Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Sechster Abschnitt. Stäbe auf nachgiebiger Unterlage

urn:nbn:at:at-ubi:2-7796

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

§ 44. Grundlegende Annahmen.

Bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues steht man vor der Aufgabe, die Biegungsmomente, Scherkräfte und Spannungen in einem Stabe zu ermitteln, der zwar seiner ganzen Länge nach gestützt ist, so jedoch, daß die Stützen selbst unter einer Belastung nachgeben. Ähnliche Fälle kommen zwar auch sonst noch bei den Anwendungen der Mechanik öfters vor; wir wollen aber, um eine deutliche Vorstellung von dem Gegenstande der Untersuchung zu gewinnen, hier zunächst immer nur an die Formänderungen und die Beanspruchungen denken, die eine gewöhnliche Eisenbahnquerschwelle erfährt, wenn die beiden auf ihr befestigten Schienen einen gegebenen Druck auf sie übertragen.

Daß sich die Schwelle etwas einsenkt, wenn ein Eisenbahnzug über das Gleis fährt, lehrt schon eine einfache Beobachtung, die man bei jedem Spaziergange längs einer von einem Zuge befahrenen Eisenbahnstrecke machen kann. Man nimmt dabei zunächst wahr, daß die Schiene selbst sich senkt. Dies kommt zum Teil daher, daß die Schwelle der Quere nach zusammengedrückt wird; indessen nur zum kleineren Teile, denn beim Nachrechnen erkennt man, daß die elastische Verkürzung der Schwellenhöhe nicht ausreichen kann, um die mit bloßem Auge sehr deutlich wahrnehmbare Senkung der auf ihr ruhenden Schiene zu erklären. Die Schwelle muß sich daher tiefer in die Kiesbettung des Eisenbahnkörpers eindrücken und zwar muß die Formänderung des Bettungskörpers eine ziemlich vollkommen elastische sein, da die Schwelle nach der Entlastung jedesmal in ihre frühere Lage zurückkehrt. Man wird im Zusammenhange mit dieser Beobachtung auch zu der Frage geführt, nach welchem Gesetze sich die Last der Länge nach auf die Kiesbettung verteilt und sieht sofort ein, daß eine Beantwortung der Frage nur auf Grund einer näheren Untersuchung der eintretenden elastischen Formänderungen sowohl der Schwelle als des Bettungskörpers möglich ist. Natürlich hängt diese Lastverteilung auch davon ab, auf welche Art die Schwelle schon im unbelasteten Zustande eingebettet ist; wenn irgendwo eine Lücke oder eine lockere Stelle in der Kiesbettung vorkäme, könnte an dieser Stelle überhaupt keine Lastübertragung stattfinden. Wir setzen aber als selbstverständlich voraus, daß die Schwelle überall gut unterstopft sei, so daß sie satt auf dem Kies- oder Schotterbette aufruht und daß also in dieser Hinsicht der ganzen Schwellenlänge nach die Vorbedingungen überall die gleichen sind.

Auf den ersten Blick mag es befremdlich erscheinen, daß ein Körper von der Art eines Sand- oder Kieshaufens imstande sein könne, ziemlich vollkommen elastische Formänderungen auszuführen. Aber auch andere Erfahrungen bestätigen den Schluß, den wir aus der Beobachtung an dem Eisenbahngleise gezogen haben. In der Tat weiß man ja, daß ein in solcher Weise zusammengesetzter Erdboden Schallschwingungen fortzupflanzen vermag, daß er also elastische Bewegungen — solche sind die Schallbewegungen — ausführen kann. Ich habe mich aber auch noch durch einen unmittelbaren Versuch von der Elastizität des gewöhnlichen Erdbodens überzeugt. Dazu ließ ich in dem Hofe meines Laboratoriums zwei Pfähle einrammen, die 3 m voneinander entfernt sind und eine Eisenschiene tragen, die etwa 70 cm über dem Boden liegt. Unterhalb der Schiene wurden kleine Holzpflöcke eingeschlagen, die fest im Boden sitzen und dessen Bewegungen mitmachen. Es handelt sich nun darum, die Verschiebungen dieser Holzpflöcke gegen die darüber in fester Lage verharrende Eisenschiene zu messen. Zu diesem Zwecke wurde ein Spiegelgerät an der Schiene befestigt und von dem Holzpflocke aus wurde eine Stange in die Höhe geführt, deren unteres Ende sich um Spitzen in einer Messingfassung drehen konnte, die an dem Holzpflocke befestigt war, während das passend zugeschnittene obere Ende auf dem Umfange des Hartgummiröllchens des Spiegelgeräts aufruhte; für einen angemessenen Druck an der Auflagerstelle sorgte ein kleines Übergewicht. Eine Verschiebung des Holzpflocks nach abwärts verrät sich nun durch eine Drehung des Spiegels, die mit einem Fernrohre beobachtet wird. Bei meinen Versuchen entsprach eine Verschiebung des Maßstabbildes im Spiegel gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs um einen Teilstrich einer Senkung des Holzpflocks um 0,835 μ oder tausendstel Millimeter, und auf Zehntel mm der Maßstabteilung konnte bei der Ablesung geschätzt werden. Man las also die Bodensenkung, die der Holzpflock mitmachte, im Fernrohre in rund 1200-facher Vergrößerung am Maßstabe ab und die Genauigkeit der Messung stellte sich auf etwa 0,1 μ.

