Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Zweiter Abschnitt. Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials

urn:nbn:at:at-ubi:2-7796

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

§ 10. Das Elastizitätsgesetz.

Die im vorigen Abschnitte aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten und alle daraus gezogenen Folgerungen gelten für jeden Körper, gleichgültig wie er sich im übrigen verhalten mag, also z. B. auch für einen Sandhaufen, für einen Tonklumpen, für Metalle und Steine, selbst für Flüssigkeiten und Gase. Die dort gefundenen Beziehungen genügen aber nicht, um den Spannungszustand zu berechnen, der unter gegebenen Umständen eintreten muß. Wir fanden nämlich, daß zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes sechs Spannungskomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} angegeben werden müssen, während zwischen diesen und den äußeren Kräften X, Y, Z nur die drei Gleichungen (5) bestehen. Der Spannungszustand ist daher in allen Fällen statisch unbestimmt im Sinne von § 1. Man muß, um ihn zu bestimmen, auf den Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten und den Formänderungen eingehen.

Was man damit bezweckt, ist leicht einzusehen. Um die Formänderung eines Körpers zu beschreiben, genügt es nämlich, für jeden Punkt des Körpers drei Zahlenwerte anzugeben. Die Gestaltänderung ist z. B. vollständig bestimmt, wenn man für jeden Punkt angibt, um wieviel er sich in den Richtungen von drei Koordinatenachsen verschoben hat. Kennt man also den Zusammenhang zwischen Gestaltänderung und Spannungszustand, so lassen sich immer die sechs unbekannten Größen, durch die der Spannungszustand gekennzeichnet wird, auf drei unbekannte Größen, die die Gestaltänderung beschreiben, zurückführen.

Darauf kommt in der Tat die Anwendung des Elastizitätsgesetzes immer hinaus. Die Formänderung, die zu ihrer Beschreibung nur drei Variable braucht, kann immer leichter untersucht werden, als der Spannungszustand, in dem sechs voneinander unabhängige Veränderliche vorkommen. Zugleich erkennt man aber auch, wie wichtig es ist, die Zahl der unbekannten Größen gerade auf drei vermindern zu können, wenn man sich erinnert, daß zwischen den Spannungskomponenten an jeder Stelle die drei Gleichungen (5) erfüllt sind. Sobald man die Spannungskomponenten in den drei Verschiebungskomponenten, die die Gestaltänderung beschreiben, ausgedrückt und diese Werte in die Gleichungen (5) eingesetzt hat, stehen uns ebenso viele Gleichungen als Unbekannte zu Gebote. Mit der Lösung dieser Gleichungen wird auch der Spannungszustand bekannt. Freilich macht die wirkliche Auflösung gewöhnlich unüberwindliche Schwierigkeiten; auf jeden Fall ist aber der Nachweis von Wert, daß die Ausbildung des Spannungszustandes durch die in den Gleichungen (5) und in dem Elastizitätsgesetze ausgesprochenen Bedingungen schon vollständig geregelt ist, daß jede Unbestimmtheit aufhört und daß wir daher nicht nötig haben, nach neuen Naturgesetzen zu suchen, die uns bisher entgangen wären.

Der gesuchte Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand kann nur durch die Erfahrung gefunden werden und er ist auch für verschiedene Körper oft wesentlich verschieden. Man gewinnt diese Erfahrung, indem man die Formänderungen an Versuchskörpern mißt, die durch abgewogene Belastungen hervorgebracht werden, dabei den Einfluß feststellt, den die Abmessungen des Probestücks auf den Zusammenhang zwischen Formänderung und Belastung haben und so zu einem Schlusse darüber gelangt, welche Formänderungen bei einem unendlich kleinen Parallelepiped, auf dessen Oberfläche gegebene Kräfte wirken, zu erwarten sind. Erst nachdem man die Messungsergebnisse bis zu diesem Schlusse hin verarbeitet hat, ist die Grundlage gewonnen, auf der sich alle weiteren Untersuchungen der Festigkeitslehre aufbauen müssen.

Einer der häufigst vorgenommenen Versuche dieser Art besteht darin, daß man einen Eisenstab von rundem Querschnitte mit etwa 20 bis 25 mm Durchmesser und gegen 300 mm Länge, der an beiden Enden mit Köpfen versehen ist, in eine Festigkeitsmaschine einspannt und ihn einer allmählich anwachsenden Zugbelastung unterwirft. Zugleich mißt man die Dehnung, die eine in der Mitte des Stabes gelegene Meßstrecke von 100 bis 150 mm Länge erfährt. Anfänglich sind diese Dehnungen zu klein, um sie mit dem Zirkel abmessen zu können. Man muß sich daher einer Feinmeßvorrichtung bedienen. Bauschinger hat für diesen Zweck einen Spiegelapparat konstruiert, mit dessen Hilfe man die Längenänderungen der Meßstrecke bis auf etwa $^1/_{10000}$ mm genau beobachten kann. Abb. 8 zeigt die Anordnung dieses Apparates in schematischer Darstellung. S ist der Stab, an dem von zwei Seiten her bei A zwei etwas federnde Stangen F festgeklemmt werden, während die freien Enden von F mit geringem Drucke an zwei Hartgummiröllchen R anliegen.

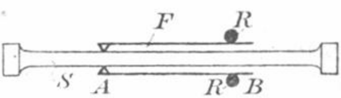

Abb. 8.

Diese Röllchen sind auf Spitzen in einem Rahmen gelagert, der an das andere Ende der Meßstrecke bei B festgeklemmt, in der Zeichnung aber fortgelassen ist. Wenn der Stab gezogen wird, verlängert sich die Meßstrecke AB und die Federn F setzen dabei die Röllchen R in Drehung. Mit jedem Röllchen ist ein Spiegel fest verbunden, der in der Zeichnung ebenfalls weggelassen ist. Auf jeden Spiegel ist ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet, das in etwa 1500 bis 2000 mm Entfernung von dem Spiegel aufgestellt ist. Am Gestelle der Fernrohre wird ein Maßstab befestigt, dessen Bild man im Spiegel beobachtet. Sobald sich der Spiegel ein wenig dreht, verschiebt sich das Bild des Maßstabes gegen das Fadenkreuz im Fernrohre, und man sieht leicht ein, wie man aus der Größe der abgelesenen Verschiebung auf die Drehung des Spiegels und daher auf die Verlängerung der Meßstrecke schließen kann. Wesentlich ist bei dieser Einrichtung, daß zwei Spiegel verwendet werden. Beide drehen sich nämlich, wie man aus der Abbildung erkennt, in entgegengesetzten Richtungen und im allgemeinen um gleiche Beträge. Es kann aber leicht vorkommen, daß bei der Ausführung des Versuchs sich auch der Stab im ganzen etwas dreht, indem sich etwa die Anlage des Stabes an den Köpfen etwas ändert oder auch infolge von Verschiebungen oder Formänderungen der Teile der Festigkeitsmaschine selbst. Wenn man nur e i n e n Spiegel verwendete, würde diese Drehung des ganzen Stabes zu unrichtigen Schlüssen über die Längenänderung der Meßstrecke verleiten. Bei zwei Spiegeln wird dagegen infolge einer solchen Drehung die Ablesung des einen

Spiegels um ebensoviel vergrößert als die andere verkleinert wird und das Mittel aus beiden Ablesungen gibt daher den wahren Betrag der Längenänderung der Meßstrecke an.

Auf dieselbe Art kann man auch die Verkürzung eines Probestückes beobachten, das einer Druckbelastung unterworfen wird; auf andere Versuchsanordnungen, die ähnlichen Zwecken dienen, kann hier nicht eingegangen werden.

Bei einem Flußeisenstabe, der einem solchen Versuche unterworfen wird, zeigt sich, daß die Längenänderungen in demselben Verhältnisse anwachsen wie die Belastungen, so lange diese nicht zu groß sind. Außerdem findet man, daß die Meßstrecke nach Entfernung der Belastung genau wieder die ursprüngliche Länge annimmt. Ebenso verhalten sich Probekörper aus Stahl und auch solche aus Holz. Andere Stoffe zeigen dagegen ein abweichendes Verhalten.

Die Eigenschaft des Stoffes, die wir bei solchen Versuchen feststellen, wird als Elastizität bezeichnet. Da die Bezeichnung „elastisch", namentlich wenn ein Gradunterschied (mehr oder wenig elastisch) ausgedrückt werden soll, in verschiedener Bedeutung gebraucht wird, gebe ich zunächst den Sinn, den ich selbst mit dieser Bezeichnung verbinde, durch die folgenden Sätze an:

1) Elastizität ist allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Formänderungsarbeit in umkehrbarer Weise aufzuspeichern.
2) Vollkommen elastisch verhält sich ein Körper bei einem gewissen Vorgange, wenn man die ihm durch äußere Kräfte zugeführte Formänderungsarbeit vollständig wieder in Form von mechanischer Energie aus ihm zurückgewinnen kann.
3) Der Grad der Elastizität eines nicht vollkommen elastischen Körpers wird durch das Verhältnis der in umkehrbarer Weise aufgespeicherten zu der gesamten ihm bei dem betrachteten Vorgange durch die äußeren Kräfte zugeführten Energie bestimmt.
4) Kein Körper ist gegenüber allen Vorgängen, denen man ihn unterwerfen kann, vollkommen elastisch; ist er es bis zu einer gewissen Grenze hin und darüber hinaus nicht mehr, so wird diese Grenze als Elastizitätsgrenze bezeichnet

(Abkürzung für die ausführlichere Bezeichnung „Grenze der vollkommenen Elastizität").

5) Die Elastizitätsgrenze ist nicht zu verwechseln mit der Proportionalitätsgrenze, die nur bei solchen Körpern in Betracht kommt, für die innerhalb eines gewissen Bereiches das Hookesche Gesetz der Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Formänderung gültig ist.

