universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Vierter Abschnitt. Die Formänderungsarbeit

urn:nbn:at:at-ubi:2-7796

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

§ 32. Die potentielle Energie eines gebogenen Stabes.

Wenn man annimmt, daß die Schubspannungen neben den Normalspannungen nicht in Betracht kommen, oder wenn es sich um den Fall der reinen Biegungsbeanspruchung handelt, hat man für die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit nach Gl. (39)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E},$$

und für σ kann nach Gl. (46)

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

gesetzt werden. Setzt man dies ein, multipliziert A mit dem Volumenelemente $d\tau$ und integriert über das Volumen eines Balkenelementes von der Länge dx, so erhält man für die in diesem Balkenelemente aufgespeicherte Formänderungsarbeit dA den Ausdruck

$$dA = \int \frac{M^2}{2E\Theta^2} y^2 d\tau.$$

Für $d\tau$ kann man aber $dx \cdot dF$ setzen. Der Faktor dx kann vor das Integralzeichen gesetzt werden, ebenso M, E und Θ, und man erhält

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta^2} dx \int y^2 dF.$$

Das verbliebene Integral stellt das Trägheitsmoment des Querschnitts dar; der Ausdruck vereinfacht sich daher zu

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx. \tag{87}$$

Zu demselben Ausdrucke kann man auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Betrachtet man nämlich nur das eine Balkenelement während der Formänderung, so sind die an den beiden Querschnittsflächen auftretenden Normalspannungen äußere Kräfte für dieses Körperstück, und die von ihnen geleistete Arbeit muß gleich der in dem Stücke aufgespeicherten potentiellen Energie sein. Eine Bewegung des Körperstücks als Ganzes kommt dabei nicht in Betracht, da sich die äußeren Kräfte daran im Gleichgewichte halten, die bei einer solchen Bewegung von ihnen geleistete Arbeit daher gleich Null ist. Wir brauchen uns daher nur um die relativen Bewegungen innerhalb des Körperelements zu kümmern. Am einfachsten geben wir uns über diese Rechenschaft, wenn wir uns den einen Querschnitt festgehalten denken. Der andere Querschnitt führt dann gegen diesen eine Drehung um den Winkel $d\varphi$ aus, der in Gl. (74) zu

$$d\varphi = \frac{M}{E\Theta} dx$$

berechnet ist. Die Normalspannungen an dem festgehaltenen Querschnitte leisten während dieser Bewegung keine Arbeit, da ihre Angriffspunkte in Ruhe bleiben. Am anderen Querschnitte können wir uns die Normalspannungen zu einem Kräftepaare vereinigt denken, dessen Moment gleich dem Biegungsmomente M ist. Die Arbeit bei der Drehung ist daher

$$dA = \tfrac{1}{2} M d\varphi = \frac{M^2}{2E\Theta} dx,$$

wie schon vorher gefunden war. Der Faktor $\frac{1}{2}$ mußte hier wieder deshalb beigefügt werden, weil das Moment nicht während der ganzen Bewegung dieselbe Größe M hat, sondern von Null an proportional mit der schon ausgeführten Formänderung bis auf den Endwert M anwächst. Als Mittelwert des Moments während der ganzen Drehung ist daher $\frac{1}{2} M$ einzuführen.

Die in dem ganzen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit A ist demnach

$$A = \tfrac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} dx. \tag{88}$$

Wenn die Arbeit der Schubspannungen nicht vernachlässigt werden soll, muß hierzu noch ein Glied gefügt werden, das aus den Entwicklungen in § 28 unmittelbar entnommen werden kann. Man muß dabei beachten, daß die Schubspannungen bei der Drehung der beiden Querschnitte gegeneinander keine Arbeit leisten, da die Wege der Angriffspunkte hierbei senkrecht zur Kraftrichtung stehen, während umgekehrt bei der Schiebung des einen Querschnitts relativ zum anderen die Bewegung senkrecht zu den Normalspannungen erfolgt, so daß hierbei nur die Schubspannungen Arbeit leisten. In der Tat wird daher die ganze Formänderungsarbeit für ein Balkenelement durch einfache Summierung der beiden Werte erhalten, von denen sich der eine nur auf die Drehung und die Normalspannungen, der andere nur auf die Schiebung und die Schubspannungen bezieht. Für ein Balkenelement war die Arbeit der Schubspannungen in § 28 zu

$$\tfrac{1}{2} V du = \varkappa \frac{V^2}{2GF} dx$$

gefunden. Mit Rücksicht auf die Schubspannungen wird daher die ganze im gebogenen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu

$$A = \tfrac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} dx + \tfrac{1}{2} \int \frac{\varkappa V^2}{GF} dx \tag{89}$$

erhalten.

Wenn etwa neben der Biegungsbeanspruchung noch eine achsiale Belastung des Stabes vorkommen sollte, muß dazu noch ein drittes Glied gefügt werden. An dieser Stelle soll aber auf solche Fälle nicht weiter eingegangen werden.

Die im Stabe aufgespeicherte potentielle Energie muß ferner auch gleich der von den äußeren Kräften während der Formänderung geleisteten Arbeit sein, wenn wir dabei voraussetzen, daß die Belastung ganz allmählich erfolgt, so daß die lebendige Kraft der bewegten Massen während der Formänderung vernachlässigt werden kann. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, noch einen zweiten Ausdruck für A aufzustellen. Dieser gilt zugleich in derselben Form nicht nur für den gebogenen Stab, sondern auch für jeden

Körper von beliebiger Gestalt und für jede Belastung, falls nur der Körper dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorcht und genügend gestützt ist, so daß er keine Verschiebung ohne Formänderung auszuführen vermag. Die an einem solchen Körper angreifenden äußeren Kräfte teilt man in „Lasten“ und in „Auflagerkräfte“ ein. Als „Lasten“ sind dabei jene äußeren Kräfte bezeichnet, die man ganz nach Belieben wählen darf, da sie an keinerlei Bedingungen gebunden sind, während die Auflagerkräfte von den Lasten abhängig sind und den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften genügen müssen.

In den gewöhnlich vorkommenden Fällen leisten die Auflagerkräfte überhaupt keine Arbeit. Ihre Angriffspunkte sind nämlich entweder vollständig festgehalten oder, wenn ein Angriffspunkt längs einer Auflagerbahn beweglich ist, steht die Verschiebung, die er erfährt, senkrecht zur Richtung der Auflagerkraft; in beiden Fällen ist also die Arbeit gleich Null. Nur dann, wenn etwa ein Auflagerpunkt längs eines Gleitlagers verschieblich sein sollte, in dem eine Reibung von merklichem Betrage zu überwinden wäre, käme die Arbeit dieser Reibung in Betracht. Dieser Fall soll aber bei allen Betrachtungen dieses Abschnittes ausdrücklich ausgeschlossen werden; nur unter dieser Voraussetzung gelten, wie wohl zu beachten ist, die hier abzuleitenden Sätze streng.

Wir brauchen also jetzt nur die von den Lasten P geleisteten Arbeiten zu beachten. Während des Anwachsens der Belastung und der von ihr hervorgebrachten Formänderung leistet jede Kraft P eine Arbeit, die gleich dem Linienintegrale der Kraft über den von ihrem Angriffspunkt zurückgelegten Weg ist. Diese einzelnen Arbeitsbeträge sind verschieden, je nach der Art, wie die Belastung hergestellt wird: sie sind nämlich abhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Lasten aufgebracht werden. In jedem Falle muß aber, nachdem der vorgeschriebene Endzustand erreicht ist, die Summe der geleisteten Arbeiten gleich der nur von diesem Endzustande abhängigen potentiellen Energie des deformierten Körpers, also

bei einem gebogenen Stabe gleich dem durch Gl. (89) angegebenen Werte sein. Diese Summe ist daher unter den vorher ausgesprochenen Voraussetzungen unabhängig von der Reihenfolge in der Herstellung der Belastung. Es mag dagegen noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß dies z. B. nicht gilt, wenn der Körper durch Gleitlager mit Reibungen von merklichem Betrage gestützt ist. Da aber von solchen Fällen abgesehen werden sollte, gelangen wir zu einem einfachen und eindeutigen Ausdrucke für die Formänderungsarbeit, indem wir annehmen, daß alle Lasten P gleichzeitig aufgebracht werden und zusammen in dem gleichen Verhältnisse anwachsen. Bezeichnet man die Verschiebung, die der Angriffspunkt einer dieser Lasten P in der Richtung von P erfährt, mit y, so ist die Arbeit von P wegen des allmählichen Anwachsens von P wie in früheren Fällen dieser Art gleich $\frac{1}{2}Py$ zu setzen, und für die Formänderungsarbeit erhalten wir daher den Ausdruck

$$A = \tfrac{1}{2}\sum Py, \tag{90}$$

wobei die Summierung über alle Lasten zu erstrecken ist.