Nun brachte man eine Last von 100 kg in verschiedenen Entfernungen von der Stelle auf, an der die Einsenkung gemessen wurde. Dabei ergaben sich die nachstehenden zusammengehörigen Werte:

Entfernung in cm	= 20	40	60	80
Senkung in $\frac{1}{1000}$ mm (oder μ)	= 14,2	4,2	1,4	0,7.

Für 50 kg Belastung betrug die Einsenkung in 20 cm Entfernung 7,3 μ, so daß die Formänderung der Last ziemlich genau proportional zu sein scheint. Trotzdem ist, wie sich im 5. Bande zeigen wird, die Formänderung sehr wesentlich von jener verschieden, die ein dem Superpositionsgesetze unterworfener, vollkommen elastischer Körper erfahren müßte.

Bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues hat man sich indessen durch eine weit einfachere Annahme geholfen, die für die Ableitung ungefähr richtiger Resultate hinreichend genau zu sein scheint. Man nimmt nämlich an, daß die Einsenkung der Bettung unter dem Drucke der Schwelle an jeder Stelle nur dem gerade dort wirkenden Drucke proportional sei. Genau richtig ist dies natürlich keineswegs; man sieht aber aus den vorher mitgeteilten Zahlen, wie schnell die Einsenkung mit der Entfernung von der Angriffsstelle der Belastung abnimmt. In der Tat wird also die Tiefe der Einsenkung in erster Linie von den in der nächsten Nachbarschaft übertragenen Druckkräften abhängen und nur wenig von den weiter entfernten beeinflußt sein, so daß eine Rechnung, die sich auf die Annahme stützt, daß Druck und Einsenkung überall in gleichem Verhältnisse zueinander ständen, nicht viel von der Wahrheit abweichen kann.

§ 45. Die Eisenbahnquerschwelle mit konstantem Querschnitte.

Der auf die Längeneinheit von der Schwelle auf die Bettung übertragene Druck sei mit p, der Druck für das Längenelement dx der Schwelle also mit $p\,dx$ bezeichnet. Für einen Querschnitt im Abstande x vom linken Ende der Schwelle hat man, falls x kleiner als a ist, für die Scherkraft V den Ausdruck

$$V = \int_0^x p\,du,$$

wenn u hier ebenfalls eine Abszisse ist, die man von 0 bis x wachsen läßt.

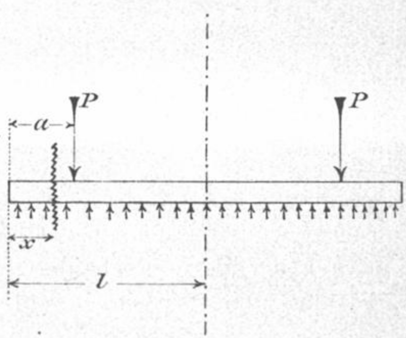

Abb. 56.

Daraus folgt durch Differentiation nach x oder auch schon auf Grund einer einfachen Überlegung über die Bedeutung von p

$$\frac{dV}{dx} = p. \tag{135}$$

Schon früher fanden wir, daß die Scherkraft V als Differentialquotient des Biegungsmomentes M angesehen werden kann (Gl. 70) und wir finden daher auch

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p. \tag{136}$$

Die Biegungsmomente bedingen, daß sich die Mittellinie des Stabes krümmt. Bezeichnen wir die Einsenkung, die ein Punkt der Mittellinie bei der Abszisse x erfährt, mit y, so ist $y = f(x)$ die Gleichung der elastischen Linie des Stabes. Die Einsenkungen y sind also einerseits an den Zusammenhang mit den Biegungsmomenten gebunden, der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie ausgesprochen wird, und andererseits sind sie nach unserer grundlegenden Annahme der unbekannten Funktion p proportional. Der Vergleich beider Beziehungen miteinander führt zur Lösung der Aufgabe.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 76)

