Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Fünfter Abschnitt. Stäbe mit gekrümmter Mittellinie

urn:nbn:at:at-ubi:2-7796

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

§ 36. Die ebene Biegung von schwach gekrümmten Stäben.

Ein Stab, dessen Krümmungshalbmesser im spannungslosen Zustande weit größer ist, als die in die Biegungsebene fallende Querschnittshöhe, verhält sich bei der Biegung ganz ähnlich wie ein ursprünglich gerader Stab. Für einen solchen „schwach gekrümmten“ Stab wollen wir zunächst berechnen, in welchen Wert ϱ' der Krümmungshalbmesser ϱ an einer bestimmten Stelle übergeht, wenn für diese Stelle das Biegungsmoment M, die achsiale Belastung N und die Schubkraft gegeben sind. Dabei wird der Fall der ebenen Biegung vorausgesetzt, d. h. die Mittellinie des Stabes soll vor der Formänderung eine ebene Kurve gewesen sein, in deren Ebene alle an dem Stabe angreifenden äußeren Kräfte enthalten sind und jeder Querschnitt soll von dieser Ebene nach einer Querschnittshauptachse geschnitten werden. Dann bleibt die Mittellinie jedenfalls auch nach der Biegung noch eine ebene Kurve.

Die Schubkraft hatte schon beim geraden Stabe nur geringen Einfluß auf die Formänderung. Beim gekrümmten Stabe ist dieser Einfluß in der Regel noch viel geringer, weil bei den gewöhnlichen Anwendungsarten des „Bogenträgers“ die Schubkraft an sich viel kleiner bleibt, als bei einem Balken unter sonst ähnlichen Bedingungen. Es ist daher fast ausnahmslos zulässig, den Einfluß der Schubkraft auf die Formänderung zu vernachlässigen.

Eine gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Normalspannung wird den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten etwas ändern; der Krümmungshalbmesser wird aber davon nicht berührt. Denn jede Faser des Stabelementes verkürzt oder verlängert sich proportional zu ihrer ursprünglichen Länge und nach der Formänderung schneiden sich die beiden aufeinander folgenden Querschnitte daher immer noch an derselben Stelle wie vorher (vgl. Abb. 43). Übrigens ist auch die elastische Winkeländerung $\Delta d\varphi$ immer nur sehr klein im Verhältnisse zur ursprünglichen Größe $d\varphi$ des Winkels, denn man hat dafür

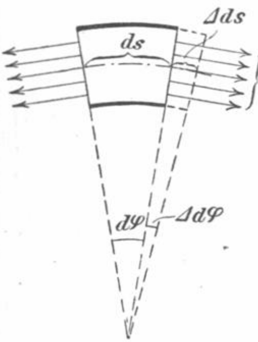

Abb. 43.

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E}, \tag{110}$$

wobei Δds die elastische Längenänderung irgend einer Faser ds des Balkenelementes bezeichnet. In den praktisch vorkommenden Fällen ist das Verhältnis $\frac{\sigma}{E}$ höchstens etwa gleich $\frac{1}{2000}$, also auch $\Delta d\varphi$ unerheblich gegen $d\varphi$. Die durch die Momente hervorgebrachten Winkeländerungen sind im allgemeinen weit größer.

Bei der Berechnung von ϱ' brauchen wir also nur auf das Biegungsmoment M zu achten und selbst für die Berechnung von $\Delta d\varphi$ genügt dies in den meisten Fällen. Aus den weiteren Entwickelungen wird hervorgehen, in welchen Fällen es nötig ist, auch den Einfluß von N auf $\Delta d\varphi$ zu berücksichtigen.

Wir können jetzt zur Berechnung von ϱ' von dem Kunstgriffe Gebrauch machen, uns den Stab als einen ursprünglich geraden vorzustellen, der durch ein fingiertes Biegungsmoment M_f zuerst zum Krümmungsradius ϱ und dann noch weiter durch das wirklich vorhandene Biegungsmoment M zum Krümmungsradius ϱ' gebogen wurde. Natürlich müssen wir dabei annehmen, daß diese ganze Biegung vorgenommen werden kann, ohne daß die Proportionalitätsgrenze überschritten wird.

Diese Annahme ist indessen nicht bedenklich, so lange nur bei der Verbiegung von ϱ zu ϱ' keine Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze vorkommt und so lange die Längen ds der einzelnen Fasern zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten von vornherein nur wenig voneinander verschieden waren. Denn der Stab muß sich bei der wirklich mit ihm vorgenommenen Biegung dann ebenso verhalten, wie der andere ursprünglich gerade, den wir an seine Stelle setzen wollten und von dem wir immer voraussetzen können, daß die Proportionalitätsgrenze des Materials, aus dem er besteht, entsprechend hoch liegt, um ihn ohne deren Überschreitung sowohl zum Krümmungshalbmesser ϱ als zu ϱ' biegen zu können.

Durch diese Bemerkung wird die Aufgabe der Berechnung von ϱ' auf die in § 27 gelöste zurückgeführt. Die Anwendung von Gl. (75) auf die Belastungszustände M_f und $M_f + M$ liefert

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{E\Theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{M_f + M}{E\Theta}.$$

Durch Elimination der Hilfsgröße M_f aus beiden Gleichungen erhalten wir die gesuchte Beziehung

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}. \tag{111}$$

Auch die durch das Biegungsmoment M bewirkte Verdrehung $\Delta d\varphi$ der beiden Querschnitte gegeneinander folgt auf demselben Wege aus Gl. (74) zu

$$\Delta d\varphi = ds\,\frac{M}{E\Theta}, \tag{112}$$

wenn unter ds der Abstand beider Querschnitte, längs der neutralen Faser gemessen, verstanden wird.

In den Gleichungen (111) und (112) muß man übrigens, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, dem Biegungsmomente M das positive Vorzeichen geben, wenn es in demselben Sinne wirkt, wie M_f, d. h. wenn es die ursprünglich schon vorhandene Krümmung zu vergrößern sucht. Wirkt dagegen ein nach anderen Festsetzungen positiv gerechnetes Biegungsmoment M tatsächlich auf eine Verminderung der Krümmung hin, so muß man bei der Benutzung der vorstehenden Gleichungen vorher auf der rechten Seite noch ein Minuszeichen beisetzen.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie läßt sich hier freilich im allgemeinen nicht mit übernehmen. Nur in einem Falle, nämlich dann, wenn die Stabmittellinie im spannungslosen Zustande einen Kreisbogen bildet, kann man für Formänderungen, die nur unerhebliche Verschiebungen der zur Mittellinie gehörigen Punkte mit sich bringen, eine Gleichung aufstellen, die der Differentialgleichung (76) für den geraden Stab, nämlich

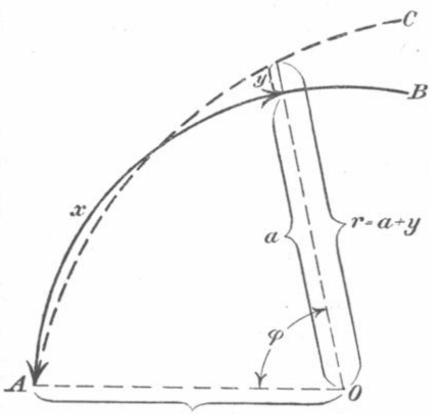

Abb. 44.

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

entspricht und von der man einen ähnlichen Gebrauch machen kann, wie von dieser. — In Abb. 44 sei AB ein Stück der kreisförmigen Stabachse im ursprünglichen Zustande und AC die Gestalt dieses Stückes nach der Formänderung. Wir denken uns die Gleichung der Kurve AC in Polarkoordinaten, also in der Form

$$r = f(\varphi)$$

angegeben. Für den Krümmungshalbmesser der Kurve, der mit ϱ' bezeichnet werden soll, wird in der analytischen Geometrie der Ausdruck

$$\varrho' = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

abgeleitet. Setzt man hier $r = a + y$, beachtet, daß y sehr klein gegen a sein soll und vernachlässigt im Zähler und

Nenner die von der zweiten Ordnung kleinen Glieder, so erhält man zunächst

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{a^2 + 2ay - a\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}}{a^3 + 3a^2y}$$

und hieraus weiter

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{a} = \frac{-y - \dfrac{d^2y}{d\varphi^2}}{a^2 + 3ay}.$$

Im Nenner kann nachträglich auch noch das von der ersten Ordnung kleine Glied $3ay$ gegen a^2 gestrichen werden. Mit Rücksicht auf Gl. (111) erhält man daher

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y\right) = \pm\, a^2 M. \tag{113}$$

Die Wahl des oberen oder unteren Vorzeichens auf der rechten Seite kann erst nachträglich auf Grund der Festsetzungen über jene Richtungen, die als positiv gelten sollen, getroffen werden, ganz ähnlich wie schon früher bei der Differentialgleichung der elastischen Linie des geraden Stabes.

Versteht man unter $x = a\varphi$ (vgl. Abb. 44) die Länge des zum Zentriwinkel φ gehörigen Kreisbogens, so läßt sich die vorhergehende Gleichung auch in der Form

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{a^2}\right) = \pm\, M \tag{114}$$

anschreiben, die mit $a = \infty$ sofort in die Gleichung der elastischen Linie des geraden Stabes übergeht. Überhaupt darf das zweite Glied in der Klammer gegen das erste stets vernachlässigt werden, wenn sich die Ausbiegung nur auf einen kleinen Teil des Kreisumfanges erstreckt. Im anderen Falle muß es aber beibehalten werden, weil bei gleichen Werten von dy/dx und d^2y/dx^2 die Ordinaten y um so größer ausfallen, je größer die Abszissen x im Vergleiche zu a werden. Namentlich dann, wenn es sich um die Untersuchung der Formänderung eines in sich zusammenhängenden Ringes handelt, würde die Vernachlässigung des zweiten Gliedes in der Klammer gegen das erste zu einem sehr merklichen Fehler führen.

Wir haben ferner beim schwach gekrümmten Stabe ebensoviel Grund als beim ursprünglich geraden Stabe zu der Vermutung, daß die Spannungsverteilung mindestens näherungsweise dem Geradliniengesetze entspricht und können daher die Formeln für die Spannungen, die durch die äußeren Kräfte hervorgerufen werden, ohne jede Änderung aus den früheren Betrachtungen über die Biegung des geraden Stabes übernehmen.

§ 37. Der Bogen mit zwei Gelenken.

Ein Stab von gekrümmter Mittellinie stütze sich an beiden Enden auf zwei Zapfen, um die er sich frei drehen kann. Man soll die Auflagerkräfte berechnen, die von diesen Zapfen aufgenommen werden, wenn beliebig gegebene Lasten an dem Stabe angreifen. Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt, da jeder Auflagerdruck erst durch zwei Komponenten völlig bestimmt ist, während die Statik starrer Körper nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stellt.

Die Zapfen, auf die sich der Bogen stützt, bezeichnet man als Gelenke; bei der Berechnung treten sie nur als Punkte auf, unter denen man sich die Zapfenmittelpunkte zu denken hat. Der Bogen mit zwei Gelenken kommt in der Praxis namentlich als Brückenträger vor (heute freilich seltener als früher, da man jetzt den Fachwerkträgern vor den vollwandigen Konstruktionen den Vorzug zu geben pflegt). Da er nur auf Grund der Elastizitätstheorie berechnet werden kann, wird er auch häufig als „elastischer Bogenträger“ bezeichnet. Abb. 45 zeigt die übliche Anordnung: beide Gelenke liegen in gleicher Höhe und der Bogen nimmt nur senkrecht gerichtete Lasten auf. Die senkrechten Komponenten beider Auflagerkräfte können in diesem Falle ohne weiteres mit Hilfe von Momentengleichungen für die Gelenke als Momentenpunkte berechnet werden; sie sind ebenso groß als die Auflagerkräfte eines Balkens, der dieselben Lasten trägt. Dazu tritt aber noch die Horizontalkomponente jedes Auflagerdrucks, von der man nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur aussagen kann, daß sie an beiden Gelenken gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sein muß. Die Größe dieser Horizontalkomponente bezeichnet man als den Horizontalschub H des Bogens; dieser bildet die statisch unbestimmte Größe, auf deren Ermittelung es vor allen Dingen ankommt. Denn man sieht ein, daß die Biegungsmomente, die Schub- und die Normalkräfte für alle Querschnitte und daher auch die Spannungen an allen Stellen sofort angegeben werden können, wenn H bekannt ist. Wir können uns daher hier darauf beschränken, die Berechnung von H auseinander zu setzen.