Wenn der Balken nur eine einzige Last trägt, kann die Gleichsetzung der Ausdrücke (90) und (88) oder (89) zur Berechnung der Verschiebung des Angriffspunktes der Last benutzt werden. Dies möge an dem Beispiele eines Balkens, der am einen Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Last P trägt, erläutert werden. Im Abstande x vom freien Ende ist $M = Px$. Wenn wir den Einfluß der Schubkräfte auf die Durchbiegung vernachlässigen, erhalten wir A nach Gl. (88)

$$A = \frac{P^2}{2E\Theta}\int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta}.$$

Die Durchbiegung f des freien Endes folgt daher aus

$$\tfrac{1}{2}Pf = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta} \quad \text{zu} \quad f = \frac{Pl^3}{3E\Theta}.$$

Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit dem in Gl. (82) für den Biegungspfeil eines beiderseits gestützten

Balkens, der in der Mitte eine Last trägt. Der aus der Mauer vorkragende Balken verhält sich nämlich wie die Hälfte eines beiderseits gestützten von der doppelten Länge, der in der Mitte die doppelte Last trägt. In der Tat kann der soeben für f abgeleitete Wert auch in der Form

$$f = \frac{2P \cdot (2l)^3}{48 E \Theta}$$

geschrieben werden, womit die Übereinstimmung nachgewiesen ist.

Selbstverständlich kann auch hier der Einfluß der Schubspannungen auf die Durchbiegung f leicht berücksichtigt werden, indem man A nicht nach Gl. (88), sondern nach Gl. (89) berechnet. Man kommt dann wieder zu den gleichen Resultaten, wie nach dem früheren Verfahren.

§ 33. Die Sätze von Castigliano.

Es möge jetzt angenommen werden, daß eine der Lasten, die der Balken trägt, etwa die Last P_i, einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, während alle übrigen Lasten ungeändert bleiben.[1]) Wir wollen berechnen, um wieviel sich die Formänderungsarbeit A hierbei ändert. Das Verhältnis beider Zuwüchse, also der Differentialquotient $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ kann auf verschiedene Art ermittelt werden, zunächst durch partielle Differentiation von Gl. (90) nach P_i. Hierbei ist zu beachten, daß jedes y von allen Lasten, die der Balken trägt, also auch von P_i abhängig ist. Das Glied $P_1 y_1$ der Summe in Gl. (90) liefert also bei der Differentiation einen Beitrag

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i}$$

und ebenso bei allen anderen Gliedern, abgesehen von $P_i y_i$

1) Die Auflagerkräfte ändern sich natürlich mit P_i; aber auf sie kommt es bei der Berechnung von A nicht an, da eine solche Lagerung des Körpers vorausgesetzt ist, bei der die Auflagerkräfte keine Arbeit leisten können.

selbst. In diesem Gliede sind beide Faktoren veränderlich und es trägt daher (von dem Faktor $\frac{1}{2}$ abgesehen)

$$P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} + y_i$$

zu dem Differentialquotienten bei. Wenn wir wieder alle Glieder von gleichem Baue durch ein Summenzeichen zusammenfassen, erhalten wir demnach

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \tfrac{1}{2} \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} + \tfrac{1}{2} y_i. \tag{91}$$

Die Berechnung des Differentialquotienten durch Differentiieren hat den Sinn, daß wir uns P_i während des Aufbringens der Belastung stets etwas größer denken als vorher und es gleichzeitig mit den übrigen Lasten von Null an bis auf $P_i + dP_i$ anwachsen lassen. Anstatt dessen können wir uns aber auch zuerst alle Lasten in der früheren Größe und dann noch nachträglich dP_i aufgebracht denken. Auf die Formänderungsarbeit kann diese Reihenfolge in der Herstellung der Belastung keinen Einfluß haben, denn in jedem Falle wird zuletzt derselbe Endzustand erreicht[1]), und die Arbeit der äußeren Kräfte muß immer im ganzen gleich der potentiellen Energie des gebogenen Balkens sein, die nur von dem Endzustande abhängig ist.

1) Hierbei wird ebenso wie schon im vorhergehenden Paragraphen einfach als selbstverständlich betrachtet, daß zu einem gegebenen Belastungszustande eine dadurch eindeutig bestimmte Formänderung gehört. Nun sind freilich unter ganz besonderen Umständen Fälle möglich, bei denen diese Voraussetzung nicht zutrifft. Man betrachte z. B. eine Armbrust, die beim Fehlen äußerer Kräfte ebensowohl gespannt als ungespannt sein kann, je nach der Art, wie der Endzustand herbeigeführt wurde. Man muß also zugeben, daß nicht unter allen Umständen der Formänderungszustand ausschließlich von den an dem Körper angreifenden Lasten abhängt. Wenn man mit solchen Fällen zu tun bekommt, wird man aber niemals im Zweifel darüber sein, daß ein besonderer Umstand vorliegt, der eine eigene Betrachtung erforderlich macht. Es ist daher nicht nötig, hier ausführlich darauf einzugehen; vielmehr genügt es, wenn für die Gültigkeit der im Texte angestellten Betrachtungen ausdrücklich als Voraussetzung hingestellt wird, daß der Endzustand des deformierten Körpers eindeutig von den gegebenen Lasten abhängt.

Wenn zuerst alle Lasten P in ihrer ursprünglichen Größe aufgebracht wurden, leisteten sie dabei die Arbeit A. Wenn jetzt dP_i hinzugefügt wird, vermehrt sich die Einsenkung y_1 des Angriffspunktes der Last P_1 um

$$\frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i,$$

und dabei leistet die Kraft P_1, die während dieser Bewegung unverändert bleibt, die Arbeit

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i.$$

Dasselbe gilt für alle Lasten P, auch für P_i. Dazu kommt dann noch die Arbeit, die von dP_i selbst geleistet wird. Da dieser Lastzuwachs allmählich von 0 bis zum Endwerte dP_i anwächst, haben wir dafür

$$\tfrac{1}{2} dP_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Der Vergleich mit den vorigen Gliedern zeigt, daß die von dP_i selbst geleistete Arbeit unendlich klein zweiter Ordnung ist und daher gegen die nur von der ersten Ordnung unendlich kleinen Arbeiten der Kräfte P verschwindet. Nach Division mit dP_i erhalten wir demnach aus dieser Betrachtung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}. \tag{92}$$

Wir können noch einen dritten Weg einschlagen, um $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ zu berechnen. Zuerst sei nämlich auf den vorher unbelasteten Balken die Last dP_i aufgebracht. Sie leistet dabei die Arbeit

$$\tfrac{1}{2} dP_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Dann seien alle Lasten P zugefügt, so daß sie gleichzeitig und gleichmäßig von Null an bis auf ihre Endwerte zunehmen. Dabei biegt sich der Balken weiter durch und zwar überall um ebensoviel, als wenn er vorher unbelastet gewesen wäre. Die Kräfte P leisten dabei die vorher schon mit A gezeichnete Arbeit; gleichzeitig erfährt aber der Angriffs-

punkt von dP_i eine weitere Senkung y_i und die zugehörige Arbeitsleistung ist gleich

$$dP_i \cdot y_i$$

Im ganzen haben wir daher mit Weglassung des von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Gliedes

$$A + dA = \tfrac{1}{2}\sum Py + y_i dP_i,$$

woraus für den Differentialquotienten der dritte Ausdruck

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \tag{93}$$

folgt. Diese dritte Ableitung wäre freilich entbehrlich gewesen, denn schon aus dem Vergleiche der in den Formeln (91) und (92) gefundenen Werte geht hervor, daß

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} \tag{94}$$

sein muß, womit jene Ausdrücke in den zuletzt gefundenen übergehen.

Der Übersichtlichkeit wegen sprach ich bei den vorausgehenden Entwicklungen immer nur von der Formänderung, die ein Balken erfährt, der durch die Lasten P auf Biegung beansprucht wird. Dieselben Betrachtungen lassen sich aber sinngemäß auch auf einen Körper von irgendeiner anderen Gestalt übertragen, der so gestützt ist, daß er keine Verschiebung ohne Formänderung auszuführen vermag und an dem die Lasten P auf beliebige Art angebracht sind, falls nur für den Zusammenhang zwischen den Lasten und den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte das Superpositionsgesetz erfüllt ist und die Auflagerkräfte keine Arbeit leisten können. Hierbei muß nochmals betont werden, daß die Lasten P bei den vorhergehenden Entwicklungen als willkürlich veränderlich angesehen wurden; die Auflagerkräfte an den Stützpunkten, die von den Lasten P abhängig sind, dürfen daher bei der Anwendung der vorstehenden Formeln in die Lasten P nicht mit eingerechnet werden.