Diese Festsetzungen über den Wortgebrauch gründen sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit. Darunter ist natürlich die Arbeit zu verstehen, die von den äußeren Kräften an dem Probestücke geleistet werden muß, um es in den gespannten Zustand zu versetzen. Bei dem Zugversuche, von dem vorher die Rede war, ist die Formänderungsarbeit, die zu einem gegebenen Spannungszustande gehört, gleich dem Mittelwerte des von der Maschine während der Verlängerung ausgeübten Zuges, multipliziert mit der erreichten Dehnung, oder in Zeichen

$$A = \int_0^x P\,dx, \tag{17}$$

wenn die Zugkraft mit P, die Dehnung mit x und die Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird.

„Umkehrbar" wird im ersten Satze, wie in allen Teilen der Physik ein solcher Vorgang genannt, der auch in entgegengesetzter Richtung unter sonst gleichen Bedingungen durchlaufen werden kann. Die Umkehrung des Belastungsvorganges bildet die Zusammenziehung des Probestabes beim Abnehmen der Belastung. Damit die Formänderungsarbeit umkehrbar aufgespeichert sei, muß der Stab bei allmählichem Abtragen der Belastung dieselbe Arbeit wieder nach außen hin abgeben, die ihm zuerst zugeführt wurde. Damit dies auch bei jedem Zwischenzustande zutreffe, muß $dA = P\,dx$ von derselben Größe bei der Belastung wie bei der Entlastung sein. Mit anderen Worten heißt dies auch, daß jedem gegebenen Zustande eine bestimmte Kraft P zugeordnet sein muß, gleichgültig ob dieser Zustand dadurch erreicht wird, daß man vom spannungslosen Zustande durch allmähliche Steigerung der Belastung zu ihm gelangt, oder ob er durch die Verminderung einer vorher aufgebrachten größeren Belastung erreicht wird.

Hierbei wird vorausgesetzt, daß sich die Formänderung langsam vollziehe. Bei schnell erfolgenden Formänderungen macht sich noch eine weitere Eigenschaft der festen Körper geltend, die man als ihre innere Reibung bezeichnet. Selbst bei geringen Formänderungen, die sich bei hinreichend langsamem Verlaufe als vollkommen elastisch erweisen, wird nämlich bei raschem Wechsel ein von der Geschwindigkeit der Änderung abhängiger Bruchteil der zugeführten Formänderungsarbeit nicht mehr in Gestalt von mechanischer Energie aufgespeichert oder zurückgewonnen, sondern in Wärme verwandelt oder, wie man sagt, zur Überwindung der inneren Reibung verbraucht. Bei fast allen Betrachtungen der Festigkeitslehre spielt aber diese noch wenig untersuchte Eigenschaft der festen Körper keine Rolle, weil es sich bei ihnen nur um langsam erfolgende Formänderungen handelt. Dagegen macht sich bei Stoßvorgängen und bei schnellen elastischen Schwingungen der Einfluß der inneren Reibung sehr deutlich bemerklich.

So lange die Belastung des vorher betrachteten Flußeisenstabes auf den qcm des Querschnitts nicht über etwa 1800 kg hinausgeht (die Grenze liegt bei einzelnen Eisensorten etwas verschieden), erweist er sich bei dem Zugversuche als so vollkommen elastisch, als dies die Genauigkeit der Messung überhaupt erkennen läßt. Bei gegossenen Metallen, namentlich bei Gußeisen, ferner bei Steinen, Zementkörpern und ähnlichen Stoffen trifft dies anfänglich nicht zu. Beim Abtragen der Belastung entspricht einer bestimmten Länge der Meßstrecke eine kleinere Kraft, als bei dem vorausgegangenen Aufbringen der Last. Die zugeführte Formänderungsarbeit wird also nur zum Teile wieder nach außen hin abgegeben; der Rest dieser Energie hat zur Herstellung einer bleibenden Zustandsänderung gedient, wie man daraus erkennt, daß der Stab seine ursprüngliche Länge nicht wieder vollständig erreicht.

Sobald man aber die gleiche Belastung öfters aufgebracht und wieder entfernt hat, stellt sich auch bei diesen Stoffen nach und nach ein gleichbleibendes Verhalten ein, in dem sie sich ebenfalls in dem vorher erörterten Sinne als nahezu vollkommen elastisch erweisen. Bei den Untersuchungen der Festigkeitslehre ist es in der Regel nicht nötig, auf die anfänglichen Erscheinungen Rücksicht zu nehmen, da der Spannungszustand, auf dessen Ermittelung es ankommt, nur nach dem elastischen Teile der Formänderung, der bei Wegnahme der Belastung wieder verschwindet, zu beurteilen ist.

Auch die Zeit, während der die Belastung getragen wird, ist nicht ohne Einfluß auf die Formänderung des Körpers. Bei den zuletzt besprochenen Körpern, Steinen usf. vergrößert sich die Formänderung allmählich noch etwas, wenn man die Belastung längere Zeit einwirken läßt, namentlich dann, wenn diese Körper nicht vorher schon in den zuvor erwähnten konstanten Zustand durch mehrmaligen Belastungswechsel gebracht sind. Besonders deutlich spricht sich der Einfluß der Zeit bei solchen Körpern wie Seile, Riemen, Fäden und Gewebe aus. Auch dann, wenn die Belastung wieder entfernt wird, nimmt der Körper nicht augenblicklich seine endgültige Gestalt an, sondern die Formänderungen dauern manchmal noch längere Zeit fort. Zugleich ist das Verhalten des Körpers gegen eine neu vorgenommene Belastung abhängig von den Vorgängen, denen er vorher unterworfen war, und auch von der Zeit, die seitdem verstrichen ist. Man faßt alle diese Erscheinungen unter der Bezeichnung der elastischen Nachwirkung zusammen. Sorgfältig untersucht sind diese Nachwirkungen besonders für Seidenfäden, wie sie zum Aufhängen von Magneten usw. in physikalischen Instrumenten gebraucht werden. Bei den Stoffen, aus denen die Konstruktionen der Bau- und Maschineningenieure hergestellt werden, sind sie noch wenig erforscht. Zugleich treten sie aber (abgesehen von den zuvor erwähnten Treibriemen, Hanfseilen usf.) hier auch nur wenig hervor. Jedenfalls sind sie bei allen Stoffen, die auf Grund der vorher beschriebenen Versuche als „vollkommen elastisch" befunden werden, ganz belanglos und es ist daher nicht gebräuchlich und auch nicht nötig, in der Festigkeitslehre näher darauf einzugehen. Gewalztes Eisen und Stahl zeigen zwar ebenfalls sehr deutliche elastische Nachwirkungen, wenn sie über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet wurden; in den Konstruktionen vermeidet man solche Beanspruchungen aber fast immer und man kommt daher praktisch nicht leicht in die Lage, sich um die Nachwirkungen kümmern zu müssen.

Ein Zugversuch und ebenso ein Druckversuch mit Flußeisen zeigt, wie schon vorher erwähnt, daß die Längenänderungen unterhalb der Elastizitätsgrenze den Belastungen proportional sind. Zugleich findet man, daß die Änderung der Meßstrecke der ursprünglichen Länge proportional und bei gleicher Belastung dem Querschnitte des Versuchsstabes umgekehrt proportional ist. Als bezogene oder spezifische

Dehnung (oder Verkürzung) wollen wir die Längenänderung Δl geteilt durch die ursprüngliche Länge l bezeichnen und dafür stets den Buchstaben ε gebrauchen. Diese bezogene Dehnung ist noch von der bezogenen Spannung σ und dem Materiale abhängig, und das Ergebnis des Versuches kann in der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma \tag{18}$$

ausgesprochen werden. Die Konstante E heißt der Elastizitätsmodul des Materials, der reziproke Wert davon, α, der Dehnungskoeffizient. Die bezogene Dehnung ist als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl, d. h. sie hat die Dimension Null. Daraus folgt, daß E eine Größe von der gleichen Art wie σ sein muß, also eine bezogene Spannung bedeutet und etwa in atm (d. h. in Kilogrammen auf ein qcm) ausgedrückt werden kann. Da ε innerhalb der Elastizitätsgrenze, d. h. solange die Gleichung gilt, immer nur ein kleiner Bruch ist, muß E ein sehr großer Wert sein. Für Schweißeisen ist E etwa gleich 2 000 000 atm, für Flußeisen und Stahl etwa 2 200 000 atm und zwar gleichgültig, ob es sich dabei um Zug oder Druck handelt.

Will man nicht mit den spezifischen Dehnungen und Spannungen, sondern mit den ganzen Beträgen rechnen, so kann Gl. (18) auch in der Form

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF} \tag{19}$$

ausgesprochen werden, in der P die ganze auf den Querschnitt F kommende Kraft bedeutet.

Nicht alle Stoffe zeigen freilich das durch die Gl. (18) oder (19) ausgesprochene elastische Verhalten; auf die Abweichungen davon werde ich nachher noch zurückkommen. Früher, als man von diesen Abweichungen noch nichts wußte, sondern annahm, daß bei allen festen Körpern innerhalb ziemlich weiter Grenzen die Längenänderungen den Belastungen proportional seien, bezeichnete man das durch jene Gleichungen ausgesprochene Gesetz als das Elastizitätsgesetz. Jetzt kann aber diese allgemeinere Bezeichnung nicht mehr beibehalten werden; es soll daher das Hookesche Gesetz genannt werden, weil es zuerst von dem Physiker Hooke im Jahre 1678 in der Form „ut tensio sic vis“ aufgestellt wurde.

Aber auch bei jenen Körpern, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, reichen die Formeln (18) und (19) noch nicht aus, um das elastische Verhalten vollständig zu beschreiben. Schon beim einachsigen Spannungszustande muß noch eine Ergänzung hinzutreten. Die Beobachtung lehrt nämlich daß ein auf Zug oder Druck beanspruchter Probestab nicht nur in der gleichen Richtung eine Längenänderung erfährt, sondern auch eine von entgegengesetztem Vorzeichen in jeder Querrichtung. Der Querschnitt eines auf Zug beanspruchten Stabes zieht sich zusammen. Man bezeichnet diese Erscheinung als die Querkontraktion. Bei Druckbelastung erfolgt eine Querdehnung.