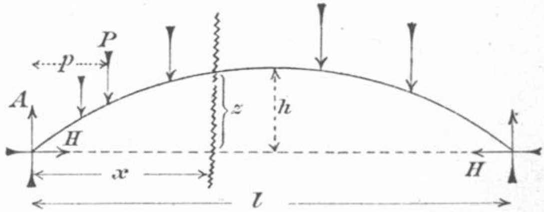

Abb. 45.

Diese Aufgabe soll zunächst auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit gelöst werden. Wenn die zur Abszisse x gehörige Ordinate der Stabmittellinie mit z bezeichnet wird, hat man für das Biegungsmoment im Querschnitte x

$$M = M_b - Hz. \tag{115}$$

Hierbei ist das Biegungsmoment, das ein Balkenträger bei derselben Belastung im Querschnitte x aufzunehmen hätte, zur Abkürzung mit M_b bezeichnet, d. h. M_b ist ein Ausdruck von der Form

$$M_b = Ax - \sum_0^x P(x-p),$$

also bei gegebenen Lasten eine bekannte Größe. Die dem Biegungsmomente M im Bogenelemente entsprechende Formänderungsarbeit kann nach Gl. (87) berechnet werden, wenn man darin dx durch ds ersetzt, denn für die Verdrehung der benachbarten Querschnitte gegeneinander gilt beim Bogen dieselbe Formel wie beim geraden Stabe. Vernachlässigt man neben dieser Formänderungsarbeit die durch die achsiale Belastung N und die durch die Schubkraft hervorgerufene, so wird für den ganzen Bogen

$$A = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds = \tfrac{1}{2}\int \frac{(M_b - Hz)^2}{E\Theta} ds, \tag{116}$$

worin die Integration über die ganze Bogenlänge auszudehnen ist.

Wir bilden den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der statisch unbestimmten Größe H und setzen ihn gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b - Hz}{E\Theta} z\,ds = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds = 0,$$

und durch Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten H finden wir

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \tag{117}$$

Der Elastizitätsmodul E kann fast in allen Fällen, die überhaupt vorkommen, als konstant über die ganze Bogenlänge angesehen werden. Für den besonderen Fall, daß außerdem auch das Trägheitsmoment des Querschnitts überall dieselbe Größe hat, vereinfacht sich Gl. (117) zu

$$H = \frac{\int M_b z\,ds}{\int z^2 ds}. \tag{118}$$

Die Integrale in diesen Formeln können immer ohne Schwierigkeit berechnet werden, sei es durch gewöhnliche Integration, sei es durch eine mechanische Quadratur. Im wesentlichen ist also die Aufgabe hiermit als gelöst zu betrachten.

Wir wollen diese Formeln jetzt auf ein einfaches Beispiel anwenden. Die Bogenmittellinie sei ein Parabelbogen, und die Belastung sei über die ganze Spannweite gleichförmig verteilt, d. h. so, daß zu Bogenabschnitten von gleicher Horizontalprojektion gleiche Lasten gehören. Dieser Fall hat übrigens eine allgemeinere Bedeutung, als es nach dem Wortlaute der Aufstellung scheinen könnte. Jeder flache Bogen von symmetrischer Gestalt kommt nämlich dem Parabelbogen nahe, z. B. auch ein flacher Kreisbogen. Näherungsweise kann daher jeder flache Bogen als ein Parabelbogen aufgefaßt werden, und man macht davon bei solchen Berechnungen mit Vorliebe Gebrauch, weil sich die Ausführung der Rechnung beim Parabelbogen am einfachsten gestaltet.

Bei gleichförmiger Belastung ist das Biegungsmoment M_b eines Balkens im Abstande x vom linken Auflager

$$M_b = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

und die Momentenfläche ist selbst eine Parabel, die bei geeigneter Wahl des Maßstabes, in dem M_b aufgetragen wird, zum Zusammenfallen mit der Bogenmittellinie gebracht werden kann. In der Mitte geht M_b in $\frac{ql^2}{8}$ und z in die Pfeilhöhe h des Bogens über, daher kann auch überall

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{h},$$

gesetzt werden. Führt man dies in Gl (118) ein, so erhält man

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \tag{119}$$

da sich der Nenner gegen den ihm gleichen Faktor des Zählers weghebt.

Mit diesen Werten von M_b und H wird die Formänderungsarbeit A, wie aus Gl. (116) hervorgeht, zu Null. Wenn überhaupt der Wert Null für die Formänderungsarbeit bei passender Wahl der statisch unbestimmten Größe möglich ist, entspricht er immer einem Minimum, da A niemals negativ werden kann. Wir hätten daher auch schon auf Grund dieser einfachen Überlegung den Wert von H bestimmen können. Zugleich werden wir aber hierdurch aufmerksam darauf, daß die Gl. (118) oder (117) nicht den genauen Wert von H liefern können, denn eine kleine Formänderung wird beim Aufbringen von Lasten auf einen elastischen Körper immer eintreten, und A wird also nicht genau gleich Null sein können.

Der Grund für den Widerspruch liegt darin, daß wir bei der Berechnung von A nur auf die Arbeitsleistung durch die Biegungsmomente Rücksicht genommen haben. Um zu genaueren Resultaten zu gelangen, muß auch auf die Arbeitsleistung der Normalkraft N Rücksicht genommen werden. Die Arbeit der Schubspannungen kann dagegen, wenn man auf Kleinigkeiten nicht zu achten braucht, immer noch vernachlässigt werden, und zwar mit viel größerem Rechte als beim Balkenträger, weil beim Bogen die Schubkräfte an sich viel geringer ausfallen als beim Balken. Wenn man will, kann man indessen auch dieses Glied, gerade so wie es früher beim Balken gezeigt wurde, in Ansatz bringen; da es praktisch ganz bedeutungslos ist, sehe ich aber hier davon ab.

Eine über den Querschnitt F gleichförmig verteilte Normalspannung σ von der Größe

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

leistet beim Zusammendrücken des Bogenelementes ds eine Arbeit, die auf die Volumeneinheit bezogen nach Gl. (39)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

gesetzt werden kann. Multipliziert man dies mit dem Volumen Fds des Bogenelementes, so findet man

$$dA = \frac{\sigma^2 F}{2E} ds = \frac{N^2}{2EF} ds.$$

Nachdem diese Formänderung vollzogen ist, denken wir uns das Biegungsmoment zur Wirksamkeit gebracht. Dabei dreht sich der eine Querschnitt relativ zum anderen um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Dabei verschieben sich auch die Angriffspunkte der schon vorher angebrachten Normalspannungen $\sigma = \frac{N}{F}$ von neuem, und wir müssen zunächst berechnen, wie groß die bei dieser Drehung von ihnen geleistete Arbeit ist. Für ein Flächenelement dF im Abstande y von der Schwerlinie ist die Verschiebung des Angriffspunktes der an ihm von Anfang an wirkenden Normalspannung gleich

$$y \Delta d\varphi$$

und die gesamte Arbeitsleistung dieser Normalspannungen daher gleich

$$\int \sigma dF y \Delta d\varphi = \frac{N \Delta d\varphi}{F} \int y dF.$$

Nach der Eigenschaft der Schwerlinie ist aber das letzte Integral gleich Null. Im ganzen genommen leisten daher die schon vorher in gleichförmiger Verteilung aufgebrachten Normalspannungen während der Drehung keine Arbeit; es bleiben also nur die Arbeitsleistungen der durch das Biegungsmoment selbst hervorgerufenen Normalspannungen bei dieser Bewegung übrig, und diese sind ebenso groß, als wenn zu Beginn ihres Auftretens das Trägerelement spannungslos gewesen wäre.

Auch umgekehrt könnte man zeigen, daß die vom Biegungsmomente für sich hervorgerufenen Spannungen keine Arbeit mehr leisten, wenn nach ihnen die Normalkraft N angebracht wird. Jedenfalls kann also die durch das Zusammenwirken von M und N geleistete Formänderungsarbeit gleich der Summe der beiden Ausdrücke gesetzt werden, die für M und N für sich gefunden wurden. An Stelle von Gl. (116) schreiben wir daher jetzt

$$A = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds + \tfrac{1}{2}\int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Wenn wir jetzt dieselbe Rechnung wiederholen, die zu Gl. (117) führte, erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0.$$

Hier ist noch N als Funktion von H auszudrücken, was leicht geschehen kann. Um langwierige Formeln zu vermeiden, von denen man später doch keinen Gebrauch macht, weise ich darauf hin, daß bei einem sehr flachen Bogen, für den diese Rechnung hauptsächlich von Wichtigkeit ist, weil bei ihm der Horizontalschub H und daher N besonders groß ausfällt, nahezu $N = H$ gesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1,$$

und die Auflösung der vorigen Gleichung liefert

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}. \tag{120}$$

Wenn neben E auch Θ und F als konstant angesehen werden können, vereinfacht sich dies noch weiter zu

$$H = \frac{\int M_b z\,ds}{\int (z^2 + i^2)\,ds}. \tag{121}$$

Unter i ist der Trägheitshalbmesser des Querschnitts, unter i^2 also $\frac{\Theta}{F}$ zu verstehen. Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (118) zeigt uns nun auch, welchen Einfluß die Berücksichtigung der Normalspannungen neben den Biegungsmomenten auf den Wert von H ausübt. Solange i klein gegen den Durchschnittswert der Ordinaten z ist, unterscheiden sich die beiden Werte von H nach (118) und nach (121) nur unerheblich voneinander. Dieser Fall liegt gewöhnlich vor, und man kann dann unbedenklich die einfachere Formel zur Berechnung des Horizontalschubs verwenden.

§ 38. Zweites Verfahren zur Berechnung des Horizontalschubs.

Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen für viele praktische Anwendungen macht es wünschenswert, noch einen zweiten, von dem vorigen völlig verschiedenen Weg zur Lösung derselben Aufgabe zu kennen.

