

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Dritter Abschnitt. Biegung des geraden Stabes

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

§ 16. Begriff der Biegung.

An einem stabförmigen Körper, der auch an einigen Stellen mit rechtwinklig dazu aufgesteckten Handhaben oder Kurbeln versehen sein kann, mögen sich beliebig gegebene äußere Kräfte im Gleichgewichte halten. Man denke sich den Stab durch irgendeinen Querschnitt in zwei Teile zerlegt. Jeder dieser Teile muß dann immer noch im Gleichgewicht bleiben, wenn man den anderen Teil entfernt, dafür aber in der Schnittfläche äußere Kräfte anbringt, die mit den vorher im Querschnitte übertragenen Spannungen an jeder Stelle genau übereinstimmen.

Um die daraus hervorgehenden Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Spannungen zu verwerten, faßt man zunächst an dem betrachteten Teile des Stabes die gegebenen äußeren Kräfte nach den Lehren der Statik zusammen. Je nach dem Ergebnisse der Zusammensetzung unterscheidet man verschiedene Beanspruchungsarten des Stabes. Erhält man eine Resultierende, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und mit der Stabachse zusammenfällt, so ist der Stab an dieser Stelle auf Zug oder Druck beansprucht, ein Fall, mit dem wir uns schon früher beschäftigt haben. Ergeben die Lasten eine Resultierende, die in der Ebene des Querschnitts liegt und durch den Schwerpunkt geht, so ist der Stab in diesem Querschnitte auf Schub oder Abscheren beansprucht; dieser Fall kann aber immer nur in einzelnen Querschnitten eintreten. Der Fall der reinen Biegung liegt vor, wenn sich die äußeren Kräfte zu einem Kräftepaare zusammenfassen lassen,

dessen Ebene durch die Stabachse geht. Endlich wird der Stab auf Torsion, Verwindung oder Verdrehung beansprucht, wenn die äußeren Kräfte ein Kräftepaar liefern, dessen Ebene zur Querschnittsebene parallel ist.

Im allgemeinen können alle diese vier Beanspruchungsarten oder wenigstens einige von ihnen zusammen wirken. Man spricht dann von einer zusammengesetzten Festigkeit. Man denke sich nämlich jede äußere Kraft parallel mit sich selbst nach dem Schwerpunkte des Querschnittes verlegt. Bei der Parallelverlegung tritt jedesmal ein Kräftepaar auf. Dann kann man alle nach dem Schwerpunkte verlegten Kräfte zu einer Resultierenden und alle Kräftepaare zu einem resultierenden Kräftepaare vereinigen, wie dies in Band II näher besprochen ist. Die im Schwerpunkte angreifende Resultierende läßt sich hierauf in zwei Komponenten zerlegen, von denen eine in die Richtung der Stabachse und die andere in die Querschnittsebene fällt. Auch das resultierende Kräftepaar zerlegt man in zwei Kräftepaare, von denen die Ebene des einen durch die Stabachse geht, während die Ebene des anderen entweder mit der Querschnittsebene zusammenfällt oder, was auf dasselbe hinauskommt, parallel mit ihr ist. Im allgemeinsten Falle ist daher der Stab gleichzeitig auf Zug oder Druck, auf Schub, auf Biegung und auf Verwindung beansprucht.

In allen Fällen der zusammengesetzten Festigkeit berechnet man die zu jeder der einfachen Beanspruchungsarten für sich gehörigen Spannungen und nimmt an, daß sich alle ohne Störung übereinander lagern. Das setzt natürlich voraus, daß das Material dem Superpositionsgesetze gehorche. Trifft dies nicht zu, so verfährt man trotzdem gewöhnlich ebenso, muß aber dabei in Erinnerung behalten, daß die Lösung nur ungefähr richtig sein kann.

Ein Fall der zusammengesetzten Festigkeit liegt auch dann vor, wenn sich die äußeren Kräfte zu einem biegenden Kräftepaare und einer Scherkraft zusammensetzen lassen. Dieser Fall kommt aber so häufig vor, daß er die Regel bildet,

und er wird daher als der allgemeine Fall der Biegung im Gegensatz zu dem vorher besprochenen Falle der reinen Biegung bezeichnet.

Ein Kräftepaar wird durch sein statisches Moment gemessen. Beansprucht das Kräftepaar den Stab auf Biegung, geht also seine Ebene durch die Stabachse, so wird sein statisches Moment als das Biegemoment bezeichnet. Wir gebrauchen dafür den Buchstaben M und rechnen es positiv, wenn es an dem linken Teile des in horizontaler Lage gezeichneten Stabes im Sinne des Uhrzeigers dreht. Die Scherkraft bezeichnen wir mit V und rechnen sie positiv, wenn sie am linken Teile des Stabes nach oben gerichtet ist.

§ 17. Willkürliche Annahmen von Bernoulli und Navier.

Die nächste Aufgabe, die uns gestellt ist, besteht darin, die Spannungen zu berechnen, die in den einzelnen Teilen des Querschnitts auftreten, wenn M und V gegeben sind. Wir wollen sie zuerst noch dadurch vereinfachen, daß wir den Fall der reinen Biegung voraussetzen, also $V = 0$ annehmen. Auf den allgemeineren Fall werden wir dann leicht dadurch gelangen, daß wir die durch V für sich bewirkten Spannungen hinzufügen. Der Fall der reinen Biegung (ohne Scherbeanspruchung) liegt z. B. im mittleren Teile einer Eisenbahnwagenachse vor oder auch bei der in Abb. 16 schematisch gezeichneten Belastung des Stabes. Für den Querschnitt mm , der irgendwo im mittleren Abschnitte des Stabes gezogen sein kann, bilden die äußeren Kräfte am linken Teile des Stabes ein Kräftepaar, dessen Moment $= Pp$ und das nach den vorausgehenden Vorzeichenbestimmungen positiv zu rechnen ist.

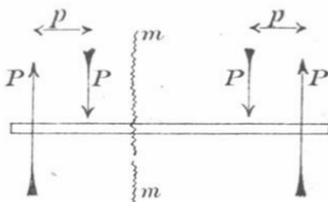


Abb. 16.

Die Aufgabe, die Spannungen zu berechnen, ist statisch unbestimmt. Wenn wir auf die elastischen Formänderungen

keine Rücksicht zu nehmen hätten, könnten wir jede beliebige Verteilung der Spannungen über den Stabquerschnitt als gleich gut möglich ansehen, wenn sie nur zu einem Kräftepaare vom Momente M führte.

Über die elastische Formänderung, die der Stab unter dem Einflusse der in Abb. 16 angegebenen Kräfte erfährt, läßt sich zunächst nur aussagen, daß sich die Angriffspunkte der Kräfte im Sinne dieser Kräfte relativ gegeneinander etwas verschieben müssen. Denkt man sich diese Angriffspunkte alle auf der Stabachse gelegen, so werden die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Angriffspunkte nach der Formänderung einen Linienzug bilden, der nach oben hin hohl ist. Wegen der Stetigkeit des Zusammenhanges kann aber die Stabachse selbst an keiner Stelle einen Knick erfahren; die ursprünglich gerade Stabachse wird daher in eine flache Kurve übergehen. Diese Kurve heißt die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Diese allgemeinen Bemerkungen sind noch zu unbestimmt, um ein Urteil über die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt darauf gründen zu können. Um diese Unbestimmtheit zu heben, nimmt man an, daß jeder Querschnitt, der senkrecht zur Stabachse gezogen wurde, nach der Formänderung eben bleibt. Diese Annahme wird zunächst rein willkürlich eingeführt; sie ist zuerst von Bernoulli aufgestellt worden und dient seit den Arbeiten von Navier allgemein als Ausgangspunkt der Biegungslehre in der technischen Mechanik.

Gegen die Einführung einer solchen Annahme ohne jede weitere Begründung ist natürlich ein ernstes Mißtrauen am Platze. In der Tat wird man sich durchaus nicht befriedigt fühlen können, wenn diese Annahme, wie es oft genug geschieht, in der Form eines Axioms eingeführt wird. Besser ist es, sie als einen Satz hinzustellen, der seine Rechtfertigung dadurch findet, daß die aus ihm gezogenen Folgerungen im Einklange mit der Erfahrung sind.

In einem späteren Abschnitte werden wir sehen, daß man die Zulässigkeit der Bernoullischen Annahme auch noch einer

strengeren Prüfung unterwerfen kann. Für Körper, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, werden wir sie bei jener Gelegenheit wenigstens für den Fall der reinen Biegung bestätigt finden. Für andere Körper kann indessen nur durch eine unmittelbare Beobachtung festgestellt werden, ob und bis zu welchem Grade der Genauigkeit sie in Wirklichkeit erfüllt ist.

Eine solche Prüfung habe ich auf folgende Weise vorgenommen. Ein Steinbalken von 20×30 cm Querschnitt wurde auf 150 cm Spannweite frei aufgelagert und in der Mitte belastet. Die Lastebene war parallel der größeren Querschnittsseite. Auf den Ansichtsflächen des Balkens ließ ich mehrere Reihen von kleinen Stiften einkitten, auf die man Spiegel aufschraubte. Wenn der Balken belastet wurde, drehten sich diese Spiegel zusammen mit dem Teile des Balkens, an dem sie befestigt waren. Die kleine Drehung der Spiegel wurde mit Hilfe eines Fernrohrs beobachtet. Dabei zeigte sich, daß alle Spiegel, die zu demselben Querschnitte gehörten, ziemlich genau dieselbe Drehung ausführten. Das ist aber in der Tat nur möglich, wenn der Querschnitt — mit dem gleichen Grade der Annäherung — eben bleibt. Zum mindesten ist zu schließen, daß die Umfangsseiten des Querschnittsumrisses geradlinig geblieben sind. Denn wenn sich eine dieser Seiten merklich krümmen sollte, müßten verschiedene Linienelemente der Seite verschiedene Winkel mit der Anfangslage bilden, und die verschiedene Drehung hätte sich bei der Beobachtung der Spiegel verraten müssen.

Es kann daher als nachgewiesen gelten, daß auch selbst bei solchen Materialien, die dem Hookeschen Gesetze nicht gehorchen, die Bernoullische Annahme als hinreichend genau zutreffend angesehen werden kann. Unter „hinreichend“ genau ist hier ein solcher Grad der Annäherung zu verstehen, der die weiteren Schlüsse aus der Bernoullischen Annahme vor den größten Fehlern schützt; namentlich ist die Krümmung der Querschnitte im allgemeinen nicht erheblich gegenüber der Krümmung, die die Stabachse erfährt.

Für den Fall der reinen Biegung (Scherkraft $V = 0$) haben wir keine Veranlassung, ein Auftreten von Schubspannungen im Querschnitte zu vermuten. Zum mindesten müßten alle Schubspannungen unter sich im Gleichgewichte miteinander stehen. Wenn der Querschnitt in der Tat genau eben bleiben soll, können aber überhaupt keine Schubspannungen übertragen werden, denn diese hätten Winkeländerungen γ zur Folge, die an verschiedenen Stellen nicht nur von verschiedener Größe, sondern auch von entgegengesetztem Vorzeichen sein müßten. Es handelt sich dabei um die ursprünglich rechten Winkel zwischen der Querschnittsebene und den zur Stabachse parallel gezogenen Linien. Wenn sich diese an verschiedenen Stellen um verschiedene Beträge änderten, könnte der Querschnitt offenbar nicht eben bleiben.

Wir werden also festhalten, daß für den Fall $V = 0$ auch die Schubspannungen τ überall im Querschnitte gleich Null zu setzen sind. Daraus folgt dann sofort weiter, daß der Querschnitt nach der Formänderung senkrecht zur elastischen Linie steht.

Man betrachte jetzt ein Längenelement des Stabes, das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegt. Nach der Formänderung schneiden sich die beiden Querschnittsebenen in einer Geraden, die durch den Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie geht. Jedem Flächenelemente dF des Querschnitts entspricht ein Teil des Stabes, den wir als eine Faser bezeichnen wollen. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Querschnitten liegenden Fasern waren ursprünglich gleich lang; nach der Formänderung sind aber die auf der Hohlseite der elastischen Linie liegenden kürzer als die auf der konvexen Seite — und zwar verhalten sich die Längen unmittelbar wie die Abstände der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte der elastischen Linie. Den Längenänderungen, die diese Fasern erfuhren, entsprechen nach dem Elastizitätsgesetze die Normalspannungen σ , die in den Querschnittselementen übertragen werden.

Wir wissen schon, daß sich die Normalspannungen σ zu einem Kräftepaare vom Momente M zusammensetzen müssen.

Daraus folgt, daß im Querschnitte sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden. Die Fasern auf der konvexen Seite sind also jedenfalls länger geworden, als sie ursprünglich waren und die auf der Hohlseite haben sich verkürzt. Dazwischen liegt eine Faserschicht, die sich weder verkürzt noch verlängert hat. Die ihr im Querschnitte entsprechende Linie wird die neutrale Achse oder auch die Nulllinie des Querschnitts genannt.

Proportional mit dem Abstände von der neutralen Achse wachsen die elastischen Längenänderungen der Fasern. Wenn außer der Bernoullischen Annahme auch noch das Hookesche Gesetz gilt, müssen wir daher schließen, daß auch die Normalspannungen σ , die im Querschnitte übertragen werden, ihrem Abstände von der neutralen Achse proportional zu setzen sind. Diesen wichtigen Schluß hat zuerst Navier aus der Bernoullischen Annahme gezogen.

Diese ganze Betrachtung läßt sich auch noch durch eine andere ersetzen. Ohne uns auf die an sich willkürliche Bernoullische Annahme zu stützen, können wir davon ausgehen, daß im Querschnitte jedenfalls sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden müssen. Die Normalspannung σ in irgend einem Punkte des Querschnitts kann dann als eine zunächst unbekannte Funktion der Koordinaten dieses Punktes in bezug auf zwei im Querschnitte rechtwinklig zueinander gezogene Koordinatenachsen der y und z betrachtet werden. Wir setzen also

$$\sigma = f(yz).$$

Immer wenn man keinen bestimmten Anhaltspunkt für die Form einer solchen unbekannteten Funktion hat, versucht man zunächst mit den einfachsten Annahmen dafür auszukommen. Daß σ nicht konstant sein kann, folgt schon daraus, daß sich alle σ zu einem Kräftepaar zusammensetzen lassen müssen. Die hiernach noch mögliche einfachste Annahme besteht darin, daß σ eine Funktion ersten Grades der Querschnittskordinaten y, z ist. Das ist aber gerade die von Navier vorausgesetzte oder aus der Bernoullischen Voraussetzung gefolgerte Spannungsverteilung.

Diese Art der Begründung unseres Ansatzes hat den Vorzug, daß sie nicht den Anschein erweckt, als ob es sich dabei um ein streng gültiges Naturgesetz handle; wir treten in die weitere Untersuchung sofort mit dem Bewußtsein ein, daß unsere Biegungstheorie nur angenäherte Gültigkeit hat und werden dadurch vor dem häufig vorkommenden Fehler bewahrt, alle Folgerungen, die daraus fließen, als buchstäblich genau anzusehen. Der fortwährende Vergleich unserer Rechnungen mit den Beobachtungstatsachen allein kann uns zeigen, wie weit wir diesen Rechnungen vertrauen dürfen.

Eine Funktion ersten Grades wird auch als eine lineare Funktion bezeichnet, weil sie durch das Bild einer geraden Linie — oder bei zwei unabhängigen Veränderlichen durch eine Ebene — zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also in jedem Punkte des Querschnitts die dort auftretende Normalspannung σ durch eine in deren Richtung gezogene Strecke in einem beliebigen Maßstabe dargestellt, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken nach Navier auf einer Ebene, die die Querschnittsebene in der Nulllinie schneidet. In Anlehnung an jenen Sprachgebrauch bezeichnet man das Naviersche Spannungsverteilungsgesetz auch als das lineare oder als das Geradliniengesetz.

§ 18. Folgerungen aus dem Geradliniengesetze.

Wir denken uns die Koordinatenachsen der y und z im Querschnitte so gelegt, daß die Z -Achse mit der Nulllinie zusammenfällt. Dann ist σ überall unabhängig von z , und da es zu Null wird für $y = 0$, verschwindet auch das konstante Glied, das in der linearen Funktion im allgemeinen auftritt. Bezeichnen wir die Spannung in irgend einem bestimmten Punkte, der den Abstand y_0 von der Nulllinie hat, mit σ_0 , so hat man für jeden anderen Punkt nach dem Geradliniengesetze

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}. \quad (43)$$

Im Falle der reinen Biegung müssen die Normalspannungen ein Kräftepaar liefern; die Summe der Zugspannungen muß

daher gleich der Summe der Druckspannungen sein. Dabei ist zu beachten, daß Gl. (43) die Spannung σ auch schon dem Vorzeichen nach richtig angibt, indem die nach verschiedenen Seiten der Nulllinie gerichteten Abstände y mit entgegengesetzten Vorzeichen zu rechnen sind. Wir können daher auch einfacher sagen, daß die algebraische Summe aller Normalspannungen für den ganzen Querschnitt gleich Null sein muß. In Form einer Gleichung heißt dies

$$\int \sigma dF = 0,$$

wenn die Summierung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (43) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y dF = 0. \quad (44)$$

Die Summe $\int y dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in bezug auf die Z -Achse dar, und die Bedingung, daß dieses Moment Null sein muß, lehrt uns, daß die mit der Z -Achse zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Ferner muß das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaars gleich dem Biegemomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, daß beide nur der Größe nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, daß diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabes, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äußeren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall, daß die Nulllinie in der Tat senkrecht zur Ebene des Kräftepaars M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, daß der Querschnitt symmetrisch gestaltet

sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen jener einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z -Achse) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder wenn man σ aus Gl. (43) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 dF = M. \quad (45)$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengröße $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnitts abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zuviel Schwierigkeiten machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z -Achse genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ , so folgt aus Gl. (45)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \quad (46)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher ins Auge gefaßten Punkt des Querschnitts mit dem Abstände y_0 von der Z -Achse die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (43) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (46) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die größte Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (46) den größten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Größen in Gl. (46) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \quad (47)$$

Die Größe W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Hiermit geht Gl. (46) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (48)$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, ob schon man sich wohl zu erinnern hat, daß diese Spannung σ nur an der äußersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, daß es eine Größe von der Dimension cm^4 ist, d. h. daß es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3 . In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl Θ als W angegeben. Gewöhnlich beziehen sich diese Angaben auf 1 mm als Längeneinheit; will man in cm rechnen, wie es hier immer geschieht, so muß man demnach bei Θ vier und bei W drei Stellen abschneiden.

Um uns zu überzeugen, daß Gl. (46) den Dimensionen nach richtig ist, setzen wir die Benennungen der auf der rechten Seite vorkommenden Größen ein, indem wir die zugehörigen Zahlenwerte unbeachtet lassen. Wir erhalten dann, da M in cm kg anzugeben ist,

$$\frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^4} \cdot \text{cm} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und dies ist in der Tat die Dimension einer bezogenen Spannung.

Die vorausgehenden Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, von der aus sie abgeleitet sind, daß nämlich die Nulllinie senkrecht zur Ebene des Biegemoments M steht. Ob und unter welchen Umständen diese Voraussetzung zutrifft, lehrt uns eine zweite Momentengleichung, die ausspricht, daß die Ebene des aus den Spannungen σ zusammengesetzten Kräftepaares mit der Ebene des Biegemoments zusammenfällt. Dazu bilden wir die statischen Momente in bezug auf die Y -Achse des Querschnitts. Diese Achse sei in der Ebene des Biegemoments angenommen, also durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Nulllinie gezogen, und das statische Moment der äußeren Kräfte ist daher für sie gleich Null. Dasselbe muß also auch von dem statischen Momente der Spannungen zutreffen. Wir haben also

$$\int \sigma dFz = 0 \quad \text{oder} \quad \int zy dF = 0, \quad (49)$$

wobei die letzte Form der Gleichung wieder durch Einsetzen von σ aus Gl. (43) aus der vorhergehenden gefunden wird.