Wenigstens zunächst nicht; dagegen ist ja ohne weiteres klar, daß man bei einem Körper, der an mehr Stellen gestützt ist, als nötig wäre, um ihn vollständig festzuhalten, sich auch einige Stützen

entfernt und die zugehörigen Auflagerkräfte als Lasten P angebracht denken kann, wenn man sich vorbehält, diese Lasten nachträglich so zu wählen, daß die Verschiebung ihrer Angriffspunkte zu Null wird. Jedenfalls müssen aber die beibehaltenenen Stützen immer noch genügen, den Körper vollständig festzuhalten. Im übrigen ist dieses Verfahren ein Kunstgriff, der mit dem, was vorher bewiesen wurde, unmittelbar nichts zu tun hat. Es mag noch bemerkt werden, daß man durch einen ganz ähnlichen Kunstgriff die Gültigkeit der vorhergehenden Formeln auch für den Fall erweitern kann, daß der Körper überhaupt nicht oder nicht hinreichend gestützt ist, um Bewegungen ohne Formänderung auszuschließen, indem man die Verschiebungen y relativ zu einem in geeigneter Weise an dem Körper festgehefteten Koordinatensysteme rechnet und an den Punkten, durch die das Koordinatensystem geführt ist, willkürlich Auflagerkräfte zufügt, die sich für den tatsächlich gegebenen Belastungsfall nachträglich gleich Null erweisen. Hierauf brauche ich aber an dieser Stelle nicht weiter einzugehen, da in der Folge immer nur von Körpern die Rede sein wird, die hinreichend gestützt sind.

Unter der zu einer Kraft P gehörigen Verschiebung y ihres Angriffspunktes ist übrigens immer jene Komponente der gesamten Verschiebung zu verstehen, die in die Richtung der Kraft P fällt. Auf die Verschiebungskomponenten, die rechtwinklig zur Kraftrichtung stehen, kommt es bei der Formänderungsarbeit überhaupt nicht an. Ist der Weg y entgegengesetzt zum Pfeile der Kraft gerichtet, so muß er natürlich negativ gerechnet werden.

Gl. (93) spricht den von Castigliano aufgestellten Satz aus: „Die Verschiebung des Angriffspunktes einer Last bei der elastischen Formänderung eines dem Hookeschen Gesetze unterworfenen (und so, wie vorher vorausgesetzt gestützten) Körpers ist gleich der nach dieser Last genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit.“

Diesem Satze schließt sich ein zweiter an, der durch eine einfache Schlußfolgerung aus ihm gewonnen wird. Ist nämlich unter den Lasten eine, von der wir wissen, daß ihr Angriffspunkt keine Verschiebung erfährt, so muß für sie nach Gl. (93)

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0 \tag{95}$$

sein. Damit erhalten wir eine Gleichung, die zur Berechnung dieser Kraft, wenn deren Größe unbekannt war, benutzt werden kann. Gerade hierauf beruht die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen in der Festigkeitslehre. Gewöhnlich handelt es sich dabei um die Berechnung der Auflagerdrücke von statisch unbestimmten Konstruktionen, d. h. von solchen Konstruktionen, die mehr Auflagerbedingungen unterworfen sind, als zum Festhalten erforderlich wären. Man wählt dann gewisse Komponenten der Auflagerkräfte als die „statisch unbestimmten Größen des Problems" aus, d. h. man sieht sie als Lasten von unbekannter Größe an, während die übrigen Komponenten der Auflagerkräfte auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik in diesen Unbekannten und den gegebenen Lasten ausgedrückt werden können. Auch alle Biegungsmomente, Scherkräfte usf. lassen sich dann in den gewählten Unbekannten ausdrücken und ebenso auch die Formänderungsarbeit A' nach Gl. (88) oder (89). Da man nun weiß, daß die Angriffspunkte der unbekannten Auflagerkomponenten infolge der ihnen vorgeschriebenen Auflagerbedingungen keine Verschiebungen in den Richtungen dieser Kräfte ausführen können, liefert die Anwendung von Gl. (95) für jeden dieser Angriffspunkte eine Bedingungsgleichung und man erhält damit ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Man braucht dann nur noch diese Gleichungen, die alle vom ersten Grade sind, nach den Unbekannten aufzulösen.

Die Methode ist übrigens noch etwas allgemeiner, als sie bis jetzt dargestellt wurde. Es ist nämlich nicht nötig, daß etwa P_i nur eine Einzelkraft bezeichne: es kann auch irgendeine Gruppe von äußeren Kräften vorstellen, wenn nur unter y_i eine Verschiebungsgröße verstanden wird, durch deren Multiplikation mit P_i (oder dem Mittelwerte von P_i bei allmählichem Aufbringen der Belastung) die geleistete Arbeit gefunden wird. Auch durch diese Erweiterung wird an den früheren Schlüssen gar nichts geändert.

Häufig ist es nämlich zweckmäßig, ein Kräftepaar an einer Auflagerstelle, an der der Träger eingespannt wird, als

statisch unbestimmte Größe in die Rechnung einzuführen. Die Arbeit eines Kräftepaares hängt aber von der Drehung ab, die die Angriffsstelle im Sinne der Achse des Kräftepaares erfährt und unter dem zugehörigen y ist daher in diesem Falle der Drehungswinkel zu verstehen. Wenn man weiß, daß der Träger an dieser Stelle fest eingespannt ist, der Drehungswinkel also verschwinden muß, erhält man auch in diesem Falle die Bedingungsgleichung (95), in der jetzt unter P_i das unbekannte Auflagermoment zu verstehen ist.

Aber auch nach einer zweiten Richtung ist diese Betrachtung noch einer Erweiterung fähig. Es ist zur Durchführung der Berechnung der statisch unbestimmten Größen oft nützlich, eine Konstruktion in zwei (oder mehr) Teile zu zerlegen. Gewöhnlich führt man diese Zerlegung in solcher Weise aus, daß jeder Teil für sich genommen einen statisch bestimmten Träger bilden würde. Man muß dann nur die an der Verbindungsstelle zwischen beiden Trägerteilen in Wirklichkeit übertragenen inneren Kräfte als äußere Kräfte, also als Belastungen der beiden Teilstücke betrachten. Diese treten dann als die statisch unbestimmten Größen des Problems auf und auch für sie gilt Gl. (95).

Um dies zu erkennen, bedenke man, daß die ganze Formänderungsarbeit A hier in zwei Teile zerlegt werden kann

$$A = A_1 + A_2, \tag{96}$$

so daß A_1 die im ersten Teilstücke aufgespeicherte potentielle Energie bezeichnet und ebenso A_2 die im anderen Teilstücke. Bedeutet nun P_i eine von dem zweiten Teilstücke auf das erste an der Verbindungsstelle übertragene unbekannte Kraft oder ein ebensolches Moment, so hat man für den ersten Teil nach Gl. (93)

$$y_i = \frac{\partial A_1}{\partial P_i},$$

und dieselbe Gleichung läßt sich auch auf das zweite Teilstück anwenden. Wenn man nun weiß, daß die beiden Teile so miteinander zusammenhängen, daß die Verschiebungsgröße

y_i für beide gleich groß sein muß, so liefert dies die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial A_1}{\partial P_i} = -\frac{\partial A_2}{\partial P_i}.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite war nämlich nötig, weil am zweiten Trägerteile nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion die statisch unbestimmte Größe gleich $-P_i$ ist. Aus Gl. (96) folgt daher auch in diesem Falle

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{\partial A_1}{\partial P_i} + \frac{\partial A_2}{\partial P_i} = 0.$$

Wir können jetzt alle diese Betrachtungen zu dem anderen von Castigliano herrührenden Satze zusammenfassen:

„Die partiellen Ableitungen der Formänderungsarbeit eines dem Hookeschen Gesetze unterworfenen Körpers nach den statisch unbestimmten Kräften, die so ausgewählt sind, daß sie selbst keine Arbeit leisten, sind gleich Null und aus den sich hieraus ergebenden Bedingungsgleichungen können die statisch unbestimmten Kräfte selbst berechnet werden.“

Gewöhnlich gibt man diesem Satze noch eine etwas andere Form, die zwar für die praktische Anwendung nichts neues lehrt, die sich aber durch die gedrängte Art der Aussage dem Gedächtnisse besser einprägen läßt. Die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ist nämlich eine notwendige Bedingung dafür, daß P_i so gewählt sei, um A entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum zu machen. Nun muß ein Minimum der Formänderungsarbeit immer bestehen, und da die vorstehende Gleichung für die Unbekannte P_i, wie aus den früheren Entwickelungen hervorging, vom ersten Grade ist, muß die einzige Lösung, die sie zuläßt, diesem Minimum entsprechen.

Mit Rücksicht hierauf kann man den vorhergehenden Satz auch in der Form aussprechen:

„Die statisch unbestimmten Größen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.“

Er wird daher auch als der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bezeichnet. Dabei muß aber, wie nochmals hervorgehoben werden soll, beachtet werden, daß die Minimumseigenschaft selbst bei den Anwendungen des Satzes gar keine Rolle spielt, sondern daß es dabei immer nur auf die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ankommt.