Unmittelbare Messungen der Zusammenziehung in der Querrichtung sind schwieriger auszuführen, daher seltener vorgenommen und weniger zuverlässig, als die der Längsdehnung. Nach allem, was darüber bisher bekannt wurde, läßt sich indessen kaum bezweifeln, daß bei jenen Stoffen, die dem Hookeschen Gesetze für die Längsdehnung gehorchen, auch die Querdehnungen proportional mit der Hauptspannung in der Längsrichtung wachsen. Das Verhältnis zwischen beiden bezogenen Längenänderungen ist hiernach eine Konstante, die in der Folge stets mit $\frac{1}{m}$ bezeichnet werden wird, oder auch mit $-\frac{1}{m}$, wenn zugleich das entgegengesetzte Vorzeichen beider Längenänderungen zum Ausdrucke gebracht werden soll. Nach den meisten Messungen liegt das Verhältnis zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$; für Schmiedeeisen und Stahl setzt man gewöhnlich $m = 3^1/_3$, das Verhältnis also gleich 0,3. Bei Gußeisen ist dagegen m nicht konstant und meistens erheblich größer, von 5 bis etwa gegen 9 hinauf; Steine verhalten sich anscheinend ähnlich.

Auf Grund einer Hypothese, die den Spannungszustand aus Molekularkräften herzuleiten suchte, hatte Poisson das Verhältnis zu $\frac{1}{4}$ berechnet. Diese Ziffer wurde aber durch die

Beobachtung nicht bestätigt; immerhin wird die Verhältnisziffer so wie sie der Wirklichkeit entspricht, heute noch als die Poissonsche Konstante bezeichnet.

Vor allem reicht aber das Hookesche Gesetz allein nicht aus, den Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand im allgemeinsten Falle oder selbst nur im Falle des ebenen Spannungszustandes darzustellen. Das Hookesche Gesetz bezieht sich zunächst nur auf den einachsigen Spannungszustand. Es muß daher noch eine Ergänzung hinzutreten. Zu diesem Zwecke nimmt man an, daß jede folgende Formänderung, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, nur von der neu hinzugekommenen Belastung abhängig ist, daß also einer Übereinanderlagerung verschiedener Spannungszustände auch eine einfache Zusammenfügung der zu jedem einzelnen Spannungszustande, für sich genommen, gehörigen Formänderungen entspricht.

Eine Bestätigung dieses erweiterten Satzes, den wir als das Gesetz der Superposition bezeichnen wollen, durch unmittelbare Messungen ist schwer durchführbar. Mittelbar läßt sich der Satz dadurch prüfen, daß man die mit seiner Hilfe gezogenen Folgerungen an einem der Beobachtung zugänglichen Falle mit der Erfahrung vergleicht. Freilich hat man dann mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß die etwa beobachteten Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung möglicherweise auch andere Ursachen haben könnten. Jedenfalls werde ich aber in der Folge, wie allgemein üblich, die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes für jene Körper voraussetzen, die beim einfachen Zug- oder Druckversuche dem Hookeschen Gesetze, das nur als besonderer Fall des Superpositionsgesetzes aufzufassen ist, gehorchen.

Wir wollen jetzt noch die Körper etwas näher ins Auge fassen, bei denen das elastische Verhalten nicht mit dem Hookeschen Gesetze übereinstimmt. Die Abbildungen 9 und 10 geben Versuchsergebnisse wieder, die ich bei der Prüfung von großen Stäben aus Granit bzw. Sandstein auf Zug und auf Druck erhielt. Die Querschnitte der Stäbe waren Rechtecke von 20 × 30 cm Seitenlänge; vorausgehende Versuche hatten nämlich gezeigt, daß es nötig ist, Abmessungen von solcher Größe zu wählen, wahrscheinlich weil bei der Bearbeitung der

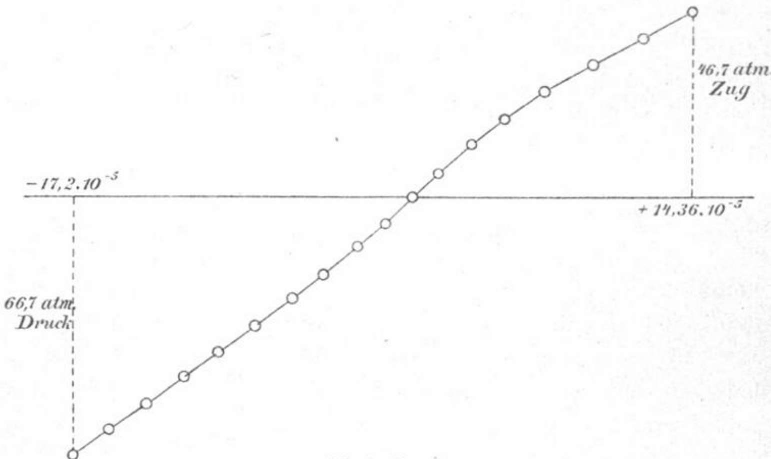

Abb. 9. Granit.

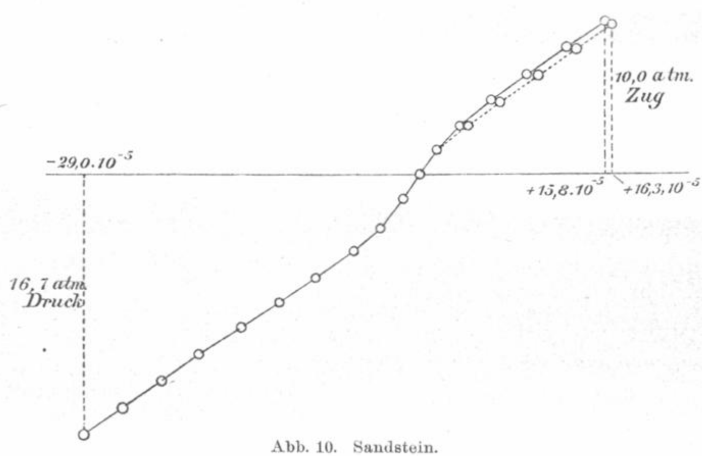

Abb. 10. Sandstein.

Steine mit den gewöhnlichen Steinmetzwerkzeugen eine Lockerung der oberflächlichen Schichten eintritt, die die Resultate bei Probekörpern von kleinerem Querschnitte zu stark beeinflußt. Bei großen Querschnitten machen diese Oberflächenschichten im Verhältnisse zur ganzen Querschnittsfläche weniger aus. Die Abszissen stellen die beobachteten Dehnungen nach rechts hin vom Nullpunkte, die Verkürzungen bei den Druckversuchen nach links hin dar und die Ordinaten geben die zugehörigen Spannungen an, wobei Zugspannungen nach oben hin, Druckspannungen nach unten hin abgetragen wurden. Ehe eine Ablesung erfolgte, wurden die Steine durch wiederholte Belastung zuvor in einen konstanten Zustand übergeführt, so daß sie sich bei dem Versuche vollkommen elastisch verhielten.

Auf der Zugseite der Abb. 10, die für den Sandstein gilt, ist neben der ausgezogenen Linie noch eine zweite punktiert eingetragen. Diese wurde zuerst erhalten und die ausgezogene dann, als der Stein nach den ersten Versuchen, durch die er stark auf Zug beansprucht worden war, eine 15stündige Ruhepause durchgemacht hatte. Der Unterschied zwischen beiden Linien gibt das Maß der elastischen Nachwirkung an. Dieser Unterschied ist hier ziemlich erheblich, offenbar wegen der Höhe der vorausgegangenen Zugbelastung, die nicht sehr weit von der Bruchbelastung entfernt war.

Für Körper, die dem Hookeschen Gesetze folgen, gibt eine Darstellung dieser Art eine gerade Linie. Bei den Steinen ist aber, wie man sieht, die Kurve S-förmig gekrümmt, anscheinend mit einem Wendepunkte im Ursprunge. Die elastischen Längenänderungen ε wachsen sowohl bei Zug- als bei Druckbelastung schneller als die zugehörigen Spannungen. Ganz ähnlich verhält sich auch das Gußeißen.

Um das Elastizitätsgesetz für solche Körper, wie sie hier in Frage kommen, durch eine Formel auszusprechen, muß man an Stelle von Gl. (18) allgemeiner

$$\varepsilon = f(\sigma) \text{ oder umgekehrt } \sigma = \varphi(\varepsilon) \tag{20}$$

setzen, wo f irgend eine Funktion und φ deren Umkehrung ist, die beide hinreichend genau mit jenen Abbildungen übereinstimmen. Der Begriff des Elastizitätsmoduls verliert hier seine ursprüngliche Bedeutung. Da man aber daran gewöhnt ist, das Verhalten der dem Hookeschen Gesetze gehorchenden Körper als das normale zu betrachten, Gl. (20) oder die Abb. 9 und 10 daher stets mit Gl. (18) bzw. mit den geradlinigen Darstellungen zu vergleichen, spricht man indessen auch bei Steinen von einem Elastizitätsmodul, der nun freilich eine neue Definition erhalten muß. Unglücklicherweise gibt es zwei ganz voneinander verschiedene Größen, von denen bald die eine, bald die andere als Elastizitätsmodul bezeichnet wird, ohne daß man immer aus dem Zusammenhange sofort erkennen könnte, welche von beiden eigentlich gemeint ist.

Differentiiert man nämlich Gl. (20) nach ε, so erhält man, wenn der Differentialquotient der Funktion φ durch einen angehängten Akzent bezeichnet wird,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi'(\varepsilon) \tag{21}$$

und der Wert auf der rechten Seite geht für den Fall des Hookeschen Gesetzes in den Elastizitätsmodul über. Man überträgt daher häufig diese Bezeichnung auch allgemein auf den Differentialquotienten $\varphi'(\varepsilon)$. Diese Größe kann auch geometrisch erläutert werden mit Hilfe der Richtung einer Tangente, die an die Kurven der Abb. 9 oder 10 im Punkte ε, σ gelegt wird.