Auch die Summengröße $\int yz dF$ hängt nur von der Gestalt des Querschnitts und von der Richtung der Schwerpunktsachse ab, die mit der Nulllinie zusammenfällt. Alle Summengrößen, die über den Querschnitt zu erstrecken sind und die Produkte aus den Flächenelementen und den Querschnittskordinaten enthalten, bezeichnet man als Momente und bemißt deren Grad nach der Zahl der Querschnittskordinaten, die als Faktoren in jenen Produkten auftreten. Wie das Trägheitsmoment ist daher auch $\int yz dF$ als ein Moment zweiten Grades des Querschnitts zu bezeichnen. Man hat ihm noch die besonderen Namen „Zentrifugalmoment“ oder auch „Deviationsmoment“ gegeben. Es soll mit Φ bezeichnet werden, wobei die besonderen Achsenrichtungen durch angehängte Zeiger kenntlich gemacht werden können. Gl. (49) kann hiernach auch in der Form

$$\Phi_{yz} = 0 \quad (50)$$

ausgesprochen werden. Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden; nur dann, wenn das Zentrifugalmoment des Querschnitts für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Achsenkreuz, von dem eine Achse in die Ebene des Moments der äußeren Kräfte fällt, gleich Null ist, können die Spannungen nach den einfachen Formeln (46) oder (48) berechnet werden.

Ein Trägheitsmoment kann nie zu Null werden, da es sich aus lauter positiven Gliedern zusammensetzt. Dagegen tragen alle Flächenteile des Querschnitts, die im ersten und dritten Quadranten des Achsenkreuzes liegen, positive, alle im zweiten und vierten Quadranten negative Glieder zum Zentrifugalmomente bei. Das Zentrifugalmoment kann daher ebensowohl negativ als positiv oder gleich Null werden. Der letzte Fall wird, wie man ohne weiteres einsieht, immer bei symmetrischen Querschnitten eintreten, wenn eine Achse des Achsenkreuzes mit der Symmetrieachse zusammenfällt, denn

die Beiträge von je zwei spiegelbildlich zueinander liegenden Flächenteilen heben sich gegeneinander gerade auf.

Ehe wir die Berechnung der Spannungen auf den Fall ausdehnen, daß Φ_{yz} nicht gleich Null ist, müssen wir einige geometrische Betrachtungen über die Momente zweiten Grades einschalten.

§ 19. Trägheits- und Zentrifugalmomente von Querschnittsflächen.

Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Trägheitsmomente eines Querschnitts für alle Achsen, die man in der Querschnittsebene ziehen kann, untereinander zu vergleichen.

In Abb. 17 gebe die schraffierte Fläche eine Querschnittsfläche von beliebiger Gestalt an; AA sei die Achse, für die man das Trägheitsmoment berechnen soll und S sei der Schwerpunkt der Fläche. Man ziehe durch S eine zweite Achse, die zu AA parallel ist. Das Trägheitsmoment für diese

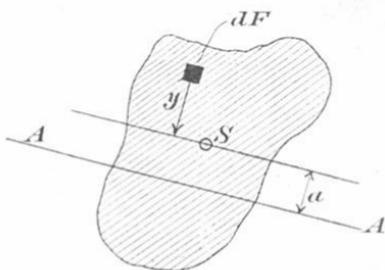


Abb. 17.

Schwerpunktsachse sei einfach mit Θ , das für die Achse AA , die den Abstand a von S hat, mit Θ_a bezeichnet. Der Abstand eines Flächenelementes dF von der Schwerpunktsachse sei gleich y , das positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem es in entgegengesetzter oder in gleicher Richtung mit a liegt. Dann hat man:

$$\Theta_a = \int (y + a)^2 dF = \int y^2 dF + 2a \int y dF + a^2 \int dF.$$

Das erste Glied gibt das Trägheitsmoment Θ für die Schwerpunktsachse an. Das zweite Glied ist gleich Null, denn $\int y dF$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse und dieses verschwindet für alle Schwerlinien. Im dritten Gliede kann man $\int dF$ zur

ganzen Querschnittsfläche F zusammenfassen. Die vorige Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\Theta_{\alpha} = \Theta + a^2 \cdot F. \quad (51)$$

Man kann hiernach auf sehr einfache Weise für alle übrigen Achsen die Trägheitsmomente angeben, sobald man sie für alle Schwerpunktsachsen kennt. Dieser Satz wird häufig gebraucht, um das Trägheitsmoment eines Querschnitts zu berechnen, der sich aus verschiedenen Flächen von einfacher Gestalt, z. B. aus lauter Rechtecken, wie der I-förmige Querschnitt zusammensetzt, wovon bei den Aufgaben noch weiter die Rede sein wird.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Trägheitsmomente für die in verschiedenen Richtungen durch den Schwerpunkt gezogenen Achsen miteinander zu vergleichen. Wir legen in Abb. 18 durch den Schwerpunkt ein rechtwinkliges Achsenkreuz der YZ und und ziehen noch eine dritte Schwerlinie AA , die mit der Y -Richtung den beliebigen

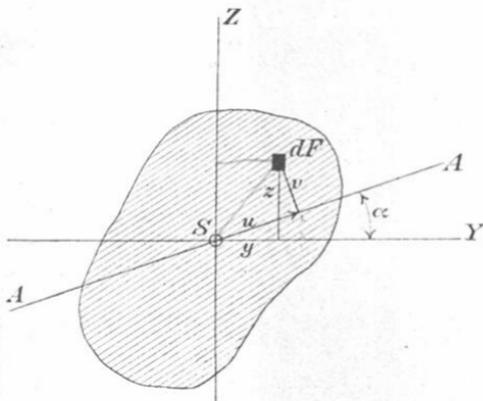


Abb. 18.

Winkel α bildet. Die Koordinaten eines Flächenelementes dF seien y, z , der Abstand zwischen dF und AA mit v und der Abschnitt, den v auf AA von S an gerechnet bildet, mit u bezeichnet. Dann ist

$$u = y \cos \alpha + z \sin \alpha,$$

$$v = -y \sin \alpha + z \cos \alpha.$$

Für das Trägheitsmoment Θ_{α} in bezug auf die Achse AA erhalten wir

$$\Theta_{\alpha} = \int v^2 dF = \int (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF.$$

Beim Ausquadrieren geht dies über in

$$\Theta_{\alpha} = \cos^2 \alpha \int z^2 dF + \sin^2 \alpha \int y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int yz dF.$$

Die hier noch vorkommenden Summengrößen bilden aber die Momente zweiten Grades für die Koordinatenachsen der y und z . Versteht man unter Θ_y das Trägheitsmoment in bezug auf die Y -Achse, also

$$\Theta_y = \int z^2 dF$$

und entsprechend bei den anderen Momenten, so hat man auch

$$\Theta_{\alpha} = \cos^2 \alpha \Theta_y + \sin^2 \alpha \Theta_z - \sin 2\alpha \Phi_{yz}. \quad (52)$$

Wir bilden sofort auch das Zentrifugalmoment Φ_{α} für die Achse AA und eine zu ihr senkrecht gezogene. Nach der Definition des Zentrifugalmoments ist

$$\Phi_{\alpha} = \int uv dF = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dF.$$

Nach Ausmultiplizieren und Einsetzen der Werte für die dabei auftretenden Summengrößen geht dies über in

$$\Phi_{\alpha} = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha. \quad (53)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (52) und (53) vermögen wir die Momente zweiten Grades für alle anderen Schwerpunktsachsen anzugeben, wenn sie für irgend zwei zueinander senkrechte Achsen bereits bekannt sind. Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Richtungen der Schwerpunktsachse das Trägheitsmoment zu einem Maximum oder Minimum wird. Dazu differenzieren wir Θ_{α} nach α und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\alpha}}{d\alpha} &= -2 \cos \alpha \sin \alpha \Theta_y + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Theta_z - 2 \cos 2\alpha \Phi_{yz} \\ &= (\Theta_z - \Theta_y) \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha \Phi_{yz} \\ &= -2 \Phi_{\alpha}. \end{aligned}$$

Für ein Maximum oder Minimum von Θ_{α} muß der Differentialquotient verschwinden und wir sehen, daß dies bei jenen Achsen zutrifft, für die das Zentrifugalmoment verschwindet. Durch Auflösen der Gleichung $\Phi_{\alpha} = 0$ erhalten wir für diese ausgezeichneten Richtungen

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}. \quad (54)$$

Welchen Wert auch der Bruch auf der rechten Seite haben möge, man kann immer zwei zwischen 0 und 2π liegende Winkel, die sich um zwei Rechte voneinander unterscheiden, angeben, deren Tangente gleich diesem Werte ist. Es gibt also auch immer zwei zwischen 0 und π liegende Winkel α , von denen der eine um einen Rechten größer ist, als der andere, für die das Zentrifugalmoment zu Null wird und Θ einen größten oder kleinsten Wert annimmt. Ob der eine oder der andere Fall vorliegt, vermag man leicht mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten zu entscheiden. Es genügt aber auch, darauf aufmerksam zu machen, daß sich Θ stetig ändert, wenn man die Achse AA eine Umdrehung ausführen läßt, und daß daher von den beiden ausgezeichneten Werten notwendig der eine ein Maximum, der andere ein Minimum sein muß. Die beiden zueinander senkrechten Richtungen, die durch Gl. (54) bestimmt sind, werden die Hauptachsen des Querschnitts genannt.

Jeder beliebig gestaltete Querschnitt hat also immer mindestens zwei durch den Schwerpunkt gehende Hauptachsen. War zufällig $\Phi_{yz} = 0$, so sind die Koordinatenachsen nach Gl. (54) selbst die Hauptachsen. Es kann aber auch vorkommen, daß jede Schwerpunktsachse des Querschnitts zugleich eine Hauptachse ist, nämlich dann, wenn $\Phi_{yz} = 0$ und zugleich $\Theta_z = \Theta_y$ ist. Der Bruch auf der rechten Seite von Gl. (54) nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; wir erkennen aber aus Gl. (53), daß in diesem Falle Φ_α für jede Achse AA zu Null wird, und aus Gl. (52) folgt, daß dann alle Trägheitsmomente Θ_α untereinander gleich sind. Dieser Fall liegt z. B. bei einem Quadrate oder überhaupt bei jedem regelmäßigen Vielecke vor.

Um die Zentrifugalmomente brauchen wir uns in der Folge nicht weiter zu kümmern. Dagegen wollen wir noch eine geometrische Darstellung ableiten, mit deren Hilfe man die in den vorausgehenden Formeln ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten leicht zu überblicken vermag. Zu diesem Zwecke

können wir uns die Koordinatenachsen der y und z von vornherein in die Richtungen der Hauptachsen gelegt denken. Gl. (52) vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$\Theta_{\alpha} = \cos^2 \alpha \Theta_y + \sin^2 \alpha \Theta_z. \quad (55)$$

An Stelle der Trägheitsmomente selbst wollen wir in diese Gleichung die Trägheitsradien einführen. Dividiert man nämlich jedes Trägheitsmoment durch die Fläche des Querschnitts, so erhält man eine Größe, die das Quadrat einer Länge darstellt. Setzt man also

$$i_{\alpha}^2 = \frac{\Theta_{\alpha}}{F}, \quad (56)$$

so bedeutet i_{α} den quadratischen Mittelwert der Abstände aller Flächenelemente des Querschnitts von der Achse. Dieser Mittelwert wird als Trägheitshalbmesser bezeichnet; man rechnet, da er eine Strecke bildet, mit ihm oft viel bequemer als mit dem Trägheitsmomente selbst. Durch Division mit F geht Gl. (55) über in

$$i_{\alpha}^2 = \cos^2 \alpha i_y^2 + \sin^2 \alpha i_z^2. \quad (57)$$

Um i_{α} als Funktion des Richtungswinkels α geometrisch darzustellen, würde es am nächsten liegen, die Größe von i_{α} auf jeder Schwerpunktsachse abzutragen und alle Endpunkte durch eine Kurve zu verbinden. Wenn auch gegen diese Darstellung nichts einzuwenden ist, so wäre sie doch nicht bequem, da die erhaltene Kurve vom vierten Grade wäre und über deren Eigenschaften nichts als bekannt vorausgesetzt werden könnte. Man muß bei solchen Darstellungen immer suchen, mit wohlbekannteren Kurven, also namentlich mit Kurven zweiten Grades auszukommen. Dies ist hier auch leicht möglich, wenn man auf jeder Schwerpunktsachse nicht i_{α} selbst, sondern eine Strecke abträgt, die ihr umgekehrt proportional ist. Zu diesem Zwecke wähle man eine beliebige Strecke m und bilde zu jedem Trägheitshalbmesser i den Wert

$$\tau = \frac{m^2}{i}. \quad (58)$$

Setzt man den Wert von i aus dieser Gleichung in Gl. (57) ein, so geht sie nach einer einfachen Umformung über in

$$1 = \left(\frac{\tau_\alpha \cos \alpha}{\tau_y} \right)^2 + \left(\frac{\tau_\alpha \sin \alpha}{\tau_z} \right)^2 \quad (59)$$

und dies ist, wenn τ_α als Radiusvektor auf jedem Strahle α abgetragen wird, die Mittelpunktsleichung einer Ellipse, auf

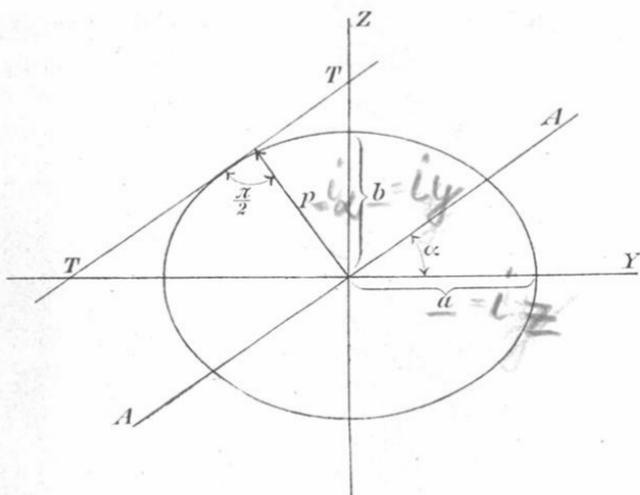


Abb. 19.

der die Endpunkte der Radiusvektoren enthalten sind. Der Maßstab, in dem die Ellipse gezeichnet ist, hängt von der Wahl des beliebigen Faktors m in Gl. (58) ab.

Noch etwas übersichtlicher wird die Darstellung, wenn man sich einer bekannten Eigenschaft

der Ellipse erinnert. Zieht man nämlich in Abb. 19 zu dem Durchmesser AA einer Ellipse eine parallele Tangente TT , so ist das Perpendikel p vom Mittelpunkte auf die Tangente durch die Gleichung

$$p^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \quad (60)$$

gegeben und aus dem Vergleiche mit Gl. (57) folgt, daß p den zu AA gehörigen Trägheitshalbmesser angibt, wenn man die Halbachsen $a = i_z$ und $b = i_y$ macht. Die auf diese Art erhaltene Ellipse ist übrigens unter jenen enthalten, die bei der vorigen Darstellung gefunden wurden. Es ist nämlich jene, für die

$$m^2 = i_y i_z$$

gewählt wird, denn beide stimmen sowohl in den Richtungen als in den Größen der Hauptachsen miteinander überein. Es

ist zweckmäßig, auch wenn man an der ersten Darstellung festhalten will, m stets in dieser Größe zu wählen. Die so bestimmte Ellipse heißt allgemein die Trägheitsellipse. Man kann nämlich die ganze vorausgehende Betrachtung mit geringer Änderung auch für alle Strahlen durchführen, die nicht durch den Schwerpunkt, sondern durch einen anderen beliebig gewählten Punkt des Querschnitts gezogen sind; ich habe hier davon abgesehen, da ich nicht unnötigerweise umständlicher in der Darstellung werden wollte, als es durch den Zweck geboten ist. Für die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen führt die Trägheitsellipse den besonderen Namen Zentralellipse.

Wenn die Zentralellipse gegeben ist, findet man den zu irgendeiner Achse gehörigen Trägheitshalbmesser am einfachsten, indem man eine parallele Tangente an die Ellipse zieht und deren Abstand vom Mittelpunkte mit dem Zirkel abmißt. Man hat dann keine Umrechnung nötig, wie sie nach Gl. (58) erforderlich wird, wenn man von dem Radiusvektor τ ausgeht, der von der Zentralellipse auf dem Strahle abgeschnitten wird.

Die Aufgabe, das Trägheitsmoment für irgendeine in der Querschnittsebene enthaltene Achse möglichst schnell anzugeben, ist durch die vorausgehenden Betrachtungen als gelöst anzusehen, sobald die Zentralellipse bekannt ist. Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie man diese selbst erhält. Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, so kennt man sofort die Richtungen der Hauptachsen, und man braucht nur die Trägheitsmomente durch unmittelbare Ausführung der Summierung aufzusuchen, um die Hauptträgheitsradien und damit die Hauptachsen der Zentralellipse zu erhalten. Im anderen Falle zieht man drei Schwerpunktsachsen in beliebigen Richtungen, berechnet für diese unmittelbar die Trägheitsmomente, findet daraus die Trägheitsradien und zieht dann zu beiden Seiten jeder Achse eine Parallele, deren Abstand gleich dem Trägheitsradius gemacht wird. Man hat damit sechs Tangenten der Zentralellipse gefunden. Nach dem Satze von Brianchon kann man dann noch beliebig viele andere Tangenten in einfachster Weise

konstruieren. Die Ellipse selbst wird damit ebenfalls als die von diesen Tangenten umhüllte Kurve bekannt. Darin besteht eben der Vorteil, den die Darstellung mit Hilfe einer Kurve zweiten Grades gewährt, daß man bei allen weiteren Konstruktionen unmittelbar an bekannte Eigenschaften und bekannte Sätze anknüpfen kann. — Natürlich kann man anstatt dieses Verfahrens auch das Zentrifugalmoment neben den beiden Trägheitsmomenten für zwei zueinander rechtwinklige Achsen berechnen und die Lage der Hauptachsen nach Gl. (54) bestimmen.

Für die in der Technik viel gebrauchten Walzeisenprofile sind die Richtungen der Hauptachsen und die zugehörigen Trägheitshalbmesser oder Trägheitsmomente ein für allemal vorausberechnet, und in den in allen Zeichenstuben zu findenden Verzeichnissen angegeben, so daß man in der Mehrzahl aller Fälle die Zentrallengipse auf Grund dieser Angaben ohne weiteres auftragen kann.

Ich habe bisher immer nur von den Trägheitsmomenten für solche Achsen gesprochen, die in der Querschnittsebene selbst enthalten sind. Man kann diese Untersuchung leicht auch auf solche Fälle ausdehnen, bei denen die Achse einen beliebigen Winkel mit der Querschnittsebene bildet (oder ihr parallel ist). In der Festigkeitslehre kommt indessen nur noch einer von diesen Fällen in Frage, nämlich das Trägheitsmoment für eine zur Querschnittsebene senkrechte Achse. Dieses wird als das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Gebraucht man dafür den Buchstaben Θ_p , so ist es definiert durch den Ansatz

$$\Theta_p = \int r^2 dF,$$

wenn r der senkrechte Abstand zwischen dF und der Achse ist. Zieht man durch den Schnittpunkt der Achse mit der Querschnittsebene wieder zwei Koordinatenachsen, so hat man

$$r^2 = y^2 + z^2$$

und daher

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z. \quad (61)$$

Θ_p ist also mit gegeben, wenn man die Zentralellipse kennt. Bezeichnet man die Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 und beachtet, daß die Koordinatenachsen jetzt in beliebiger Richtung gezogen sein durften, so erhält man aus Gl. (61) noch die einfache Beziehung

$$\Theta_y + \Theta_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

d. h. die Summe der Trägheitsmomente für irgend zwei aufeinander rechtwinklige Achsen, die in der Querschnittsfläche durch einen gegebenen Punkt gezogen sind, ist konstant.

Anmerkung. Denkt man sich die Fläche, von der hier die Rede war, gleichmäßig mit Masse belegt, so werden die Trägheits- und Zentrifugalmomente dieser Massenverteilung aus denen der Fläche durch Multiplikation mit der auf die Flächeneinheit bezogenen Massendichte gefunden. Wir sind daher berechtigt, später in der Dynamik von den hier nachgewiesenen Gesetzmäßigkeiten ebenfalls Gebrauch zu machen, ohne sie nochmals von neuem ableiten zu müssen.