Ich denke mir den Bogen platt auf den Boden gelegt, das linke Ende festgehalten und ein Element von der Länge ds zum neuen Krümmungsradius verbogen, während alle übrigen Teile des Bogens inzwischen ihre Gestalt behalten sollen. Der rechte Teil des Bogens dreht sich dann gegen den festgehaltenen linken um den Winkel $\Delta d\varphi$ und jeder zu ihm gehörige Punkt beschreibt einen kleinen Kreisbogen von diesem Zentriwinkel um den Mittelpunkt von ds. Der Radius des Kreisbogens, den das rechte Bogenende beschreibt, ist in Abb. 46, in der die neue Lage des rechten Bogenstücks durch eine punktierte Linie (natürlich sehr stark übertrieben) eingetragen ist, mit w bezeichnet. Die Länge des Kreisbogens ist daher gleich $w \Delta d\varphi$ zu setzen. Um nun zu erkennen, um wieviel sich die Sehne des ganzen Bogens durch die an ds vorgenommene Verbiegung vergrößert hat, denke ich mir nachträglich den ganzen Bogen ohne Formänderung um den linken Endpunkt so lange gedreht, bis der rechte Endpunkt wieder auf die frühere horizontale Linie fällt. Die beiden nacheinander erfolgten kleinen Wege des rechten Endpunktes bilden die Hypotenuse und die eine Kathete eines unendlich kleinen Dreiecks, dessen zweite Kathete die gesuchte Sehnenverlängerung $d\Delta l$ angibt. In diesem Dreiecke ist ein Winkel gleich dem Winkel α, den der Radius w mit der vertikalen Richtung einschließt. Man hat also

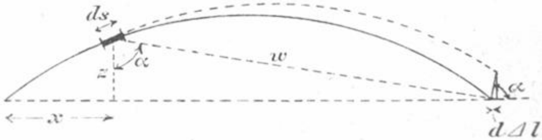

Abb. 46.

$$d\Delta l = w\Delta d\varphi \cos\alpha = z\Delta d\varphi.$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für die Verbiegung jedes anderen Bogenelementes, und die dabei auftretenden Änderungen der Bogensehne oder der Spannweite l addieren sich zueinander algebraisch. Die ganze elastische Spannweitenänderung ist daher

$$\Delta l = \int z\Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds. \tag{122}$$

Hierbei ist nur der Einfluß der Biegungsmomente berücksichtigt. Als verhältnismäßig unbedeutendes Korrektionsglied kann man nachträglich noch die durch die Normalkräfte N bewirkte Spannweitenänderung hinzufügen. Bei flachen Bögen genügt es, diese etwa gleich

$$\frac{lH}{EF}$$

zu setzen. Dieses Glied ist natürlich negativ, da ein Horizontalschub den Bogen verkürzt; dagegen ist Δl in Gl. (122) positiv, wenn M positiv ist, denn ein Biegungsmoment, das wir positiv nennen, biegt einen Balken nach unten hin konvex und vermindert bei dem Bogen die ursprüngliche Krümmung, streckt also den Bogen gerade und vergrößert dabei die Bogensehne.

Bei den Formänderungen, die der Bogen in Wirklichkeit ausführt, bleibt die Spannweite unverändert; wir haben also dafür die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{Mz}{E\Theta}\,ds - \frac{lH}{EF} = 0.$$

Setzt man hier noch den Wert von M aus Gl. (115) ein und löst nach H auf, so wird man wieder auf die früheren Formeln für H geführt, nämlich auf Gl. (117), wenn man das zweite Glied vernachlässigt, oder mit dessen Berücksichtigung auf Gl. (120). Daß hier die Spannweite l an Stelle der Bogenlänge $\int ds$ steht, kommt nur von der willkürlichen, hier etwas abweichenden Schätzung des Korrektionsgliedes her, auf die es nicht ankommt.

Man kann die Sache auch so auffassen, daß der Bogen zuerst am rechten Ende auf ein horizontales Rollenlager gesetzt sei. Als Biegungsmoment bleibt dann nur M_b und die Bogensehne verlängert sich dabei um

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta}\,ds.$$

Dann denkt man sich nachträglich eine Horizontalkraft H an dem beweglichen Auflager angebracht, die so groß gewählt wird, daß dieses wieder um Δl zurückgeführt und der Bogen dadurch in seine endgültige Gestalt gebracht wird. Die Horizontalkraft H bringt negative Biegungsmomente von der Größe Hz hervor und zur Berechnung des dadurch bewirkten Δl kann Gl. (122) ebenfalls in der Form

$$\Delta l = -\int \frac{Hz^2}{E\Theta}\,ds,$$

benutzt werden. Wenn es für nötig gehalten wird, kann dazu die Verkürzung durch die achsiale Belastung gefügt werden. Durch Gleichsetzen der Werte von Δl kommt man wieder auf die früheren Resultate.

Diese Betrachtungsweise hat vor der Benutzung des Satzes von der Formänderungsarbeit den Vorzug, daß sie anschaulicher ist und einen unmittelbaren Einblick in den physikalischen Sinn gewährt, der den einzelnen in der Rechnung vorkommenden Gliedern beizulegen ist. Bei der Methode von Castigliano verfährt man mehr summarisch, man verzichtet auf einen Überblick über die Bedeutung der einzelnen Glieder, erlangt aber andererseits dadurch den Vorteil, daß man ganz von selbst zu dem richtigen Resultate geführt wird, ohne sich über den Vorgang in allen Einzelheiten Rechenschaft geben zu müssen. Jedes Verfahren hat also seine Vorzüge und man tut daher gut, sich mit beiden vertraut zu machen und nicht das eine einseitig vor dem anderen zu bevorzugen.

§ 39. **Einfluß von Temperaturänderungen.**

Bei einem statisch bestimmten Träger sind Temperaturänderungen ohne Einfluß auf die Spannungen. Denn die Auflagerkräfte können bei ihm auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden und sie sind daher immer gleich Null, wenn keine Lasten an dem Träger angreifen, gleichgültig welche Temperaturänderungen der Träger erfahren mag. Beim Fehlen aller äußeren Kräfte müssen daher auch innerhalb jedes Querschnitts alle etwa vorkommenden Spannungen unter sich ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden und dies führt nach der Voraussetzung der linearen Spannungsverteilung zu dem Schlusse, daß sie überall gleich Null sind.

Bei ungleichförmiger Erwärmung eines Körpers kann es freilich vorkommen, daß eine von der linearen abweichende Spannungsverteilung auftritt und der Schluß, daß die Spannungen beim Fehlen äußerer Kräfte überall verschwinden müßten, ist dann nicht mehr zulässig. Dahin gehören auch die sogenannten Gußspannungen, die in Gußstücken vorkommen, die sich nach dem Gusse ungleichmäßig abgekühlt haben, so daß einzelne Teile schon erstarrten, während andere noch flüssig waren. Unter Umständen erreichen diese Gußspannungen, ohne daß irgend eine Belastung von dem Gußstücke aufgenommen würde, eine Höhe, die bis nahe an die Festigkeitsgrenze heranreicht, so daß eine geringfügige äußere Veranlassung genügt, den Bruch herbeizuführen. Durch nochmaliges Ausglühen können sie beseitigt oder wenigstens vermindert werden; auch eine häufig wiederholte Beanspruchung wirkt, wie neuere Versuche gelehrt haben, in ähnlichem Sinne.

Von solchen Fällen soll aber hier nicht die Rede sein. Wir nehmen vielmehr an, daß der Körper im ursprünglichen Zustande frei von solchen Spannungen war und daß auch nachher seine Temperatur sich überall gleichmäßig ändert und der Ausdehnungskoeffizient überall dieselbe Größe hat. Wenn keine äußeren Kräfte an dem Körper wirken, ist dann der Körper bei Wärmeschwankungen ähnlich veränderlich, d h. in jedem Augenblicke ist seine Gestalt der ursprünglichen geometrisch ähnlich. Damit fällt auch jede Veranlassung für ein Auftreten von Spannungen fort.

Ein statisch unbestimmter Träger kann aber durch den Zwang der Auflagerbedingungen, die ihm vorgeschrieben sind, daran verhindert werden, sich gleichmäßig auszudehnen. Diese Verhinderung kann nur von Auflagerkräften ausgehen, die unabhängig von der Belastung auftreten. Die statisch unbestimmten Größen, die bei der Berechnung solcher Träger vorkommen, hängen dann nicht nur, wie bisher angenommen wurde, von den Belastungen, sondern auch von den Temperaturschwankungen ab.

In diesem Falle befindet sich auch der Bogen mit zwei Gelenken. Wenn er erwärmt wird, kann er sich nicht geometrisch ähnlich ausdehnen, da die Bogensehne unveränderlich ist. Es wird also ein Horizontalschub entstehen, der sich der Vergrößerung der Spannweite widersetzt. Diese Auflagerkraft hat Biegungsmomente usw. und damit Spannungen zur Folge, die zu den durch die Belastung hervorgerufenen hinzutreten. Diese Spannungen sind gewöhnlich so beträchtlich, daß sie bei der Festigkeitsberechnung nicht außer acht gelassen werden dürfen.

Zunächst muß man sich darüber klar werden, zwischen welchen Grenzen etwa Temperaturschwankungen zu erwarten sind. Bei Brückenträgern, die im Freien aufgestellt sind, nimmt man gewöhnlich an, daß die Temperatur nach oben oder unten um ungefähr 40^0 C. von der dem spannungslosen Zustande entsprechenden abweichen kann. Wenn der Träger statisch bestimmt wäre, würde sich, falls er aus Eisen besteht, jede Länge um $\frac{1}{2000}$ ändern. Bei einem Bogen mit zwei Gelenken von 50 m Spannweite hätte man also mit einer Spannweitenänderung Δl von 25 mm zu rechnen. Um diese wieder rückgängig zu machen, muß man einen Horizontalschub H anbringen, dessen Größe aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ohne weiteres folgt. Ersetzen wir allgemein die Dehnung um $\frac{1}{2000}$ durch den Buchstaben η und berücksichtigen wir bei der durch H bewirkten Formänderung nur den Einfluß der Biegungsmomente, so folgt aus der Gleichung

$$\eta l = \int \frac{H z^2}{E \Theta} ds$$

der durch die Temperaturänderung hervorgerufene Horizontalschub zu

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E \Theta} ds}. \tag{123}$$

Ähnlich ist natürlich auch der Einfluß eines etwaigen Nachgebens der Widerlager zu beurteilen.

Übrigens können die Werte der durch Temperaturschwankungen hervorgerufenen statisch unbestimmten Auflagerkräfte auch nach der Methode von Castigliano leicht berechnet werden. Denkt man sich nämlich den Zwang an den Auflagerstellen, der die Übertragung dieser statisch unbestimmten Kräfte vermittelt, beseitigt, so ist der Träger statisch bestimmt und er kann sich bei den Temperaturänderungen geometrisch ähnlich verändern. Dabei wird sich der Angriffspunkt einer dieser Auflagerkomponenten, die etwa mit U bezeichnet werden mag, in deren Richtung um eine Strecke u verschieben, die wie bei dem vorher betrachteten Beispiele leicht berechnet werden kann, wenn η gegeben ist. Hierauf bringe man die Lasten und die statisch unbestimmten Kräfte U an, letztere in solcher Größe, daß die durch die vorausgehende Temperaturänderung hervorgerufenen Verschiebungen u wieder verschwinden. Nach Gl. (93) ist dann

$$\frac{\partial A}{\partial U} = -u \tag{124}$$

zu setzen. Diese Gleichung tritt hier an Stelle der Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial U} = 0,$$

die wir früher unter der Voraussetzung, daß keine Temperaturschwankungen vorkämen, zur Berechnung der U benutzten. Mit Gl. (124) und den entsprechenden für die übrigen statisch unbestimmten Größen ist aber nun genau so zu verfahren, wie früher; die Auflösung liefert die Unbekannten U. Übrigens kann unter U auch ein unbekanntes Kräftepaar (ein Einspannmoment) verstanden werden; dann bedeutet u die Winkeldrehung der Angriffsstelle, wenn der Träger statisch bestimmt gemacht wurde. Auch diese läßt sich in jedem Falle ohne weiteres für eine gegebene Temperaturänderung ermitteln.

Diese allgemeine Betrachtung sei gleichfalls an dem Beispiele des Bogens mit zwei Gelenken näher erläutert. Es genügt, wenn wir den Horizontalschub für den Fall berechnen, daß gar keine Lasten angreifen. Mit $U = H$ und $u = -\eta l$ schreibt sich Gl. (124)

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \eta l.$$

Für A nehmen wir den in Gl. (116) angegebenen Wert, nachdem darin $M_b = 0$ gesetzt ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial A}{\partial H} = H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds = \eta l,$$

woraus für H wieder derselbe Wert wie in Gl. (123) gefunden wird.