Zur Erläuterung des Rechenverfahrens soll noch ein einfaches Beispiel behandelt werden. Ich wähle dazu einen Balken, der über zwei Öffnungen von ungleicher Größe reicht und eine über die ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung q auf die Längeneinheit trägt. Als statisch unbestimmte Größe wählen wir den Auflagerdruck Z (vgl. Abb. 38) an der Mittelstütze. Hierbei ist zu beachten, daß damit schon ausgesprochen ist, daß Z mit zu den „Lasten" gerechnet werden soll, so daß nur noch B und C als Auflagerkräfte übrig bleiben. Für die Auflagerkräfte B und C folgt dann aus den Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Balken

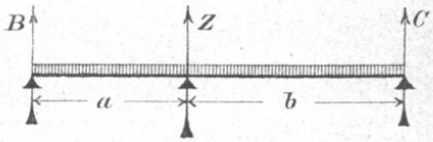

Abb. 38.

$$B = \frac{q(a+b)}{2} - \frac{Zb}{a+b}; \quad C = \frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}.$$

Für das Biegungsmoment in der ersten Öffnung hat man

$$M_1 = Bx - \frac{qx^2}{2}.$$

Diesen Wert setzen wir in den Ausdruck (88) für die Formänderungsarbeit ein. Das Trägheitsmoment des Balkens und der Elastizitätsmodul E sind stillschweigend als konstant über die ganze Balkenlänge vorausgesetzt; es handelt sich also nur darum, das Integral

$$\int M^2 dx$$

auszuführen. Dies wird hier für die erste Öffnung

$$\int_0^a \left(B^2x^2 - Bqx^3 + \frac{q^2x^4}{4}\right) dx = B^2\frac{a^3}{3} - Bq\frac{a^4}{4} + q^2\frac{a^5}{20}.$$

Dazu kommt der Beitrag der zweiten Öffnung, der durch eine Rechnung von derselben Art festgestellt werden kann. Einfacher ist es aber, darauf aufmerksam zu machen, daß jede Öffnung bei geeigneter Aufstellung des Beobachters als die links liegende angesehen werden kann und daß der soeben berechnete Wert unmittelbar auch für die andere Öffnung benutzt werden kann, wenn man darin B mit C und a mit b vertauscht. Im ganzen erhält man daher für die Formänderungsarbeit des durchlaufenden Balkens

$$A = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\frac{B^2a^3}{3} - \frac{Bqa^4}{4} + \frac{q^2a^5}{20} + \frac{C^2b^3}{3} - \frac{Cqb^4}{4} + \frac{q^2b^5}{20}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird durch den gesuchten Wert der Unbekannten Z zu einem Minimum gemacht oder mit anderen Worten, der Differentialquotient des Ausdrucks nach Z ist gleich Null zu setzen. Bei der Ausführung der Differentiation ist zu beachten, daß Z nur in B und C vorkommt, deren Abhängigkeit von Z schon vorher festgestellt wurde. Man erhält

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\left(\frac{2Ba^3}{3} - \frac{qa^4}{4}\right)\frac{\partial B}{\partial Z} + \left(\frac{2Cb^3}{3} - \frac{qb^4}{4}\right)\frac{\partial C}{\partial Z}\right\}.$$

Setzt man dies gleich Null und führt für B und C ihre Werte ein, ebenso für die Differentialquotienten die daraus hervorgehenden

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -\frac{b}{a+b}; \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = -\frac{a}{a+b},$$

so findet man die Bedingungsgleichung

$$0 = -\frac{b}{a+b}\left(\frac{2a^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}\right] - \frac{qa^4}{4}\right) -$$
$$-\frac{a}{a+b}\left(\frac{2b^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}\right] - \frac{qb^4}{4}\right),$$

deren Auflösung den Wert der statisch unbestimmten Größe Z liefert. Man erhält

$$Z = q\cdot\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{8ab}.$$

Wenn man $a = b$ setzt, geht dies in $Z = \frac{5}{4} qa$ über, was wir für diesen besonderen Fall schon in § 29 gefunden haben.

Auch die Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit macht, wie schon aus diesem einfachen Beispiele hervorgeht, die Durchführung längerer Rechnungen nötig. In dieser Hinsicht ist die Methode der älteren kaum überlegen; ihr Hauptvorzug besteht darin, daß sie eine einfache Vorschrift für den ganzen Rechnungsgang aufstellt, die den Rechner der Mühe des Nachdenkens so ziemlich enthebt. Die Rechnung spielt sich in allen Fällen ungefähr in derselben Weise ab und stellt während ihrer Abwickelung die möglichst geringen Anforderungen an eine höhere geistige Tätigkeit. Nur weil der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bei seiner Anwendung zugleich ein Minimum von Gedankenarbeit erfordert, ist er heute zu der Bedeutung eines der wichtigsten Sätze der technischen Mechanik gelangt. Übrigens soll in dieser Bemerkung durchaus nicht etwa irgend ein Vorwurf enthalten sein; vielmehr geht das Streben der Wissenschaft stets auf eine Ersparung von Gedankenarbeit hinaus und jede Änderung der früheren Darstellung, die hierzu verhilft, bildet einen wichtigen Fortschritt.

§ 34. Stoßweise Belastung.

Bei allen vorausgehenden Berechnungen der Formänderungsarbeit ist angenommen worden, daß die Belastung ganz allmählich von Null an auf ihren Höchstwert gesteigert wird. Dies war nötig, um auszuschließen, daß ein merklicher Teil der von der äußeren Kraft geleisteten Arbeit zur Beschleunigung der Masse des belasteten Körpers verwendet, also in kinetische Energie umgesetzt wird. Diese Untersuchungen bedürfen aber jetzt noch einer Ergänzung. Die allmähliche Steigerung der Belastung bildet zwar die Regel; man kann aber durch geeignete Vorrichtungen auch erreichen, daß die Last plötzlich aufgebracht wird und von Anbeginn der Belastung an mit ihrer vollen Größe auf den Träger einwirkt. Den Weg des Angriffspunktes der Belastung während der

elastischen Formänderung bis zum größten Ausschlage und in der Richtung der Kraft gemessen, wollen wir der Kürze halber in diesem Falle den dynamischen Biegungspfeil nennen und ihn mit f_d bezeichnen, obschon die ganze Betrachtung nicht nur für den Fall der Biegung, sondern für jeden Belastungsfall gültig ist. Die Arbeit der Last P ist dann gleich

$$Pf_d$$

zu setzen, da hier der Faktor $\frac{1}{2}$ fortfällt. Zunächst sieht man ein, daß f_d größer sein muß, als der früher berechnete statische Biegungspfeil f_s, der zu derselben Last P im Gleichgewichtszustande gehören würde. Denn wenn die elastische Formänderung bis zu f_s vorgeschritten ist, hat P schon eine Arbeit Pf_s geleistet, die nach den früheren Untersuchungen doppelt so groß ist, als die bei dieser Formänderung aufgespeicherte potentielle Energie. Die andere Hälfte der geleisteten Arbeit muß sich daher — unter der Voraussetzung, daß die Formänderung vollkommen elastisch ist — in lebendige Kraft der sich bewegenden Massen umgesetzt haben. Nach dem Trägheitsgesetze geht dann die Bewegung über die Formänderung f_s hinaus weiter. Diese weitere Bewegung ist eine verzögerte, da jetzt eine größere Belastung als P erforderlich wäre, um den erreichten Formänderungszustand aufrecht zu erhalten. Dabei verwandelt sich die vorher angesammelte lebendige Kraft ebenfalls in Formänderungsarbeit, und wenn die Bewegung bis zu f_d fortgeschritten ist, ist die ganze zugeführte Energie in diese Form umgewandelt, so daß dann

$$A = Pf_d$$

gesetzt werden kann. In dieser Lage kann der Körper aber nicht verharren, da die Formänderung größer ist, als es der Last P im Gleichgewichtszustande entspricht; er geht daher wieder zurück und führt Schwingungen um die Gleichgewichtslage f_s herum aus.

Man weiß aus der Erfahrung, daß diese Schwingungen allmählich erlöschen. Dies rührt zum Teile vom Luftwiderstande und anderen Bewegungswiderständen, der Hauptsache nach aber

davon her, daß eine schnell eintretende Formänderung, auch wenn sie nicht besonders groß ist, nicht mehr vollkommen elastisch erfolgt. Hierbei macht sich die schon in § 10 erwähnte innere Reibung geltend. Mit Rücksicht hierauf tut man besser, die vorige Gleichung durch

$$A = n \cdot P f_d$$

zu ersetzen, wobei nun n einen von den Nebenumständen des Falles abhängigen Zahlenfaktor bedeutet, der sicher ein echter Bruch, unter gewöhnlichen Umständen aber nicht viel kleiner als 1 ist.