Andererseits findet man aus Gl. (20) auch

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Auch dieser Wert geht in den Elastizitätsmodul über, wenn das Hookesche Gesetz gilt; mit demselben Rechte wie vorher kann daher die Bedeutung des Wortes „Elastizitätsmodul" dahin verallgemeinert werden, daß es den Wert des Verhältnisses $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ angeben soll. Geometrisch wird dieser Wert durch die Richtung der Sehne erläutert, die man vom Anfangspunkte zum Punkte ε, σ ziehen kann. Natürlich stimmen beide Deutungen des Wortes keineswegs miteinander überein, da die Richtung der Sehne von der Richtung der Tangente abweicht. In jedem Falle ist übrigens der „Elastizitätsmodul" keine Konstante mehr, sondern eine Funktion von σ.

Bei meinen eigenen experimentellen Untersuchungen habe ich mich immer dafür entschieden, den Elastizitätsmodul im Sinne von Gl. (22) zu gebrauchen, also das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ darunter zu verstehen. Dies geschah, weil man auf diese Weise unmittelbar von der Formänderung auf die Spannung umrechnen kann oder umgekehrt, und weil dies der Hauptgebrauch ist, den man von dem Elastizitätsmodul zu machen hat. Natürlich muß jeder Angabe des Elastizitätsmoduls hinzugefügt werden, auf welches Spannungsintervall sie sich bezieht.

Für sehr kleine Werte von σ und ε decken sich übrigens beide Definitionen hinreichend genau, um die eine durch die andere ersetzen zu können. Man kann auch geradezu den Elastizitätsmodul als den Wert

$$E = (\varphi'(\varepsilon))_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\sigma}{f(\sigma)}\right)_{\sigma=0} \tag{23}$$

definieren und erhält dann wieder eine Konstante. Bei manchen Erscheinungen, die man in der Elastizitätslehre untersucht, z. B. bei den Schallschwingungen, kommen nur kleine Formänderungen und Spannungen in Betracht und in solchen Fällen kann man mit Vorteil von der Definition in Gleichung (23) Gebrauch machen. Außerdem kann man auch durch Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern den durch Gl. (23) definierten Wert von E direkt bestimmen.

Für manche Zwecke ist es nützlich, für die Funktionen f oder φ in Gl. (20) aus den Versuchsergebnissen eine analytische Form abzuleiten, die sich ihnen hinlänglich genau anschließt. Das ist schon in sehr verschiedener Weise geschehen. Ich halte mich hier nicht mit einer Aufzählung der einzelnen hierzu vorgeschlagenen Formeln auf, sondern verweise den Leser, der sich näher darüber unterrichten will, auf einen Aufsatz von Prof. Mehmke in der Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1897, S. 327.

Für Gußeisen und Steine hat sich bisher am besten die zwar schon früher bekannte, aber erst durch die Arbeiten der Herren v. Bach und Schüle gut bestätigte und dadurch in allgemeinere Aufnahme gebrachte sogenannte Potenzformel bewährt. In dieser Formel wird

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m \tag{24}$$

gesetzt, worin α und m Konstanten bedeuten, die für jedes einzelne Material gesondert aus den Versuchsergebnissen berechnet werden müssen. Als Beispiel erwähne ich, daß Herr Schüle für eine bestimmte Gußeisensorte, von der ich Elastizitätsmessungen veröffentlicht hatte, auf Grund der Versuchsziffern nachträglich für die Zugelastizität

$$\alpha = \frac{1}{2662000} \text{ und } m = 1{,}147$$

und für die Druckelastizität

$$\alpha = \frac{1}{2661000} \text{ und } m = 1{,}133$$

ermittelt hat. Es zeigte sich in der Tat, daß die Potenzformel bei Einsetzung dieser Werte in recht guter Übereinstimmung mit den Versuchsziffern stand.

So wie die Potenzformel gewöhnlich angeschrieben wird, ist sie freilich nicht homogen in den Dimensionen. Man kann diesem Mangel aber leicht abhelfen, indem man an Stelle von Gl. (24)

$$\varepsilon = \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \tag{25}$$

setzt, worin σ_0 eine neue Konstante bedeutet, die nur bei den bisherigen Anwendungen stillschweigend gleich 1 atm gesetzt wurde. Daraus geht hervor, daß auch σ in Gl. (24) in atm auszudrücken ist, und daß α und m absolute Zahlen sind. Will man die Formel auf ein anderes Maßsystem umrechnen, so muß man sie zunächst durch Gl. (25) ersetzen und dann darin $\sigma_0 = 1$ atm durch den entsprechenden Spannungswert in dem anderen Maßsysteme ausdrücken. Dann kann sie zwar wieder auf die Form von Gl. (24) gebracht werden; die Zahl α nimmt aber dabei einen anderen Wert an.

Übrigens handelt es sich bei der Potenzformel nicht um ein streng gültiges Naturgesetz, sondern nur um eine brauchbare Interpolationsformel. Man darf daher auch nicht erwarten, daß alle Folgerungen, die sich aus ihr ziehen lassen, z. B. die, daß für unendlich kleine Spannungen der Elastizitätsmodul unendlich groß ausfiele, richtig wären.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß mit der Aufstellung des Potenzgesetzes, selbst wenn es genau zuträfe, noch keine vollständige Beschreibung des elastischen Verhaltens der betreffenden Körper gewonnen wäre. Es müßte vielmehr noch eine ergänzende Angabe über die Querkontraktion oder Querdehnung hinzutreten, da auch die Poissonsche Verhältniszahl $\frac{1}{m}$ bei solchen Materialien veränderlich ist. Und ferner müßte man noch feststellen, welches andere Gesetz an die Stelle des Superpositionsgesetzes zu treten hätte, für den Fall, daß zwei oder drei lineare Spannungszustände mit senkrecht zueinander stehenden Hauptrichtungen zusammen wirken, d. h. also für den Fall des ebenen oder des allgemeinsten Spannungszustandes. Daß nämlich das Superpositionsgesetz nur in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetze gültig sein kann, ist ohne weiteres klar, da das Superpositionsgesetz das Hookesche schon als speziellen Fall in sich schließt.

§ 11. Einfache Längsspannung und einfache Schubspannung.

Für ein Material, das dem Hookeschen Gesetze gehorcht, haben wir nach dem Vorhergehenden einen Zusammenhang zwischen elastischer Formänderung und Spannungszustand, der für die beiden einfachsten Fälle hier noch einmal übersichtlich angegeben werden soll. — Für den Fall der einfachen Längsspannung (einachsiger Spannungszustand) geht ein in der Hauptrichtung herausgeschnittenes unendlich kleines Parallelepiped in die durch punktierte

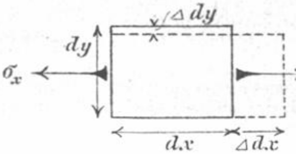

Abb. 11.

Linien in Abb. 11 angedeutete Gestalt über und mit Rücksicht auf die in diese Abbildung eingecshriebenen Bezeichnungen hat man

$$\varDelta dx = \alpha dx \sigma_x = \frac{1}{E} dx \sigma_x, \tag{26}$$

oder auch, unter Einführung der spezifischen Dehnung ε_x,

$$\varepsilon_x = \frac{\varDelta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}. \tag{27}$$

Zugleich tritt eine Querverkürzung ε_y auf, die nach jeder Querschnittsrichtung gleich ist und

$$\varepsilon_y = \frac{\varDelta dy}{dy} = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E} \tag{28}$$

gesetzt werden kann.

Wenn sich das Material, wie seither schon stillschweigend überall vorausgesetzt wurde, nach allen Richtungen gleich verhält, oder wenn es, wie man in diesem Falle sagt, isotrop ist, hat E für jede Längsrichtung und m für jede Querrichtung den gleichen Wert. Das elastische Verhalten des Stoffes wird daher durch diese beiden Konstanten vollständig beschrieben. Ein solches Verhalten zeigen nicht alle Naturkörper. Ein Kristall verhält sich nach verschiedenen Richtungen im allgemeinen verschieden. Der Wert von E oder von m hängt hier wesentlich von der Lage der Hauptrichtungen des Spannungszustandes gegen die kristallographischen Achsen ab. Wer also z. B. die elastischen Eigenschaften des Steinsalzes studieren will, darf sich mit dem vorausgehenden einfacheren Ansatze nicht begnügen, sondern muß ihn unter Berücksichtigung des genannten Umstandes entsprechend verallgemeinern. Im allgemeinsten Falle sind die beiden elastischen Konstanten E und m für die anisotropen Körper, die im übrigen dem Hookeschen Gesetze gehorchen, durch 21 voneinander verschiedene Konstanten zu ersetzen. Dadurch werden die Gleichungen der Elastizitätslehre für solche Körper sehr verwickelt. Wenn aber auch der Physiker, der sich mit solchen Fragen beschäftigt, die Erörterung dieser umständlicheren Gleichungen nicht umgehen kann, darf der Techniker davon absehen, da die wichtigsten Baustoffe gewöhnlich als nahezu isotrop angesehen werden können. Eine Ausnahme macht namentlich das Holz. Für Konstruktionsteile aus Holz sind aber in der Regel nur ganz einfache Aufgaben zu lösen, die ein tieferes Eingehen auf diese Unterschiede nicht nötig machen. Überdies ist auch das elastische Verhalten des Holzes durch mancherlei zufällige Umstände — durch eingewachsene Äste, den Einfluß des Standortes, die Lage des Stabes im Baume usf. — so erheblichen Schwankungen unterworfen, daß jede feinere Berechnung, die auf den Unterschied der elastischen Eigenschaften nach verschiedenen Richtungen eingehen wollte, gegenstandslos würde.