§ 40. Der beiderseits eingespannte Bogen.

Dieser ist dreifach statisch unbestimmt. Wir wählen als Unbekannten U die vertikale Auflagerkomponente B, den Horizontalschub H und das Einspannmoment M_0, alle drei für das linke Auflager. Von der Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Formänderung wollen wir der Einfachheit halber absehen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhalten wir, wenn wir im übrigen die früheren Bezeichnungen beibehalten,

$$M = M_0 + Bx - Hz - \sum_0^x P(x - p),$$

also z. B. für eine gleichförmige Belastung des Bogens

$$M = M_0 + Bx - Hz - \frac{qx^2}{2}.$$

Wir bilden jetzt

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds$$

und setzen die drei partiellen Differentialquotienten nach M_0, B und H gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \int \frac{M}{E\Theta} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = \int \frac{M}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \int \frac{M}{E\Theta} \cdot \frac{\partial M}{\partial B} ds = \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \int \frac{M}{E\Theta} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} ds = -\int \frac{Mz}{E\Theta} ds = 0.$$

Nach Einsetzen von M können diese drei Gleichungen ohne weiteres nach den drei Unbekannten aufgelöst werden, so daß in dieser Lösung nur noch Integrale vorkommen, die mindestens auf mechanischem Wege stets leicht berechnet werden können.

Um zu untersuchen, welche Werte von M_0, B, H einer Temperaturänderung entsprechen, beachte man, daß beim Freigeben des linken Bogenendes (falls beide Auflager in gleicher Höhe liegen) nur der Angriffspunkt von H eine Verschiebung in der Kraftrichtung erfährt. Man hat daher hierfür die drei Gleichungen

$$\int \frac{M}{E\Theta} ds = 0, \qquad \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0, \qquad \int \frac{Mz}{E\Theta} ds = -\eta l,$$

in denen für M der Wert

$$M = M_0 + Bx - Hz$$

einzusetzen ist. Nachdem dies geschehen ist, können die drei Gleichungen wiederum leicht nach M_0, B und H aufgelöst werden.

Als beiderseits eingespannter elastischer Bogenträger ist ein Tonnengewölbe aufzufassen, das aus einem Materiale aufgeführt ist, von dem man annehmen kann, daß es wenigstens näherungsweise dem Hookeschen Gesetze gehorcht. Die Lehre von den Gewölben behandle ich in der graphischen Statik und ich begnüge mich daher hier mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 41. **Berechnung eines Ringes oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.**

In Abb. 47 ist ein Körper von ringförmiger Gestalt dargestellt, der zwischen zwei Platten in der Richtung des senkrechten Durchmessers mit der Kraft P zusammengedrückt wird. Auf diese Art wird z. B. ein zur Entwässerung in einen Straßenkörper eingelegtes Tonrohr beansprucht, wenn ein Wagen darüber wegfährt. An Stelle des Druckes kann auch ein Zug treten, ohne daß sich die Sache wesentlich änderte. In dieser Lage befindet sich ein Kettenglied von kreisrunder Gestalt bei einer Belastung der Kette. Alle Formänderungen und alle Spannungen sind gleich groß, aber von entgegengesetztem Wirkungssinne, als wenn der Ring mit einer ebenso großen Kraft zusammengedrückt würde. Es genügt daher, wenn wir immer nur von diesem Falle reden; der andere ist dadurch zugleich mit erledigt.

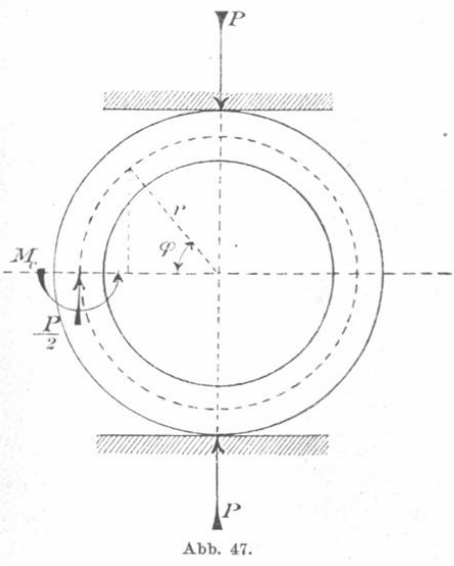

Abb. 47.

Es genügt, die Formänderung eines einzigen Quadranten zu betrachten, da die drei übrigen alle in der gleichen Lage sind; ich wähle dazu den in der Abbildung nach links oben hin gelegenen. Wenn ich diesen Quadranten aus dem ganzen Ringe loslöse, muß ich an den beiden Schnittstellen äußere Kräfte anbringen, die die vorher dort übertragenen Spannungen ersetzen. In der horizontalen Schnittfläche kann ich mir alle dort übertragenen Spannungen zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Resultierenden und einem resultierenden Kräftepaare zusammengesetzt denken. Die Resultierende muß aus Symmetriegründen rechtwinklig zum Querschnitte stehen. Die untere und die obere Ringhälfte, die dort aneinander stoßen, befinden sich nämlich in genau gleichen Umständen; der zwischen ihnen übertragene Druck und Gegendruck muß daher gegen die eine ebenso liegen, wie gegen die andere, und das ist nur möglich, wenn der Winkel ein rechter ist. Aus dem Gleichgewichte der einen Ringhälfte für sich betrachtet, folgt ferner, daß der in jeder horizontalen Schnittfläche übertragene Druck gleich $\frac{P}{2}$ ist. Das unbekannte Moment der Spannungen im Anfangsquerschnitte sei mit M_0 bezeichnet.

Für irgendeinen Querschnitt des Quadranten, dessen Ebene mit der horizontalen Richtung den Winkel φ bildet, hat man das Biegungsmoment, also das Moment der links vom Querschnitte liegenden äußeren Kräfte, die am Quadranten wirken,

$$M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi),$$

denn das Anfangsmoment M_0 behält für jeden neuen Momentenpunkt den ursprünglichen Wert. Auch die Normalkraft N für den Querschnitt φ läßt sich leicht angeben; man hat dafür

$$N = \frac{P}{2}\cos\varphi.$$

Zunächst soll aber nur auf den Einfluß der Biegungsmomente auf die Formänderung geachtet werden, da dieser, wie gewöhnlich bei solchen Aufgaben, erheblich überwiegt, so daß es in der Regel genügt, ihn bei der Durchführung der Rechnung ausschließlich zu beachten.

Die Bedingung, der die Formänderung hier unterworfen ist, besteht darin, daß die beiden Schnittflächen des Quadranten immer senkrecht zueinander bleiben müssen. Allgemein gehört nämlich der ganze Umfang der Mittellinie zu einem Zentriwinkel von 360^0, und dieser Winkel kann sich nicht ändern, solange die Mittellinie fortfährt, eine in sich zurückkehrende Kurve zu bilden, solange also kein Bruch erfolgt. Da nun hier der Ring in vier sich ganz gleich verhaltende Quadranten zerfällt, kann sich auch der zu einem dieser Quadranten gehörige Zentriwinkel nicht ändern. Die Bedingungsgleichung, die zur Ermittelung der einzigen unbekannten Größe M_0 führt, lautet daher ganz einfach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi = 0.$$

Man braucht nur für $\Delta d\varphi$ seinen Wert

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{E\Theta} = \frac{\left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) r\, d\varphi}{E\Theta}$$

einzusetzen und zu integrieren. Da E und Θ konstant sind, kann man diese Faktoren streichen, ebenso den konstanten Faktor r im Zähler; es bleibt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) d\varphi = M_0 \frac{\pi}{2} + \frac{Pr\pi}{4} - \frac{Pr}{2} = 0$$

und durch Auflösen erhält man

$$M_0 = -\frac{\pi - 2}{2\pi} Pr = -0{,}182\, Pr.$$

Am Ende des horizontalen Durchmessers ist das Biegungsmoment demnach negativ, d. h. es bringt eine stärkere Krümmung hervor. Dies war auch schon auf Grund der oberflächlichsten Betrachtung zu erwarten und wir können auf Grund derselben Betrachtung des ganzen Vorganges sofort voraussagen, daß das Moment im Scheitel positiv werden muß, also eine Verminderung der Krümmung an dieser Stelle bewirkt. Auch in Abb. 47 ist übrigens der Drehpfeil von M_0 für den betrachteten Quadranten in Voraussicht dieses Resultates schon entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne eingetragen worden.

Das andere Glied in dem Ausdrucke für M ist bei jedem weiteren Querschnitte des Quadranten positiv; demnach ist M_0

zugleich das größte Biegungsmoment von negativem Vorzeichen. Das größte positive Moment muß dagegen im Scheitel eintreten. Mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ geht M, das wir dann mit $M_{\frac{\pi}{2}}$ bezeichnen, über in

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr}{\pi} = 0{,}318\, Pr.$$

Im Scheitel tritt also zugleich das absolut größte Moment und damit die größte Beanspruchung des Materials auf. Die Spannung σ läßt sich daraus sofort berechnen. Wenn der ringförmige Körper z. B. ein Rohr von der überall gleichen Wandstärke h und der Länge l ist, bildet der Querschnitt ein Rechteck vom Widerstandsmomente $\frac{lh^2}{6}$ und für σ erhält man

$$\sigma = \frac{6\,Pr}{\pi l h^2}. \tag{125}$$

Wenn der Einfluß der Normalkraft N auf die Formänderung nicht zu vernachlässigen ist, hat man nach Gl. (110)

$$\varDelta d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi + \frac{M r\, d\varphi}{E\Theta}$$

oder nach Einsetzen der Werte von N und M

$$\varDelta d\varphi = \left\{\frac{P}{2EF}\cos\varphi + \frac{M_0 r}{E\Theta} + \frac{P}{2E\Theta}(r - r\cos\varphi)\, r\right\} d\varphi.$$

Integriert man dies zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt das Integral gleich Null, so erhält man

$$\frac{P}{2EF} + \frac{M_0 r}{E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{Pr^2}{2E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{Pr^2}{2E\Theta} = 0$$

und hieraus durch Auflösen nach M_0

$$M_0 = -\left(Pr\,\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{Pi^2}{\pi r}\right)$$

wenn man mit i den Trägheitsradius des Querschnitts bezeichnet. Speziell für den rechteckigen Querschnitt des Rohres ist $i^2 = \frac{h^2}{12}$ und hiermit

$$M_0 = -\,Pr\left(\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{h^2}{12 r^2 \pi}\right).$$

Das zur Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen gegen früher hinzugetretene letzte Glied der Klammer ist nur dann von merklicher Größe, wenn die Wandstärke der Röhre ziemlich groß gegen den lichten Durchmesser ist.

Für das Moment im Scheitel findet man

$$M_{\frac{\pi}{2}} = M_0 + \frac{Pr}{2} = \frac{Pr}{\pi}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right). \tag{126}$$

Auf das Moment im Scheitel kommt es bei der Festigkeitsberechnung an. Dieses wird etwas geringer, als wir es bei der vorausgehenden einfacheren Betrachtung fanden, d. h. das Rohr kann etwas mehr Druck aushalten, als es nach Gl. (125) scheinen könnte. Diese Gleichung ist vielmehr ebenfalls, wenn man genauer rechnen will, durch

$$\sigma = \frac{6 Pr}{\pi l h^2}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right) \tag{127}$$

zu ersetzen. Mit $h = \frac{r}{5}$ macht indessen das Korrektionsglied nur $^1/_3$% aus und ist daher zu vernachlässigen. Erst bei ganz dickwandigen Röhren kommt es in Betracht.