§ 20. Berechnung der Spannungsverteilung bei schiefer Belastung.

Schief nennt man die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, wenn die Ebene der äußeren Kräfte oder die Ebene des Biegemomentes nicht durch eine Hauptachse des Querschnitts geht. In diesem Falle zerlegt man jede Kraft in zwei Komponenten parallel zu den beiden Querschnittshauptachsen und setzt die Komponenten von jeder Richtung zu einem Biegemomente zusammen, dessen Ebene dann ebenfalls durch eine Hauptachse geht. Man kann auch, wenn die gegebenen Kräfte schon vorher zu einem Biegemomente vereinigt waren, dessen Ebene nicht durch die Hauptachse ging, dieses nachträglich in zwei durch die Hauptachsen gehende Kräftepaare zerlegen. Wird der Winkel, den in diesem Falle die Ebene des Biegemomentes M mit einer der Hauptachsen bildet, mit α bezeichnet, so sind die Momente der beiden Komponenten gleich $M \cos \alpha$ und gleich $M \sin \alpha$. Dann berechnet man die Spannungen, die durch jede Komponente

für sich genommen im Querschnitte hervorgerufen werden, nach Gl. (46) oder Gl. (48), die hier anwendbar sind. Die durch das Zusammenwirken beider Komponenten entstehenden Spannungen findet man daraus durch algebraische Summierung der beiden Werte. Im ganzen hat man daher

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_x} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} \cdot z. \quad (62)$$

Eine einfache Betrachtung läßt nachträglich erkennen, an welcher Stelle des Querschnitts σ seinen größten Wert annimmt.

Zur Begründung dieses Verfahrens kann man sich entweder auf das Gesetz der Superposition verschiedener Spannungszustände berufen oder man kann auch darauf hinweisen, daß die durch Gl. (62) angegebene Spannungsverteilung linear ist und dabei das Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften herstellt. Bei linearer Spannungsverteilung ist ein solches Gleichgewicht nur auf eine einzige Art möglich, denn die Richtung der Nulllinie bestimmt eindeutig die Ebene des aus den Spannungen resultierenden Kräftepaars und die Größe der Spannung in einem gegebenen Abstände von der Nulllinie bestimmt ebenfalls eindeutig die Größe des statischen Moments dieses Kräftepaars. — Wenn das Gesetz der Superposition für den betreffenden Stoff nicht gültig ist, verliert die zuerst gegebene Begründung ihre Bedeutung. In diesem Falle ist aber auch kaum anzunehmen, daß die Spannungsverteilung linear ist, und die andere Begründung versagt daher ebenfalls. In der Tat darf man in diesem Falle nicht darauf rechnen, daß Gl. (62) ziemlich genau richtig ist; ihre Anwendung kann vielmehr zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Indessen gilt dies, wie schon öfters bemerkt, bei allen Festigkeitsberechnungen, die sich auf solche Stoffe beziehen.

Ein einfaches Beispiel möge noch die Anwendung von Gl. (62) zeigen. Ein Holzbalken sei als Dachpfette verwendet, so daß eine Querschnittsseite in die Neigung der Dachfläche fällt. Der Querschnitt des Balkens ist in Abb. 20 gezeichnet.

Nimmt man an, daß die Belastung Q des ganzen Balkens (samt Eigengewicht) gleichmäßig über die ganze Spannweite l verteilt ist, so hat man zunächst für das Biegemoment in der Mitte, wie man leicht findet,

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

Die Ebene von M steht lotrecht und bildet daher Winkel von α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ mit den Hauptachsen. Die Komponenten von M in den durch die Hauptachsen gelegten Ebenen sind in die Abbildung eingeschrieben.

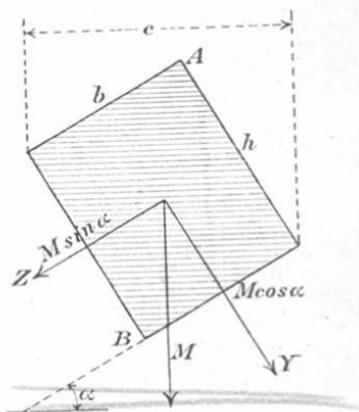


Abb. 20.

Das Trägheitsmoment Θ_z eines Rechtecks folgt aus

$$\Theta_z = \int y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

und das Widerstandsmoment W_z daher

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Die Momente für die andere Hauptachse findet man daraus durch Vertauschung von b mit h . — Durch das Achsenkreuz der Y und Z wird das Rechteck in vier Quadranten zerlegt, von denen zwei durch die Komponenten $M \sin \alpha$ und $M \cos \alpha$ Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens erfahren, während sich bei den beiden anderen die Spannungen addieren. Man erkennt daraus, daß an der Ecke A die größte Druck- und bei B die größte Zugspannung auftritt und daß beide von einerlei Größe sind. Diese größte Spannung folgt daher aus

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{W_z} + \frac{M \sin \alpha}{W_y} = \frac{6 M \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6 M \sin \alpha}{b^2 h}.$$

Die in Abb. 20 mit c bezeichnete Breite der Horizontalprojektion des Balkens ist

$$c = b \cos \alpha + h \sin \alpha,$$

und man kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch einfacher

$$\sigma = \frac{6 M c}{b^2 h^2} \quad (63)$$

schreiben, was für die Ausführung der Berechnung am bequemsten ist. Für M hat man entweder den vorher angegebenen Wert einzusetzen, oder wenn die Belastung nicht gleichförmig verteilt sein sollte, das anderweitig in der Kraftebene berechnete Biegemoment. Mit $c = b$ geht der Fall in den einfacheren über, daß die zu h parallele Symmetrieachse in die lotrechte Kraftebene fällt. Seinen größten Wert nimmt c an, wenn eine Diagonale des Rechtecks in horizontaler Richtung geht. Wenn die Lasten gegeben sind, erfährt nach Gl. (63) der Balken bei dieser Lage die größte Beanspruchung.

§ 21. Exzentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes.

Wir nehmen jetzt an, daß die äußeren Kräfte am einen Teile des Stabes sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, die senkrecht zum Querschnitte steht, dabei aber nicht durch den Schwerpunkt geht. Dieser Belastungsfall führt die in der Überschrift angegebene Bezeichnung. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Fall der zusammengesetzten Festigkeit, nämlich um das Zusammenwirken einer achsialen Belastung mit einer reinen Biegeb Belastung. Denn nach den früher gegebenen Vorschriften ist die äußere Kraft zu ersetzen durch eine ihr gleiche und parallele, die im Schwerpunkte angreift und durch das bei dieser Parallelverlegung auftretende Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabmittellinie geht. Dieses Kräftepaar zerlegen wir noch, wie im vorigen Paragraphen, in zwei Komponenten nach den Richtungen der Hauptachsen.

In Abb. 21 ist von dem Querschnitte nur die Zentralellipse gezeichnet; man kann sich den Querschnittsumriß beliebig hinzudenken. A sei der Angriffspunkt der äußeren Kraft P mit den Koordinaten u und v in bezug auf die Hauptachsen. Dann ist noch irgendein Flächenelement dF des Quer-

schnitts mit den Koordinaten y und z angegeben. Die Spannung σ am Orte yz setzt sich aus drei Gliedern zusammen, nämlich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{\Theta_y} z + \frac{Pu}{\Theta_z} \cdot y.$$

Prinzip Superposition

Das erste Glied rührt von der achsialen Belastung her; im zweiten Gliede ist Pv das Moment des Kräftepaars, dessen Ebene parallel zur Hauptachse Z ist, und ähnlich im dritten Gliede. Durch Einführung der Trägheitshalbmesser, die gleich den Halbachsen a und b der Zentralellipse sind, an Stelle der Trägheitsmomente geht die vorige Gleichung über in

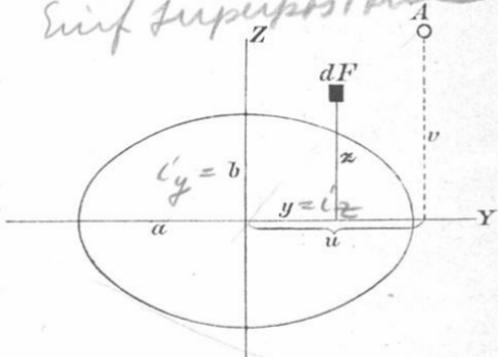


Abb. 21.

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2} \right). \quad (64)$$

In der neutralen Achse des Querschnitts muß dieser Ausdruck verschwinden, wir erhalten daher als Gleichung der Nulllinie

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1. \quad (65)$$

Darin sind y und z die Koordinaten von Punkten der Nulllinie, die selbstverständlich — nämlich weil dies schon bei der Aufstellung der Ausdrücke für die Spannungen vorausgesetzt wurde — eine gerade Linie ist. Die Koeffizienten von y und z in Gl. (65) hängen von den Koordinaten u und v , also von der Lage des Angriffspunktes der exzentrischen Belastung ab. Jedem Punkte A ist durch Gl. (65) eine bestimmte Nulllinie zugeordnet. Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, diesen Zusammenhang näher zu ergründen.

Zu diesem Zwecke sei zunächst angenommen, der Angriffspunkt A liege auf der Zentralellipse. Die Koordinaten irgendeines Punktes dieser Ellipse seien mit η , ξ bezeichnet. Dann hat man die Ellipsengleichung

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1. \quad (66)$$

Setzt man nun $u = \eta$ und $v = \xi$, so wird Gl. (65) befriedigt, wenn wir $y = -\eta$ und $z = -\xi$ annehmen, denn diese Gleichung geht dann in Gl. (66) über. Wir erkennen daraus zunächst, daß die Nullinie durch den dem Angriffspunkte diametral gegenüberliegenden Punkt der Zentralellipse geht, falls der Angriffspunkt selbst auf der Zentralellipse liegt. Weiter folgt aber noch, daß die Nullinie in diesem Falle die Zentralellipse berührt. Um dies zu beweisen, differenzieren wir die Gleichungen beider Linien. Wir finden

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} \frac{dz}{dy} = 0,$$

$$\frac{\eta}{a^2} + \frac{\xi}{b^2} \frac{d\xi}{d\eta} = 0,$$

und wenn wir in die erste Gleichung die vorher angenommenen Werte von u und v einsetzen und die zweite Gleichung auf den auf der Zentralellipse liegenden Punkt der Nullinie anwenden, finden wir in der Tat, daß an dieser Stelle

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\xi}{d\eta}$$

ist, daß also die Nullinie und die Zentralellipse an dieser Stelle gleich gerichtet sind. Damit ist die Lage der Nullinie vollständig bestimmt, für den Fall, daß der Angriffspunkt der Belastung auf der Zentralellipse enthalten ist.

Wir denken uns jetzt den Angriffspunkt aus seiner ersten Lage längs des durch den Schwerpunkt gezogenen Strahles verschoben. Dann ändern sich u und v beide in demselben Verhältnisse. Auf den Wert des Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, also auf die Richtung der Nullinie, ist dies ohne Einfluß. Die Nullinie verschiebt sich also dabei parallel zu sich selbst. Wenn etwa u und v doppelt so groß geworden sind als vorher, müssen wir y und z überall halb so groß als vorher annehmen, um Gl. (65) wieder zu befriedigen. Daraus folgt, daß die Nullinie um so näher an den Schwerpunkt heranrückt, je weiter sich der zugehörige Angriffspunkt entfernt, und zwar so, daß das Produkt der Abstände beider vom Schwerpunkte konstant

bleibt. Die Nulllinie schneidet die Zentralellipse, wenn der Angriffspunkt außerhalb der Ellipse liegt, und sie geht außen vorbei im umgekehrten Falle. Wenn der Angriffspunkt ins Unendliche rückt, geht die Nulllinie zuletzt durch den Schwerpunkt selbst. — Dieses Resultat war schon nach dem Früheren zu erwarten, denn in diesem Falle kommt die achsiale Belastung gegenüber dem biegenden Kräftepaare nicht mehr in Betracht, und wir können geradezu den Fall der reinen Biegung als jenen Sonderfall der exzentrischen Belastung betrachten, bei dem diese Belastung durch eine unendlich ferne und dabei unendlich kleine Kraft von endlichem Momente hervorgebracht wird. Dies führt uns nur wieder auf eine aus der allgemeinen Statik bekannte Deutung eines Kräftepaares. — Wenn umgekehrt der Angriffspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, rückt die Nulllinie ins Unendliche, d. h. wir haben eine gleichförmige Spannungsverteilung über den ganzen Querschnitt.

Wir sind jetzt imstande, mit Hilfe der Zentralellipse für jede beliebige Lage des Angriffspunktes die zugehörige Nulllinie sofort anzugeben. Wir brauchen dazu nur einen Strahl vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte zu ziehen, uns zuerst den Angriffspunkt auf dem Schnittpunkte dieses Strahles mit der Zentralellipse zu denken, die dazu gehörige diametral gegenüberliegende Tangente zu ziehen und diese schließlich parallel zu verschieben, bis sich ihr Abstand vom Mittelpunkte im umgekehrten Verhältnisse geändert hat, wie der Abstand des Angriffspunktes.

Wir wollen aber die Untersuchung noch um einen Schritt weiter führen. Der Angriffspunkt soll nämlich jetzt eine beliebige gerade Linie beschreiben. Zu jeder Lage gehört eine bestimmte Nulllinie, und es fragt sich, wie sich die Lage der Nulllinie ändert, während der Angriffspunkt längs seiner Bahn fortrückt. Die Gleichung dieser Bahn sei

$$v = \alpha u + \beta,$$

wobei α und β beliebig gegebene konstante Größen sind. Wir fassen zunächst irgend zwei Lagen u_1, v_1 und u_2, v_2 auf dieser

Bahn ins Auge, suchen die zugehörigen Nulllinien auf und ermitteln, in welchem Punkte beide sich schneiden. Die Gleichungen beider Nulllinien sind nach Gl. (65), wenn man $v_1 = \alpha u_1 + \beta$ setzt und ebenso für v_2

$$\frac{u_1 y}{a^2} + \frac{z}{b^2} (\alpha u_1 + \beta) = -1,$$

$$\frac{u_2 y}{a^2} + \frac{z}{b^2} (\alpha u_2 + \beta) = -1.$$

Um die Koordinaten des Schnittpunktes beider Nulllinien zu erhalten, müssen wir diese Gleichungen nach y und z auflösen. Wir finden

$$y = a^2 \frac{\alpha}{\beta}; \quad z = -\frac{b^2}{\beta}, \quad (67)$$

wie man sich auch nachträglich leicht durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen überzeugt. Die Abszissen u_1 und u_2 der auf der Bahn des Angriffspunktes beliebig herausgegriffenen beiden Punkte sind aus den gefundenen Werten vollständig herausgefallen. Daraus folgt, daß es gleichgültig ist, welche besonderen Punkte man auf der Bahn ausgewählt hat; alle Nulllinien, die zu den Angriffspunkten auf dieser Bahn gehören, schneiden sich gegenseitig in demselben Punkte, dessen Koordinaten durch die Gl. (67) angegeben sind. Mit anderen Worten heißt dies: Wenn sich der Angriffspunkt längs einer beliebigen Geraden verschiebt, dreht sich die Nulllinie um einen dieser Geraden zugeordneten Punkt.

Die Art dieser Zuordnung stimmt mit jener überein, die wir schon vorher kennen lernten. Denn denkt man sich jetzt umgekehrt den durch die Gl. (67) angegebenen Punkt als Angriffspunkt, setzt also

$$u = a^2 \frac{\alpha}{\beta}, \quad v = -\frac{b^2}{\beta}$$

und führt diese Werte in die Gleichung der Nulllinie Gl. (65) ein, so geht diese über in

$$z = \alpha y + \beta.$$

Wenn man also den Punkt, um den sich vorher die Nulllinie drehte, nachher als Angriffspunkt wählt, so fällt die ihm

zugehörige Nulllinie mit jener Linie zusammen, die vorher als Bahn des Angriffspunktes gedient hatte.

Wir sehen, daß hierdurch jedem Punkte der Ebene eine Gerade und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist. Dies erinnert an die Lehre von den Polaren in der Geometrie der Kegelschnitte. Nur insofern besteht hier ein Unterschied, als nicht wie bei den Polaren, einer den Kegelschnitt (die „Ordnungskurve“) berührenden Geraden der Berührungspunkt, sondern der diametral gegenüberliegende Punkt zugeordnet ist und ähnlich in jedem anderen Falle. In Anlehnung an den Sprachgebrauch in der Geometrie der Kegelschnitte bezeichnet man daher die einander entsprechenden Punkte und Geraden als die Antipole und die Antipolaren.

Mit diesen Bezeichnungen können wir die vorausgehenden Ergebnisse in den Sätzen zusammenfassen:

1) Jedem Punkte der Querschnittsebene, der als Angriffspunkt der Belastung gedacht wird, ist die Antipolare dieses Punktes in bezug auf die Zentralellipse als Nulllinie zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder als Nulllinie beliebig gewählten Geraden der Querschnittsebene der Antipol dieser Geraden als Angriffspunkt der Belastung.

2) Wenn sich der Angriffspunkt auf einer beliebigen Geraden verschiebt, dreht sich die zugehörige Nulllinie um den Antipol dieser Geraden.

3) Wenn sich die Nulllinie um einen beliebigen Punkt dreht, schreitet der zugehörige Angriffspunkt auf der Antipolaren dieses Punktes weiter.

Man kann noch hinzufügen:

4) Wenn der Angriffspunkt auf einer Kurve zweiter Ordnung fortschreitet, hüllt die Nulllinie einen anderen Kegelschnitt ein und umgekehrt.

Bei der Anwendung dieser Sätze ist es gleichgültig, ob die Nulllinie die Querschnittsfläche durchschneidet oder außerhalb verläuft. Im letzten Falle kommen überhaupt nur Span-

nungen σ von gleichem Vorzeichen im Querschnitte vor. Man kann sich nun noch die Aufgabe stellen, alle Lagen des Angriffspunktes anzugeben, bei denen nur Spannungen von einerlei Vorzeichen im Querschnitte auftreten. Alle diese Angriffspunkte liegen innerhalb einer Fläche, die als der Kern des Querschnitts bezeichnet wird. Um den Kern des Querschnitts zu erhalten, denke man sich alle möglichen Linien gezogen, die den Querschnittsumfang entweder berühren oder überhaupt mindestens einen Punkt mit ihm gemeinsam haben, ohne ins Innere der Fläche einzutreten. Wir wollen den Inbegriff aller dieser Linien den den Querschnitt umhüllenden Tangentenbüschel nennen. Jedem Strahle dieses Büschels entspricht ein Punkt des Kernumrisses, nämlich der Antipol des Strahles. Während der Strahl alle möglichen Lagen des Tangentenbüschels durchläuft, beschreibt der Antipol den Umfang des Kerns. Denkt man sich, nachdem der Kernumfang konstruiert ist, den Angriffspunkt in die Fläche des Kerns gerückt, so rückt die zugehörige Nulllinie weiter nach außen und man erkennt daraus, daß in der Tat nur Spannungen gleichen Vorzeichens bei dieser Lage des Angriffspunktes auftreten können. Dies gilt auch noch, wenn der Angriffspunkt auf dem Umfange des Kernes liegt; dabei sinkt nur an einer oder auch an einigen Stellen des Querschnittsumfanges die Spannung bis auf Null herab. Sobald aber der Angriffspunkt über den Kern hinaus gerückt wird, kommen Spannungen von entgegengesetztem Vorzeichen im Querschnitte vor.

Diese Betrachtungen werden namentlich bei der Berechnung von Mauerpfeilern angewendet. Da Mauerwerk in gewöhnlicher Ausführung wenig widerstandsfähig gegen Zugbeanspruchung ist, muß man diese zu vermeiden suchen, und man stellt daher als Regel auf, daß der Angriffspunkt der Belastung, die in einem Querschnitte des Mauerpfeilers übertragen wird, nicht außerhalb des Querschnittkernes liegen soll. Diese Forderung beruht auf der allen diesen Untersuchungen zugrunde liegenden Voraussetzung, daß die Spannungsverteilung linear ist. Man kann freilich Bedenken tragen, ob diese Vor-

aussetzung gerade bei Mauerwerk, das dem Hookeschen Gesetze sicher nicht gehorcht, hinreichend genau zutrifft. In dessen hat sich die Regel ganz wohl bewährt und man braucht daher kein Bedenken gegen ihre Anwendung zu tragen.