Hier handelt es sich nicht darum, den Verlauf der Schwingungen zu untersuchen, die der Körper um die Gleichgewichtslage ausführt, sondern nur um die größte Beanspruchung des Materials, die er während des ganzen Vorganges erleidet. Diese hängt von der größten Formänderung ab, die überhaupt vorkommt, also von f_d. Wir entscheiden die Frage am einfachsten dadurch, daß wir berechnen, wie groß eine Last P' sein müßte, die im Gleichgewichtszustande dieselbe Formänderung f_d hervorbrächte, wie sie hier unter P auftritt. Wir wissen, daß für diese

$$A = \tfrac{1}{2} P' f_d$$

wäre, und da A in beiden Fällen dieselbe potentielle Energie, die nur von dem erreichten Formänderungszustande abhängig ist, bedeutet, erhalten wir durch Gleichsetzung beider Werte

$$P' = 2nP \tag{97}$$

oder, wenn wir näherungsweise $n = 1$ setzen,

$$P' = 2P. \tag{98}$$

Beim plötzlichen Aufbringen der Belastung wird also ein Träger doppelt so stark beansprucht, als wenn er dieselbe Belastung im Gleichgewichtszustande trägt. Auf diesen einfachen Satz ist bei den Festigkeitsberechnungen vieler Tragkonstruktionen Rücksicht zu nehmen.

Ähnlich liegt z. B. der Fall bei Eisenbahnbrücken, über die ein Zug mit großer Geschwindigkeit fährt. Freilich ist der Vorgang hier verwickelter und überhaupt nur auf Grund einer eingehenden Unter-

suchung der auftretenden Schwingungen wenigstens näherungsweise zu verfolgen. Immerhin läßt sich von vornherein erwarten, daß größere Formänderungen auftreten werden, als sie einer gleichen ruhenden Belastung entsprechen würden, und man kann diesem Umstande auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen dadurch Rechnung tragen, daß man die bewegte Last mit einem Zahlenfaktor multipliziert in die Rechnung einführt. So rührt von Gerber die Vorschrift her, daß man die bewegte Last in solchen Fällen mit dem $1^1/_2$fachen Betrage in Ansatz bringen soll. Der Zahlenfaktor ist kleiner als der in Gl. (98) gefundene Wert 2, was sich damit rechtfertigt, daß hier in der Tat von einem plötzlichen Aufbringen in die ungünstigste Laststellung nicht die Rede sein kann, so daß die Verstärkung der Beanspruchung niedriger zu schätzen ist als dort.

Schon das plötzliche Aufbringen einer Belastung ohne Anfangsgeschwindigkeit in der Durchbiegungsrichtung wird als eine stoßweise Belastung bezeichnet. Außerdem muß aber auch noch der Fall des Stoßes im engeren Sinne untersucht werden, bei dem die Last schon beim Auftreffen auf den Körper eine Geschwindigkeit v in der Richtung der nachher erfolgenden Durchbiegung und damit eine lebendige Kraft

$$L = \frac{Pv^2}{2g} = Ph$$

hatte. Unter h ist dabei die Fallhöhe zu verstehen, durch deren Durchlaufen die Geschwindigkeit v entweder wirklich erreicht wurde oder doch erreicht werden könnte. — Auch dieser Fall ist im allgemeinen wie der vorige zu behandeln: man setze

$$A = nP(h + f_d), \tag{99}$$

wobei n wieder ein Zahlenfaktor ist, der aber hier unter Umständen erheblich kleiner als 1 werden kann. In der zutreffenden Wahl oder in der richtigen Berechnung von n beruht die Schwierigkeit der Aufgabe, für die man bis jetzt noch keine vollständig befriedigende Lösung besitzt. Es kommen hier mehrere Umstände zusammen, die die Sache sehr verwickelt machen. Zunächst kommen, wie bei jedem Stoße, der nicht vollkommen elastisch erfolgt, Verluste an mechanischer Energie vor, die mit Erwärmungen und kleinen bleibenden Formänderungen in der Nähe der Aufschlagstelle zusammenhängen.

Ferner erstreckt sich die Formänderung nicht plötzlich über den ganzen Träger, sondern sie pflanzt sich mit der zwar großen, aber doch nicht unendlich großen Schallgeschwindigkeit in ihm fort, so daß unter Umständen die der Stoßstelle ferner liegenden Teile erst in Bewegung kommen, wenn die „erste Stoßperiode“ an der Aufschlagstelle vielleicht schon ganz abgelaufen ist. Schließlich kommt noch der durch die innere Reibung bei schnellen Formänderungen hervorgerufene Verlust an mechanischer Energie in Betracht, der beim Auftreffen der Last mit großer Geschwindigkeit von viel größerer Bedeutung werden kann, als beim plötzlichen Aufbringen der Last ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Um wenigstens zu einer ungefähren Abschätzung zu gelangen, setzt man nach Cox, von dem diese Betrachtung zuerst angestellt wurde, voraus, daß sich die Formänderung am Ende der ersten Stoßperiode über den ganzen Träger erstreckt habe und berechnet den Verlust an mechanischer Energie nach der Formel für den unelastischen Stoß. Hierbei führt man an Stelle der ganzen Masse M des Trägers eine reduzierte Masse M' ein, die so bemessen wird, daß sie an der Stoßstelle vereinigt dieselbe lebendige Kraft ergeben würde, wie sie der Träger am Ende der ersten Stoßperiode erlangt hat. Unter der freilich sehr willkürlichen Voraussetzung, daß sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenteilchen des durch den Stoß auf Biegung beanspruchten Balkens zueinander verhalten, wie die Durchbiegungen y, die sie bei einer an der Stoßstelle aufgebrachten ruhenden Last annehmen würden, erhält man

$$M' = \int \frac{y^2}{f^2} \mu dx,$$

wenn unter μ die auf die Längeneinheit bezogene Masse des Balkens und unter $\frac{y}{f}$ das Verhältnis der Durchbiegung an der Stelle x zum Biegungspfeile an der Belastungsstelle verstanden wird. Für den Fall, daß der Stoß in der Balkenmitte erfolgt, erhält man nach den Gleichungen (81) und (82)

$$\frac{y}{f} = 3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

für die Querschnitte zwischen 0 und $\frac{l}{2}$. Man hat daher

$$\int \frac{y^2}{f^2} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2}{f^2} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx = \frac{17}{35} l,$$

womit, da $\mu l = M$ gesetzt werden kann, die reduzierte Masse M' übergeht in

$$M' = \frac{17}{35} M,$$

was rund die Hälfte von M ausmacht.

Nach der im ersten Bande abgeleiteten Formel für den Stoßverlust hat man nun

$$\text{Verl} = \frac{Q' P}{Q' + P} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{Q'}{Q' + P} \cdot Ph,$$

wenn jetzt unter Q' das reduzierte Gewicht, also rund die Hälfte des ganzen Gewichts des vom Stoße getroffenen Balkens verstanden wird. Unter Vernachlässigung von f_d gegen h, was bei einigermaßen großen Stoßgeschwindigkeiten in der Regel zulässig ist, findet man daher für den Zahlenfaktor n

$$n = \frac{P}{Q' + P}.$$

Nach dieser Formel wird n rund gleich $^2/_3$, wenn die auftreffende Last dasselbe Gewicht hat wie der Balken, und es wird um so kleiner, je kleiner die stoßende Last im Vergleiche zum Eigengewichte des Balkens ist. Das stimmt ja wohl auch ungefähr mit der Erfahrung überein. Als einigermaßen zuverlässig kann aber, wie schon bemerkt, diese Entwickelung wegen der Willkürlichkeit der Voraussetzungen, auf denen sie beruht, keineswegs betrachtet werden. Man wird vielmehr erst von späteren eingehenden Untersuchungen, die sich in erster Linie auf die Ergebnisse von hinlänglich zahlreichen Versuchen werden stützen müssen, eine bessere, mit dem wirklichen Verhalten gut übereinstimmende, theoretische Darstellung der Festigkeit gegen Stoß erwarten dürfen.

Wenn n bekannt oder auf Grund einer Einschätzung angenommen ist, folgt daraus die gleichwertige statische Belastung P' und mit dieser die Beanspruchung des Materials wie vorher aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} P' f_d = n P (h + f_d). \tag{100}$$

Die andere Unbekannte f_d läßt sich nämlich nach den früher dafür angestellten Betrachtungen in der zugehörigen statischen Belastung P' ausdrücken, worauf die Gleichung nur noch die

eine Unbekannte P' enthält, nach der sie leicht aufgelöst werden kann. Ein Beispiel dafür findet man in Aufg. 24.