Anmerkung. Die vorausgehenden Berechnungen setzen voraus, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Drückt man einen Ring aus einem dehnbaren Metalle zusammen, so bildet sich sofort nach dem ersten Auftreten bleibender Formänderungen ein anderer Spannungszustand aus. Am Scheitel, wo die größten Spannungen auftreten, genügt schon eine sehr kleine bleibende Formänderung, um den Wert des Biegungsmoments an dieser Stelle herab und hiermit zugleich den Wert von M_0 hinauf zu setzen. Dies hat zur Folge, daß ein solcher Metallring größere Lasten zu tragen vermag, als sich aus der vorausgehenden Berechnung ergibt, bevor er in merklicher Weise bleibend zusammengedrückt wird. Einige Versuche, die ich mit Rohrabschnitten anstellte, haben dies bestätigt.

Wir wollen jetzt noch berechnen, um wieviel sich der horizontale Durchmesser der Röhre bei der Belastung vergrößert. Dazu können wir uns der in § 38 für die Vergrößerung Δl der Spannweite eines Bogenträgers abgeleiteten Formeln bedienen. Nach Gl. (122) war

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta}\, ds.$$

Da l hier schon in einem anderen Sinne (als Länge des Rohres) gebraucht ist, schreibe ich $\varDelta d$ für die Vergrößerung des Durchmessers d. An Stelle von M ist im linken Quadranten $M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi)$ und für z ist $z = r\sin\varphi$ zu setzen. Die Integration wird nur über den linken Quadranten ausgedehnt und dann das Doppelte des Resultats genommen, da der Quadrant rechts ebensoviel zu $\varDelta d$ beiträgt. Diese Spaltung des Integrals ist nötig, weil der für M angegebene Ausdruck in dieser Form nur für den linken Quadranten gültig ist. Für Θ setze ich noch $\Theta = \frac{lh^3}{12}$, um die Betrachtung für ein Rohr (oder überhaupt für einen rechteckigen Querschnitt) vollständig durchzuführen. Man findet nach Ausführung der Integration

$$\varDelta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4 - \pi}{2\pi} = 1{,}639\,\frac{Pr^3}{Elh^3}. \tag{128}$$

Natürlich hätte man alle diese Berechnungen auch auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit durchführen können. Ich will hier noch zeigen, wie dieser Satz selbst noch in einem viel allgemeineren Falle zur Lösung der Aufgabe benutzt werden kann. Abb. 48 gibt den ringförmigen Körper unter dem Einflusse beliebig längs des Umfangs verteilter Druckkräfte (an deren Stelle auch Zugkräfte treten können) an. Von diesen äußeren Kräften wird nur verlangt, daß sie sich an dem Ringe im Gleichgewichte halten sollen. Man soll die dadurch hervorgerufenen Spannungen berechnen.

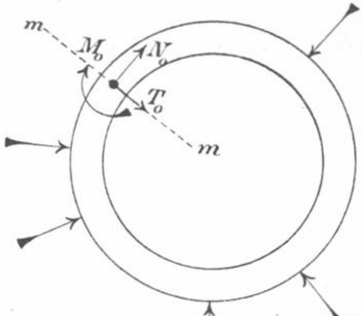

Abb. 48.

Um die Aufgabe zu lösen, führe man irgend einen Querschnitt mm durch den Ring. Die in diesem Schnitte übertragenen Spannungen kann man zusammensetzen zu einer Normalkraft N_0, einer Schubkraft T_0 und einem Anfangsmomente M_0. Wenn diese drei Größen für den Anfangsquerschnitt bekannt wären, könnte man für irgend einen anderen Querschnitt, der mit dem ersten einen Winkel φ bildet, die entsprechenden Größen N, T, M sofort angeben, und daraus ließen sich alle Spannungen berechnen. Die

Aufgabe ist also dreifach statisch unbestimmt oder mit anderen Worten: der in dieser Aufgabe vorkommende Ring bildet nur einen besonderen Fall des in § 40 besprochenen beiderseits eingespannten Bogens. Die beiden Bogenenden fallen hier miteinander zusammen. In der Tat kann nun auch die Aufgabe, die drei Unbekannten N_0, T_0, M_0 zu berechnen, genau so gelöst werden, wie es dort gezeigt wurde. Man stellt zuerst den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A auf, wobei es in der Regel genügen wird, nur auf den Einfluß der Biegungsmomente M zu achten. Dann setzt man die drei Differentialquotienten von A nach N_0, T_0 und M_0 gleich Null und löst diese Gleichungen nach den Unbekannten auf. Denn die Bedingung, daß der Ring im Querschnitte mm in Wirklichkeit zusammenhängt, kommt darauf hinaus, daß sich der Angriffspunkt von N_0 und T_0 nicht verschieben und daß sich die Angriffsstelle von M_0 auch nicht drehen kann, wenn man sich das jenseits des Querschnitts gelegene Ende des aufgeschnittenen Ringes festgehalten denkt. Diesen Verschiebungen und Drehungen sind aber die Differentialquotienten von A nach N_0, T_0, M_0 nach dem Satze von Castigliano gleich und die Differentialquotienten von A sind daher gleich Null zu setzen.

Man bemerkt hier wieder, wie der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ohne vieles Nachdenken ganz mechanisch von selbst zu der richtigen Lösung führt.

Die Glieder von Ketten sind gewöhnlich von länglicher Gestalt. Wenn man die Mittellinie als eine Ellipse betrachtet, kann man die Berechnung auf ganz ähnliche Art durchführen, wie es im Eingange des Paragraphen für den kreisförmigen Ring gezeigt wurde. Bei der Ausführung der Integration kommt man aber in diesem Falle auf elliptische Integrale. Es ist daher besser, wenn man in solchen Fällen zum Ersatze der Integration durch eine Summierung endlicher Teile, also zu einer mechanischen Quadratur seine Zuflucht nimmt. Abgesehen von der dadurch veranlaßten etwas langwierigeren Rechnung macht die Lösung der Aufgabe aber auch in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art.

§ 42. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

Eine ebene Spiralfeder (vgl. Abb. 49) ist als ein Bogenträger zu betrachten, der am einen Bogenende eine auf Drehung dieses Endes hinwirkende Belastung aufzunehmen hat. Die Belastung besteht nämlich in dem Kräftepaare, mit dem die in der Federmitte liegende Spindel beim Aufziehen der Feder gedreht oder nach dem Aufziehen festgehalten wird.

Wenn das äußere Federende eingespannt ist, bildet die Feder einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Als statisch unbestimmte Größen sind das Einspannmoment M_0 am äußeren Federende und der von diesem Auflager übertragene „Horizontalschub“ H, d. h. die in die Verbindungslinie beider Auflager fallende, hier also, wie wir sagen können, in radialer Richtung gehende Auflagerkomponente zu betrachten. Zur Berechnung der beiden Unbekannten bedient man sich am einfachsten des Verfahrens von Castigliano.

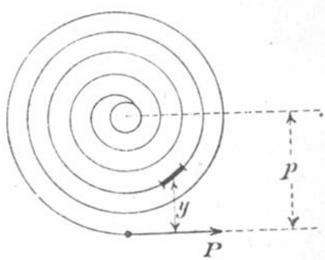

Abb. 49.

Hier soll die Berechnung nur für den anderen Fall durchgeführt werden, daß sich nämlich das äußere Federende um den Befestigungspunkt frei zu drehen vermag. Dann ist der Bogenträger nur einfach statisch unbestimmt und die statisch unbestimmte Größe H kann überdies gleich Null gesetzt werden. Dies folgt nämlich sofort aus Gl. (118), denn für M_b hat man hier

$$M_b = Py \quad \text{und daher} \quad \int M_b z\,ds = P\int yz\,ds$$

und dies wird, da y für jedes Bogenelement das gleiche Vorzeichen, z dagegen für die zu verschiedenen Seiten des in der y-Richtung gezogenen Durchmessers liegenden Bogenelemente entgegengesetzte Vorzeichen hat, ungefähr zu Null, oder doch jedenfalls sehr klein gegen $\int z^2 ds$. Daraus folgt, daß H gegen die andere Auflagerkomponente P vernachlässigt werden kann. Hiernach ist auch das Biegungsmoment M

$$M = M_b = Py.$$

Das Vorzeichen von M ist für alle Längenelemente dasselbe. Bei der in der Abbildung angenommenen Richtung von P wäre es eigentlich nach den üblichen Festsetzungen negativ zu nehmen; es genügt aber hier, wenn wir nur mit den Absolutbeträgen rechnen, da ein Zweifel über den Sinn, in dem die auftretenden Formänderungen zu nehmen sind, ganz ausgeschlossen ist. Nach Gl. (112) erhalten wir:

$$\Delta d\varphi = \frac{Py}{E\Theta} ds,$$

und wenn wir dies über die ganze Ausdehnung der Mittellinie integrieren und konstanten Querschnitt voraussetzen:

$$\Delta \varphi = \frac{P}{E\Theta}\int y\,ds. \tag{129}$$

Das hier vorkommende Integral hat eine einfache Bedeutung; es gibt das statische Moment der Mittellinie in bezug auf die Richtungslinie der Kraft P an. Dafür können wir auch das Produkt aus der Länge l der Mittellinie und dem Abstande des Schwerpunktes setzen. Offenbar fällt nun der Schwerpunkt der Mittellinie ziemlich genau mit der Mitte der Spindel zusammen und wir haben daher auch, wenn p die Entfernung des äußeren Federendes von der Spindelmitte angibt,

$$\Delta \varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l. \tag{130}$$

Bei der Anwendung solcher Federn hat man die Absicht, mechanische Energie von einem durch die besonderen Umstände des Falles bedingten Betrage in Gestalt von Formänderungsarbeit aufzuspeichern. Die Berechnung der Formänderungsarbeit A ist daher hier von besonderer Wichtigkeit. Am einfachsten stellt man zu diesem Zwecke fest, wieviel mechanische Arbeit beim Aufziehen der Feder, also bei der Umdrehung der Spindel geleistet wird. Dazu beachte man, daß die an der Spindel angreifenden äußeren Kräfte mit der Kraft P am äußeren Ende ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Die Kräfte an der Spindel lassen sich daher zu einer Einzelkraft P, die durch die Spindelmitte geht, und einem Kräftepaare vom Momente Pp zusammensetzen. Die Einzelkraft wird von der Lagerung der Spindel aufgenommen, das Moment nur dann, wenn eine Hemmung in das auf der Spindel sitzende Sperrad eingreift. Beim Aufziehen der Feder muß aber ein Kräftepaar M angebracht werden, daß die Drehung der Spindel erzwingt. Die Arbeitsleistung eines Kräftepaares bei einer Drehung ist gleich dem Produkte aus dem Momente und dem in Bogenmaß ausgedrückten Drehungswinkel. Hier ist noch der Faktor $\frac{1}{2}$ beizufügen, weil es auf den Mittelwert des Momentes während des Aufziehens ankommt. Man hat daher

$$A = \tfrac{1}{2} M \varDelta \varphi = \frac{(Pp)^2}{2 E \Theta} l. \qquad (131)$$

Dieser Ausdruck kann noch etwas umgeformt werden. Man sucht nämlich die Leistung der Feder möglichst auszunutzen, d. h. soviel Arbeit als möglich in ihr aufzuspeichern. Die Grenze dafür ist durch die zulässige Beanspruchung des Materials gegeben. Diese wählt man bei den Federn, die meistens aus bestem Stahle hergestellt werden, aus demselben Grunde gewöhnlich sehr hoch, viel höher als es der Sicherheit wegen bei anderen Konstruktionen zu geschehen pflegt. Jedenfalls darf man aber nicht über die Elastizitätsgrenze oder die damit in der Regel zusammenfallende Proportionalitätsgrenze des Materials gehen. Bezeichnen wir die hiernach als zulässig anzusehende größte Biegungsspannung mit σ, so ist

$$\sigma = \frac{2 Pp}{\Theta} e,$$

denn das größte Biegungsmoment tritt in der äußersten Windung diametral gegenüber der Befestigungsstelle auf und der Hebelarm der Kraft P kann dort gleich $2p$ gesetzt werden Mit Hilfe dieser Gleichung kann das größte Moment Pp, das an der Spindel angreifen darf, in σ ausgedrückt und dieser Wert in Gl. (131) eingeführt werden. Man findet

$$A = \frac{\sigma^2 \Theta}{8 e^2 E} l. \qquad (132)$$

Wenn der Querschnitt der Feder, der hier stets als konstant vorausgesetzt wurde, gegeben ist, kann dies noch weiter ausgerechnet werden. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h wird $\Theta = \frac{b h^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$A = \frac{\sigma^2 b h l}{24 E} = \frac{\sigma^2}{24 E} \cdot V. \qquad (133)$$

In der letzten Formel bedeutet $V = bhl$ das Volumen der Feder und man erkennt daraus, daß die Formänderungsarbeit nur von dem Volumen, also dem Materialaufwande abhängt und nicht davon, wie sich das Volumen aus den drei Faktoren b, h und l zusammensetzt.