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

liefert, wenn man sie zweimal nach x differentiiert, mit Rücksicht auf Gl. (136)

$$E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = -p. \tag{137}$$

Die von uns gewählte Annahme über den Zusammenhang zwischen der elastischen Einsenkung y und dem Drucke p für die Längeneinheit der Schwelle kann in der Gleichung

$$p = ky \tag{138}$$

ausgesprochen werden, in der k eine von den elastischen Eigenschaften der Bettung abhängige Konstante ist, die wir als die „Bettungsziffer" bezeichnen wollen. Gl. (137) geht damit über in

$$E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = -ky. \tag{139}$$

Man kennt die allgemeine, also mit vier willkürlichen Konstanten behaftete Lösung dieser Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie lautet:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x + C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x + C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x \\ + C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x, \tag{140}$$

worin die C die willkürlichen Konstanten sind, während mit α zur Abkürzung der Absolutbetrag von

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4E\Theta}} \tag{141}$$

bezeichnet ist. Daß die Lösung die Differentialgleichung (139) befriedigt, erkennt man durch Einsetzen in diese Gleichung, und daß sie zugleich die allgemeinste Lösung ist, folgt daraus, daß sie vier unbestimmte Konstanten enthält.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Konstanten mit Hilfe der Grenzbedingungen, die bei der Aufgabe vorgeschrieben sind, zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß die ganze elastische Linie der Schwelle in drei gesonderte Äste zerfällt, von denen der erste von 0 bis a reicht, der zweite zwischen die beiden Schienen fällt und der dritte das über die rechte

Schiene hinausragende Stück der Schwelle umfaßt. Der Symmetrie wegen genügt es indessen, wenn wir hier nur den ersten Ast und die bis zur Symmmetrieachse reichende Hälfte des zweiten Astes ins Auge fassen.

Für alle Äste gilt im allgemeinen die Lösung (140); die Konstanten C sind aber den verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechend bei den einzelnen Ästen verschieden. Wir haben also hier im ganzen acht bisher unbestimmt gebliebene Konstanten den Grenzbedingungen entsprechend zu wählen. Dazu stehen uns auch in der Tat acht Bedingungsgleichungen zur Verfügung. Zunächst wissen wir, daß für $x = 0$ sowohl M als V verschwinden. Mit M ist aber überall $\frac{d^2y}{dx^2}$ und mit V ist $\frac{d^3y}{dx^3}$ proportional; beide Differentialquotienten sind also für $x = 0$ gleich Null zu setzen. Der besseren Übersicht wegen stelle ich hier die drei ersten Differentialquotienten von y nach Gl. (140) zusammen. Man findet:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \alpha\{ & C_1(e^{\alpha x}\cos\alpha x - e^{\alpha x}\sin\alpha x) + C_2(e^{\alpha x}\sin\alpha x + e^{\alpha x}\cos\alpha x)\\ & + C_3(-e^{-\alpha x}\cos\alpha x - e^{-\alpha x}\sin\alpha x)\\ & + C_4(-e^{-\alpha x}\sin\alpha x + e^{-\alpha x}\cos\alpha x)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2\{ & -2C_1e^{\alpha x}\sin\alpha x + 2C_2e^{\alpha x}\cos\alpha x + 2C_3e^{-\alpha x}\sin\alpha x\\ & -2C_4e^{-\alpha x}\cos\alpha x\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3\{ & -2C_1(e^{\alpha x}\sin\alpha x + e^{\alpha x}\cos\alpha x)\\ & + 2C_2(e^{\alpha x}\cos\alpha x - e^{\alpha x}\sin\alpha x)\\ & + 2C_3(-e^{-\alpha x}\sin\alpha x + e^{-\alpha x}\cos\alpha x)\\ & + 2C_4(e^{-\alpha x}\cos\alpha x + e^{-\alpha x}\sin\alpha x)\}.\end{aligned}$$