Außer den Änderungen der Kantenlängen kann man auch die Änderung untersuchen, die das Volumen des unendlich kleinen Parallelepipeds bei der einfachen Längsspannung erfährt. Die senkrecht zur Papierfläche der Abb. 11 stehende Kante sei mit dz bezeichnet. Dann entsteht aus dem Volumen $dx\,dy\,dz$ infolge der Formänderung das Volumen

$$dx(1+\varepsilon_x)\,dy(1+\varepsilon_y)\,dz(1+\varepsilon_z).$$

Beim Ausmultiplizieren braucht man auf die Produkte der ε nicht zu achten, da die ε alle sehr kleine Brüche sind, deren Produkte neben ihnen selbst nicht in Betracht kommen; man erhält daher

$$dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Die Summe der drei ε gibt daher das Verhältnis der Volumenzunahme zum ursprünglichen Volumen an. Wir nennen diese Verhältniszahl die kubische Ausdehnung und bezeichnen sie mit e, also

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{29}$$

Diese Betrachtung gilt allgemein. Für den einachsigen Spannungszustand erhält man mit Rücksicht auf Gl. (28), und da $\varepsilon_z = \varepsilon_y$ ist,

$$e = \frac{m-2}{m}\varepsilon_x = \frac{m-2}{mE}\sigma_x. \tag{30}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich auch ein Schluß auf die Größe ziehen, die man für die Verhältniszahl m mindestens anzunehmen hat. Es läßt sich nämlich nicht erwarten, daß das Volumen des Parallelepipeds durch einen Zug vermindert würde, also e negativ würde. Mindestens muß daher $m = 2$ angenommen werden. In diesem Falle nennen wir den elastischen Körper inkompressibel oder raumbeständig, denn bei jedem beliebigen Spannungszustande bleibt sein Volumen konstant. In der Tat ist aber, wie schon vorher erwähnt wurde, m in der Regel größer; gewöhnlich liegt es zwischen 3 und 4.

Durch Übereinanderlagerung von zwei oder im allgemein-

zu Gl 30. $e = \varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_x = \varepsilon_x\left(\frac{m-2}{m}\right)$

sten Falle von drei einachsigen Spannungszuständen, deren Hauptrichtungen senkrecht aufeinander stehen, kann man jeden beliebigen anderen Spannungszustand ableiten und die vorausgehenden Gleichungen genügen daher stets zur Berechnung der elastischen Formänderungen isotroper Körper, die dem Superpositionsgesetze gehorchen. Für die Anwendung ist es aber bequem, den häufig vorkommenden Fall der reinen Schubbeanspruchung noch besonders zu betrachten.

Auf die Seitenflächen des in Abb. 12 gezeichneten Parallelepipeds mögen nur die Schubspannungen τ einwirken. Die Kanten erfahren dabei keine Längenänderungen, dagegen ändern sich die Winkel. Die Änderung des ursprünglich rechten Winkels sei mit γ bezeichnet. Wir denken uns γ, wie überhaupt alle Winkel, mit denen wir hier zu tun haben, wenn nichts anderes gesagt wird, in Bogenmaß ausgemessen, also so, daß γ eine Verhältniszahl ist, deren Multiplikation mit dem Radius den zugehörigen Bogen liefert. Da die elastischen Formänderungen als sehr klein angesehen werden können, ist γ ein sehr kleiner echter Bruch. Der Kosinus eines sehr kleinen Winkels weicht nur um eine Größe höherer Ordnung von der Einheit ab; wir können daher die Formänderung auch so beschreiben, daß sich die obere Seite des Rechtecks der Abb. 12 längs ihrer Richtungslinie verschiebt. So ist die Figur auch in der Tat gezeichnet, obschon in ihr der Winkel γ der Deutlichkeit wegen größer angenommen werden mußte. Wenn der Winkel γ diese Größe wirklich erreichte, müßte man auch darauf achten, daß sich die obere Rechteckseite etwas senkte. So aber kommt diese Senkung nicht in Betracht, und wir können daher sagen, daß sich bis auf Größen höherer Ordnung genau das Volumen des Parallelepipeds bei der reinen Schubbeanspruchung nicht ändert.

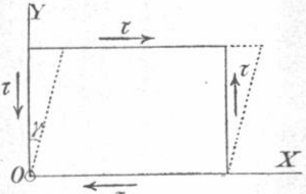

Abb. 12.

Wenn das Superpositionsgesetz gilt, ist die Formänderung der Spannung proportional, und wir können daher

$$\gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G} \tag{31}$$

setzen. Hier tritt eine neue elastische Konstante des Materials G auf. Sie heißt der Schubelastizitätsmodul, ihr reziproker Wert β der Schiebungskoeffizient. Aus Gl. (31), in der γ eine absolute Zahl ist, erkennt man, daß G eine Größe von derselben Art wie τ ist. Der Schubelastizitätsmodul hat daher ebenso wie der Zugelastizitätsmodul die Dimensionen einer spezifischen Spannung und ist in atm oder in Kilogrammen auf 1 qcm anzugeben. Der numerische Wert von G muß ebenfalls, wie Gl. (31) lehrt, ein sehr beträchtlicher sein. Deshalb rechnet man besser mit ihm als mit seinem reziproken Werte β, dem Schiebungskoeffizienten, der immer ein sehr kleiner Bruch ist und daher unbequem anzuschreiben ist, wenn man in den üblichen Einheiten rechnet.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt schon, daß G durch die Werte von E und m, die für sich schon genügen, das elastische Verhalten eines Materials vollständig zu beschreiben, mitbestimmt sein muß. Wir wollen jetzt die Gleichung ableiten, die diesen Zusammenhang ausspricht. Dazu erinnern wir uns, daß nach den Untersuchungen in § 9 der Fall der „reinen Schubspannung" einem ebenen Spannungszustande entspricht, dessen Hauptspannungen in Schnittrichtungen auftreten, die Winkel von 45^0 mit der Schnittrichtung der Schubspannung bilden. Beide Hauptspannungen sind der Schubspannung der Größe nach gleich; die eine ist eine Zug-, die andere eine Druckspannung.

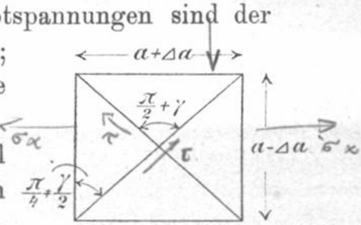

Abb. 13.

Wir denken uns nun einen Würfel in den Richtungen der Hauptspannungen herausgeschnitten. Die zur Z-Achse senkrechte Ansichtsfläche des Würfels geht unter dem Einflusse dieser Hauptspannungen in ein Rechteck über, das in Abb. 13 gezeichnet ist. Mit Δa ist die elastische Änderung der Würfelkante a bezeichnet. Längs der Diagonalebenen des Würfels tritt die Schubspannung τ auf und die

Änderung des Winkels zwischen den Diagonalen kann entweder mit τ in Beziehung gebracht und nach Gl. (31) festgestellt oder aus den Änderungen der Seitenlängen berechnet werden. Die Gleichsetzung der beiden auf diesen Wegen gefundenen Ausdrücke liefert die gesuchte Beziehung zwischen den elastischen Konstanten.

Wenn nur die eine Hauptspannung vorhanden wäre, könnte man das von ihr bewirkte $\varDelta a$ nach Gl. (26) sofort berechnen; man erhielte

$$\Delta a = \frac{1}{E} a \sigma_x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{E} a \tau,$$

da $\sigma_x = \tau$ zu setzen ist. Dazu kommt aber noch die Querdehnung, die von der anderen Hauptspannung herrührt, und die $\frac{1}{m}$ des vorigen Betrages ausmacht. Im ganzen ist also

$$\varDelta a = \frac{m+1}{mE} a \tau. \qquad \text{[illegible]} \; + \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma}{E}$$

Wenn die Winkel zwischen den Diagonalen um γ von einem Rechten abweichen, unterscheidet sich der Winkel zwischen einer Diagonale und einer Seite um $\frac{\gamma}{2}$ von einem halben Rechten. Diese Größenbezeichnung ist auch in die Abbildung eingetragen. Man hat jetzt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a + \varDelta a}{a - \varDelta a},$$

oder, wenn man die Tangente der Winkelsumme nach einer bekannten goniometrischen Formel entwickelt und dabei für $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ selbst einsetzt, was zulässig ist, weil der Winkel nur sehr wenig von Null abweicht, auch

$$\frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{a + \varDelta a}{a - \varDelta a},$$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)(a - \Delta a) = \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)(a +$$

$$\cancel{a} - \Delta a + \frac{\gamma}{2} a - \frac{\gamma}{2} \Delta a = \cancel{a} + \Delta a - \frac{\gamma}{2} a - \frac{\gamma}{2} \Delta a$$

woraus sofort

$$\gamma = 2 \frac{\varDelta a}{a} = \frac{2(m+1)}{mE} \tau$$

folgt. Andererseits ist aber nach Gl. (31) auch

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

$2mG + 2G = mE$

$m(E - 2G) = 2G$

$\mu = \frac{2G}{E - 2G}$

und der Vergleich beider Werte liefert

$\mu = \frac{1}{m}$

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E. = \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot E. \qquad (32)$$

$\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{G} - 1.$

Für $m = 4$ wird $G = 0{,}4E$ und für $m = 3$ wird $G = \frac{3}{8}E$, was hier noch besonders angemerkt werden mag.

Die Messung des Schubelastizitätsmoduls durch einen unmittelbaren Versuch ist nicht wohl ausführbar. Man kann ihn aber, wie wir später sehen werden, aus Torsionsversuchen berechnen. Der so gefundene Wert stimmt nicht immer gut mit Gl. (32) überein. Andererseits ist aber Gl. (32) aus einer Betrachtung gefunden, die für ein isotropes Material, das dem Superpositionsgesetze allgemein gehorcht, unbedingt gültig sein muß. Abweichende Ergebnisse von Torsionsversuchen müssen daher notwendig — soweit sie nicht von Messungsfehlern herrühren — entweder dadurch bedingt sein, daß das untersuchte Material jenem Elastizitätsgesetze nicht gehorcht oder daß die zur Berechnung aus dem Torsionsversuche angewendete Formel unrichtig ist. In den meisten Fällen wird man die Abweichung darauf zurückzuführen haben, daß die Voraussetzung der Isotropie nicht genügend erfüllt ist.

§ 12. Elastische Dehnungen in verschiedenen Richtungen.