Schließlich möge noch auf einen Umstand hingewiesen werden, der die Festigkeit gegen Stoß sehr herabzusetzen vermag. Versieht man nämlich den Stab an der gefährdetsten Stelle (oder irgendwo, wenn die Beanspruchung wie beim achsialen Stoße überall dieselbe ist) mit einem Einschnitte, so wird durch diese Querschnittsverschwächung zwar auch schon die Festigkeit gegen ruhende Belastung herabgesetzt; in viel höherem Maße verliert aber der Stab die Fähigkeit, Stöße aufzunehmen, ohne sofort ganz zu zerbrechen. Die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße hängt nämlich von der Formänderungsarbeit ab, die geleistet werden muß, ehe der Bruch beginnt. Wenn aber z. B. eine Zugstange mit einer ringsum laufenden Eindrehung versehen ist, tritt an dieser Stelle der Bruch bereits ein, bevor sich der übrige Teil des Stabes zu strecken vermochte. Es wird daher schon ein Stoß von weit geringerer Energie ausreichen, um den Bruch herbeizuführen. Auf diesen Umstand hat der Ingenieur öfters zu achten (vgl. z. B. Zimmermann im Zentralbl. der Bauverwaltung 1899, S. 265); auch Anbrüche, d. h. Risse, die ein Stab bei früheren Gelegenheiten davon getragen hat, wirken in derselben Weise und geben oft Veranlassung zu Brüchen bei verhältnismäßig geringen Stößen.

§ 35. Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Dieser wichtige Satz läßt sich mit wenigen Worten aus den Sätzen von Castigliano ableiten. Das soll zuerst geschehen; da aber hierbei nicht leicht zugleich das volle Verständnis für den Sinn des Satzes gewonnen werden kann, werde ich nachträglich noch eine andere Ableitung geben, die leichter verständlich ist.

Nach Gl. (94) ist

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}.$$

Wir wollen diese Gleichung nach irgendeiner der anderen Lasten, etwa nach P_k differentiieren. In jedem Gliede der rechten Seite ist der Faktor $\frac{\partial y}{\partial P_i}$ von P_k abhängig, der andere Faktor nur in dem einen Gliede, das sich auf P_k selbst bezieht. Beim Differentiieren erhalten wir also auf der rechten Seite ein Glied mehr als wir hatten, nämlich

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \sum P \frac{\partial^2 y}{\partial P_i \partial P_k} + \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \tag{101}$$

Wenn das Superpositionsgesetz für die elastischen Formänderungen gültig ist, sind die elastischen Verschiebungen y Funktionen ersten Grades der Lasten; y_i ist also etwa von der Form

$$y_i = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \alpha_{i3} P_3 + \cdots + \alpha_{ii} P_i + \cdots \tag{102}$$

Die von der Gestalt und den elastischen Eigenschaften des Körpers, sowie von der Lage des Punktes, zu dem y_i gehört, und der Lage des Angriffspunktes der betreffenden Last abhängigen Koeffizienten α pflegt man als die Einflußzahlen der zugehörigen Lasten auf die Durchbiegungen oder sonstigen Formänderungen y zu bezeichnen.

Unter dieser Voraussetzung verschwinden alle zweiten Differentialquotienten der y, und Gl. (101) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \tag{103}$$

Mit Rücksicht auf Gl. (102) läßt sich dies auch in der Form

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{104}$$

aussprechen. Der Einfluß der Last k auf die Verschiebung des Angriffspunktes von i ist demnach ebenso groß, als der Einfluß der Last i auf die Verschiebung des Angriffspunktes von k. Das ist der Maxwellsche Satz.

Ich gebe jetzt eine von den früheren Betrachtungen unabhängige Ableitung, bei der ich mich der Anschaulichkeit wegen auf die Betrachtung des einfachsten, aber auch am häufigsten vorkommenden Falles beschränke. In Abb. 39 ist ein

auf zwei Stützen ruhender Balken gezeichnet, von dem irgend zwei beliebig ausgewählte Querschnitte mit den Ordnungsziffern I und II versehen wurden. Ich denke mir zunächst eine Last P_1 im Querschnitte I aufgebracht. Wäre P_1 gleich der Lasteinheit, so müßte die Durchbiegung unter dieser Last im Querschnitte I nach den vorhergehenden Festsetzungen mit α_{11} und im Querschnitte II mit α_{21} bezeichnet werden. Diese Größen sind wieder die Einflußzahlen der Last im Querschnitte I auf die Durchbiegungen in den Querschnitten I und II, und die wirklichen Durchbiegungen infolge von P_1 sind $\alpha_{11} P_1$ für den ersten und $\alpha_{21} P_1$ für den zweiten Querschnitt.

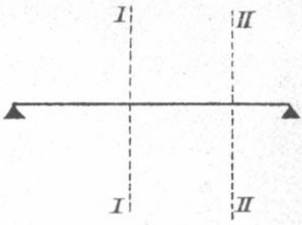

Abb. 39.

Dann soll auch eine andere Last P_2 im Querschnitte II aufgebracht werden, deren Einflußzahlen entsprechend mit α_{12} und α_{22} bezeichnet seien, so also, daß der erste Zeiger immer angibt, an welchem Querschnitte die Einsenkung beobachtet wird, während der zweite die Laststellung beschreibt.

Wenn man erst P_1 und dann P_2 aufbringt, leisten beide Kräfte Arbeiten, deren Summe gleich der im Endzustande des Balkens aufgespeicherten potentiellen Energie ist. Während P_1 aufgebracht wird, ist die von ihm geleistete Arbeit gleich

$$\tfrac{1}{2} P_1 \cdot \alpha_{11} P_1 .$$

Während des hierauf folgenden Aufbringens von P_2 verschieben sich die Angriffspunkte beider Kräfte. Beide leisten also Arbeit, wobei zu beachten ist, daß P_1 während der ganzen Dauer dieses Vorgangs seine Größe beibehält, während P_2 von Null bis zu seinem Endwerte anwächst. Die in dieser zweiten Periode geleistete Arbeit ist daher

$$P_1 \cdot \alpha_{12} P_2 + \tfrac{1}{2} P_2 \cdot \alpha_{22} P_2 .$$

Im ganzen wird daher die potentielle Energie des vollständig belasteten Balkens

$$A = \tfrac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2 + \tfrac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 . \qquad (105)$$

Man kann aber zu demselben Endzustande auch dadurch gelangen, daß man zuerst P_2 und dann erst P_1 aufbringt. Dann lassen sich dieselben Schlüsse wiederholen, wobei sich nur die Zeiger 1 und 2 miteinander vertauschen. Man findet daher auch

$$A = \tfrac{1}{2}\alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{21} P_2 P_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_{11} P_1^2.$$

Dieser Wert muß dem vorausgehenden gleich sein, und der Vergleich zwischen ihnen zeigt, daß

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{106}$$

ist, womit der Maxwellsche Satz von neuem bewiesen ist.

Nachträglich überzeugt man sich leicht, daß die der Abb. 39 zugrunde liegende besondere Voraussetzung über die Gestalt und die Belastungsweise des Trägers unwesentlich ist. Man kann diese Abbildung auch durch die nebenstehende ersetzen, in der ein beliebig gestalteter und beliebig aufgelagerter Träger dargestellt werden soll. Auf diesem Körper wähle man zwei beliebige Punkte I und II aus und ziehe durch jeden in beliebiger Richtung irgendeine gerade Linie.

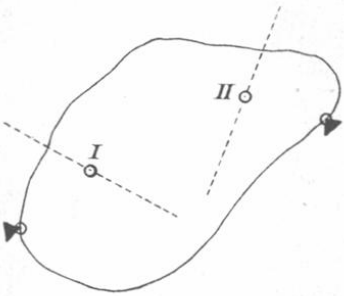

Abb. 40.

Läßt man dann eine Kraft an I in der angenommenen Richtung angreifen, so wird sich II in irgendeiner Richtung verschieben. Von dieser Gesamtverschiebung beachten wir aber nur jene Komponente, die in die Richtung der durch II gelegten Geraden fällt. Und diese Verschiebung ist ebenso groß, als sich I in der zugehörigen Richtung verschieben würde, wenn man an II eine ebenso große Kraft in der dort gewählten Richtung angreifen ließe. Denn in der Tat lassen sich die vorausgehenden Schlüsse ohne jede Änderung auch auf den Fall der Abb. 40 übertragen.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, auf die Anwendungen hinzuweisen, die man von dem Maxwellschen Satze bei den Festigkeitsberechnungen der technischen Praxis macht. Diese sollen

an zwei einfachen, schon früher mehrfach behandelten Beispielen erläutert werden.