Die Bedingung, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = 0$ verschwinden soll, liefert daher die Gleichung

$$C_4 = C_2 \tag{142}$$

und aus $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ für $x = 0$ folgt

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4. \tag{143}$$

Zur Abkürzung führen wir ferner die Bezeichnungen ein

$$e^{\alpha a}\cos\alpha a = m_1;\quad e^{\alpha a}\sin\alpha a = m_2;\quad e^{-\alpha a}\cos\alpha a = m_3;$$
$$e^{-\alpha a}\sin\alpha a = m_4$$

und die vier Konstanten, die in der Gleichung des zweiten Astes der elastischen Linie auftreten, werden der Reihe nach C_5 bis C_8 geschrieben. Nun müssen sich beide Äste so aneinander schließen, daß sie für $x = a$ gleiches y und auch gleiches $\frac{dy}{dx}$ geben, denn ein Knick der elastischen Linie kann an dieser Stelle nicht auftreten. Aber auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ muß an der Anschlußstelle für beide Äste gleich sein, da sich das Biegungsmoment M nicht sprungweise ändert. Damit erhalten wir die drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 + C_4 m_4 = C_5 m_1 + C_6 m_2 + C_7 m_3 \\ \qquad + C_8 m_4, \\ C_1(m_1 - m_2) + C_2(m_1 + m_2) - C_3(m_3 + m_4) \\ \qquad + C_4(m_3 - m_4) = C_5(m_1 - m_2) + C_6(m_1 + m_2) \\ \qquad - C_7(m_3 + m_4) + C_8(m_3 - m_4), \\ -C_1 m_2 + C_2 m_1 + C_3 m_4 - C_4 m_3 = -C_5 m_2 \\ \qquad + C_6 m_1 + C_7 m_4 - C_8 m_3. \end{array}\right\} \tag{144}$$

Der dritte Differentialquotient von y ist dagegen an der Anschlußstelle für beide Äste von verschiedener Größe, denn man hat

$$V = \frac{dM}{dx} = -E\Theta\frac{d^3y}{dx^3}$$

und die Scherkraft V erleidet an der Übergangsstelle eine plötzliche Änderung um den Betrag $-P$. Wenn man also für den Augenblick die Ordinate des ersten Astes mit y_{I}, die des zweiten mit y_{II} bezeichnet, so besteht an der Übergangsstelle die Beziehung

$$\left[\frac{d^3y_{\mathrm{II}}}{dx^3} - \frac{d^3y_{\mathrm{I}}}{dx^3}\right]_{x=a} = \frac{P}{E\Theta}$$

oder, wenn man die Werte der Differentialquotienten einsetzt,

$$(C_1 - C_5)(m_1 + m_2) + (C_6 - C_2)(m_1 - m_2) + (C_7 - C_3)(m_3 - m_4) \\ + (C_8 - C_4)(m_3 + m_4) = \frac{P}{2\alpha^3 E\Theta}. \qquad (145)$$

Endlich seien die Werte, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken für $m_1, m_2, \ldots$ die Abszisse a durch die Abszisse l (entsprechend der Schwellenmitte) ersetzt, mit n_1, n_2 usf. bezeichnet. In der Symmetrieachse muß zunächst $\frac{dy}{dx} = 0$ werden, ferner aber auch $\frac{d^3y}{dx^3}$, weil hier $V = 0$ ist. Man hat also noch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_5(n_1 - n_2) + C_6(n_1 + n_2) - C_7(n_3 + n_4) + C_8(n_3 - n_4) = 0 \\ - C_5(n_1 + n_2) + C_6(n_1 - n_2) + C_7(n_3 - n_4) + C_8(n_3 + n_4) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (146)$$

Alle in den acht Bedingungsgleichungen (142) bis (146) vorkommenden Größen sind bis auf die Unbekannten C in einem konkreten Falle numerisch gegebene Werte; man kann daher diese Gleichungen ersten Grades ohne weiteres nach den acht Unbekannten auflösen und kennt dann nach Gl. (140) die Gestalt der beiden Äste der elastischen Linie. Auch das Gesetz der Druckverteilung ist damit nach Gl. (138) gegeben.

§ 46. Lösung der vorigen Aufgabe auf graphischem Wege.

An Stelle der durch Gl. (137) oder Gl. (139) ausgesprochenen Bedingung kann man das Gesetz, dem die elastische Linie der Schwelle unterworfen ist, auch geometrisch zum Ausdrucke bringen. Die elastische Linie eines vorher geraden Stabes kann nämlich, wie in der graphischen Statik gezeigt wird, als ein zweites Seilpolygon gefunden werden, das zu der gegebenen Belastungsfläche gehört. Die durch jene Differentialgleichungen zum Ausdrucke gebrachte Bedingung kommt dann darauf hinaus, daß das zweite Seilpolygon und die Belastungsfläche verhältnisgleiche Ordinaten haben müssen. Geometrisch gesprochen handelt es sich also um die Lösung der Aufgabe, eine solche Gestalt der Belastungsfläche (also der Funktion p) ausfindig zu machen, die bei passender Wahl des Maßstabes mit ihrem eigenen zweiten Seilpolygon zusammenfällt.