Wir denken uns im ursprünglichen Zustande des Körpers eine unendlich kleine Kugel aus ihm abgegrenzt. Nehmen wir zunächst an, daß der Körper hierauf einem einachsigen Spannungszustande unterworfen wird, so muß diese Kugel in ein Rotationsellipsoid übergehen. Denn bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes der Kugel mit x, y, z und legen die X-Achse in die Hauptrichtung, so wird jedes x nach Gl. (26) in demselben Verhältnisse vergrößert und jedes y und z nimmt ab in einem Verhältnisse, das $\frac{1}{m}$ des vorigen beträgt, wenn wir uns σ_x positiv denken. Drücken wir hiernach die ursprünglichen Werte von x, y, z in den geänderten aus und setzen sie in die Kugelgleichung ein, so geht diese in die Gleichung eines Ellipsoides über. Wenn zwei oder drei zueinander rechtwinklige lineare

Spannungszustände übereinander gelagert werden, wodurch wir zu den allgemeineren Fällen aufsteigen, ändert sich immer noch jedes x in demselben Verhältnisse, jedes y in einem anderen konstanten Verhältnisse und jedes z in einem dritten. Daraus schließen wir wie vorher, daß die Kugel in ein Ellipsoid und zwar jetzt in ein dreiachsiges übergegangen ist. Ferner folgt daraus auch, daß die größten oder kleinsten Werte der Dehnungen oder überhaupt der spezifischen Längenänderungen in den Hauptrichtungen des Spannungszustandes auftreten. Man bezeichnet diese Dehnungen auch als die Hauptdehnungen.

Für den Fall des ebenen Spannungszustandes soll die Dehnung in einer beliebigen Richtung, die in der XY-Ebene enthalten ist, noch näher berechnet werden. Die Koordinatenachsen sollen mit den Hauptrichtungen zusammenfallen. Ein in der Ebene des Spannungszustandes enthaltenes Rechteck geht in ein anderes über, das in Abb. 14 durch gestrichelte Linien angegeben ist. Wir berechnen die kleine elastische Änderung Δds der Diagonale ds, die den Winkel φ mit der X-Achse bildet. Zunächst ist

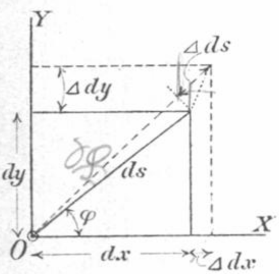

Abb. 14.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und wir finden daraus Δds am einfachsten, indem wir durch partielle Differentiation von ds nach dx und dy den Zuwachs berechnen, der den Änderungen Δdx und Δdy entspricht. Wir erhalten

$$\Delta ds = \frac{dx \Delta dx + dy \Delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds} \Delta dx + \frac{dy}{ds} \Delta dy,$$

woraus die spezifische Dehnung ε_φ in der Richtung φ durch Division mit ds gefunden wird, also

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dx}{dx} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi, \quad (33)$$

und dies wird in der Tat, wie schon vorher gezeigt war, zu einem Maximum oder Minimum für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

An Stelle dieser Ableitung kann man übrigens Δds und hiermit ε_φ auch aus einer geometrischen Betrachtung an Hand der Abb. 14 leicht entnehmen.

Andererseits, Erst mit Rücksicht auf die Kleinheit von

$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \sim \frac{\Delta dx}{\Delta ds}$; $\Delta ds = \frac{\Delta dx}{\partial x} \cdot ds + \frac{\Delta dy}{dy} \cdot ds$. ?

$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi \sim \frac{\Delta dy}{}$

§ 13. Die Anstrengung des Materials.

Die Ausführung von Festigkeitsberechnungen verfolgt den Zweck, ein Urteil über die Bruchgefahr zu gewinnen. Um die Rechenergebnisse in diesem Sinne deuten zu können, muß man aber wissen, in welchem Zusammenhange die Gefahr eines Bruches mit dem Spannungs- oder Formänderungszustande des Materials steht. Für den einfachsten Fall, nämlich für den einachsigen Spannungszustand, ist darüber kein Zweifel möglich. Man weiß aus der Erfahrung, wie groß die Spannung werden darf, ohne daß entweder die Elastizitätsgrenze überschritten oder ohne daß sofort ein Bruch herbeigeführt wird. Von dieser gefährlichen Spannung wird nun ein gewisser Bruchteil als zulässig angesehen. Früher war es üblich, die zulässige Spannung nach der Bruchbelastung zu bemessen und das Verhältnis zwischen beiden Werten wurde als der Sicherheitskoeffizient bezeichnet. Für gewalztes Eisen wurde dieser etwa $= \frac{1}{5}$, für Holz $= \frac{1}{10}$ gewählt usf. Heute ist man von dieser Art der Abschätzung wenigstens bei den Metallen zurückgekommen und zwar namentlich deshalb, weil sich herausstellte, daß man den Bruch schon durch viel kleinere Belastungen herbeiführen kann, wenn man diese öfters aufbringt und wieder entfernt. Die Glieder in den Konstruktionen des Ingenieurs sind aber meistens in dieser Weise beansprucht und dadurch hat der frühere Begriff der Bruchbelastung, also jener Belastung, die bei nur einmaligem Aufbringen den Bruch herbeiführt, sehr an Bedeutung verloren; man würde sich einer unter Umständen sehr gefährlichen Täuschung hingeben, wenn man diese Belastung zum Ausgangspunkte für die Bemessung der zulässigen Beanspruchung machen wollte. In der Tat wäre ja nicht wohl abzusehen, weshalb man sich damit begnügen sollte, nur den fünften Teil der Festigkeit des Eisens auszunutzen; ein kühner Konstrukteur könnte durch diese Art der Abschätzung leicht dazu verleitet werden, mit der Beanspruchung viel höher hinaufzugehen.

Versuche über den Einfluß von oft wiederholten Belastungen sind zuerst von Wöhler angestellt worden. Später hat Bauschinger acht verschiedene Eisensorten untersucht, für die er die in der folgenden Zusammenstellung aufgeführten Festigkeitszahlen erhalten hat. Dabei ist (im Anschlusse an die von Weyrauch eingeführten Bezeichnungen) unter „Tragfestigkeit" die auf 1 qcm bezogene Spannung in kg zu verstehen, durch die schon bei einmaligem Aufbringen der Bruch herbeigeführt wird. Als „Ursprungsfestigkeit" ist jene Spannung bezeichnet, die im Wechsel mit dem spannungslosen Zustande gerade noch beliebig oft ertragen wird. Eine Spannung, die über der Ursprungsfestigkeit liegt, führt bei öfterem Wechsel schließlich den Bruch herbei und zwar um so eher, je näher sie der Tragfestigkeit kommt. Die Zahl der Wechsel, die erforderlich sind, wenn die Spannung nicht sehr viel über der Ursprungsfestigkeit liegt, beläuft sich gewöhnlich auf Millionen. Unter der „Schwingungsfestigkeit" endlich ist jener größte Wert der bezogenen Spannung zu verstehen, der bei Wechsel zwischen Zug und Druck (beide von der gleichen Größe) gerade noch beliebig oft ertragen wird. Die Schwingungsfestigkeit ist gewöhnlich etwas niedriger als die Ursprungsfestigkeit, nach den zuverlässigsten Versuchen, die von Bauschinger herrühren, ist der Unterschied aber viel geringer, als man früher auf Grund der wenigen Ergebnisse Wöhlers angenommen hatte.

Nr.	Eisensorte	Tragfestigkeit (auf Zug)	Ursprungsfestigkeit (für Zug)	Schwingungsfestigkeit
1	Schweißeisen	3480	2000	1770
2	Flußeisen	4360	2400	1980
3	Nicht näher bezeichnet (Eisen)	4050	2200	1980
4	desgl.	4020	2400	2260
5	Thomasstahl	6120	3000	3000
6	Schienenstahl	5940	2800	2800
7	Kesselblech-Flußeisen	4050	2400	1900
8	Nicht näher bezeichnet (Eisen)	3350	2200	1600

Die niedrigsten Festigkeitsziffern in der Spalte für die Schwingungsfestigkeit stimmen ungefähr mit der Lage der

Elastizitätsgrenze bei den betreffenden Materialien überein. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß die Elastizitätsgrenze für die Sicherheit der Konstruktionen weit maßgebender ist, als die durch einen Zugversuch ermittelte Tragfestigkeit. Man erhält daher ein viel zutreffenderes Urteil über den heute üblichen Sicherheitsgrad der eisernen Tragkonstruktionen, wenn man sagt, daß ungefähr die Hälfte der Belastung an der Elastizitätsgrenze oder auch etwas darüber als zulässig angesehen wird, als wenn man sich auf die Tragfestigkeit bezieht.

Mit diesen Bemerkungen ist die Frage für den einachsigen Spannungszustand, so weit als sie hier überhaupt erörtert werden kann, erledigt. Um die Bruchgefahr für einen anderen Spannungszustand bemessen zu können, reichen die angegebenen Erfahrungsziffern aber nicht aus, und in der Tat ist auch noch nicht endgültig festgestellt, wovon sie hier abhängt. Vielmehr sind verschiedene Ansichten hierüber aufgestellt worden, von denen zwar die eine immer noch die meisten Anhänger zählt, ohne daß es aber bisher gelungen wäre, eine durchaus einwandfreie Entscheidung zu treffen.

Eine ältere, aber jetzt fast allgemein verlassene Ansicht ging dahin, daß die Bruchgefahr nach der größten der drei Hauptspannungen, ohne Rücksicht auf die beiden anderen Hauptspannungen zu bemessen sei. Nach einer zweiten Ansicht soll die Bruchgefahr von der größten Winkeländerung γ oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der größten Schubspannungskomponente $\tau_{\max}$ abhängen. Die dritte Ansicht, die heute die meisten Anhänger zählt, erblickt dagegen in der größten Dehnung ε, die bei der Formänderung zu stande kommt, das Maß für die Bruchgefahr. Dazu ist in den letzten Jahren noch eine vierte Theorie von Mohr gekommen, die zwischen der zweiten und dritten Ansicht eine mittlere Stellung einnimmt. Im fünften Bande dieses Werkes habe ich sie ausführlich besprochen. Einstweilen genügt die Bemerkung, daß es nach Mohr auf die größte und die kleinste der drei unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Größe nach geordneten Hauptspannungen ankommt und zwar nach einem aus den Versuchsergebnissen erst noch näher zu ermittelnden Gesetze, während die dazwischen liegende mittlere Hauptspannung keinen Einfluß haben soll.