Bei der Berechnung eines über zwei Öffnungen durchlaufenden Balkens auf Grund des Maxwellschen Satzes beginnt man damit, die Mittelstütze fortzunehmen und an dieser Stelle eine Last von 1 t (oder überhaupt von der Krafteinheit) anzubringen. Man ermittelt nun die Gestalt der elastischen Linie, die diesem Belastungsfalle entspricht, entweder auf dem Wege der Rechnung, wie es früher erläutert wurde, oder auf graphischem Wege. Die Abszisse der Mittelstütze vom linken Auflager gerechnet, sei mit a, die eines beliebigen anderen Querschnitts mit x bezeichnet. Dann gibt die Ordinate der elastischen Linie im Querschnitte x unmittelbar die Einflußzahl

$$\alpha_{xa}$$

an. Nach dem Maxwellschen Satze ist aber

$$\alpha_{ax} = \alpha_{xa},$$

und wir kennen damit auch die Einsenkung am Querschnitte a bei fortgenommener Mittelstütze, wenn im Querschnitte x die Lasteinheit angreift. Daraus folgt aber durch eine schon früher wiederholt benutzte einfache Überlegung auch die Größe des Auflagerdrucks auf der Mittelstütze bei diesem Belastungsfalle. Die Auflagerkraft muß nämlich so groß sein, daß sie jene Durchbiegung wieder rückgängig macht. Nun kennen wir schon aus der gezeichneten elastischen Linie die elastische Verschiebung α_{aa} des Querschnitts an der Mittelstütze für eine an dieser selbst angreifende Lasteinheit und wir wissen, daß die elastische Verschiebung der Größe der Last proportional ist. Wir haben also, wenn die Last im Querschnitte x mit P und der von ihr in Wirklichkeit an der Mittelstütze hervorgerufene Auflagerdruck mit Z bezeichnet wird, die Gleichung

$$\alpha_{aa} Z = \alpha_{ax} P,$$

woraus mit Rücksicht auf den Maxwellschen Satz

$$Z = \frac{\alpha_{xa}}{\alpha_{aa}} P \tag{107}$$

folgt. Das Verhältnis der zwei Ordinaten der ursprünglich

gezeichneten elastischen Linie in den Querschnitten x und a lehrt uns also sofort für jede beliebige Stellung einer Einzellast den Bruchteil kennen, der von dieser Einzellast auf die Mittelstütze übertragen wird. Dieser Anteil ist überall proportional mit der Ordinate α_{xa} der elastischen Linie. Man bezeichnet daher diese elastische Linie als die Einflußlinie für den Auflagerdruck Z.

Sobald die Vorarbeit des Aufzeichnens dieser Linie erledigt ist, kann die weitere Berechnung des durchlaufenden Trägers genau so erfolgen, als wenn er statisch bestimmt wäre. Denn man ist imstande, für jeden beliebigen Belastungsfall — z. B. wenn ein Eisenbahnzug die Belastung bildet — sofort den Auflagerdruck Z nach der Gleichung

$$Z = \frac{1}{\alpha_{aa}} \sum \alpha_{ax} P$$

anzugeben, worauf die übrigen Auflagerkräfte, die Momente und Scherkräfte genau so wie beim Balken über einer Öffnung folgen. Gerade hierin beruht die große Bedeutung des Maxwellschen Satzes für die Festigkeitsberechnungen der Praxis. Man muß dabei sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen und es wäre äußerst mühsam, wenn man dabei immer wieder von neuem die Rechnung auf Grund der Elastizitätslehre auszuführen hätte. Dem ist man durch die vorausgehenden Erörterungen vollständig enthoben. Die Konstruktion einer einzigen elastischen Linie genügt, um alle Unterlagen für die weiteren Berechnungen zu liefern.

Bei diesem Beispiele kam nur eine statisch unbestimmte Größe vor. Ich betrachte, um zu zeigen, wie man in verwickelteren Fällen verfährt, jetzt noch einen Balken, der über drei Öffnungen durchläuft. Vom linken Auflager gerechnet, sei die Ordinate der ersten Mittelstütze mit a, die der zweiten mit b bezeichnet. Man entfernt zuerst beide Mittelstützen und bringt im Querschnitte a die Lasteinheit auf. Die Ordinaten der zugehörigen elastischen Linie, die man konstruiert, geben für jeden Querschnitt x die Einflußzahl α_{xa} und damit auch

α_{ax} an. Dann wird eine zweite elastische Linie konstruiert für die im Querschnitte b angreifende Belastungseinheit, wodurch man die Einflußzahlen α_{xb} und α_{bx} erhält. Nach diesen Vorarbeiten kann man die Auflagerkräfte C und D an den beiden Mittelstützen, die zu einer Last P in irgendeinem Querschnitte x gehören, sofort durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{aa} C + \alpha_{ab} D &= P\alpha_{ax} \\ \alpha_{ba} C + \alpha_{bb} D &= P\alpha_{bx} \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

erhalten, von denen die erste ausspricht, daß sich die erste Mittelstütze in Wirklichkeit nicht in vertikaler Richtung verschieben kann, während die zweite dasselbe für die zweite Mittelstütze aussagt. Die Auflösung liefert

$$C = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{bb} - \alpha_{bx}\alpha_{ab}}{\alpha_{aa}\alpha_{bb} - \alpha_{ab}^2}; \quad D = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{ba} - \alpha_{bx}\alpha_{aa}}{\alpha_{ab}^2 - \alpha_{aa}\alpha_{bb}}. \tag{109}$$

Die Faktoren von P in diesen Gleichungen können, da alle darin vorkommenden α durch die beiden elastischen Linien gegeben sind, ohne weiteres berechnet werden, womit man die Einflußlinien der Lasten auf die beiden Mittelstützendrücke findet. Von da ab kann die Berechnung auch dieses Trägers genau so durchgeführt werden, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man sieht leicht ein, wie dasselbe Verfahren in anderen Fällen anzuwenden ist. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr der allgemeinen Festigkeitslehre, sondern der Lehre vom Brückenbaue an.

Aufgaben.

23. Aufgabe. Eine Spannweite von 6 m (vgl. den Grundriß Abb. 41) *wird durch drei nebeneinanderliegende* I-*Träger vom Normalprofile 36, für das* Θ *nach dem deutschen Normalprofilbuche zu 19766 cm*^{4} *angegeben ist, in gleichen Abständen von 1 m überdeckt. In der Mitte sind die Träger durch einen Querträger N. P. 20* ($\Theta = 2162$ *cm*^{4}) *verbunden. Welche Last P darf man an der mittleren Kreuzungsstelle anbringen, wenn die Spannung* σ *an keiner Stelle 1000 atm überschreiten soll? Vom Eigengewichte der Träger kann abgesehen werden.*

Lösung. Wir denken uns die Konstruktion in zwei Teile geteilt, von denen der eine nur den mittleren Hauptträger, der andere die beiden äußeren Hauptträger und den Querträger umfaßt. Jeder dieser Teile für sich genommen ist statisch bestimmt und als einzige statisch unbestimmte Größe der ganzen Aufgabe kommt der Anteil Z in Betracht, den der mittlere Hauptträger von der Last P, die an ihm angebracht ist, auf den Querträger abgibt. Am mittleren Hauptträger bleibt dann die Belastung $P - Z$ und der Querträger seinerseits gibt an jeden der beiden äußeren Hauptträger die Last $\frac{Z}{2}$ weiter. An der Kreuzungsstelle müssen sich die beiden statisch bestimmten Teile, in die wir uns die ganze Konstruktion zerlegt dachten, um gleichviel senken; wir finden daher die statisch unbestimmte Größe Z nach § 33, indem wir die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach Z gleich Null setzen. Zunächst ist also A als Funktion von Z zu berechnen.

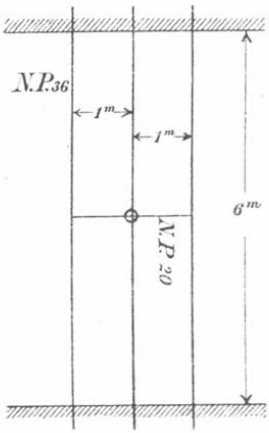

Abb. 41.

Wenn ein beiderseits gestützter Balken in der Mitte die Last Q trägt, ist das Biegungsmoment M auf der linken Hälfte im Abstande x vom Auflager gleich $\frac{Q}{2}x$. Die in der linken Hälfte aufgespeicherte Formänderungsarbeit berechnet sich daraus mit Vernachlässigung der Arbeit der Schubspannungen, die in solchen Fällen immer zulässig ist, nach Gl. (88). Die Formänderungsarbeit für den ganzen Balken ist doppelt so groß und daher gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{E\Theta}\,dx = \frac{Q^2}{4E\Theta}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx = \frac{Q^2 l^3}{96E\Theta}.$$

Für den mittleren Hauptträger haben wir hierin anstelle von Q die Last $P - Z$, $l = l_1 = 6$ m und $\Theta = \Theta_1 = 19766$ cm^4 zu setzen, für jeden der beiden äußeren Hauptträger wird $Q = \frac{Z}{2}$, während die anderen Werte bleiben, und für den Querträger ist $Q = Z$, $l = l_2 = 2$ m und $\Theta = \Theta_2 = 2162$ cm^4. Im ganzen wird daher die Formänderungsarbeit der gesamten Konstruktion

$$A = \frac{(P-Z)^2 l_1^{\,3}}{96E\Theta_1} + 2\cdot\frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 l_1^{\,3}}{96E\Theta_1} + \frac{Z^2 l_2^{\,3}}{96E\Theta_2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte wird besser bis zuletzt vorbehalten. Durch Nullsetzen des Differentialquotienten von A nach Z erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$0 = -2 \cdot \frac{(P-Z)l_1^3}{96 E \Theta_1} + \frac{Z l_1^3}{96 E \Theta_1} + 2 \cdot \frac{Z l_2^3}{96 E \Theta_2}.$$

