt ist, bleibt daher die zulässige Belastung P ebenso groß als vorher. Auch die Tragfähigkeit der Eisdecke eines Teiches oder Flusses kann nach derselben Formel berechnet werden, falls man die zulässige Spannung σ des Eismaterials kennt.

39. Aufgabe. Eine Platte von großer Ausdehnung trägt (wie z. B. die Feuerbüchsenplatte eines Lokomotivkessels) eine gleichförmig verteilte Belastung p und ist in gleich weit voneinander entfernten Reihen von Stützpunkten aufgelagert. Man soll die Biegungsbeanspruchung der Platte abschätzen!

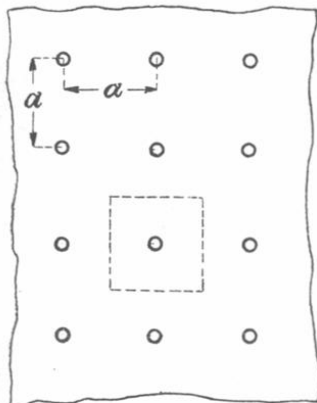


Abb. 62.

Lösung. In Abb. 62 ist ein Teil der Platte gezeichnet; die Stützpunkte sind durch kleine Kreise hervorgehoben. Auf eine Stütze trifft die Belastung

$$p a^2$$

und ebenso groß ist daher auch der Auflagerdruck auf jede Stütze. Man kann nun auch umgekehrt diesen Stützendruck als die Belastung des zugehörigen Plattenstücks und die gleichförmig verteilten Lasten als die dadurch hervorgerufenen Auflagerkräfte ansehen. Dann

gleichet der Fall innerhalb des Bezirks, der auf eine einzelne Stütze trifft, dem in der vorhergehenden Aufgabe behandelten. Mit Rücksicht auf die Ausführungen in der Anmerkung kann daher die Biegungsbeanspruchung der Platte nach Gl. (192) zu

$$\sigma = \frac{3 p a^2}{\pi h^2}$$

eingeschätzt werden. — Es mag vielleicht sein, daß diese Schätzung etwas zu hoch gegriffen ist. Ich glaube aber kaum, daß sie sehr weit von der Wahrheit abweicht, was ich gegenüber einer anderen Einschätzung, die ich für viel zu niedrig halte, hier noch ausdrücklich betonen möchte.

Anmerkung. Ein Kohlenbunker, der im Grundrisse ein langgestrecktes schmales Rechteck bildet, bestehe aus Seitenwänden in Mauerwerk und eisernen Ankern, die in gewissen Abständen verteilt

sind, um die Längswände zusammenzuhalten. Nachdem der Seiten-
druck der in dem Bunker aufgeschütteten Kohlen gegen die Wände
berechnet oder eingeschätzt ist, handelt es sich bei der weiteren Be-
rechnung um eine Aufgabe von derselben Art, wie sie hier besprochen
wurde. Die gegebene Lösung kann daher ebenfalls benutzt werden.
Durch einen praktischen Fall dieser Art, über den ich ein Gutachten
abgeben mußte, wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß ein Hin-
weis auf diese Anwendung manchem Leser recht nützlich werden
könnte.

*40. Aufgabe. Eine quadratische Platte von 2 m Seitenlänge
und 10 cm Dicke ist an allen vier Seiten gleichmäßig gestützt. Wie
groß ist nach der Näherungstheorie die Biegebbeanspruchung durch
eine Belastung von 12 000 kg, die den Ordinaten einer über der Platte
errichteten regelmäßigen Pyramide proportional über die Fläche ver-
teilt ist?*

Lösung: Eine Diagonalebene zerlegt die Pyramide in zwei
Tetraeder. Der Schwerpunktsabstand eines Tetraeders von einer
Seitenfläche ist gleich $\frac{1}{4}$ der dazu gehörigen Höhe. Bezeichnet man
die ganze Belastung mit P und die Diagonale des Quadrats mit d ,
so wird das statische Moment der Belastung der einen Plattenhälfte
in bezug auf die Diagonale des Quadrats gleich

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{d}{8}.$$

Das statische Moment des Auflagerdrucks ist ebenso groß, als wenn
die Last gleichmäßig über die Platte verteilt wäre, also gleich $\frac{P}{2} \cdot \frac{d}{4}$
und das Biegemoment wird

$$M = \frac{Pd}{16}$$

womit die Biegebbeanspruchung zu

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{P}{h^2} = 45 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

gefunden wird.