Die in den Handbüchern der Konstruktionslehre aufgestellten Festigkeitsformeln beruhen heutzutage fast ausschließlich auf der dritten dieser Annahmen, setzen also voraus, daß die größte Dehnung für die Bruchgefahr maßgebend sei. Danach muß ich mich, um Verwirrungen zu vermeiden, in diesem Buche ebenfalls richten. Da aber die Ansicht von Mohr wenigstens bei den wichtigsten Baustoffen des Ingenieurs bisher noch am besten mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, werde ich, wo es darauf ankommt, auf die Abweichungen der Mohrschen Schätzung der Bruchgefahr von der sonst üblichen hinweisen.

§ 14. Die reduzierten Spannungen.

Wenn man auch die Dehnung ε als Maß der Anstrengung des Materials ansieht, ist man darum noch nicht genötigt, überall unmittelbar mit dieser Größe zu rechnen. Dies wäre oft sehr unbequem. Denn die Festigkeitsberechnung liefert zunächst gewöhnlich nur die Spannungen, und es bedürfte erst noch einer besonderen Umrechnung, um daraus die Dehnungen abzuleiten. Zu dieser Umrechnung müßte auch der Elastizitätsmodul bekannt sein, den man für viele Materialien in der Praxis nur ganz annähernd kennt oder über den man sich auch oft ganz im unklaren befindet.

Um solchen Umständlichkeiten aus dem Wege zu gehen, hat man ein sehr einfaches Auskunftsmittel gefunden. Man vergleicht irgend einen beliebigen Spannungszustand, dessen Zulässigkeit untersucht werden soll, mit einem einachsigen Spannungszustande, dessen Dehnung gleich der größten Hauptdehnung bei jenem ist. Nach der Annahme, von der wir hier, wie üblich, in erster Linie ausgehen wollen, ist das Material in beiden Fällen in gleichem Maße angestrengt, und wir können daher diese Anstrengung in jedem Falle durch eine einzige Ziffer zum Ausdrucke bringen, indem wir die Spannung des gleichwertigen einachsigen Spannungszustandes angeben. Diese Spannung wird als die **reduzierte Spannung** bezeichnet und sie wird praktisch als Maß für die Anstrengung des Materials genommen.

Für den Fall des ebenen Problems seien σ_{I} und σ_{II} die beiden Hauptspannungen (Zug wie immer positiv, Druck negativ gerechnet). Für die Hauptdehnungen erhält man dann nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze, das hier als gültig vorausgesetzt wird,

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}}\right); \qquad \varepsilon_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}}\right).$$

Die reduzierte Spannung muß entweder so gewählt werden, daß die von ihr hervorgebrachte Dehnung mit ε_{I} oder mit $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ übereinstimmt, je nachdem der eine oder der andere Wert größer, oder (bei verschiedenen Vorzeichen) gefährlicher für den Bestand des Materials ist. Daraus folgt, daß

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{I}} \tag{34}$$

zu setzen ist, mit dem Vorbehalte, daß von beiden Werten der ungünstigere zu nehmen ist.

Beim allgemeinsten Spannungszustande mit den Hauptspannungen σ_{I}, σ_{II}, σ_{III} erhält man ebenso

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\mathrm{III}}\right)$$

und daraus

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}(\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}). \tag{35}$$

Eigentlich wären wieder drei Werte anzugeben, aus denen man wie vorher den ungünstigsten auszuwählen hätte. Anstatt dessen kann man aber auch die eine Formel (35) beibehalten, wenn man nur hinzufügt, daß die Bezeichnungen σ_{I}, σ_{II}, σ_{III} so auf die drei Hauptspannungen zu verteilen sind, daß in Gl. (35) der gefährlichste Wert für die reduzierte Spannung herauskommt. In praktisch vorkommenden Fällen sieht man gewöhnlich auf den ersten Blick, welche der drei Hauptspannungen man zu diesem Zwecke als σ_{I} in Gl. (35) einsetzen muß.

Eine ihrer bekanntesten Anwendungen findet diese Betrachtung auf die Berechnung des zulässigen Betrages von τ

bei der einfachen Schubbeanspruchung. Wenn man mit σ_{zul} den zulässigen Betrag der einfachen Zug- oder Druckbeanspruchung (wenn beide voneinander verschieden sind, den kleineren von beiden) bezeichnet, kann man die zulässige Schubbeanspruchung τ_{zul} daraus in folgender Weise berechnen. Die Hauptspannungen bei der reinen Schubbeanspruchung sind bekanntlich von gleicher Größe mit τ selbst und im Vorzeichen einander entgegengesetzt. Nun soll τ so gewählt werden, daß die Anstrengung des Materials gerade mit der zulässigen, d. h. daß σ_{red} in Gl. (34) mit σ_{zul} übereinstimmt. Dies gibt, wenn man $\sigma_{I} = + \tau_{zul}$ und $\sigma_{II} = - \tau_{zul}$ einsetzt, die Gleichung

$$\sigma_{zul} = \tau_{zul} + \frac{1}{m} \tau_{zul},$$

woraus

$$\tau_{zul} = \frac{m}{m+1} \sigma_{zul} \tag{36}$$

gefunden wird.

Mit $m = 4$ wird dies $\tau_{zul} = 0{,}8\, \sigma_{zul}$ und mit $m = 3\frac{1}{3}$ wird $\tau_{zul} = 0{,}77\, \sigma_{zul}$. Dagegen wird nach Mohr für Schmiedeisen und Stahl

$$\tau_{zul} = 0{,}5\, \sigma_{zul},$$

ein mit den Versuchsergebnissen besser übereinstimmender Wert. Gerade in diesem Falle führt die Mohrsche Theorie zu einer besonders großen Abweichung gegenüber der üblichen Abschätzung der Bruchgefahr mit Hilfe der reduzierten Spannungen, weil nämlich im Falle der einfachen Schubbeanspruchung die beiden Hauptspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sind und daher weit auseinander liegen. Die Mohrsche Theorie deckt sich in diesem Falle mit der Ansicht, daß die Bruchgefahr von der größten Winkeländerung oder der größten Schubbeanspruchung abhänge.

Gl. (34) kann ferner dadurch umgestaltet werden, daß man σ_{I} und σ_{II} in den auf ein beliebig gerichtetes Koordinatensystem der XY bezogenen Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ ausdrückt und diesen Wert in die Formel einführt. Dies soll hier nur noch für den besonderen Fall weiter ausgeführt werden, daß $\sigma_y = 0$ ist. Dieser Fall kommt nämlich bei den praktischen Anwendungen öfters vor, z. B. bei einer Welle, die gleichzeitig gebogen und verdreht wird. Die Biegung erzeugt Spannungen senkrecht zum Querschnitte, also etwa σ_x, und die Verdrehung bringt Schubspannungen τ hervor, während Normalspannungen σ_y oder σ_z zwischen den einzelnen Fasern des Stabes nicht vorkommen. Man führt die Berechnung in solchen Fällen derart durch, daß man zuerst σ_x und τ berechnet — und zwar nach den später dafür erst noch aufzustellenden Lehren, worauf es aber an dieser Stelle nicht ankommt — und dann daraus die reduzierte Spannung σ_{red} ermittelt. Es ist, da solche Fälle öfters vorliegen, nützlich, diese Umrechnung hier ein für alle Male vorzunehmen. Dazu sind also σ_x und τ als bereits bekannt vorauszusetzen.

Aus Gl. (12) S. 30 erhält man für $\sigma_y = 0$ die Hauptspannungen

$$\sigma_{\text{I}} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right); \quad \sigma_{\text{II}} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right).$$

Durch Einsetzen in Gl. (34) folgt daraus

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}\,\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}. \tag{37}$$

Man erhält das obere oder das untere Wurzelvorzeichen, je nachdem man den einen oder den anderen der beiden in Gl. (34) für σ_{red} angegebenen Werte nimmt. Nach den vorhergehenden Bemerkungen muß man immer jenes Vorzeichen wählen, das den ungünstigsten Wert für σ_{red} liefert. Auf der Zugseite einer zugleich gebogenen und verdrehten Welle wird man daher das positive, auf der Druckseite das negative Vorzeichen zu nehmen haben usf.

Mit $m = 4$ geht Gl. (37) über in

$$\sigma_{\text{red}} = \tfrac{3}{8}\,\sigma_x \pm \tfrac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}$$

und in dieser Form wird sie gewöhnlich angeschrieben. Dagegen wird für

$$m = 3\tfrac{1}{3} : \sigma_{\text{red}} = 0{,}35\,\sigma_x + 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}.$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß auch in diesem Falle die Anstrengung des Materials nach der Mohrschen Theorie höher einzuschätzen ist, als nach diesen Formeln.

§ 15. Die bezogene Formänderungsarbeit.

Man denke sich wieder ein unendlich kleines Parallelepiped in den Hauptrichtungen herausgeschnitten. Die Spannungen am Umfange sind für diesen Teil des Körpers als äußere Kräfte anzusehen, die bei der Formänderung eine Arbeit leisten, da sie längs eines gewissen Weges wirken. Dadurch wird dem Körperelemente eine Energiemenge zugeführt, die darin aufgespeichert wird und bei der Umkehrung des Vorgangs wieder daraus gewonnen werden kann. Man bezeichnet diese Energie auch als die potentielle Energie des gespannten Körpers oder auch als das Potential der elastischen Kräfte. Wir wollen anstatt dessen an der in der Technik üblicheren Bezeichnung „Formänderungsarbeit" festhalten. Wird die Formänderungsarbeit auf die Volumeneinheit des Körpers an der betreffenden Stelle bezogen, so soll dies durch die nähere Bezeichnung „bezogene" oder „spezifische" Formänderungsarbeit ausgedrückt werden.