Wenn man nun auch keine direkte Methode für die graphische Lösung dieser Aufgabe angeben kann, so kann sie doch sehr leicht auf indirektem Wege, nämlich durch Probieren (nach der „regula falsi") gefunden werden. Man sucht sich nämlich zunächst ein ungefähres Bild von der zu erwartenden Druckverteilung zu verschaffen. Dazu reicht schon aus, daß der Druck unterhalb der Schiene jedenfalls am größten sein wird, und daß er von da aus sowohl nach der Schwellenmitte als nach außen hin allmählich abnimmt. Dementsprechend zeichnet man zur Probe eine Belastungsfläche (d. h. eine graphische Darstellung der Druckverteilung p) hin, die sonst ganz willkürlich gewählt werden darf. Dann probiert man, ob man mit dieser Vermutung das Rechte getroffen hat, d. h. man konstruiert das zweite Seilpolygon dazu und trägt dessen Schlußlinie horizontal in solcher Höhe ein, daß der Flächeninhalt mit dem der Belastungsfläche übereinstimmt. Im allgemeinen wird man zunächst eine starke Abweichung in der Gestalt beider Kurven finden. Dann ändert man die zuerst gezeichnete Belastungsfläche so ab, daß sich die Lastverteilung jetzt mehr der Gestalt der gefundenen elastischen Linie nähert und wiederholt das Verfahren für diese zweite Annahme. Die Übereinstimmung zwischen Belastungsfläche und zugehöriger elastischer Linie wird jetzt besser werden und nach mehrmaliger Wiederholung findet man mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Druckverteilung.

Dieses graphische Verfahren hat den Vorteil, daß es auch dann noch bequem anwendbar bleibt, wenn der Querschnitt nicht konstant ist (z. B. bei eisernen Querschwellen), da man auch für diesen Fall die Gestalt der zu einer angenommenen Belastungsfläche gehörigen elastischen Linie ohne Schwierigkeit auf graphischem Wege ermitteln kann. — Eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Ästen der elastischen Linie braucht hier natürlich nicht gemacht zu werden, da es bei dem graphischen Verfahren ganz gleichgültig ist, wenn irgendwo ein Sprung in dem Werte des dritten Differentialquotienten von y auftritt.

§ 47. Aufgaben ähnlicher Art.

An den Bedingungen, denen der Stab unterworfen ist, wird nicht viel geändert, wenn er nicht gleichmäßig seiner ganzen Länge nach, sondern in einzelnen Punkten unterstützt ist, die in kleinen, unter sich gleichen Abständen aufeinanderfolgen. Voraussetzung ist nur, daß jede dieser Stützen unter demselben Drucke um gleichviel nachgibt. Solche Fälle kommen öfters vor. Man denke sich z. B. eine Brückenkonstruktion, die aus einer Anzahl ziemlich dicht nebeneinander liegender Hauptträger gebildet wird, auf die sich die der ganzen Brückenbreite nach durchlaufenden Querträger stützen. Die Verteilung des Druckes vom Querträger, wenn dieser irgendeine

Einzellast (oder auch mehrere) trägt, auf die einzelnen Hauptträger befolgt dann ungefähr dasselbe Gesetz, das durch die in § 45 gegebene Lösung dargestellt wird.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 57 angegeben. Durch einen Holzbalken ist ein Loch gebohrt, durch das ein Schraubenbolzen gut passend gesteckt ist. Außen greifen zwei Eisenlaschen an, die durch den Bolzen mit dem Balken verbunden sind und die durch dessen Vermittlung eine Belastung auf den Balken übertragen. Unter dem Einflusse der Belastung biegt sich der Bolzen etwas; dieser Biegung widersetzt sich das Holz, und es tritt nun ein Druck des Holzes gegen den Bolzen auf, der in der Mitte nach abwärts und an den Seiten nach aufwärts gerichtet ist. Man kann auch hier näherungsweise den Druck proportional der Zusammendrückung setzen, die das Holz an der betreffenden Stelle erfährt. Von dem Falle der Eisenbahnschwelle in der Bettung weicht der hier vorliegende nur insofern ab, als dort nur Druckkräfte in einer Richtung, hier aber auch solche in der entgegengesetzten Richtung übertragen werden können. Gl. (140) gibt aber auch in diesem Falle ohne weiteres die allgemeine Gestalt der elastischen Linie und damit das allgemeine Gesetz der Druckübertragung an. Die Konstanten C bestimmen sich aus den Bedingungen, daß an beiden Enden $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null und $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P}{E\Theta}$ bzw. gleich $-\frac{P}{E\Theta}$ werden muß.