Schließlich soll die Aufsuchung des Kerns noch an einigen einfachen Beispielen, zunächst für den rechteckigen Quer-

schnitt erläutert werden. Die Querschnittsseiten seien wie in Abb. 22 angegeben, mit a und b bezeichnet. Wie schon vorher gefunden (S. 95), ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für die zur Seite a parallele Hauptachse gleich $\frac{ab^3}{12}$, der Trägheitsradius also gleich $\frac{b}{\sqrt{12}} = 0,2887 b$. Für

die andere Hauptachse hat man nur a an die Stelle von b zu setzen. Wir haben damit die Halbachsen der Zentral-ellipse gefunden, tragen diese auf den Symmetrieachsen des Querschnitts auf und konstruieren die Ellipse. Von dem Tangentenbüschel, der den

Querschnitt einhüllt, kommen vier ausgezeichnete Lagen in Betracht, nämlich jene, die mit je einer Querschnittsseite zusammenfallen. Bei den übrigen Lagen geht der Strahl durch eine der Ecken des Rechtecks. Aus einer Hauptlage geht der Strahl daher in die nächste über, indem er sich um die dazwischen liegende Ecke dreht. Dabei beschreibt der Antipol, wie wir früher fanden, eine gerade Linie. Wir erkennen daraus, daß der Kernumriß ein Viereck und zwar, der Symmetrie wegen, ein Rhombus ist. Es genügt daher, die auf den Hauptachsen liegenden Eckpunkte aufzusuchen. Dem Strahle $\alpha\alpha$ des Tangentenbüschels entspricht der Antipol A . Der mit z be-

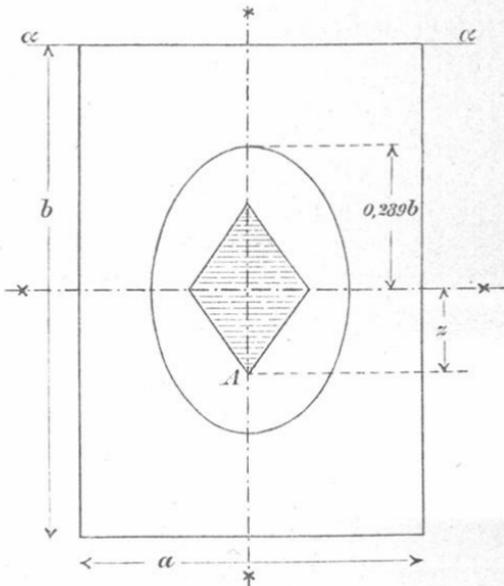


Abb. 22.

zeichnete Abstand dieses Punktes vom Schwerpunkte multipliziert mit dem Abstände der Linie $\alpha\alpha$, also mit $\frac{b}{2}$ ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, also

$$z \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad z = \frac{b}{6}.$$

Jede Diagonale des Kerns ist daher gleich dem dritten Teile der zu ihr parallelen Rechteckseite. Dies entspricht der Regel, daß bei Mauerpfeilern der Angriffspunkt der Belastung, falls er in einer Symmetrieebene enthalten ist, im mittleren Drittel der Fuge bleiben soll. — Der Kern ist in Abb. 22 durch Schraffierung hervorgehoben.

Für eine kreisförmige Querschnittsfläche ist der Kern natürlich selbst wieder ein Kreis. Um das Trägheitsmoment einer Kreisfläche zu berechnen, geht man am einfachsten von dem polaren Trägheitsmomente aus. Ein Ring vom Radius r und der Breite dr trägt, da alle seine Flächenelemente gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, $2\pi r^3 dr$ zu Θ_p bei. Wird der Radius des Kreises mit a bezeichnet, so hat man daher

$$\Theta_p = 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Für alle in der Querschnittsebene enthaltenen Achsen ist Θ gleich groß und nach dem in Gl. (61) ausgesprochenen Satze daher halb so groß als Θ_p . Wir haben daher für Θ und den Trägheitsradius i

$$\Theta = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{und} \quad i = \frac{a}{2}.$$

Das Produkt aus dem Kernradius z und dem Abstände einer den Querschnittsumfang berührenden Tangente ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, daher $z = \frac{a}{4}$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Ein elliptisch begrenzter Querschnitt wird am einfachsten als Projektion eines Kreises aufgefaßt. Ist a die große, b die kleine Halbachse und setzt man $b = a \cos \alpha$, versteht also unter α den Neigungswinkel jener Kreisfläche gegen

die Projektionsebene, so hat man für das Trägheitsmoment Θ_a in bezug auf die große Hauptachse

$$\Theta_a = \int z^2 dF = \cos^3 \alpha \int z_1^2 dF_1 = \cos^3 \alpha \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Dabei sind unter z_1 und dF_1 jene Größen zu verstehen, deren Projektionen z und dF bilden. Ebenso hat man

$$\Theta_b = \int y^2 dF = \cos \alpha \int y_1^2 dF_1 = \cos \alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

denn hier sind die Abstände y_1 und y einander gleich, da y_1 parallel zur Projektionsebene geht. Für die Trägheitsradien findet man hieraus durch Division mit dem Flächeninhalte der Ellipse

$$i_a = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad i_b = \frac{a}{2}.$$

Die Zentralellipse ist daher dem Querschnittsumrisse ähnlich. Auch der Kern ist eine hierzu ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Halbachsen, die sich ganz wie beim Kreise berechnen lassen, den vierten Teil jener vom Querschnittsumrisse ausmachen.

§ 22. Berechnung der Biegungsspannungen mit Hilfe des Kerns.

Schon früher wurde darauf hingewiesen, daß der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung als ein Sonderfall der exzentrischen Belastung aufgefaßt werden kann. Wir können daher die Entwicklungen des letzten Paragraphen benutzen, um noch eine andere Lösung der schon in § 20 behandelten Aufgabe daraus abzuleiten.

In Abb. 23 ist der Querschnitt als Rechteck gewählt; er könnte aber ebenso gut auch irgend eine andere Gestalt haben. Zentralellipse und Querschnittskern sind ebenso wie in Abb. 22 eingetragen. Mit BB ist die Spur der Ebene bezeichnet, in der das Kräftepaar vom Biegemomente M liegen möge. Wir fassen dieses Kräftepaar als eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft auf, deren Angriffspunkt daher der unendlich ferne Punkt der Geraden BB ist. Die zugehörige

Nullinie NN ist die Antipolare dieses Punktes und sie geht daher in der Richtung des zu BB konjugierten Durchmessers der Zentralellipse. Wir finden diese Richtung, indem wir im Durchschnittspunkte von BB mit der Zentralellipse eine Tangente konstruieren. Zu dieser geht NN parallel. Die größte

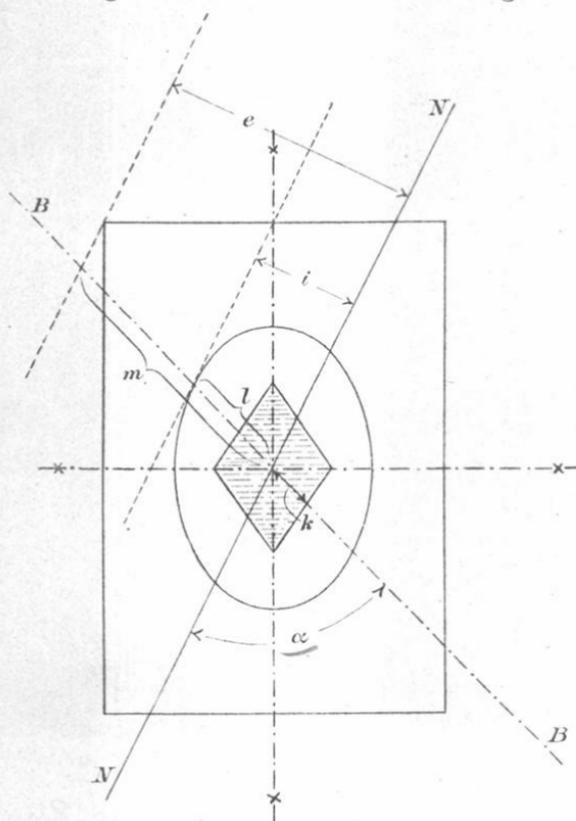


Abb. 23.

Spannung tritt an den Kanten auf, die den größten Abstand, nämlich den Abstand e von der Nulllinie haben. Um diese Spannung, die mit σ_0 bezeichnet werden soll, zu berechnen, schreiben wir noch die Bedingung an, daß das Moment aller Spannungen gleich dem Momente des biegenden Kräftepaars für die Momentenachse NN sein muß. Daß die Spannungen ein Kräftepaar liefern, das in der Ebene der äußeren Kräfte liegt, ist schon durch die Festsetzung der richtigen Lage der Nulllinie verbürgt; wir brauchen uns also nur noch um die Größe der Momente zu kümmern.

Hierbei ist zu beachten, daß die Nulllinie NN nicht senkrecht zur Ebene des Biegemomentes M steht, sondern einen Winkel α mit ihr bildet. Das Moment des biegenden Kräftepaars in bezug auf die Achse NN ist daher nicht gleich M , sondern gleich $M \sin \alpha$ zu setzen. Für die Spannung in irgend einem Flächenelemente dF , das den Abstand y von NN haben möge, können wir nach dem

Navierschen Spannungsverteilungsgesetze $\frac{\sigma_0}{e} y$ setzen und die Momentengleichung lautet daher

$$M \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{e} \int y^2 dF = \frac{\sigma_0}{e} \Theta_N,$$

wenn mit Θ_N das Trägheitsmoment für die Achse NN bezeichnet wird.

Andererseits ist aber nach der Definition des Kerns

$$\underline{km = l^2},$$

oder, wenn wir an Stelle der drei auf BB liegenden Strecken ihre Projektionen auf eine zu NN senkrechte Linie einführen,

$$k \sin \alpha \cdot e = i^2 = \frac{\Theta_N}{F},$$

denn i ist nach der Definition der Zentralellipse der zu NN gehörige Trägheitshalbmesser. Setzt man den hieraus folgenden Wert von Θ_N in die erste Gleichung ein und löst sie nach σ_0 auf, so erhält man das einfache Resultat

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k}. \quad (68)$$

Man kann diesem noch eine etwas andere Fassung geben, wenn man dem durch Gl. (47) zuerst eingeführten Begriffe des Widerstandsmoments W eine erweiterte Bedeutung verleiht, nämlich darunter das Produkt aus der Querschnittsfläche F und der „Kernweite“ k versteht. Diese neue Definition steht nämlich nicht im Widerspruche mit der durch Gl. (47) gegebenen, die nur für den Fall gültig war, daß die Biegungsebene durch eine Querschnittshauptachse geht. In der Tat ist in diesem Falle $ky_0 = i^2$ und daher $\frac{\Theta}{y_0} = F \cdot k$. Im Sinne dieser erweiterten Definition läßt sich Gl. (68) auch in der Form

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \quad (69)$$

schreiben und sie stimmt dann genau mit der für die gerade Belastung abgeleiteten Gl. (48) überein.

Die Berechnung nach diesen Formeln ist an sich viel einfacher als die in § 20 gegebene. Indessen wird dabei voraus-

gesetzt, daß der Querschnittskern bereits bekannt sei. Wenn in den Profiltabellen der Hüttenwerke der Kern in jedes Walzeisenprofil eingezeichnet wäre, was schon öfters vorgeschlagen wurde und nächstens vielleicht auch einmal ausgeführt wird, würde sich die Anwendung der Gl. (68) und (69) schnell einbürgern. Solange der Kern aber nicht von vornherein gegeben ist, wird man mit der Rechnung schneller auf dem früher angegebenen Wege fertig.

Mit Hilfe dieser Betrachtung kann man auch leicht beurteilen, welche Richtung der Biegungsebene BB die größte Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung σ_0 den größten Wert annimmt, wenn das Biegemoment M ein für allemal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite k gehört, beim rechteckigen Querschnitte also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung.

Dieses letzte Ergebnis stimmt übrigens mit einer schon am Schlusse von § 20 gemachten Bemerkung überein.

§ 23. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stabe.

Bisher stand immer der Fall der reinen Biegebanspruchung im Vordergrund und für diesen hatten wir Grund genug zu der Annahme, daß überhaupt keine Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden. Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, daß die äußeren Kräfte am einen Stabteile neben einem Biegemomente auch noch eine Scherkraft V liefern. Nach dem Grundsätze der Superposition verschiedener Spannungszustände wird dadurch an der Verteilung der Normalspannungen σ über den Querschnitt nichts geändert. Wir können daher die früher durchgeführte Berechnung von σ auch im allgemeinen Falle ohne weiteres anwenden. Dagegen bleibt hier noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Schubspannungen, die zusammen die Resultierende V geben, über den Querschnitt verteilen. Wir sind dabei in etwas günstigerer Lage als bei der Frage der Verteilung der Normalspannungen,

die wir ungefähr in der gleichen Weise lösen mußten wie Alexander, als er den Gordischen Knoten durchhieb. In der Tat ist die Verteilung der Schubspannungen durch die Verteilung der Normalspannungen schon bis zu einem gewissen Grade mit bedingt. Man erkennt dies schon aus den allgemeinen Betrachtungen des ersten Abschnitts. Die erste der Gleichungen (5), die das Gleichgewicht der Spannungen an einem unendlich kleinen Parallelepipid aussprechen, lautet, wenn wir die Komponente X der äußeren Kraft gleich Null setzen,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Denken wir uns die X -Achse in die Stabmittellinie und die Y -Achse in die Ebene der äußeren Kräfte, also in die Richtung von V gelegt, so spricht diese Gleichung den notwendigen Zusammenhang zwischen der Verteilung der Normalspannungen σ und der Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} über den Querschnitt aus, denn nach den Gleichungen (4) ist $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ und $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Freilich reicht diese Gleichung allein noch nicht vollständig aus, die Schubspannungskomponenten zu berechnen. Es muß immer noch eine mehr oder minder willkürliche Annahme hinzutreten.

Wir wollen zunächst den Fall behandeln, daß der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist und die Kraftebene durch eine Hauptachse geht. Dann liegt es nahe, $\tau_{xz} = 0$ zu setzen, denn es ist kein Grund zu der Vermutung gegeben, daß Schubspannungen im Querschnitte rechtwinklig zur Ebene der äußeren Kräfte auftreten sollten. Wir wissen vielmehr sicher, daß an den zur Kraftebene parallelen Querschnittskanten $\tau_{xz} = 0$ sein muß, weil an den dazugehörigen Seitenflächen des Balkens von außen her keine Kräfte τ_{zx} einwirken. — Mit dieser Annahme, die schließlich darauf hinauskommt, daß alle Schichten, in die man sich den Balken parallel zur Kraftebene zerlegt denken kann, gleiche Formänderungen ausführen, oder daß überhaupt alle Formänderungs- und Spannungsgrößen von der Querschnittskordinate z unabhängig sind, geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$

und da σ_x schon überall als bekannt vorauszusetzen ist, läßt sich aus ihr die Verteilung der Schubspannungen der Höhe des Balkenquerschnitts nach leicht ableiten.

Es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber anschaulicher, wenn man diese Betrachtung durch eine andere ersetzt. Die Gl. (5) bezogen sich auf das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Parallelepeds. Wir wollen dieselbe Schlußfolge-

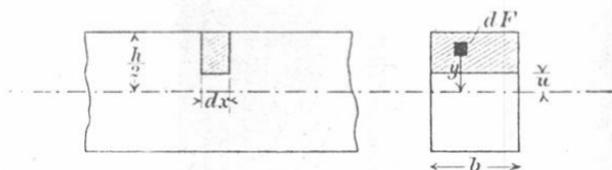


Abb. 24.

rung, die zu ihnen führte, jetzt auf das Gleichgewicht eines etwas größer abgegrenzten Körperteiles anwenden. In Abb. 24 ist links ein Stück der Ansichtszeichnung des Balkens, rechts der Querschnitt dargestellt, und der scheibenförmige Teil des

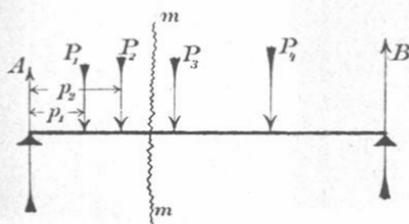


Abb. 25.

Balkens, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ist in beiden Projektionen durch Schraffur hervorgehoben. Außerdem gibt Abb. 25 noch eine Gesamtübersicht des Balkens und der an ihm angreifenden Lasten.

Wir stellen zunächst eine Beziehung auf, die zwischen dem Biegemomente M und der Scherkraft V für irgendeinen Querschnitt mm besteht. Nach der Bedeutung dieser Größen hat man

$$V = A - \sum_0^x P \quad \text{und} \quad M = Ax - \sum_0^x P(x - p).$$

Differentiiert man M nach x , so erhält man

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum_0^x P.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß man beim Weiterrücken des Querschnitts um die Strecke dx nicht über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausrückt, denn an einer solchen Stelle ist zwar M selbst stetig, $\frac{dM}{dx}$ erleidet aber einen plötzlichen Sprung. Tritt indessen eine stetig verteilte Belastung an die Stelle des Systems der Einzellasten, so bleibt die Gleichung immer noch gültig, da der Zuwachs, den M dann außerdem noch erfährt, weil ein Belastungsdifferential, das vorher zur rechten Seite zählte, auf die linke Seite übertritt, nur von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und daher nicht in Betracht kommt.

Man hat daher, wie aus dem Vergleiche der vorstehenden Formeln hervorgeht, allgemein

$$V = \frac{dM}{dx}, \quad (70)$$

denn auch V teilt mit dem Differentialquotienten von M die Eigenschaft, seinen Wert sprungweise zu ändern, wenn der Querschnitt über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausgerückt wird.

Man kann sich diese einfache, aber sehr wichtige Beziehung auch noch in anderer Weise klar machen. Für den Schnitt mm waren die äußeren Kräfte links vom Schnitte auf die Scherkraft V im Querschnittsschwerpunkte und das Kräftepaar vom Momente M zurückgeführt. Gehen wir um dx weiter, so muß V parallel um dx verlegt werden. Dabei tritt aber noch ein Kräftepaar Vdx auf, das die Änderung von M darstellt; aus $dM = Vdx$ folgt aber Gl. (70) sofort.

An dem in Abb. 24 angegebenen scheibenförmigen Körperteile greifen die Spannungen an den drei Schnittflächen an. Wir wollen dabei nur auf das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler Richtung achten. Von den Spannungen an den quer zur Stabachse gehenden Schnittflächen kommen dann nur die Normalspannungen σ in Betracht. Nach Gl (46) ist in dem Schnitte mit der Abszisse x

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y,$$

und an dem Schnitte mit der Abszisse $x + dx$ kommt noch ein Differential hinzu, das sich durch Differentiieren, also aus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{y}{\Theta} = \frac{Vy}{\Theta}$$

leicht feststellen läßt. Die Normalspannungen an beiden Schnittflächen wirken in entgegengesetzter Richtung; für das Gleichgewicht gegen Verschieben kommt also nur ihr Unterschied in Frage. Im ganzen erhalten wir dafür

$$\int_u^{\frac{h}{2}} d\sigma dF = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

wenn die Integration über den schraffierten Teil des Querschnitts ausgedehnt wird.