§ 43. Stäbe von starker Krümmung.

Alle Betrachtungen dieses Abschnitts beruhten auf der Voraussetzung, daß der Krümmungshalbmesser der Stabmittellinie als sehr groß gegenüber der in die Biegungsebene fallenden Querschnittshöhe angesehen werden könne. In den meisten praktisch vorliegenden Fällen trifft dies auch mit hinreichender Annäherung zu. In manchen Fällen aber, so namentlich bei den Lasthaken der Hebezeuge und den Zughaken der Eisenbahnfahrzeuge ist die genannte Voraussetzung keineswegs erfüllt.

In solchen Fällen sind die Längen ds der zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegenden Fasern in verschiedenen Abständen vom Krümmungsmittelpunkte von vornherein erheblich verschieden voneinander, und die Längenänderungen Δds sind daher nicht mehr ausschließlich dem zugehörigen Werte von σ proportional, sondern sie hängen außerdem auch von der ursprünglichen Länge ds, also von der Entfernung der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte ab. Dies hat, wie man sofort sehen wird, zur Folge, daß entweder, wenn die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, die Spannungen σ über den Querschnitt nicht mehr nach einem Geradliniengesetze verteilt sein können, oder daß umgekehrt, wenn man diese Spannungsverteilung voraussetzt, die Querschnitte bei der Formänderung nicht mehr eben bleiben können. Man muß daher von diesen beiden Annahmen, die bei der Berechnung des geraden oder des schwach gekrümmten Stabes miteinander übereinstimmen, die eine fallen lassen. Ich will mich hier nicht in eine Erörterung der meiner Meinung nach noch keineswegs hinreichend geklärten Frage einlassen, welche von beiden Annahmen (die ja an sich beide willkürlich sind, so daß nur auf Grund von Versuchsergebnissen eine Entscheidung zwischen ihnen möglich ist) den Vorzug verdient, da eine ausführliche Erörterung streitiger Fragen mit dem Zwecke eines Lehrbuchs nicht wohl vereinbar ist. Ich begnüge mich daher mit der Bemerkung, daß man heute gewöhnlich bei der Berechnung stark gekrümmter Stäbe die Annahme zugrunde legt, daß die Querschnitte eben bleiben. Die nachfolgenden Berechnungen beruhen ebenfalls auf dieser Voraussetzung.

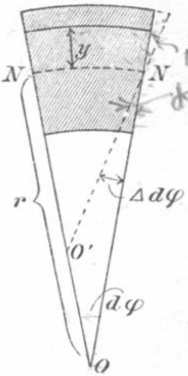

Abb. 50.

In Abb. 50 ist ein zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegendes Stabelement dargestellt. Mit NN ist die neutrale Faserschicht bezeichnet, also jene, die sich bei der Biegung weder verlängert noch verkürzt. Der Krümmungsmittelpunkt O gelangt durch die Formänderung nach O'. Für die ursprüngliche Länge ds irgendeiner Faser im Abstande y von NN hat man mit Benutzung der in Abb. 50 eingeschriebenen Bezeichnungen

$$ds = (r + y)d\varphi$$

und für die zugehörige Längenänderung Δds

$$\Delta ds = y \Delta d\varphi.$$

Daraus folgt für die Spannung σ nach dem Hookeschen Gesetze

$$\sigma = E \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y}{r+y} \cdot E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

In der Tat ist also σ keine lineare Funktion von y; wenn man die Abhängigkeit der Spannung von y durch eine Kurve veranschaulicht, erhält man vielmehr einen Hyperbelbogen.

Da der betrachtete Formänderungszustand durch ein Biegungsmoment hervorgerufen sein sollte, muß $\int \sigma dF = 0$ sein und dies liefert für die Ermittelung der Lage der neutralen Faser nach Einsetzen des Wertes von σ die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{y}{r+y} dF = 0.$$

Hieraus folgt, daß NN nicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Bei der Behandlung eines Beispieles in Aufgabe 27 wird noch näher gezeigt werden, wie man mit Hilfe der vorstehenden Gleichung den Abstand von NN bis zum Schwerpunkte ermitteln kann. Nachdem auf diese Weise r berechnet ist, erhält man die Spannungen σ nach dem Momentensatze, also auf Grund der Gleichung

$$\int y\sigma dF = M,$$

die nach Einsetzen des Ausdruckes für σ übergeht in

$$E\frac{\varDelta d\varphi}{d\varphi}\int\frac{y^2}{r+y}dF = M.$$

Wenn y gegen r im ganzen Querschnitte klein wäre, würde das Integral in das Trägheitsmoment Θ des Querschnitts, geteilt durch r übergehen. Entwickelt man den Bruch unter dem Integralzeichen in eine Reihe, so erhält man auch

$$\int\frac{y^2}{r+y}dF = \frac{1}{r}\left[\int y^2 dF - \frac{1}{r}\int y^3 dF + \frac{1}{r^2}\int y^4 dF - \cdots\right],$$

von der man so viele Glieder berücksichtigen kann, als gerade nötig erscheint. Setzt man für den Klammerwert, der bei großem r in Θ übergeht, den Buchstaben Θ', so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung

$$E\frac{\varDelta d\varphi}{d\varphi} = \frac{Mr}{\Theta'}$$

und damit geht der Ausdruck für σ über in

$$\sigma = \frac{ry}{r+y}\cdot\frac{M}{\Theta'}. \tag{134}$$

Für ein großes r stimmt diese Gleichung mit der früher für den geraden Stab abgeleiteten überein.

Aufgaben.

27. Aufgabe. Der Querschnitt eines gekrümmten Stabes sei ein Rechteck von 2 cm Breite und 4 cm Höhe (diese Seite in der Richtung des Krümmungshalbmessers gemessen), und der Krümmungshalbmesser der Mittellinie sei gleich 5 cm. Um wieviel unterscheidet sich die nach § 43 berechnete größte Spannung, die durch ein Biegungs-

moment M hervorgerufen wird, von der nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ gefundenen?

Lösung. Nach Gl. (134) hat man für die Spannung σ einen Ausdruck von der Form

$$\sigma = c \cdot \frac{y}{r + y},$$

worin jetzt c eine konstante (d. h. von y unabhängige) Größe ist, die wir berechnen werden. Die Abstände y sind von der Nullinie NN aus gerechnet, deren Lage zunächst ermittelt werden muß. Dafür dient uns die Gleichung

$$\int \sigma dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{y}{r+y} dF = 0,$$

die ausspricht, daß die Spannungen zu einem Biegungsmomente gehören. Mit Rücksicht auf die in Abb. 51 eingeschriebenen Bezeichnungen ist $y + r = u$ und $dF = b\,du$ zu setzen. Daher geht die vorige Gleichung über in

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u - r}{u} du = h - r \lg \frac{u_2}{u_1} = 0,$$

aus der $r = h : \lg \frac{u_2}{u_1}$ folgt. Setzt man die im vorliegenden Beispiele gewählten Zahlenwerte ein, so findet man

$$r = 4 : \lg \frac{7}{3} = 4{,}72 \text{ cm}.$$

Die Nullinie NN liegt also um 0,28 cm von der Mitte entfernt.

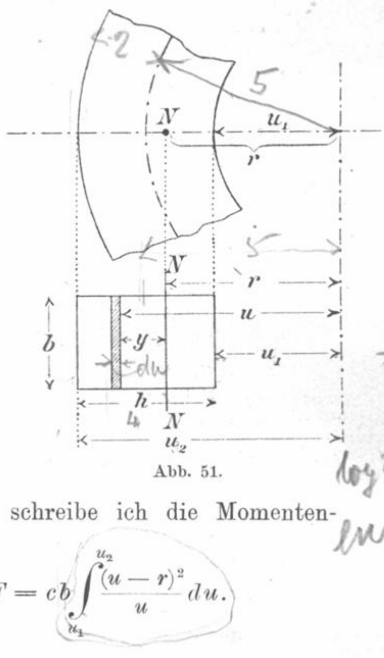

Abb. 51.

$\frac{7}{3} = 2{,}33$

$\log 2{,}33 = 0{,}368$

$\ln = 0{,}85$

Um jetzt noch c zu berechnen, schreibe ich die Momentengleichung an:

$$M = \int \sigma dF y = c \int \frac{y^2}{r+y} dF = cb \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du.$$

Für das Integral erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du = \int_{u_1}^{u_2} u\,du - 2r \int_{u_1}^{u_2} du + r^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{u_2^{\,2}}{2} - \frac{u_1^{\,2}}{2} - 2rh$$
$$+ r^2 \lg \frac{u_2}{u_1} = h\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right).$$

Demnach ist

$$c = \frac{M}{bh\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right)}.$$

Die Spannung an der Innenkante ($u = u_1$) sei mit σ_I, die an der Außenkante mit σ_{II} bezeichnet; man hat dann

$$\sigma_I = c\frac{u_1 - r}{u_1} = -\frac{M}{8(5 - 4{,}72)} \cdot \frac{1{,}72}{3} = -0{,}256\,M,$$

$$\sigma_{II} = c\frac{u_2 - r}{u_2} = \frac{M}{8(5 - 4{,}72)} \cdot \frac{2{,}28}{7} = 0{,}145\,M,$$

wobei als Längeneinheit 1 cm zugrunde gelegt ist. Die Vorzeichen der Spannungen σ_I und σ_{II} richten sich natürlich nach dem Drehsinne des Biegungsmoments M und kommen hier nicht weiter in Betracht. Die größte Spannung tritt an der Innenkante auf. Nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta}y$ werden die Spannungen an beiden Kanten gleich groß und zwar

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{6\,M}{bh^2} = \frac{6\,M}{2 \cdot 16} = 0{,}187\,M.$$

Der Unterschied der größten Kantenspannung nach beiden Annahmen beträgt daher $0{,}069\,M$ oder $37\,\%$ von dem nach der einfachen Formel berechneten Werte. Bei den Haken liegen die Verhältnisse ähnlich; dort kommt aber zu der Beanspruchung durch das Biegungsmoment noch eine Normalkraft, und dadurch werden die Unterschiede etwas herabgemindert.

28. Aufgabe. Ein Flußeisenstab hat quadratischen Querschnitt von 6 cm Seite und eine gekrümmte Mittellinie von 1,20 m Spannweite und 20 cm Pfeil. Er wird als elastischer Bogenträger aufgestellt und trägt in der Mitte eine Einzellast von 3000 kg. Wie groß ist der Horizontalschub und wie groß die Beanspruchung des Materials?