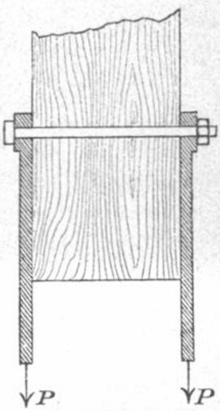

Abb. 57.

Wenn auf einen Mauerkörper an einer Stelle eine größere Last, z. B. der Auflagerdruck eines Brückenträgers übertragen werden soll, muß man die zunächst ziemlich konzentriert auftretende Belastung mit Hilfe einer großen Eisenplatte über eine Mauerwerksfläche verteilen, die so groß ist, daß die Festigkeit der Steine nirgends überschritten wird. Auch zur Abschätzung des Druckverteilungsgesetzes in diesem Falle geben die vorausgehenden Betrachtungen einen Anhaltspunkt. Man möchte in diesem Falle eine möglichst gleichmäßige Druckverteilung herbeiführen. Dazu gehört natürlich in erster Linie eine möglichst genaue, satte Auflagerung der Platte, also die Erfüllung der Voraussetzung, von der die hier durchgeführten Betrachtungen ausgingen. Außerdem wird man aber die Druckverteilung um so mehr der gleichförmigen nähern können, je stärker man das Trägheitsmoment des Querschnitts der Platte namentlich nach der

Mitte hin wählt. Ein Fall dieser Art wird in einer der folgenden Aufgaben behandelt.

Aufgaben.

35. Aufgabe. Eine Schiene, die hinreichend lang ist, um sie als unendlich lang betrachten zu können, ist ihrer ganzen Länge nach satt auf den Erdboden aufgelegt und wird in der Mitte durch eine Einzellast P belastet. Nach welchem Gesetze verteilt sich der Druck auf den Boden?

Lösung. Wir legen hier besser das Koordinatensystem so, daß die Abszissen x von der belasteten Stelle aus nach rechts hin zählen. Dadurch wird an der Gültigkeit der Gl. (135) und (136) und der daraus folgenden nichts geändert. Folglich bleibt auch Gl. (140) unmittelbar anwendbar und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Grenzbedingungen. Für $x = \infty$ muß y verschwinden, daher müssen die Konstanten C_1 und C_2 hier gleich Null gesetzt werden. Für $x = 0$ wird ferner der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus folgt $C_3 = C_4$. Zunächst bleibt also die Gleichung der Kurve

$$y = C_3 e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

und für die Druckverteilung hat man nach Gl. (138)

$$p = k C_3 e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Das Gesetz, nach dem sich der Druck der Länge nach verteilt, ist hiermit schon gegeben. Man erkennt zunächst, daß p auch negativ wird, nämlich sobald x bis über den Wert

$$x = \frac{3\pi}{4\alpha}$$

angewachsen ist und weiterhin wieder. An der Stelle $x = \frac{3\pi}{4\alpha}$ ist der Faktor $e^{-\alpha x}$ auf 0,094 des Wertes 1 an der Stelle $x = 0$ gesunken und er nimmt dann weiterhin schnell ab. Wir wollen annehmen, daß das Gewicht der Schiene hinreiche, um an den Stellen, wo p nach der Formel negativ wird, ein Abheben der Schiene von dem Boden zu verhindern oder auch, daß die Schiene an dem Boden befestigt ist. Wir können dann die vorher abgeleitete Gleichung überall als gültig betrachten. Der unbekannte konstante Faktor kC_3, der noch darin vorkommt, hat die Bedeutung des Druckes p_0 an der Stelle $x = 0$. Um diesen zu ermitteln, beachten wir, daß

$$\int_0^\infty p\,dx = \frac{P}{2}$$

sein muß. Die andere Hälfte der Last P kommt nämlich auf die nach links gelegene Schienenhälfte. Setzt man p in diese Gleichung ein und integriert, so wird

$$\int_0^\infty p\,dx = p_0\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos\alpha x + \sin\alpha x)dx = p_0\Big[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos\alpha x\Big]_0^\infty = \frac{p_0}{\alpha}.$$

Demnach wird

$$p_0 = \frac{\alpha P}{2},$$

während α durch Gl. (141) bestimmt ist. Damit kennt man den Druck an jeder Stelle, vorausgesetzt, daß die Bettungsziffer k, das Trägheitsmoment des Schienenquerschnitts, der Elastizitätsmodul E und die Last P gegeben sind.