In der dritten Schnittfläche wirkt nur die Schubspannung τ_{yx} in horizontaler Richtung und zwar über die Fläche $b dx$. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\tau_{yx} b dx = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

woraus τ_{yx} und damit auch die gesuchte Schubspannung τ_{xy} im Querschnitte und zwar in der Entfernung u von der Nulllinie

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF \quad (71)$$

folgt. Das Integral stellt das statische Moment des über u hinaus liegenden Querschnittsteiles in bezug auf die Nulllinie dar. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$\int_u^{\frac{h}{2}} y dF = b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right) \quad \text{und daher} \quad \tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right).$$

Wir wollen aber für dieses statische Moment außerdem noch den Buchstaben S setzen, also Gl. (71) in der Form

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{b\Theta} \quad (72)$$

schreiben, denn offenbar kann die vorausgehende Betrachtung auch dann angewendet werden, wenn der Querschnitt zwar nicht ein einfaches Rechteck bildet, aber doch dort, wo wir τ berechnen wollen, durch zwei parallele Seiten begrenzt wird, wie z. B. der Steg eines I-Trägers. Auch für solche Fälle ist durch Gl. (72) die Aufgabe gelöst, denn das statische Moment S , das zu einem gegebenen u gehört, kann immer leicht gefunden werden.

Durch Gl. (72) ist τ als Funktion von u bestimmt und damit die Spannungsverteilung gegeben. Wir erkennen aus dieser Gleichung, daß τ am Rande des Querschnitts verschwindet, also gerade dort, wo die Normalspannung ihren größten Wert annimmt, und daß umgekehrt τ am größten wird in der Nulllinie, also da, wo die Normalspannung verschwindet. Für den rechteckigen Querschnitt ist τ eine Funktion zweiten Grades von u . Wenn wir diese Funktion durch eine Kurve darstellen, wie wir es früher taten, um die Verteilung der Normalspannungen vor Augen zu führen, erhalten wir jetzt eine Parabel. Das lineare Spannungsverteilungsgesetz gilt also nur für die Normalspannungen und nicht für die Schubspannungen.

Es bleibt jetzt noch die Verteilung der Schubspannungen über einen anders gestalteten Querschnitt zu besprechen. Wir wählen zur Erläuterung des Verfahrens einen kreisförmigen Querschnitt. Bei diesem dürfen wir nicht, wie vorher beim rechteckigen Querschnitte, die Schubspannungskomponenten τ_{xz} , die quer zur Kräfteebene gehen, gleich Null setzen. Vielmehr muß am Umfange die resultierende Schubspannung in die Richtung der Querschnittstangente fallen, wenigstens dann, wenn am Umfange des Stabes keine äußeren Kräfte in der Richtung der Stabachse auftreten. Dies folgt aus dem Gleichgewichte eines unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem eine Kante mit einem Elemente des Querschnittsumrisses zusammenfällt. Wenn die Schubspannung am Umfange eine Komponente in der Richtung der Normalen zum Querschnittsumrisse haben sollte, müßte, um das Gleichgewicht gegen Drehen zu sichern, notwendig auch eine Kraft auf der Mantelfläche des Stabes in

Richtung der Stabachse übertragen werden, aus demselben Grunde, aus dem wir früher $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ fanden.

Es sei jetzt ausdrücklich vorausgesetzt, daß am Umfange des Stabes, wenigstens in der Umgebung des Querschnitts, für den wir die Schubspannungen berechnen wollen, keine derartige äußere Kraft auftritt. Dann müssen notwendig die Schubspannungen am Rande des Querschnitts in die Richtung der Tangente fallen. Für einen Punkt auf der Y -Achse müssen

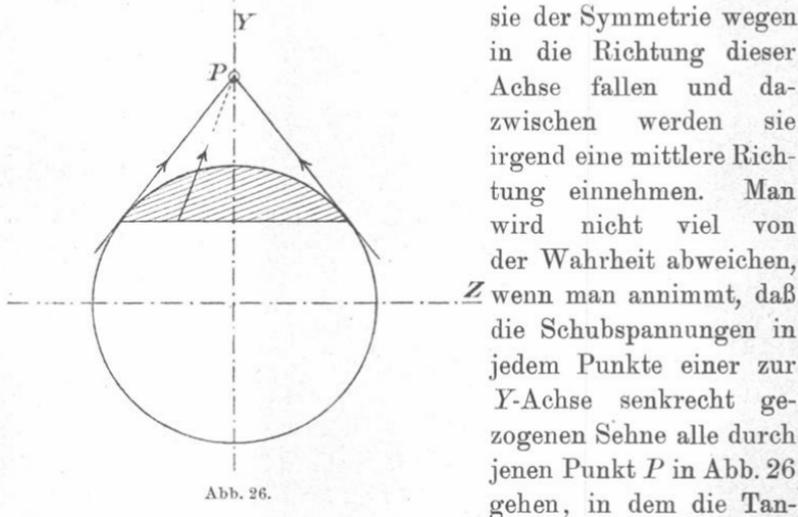


Abb. 26.

sie der Symmetrie wegen in die Richtung dieser Achse fallen und dazwischen werden sie irgend eine mittlere Richtung einnehmen. Man wird nicht viel von der Wahrheit abweichen, wenn man annimmt, daß die Schubspannungen in jedem Punkte einer zur Y -Achse senkrecht gezogenen Sehne alle durch jenen Punkt P in Abb. 26 gehen, in dem die Tangente die Y -Achse trifft. Bedenklicher ist freilich die andere Annahme, die man hiermit verbindet, nämlich daß die in der Richtung der Y -Achse gehende Komponente τ_{xy} auch hier noch unabhängig von der Querschnittskordinate z sei. Sie ist indessen die einfachste, die man machen kann, und sie wird daher, um zu einem Näherungsergebnisse zu gelangen, zugrunde gelegt.

Auf Grund dieser Annahmen läßt sich die Aufgabe jetzt leicht lösen. Man berechnet zuerst τ_{xy} nach Gl. (72), wobei S wieder das statische Moment des in Abb. 26 schraffierten Querschnittsteiles bedeutet, der oberhalb der Stelle liegt, für die τ_{xy} aufgesucht wird und fügt die Komponenten τ_{xz} entsprechend der Bedingung hinzu, daß die Resultierende durch den Punkt P gehen soll.

Anmerkung. Für die Berechnung der Nietbolzen, die auf Abscheren beansprucht werden, ist die vorhergehende Betrachtung nicht anwendbar, weil am Umfange dieser Bolzen von den sie umschließenden Blechen her Kräfte, nämlich Reibungen, übertragen werden können, die in der Richtung der Stabachse gehen, während hier ausdrücklich vorausgesetzt war, daß solche Kräfte fehlen sollten. — Für die Berechnung der Nieten stützt man sich besser auf die Ergebnisse von Festigkeitsversuchen, die mit Nietverbindungen angestellt werden. Nach diesen Versuchen stellt sich die Festigkeit der Nieten ungefähr so hoch, als wenn sich die Schubspannungen gleichförmig über den Querschnitt verteilen.

§ 24. Die Spannungstrajektorien.

Da bei dem allgemeinen Falle der Biegungsbeanspruchung eines Stabes außer den Normalspannungen auch noch Schubspannungen übertragen werden, ist die Normalspannung keine Hauptspannung. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes sind vielmehr im allgemeinen gegen die Längsachse des Stabes unter irgend einem Winkel geneigt.

Es ist daher wünschenswert, noch eine Übersicht darüber zu erlangen, in welchen Richtungen die Hauptspannungen an den verschiedenen Teilen des Stabes auftreten. Man konstruiert zu diesem Zwecke Linien, die überall in die Richtungen der Hauptspannungen fallen. Diese Linien werden als Spannungstrajektorien bezeichnet. Um sie zu erhalten, legt man eine Anzahl Querschnitte durch den Stab, berechnet für verschiedene Stellen dieser Querschnitte die Normalspannung und die Schubspannung, wie es in den vorausgehenden Paragraphen gelehrt wurde, und bestimmt dann nach Gl. (11) die Winkel φ , die die Hauptrichtungen des Spannungszustandes mit der Stabachse bilden. Nachdem man so eine genügende Zahl von Tangenten der Spannungstrajektorien konstruiert hat, kann man diese leicht freihändig in die Zeichnung des Stabes eintragen. Anstatt dessen kann man auch die Gleichungen dieser Kurven mit Hilfe einer Integration erhalten, da die Tangente ihres Neigungswinkels, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für sie bekannt ist.

Ich werde diese Rechnungen hier nicht durchführen, sondern mich damit begnügen, in Abb. 27 den Verlauf der Spannungstrajektorien für den Fall eines Stabes von rechteckigem Querschnitte, der an einem Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Einzellast trägt, anzugeben.

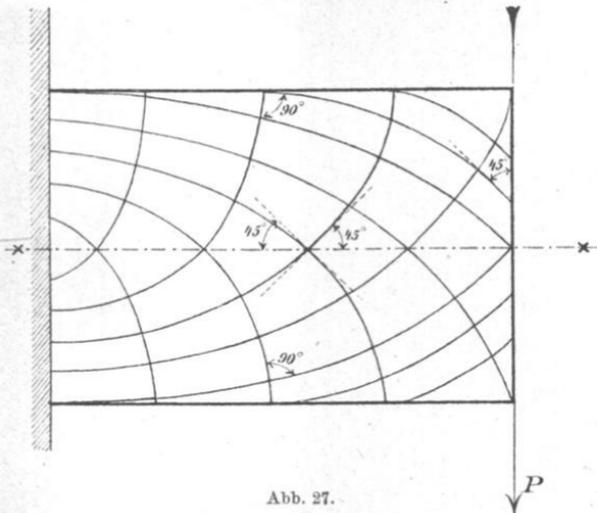


Abb. 27.

In der neutralen Schicht schneiden die Spannungstrajektorien die Stabachse unter Winkeln von 45° , da hier der Fall der reinen Schub-

spannung vorliegt, und an der oberen und der unteren Begrenzung steht die eine senkrecht zur Kante und die andere berührt sie. Selbstverständlich steht die eine Schaar überall senkrecht zur anderen.

§ 25. Einfluß der Schubspannungen auf die Bruchgefahr.

Unter gewöhnlichen Umständen hängt die Beanspruchung des Stabes nur von dem größten Werte ab, den die Normalspannung σ an den äußersten Fasern annimmt. Da dort die Schubspannung verschwindet, braucht man auf sie bei der Festigkeitsberechnung in der Regel gar nicht zu achten. Das ändert sich aber, wenn der Stab sehr kurz und dick ist. Wegen der geringen Länge sind die Hebelarme und daher die Biegemomente und mit diesen auch die Normalspannungen σ klein, während die Schubspannungen davon nicht berührt werden. Bei kurzen, dicken Stäben kann daher die Beanspruchung auf



Schub in der Querschnittsmitte gefährlicher werden, als die Beanspruchung auf Zug oder Druck in der äußersten Faser.

Hierzu bemerke ich noch, daß die Beachtung der Schubspannungen namentlich dann von Wichtigkeit werden kann, wenn das Material eine besonders geringe Schubfestigkeit hat, wie es beim Holze in Schnittrichtungen, die parallel zu den Fasern laufen, zutrifft. Es kommt nicht selten vor, daß ein Holzbalken, dessen Spannweite selbst zehnmal so groß sein kann, als die Querschnittshöhe, durch die Überwindung der Schubfestigkeit in der neutralen Schicht bricht, wenn er in der Mitte belastet wird.

Es möge daher noch berechnet werden, von welchem Werte dieses Verhältnisses ab die Bruchgefahr nur noch durch die Normalspannungen bedingt ist. Ich setze dabei einen Holzbalken von der Länge l und der Querschnittshöhe h voraus, der in der Mitte die Last P trägt. Dann ist $V = P/2$ und $M = Pl/4$ zu setzen. Für die größte Normalspannung σ erhält man

$$\sigma = \frac{6Pl}{4bh^2}$$

und für die Schubspannung τ in der neutralen Schicht nach Gl. (72)

$$\tau = \frac{P}{b} \cdot \frac{bh^2}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{bh}$$

Wenn das Verhältnis zwischen der Druckfestigkeit (die beim Holze gewöhnlich etwas kleiner ist als die Zugfestigkeit, beide für Schnittrichtungen senkrecht zur Faser gerechnet) und der Schubfestigkeit zwischen den Fasern mit n bezeichnet wird, bestimmt sich das Verhältnis zwischen l und h aus der Gleichung

$$\frac{6Pl}{4bh^2} = n \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{bh}, \quad \text{also} \quad \frac{l}{h} = \frac{n}{2}$$

Nun wird n nicht leicht größer als etwa 10, die Spannweite darf also nur etwa fünfmal so groß sein, als die Querschnittshöhe, wenn eine Bruchgefahr durch die Schubspannungen gegeben sein soll; ausnahmsweise (wie es scheint, besonders bei Weißtannenholz) kann n aber auch noch größer

werden. So abnorm große Werte von n kommen indessen bei anderen Materialien als Holz überhaupt nicht vor, auch nicht bei gewalztem Schweißisen, das sich dem Holze noch am meisten nähert, und es ist daher gerechtfertigt, wenn man bei gewöhnlichen Biegunsberechnungen die Schubspannungen ganz unberücksichtigt läßt.

Ein Fall muß indessen noch erwähnt werden. Bei einem Balken von I-förmigem Querschnitte ist nämlich das statische Moment S in Gl. (72) unmittelbar unterhalb des Flantsches fast ebenso groß als für die neutrale Schicht. Die Schubspannungen erreichen daher an dieser Stelle schon beträchtliche Werte, während die Normalspannung gegenüber dem größten Werte an der äußersten Faser noch nicht viel abgenommen hat. Es kann daher vorkommen, daß die Hauptspannung an dieser Stelle größer wird als in der äußersten Faser, und zwar wird dieser Fall auch hier wieder um so eher vorkommen können, je beträchtlicher die Schubspannungen im Vergleiche zu den Normalspannungen ausfallen, also bei Stäben von geringer Länge und großer Höhe. Eine Berechnung, die sich hierauf bezieht, befindet sich unter den Aufgaben am Schlusse des Abschnitts.

§ 26. Genietete Träger.

Ein Stab, der eine Biegungsbelastung aufnehmen soll, wird oft aus mehreren Teilen zusammengesetzt, derart, daß der Querschnitt aus der Summe der Querschnitte der einzelnen Teile besteht. Wenn die Teile des Stabes fest miteinander zusammenhängen, würden in den Flächen, in denen diese Teile aneinander grenzen, Schubspannungen übertragen werden. Diese Spannungen fallen hier fort, — soweit sie nicht etwa durch Reibungen in den Grenzflächen ersetzt werden. Damit sich aber der zusammengesetzte Stab doch ähnlich verhalten kann, als wenn er aus einem Stücke wäre, müssen die sonst durch die Schubspannungen übertragenen Kräfte durch die Verbindungsteile aufgenommen werden, die das Ganze zusammenhalten.

Sehr häufig verwendet man genietetete Blechbalken, denen man einen den gewalzten I-Trägern ähnlichen Querschnitt gibt, um wie bei diesen mit möglichst wenig Materialaufwand ein möglichst großes Trägheits- oder Widerstandsmoment zu erzielen. Der Steg und die rechtwinklig dazu verlaufenden Gurtplatten werden durch Winkeleisen aneinander geschlossen, und alle Teile werden durch Vernietung miteinander verbunden. Hier sind es die Niete, durch die alle Schubspannungen übertragen werden müssen. Wir wollen berechnen, wie groß die Kraft ist, die auf einen solchen Niet trifft, der den Anschluß der Winkeleisen an den Steg bewirkt. In Abb. 28 ist ein kleines Stück von der Ansichtszeichnung eines genieteteten Blechträgers gegeben.

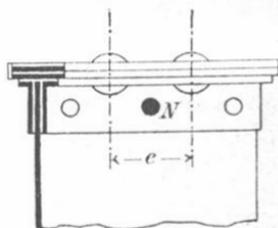


Abb. 28.

Die Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Niete sei gleich e . Der durch einen schwarzen Kreis angegebene Niet N muß für den Unterschied der Normalspannungen σ in den durch ihn angeschlossenen Winkeln und Gurtplatten für zwei um e voneinander entfernte Querschnittsflächen aufkommen. In der Tat gleicht der Fall ganz dem in § 23 behandelten; es ist nur an die Stelle des Abstandes dx in Abb. 24 hier der endliche Abstand e getreten. Man hat wie dort

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y \quad \text{und} \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta M}{\Theta} y = \frac{V e}{\Theta} y,$$

wobei nur die endliche Differenz $\Delta\sigma$ für das Differential $d\sigma$ eingetreten ist. Die von dem Niete zu übertragende Kraft P folgt daraus

$$P = \int \Delta\sigma dF = \frac{V e}{\Theta} \int y dF = \frac{V e}{\Theta} \cdot S, \quad (73)$$

wenn mit S das statische Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittsteiles in bezug auf die Nulllinie bezeichnet wird.

Früher hat man auch öfters aus Holz sogenannte verzahnte oder verdübelte Träger zusammengesetzt. Jetzt macht

man seltener davon Gebrauch, und ich will daher nicht näher darauf eingehen, bemerke vielmehr nur noch, daß deren Berechnung ebenfalls nach Gl. (73) erfolgen kann.

§ 27. Die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Bisher war unser Augenmerk nur auf die Berechnung der Spannungen gerichtet. Um die Formänderungen kümmern wir uns nur so weit, als es nötig war, um daraus Anhaltspunkte für wahrscheinliche Annahmen über die Spannungsverteilung zu erlangen. Jetzt wollen wir uns die Frage nach der Gestalt der elastischen Linie vorlegen, also jener Linie, in die die Stabmittellinie durch die Biegung übergeht. Dabei soll aber von vornherein vorausgesetzt werden, daß der Biegungs Pfeil gering bleibt, da andere Fälle fast ganz ohne Bedeutung für die Anwendungen sind.

Zu diesem Zwecke berechnen wir zunächst, wie groß der Winkel $d\varphi$ ist, um den sich zwei im Abstände dx aufeinander folgende Querschnitte bei der Biegung gegeneinander drehen. Eine Faser, die den Abstand y von der Nulllinie hat, erfährt eine Längenänderung $y d\varphi$, die nach dem Elastizitätsgesetze mit der spezifischen Spannung σ an dieser Stelle in einem Zusammenhang steht, der durch die Proportion

$$\frac{y d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

ausgesprochen wird. Für σ führen wir den durch Gl. (46) angegebenen Wert ein und erhalten

$$d\varphi = dx \frac{M}{E\Theta}. \quad (74)$$

Diese Gleichung kann noch auf zwei andere Formen gebracht werden, die für die Anwendung meistens bequemer sind. Zunächst führen wir den Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie mit Hilfe der Beziehung $\varrho d\varphi = dx$ ein und erhalten

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{E\Theta}{M}. \quad (75)$$

Andererseits hat man aber für ρ nach den Lehren der analytischen Geometrie den Ausdruck

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn jetzt y nicht mehr die Koordinate eines Punktes des Querschnitts, sondern die Ordinate der elastischen Linie bedeutet. In unserem Falle weicht aber die Kurve, deren Krümmungshalbmesser wir betrachten, nur sehr wenig von einer Geraden ab. Wenn wir die Ordinaten y von der ursprünglichen Lage der Stabachse aus rechnen, ist daher $\frac{dy}{dx}$ die Tangente eines sehr kleinen Winkels, und das Quadrat dieses sehr kleinen Bruches kann daher ohne merklichen Fehler in dem vorausgehenden Ausdrucke gegen die Einheit vernachlässigt werden. Dadurch geht ρ in den reziproken Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ über, und Gl. (75) liefert, wenn man dies einsetzt,

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (76)$$

Das Verzeichen von ρ ist nämlich zunächst unbestimmt, da im Zähler des Ausdrucks für ρ eine Quadratwurzel steht. Es muß daher nachträglich so gewählt werden, daß es mit den übrigen Festsetzungen in Übereinstimmung steht. Nun wird M dann positiv gerechnet, wenn es den in horizontaler Lage gezeichneten Stab so krümmt, daß sich die Hohlseite nach oben hin kehrt. Zugleich wollen wir die Einsenkungen y positiv rechnen, wenn sie, wie gewöhnlich, nach abwärts gehen. In diesem Falle ist aber bei dem auf zwei Stützen ruhenden Balken $\frac{dy}{dx}$ am größten am linken Auflager des Balkens; es wird dann, wenn wir weiter nach der Mitte hin gehen, allmählich kleiner, wird dann zu Null, nimmt hierauf negative Werte an und erlangt den größten negativen Wert am rechten Auflager. Über die ganze Spannweite hin ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, wäh-

rend M überall positiv ist, und in Gl. (76) mußte daher ein Minuszeichen beigegeben werden.