Lösung. Für ein Koordinatensystem der XZ, dessen Ursprung mit dem linken Auflager zusammenfällt und dessen X-Achse horizontal gerichtet ist, lautet die Gleichung einer Parabel von der Spannweite l und dem Pfeile f:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Von der Mittellinie des Stabes ist zwar nicht gesagt, daß sie einen Parabelbogen bilde; man weiß vielmehr nur, wie groß Spannweite und Pfeil ist. In solchen Fällen legt man aber immer die für die Rechnung bequemste Annahme über die genauere Gestalt der

Mittellinie zugrunde. Für das Biegungsmoment M_b eines Balkens infolge der Einzellast P in der Mitte hat man $M_b = \frac{P}{2}x$, und nach Gl. (118) findet man den Horizontalschub H

$$H = \frac{\int M_b z\,dx}{\int z^2\,dx}.$$

Hierbei ist an Stelle von ds in Gl. (118) das Differential dx gesetzt. Auch dies ist eine zur bequemeren Ausrechnung dienende, praktisch zulässige Vernachlässigung, mit der man sich bekannt machen muß. Zur Rechtfertigung dafür erwähne ich zunächst, daß sich die Bogenlänge nicht viel von der Länge der Sehne unterscheidet. Hier ist aber nicht nur im Zähler, sondern auch im Nenner an Stelle von ds der kleinere Faktor dx getreten, und man sieht ein, daß dadurch der Fehler, der im Werte von H begangen wird, noch weiter herabgemindert wird. Wenn M_b überall proportional mit z wäre, würde H von der Vertauschung des Differentials ds mit dx überhaupt nicht berührt. In anderen Fällen ist aber der Fehler höchstens etwa von der Ordnung des Unterschieds zwischen Bogen und Sehne, und dieser fällt bei einem flachen Bogen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die man bei Festigkeitsberechnungen überhaupt anstrebt, nicht ins Gewicht.

Beim Einsetzen der Werte von M_b und z findet man:

$$\int M_b z\,dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2}x\frac{4f}{l^2}(lx - x^2)\,dx = \frac{5}{48}Pfl^2.$$

Das Integral mußte in zwei Teile gespalten und ein Teil nur über die linke Bogenhälfte ausgedehnt werden, weil der Ausdruck für M nur für diese Bogenhälfte gilt. Das Integral im Nenner von H kann dagegen sofort von 0 bis l ausgedehnt werden. Man findet

$$\int_0^l z^2\,dx = \frac{16f^2}{l^4}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx = \frac{8}{15}f^2 l.$$

Für H erhält man demnach:

$$H = \frac{\frac{5}{48}Pfl^2}{\frac{8}{15}f^2 l} = \frac{25}{128}P\frac{l}{f} = 3520 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment M ist:

$$M = \frac{P}{2}x - Hz = 1500x - 3520z.$$

Um das Maximum zu finden, differentiieren wir nach x:

$$\frac{dM}{dx} = 1500 - 3520\frac{dz}{dx} = 1500 - 3520\frac{4f}{l^2}(l - 2x).$$

Dies wird zu Null für $x = 22$ cm, und die Ordinate z wird an dieser Stelle $z = 12$ cm, das Vorzeichen des Momentes an dieser Stelle ist negativ. Wir haben also $M_{\min} = -9200$ cmkg. Daneben kommt aber auch das Biegungsmoment im Bogenscheitel in Betracht, das kein analytisches Maximum ist, aber wegen der bis zum Bogenscheitel begrenzten Gültigkeit des Ausdrucks für M trotzdem den absolut größten Wert annimmt. Man hat nämlich

$$M_{\frac{l}{2}} = 1500 \cdot 60 - 3520 \cdot 20 = +19\,600 \text{ cmkg}.$$

An der gefährlichst beanspruchten Stelle wird daher

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 19\,600}{6^3} = 544 \text{ atm}.$$

Dazu kommt noch die sich gleichförmig über den Querschnitt verteilende Druckspannung durch die achsiale Belastung von der Größe H, also $\frac{3520}{36} = 98$ atm. Die größte Druckspannung, die das Material aufzunehmen hat, wird also gleich $544 + 98 = 642$ atm und die größte Zugspannung gleich $544 - 98 = 446$ atm.

29. Aufgabe. Derselbe Träger wird mit 10000 kg gleichförmig belastet; wie groß wird der Horizontalschub a) ohne, b) mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft auf die Formänderungen?

Lösung. Wir brauchen hier nur die Zahlenwerte in die Formeln von § 37 einzusetzen. Im Falle a) haben wir nach Gl. (119)

$$H = \frac{ql^2}{8h} = \frac{10\,000 \cdot 120}{8 \cdot 20} = 7500 \text{ kg}.$$

Für den Fall b) wenden wir Gl. (121) an. Mit $M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{f}$ wird

$$\int M_b z\,dx = \frac{ql^2}{8f}\int z^2 dx = \frac{ql^3 f}{15}$$

mit Benutzung eines schon bei der Lösung der vorausgehenden Aufgabe gefundenen Resultats. Für i^2 ist

$$i^2 = \frac{\Theta}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{36}{12} = 3 \text{ cm}^2$$

zu setzen. Nach Gl. (121) hat man daher (nach Vertauschung von ds mit dx)

$$H = \frac{\int M_b z\, dx}{\int z^2 dx + \int i^2 dx} = \frac{\frac{q l^3 f}{15}}{\frac{8}{15} f^2 l + i^2 l} = \frac{10000 \cdot 120 \cdot 20}{8 \cdot 20^2 + 15 \cdot 3} = 7396 \text{ kg}.$$

Der Unterschied zwischen den Fällen a) und b) ist daher unerheblich.

30. Aufgabe. Um wieviel vergrößert sich die Spannweite, wenn der in den vorhergehenden Aufgaben angeführte Stab als Balkenträger aufgestellt wird, unter dem Einflusse der in Aufgabe 28 angegebenen Belastung.

Lösung. Nach Gl. (122) ist, wenn anstelle von M hier M_b gesetzt und ds mit dx vertauscht wird,

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta} dx = \frac{5 P f l^2}{48 E \Theta} = \frac{5 \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 120^2}{48 \cdot 22 \cdot 10^5 \cdot 108} = 0{,}38 \text{ cm}.$$

Dabei ist für das Integral der schon in der Lösung von Aufg. 28 gefundene Wert und für den Elastizitätsmodul E des Flußeisens $22 \cdot 10^5$ atm eingesetzt. — Wenn die Widerlager um 1 mm nachgeben, wird dadurch in jedem Belastungsfalle der Horizontalschub um $\frac{3520}{3{,}8} = 926$ kg vermindert.

31. Aufgabe. Nach welchem Gesetze muß die Stärke eines vorher auf einen größeren Durchmesser abgedrehten Kolbenringes von der Schlitzstelle aus nach beiden Seiten hin zunehmen, wenn der Ring nach dem Einpassen in den Zylinder überall mit demselben spezifischen Drucke p in radialer Richtung an der Zylinderwand anliegen soll?

Lösung. Man betrachte einen Querschnitt im Winkelabstande φ von der Schlitzstelle (vgl. Abb. 52). Die äußeren Kräfte am einen Stabteile geben eine Resultierende, die ebenso groß und ebenso gelegen ist, als wenn sich der Druck p auf die Sehne s verteilte. Dies folgt nämlich aus einer hydrostatischen Betrachtung, von der man bei solchen Untersuchungen oft Gebrauch macht. Ein Wasserkörper, der den Raum des Segmentes ausfüllte, wäre im Gleichgewichte, wenn von allen Seiten her der Druck p auf ihn wirkte. Daraus folgt sofort, daß die Resultierende des Drucks am Bogenumfang gleich der Resultierenden des Drucks längs der Sehne ist. Wenn wir die Breite des Ringes (senkrecht zur Ebene von Abb. 52) mit b

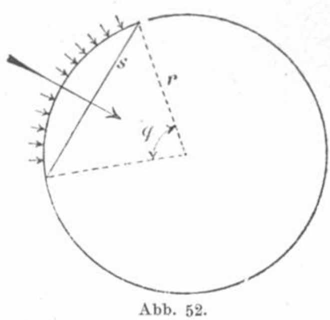

Abb. 52.

bezeichnen, ist diese Resultierende gleich pbs und das Biegungsmoment im Querschnitte φ

$$M = pb\frac{s^2}{2} = 2pbr^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

Vorher sei der Ring auf einen um $\varDelta r$ größeren Radius abgedreht gewesen; durch die elastische Formänderung muß sich der Radius überall auf r vermindern, wenn der Ring nachher überall satt anliegen soll. Nach Gl. (111) haben wir daher

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varDelta r + r} = \frac{M}{E\Theta} = \frac{12}{Eh^3}\cdot 2pr^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

Für die linke Seite kann man, da $\varDelta r$ klein gegen r ist, kürzer $\frac{\varDelta r}{r^2}$ setzen. Die Gleichung kann dann nach der unbekannten veränderlichen Stärke h des Kolbenringes aufgelöst werden und gibt

$$h = c\sqrt[3]{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

wenn unter c der für den ganzen Ring konstante Wert

$$c = \sqrt[3]{\frac{24pr^4}{E\cdot\varDelta r}}$$

verstanden wird. Die erste von beiden Gleichungen gibt das allgemeine Gesetz an, nach dem h mit φ zunehmen muß; c dagegen ist die größte Stärke, die der Ring an der der Schlitzstelle gegenüberliegenden Stelle erhält. Die letzte Gleichung kann daher auch umgekehrt dazu benutzt werden, die Stärke des Drucks p, mit dem der Ring an der Zylinderwand aufliegt, zu berechnen, wenn c und $\varDelta r$ gegeben sind.

Für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 360^0 = 2\pi$ gibt die Formel $h = 0$, d. h. der Ring müßte dort in einer Schneide endigen. Davon sieht man bei der praktischen Ausführung ab; dagegen ist es allgemein gebräuchlich, die Stärke des Ringes sonst in ungefährer Übereinstimmung mit der abgeleiteten Formel nach der Mitte hin zunehmen zu lassen.

Bei der Berechnung ist überall h als klein gegen r vorausgesetzt worden, so daß r als Radius der Mittellinie genommen werden konnte. Mit Rücksicht auf den Zweck der Rechnung war diese Vernachlässigung zulässig. Man hätte natürlich auch für r den genaueren Wert $r - \frac{h}{2}$ setzen können; man glaube aber nicht, daß dies in Wirklichkeit eine Verbesserung wäre. Es handelt sich bei solchen Untersuchungen immer darum, die Hauptzüge einer Erscheinung in möglichst einfach gebauten Formeln wiederzugeben und auf Kleinigkeiten zu verzichten. Freilich will diese Kunst, an der rechten Stelle die angebrachte Vernachlässigung einzuführen, geübt sein, damit man nicht einmal ein Glied unterdrückt, das von größerer, vielleicht sogar von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Anmerkung. Der Ausdruck für M in der vorausgehenden Rechnung kann auch noch in der folgenden Weise umgestaltet werden:

$$M = 2pbr^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = pbr(r - r\cos\varphi) = pbrz,$$

wenn in dem letzten Audsrucke unter z der senkrechte Abstand des zum Winkel φ gehörigen Punktes von der an der Schlitzstelle gezogenen Tangente des Kreises verstanden wird. Das Biegungsmoment ist demnach überall so groß, als wenn die Belastung durch den Umfangsdruck p entfernt und durch eine Kraft $P = pbr$ ersetzt wäre, mit der die beiden Enden des Ringes an der Schlitzstelle gegeneinander gezogen würden. — Hieraus folgt ganz allgemein die folgende Vorschrift für die Herstellung eines Kolbenringes, dessen Stärke h eine ganz willkürliche Funktion des Winkels φ sein darf und der nachher trotzdem überall mit dem gleichen Drucke p aufliegt. Man schneide den gegossenen Ring zunächst auf, ziehe dann die Enden mit einer Kraft p gegeneinander und drehe ihn in diesem gespannten Zustande auf einer Drehbank außen kreisrund zum Halbmesser des Zylinders ab, in den er später passen soll. Läßt man, nachdem dies geschehen ist, die Enden wieder frei, so federt er auseinander und der Umfang ist dann nicht mehr genau kreisrund. Sobald er aber nachher in den Zylinder eingesetzt und ihm dadurch die Gestalt wieder aufgezwungen wird, die er bei der Bearbeitung auf der Drehbank angenommen hatte, liegt er nun mit einem gleichförmigen Drucke p an der Zylinderwand an, der aus der Gleichung $P = pbr$ ohne weiteres berechnet werden kann.