36. Aufgabe. Eine Stange aus Flußeisen von 80 cm Länge und quadratischem Querschnitte von 6 cm Seite liegt satt auf dem Erdboden auf und trägt in der Mitte eine Last von 1000 kg. Wie groß ist der Druck, den die Stange in der Mitte und an den Enden auf den Erdboden ausübt und wie groß ist die Beanspruchung des Eisens, wenn der Boden unter einer Belastung von 1 kg auf 1 qcm eine elastische Einsenkung von 0,25 mm erfährt?

Lösung. Für den linken Ast der elastischen Linie benutzen wir wieder Gl. (140); den Ursprung des Koordinatensystems lassen wir mit dem linken Ende der Stange zusammenfallen. Wir können dann ohne weiteres die in den Gl. (142) und (143) ausgesprochenen Grenzbedingungen benutzen. Dazu kommt, daß für $x = a = 40$ cm der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muß. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$C_1(m_1 - m_2) + C_2(m_1 + m_2) - C_3(m_3 + m_4) + C_4(m_3 - m_4) = 0.$$

Hiermit lassen sich die übrigen Konstanten in einer davon ausdrücken. Um dies auch numerisch sofort ausführen zu können, berechnen wir zunächst α nach Gl. (141). Man hat hier

$$\Theta = \frac{bh^3}{12} = \frac{6^4}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

und für Flußeisen setzen wir $E = 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Die Konstante k ist durch Gl. (138) eingeführt; ihre Dimension ist die einer spezifischen Spannung. Denken wir uns auf 1 cm Länge der Stange einen Druck von 1 kg/cm² übertragen, so wird $p = \frac{6\text{ kg}}{\text{cm}}$ und die zugehörige Einsenkung y nach den Angaben der Aufgabe gleich 0,25 mm, daher ist $k = \frac{p}{y} = 240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Für α hat man daher

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{4 \cdot 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 108 \text{ cm}^4}} = 0{,}0224 \text{ cm}^{-1}.$$

Für αa ergibt sich hieraus $\alpha a = 0{,}896$, ferner

$$e^{\alpha a} = 2{,}450, \quad e^{-\alpha a} = 0{,}408, \quad \cos \alpha a = 0{,}625, \quad \sin \alpha a = 0{,}781$$

und daher auch

$$m_1 = 1{,}530, \quad m_2 = 1{,}912, \quad m_3 = 0{,}255, \quad m_4 = 0{,}319.$$

Die Gleichungen zwischen den Konstanten C lauten also jetzt

$$C_2 = C_4; \qquad C_1 = C_3 + 2\,C_4;$$

$$-\,0{,}382\, C_1 + 3{,}442\, C_2 - 0{,}574\, C_3 - 0{,}064\, C_4 = 0,$$

aus denen folgt:

$$C_1 = 4{,}73\, C_4; \qquad C_2 = C_4; \qquad C_3 = 2{,}73\, C_4.$$

Die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher jetzt

$$y = C_4 \{ 4{,}73\, e^{\alpha x} \cos \alpha x + e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2{,}73\, e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x \}$$

und für den auf die Längeneinheit bezogenen Druck p hat man

$$p = k C_4 \{ 4{,}73\, e^{\alpha x} \cos \alpha x + e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2{,}73\, e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x \}.$$

Die Bedeutung des konstanten Faktors $k C_4$ vor der Klammer folgt daraus sofort: für $x = 0$ nimmt der Ausdruck in der Klammer den Wert 7,46 an, man hat also

$$k C_4 = \frac{p_0}{7{,}46}.$$

Für $x = a$, also für die Mitte des Stabes, sei der Druck p mit p_a bezeichnet. Die Formel liefert dafür

$$p_a = \frac{p_0}{7{,}46} \{ 4{,}73\, m_1 + m_2 + 2{,}73\, m_3 + m_4 \}$$

oder nach Einsetzen der für die m gefundenen Werte

$$p_a = 1{,}36\, p_0.$$

Damit ist zunächst ermittelt, in welchem Verhältnisse der Druck p von der Mitte aus nach den Enden des Stabes hin abnimmt. Um die absoluten Beträge zu finden, machen wir, wie bei der vorigen Aufgabe von der Bedingung Gebrauch, daß die Summe aller Druckkräfte auf den Erdboden gleich der Last von 1000 kg sein muß. Dazu wäre es vollständig ausreichend, das Druckverteilungsgesetz weiterhin durch ein anderes, etwa durch ein parabolisches zu ersetzen, das mit dem gefundenen in dem Verhältnisse $\frac{p_a}{p_0}$ übereinstimmt, da es sich ja nur um eine Näherungsrechnung handelt. Es steht aber auch nichts im Wege, die Integrationen an dem Ausdrucke für p unmittelbar auszuführen. Man findet

$$\alpha\int_0^a e^{\alpha x}\cos\alpha x\,dx = 1{,}222; \qquad \alpha\int_0^a e^{\alpha x}\sin\alpha x\,dx = 0{,}691;$$

$$\alpha\int_0^a e^{-\alpha x}\cos\alpha x\,dx = 0{,}532; \qquad \alpha\int_0^a e^{-\alpha x}\sin\alpha x\,dx = 0{,}213.$$