Gl. (76) wird die Differentialgleichung der elastischen Linie genannt. Um die Gleichung dieser Kurve daraus in endlicher Form zu finden, drückt man zunächst mit Hilfe der gegebenen Lasten M als Funktion von x aus und integriert Gl. (76) zweimal nach x . Dabei treten zwei Integrationskonstanten auf, deren Werte mit Hilfe der Grenzbedingungen an den Enden des Balkens ermittelt werden.

Dieses Verfahren soll an einigen einfachen Fällen erläutert werden. Zunächst sei ein Balken von überall gleichem Querschnitte gegeben, der an beiden Enden frei aufliegt und eine gleichmäßig über die ganze Länge verteilte Belastung von q kg auf die Längeneinheit trägt. Für irgendeinen Querschnitt im Abstände x vom linken Auflager hat man für das Biegemoment, also für das Moment der links vom Querschnitte liegenden äußeren Kräfte,

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}. \quad (77)$$

Mit l ist dabei die Spannweite bezeichnet. Der Auflagerdruck auf beiden Seiten ist gleich $\frac{ql}{2}$, das erste Glied stellt daher das Moment des linken Auflagerdrucks dar. Die Belastung des linken Balkenteils ist qx und der Hebelarm davon gleich $\frac{x}{2}$. Das Biegemoment ist über die ganze Spannweite positiv und wird an den beiden Auflagern zu Null. Denkt man sich M in jedem Punkte der Stabachse rechtwinklig dazu in irgendeinem Maßstabe aufgetragen, so erhält man eine Parabel. Allgemein heißt die in dieser Weise gefundene Kurve die zu der gegebenen Belastung gehörige Momentenkurve und die zwischen ihr und der Stabachse eingeschlossene Fläche die Momentenfläche.

Mit dem hier festgestellten Werte von M geht Gl. (76) über in

$$E \Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}.$$

Nach zweimaliger Integration erhält man daraus

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + C_1,$$

wenn mit C und C_1 die beiden Integrationskonstanten bezeichnet werden. Nun muß nach den Bedingungen der Aufgabe y zu Null werden für $x = 0$ und für $x = l$, da beide Enden des Balkens durch die Auflagerung gegen vertikale Bewegungen geschützt sind. Die erste Bedingung lehrt, daß die Konstante C_1 gleich Null zu setzen ist. Zur Ermittlung von C haben wir die Gleichung

$$0 = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12} + Cl, \quad \text{also} \quad C = \frac{ql^3}{24},$$

und für die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form folgt daher

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}. \quad (78)$$

Die Linie ist also vom vierten Grade. Es mag noch erwähnt werden, daß sich die hier analytisch vorgenommene Integration allgemein auch mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion, nämlich mit Hilfe eines Seilpolygons, ausführen läßt. Diese Betrachtungen gehören indessen zur graphischen Statik, und sie werden dort eine ausführliche Darstellung erhalten.

Von besonderem Interesse ist der Wert der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der größte Wert, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (78)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \quad (79)$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesamtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2}x \quad (80)$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten muß aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Gl. (80) ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Ästen zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schließen. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, daß die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Äste der elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten. Dieser muß nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muß daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationskonstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muß. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schließlich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \quad (81)$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegunspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta}, \quad (82)$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

zur Darstellung bringen. Durch die Bezeichnung I, II, III, die unten beigelegt ist, wird vorgeschrieben, wie weit der Ausdruck zu entwickeln ist, wenn man sich im ersten, zweiten oder dritten Abschnitte der Balkenlänge befindet. Auf die Notwendigkeit, den Ausdruck an der geeigneten Stelle abzubrechen, wird überdies durch das hinter jedes Glied und vor das Vorzeichen des nächsten gesetzte Komma hingewiesen.

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung der elastischen Linie ein, so erhalten wir diese ebenfalls sofort für alle drei Äste in der gleichen Art der Zusammenfassung, nämlich

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - Ax, \quad + P_1(x - p_1), \quad + P_2(x - p_2).$$

I
II
III

Integrieren wir diese Gleichung einmal, so finden wir

$$E \Theta \frac{dy}{dx} = C - A \frac{x^2}{2}, \quad + P_1 \frac{(x - p_1)^2}{2}, \quad + P_2 \frac{(x - p_2)^2}{2}.$$

I
II
III

Hierbei bedeutet C eine Integrationskonstante. Eigentlich wäre für jeden Ast eine besondere willkürliche Integrationskonstante anzunehmen gewesen. Wenn wir aber, wie es bereits durch die Art der Anschreibung ausgedrückt wird, C als den gleichen Wert für alle drei Äste betrachten, so sind damit zwei willkürliche Integrationskonstanten bereits so bestimmt, daß die drei Äste der elastischen Linie sich ohne Knick aneinanderschließen. In der Tat erkennen wir nämlich, daß dieser Verfügung über die Integrationskonstanten an den Grenzen der Gebiete I und II und II und III keine sprungweise Änderung von $\frac{dy}{dx}$ vorkommt. Sobald wir das Gebiet I verlassen und in das Gebiet II eintreten, haben wir zwar noch ein neues Glied in der Gleichung zu berücksichtigen. An der Stelle $x = p_1$, also an der Grenze selbst, wird dies Glied aber zu Null, und es ist daher gleichgültig, ob wir die Grenzstelle noch zum Gebiete I oder schon zum Gebiete II rechnen; an dem Werte von $\frac{dy}{dx}$ wird dadurch nichts geändert und die vorgeschriebene Grenzbedingung ist erfüllt. Auf diesem Umstande,

daß sich die Integrationskonstanten ohne weiteres von selbst den Grenzbedingungen anpassen, beruht der Vorteil des Verfahrens.

Eine zweite Integration liefert

$$E\Theta y = Cx + C_1 - A \frac{x^3}{6} \underset{\text{I}}{,} + P_1 \frac{(x-p_1)^3}{6} \underset{\text{II}}{,} + P_2 \frac{(x-p_2)^3}{6} \underset{\text{III}}{,}$$

und auch hier tritt nur eine, für alle Äste gemeinsame, neue Integrationskonstante C_1 hinzu, während zugleich an den Grenzen die Bedingungen erfüllt sind, daß sich y nicht sprungweise ändern kann. Die weitere Behandlung der Gleichung und die Ermittlung der beiden Integrationskonstanten C und C_1 aus den Bedingungen an den Enden des ganzen Balkens kann nun genau so erfolgen, als wenn es sich um eine elastische Linie mit nur einem einzigen Aste handelte.

Besser freilich als die Rechnung eignet sich in solchen Fällen das graphische Verfahren zur Ermittlung der Gestalt der elastischen Linie, worüber man im II. Bande näheres finden wird.

Ähnlich liegt der Fall, wenn der Balken zwar nur eine stetig verteilte Belastung oder eine einzige Last in der Mitte trägt, der Querschnitt aber nicht konstant ist, sondern in verschiedenen Absätzen wechselt, wie es z. B. bei Blechbalken vorkommt, deren Querschnitt nach der Mitte zu durch Aufnieten von Gurtungsplatten verstärkt wird. Auch dann setzt sich die elastische Linie aus einer Anzahl verschiedener Äste zusammen. Verändert sich der Querschnitt stetig, so ist Θ als Funktion von x in die Differentialgleichung einzusetzen. Insofern die Ausführung der Integration dadurch nicht erschwert oder unmöglich gemacht wird, erleidet das Verfahren hierdurch keine Änderung.

Die vorausgehenden Rechnungen beruhen auf der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Kraftebene durch eine Hauptachse des Querschnitts geht. Trifft dies nicht zu, so hat man die Lasten, wie in § 20, in Komponenten nach den Richtungen der Hauptachsen zu zerlegen und die Biegelinie für

die Komponenten in beiden Ebenen zu ermitteln. Die gesamte Formänderung ergibt sich durch geometrische Summierung der zu diesen beiden Komponentensystemen gehörigen elastischen Verschiebungen.

§ 28. Einfluß der Schubspannungen auf die Biegelinie.

Bei den vorausgehenden Betrachtungen ist noch keine Rücksicht auf die Formänderungen genommen, die durch die Schubspannungen bewirkt werden. Diese haben zur Folge, daß der Biegungspfeil noch etwas vergrößert wird und daß überhaupt die elastische Linie von der vorher berechneten Gestalt ein wenig abweicht.

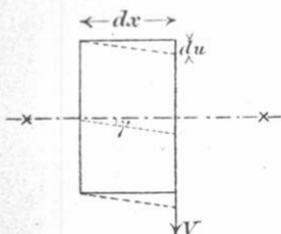


Abb. 29.

In Abb. 29 ist ein Längenelement des Balkens gezeichnet. Wenn sich die Scherkraft V gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, hätte sie zur Folge, daß sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen dem Querschnitte und der Stabachse um einen kleinen Betrag γ' änderte, der nach dem Elastizitätsgesetze leicht berechnet werden kann. Man hat nämlich für den durchschnittlichen Betrag τ_m der Schubspannung

$$\tau_m = \frac{V}{F}$$

und nach Gl. (31)

$$\gamma' = \frac{\tau_m}{G} = \frac{V}{GF}.$$

Die Winkeländerung γ' bewirkt eine Parallelverschiebung der beiden Querschnitte gegeneinander, die mit du' bezeichnet werden mag; man findet dafür

$$du' = \gamma' dx = \frac{V dx}{GF}.$$

So einfach liegt die Sache in Wirklichkeit aber nicht. Die Schubspannungen verteilen sich nach einem anderen Gesetze über den Balkenquerschnitt, das in § 23 festgestellt wurde. In der Mitte wurden die Schubspannungen größer als der vorher berechnete Durchschnittsbetrag τ_m gefunden, während

sie nach der oberen und der unteren Kante hin bis auf Null abnehmen. Infolge davon wird auch die Winkeländerung γ zwischen der Stabachse und dem Balkenquerschnitte in der Mitte größer, während der Winkel an den Kanten ungeändert bleibt. Man erkennt daraus nebenbei, daß die Bernoullische Annahme, die Querschnitte blieben bei der Formänderung eben, nicht streng erfüllt sein kann. In der Tat ist auch schon im vorhergehenden diese Annahme nur als näherungsweise richtig vorausgesetzt worden.

Hier handelt es sich besonders um den Höhenunterschied aufeinanderfolgender Punkte der Stabachse, der auf Rechnung der Schubspannungen zu setzen ist. Wir bezeichnen diesen mit du und setzen

$$du = \kappa du' = \kappa \frac{V dx}{GF}. \quad (83)$$

Unter κ ist dann eine Verhältniszahl zu verstehen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen jedenfalls größer als 1 ist. Der genaue Wert von κ hängt von der Gestalt des Querschnitts ab, da durch diese die Verteilung der Schubspannungen und hiermit das Verhältnis zwischen dem Werte von τ in der Mitte und dem Durchschnittswerte τ_m bedingt ist. Es wäre indessen nicht zulässig, κ unmittelbar gleich dem zuletzt genannten Verhältnisse zu setzen, denn die Verschiebungen du verschiedener Fasern, die in verschiedenen Abständen von der Nulllinie liegen, können nicht unabhängig voneinander erfolgen, weil sonst eine Zerrung in der Richtung der Höhe des Querschnitts zustande käme. In der Tat ist der Vorgang durch die Querschnittskrümmung, die notwendig auftreten muß, ziemlich verwickelt. Man hilft sich daher damit, den Wert von κ auf Grund einer Betrachtung zu ermitteln, die sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit stützt. Es kommt dies darauf hinaus, daß man einen Durchschnittswert du für alle Fasern berechnet.

Für den Fall der reinen Schubspannung ist die spezifische Formänderungsarbeit nach Gl. (42) gleich $\frac{\tau^2}{2G}$. Für das

Balkenelement von der Länge dx ist daher die Formänderungsarbeit gleich

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF$$

zu setzen, wobei die Integration über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist.

In diesem Ausdrucke kann für τ der in Gl. (72) aufgestellte Wert eingesetzt werden. Der so ermittelten Formänderungsarbeit ist die von der Scherkraft V (die für das Balkenelement eine äußere Kraft bildet) geleistete Arbeit $\frac{1}{2} V du$ gleich zu setzen. Man erhält dadurch

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF = \frac{1}{2} V du = \frac{1}{2} V z du' = \alpha \frac{V^2}{2GF} dx$$

und hiermit

$$\alpha = \frac{\int \tau^2 dF}{V^2}. \quad (84)$$

Für den rechteckigen Querschnitt soll die Rechnung zu Ende geführt werden. In § 23 war dafür

$$\tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

gefunden, wobei zur Vermeidung von Mißverständnissen hier z an Stelle des dort mit u bezeichneten Abstandes der betreffenden Faser von der Nulllinie gesetzt ist. Mit $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ wird dies

$$\tau = \frac{V}{bh^3} \left(\frac{3}{2} h^2 - 6z^2 \right)$$

und daher

$$\int \tau^2 dF = \frac{V^2}{b^2 h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{3}{2} h^2 - 6z^2 \right)^2 b dz.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man

$$\int \tau^2 dF = \frac{6}{5} \frac{V^2}{bh}.$$

Setzt man dies in Gl. (84) ein und beachtet, daß $F = bh$ ist, so erhält man für den rechteckigen Querschnitt

$$\alpha = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Es möge noch bemerkt werden, daß die Berechnung von α nach Gl. (84) immer leicht durchgeführt werden kann, auch wenn sich die Integration nach den gewöhnlichen Methoden nicht vornehmen läßt, indem man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt und an die Stelle der Integration eine Summierung treten läßt. Das Resultat dieser mechanischen Quadratur wird immer genau genug, auch wenn man eine Einteilung in nur wenige Streifen vornimmt.

Für die besonders häufig verwendeten gewalzten Eisenträger von dem I-Profile hat man α ein für alle Male berechnet. Für den I-Träger Nr. 8 (d. h. von 8 cm Höhe) wurde $\alpha = 2,4$, für den höchsten Träger, der noch verwendet zu werden pflegt, Nr. 50 $\alpha = 2,0$ gefunden. Für die dazwischen liegenden Trägerhöhen ändert sich α allmählich von dem einen zu dem anderen dieser Werte. Größer als bei den I-Trägern wird α nicht leicht bei einer anderen Querschnittsgestalt.

Bei den jetzt durchgeführten Rechnungen ist nur auf den Einfluß von V auf die Biegelinie geachtet worden, d. h. M wurde bei dem betrachteten Balkenelemente als Null vorausgesetzt. Wirken M und V gleichzeitig ein, so summieren sich die Wirkungen von beiden. An irgend einer Stelle im Abstände x vom linken Auflager hat man daher die gesamte Durchsenkung y'

$$y' = y + \int_0^x du, \quad (85)$$

wenn unter y die im vorigen Paragraphen berechnete Ein-senkung verstanden wird. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke ist indessen gewöhnlich klein gegen das erste und es genügt daher meistens $y' = y$ zu setzen, den Einfluß der Schubspannungen also zu vernachlässigen. Nur bei kurzen Stäben von großem Querschnitte, bei denen, wie wir schon früher fanden, die Schubspannungen überhaupt mehr hervortreten, oder für Stellen, die den Balkenenden benachbart sind, wird es nötig, das zweite Glied in Gl. (85) zu berücksichtigen. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir noch als Beispiel einen beiderseits frei aufliegenden Balken von konstantem recht-

eckigen Querschnitte, der eine Einzellast in der Mitte trägt. Der Biegungspfeil f war dafür im vorigen Paragraphen in Gl. (82) zu

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta} = \frac{Pl^3}{4Ebh^3}$$

berechnet. Für du hat man hier nach Gl. (83) mit $\alpha = 1,2$ $V = \frac{P}{2}$ und $F = bh$

$$du = 0,6 \frac{Pdx}{Gbh}$$

und daher

$$\int_0^{\frac{l}{2}} du = 0,3 \frac{Pl}{Gbh}.$$

Für den mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubspannungen verbesserten Wert f' des Biegungspfeiles findet man also nach Gl. (85)

$$f' = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} + 0,3 \frac{Pl}{Gbh} = \frac{Pl}{4Ebh} \left(\frac{l^2}{h^2} + 3 \right). \quad (86)$$

Bei der letzten Umformung ist $G = 0,4E$ gesetzt, also vorausgesetzt, daß für den Stoff, aus dem der Balken besteht, die Verhältniszahl $m = 4$ sei. Nimmt man an, daß die Spannweite l etwa zehnmal so groß sei, als die Balkenhöhe h , so macht das zweite Glied in der Klammer, das vom Einflusse der Schubspannungen herrührt, nur 3% von dem ersten aus. Gewöhnlich ist das Verhältnis $\frac{l}{h}$ noch größer als 10, und das von den Schubspannungen herrührende Glied macht dann einen noch kleineren Bruchteil des anderen aus. Mit dem Verhältnis $\frac{l}{h} = 5$ steigt indessen der Bruchteil auf 12% und von da ab wird es nötig, die genauere Formel (86) an Stelle von Gl. (82) zur Berechnung des Biegungspfeiles zu verwenden.

§ 29. Durchlaufende Träger.

Für einen Balken, der über mehrere Öffnungen hinwegreicht, kann man, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Auflagerkräfte nur auf Grund der elastischen Formänderungen,

die er erfährt, berechnen. Wenn die Auflagerkräfte bereits bekannt wären, würde sich die Berechnung der Spannungen genau so wie bei dem Träger über einer einzigen Spannweite ausführen lassen. Man könnte ohne weiteres für jeden Querschnitt das Biegemoment und die Scherkraft angeben und die Spannungen daraus nach den bereits dafür aufgestellten Formeln finden. Es handelt sich also in der Tat nur noch darum, zu zeigen, wie man die Auflagerkräfte oder überhaupt die statisch unbestimmten Größen, die auch in anderer Weise gewählt werden können, berechnen kann.

Man nehme zunächst an, daß der Träger über zwei Öffnungen von gleicher Größe l hinwegreicht und eine gleichmäßig verteilte Last q auf die Längeneinheit trägt. Wenn die Mittelstütze entfernt wäre, würde sich die Trägermitte um den in Gl. (79) angegebenen Betrag durchbiegen, wobei nur $2l$ an Stelle von l zu setzen ist. Auf den Einfluß der Schubspannungen braucht man in der Regel keine Rücksicht zu nehmen; wenn es gewünscht werden sollte, kann dies aber nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren leicht geschehen.

Hierauf denke man sich an dem Balken in der Mitte eine nach aufwärts gerichtete Kraft angebracht. Dadurch wird die Balkenmitte wieder gehoben und zwar um den in Gl. (82) festgestellten Betrag, wenn an Stelle von l wieder $2l$ gesetzt und unter P die Größe der aufwärts gerichteten Kraft verstanden wird. Wenn wir P so bestimmen, daß die vorher erlittene Durchbiegung in der Mitte gerade wieder rückgängig gemacht wird, erhalten wir damit die Größe des Auflagerdrucks an der Mittelstütze, denn nur bei diesem Werte des Auflagerdrucks kann die elastische Linie des ganzen Stabes durch den vorgeschriebenen Punkt gehen. Die Gleichsetzung der Werte von f in Gl. (79) und Gl. (82) liefert

$$P = \frac{5}{8} \cdot 2ql = \frac{5}{8} Q,$$

wenn jetzt Q die über beide Öffnungen verteilte Last bedeutet. Man sieht daraus, daß der durchlaufende Träger einen größeren

Teil der ganzen Last auf die Mittelstütze überträgt, als zwei getrennte Träger, von denen jeder eine der beiden Öffnungen überdecken würde, denn in diesem Falle käme auf die Mittelstütze $\frac{Q}{2}$ und auf jede Endstütze $\frac{Q}{4}$. Der Auflagerdruck des durchlaufenden Trägers an jedem Ende stellt sich auf $\frac{1}{2}(Q - \frac{5}{8}Q) = \frac{3}{16}Q$.