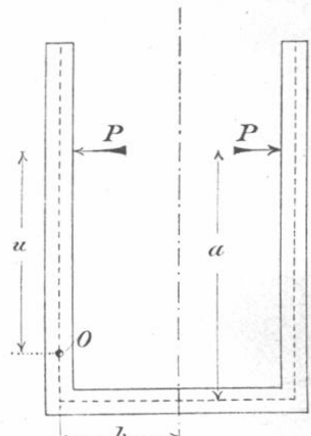

Abb. 53.

32. Aufgabe. Ein U-förmiger Bügel von konstantem Querschnitte wird mit Hilfe einer zwischen den Schenkeln angebrachten Schraube in der Höhe a auseinandergebogen (vgl. Abb. 53). Die über a hinausliegenden Teile der Schenkel bleiben hierbei geradlinig und *zwar dreht sich jeder Teil beim Auseinanderbiegen um einen festen Punkt O. Man soll dessen Lage ermitteln.*

Lösung. Der Körper ist als ein Bogen aufzufassen, dessen Mittellinie aus drei Seiten eines Rechtecks zusammengesetzt wird. Wir berechnen zunächst, um wieviel sich die Spannweite unter dem Einflusse eines Horizontalschubs oder Horizontalzugs verändert und dann, um welchen Winkel sich die oberen Teile der Schenkel drehen; wenn beide Werte bekannt sind, kann daraus leicht die Lage des Drehpunktes ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, daß der Bügel während der Formänderung so festgehalten wird, daß die Symmetrieachse ihre Lage beibehält; auf die Bewegungen, die der Bügel daneben etwa noch im ganzen ausführen könnte, kommt es natürlich nicht an.

Zur Berechnung von $\varDelta l$ verwenden wir Gl. (122):

$$\varDelta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Die Integration ist über die eine Hälfte der Bogenmittellinie auszudehnen und dabei in zwei Teile zu trennen, von denen der eine sich auf die horizontale Strecke und der andere sich auf die vertikale Strecke der Mittellinie bezieht. In der ersten Strecke ist z überall gleich a, in der zweiten ist $ds = dz$ und daher

$$\varDelta l = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{E\Theta} ds + \int_0^a \frac{Pz \cdot z}{E\Theta} dz = \frac{Pa^2}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{3}\right)$$

Die Drehung $\varDelta\varphi$ des oberen Teiles des Schenkels ist gleich der Summe aller elastischen Winkeländerungen $\varDelta d\varphi$ benachbarter Querschnitte, die zwischen dem Bogenanfange und der Mitte liegen, also nach Gl. (112)

$$\varDelta\varphi = \int \frac{M ds}{E\Theta} = \int_0^b \frac{Pa ds}{E\Theta} + \int_0^a \frac{Pz}{E\Theta} dz = \frac{Pa}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{2}\right).$$

In seine neue Lage kann der obere Teil des Schenkels auch dadurch gebracht werden, daß man ihn um einen auf der ursprünglichen Lage der Schenkelmittellinie gelegenen Punkt um den Winkel $\varDelta\varphi$ dreht, wenn dieser Punkt im Abstande u von der Angriffsstelle der Kraft P nach abwärts liegt. Man braucht den Abstand u nur so zu wählen, daß der Angriffspunkt von P bei der Drehung einen Weg $\varDelta l$ zurücklegt. Daraus folgt die Bedingungsgleichung

$$u\varDelta\varphi = \varDelta l, \text{ also } u = \frac{6b + 2a}{6b + 3a} \cdot a.$$

Da u unabhängig von P ist, folgt, daß sich der überstehende Teil des Schenkels in der Tat fortwährend um denselben Punkt dreht, dessen Lage zugleich ermittelt ist. — Rechnungen dieser Art sind zuweilen nötig, um sich über die Art der elastischen Bewegungen, die in Meßinstrumenten oder auch in Maschinen auftreten und dabei leicht einen störenden Einfluß ausüben, rasch Rechenschaft geben zu können.

33. Aufgabe. Ein Bogenträger von halbkreisförmiger Gestalt (Abb. 54) ist gelenkförmig aufgelagert. Am rechten Bogenende ist eine Stange in radialer Richtung angebracht, an der ein Kräftepaar Pp angreift. Die Stange überträgt diese Belastung auf den Bogen. Man soll die Komponenten A und H des Auflagerdrucks am linken Trägerende berechnen, wobei anzunehmen ist, daß der Träger überall gleichen Querschnitt hat. Ferner soll noch angegeben werden, für welchen Querschnitt das Biegungsmoment zu Null wird.

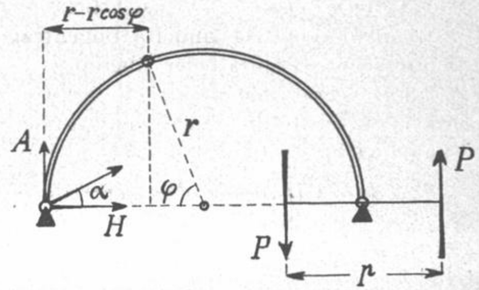

Abb. 54.

Lösung. Aus einer Momentengleichung für das rechte Auflager erhält man sofort

$$A = \frac{Pp}{2r}.$$

Zur Berechnung von H dient Gl. (118), wobei

$$M_b = A(r - r\cos\varphi) = Pp\,\frac{1-\cos\varphi}{2}$$

zu setzen ist. Man erhält

$$H = \frac{\int M_b z\,ds}{\int z^2 ds} = \frac{1}{2}\,\frac{Pp\int(1-\cos\varphi)r\sin\varphi\, r\,d\varphi}{\int r^2\sin^2\varphi\cdot r\,d\varphi},$$

wobei die Integrale zwischen 0 und π zu nehmen sind.

Nach Ausführung der Integration findet man

$$H = \frac{2Pp}{r\pi}.$$

Das Biegungsmoment wird zu Null für den Schnittpunkt der Stabmittellinie mit der Resultierenden aus A und H. Für den Winkel α, den diese Resultierende mit der Wagerechten bildet, erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{H} = \frac{Pp}{2r} : \frac{2Pp}{r\pi} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$$

Der zugehörige Winkel α ist gleich $38^0\,9'$. Hieraus folgt der Zentriwinkel φ jenes Querschnitts, in dem keine Biegungsspannungen auftreten zu,

$$\varphi = 180^0 - 2\alpha = \text{rund } 104^0.$$

Anmerkung. Hinsichtlich der Lagerung und der Belastung stimmt der hier behandelte Bogenträger vollständig mit der in § 42 untersuchten Spiralfeder überein. Es besteht nur der Unterschied, daß die Spiralfeder eine Reihe von Windungen enthält, während hier die Mittellinie, wie man sagen kann, nur einen halben Umlauf macht.

34. Aufgabe. Ein winkelförmiger Rahmen ABC (Abb. 55) ist aus zwei Stangen AB und BC zusammengesetzt, die im Punkte B steif miteinander verbunden sind, so daß sie sich nicht gegeneinander drehen können. Der Rahmen ist in den Punkten A und C nach Art eines Bogenträgers mit zwei Gelenken drehbar aufgelagert. Man soll die Auflagerkräfte in A und C berechnen, die durch eine im Scheitel B angreifende horizontale Last P von 1000 kg hervorgerufen werden. Dabei soll nur auf den Einfluß der Biegungsmomente auf die Formänderung geachtet werden.

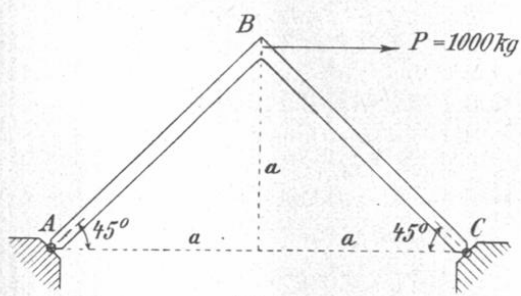

Abb. 55.

Erste Lösung. Man denke sich zunächst C auf ein Rollenlager gesetzt, so daß sich dieses Ende in horizontaler Richtung frei verschieben kann. Dann wird in C ein senkrecht nach oben gerichteter Auflagerdruck übertragen, der aus einer Momentengleichung für den Punkt A gleich $\frac{1}{2}P$ gefunden wird. Den Auflagerdruck in A zerlegen wir in eine vertikale Komponente von der Größe $\frac{1}{2}P$, die nach abwärts geht und in eine horizontale nach links gerichtete Komponente von der Größe P. Für einen Querschnitt der Stange AB mit der Abszisse x ist das Biegungsmoment

$$M_{\text{I}} = -\tfrac{1}{2}Px + Px = \tfrac{1}{2}Px.$$

Ebenso wird für die zweite Stange BC

$$M_{\text{II}} = \frac{P}{2}(2a - x)$$

gefunden. Nach Gl. (122) erhält man hiermit die horizontale Verschiebung von C, nämlich

$$\Delta l = \frac{\sqrt{2}}{E\Theta}\left(\int_0^a M_{\mathrm{I}} x\,dx + \int_a^{2a} M_{\mathrm{II}}(2a - x)\,dx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{E\Theta}\; P\frac{a^3}{3}.$$

Hierbei war darauf zu achten, daß $ds = dx\sqrt{2}$ ist. Nun bringen wir an C eine horizontale Kraft Z an, die diese Spannweitenänderung wieder rückgängig macht. Das von Z im Querschnitte x der Stange AB hervorgerufene Biegungsmoment ist (vom Vorzeichen abgesehen) gleich Zx. Die Formänderung der Stange BC ist symmetrisch zu der von AB und für die durch Z hervorgerufene Spannweitenänderung erhält man daher nach Gl. (122) (wiederum abgesehen vom Vorzeichen)

$$\Delta l = 2\cdot\frac{1}{E\Theta}\int_0^a Zx^2 dx\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{E\Theta}\,Z\frac{a^3}{3}.$$

Die Gleichsetzung mit dem vorigen Werte von Δl liefert

$$Z = \tfrac{1}{2}P.$$

Im ganzen haben wir daher am linken Ende eine nach links gehende horizontale Komponente von der Größe $\frac{1}{2}P$ und eine ebenso große nach abwärts gehende vertikale Komponente, d. h. die Resultierende aus beiden liefert eine in die Verlängerung der Stange AB fallende Auflagerkraft. Ähnliches gilt für die Stange BC. Die Biegungsmomente werden daher überall zu Null.

Zweite Lösung. Wir betrachten die schon vorher mit Z bezeichnete Komponente der Auflagerkraft am rechten Ende als die statisch unbestimmte Größe, die nach dem Satze von Castigliano die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen muß. Der von den Biegungsmomenten herrührende Teil der Formänderungsarbeit wird aber zu Null, wenn wir P einfach nach den Richtungen der beiden Stangen zerlegen und die beiden Komponenten durch die Stangen auf die Auflager weiter leiten. Wir finden damit ohne weitere Rechnung das schon in der vorigen Lösung abgeleitete Resultat.