Hiermit wird aber

$$\int_0^a p\,dx = \frac{p_0}{7{,}46}\cdot\frac{4{,}73\cdot 1{,}222 + 0{,}691 + 2{,}73\cdot 0{,}532 + 0{,}213}{0{,}0224} = 48{,}7\,p_0.$$

Als Längeneinheit gilt hier 1 cm, denn α ist in dieser Einheit ausgedrückt. Das Doppelte des berechneten Integrals ist gleich 1000 kg, daraus folgt

$$p_0 = \frac{1000}{97{,}4} = 10{,}3\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad\text{und}\quad p_a = 14{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Hätte man das parabolische Verteilungsgesetz angenommen, also

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}\,(2ax - x^2)$$

gesetzt, so hätte sich ergeben

$$\int_0^a p\,dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3}\cdot a = 49{,}6\,p_0,$$

also nicht viel mehr wie bei der genaueren Rechnung. Wir wollen daher das parabolische Verteilungsgesetz bei der Berechnung des Biegungsmoments M_a in der Mitte zugrunde legen. Man findet dann

$$M_a = \int_0^a (a-x)p\,dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3}\,a^2 - \frac{5p_a + p_0}{12}\,a^2 = \frac{p_a + p_0}{4}\,a^2$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$M_a = 9560 \text{ cm kg}$$

und hiermit die Beanspruchung des Materials

$$\sigma = \frac{6\,M_a}{b h^2} = \frac{6 \cdot 9560}{6^3} = 266 \text{ atm.}$$

Übrigens hätte M_a ohne Schwierigkeit auch mit Hilfe der Beziehung

$$M_a = -\,E\Theta \left[\frac{d^2 y}{d x^2}\right]_{x=a}$$

ermittelt werden können.

37. Aufgabe. Ein Stab von der Länge $2a$ liegt satt auf dem Boden auf und wird in der Mitte mit P belastet. Der Querschnitt ist ein Rechteck von überall gleicher Breite, dessen Höhe aber nach der Mitte zu in solcher Art anwachsen soll, daß das Trägheitsmoment überall proportional dem Biegungsmomente M ist. Man soll das Gesetz der Druckverteilung ermitteln und angeben, wie die Querschnittshöhe nach der Mitte hin anwachsen muß, damit die Bedingung der Aufgabe erfüllt wird.

Lösung. Die Gleichung der elastischen Linie läßt sich hier in der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\,\frac{M}{E\Theta} = -\,c$$

anschreiben, in der c eine Konstante ist, die unbestimmt bleiben muß, weil keine Angabe über den Proportionalitätsfaktor von M und Θ gemacht ist. Durch Integration folgt

$$y = -\,c\,\frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2.$$

Für $x = a$ muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein und daraus folgt $K_1 = ca$. Man findet also

$$p = k y = k K_2 + \frac{ck}{2}\,(2ax - x^2).$$

Das Druckverteilungsgesetz ist also hier genau parabolisch; für den Druck am Ende und in der Mitte hat man

$$p_0 = k K_2; \quad p_a = k K_2 + \frac{c k a^2}{2}$$

und daher auch

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}\,(2ax - x^2),$$

wie bei der vorigen Aufgabe; daher ist auch wie dort

$$\frac{p_0 + 2 p_a}{3}\,a = \frac{P}{2}$$

und hieraus folgt

$$p_0 = \frac{P}{2a} - \frac{cka^2}{3}; \quad K_2 = \frac{P}{2ak} - \frac{ca^2}{3}.$$

Wenn c und k gegeben sind, kennt man hiermit die genaue Gestalt der elastischen Linie. Für das Biegungsmoment im Abstande x vom Ende folgt:

$$M = \int_0^x (x-u)p\,du = \frac{p_0 x^2}{2} + (p_a - p_0)\frac{4ax^3 - x^4}{12a^2}$$

und hieraus Θ mit Hilfe der Beziehung $\Theta = \frac{M}{Ec}\cdot$ Mit Θ ist auch die Höhe des Querschnitts als Funktion von x bestimmt.