Diese Betrachtung setzt voraus, daß alle drei Stützen genau in gleicher Höhe liegen und daß sie auch unter dem Einflusse der Belastung nicht nachgeben, selbstverständlich auch, daß der Träger vorher genau geradlinig war. Senkt sich etwa die Mittelstütze um den Betrag δ oder mußte sich der Träger schon vorher in der Mitte um δ durchbiegen, ehe er die Mittelstütze erreichte, so findet man den Auflagerdruck P aus der Gleichung

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{Q(2l)^3}{E\Theta} = \delta + \frac{P(2l)^3}{48E\Theta},$$

also

$$P = \frac{5}{8}Q - \delta \frac{6E\Theta}{l^3}.$$

Wenn die Mittelstütze zu hoch lag, ist hierin δ negativ zu setzen.

Man sieht leicht ein, daß dasselbe Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn die Öffnungen von verschiedener Größe sind. Man braucht dann nur an die Stelle von f die für irgend eine andere Abszisse x gültigen Werte von y aus § 27 einzusetzen. Auch für Träger, die über mehr als zwei Öffnungen hinwegreichen, läßt sich die Berechnung der Auflagerkräfte in derselben Weise durchführen; bei drei Öffnungen hat man zwei nach aufwärts gerichtete unbekannte Kräfte an den Mittelstützen anzunehmen, die sich aus den beiden Bedingungen berechnen, daß die elastischen Verschiebungen der zugehörigen Angriffspunkte im ganzen verschwinden müssen.

§ 30. Der auf beiden Seiten eingespannte Träger.

Ein Träger sei an den Auflagern so gestützt, daß jede Drehung des Stabendes unmöglich gemacht ist. Die elastische Linie hat dann horizontale Tangenten an den Stabenden und

man erkennt daraus schon, daß sie zwei Wendepunkte haben muß, zwischen denen sie, wie beim frei aufliegenden Träger, hohl nach oben hin gekrümmt ist, während sie zwischen einem Wendepunkte und dem benachbarten Auflager ihre Hohlseite nach unten kehrt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null, daher muß dort auch das Biegemoment M verschwinden.

Eine Einzelkraft würde nicht ausreichen, das Ende des Trägers gegen eine Drehung schützen zu können. Außer einem Auflagerdrucke muß daher an jedem Trägerende noch ein Kräftepaar von der Stütze her übertragen werden. Das Moment dieses Kräftepaares am linken Auflager sei mit M_0 bezeichnet, denn es stellt zugleich das Biegemoment für einen Querschnitt dar, der unmittelbar in der Nähe des Auflagers gezogen ist. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß der Balken eine gleichmäßig verteilte Last trägt, ist M für irgend einen anderen Querschnitt mit der Abszisse x

$$M = M_0 + Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie geht damit über in

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - Ax - M_0.$$

Für den Auflagerdruck A kann in unserem Falle auch noch $\frac{ql}{2}$ gesetzt werden. Eine einmalige Integration liefert

$$E \Theta \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A \frac{x^2}{2} - M_0 x + C.$$

Die Integrationskonstante C muß aber hier verschwinden, weil $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ bleibt. Auch für $x = l$ muß der Ausdruck verschwinden, da der Balken auch am rechten Ende eingemauert sein sollte. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^2}{2} - M_0 l,$$

woraus

$$M_0 = - \frac{ql^2}{12}$$

folgt. Das größte positive Biegemoment in der Mitte wird gleich $\frac{ql^2}{24}$; die größte Bruchgefahr ist also an den Auflager-

stellen vorhanden. — Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für den durchlaufenden Träger anstellen.

Natürlich kann man auch hier auf den Einfluß der Schubspannungen Rücksicht nehmen; es lohnt sich aber nicht, näher darauf einzugehen, da alle diese Rechnungen bei der Anwendung mit einer großen Unsicherheit behaftet sind. Man kann sich niemals sicher darauf verlassen, daß der Träger wirklich so gut eingespannt sei, daß jede Drehung des Stabendes ausgeschlossen wäre. Das wirkliche Verhalten der Stabenden kann vielmehr von dem bei der Rechnung vorausgesetzten weit abweichen, und es würde nur ein irrtümliches Gefühl der Sicherheit erwecken, wenn man sich unter solchen Umständen mit der Berechnung kleiner Korrekktionsgrößen befassen wollte, die gegenüber den zu erwartenden Fehlern des Hauptwertes kaum in Betracht kommen.

§ 31. Vergleich der Biegungslehre mit der Erfahrung.

Zur Prüfung der in diesem Abschnitte entwickelten Formeln hat man schon gar viele Belastungsversuche vorgenommen. Unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß dabei die Elastizitätsgrenze nicht überschritten werden darf, stimmen die Versuchsergebnisse hinsichtlich der Formänderung der dem Versuche unterworfenen Probekörper meist recht gut mit den theoretischen Folgerungen überein. Auf die Formänderungen, die nach Überschreiten dieser Grenze eintreten, bezieht sich dagegen die Theorie nicht, und man kann daher auch nicht erwarten, daß darüber hinaus eine Übereinstimmung der Formeln mit der Erfahrung bestehe.

Aus demselben Grunde kann auch keine unmittelbare Bestätigung der für die Spannungen aufgestellten Formeln durch einen Belastungsversuch, der bis zum Bruche hin fortgesetzt wird, erwartet werden. Vor dem Bruche treten bei den meisten Körpern größere bleibende Formänderungen ein, die mit den Spannungen in einem ganz anderen Zusammenhange stehen, als die elastischen Formänderungen bei kleineren Lasten. Hierdurch wird die Spannungsverteilung über den Querschnitt erheblich geändert, und zwar derart, daß die Spannungen von der äußeren Kante aus nicht mehr proportional mit den Ab-

ständen von der Nulllinie abnehmen, sondern — namentlich in der Nähe der Kante, wo die Überschreitung der Elastizitätsgrenze zuerst stattfindet — erheblich langsamer. Dies hat zur Folge, daß bei einem gegebenen Werte der Kantenspannung das Moment des aus den Zug- und Druckspannungen gebildeten Kräftepaars einen größeren Wert annimmt, als wenn sich die Spannungen nach dem Geradliniengesetze verteilten. Der Stab vermag daher etwas größeren Lasten zu widerstehen, als nach den unter Voraussetzung des Geradliniengesetzes abgeleiteten Formeln zu schließen wäre. Das bestätigt auch die Erfahrung.

Für die Festigkeitsberechnungen, die man einer Bau- oder Maschinenkonstruktion zugrunde legt, kommt aber der hier besprochene Umstand nicht in Betracht, weil es sich dabei nicht nur um die Vermeidung eines Bruches, sondern auch um die Verhütung einer merklichen bleibenden Verbiegung handelt.

Beim Gußeisen sind die dem Bruche vorausgehenden bleibenden Formänderungen zwar nur sehr gering; immerhin dürften sie auch hier zu einer Abänderung der Spannungsverteilung vor dem Bruche und damit zu einer Erhöhung der Bruchlast nicht unwesentlich beitragen. Zugleich kommt hier noch der andere Umstand zur Geltung, daß das Gußeisen auch schon innerhalb der Elastizitätsgrenze dem Proportionalitätsgesetze nicht gehorcht. Die Spannungsverteilung weicht daher schon von Anfang an von der geradlinigen ab und fällt ungefähr so aus, wie es Abb. 30 zeigt. Unter der wenigstens näherungsweise zutreffenden Annahme, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, tritt nämlich an die Stelle der geradlinigen Begrenzung des Spannungsdiagramms die Dehnungskurve, die für Gußeisen ganz ähnlich aussieht, wie sie in Abb. 9 und 10, S. 45 für Granit und Sandstein gezeichnet ist.

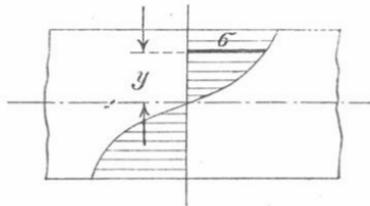


Abb. 30.

Da die Dehnungskurve auf der Zugseite anders verläuft als auf der Druckseite, kann man auch nicht mehr erwarten,

daß die Nulllinie mit einer Schwerlinie des Querschnitts zusammenfalle. Sie wird sich vielmehr ein wenig nach der Zugseite hin verschieben, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Kantenspannung auf der Zugseite, von der die Bruchgefahr abhängt, herbeigeführt wird. Unmittelbare Messungen, die ich an gebogenen Gußeisenstäben angestellt habe, ließen in der Tat eine, freilich nur recht geringe Verschiebung der Nulllinie nach der Zugseite hin erkennen.

Berechnet man aus der beobachteten Bruchlast eines auf Biegung beanspruchten Gußeisenbalkens die Kantenspannung auf der Zugseite nach der einfachen Formel, Gl. (46), so findet man sie gewöhnlich ungefähr doppelt so groß wie die durch einen Zugversuch mit derselben Gußeisensorte ermittelte Zugfestigkeit. Zum Teile erklärt sich der Widerspruch zwischen diesen Werten durch die zuvor erörterten Umstände. Es kommt dabei aber auch noch ein anderer Umstand in Betracht. Gußeisen ist nämlich ein ziemlich unzuverlässiges Material, in dem öfters kleine Fehler, Schlackeneinschlüsse u. dgl. vorkommen, die die Festigkeit herabsetzen. Ein Zugstab, der auf die ganze Länge hin der gleichen Beanspruchung unterworfen ist, bricht, wenn ein solcher, wenn auch nur ganz kleiner Fehler vorkommt, an der schwächsten Stelle, während der Materialfehler bei einem auf Biegung beanspruchten Balken nur dann von Einfluß ist, wenn er sich zufällig in der Nähe der stärksten beanspruchten Stelle findet. Auch dieser Umstand trägt dazu bei, daß der Zugversuch im Mittel einen kleineren Festigkeitswert liefert als der Biegungsversuch.

Steine sind noch weit spröder als Gußeisen. Bei ihnen kann sich daher eine Verzerrung des Spannungsverteilungsdiagramms durch die dem Bruche vorausgehenden bleibenden Längenänderungen weniger bemerklich machen als beim Gußeisen. Dafür ist es aber bei Steinen noch weit schwieriger, den wahren Wert der Zugfestigkeit durch einen Zugversuch zu ermitteln, als für Gußeisen, weil es kaum gelingt, bei einem Zugstabe aus Stein eine gleichförmige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt herbeizuführen. Angaben über

die Zugfestigkeit von Steinen sind daher, wenn sie aus Zugversuchen abgeleitet wurden, immer mit Mißtrauen aufzufassen. Zuverlässiger ist hier der aus einem Biegeversuche auf Grund der gewöhnlichen Formel hergeleitete Wert der Kanten-
spannung, obschon er aus den zuvor besprochenen Gründen immer etwas größer ausfällt als der wahre Wert der Zugfestigkeit.

Aufgaben.

11. Aufgabe. Man soll die Zentralellipse für ein gleichschenkeliges Winkelisenprofil von 70 mm Schenkellänge und 10 mm Schenkellstärke konstruieren (Abb. 31).

Lösung. Eine Hauptachse des Querschnitts ist die Symmetrieachse YY . Das zugehörige Trägheitsmoment Θ_y ist

$$\Theta_y = \frac{7^4}{12} - \frac{6^4}{12} = 92,1 \text{ cm}^4,$$

da sich der Querschnitt als Differenz zweier Quadrate ansehen läßt, für die beide YY eine Schwerpunktsachse ist. Den Abstand a des Schwerpunkts S von der Diagonale des umschriebenen Quadrats findet man aus der Momentengleichung

$$a \cdot 13 = 0,707 \cdot 36,$$

also

$$a = 1,96 \text{ cm}.$$

Auch das Trägheitsmoment Θ_z setzt man aus den Trägheitsmomenten der beiden Quadrate zusammen, wobei aber darauf zu achten ist, daß die Achse ZZ nicht durch die Schwerpunkte dieser beiden Quadrate geht. Man hat

$$\Theta_z = \frac{7^4}{12} + 7^2 \cdot 1,96^2 - \left(\frac{6^4}{12} + 6^2 \cdot 2,67^2 \right) = 23,7 \text{ cm}^4.$$

Für die Trägheitsradien folgt hieraus

$$i_y = \sqrt{\frac{92,1}{13}} = 2,66 \text{ cm}; \quad i_z = \sqrt{\frac{23,7}{13}} = 1,35 \text{ cm}.$$

Man trägt die Trägheitsradien auf den Hauptachsen ab und konstruiert die hierdurch bestimmte Ellipse.

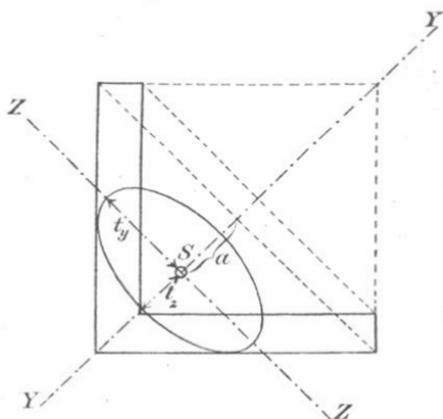


Abb. 31.

12. Aufgabe. Für das Z-Eisen N. P. 16 findet man im deutschen Normalprofilbuche für die Hauptachsen YY und ZZ angegeben

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,39; \quad \Theta_z = 1193 \text{ cm}^4; \quad \Theta_y = 58,8 \text{ cm}^4.$$

Die Maße sind aus der Abb. 32 zu entnehmen. Ein Balken von diesem Querschnitte ist am einen Ende eingemauert (so, daß der Steg aufrecht

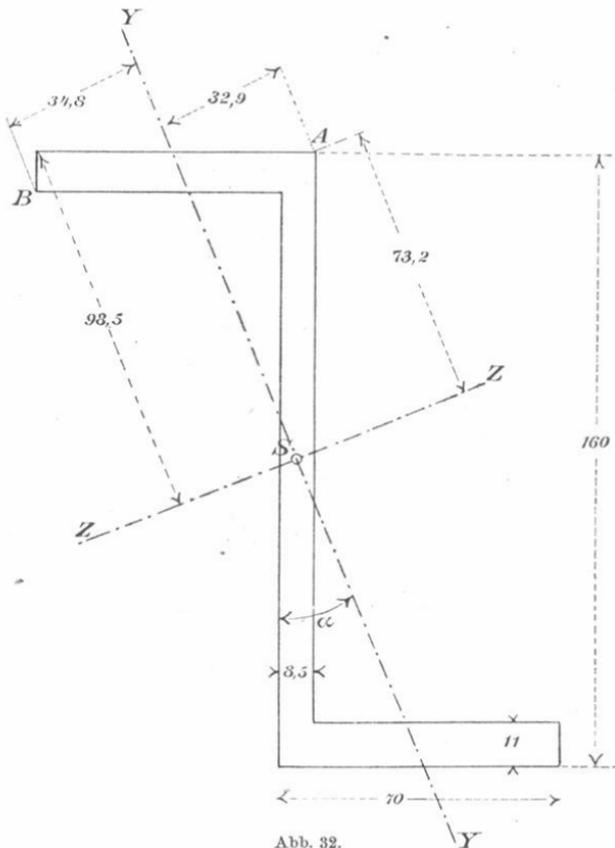


Abb. 32.

steht, in derselben Lage wie in der Abbildung) und trägt an dem um 1,20 m vorkragenden Ende eine Last von 500 kg. Wie groß wird die größte Spannung σ , wenn das freie Ende des Balkens an kleinen horizontalen Ausbiegungen nicht verhindert wird?

Lösung. Aus $\operatorname{tg} \alpha = 0,39$ folgt $\alpha = 21^{\circ}20'$; $\sin \alpha = 0,36$; $\cos \alpha = 0,93$. Das Biegemoment an der Einmauerung hat die

Größe $500 \times 120 = 60\,000$ cm kg; wir zerlegen es in die Komponenten $60\,000 \times 0,93 = 55\,800$ und $60\,000 \times 0,36 = 21\,600$ in den Richtungen der Hauptachsen. Zur ersten Komponente gehört die neutrale Achse ZZ , und die zugehörigen Spannungen σ_I sind

$$\sigma_I = \frac{55\,800}{1193} \cdot y = 46,8y, \quad \text{ebenso} \quad \sigma_{II} = \frac{21\,600}{58,8} \cdot z = 367z.$$

Die in irgendeinem Flächenelemente des Querschnitts mit den Koordinaten y und z im ganzen auftretende Spannung σ ist daher

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = 46,8y + 367z.$$

Dabei ist die positive Y -Achse nach oben, die positive Richtung der Z -Achse nach rechts hin zu nehmen; y und z sind, wie alle übrigen Maße, in cm auszudrücken, man erhält dann σ in atm. An der Kante A ist $y = 7,32$ und $z = 3,29$ cm, man hat daher

$$\sigma = 46,8 \times 7,32 + 367 \times 3,29 = 1550 \text{ atm.}$$

An der Kante B sind σ_I und σ_{II} von verschiedenem Vorzeichen und

$$\sigma = 46,8 \times 9,85 - 367 \times 3,48 = -818 \text{ atm.}$$

Die größte Spannung tritt daher an der Kante A auf und ist gleich 1550 atm, das Material ist also an dieser gefährlichsten Stelle bis etwa zur Elastizitätsgrenze beansprucht.

Die elastische Verschiebung des freien Balkenendes unter der senkrecht gerichteten Belastung erfolgt in schräger Richtung. Wird das Balkenende dagegen so gestützt, daß es sich nur in lotrechter Richtung bewegen kann, so tritt noch eine horizontale Kraft auf, die von der Stütze auf das Balkenende übertragen wird. In diesem Falle ist die Nulllinie horizontal gerichtet und man erhält die Spannung σ aus der gewöhnlichen Biegeformel, wenn darin das Trägheitsmoment auf die horizontale Achse bezogen wird.

Anmerkung. Die Folgerungen der Theorie für die horizontalen und vertikalen Verschiebungskomponenten eines in der angegebenen Weise eingespannten und belasteten Z -Trägers habe ich durch einen Versuch geprüft, den ich bei den Übungen in meinem Laboratorium regelmäßig zu wiederholen pflege. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist ganz befriedigend.

13. Aufgabe. Den Querschnittskern für die in den beiden vorigen Aufgaben vorkommenden beiden Profile zu konstruieren.

Lösung. Bei dem Winkeleisenprofile kann man fünf Linien zeichnen, die mit dem Umfange mindestens zwei Punkte gemeinsam haben und die Fläche nicht durchkreuzen. Von diesen fallen vier mit den nach außen gekehrten Umfangsseiten zusammen und die

fünfte ist die parallel zur ZZ -Achse gezogene Verbindungslinie der beiden nach rechts oben gekehrten Ecken. Alle übrigen Strahlen

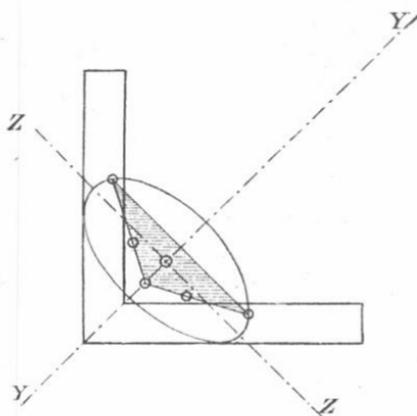


Abb. 33.

des den Querschnitt einhüllenden Tangentenbüschels gehen aus diesen Hauptlagen durch Drehung um eine der Ecken des Querschnitts hervor. Daraus folgt, daß der Kern ein Fünfeck bildet, dessen Ecken die Antipole jener fünf Geraden und dessen Seiten die Antipolaren der genannten Querschnittsecken sind. In Abb. 33 ist der Querschnitt mit der Zentralellipse und dem durch Schraffierung hervorgehobenen Kerne gezeichnet. Ganz ähnlich findet man auch

den in Abb. 34 angegebenen

Kern des Z -Profils, für das man die Zentralellipse nach den Angaben über die Trägheitsmomente ohne weiteres auftragen kann.

14. Aufgabe. Zentralellipse und Querschnittskern für eine hohle gußeiserne Säule von 20 cm äußerem Durchmesser und 2 cm Wandstärke zu bestimmen.