Die Auflösung liefert

$$Z = \frac{2 P l_1^3}{3 l_1^3 + 2 l_2^3 \frac{\Theta_1}{\Theta_2}} = 0{,}544 P.$$

Es fragt sich jetzt, an welcher Stelle die größte Beanspruchung des Materials zu erwarten ist. Diese kann entweder in der Mitte des mittleren Hauptträgers oder in der Mitte des Querträgers auftreten, denn die seitlichen Hauptträger sind offenbar weniger beansprucht, als der in der Mitte. Das von dem mittleren Hauptträger in der Mitte aufzunehmende Biegungsmoment beträgt

$$\frac{l_1 (P-Z)}{4} = 68{,}4 P \text{ cm kg}.$$

Wenn die Spannung an dieser Stelle 1000 atm betragen soll, berechnet sich P aus der Gleichung

$$1000 = \frac{68{,}4 P}{19766} \cdot 18, \quad \text{also} \quad P = 16\,000 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment im Mittelquerschnitte des Querträgers ist dagegen gleich $\frac{200 \cdot 0{,}544 P}{4} = 27{,}2 P$, und wenn hier die zulässige Spannung von 1000 atm nicht überschritten werden soll, darf P, wie aus der Gleichung

$$1000 = \frac{27{,}2 P}{2162} \cdot 10$$

folgt, nur $P = 8000$ kg betragen. Der Querträger ist also am meisten gefährdet, und wenn er auf Grund des Ergebnisses der Rechnung nicht verstärkt wird, ist nur eine Last von 8000 kg für die Konstruktion zulässig.

24. Aufgabe. Ein I-*Balken N. P. 24 ($\Theta = 4288$ cm^4, Gewicht 36,2 kg f. d. lfd. m) überbrückt eine Spannweite von 2 m. Wie hoch darf eine Last von 400 kg auf die Mitte des Trägers herabfallen, ohne daß die Spannung von 1600 atm überschritten wird, wenn man annimmt, daß etwa 80% der lebendigen Kraft in Gestalt von Formänderungsarbeit auf den Balken übergehen und wenn der Elastizitätsmodul = 2000000 atm gesetzt wird?*

Lösung. Berechnet man nach der Näherungstheorie von Cox den Bruchteil n der zur Formänderung des Balkens aufgewendeten Energie, so erhält man

$$n = \frac{P}{Q' + P} = \frac{400}{35 + 400} = 0{,}92.$$

Nach den Ergebnissen von Versuchen ist aber n nicht leicht größer als 0,80 anzunehmen, so daß dieser Wert stets schätzungsweise einzusetzen ist, wenn die Coxsche Formel einen höheren Betrag liefert.

Wir berechnen hierauf die ruhende Belastung P', durch die die angenommene Spannung $\sigma = 1600$ atm hervorgerufen würde. Aus

$$\sigma = \frac{P'l}{4\Theta} \cdot e \quad \text{folgt dafür} \quad P' = \frac{4\Theta\sigma}{el}.$$

Die hierbei aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist

$$A = \left(\frac{4\Theta\sigma}{el}\right)^2 \frac{l^3}{96E\Theta} = \frac{\sigma^2 l\Theta}{6e^2E}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte $\sigma = 1600$ atm, $l = 200$ cm $\Theta = 4288$ cm^4, $e = 12$ cm und $E = 2000000$ atm

$$A = 1270 \text{ cm kg}.$$

Die Höhe h, aus der die Last herabfallen darf, folgt aus

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot h = 1270 \quad \text{zu} \quad h = 4{,}0 \text{ cm}.$$

Diese Zahl ist indessen noch nicht ganz genau, da das Gewicht von 400 kg beim Herabsinken um den dynamischen Biegungspfeil f_d auch noch eine Arbeit leistet. Eigentlich ist daher $h + f_d = 4{,}0$ cm. Der Biegungspfeil f_d ist gleich dem statischen Biegungspfeile für die Last P', also

$$f_d = \frac{P'l^3}{48E\Theta} = \frac{\sigma l^2}{12eE} = 0{,}22 \text{ cm}.$$

Die ursprüngliche Höhe h des Gewichtes über dem Träger darf daher nur etwa 38 mm betragen, wenn die zugelassene Spannung nicht überschritten werden soll.

25. Aufgabe. Ein Brückenträger erfuhr unter einer Einzellast von 10 t Einsenkungen, die an drei verschiedenen Stellen zu 2,0, 2,5 und 4,0 mm beobachtet wurden. An diesen drei Stellen werden nachher Lasten von 8, 12 und 6 t aufgebracht. Um wieviel senkt sich jene Stelle, die vorher als Angriffspunkt der Einzellast von 10 t gedient hatte?

Lösung. Stillschweigend ist vorausgesetzt, daß die Formänderung vollkommen elastisch ist. Nach dem Maxwellschen Satze ist die gesuchte Durchbiegung

$$y = 8 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}4 = 7{,}0 \text{ mm}.$$

26. Aufgabe. Ein Stab AC (Abb. 42) *von überall gleichem Querschnitt überdeckt zwei Öffnungen AB und BC von 3 m Spannweite. An den Auflagern ist der Stab an vertikalen Bewegungen sowohl nach oben als nach unten gehindert, aber nicht eingespannt. In der Mitte jeder Öffnung ist ein nach oben gehender Arm von 1 m Länge angebracht, und an den Enden eines jeden Armes wirkt eine nach außen gerichtete horizontale Kraft P von 2000 kg. Wie groß sind die durch diese Lasten hervorgerufenen vertikalen Auflagerkräfte?*

Lösung. Denkt man sich die Mittelstütze entfernt, so wird dadurch der Träger statisch bestimmt. Die Auflagerkräfte sind dann bei A und C gleich Null, weil die Lasten P schon unter sich im

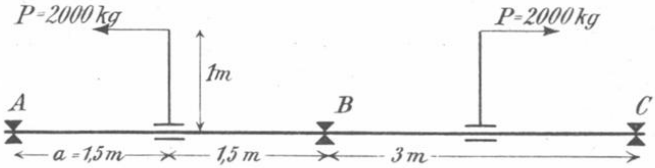

Abb. 42.

Gleichgewicht miteinander stehen. Der zwischen den Armen liegende Teil des Trägers wird gebogen und zwar so, daß die Hohlseite der elastischen Linie nach unten gekehrt ist. Die äußeren Abschnitte der elastischen Linie bleiben gerade und gehen durch die Auflagerpunkte A und C. Die Mitte bei B hebt sich daher um einen Betrag, der sowohl nach den Lehren des vorigen Abschnitts als auch nach Gl. (93) berechnet werden könnte. Es ist aber jetzt nicht nötig, dies auszuführen.

Wird nun der Träger auch bei B festgehalten, so muß an dieser Stelle eine nach abwärts gerichtete Auflagerkraft Z auf ihn übertragen werden. Diese Kraft können wir auch als eine Last ansehen, die so gewählt werden muß, daß ihr Angriffspunkt in Ruhe bleibt. Die Last Z bringt an A und C Auflagerkräfte hervor, die gleich $\frac{1}{2}Z$ sind. Wir berechnen die Formänderungsarbeit, die wir jetzt, um Verwechslungen zu vermeiden, mit A' bezeichnen, als Funktion von Z. Im ersten Abschnitt des Trägers ist $M = \frac{Z}{2}x$ und die Formänderungsarbeit gleich

$$\int_0^a \frac{Z^2}{8E\Theta} x^2 dx = \frac{Z^2 a^3}{24 E\Theta}.$$

Im zweiten Abschnitte von $x = a$ bis $x = 2a$ ist

$$M = \frac{Z}{2} x - 2000 \text{ mkg}$$

und die Formänderungsarbeit gleich

$$\frac{1}{2 E \Theta} \int_a^{2a} \left(\frac{Z}{2} x - 2000\right)^2 dx = \frac{1}{2 E \Theta} \left(\tfrac{7}{12} Z^2 a^3 - 3000 a^2 Z + 4000000 a\right).$$

Die in den Armen aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist unabhängig von Z und bildet daher ein konstantes Glied, das beim Differentiieren nach Z wegfällt. Sehen wir von diesem Gliede ab, so bleibt für die Formänderungsarbeit des ganzen Balkens

$$A' = 2 \cdot \frac{Z^2 a^3}{24 E \Theta} + 2 \cdot \frac{1}{2 E \Theta} \left(\tfrac{7}{12} Z^2 a^3 - 3000 a^2 Z + 4000000 a\right).$$

Differentiieren wir diesen Ausdruck nach Z, setzen ihn gleich Null und lösen die Gleichung nach Z auf, so erhalten wir

$$Z = \frac{18000 \text{ mkg}}{8 a} = 1500 \text{ kg}.$$