Lösung. Das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnitts für eine Schwerpunktsachse ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4635 \text{ cm}^4$$

und die Querschnittsfläche $F = 113 \text{ cm}^2$, woraus

$$i = \sqrt{\frac{4635}{113}} = 6,40 \text{ cm}$$

folgt. Die Zentralellipse ist ein Kreis von diesem Radius. Auch der Querschnittskern wird hier durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius k aus der Proportion

$$\frac{k}{6,4} = \frac{6,4}{10}$$

also folgt.

$$k = 4,1 \text{ cm}$$

15. Aufgabe. Ein Balken (oder eine Tragachse, wie man solche Stäbe im Maschinenbaue zu nennen pflegt), der an beiden Enden gestützt ist und eine Einzellast aufzunehmen hat, soll als Rotationskörper

ausgeführt werden, so daß in jedem Querschnitte die zulässige Spannung des Materials erreicht wird. Nach welchem Gesetze muß der Meridianschnitt gekrümmt werden?

Lösung. Der Auflagerdruck am linken Ende betrage A ; dann ist das Biegemoment im Abstände x davon $M = Ax$ und die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{W} = 4 \frac{Ax}{\pi r^3},$$

wenn r der Radius des Querschnittskreises ist. Die Spannung σ soll in allen Querschnitten gleich groß werden, daher muß auch der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von x sein und r wird dadurch als Funktion von x bestimmt. Man erhält

$$r = \sqrt[3]{\frac{4Ax}{\pi\sigma}}$$

als Gleichung der Meridiankurve. Man sieht daraus, daß das Längsprofil der Tragachse

durch eine kubische Parabel gebildet werden muß, wenn die Tragachse ein Körper von überall gleicher Festigkeit sein soll.

Hierbei ist noch keine Rücksicht auf die Schubspannungen genommen, die in der Nähe der Stützen das Übergewicht über die Normalspannungen erlangen. So würde für $x = 0$ nach der Formel $r = 0$ sein, der Querschnitt an der Stütze also bis auf Null abnehmen können. Daß ist natürlich ein Trugschluß, denn der Querschnitt muß überall mindestens noch so groß bleiben, daß die Schubspannungen für sich genommen die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschreiten.

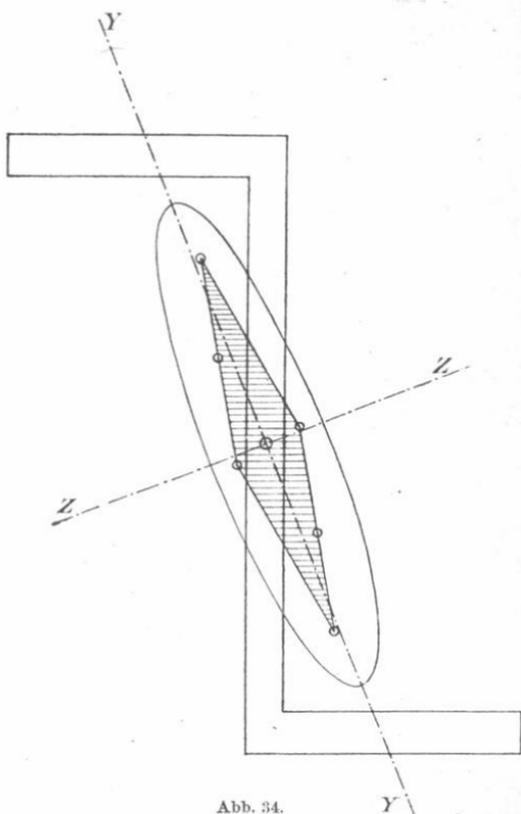


Abb. 34.

16. Aufgabe. Ein I-Balken von bestehendem Querschnitt (Abb. 35) ist am einen Ende eingemauert und trägt an dem um 0,8 m vorkragenden Ende eine Belastung von 5000 kg. Man soll die größte Spannung und die Anstrengung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche des Einspannungsquerschnitts berechnen.

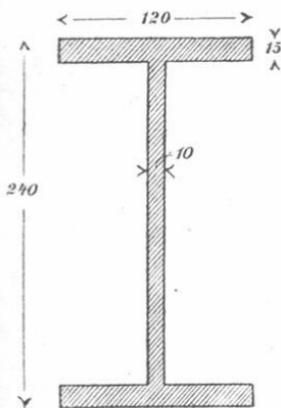


Abb. 35.

Lösung. Das Trägheitsmoment für die horizontale Achse berechnen wir, indem wir uns den Querschnitt durch Wegnahme von zwei Rechtecken aus dem umschriebenen Rechtecke entstanden denken, also

$$\Theta = \frac{12 \cdot 24^3}{12} - 2 \cdot \frac{5,5 \cdot 21^3}{12} = 5335 \text{ cm}^4.$$

Das statische Moment S des Flantschenquerschnitts für die horizontale Schwerpunktsachse ist

$$S = \int_u^{\frac{h}{2}} y dF = 1,5 \cdot 12 \cdot 11,25 = 202,5 \text{ cm}^3.$$

Für die Normalspannungen σ im Einspannungsquerschnitt hat man

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y = \frac{5000 \cdot 80}{5335} y = 75 y.$$

Am oberen Rande ist $y = 12$ cm und daher $\sigma = 900$ atm. Dagegen ist unmittelbar unter dem Flantsche $y = 10,5$ und $\sigma = 787$ atm. Für diese Stelle berechnen wir auch die Schubspannung τ . Nach Gl. (72) findet man

$$\tau = \frac{VS}{b\Theta} = \frac{5000 \cdot 202,5}{1 \cdot 5335} = 190 \text{ atm.}$$

Aus σ und τ ergibt sich die Hauptspannung an dieser Stelle nach Gl. (12)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = \frac{787}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{380^2 + 787^2} = 830 \text{ atm.}$$

Die Hauptspannung ist also an dieser Stelle trotz des Hinzutretens von τ noch kleiner als σ an der oberen Kante. Daran wird auch nicht viel geändert, wenn man die reduzierte Spannung, von der die Beanspruchung des Materials abhängt, berechnet. Nach Gl. (37) ist für $m = 3\frac{1}{3}$ die reduzierte Spannung

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \sigma_x \pm 0,65 \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = 844 \text{ atm.}$$

Diese Rechnung lehrt, daß man in der Tat auch bei I-Profilen in der Regel nicht nötig hat, die Spannungen an anderen Stellen als an der oberen Kante zu berechnen, also überhaupt nicht nötig hat, auf die Schubspannungen zu achten. Anders wird die Sache indessen, wenn der Hebelarm der Kraft noch kleiner wird, als hier angenommen war. Denn τ behält dann — bei gleicher Belastung — seinen Wert, während σ abnimmt, und man kommt dann bald zu einem Hebelarme, bei dem die Beanspruchung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche größer wird als an der äußeren Kante.

Schließlich sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese ganze Betrachtung nur einen Anspruch auf ungefähre Gültigkeit machen kann, denn Gl. (72) ist aus einer recht unsicheren Voraussetzung über die Verteilung der Spannungen τ abgeleitet, die gerade an der Stelle unmittelbar unter dem Flantsche des I-Profiles keineswegs genau zutreffen kann. Man sieht aber auch, daß diese Formel in der Tat nur zu einer mehr schätzungsweisen Bestimmung des Ortes der größten Beanspruchung gebraucht wird. Gegen einen solchen Gebrauch läßt sich nichts einwenden.

17. Aufgabe. Die Verteilung der Schubspannungen τ über einen kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Man hat zunächst das statische Moment S des in Abbildung 36 schraffierten Kreisabschnitts zu berechnen. Wegen $z_i = \sqrt{r^2 - y^2}$ hat man

$$\int y dF = 2 \int_u^r y \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

Allgemein ist aber

$$\int y \sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - y^2)^3},$$

wovon man sich durch Differentiation leicht überzeugt. Nach Einsetzen der Grenzen wird daher

$$\int y dF = \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - u^2)^3} = \frac{b^3}{12},$$

wenn mit b die Länge der Sehne im Abstände u vom Mittelpunkte bezeichnet wird, für den man die Schubspannung berechnen will.

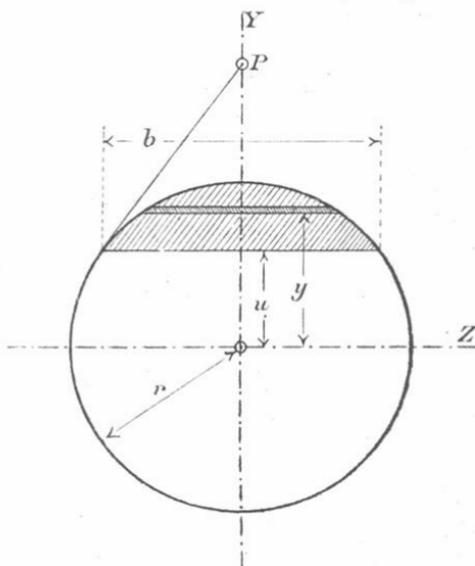


Abb. 36.

Nach Gl. (72) wird jetzt

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{12\Theta} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}.$$

Die Komponente τ_{xz} bestimmt sich am Umfange aus der Bedingung, daß die resultierende Spannung in die Richtung der Tangente fällt. Daraus folgt

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{u}{\frac{1}{2}b}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xy} \cdot \frac{2u}{b} = \frac{2Vub}{3\pi r^4},$$

und für die resultierende Spannung τ selbst erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

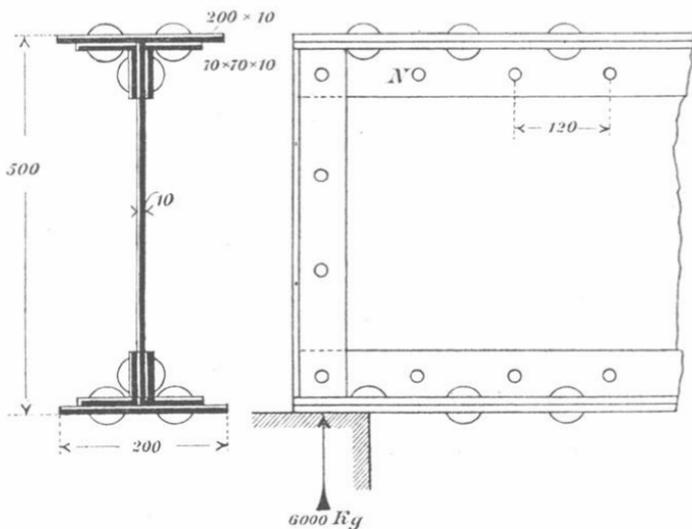
$$\tau = \frac{Vb}{3\pi r^4} \cdot \sqrt{b^2 + 4u^2} = \frac{2Vb}{3\pi r^3}.$$

Die Schubspannungen nehmen, wie man hieraus erkennt, ihren größten Wert in der Mitte an. Dort wird $b = 2r$ und daher

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2},$$

d. h. die größte Schubspannung verhält sich zu der durchschnittlichen Schubspannung, die bei gleichförmiger Verteilung über den ganzen Querschnitt überall zustande käme, wie 4 zu 3.

18. Aufgabe. Wieviel Schubkraft hat ein Niet N am Ende des in Abb. 37 gezeichneten Blechbalkens aufzunehmen, wenn der Auflagerdruck 6000 kg beträgt?



Lösung. Nach Gl. (73) ist

$$P = \frac{Ve}{\Theta} S.$$

Für Θ findet man mit hinreichender Annäherung

$$\Theta = 2 \cdot 46 \cdot 23,5^2 + \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 60\,022 \text{ cm}^4.$$

Hierbei ist der mittlere Abstand der Gurtfläche von der horizontalen Schwerlinie gleich 23,5 einfach geschätzt, wobei freilich die Dezimalstelle ganz unsicher ist. Für Rechnungen dieser Art genügt aber die dadurch gegebene Genauigkeit gewöhnlich vollauf; andernfalls muß Θ in der früher besprochenen Weise berechnet werden. Für S hat man ebenso

$$S = 46 \cdot 23,5 = 1081 \text{ cm}^3.$$

Hiermit folgt, da $V = 6000 \text{ kg}$ und $e = 12 \text{ cm}$ ist,

$$P = \frac{6000 \cdot 12}{60\,000} \cdot 1081 = 1300 \text{ kg},$$

eine Kraft, die sich auf zwei Scherflächen des Niets verteilt.

19. Aufgabe. Wie ändert sich der Wert des Biegungs Pfeiles f in Gl. (82), wenn Θ nicht konstant, sondern überall proportional dem Biegemomente M ist?

Lösung. Setzt man

$$\frac{M}{E\Theta} = c,$$

so geht die Differentialgleichung der elastischen Linie Gl. (76) über in

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -c$$

und durch zweimalige Integration folgt daraus

$$y = -\frac{cx^2}{2} + ax + b,$$

wenn a und b die Integrationskonstanten sind. Diese Gleichung gilt für die ganze Spannweite, da es hier gleichgültig ist, welchen Wert M an jeder Stelle annimmt; sie gilt aus demselben Grunde auch für jeden beliebigen Belastungsfall, wenn nur die für die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments ausgesprochene Bedingung überall erfüllt ist. Die elastische Linie bildet daher in diesem Falle eine gemeine Parabel. Die Konstanten a und b folgen aus den beiden Grenzbedingungen, daß y für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden muß. Dies liefert $b = 0$ und aus

$$0 = -\frac{cl^2}{2} + al \quad \text{folgt} \quad a = \frac{cl}{2}.$$

Hiermit wird

$$y = \frac{c}{2}(lx - x^2)$$

und der Biegungspfeil f für die Balkenmitte folgt daraus mit $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{cl^2}{8}.$$

Werden das Biegemoment und das Trägheitsmoment in der Balkenmitte durch Anhängen des Zeigers m gekennzeichnet, so folgt durch Einsetzen des Wertes von c

$$f = \frac{M_m}{E\Theta_m} \cdot \frac{l^2}{8}.$$

Speziell für den Belastungsfall, zu dem Gl. (82) gehörte, ist $M_m = \frac{Pl}{4}$ und daher

$$f = \frac{Pl^3}{32E\Theta_m}.$$

Wäre das Trägheitsmoment nicht veränderlich, sondern überall gleich Θ_m , so würde an Stelle dieses Wertes der in Gl. (82) gegebene treten, d. h. der Faktor 32 im Nenner wäre durch 48 zu ersetzen. Der Biegungspfeil ist daher hier um 50% größer als bei konstantem Trägheitsmomente.

Die Voraussetzung, daß Θ proportional mit M sein soll, wird näherungsweise erfüllt bei einem Blechträger, dessen Querschnitt nach der Mitte hin durch Aufnieten von Platten verstärkt wird, so daß überall ungefähr dieselbe Spannung σ auftritt. Die Trägerhöhe wird nämlich durch das Aufnieten der Platten nicht erheblich geändert, so daß in der Tat die Spannung $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ überall ungefähr dem Verhältnisse $\frac{M}{\Theta}$ proportional ist.

20. Aufgabe. Die Konstante α der Gl. (83) für den kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Nach Gl. (84) ist

$$\alpha = \frac{F \int \tau^2 dF}{V^2}.$$

Beim kreisförmigen Querschnitt war in Aufgabe 17

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}$$

gefunden. Achtet man bei der Berechnung von α nur auf die zur

Lastrichtung parallele Komponente τ_{xy} der Schubspannung, so wird demnach bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Abb. 36

$$\kappa = \pi r^2 \int \frac{b^4}{9\pi^2 r^8} dF.$$

Zur Ermittlung des Momentes vierten Grades der Querschnittsfläche $\int b^4 dF$ setzen wir

$$\int b^4 dF = 32 \int_{-r}^{+r} z^5 dy = 64 \int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy.$$

Nun ist allgemein

$$\int (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy = \frac{8(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + 10r^2(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + 15r^4}{48} y \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{5}{16} r^6 \arcsin \frac{y}{r}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird daher

$$\int b^4 dF = 10\pi r^6$$

und hiermit endlich

$$\kappa = \frac{10}{9}.$$

In ähnlicher Weise kann κ auch unter Berücksichtigung der zweiten Komponente τ_{xz} von τ berechnet werden; es wird dann etwas größer gefunden. In jedem Falle handelt es sich indessen nur um eine Abschätzung des Wertes, die auf besondere Genauigkeit keinen Anspruch macht.

21. Aufgabe. Ein durchlaufender Balken überdeckt drei Öffnungen von gleicher Größe und ist gleichförmig belastet; man soll die Auflagerkräfte berechnen.

Lösung. Der Symmetrie wegen ist der Druck auf jede der beiden Mittelstützen gleich groß; er sei mit C bezeichnet. Der Auflagerdruck A am linken Trägerende ist dann $A = \frac{3ap}{2} - C$, wenn p die Last für die Längeneinheit und a die Weite einer Öffnung bedeuten.

In der ersten Öffnung hat man

$$M = x \left(\frac{3ap}{2} - C \right) - \frac{px^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird daher für diesen Ast

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + x \left(C - \frac{3ap}{2} \right)$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + \frac{x^2}{2} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + K,$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + \frac{x^3}{6} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + Kx + K'.$$

Wegen $y = 0$ für $x = 0$ hat man $K' = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = a$ folgt

$$0 = \frac{pa^4}{24} + \frac{a^3}{6} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + Ka \quad \text{oder} \quad K = \frac{5pa^3}{24} - C \frac{a^2}{6}.$$

In der zweiten Öffnung ist

$$\begin{aligned} M &= (x + a) \left(\frac{3ap}{2} - C \right) + Cx - p \frac{(a+x)^2}{2} \\ &= \frac{pax}{2} + pa^2 - Ca - \frac{px^2}{2}, \end{aligned}$$

wenn hier die Abszissen x von der Mittelstütze aus gerechnet werden. Die Differentialgleichung für den Mittelast der elastischen Linie lautet daher

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + Ca - \frac{pax}{2} - pa^2$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + Cax - \frac{pax^2}{4} - pa^2x + K'',$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + Ca \frac{x^2}{2} - \frac{pax^3}{12} - \frac{pa^2x^2}{2} + K''x + K''''.$$

Für $x = 0$ und für $x = a$ verschwindet wieder y und daraus folgt $K'''' = 0$ und

$$0 = \frac{pa^4}{24} + C \frac{a^3}{2} - p \frac{a^4}{12} - p \frac{a^4}{2} + K''a \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{13}{24} pa^3 - C \frac{a^2}{2}.$$

Wir haben jetzt noch die Bedingung, daß sich die beiden Äste der elastischen Linie an der Mittelstütze ohne Knick aneinander schließen müssen. Dazu gehört, daß $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ im ersten Aste gleich $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ im zweiten Aste wird. Dies liefert die Gleichung

$$\frac{pa^3}{6} + \frac{a^2}{2} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + K = K'',$$

oder nach Einsetzen der Werte von K und K''

$$\frac{a^2}{2} C - \frac{7}{12} pa^3 + \frac{5}{24} pa^3 - C \frac{a^2}{6} = \frac{13}{24} pa^3 - C \frac{a^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist C die einzige Unbekannte. Die Auflösung liefert

$$C = \frac{11}{10} pa.$$

Auf jede Mittelstütze kommt also um 10% mehr als die Last einer Öffnung. Da die gesamte Belastung des Trägers $3pa$ beträgt, bleibt für den Druck auf jede Endstütze $0,4 pa$.

2. Aufgabe. Ein im Grundrisse rechteckig gestalteter Raum wird von zwei sich in der Mitte kreuzenden und an dieser Stelle miteinander verbundenen Trägern mit den Ordnungsnummern 1 und 2 überdeckt. An der Kreuzungsstelle ist eine Last P aufgehängt; wieviel kommt davon auf jeden Träger?

Lösung. Der Biegunspfeil f in der Mitte muß für beide Träger gleich sein. Nimmt der erste Träger den Anteil C , der andere also $P - C$ der ganzen Last auf, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{Cl_1^3}{48 E \Theta_1} = \frac{(P - C)l_2^3}{48 E \Theta_2},$$

woraus

$$C = P \frac{l_2^3 \Theta_1}{l_1^3 \Theta_2 + l_2^3 \Theta_1}$$

folgt. — Ganz ähnlich läßt sich die Aufgabe auch für den Fall lösen, daß sich die Träger nicht in der Mitte, sondern an irgend einer anderen Stelle kreuzen. An Stelle von f ist dann die zur betreffenden Abszisse gehörige Ordinate y der elastischen Linie jedes Trägers einzusetzen.