Für den einachsigen Spannungszustand ist die gesamte Formänderungsarbeit des Körpers schon in Gl. (17) angegeben. Wenn der Körper dem Hookeschen Gesetze gehorcht, ist die Kraft P in jedem Augenblicke der zugehörigen Längenänderung proportional. In Gl. (17)

$$A = \int_0^{\Delta l} P\,dx \qquad A = \int_0 T\,dx$$

können wir daher, wenn der der gesamten Längenänderung Δl entsprechende Wert von P mit P' bezeichnet wird,

$$P = P' \frac{x}{\Delta l} \qquad r \cdot \varphi$$

setzen und die vorige Gleichung geht damit über in

$$A = \frac{P'}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} x\,dx = \tfrac{1}{2} P' \Delta l = \frac{P'}{\Delta r\varphi} \cdot \int_0^{\Delta r\varphi} r\varphi \quad (38)$$

Die bezogene Formänderungsarbeit wird hieraus gefunden, wenn wir diese Gleichung auf einen Würfel anwenden, dessen

$$= \frac{P'}{r \cdot \Delta\varphi} \cdot r^2 \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} = P' \cdot r \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Seite gleich der Längeneinheit ist. Dann geht P' über in σ und Δl in ε, also, wenn die spezifische Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird,

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{39}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

Für den Fall des ebenen Problems mit den Hauptspannungen σ_x und σ_y finden wir A auf demselben Wege. Die Dehnungen in den Hauptrichtungen werden

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x\right).$$

Auf die Dehnung in der dritten Hauptrichtung kommt es nicht an, da die ihr entsprechende Hauptspannung Null ist. Auf die Rechtecke von den Kantenlängen $dy\,dz$ wirken die Kräfte $\sigma_x dy\,dz$ in entgegengesetzter Richtung. Wenn sich der Abstand dx zwischen beiden Rechtecken um $\varepsilon_x dx$ vergrößert, leisten die beiden Kräfte zusammengenommen eine Arbeit, die gleich diesem Wege multipliziert mit dem Mittelwerte der Kräfte während des allmählichen Anwachsens des Spannungszustandes ist. Dieser Mittelwert ist, wie im vorausgehenden Falle, gleich der Hälfte der zuletzt erreichten Größe, die Arbeit daher

$$\tfrac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz\cdot\varepsilon_x dx \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right)dx\,dy\,dz.$$

Dazu kommt der ebenso zu bildende Ausdruck für die Arbeit der Hauptspannung in der Y-Richtung. Addiert man beide Beträge und streicht man den Faktor $dx\,dy\,dz$, womit die Arbeit auf die Volumeneinheit bezogen wird, so erhält man

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right). \tag{40}$$

Für den allgemeinsten Fall mit drei von Null verschiedenen Hauptspannungen würde man ebenso erhalten

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right). \tag{41}$$

Auch bei diesen Betrachtungen ist es wieder nützlich, den Fall der reinen Schubbeanspruchung gesondert zu untersuchen. Am Umfange des in Abb. 12 S. 52 herausgezeichneten Körper-elementes wirken nur die Schubspannungen τ. Wenn wir uns die Formänderung so vorgenommen denken, wie es durch punktierte Linien in Abb. 12 angedeutet ist — also ohne weitere Verschiebung oder Drehung des Volumenelementes, die auf die ganze geleistete Arbeit keinen Einfluß haben kann, da die Spannungen am Umfange ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden — kommt nur die Arbeit der Schubspannungen an der oberen Seite in Betracht, da sich die untere Seite überhaupt nicht verschiebt, während die Verschiebungen der anderen Seiten senkrecht zur Kraftrichtung stehen. Der Mittelwert der Kraft während der Formänderung ist aus denselben Gründen wie vorher gleich der Hälfte des zuletzt erreichten Wertes zu setzen, also gleich

$$\tfrac{1}{2}\tau\, dx\, dz$$

und der Weg, der in der Richtung der Kraft zurückgelegt wird, gleich $\gamma\, dy$. Die Formänderungsarbeit ist daher

$$\tfrac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz.$$

Die bezogene Formänderungsarbeit wird daraus durch Streichen des Faktors $dx\, dy\, dz$, der das Volumen des betrachteten Parallelepipeds angibt, gefunden, also mit Berücksichtigung von Gl. (31)

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\tau\gamma = \tfrac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{42}$$

Der Ausdruck (42) muß mit dem in Gl. (40) angegebenen Werte übereinstimmen, wenn man in diesem die Hauptspannungen σ_x und σ_y gleich $+\tau$ bzw. $-\tau$ setzt. Die so erhaltene Gleichung

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\tau^2 + \tau^2}{2} + \frac{1}{m}\tau \cdot \tau\right) = \frac{\tau^2}{2G}$$

liefert nach ihrer Auflösung nach G wieder die in § 11 auf ganz anderem Wege abgeleitete Beziehung

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E$$

zwischen den drei Elastizitätskoeffizienten.

Ein feineres Empfinden wird in diesen Schlüssen noch eine gewisse Lücke herausfühlen. Es ist nämlich noch nicht darauf hingewiesen worden, daß die Formänderungsarbeit für ein beliebig gestaltetes Volumenelement dem Volumen proportional, von der besonderen Gestalt des Elementes aber unabhängig ist. Bis zu einem gewissen Grade läßt sich dies zwar schon daraus entnehmen, daß die potentielle Energie an den materiellen Inhalt des Elementes gebunden ist und daß man in der Tat nur auf Grund einer solchen Vorstellung von einer spezifischen Formänderungsarbeit sprechen kann. Ein direkter Nachweis bleibt aber immerhin wünschenswert. Diesen kann man dadurch führen, daß man sich das Volumenelement in Elemente höherer Ordnung zerlegt denkt, deren Kanten nach den Hauptrichtungen orientiert sind. Summiert man die Arbeitsleistungen aller Spannungen auf den Seitenflächen dieser Elemente höherer Ordnung über das ganze ursprünglich gegebene Volumenelement, so heben sich alle Glieder gegeneinander auf, die auf Flächen kommen, in denen zwei Elemente höherer Ordnung aneinander grenzen, da die Kräfte nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion einander entgegengesetzt, die Wege aber die gleichen sind. Die Summe ist daher gleich den Arbeitsleistungen der Spannungen am Umfange des Elementes erster Ordnung, woraus der Satz folgt.

Aufgaben.

4. *Aufg. Ein Zugstab aus Flußeisen werde mit 1000 atm gespannt; wie groß ist die größte in ihm auftretende Winkeländerung γ in Sekunden ausgedrückt, wenn $E = 2\,200\,000$ atm und $m = 3\frac{1}{3}$ gesetzt wird?*

Lösung. In § 7 folgte aus den Gleichungen (15), daß die größte Schubspannung beim linearen Spannungszustande gleich der Hälfte der Hauptspannung, hier also gleich 500 atm ist. Der Schubelastizitätsmodul berechnet sich nach Gl. (32) hier zu

$$G = \frac{3\frac{1}{3}}{2 \cdot 4\frac{1}{3}} \cdot 2\,200\,000 = 846\,000 \text{ atm}$$

und damit die Winkeländerung γ nach Gl. (31)

$$\gamma = \frac{500 \text{ atm}}{846\,000 \text{ atm}} = 591 \cdot 10^{-6},$$

und da $1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ in Bogenmaß ist,

$$\gamma = 122'' = 2'2''.$$

Hierzu bemerke ich noch, daß Gl. (31) zunächst für den Fall der reinen Schubspannung abgeleitet wurde, der hier allerdings nicht vorliegt. Die Formel bleibt aber auch hier gültig, weil Normalspannungen, die zu den Schubspannungen noch hinzukommen, für sich genommen keine Winkeländerungen bewirken, und weil man nach dem Superpositionsgesetze die ganze Formänderung immer aus den einzelnen Änderungen zusammensetzen kann, die den verschiedenen Komponenten irgendeines Spannungszustandes entsprechen.

4

$\frac{24\,000}{36} = \frac{2}{3} \cdot 1000$

6

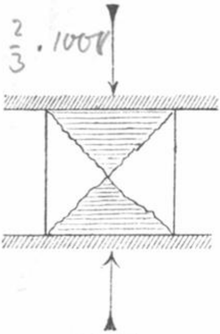

Abb. 15.

5. *Aufg.* *Ein Granitwürfel von 6 cm Seite wird in der Prüfungsmaschine mit 24 t belastet. Wie groß ist die Beanspruchung auf Schub und wie groß ist die Winkeländerung* γ, *wenn* $E = 300\,000$ atm *und* $m = 4$ *gesetzt wird?*

Lösung. Man findet wie in voriger Aufgabe $\tau = 333$ atm, $G = 120\,000$ atm und $\gamma = \frac{1}{360} = 0^0 9' 30''$.

Bemerkung. Die Frage steht in Verbindung mit einer Ansicht, die früher über die Art, wie der Bruch eines solchen Steinwürfels erfolge, sehr verbreitet war. Der Steinwürfel zerfällt nämlich so in Bruchstücke, daß zwei oft sehr schön ausgebildete Pyramiden entstehen, die in Abb. 15 durch horizontale Schraffierung hervorgehoben sind. Die Seitenflächen der Pyramiden, also die Hauptbruchflächen, folgen ungefähr jenen Schnittrichtungen, für die τ den größten Wert annimmt. Man schloß daraus, daß bei dem Druckversuche in Wirklichkeit die Schubfestigkeit überwunden würde. — Indessen ist auch eine andere Erklärung dieser Erscheinung möglich. Beim Zusammendrücken des Würfels tritt gleichzeitig eine Querdehnung ein. Nun ist Steinmaterial imstande, nur eine gewisse spezifische Dehnung zu ertragen, Granit etwa $60 \cdot 10^{-5}$, bevor eine dauernde Trennung eintritt. Dabei ist es möglicherweise gleichgültig, ob diese Dehnung durch einen Zug in der einen Richtung oder durch einen Druck in der Querrichtung zustande kommt. Der Bruch wäre also dann dadurch zu erklären, daß sich auf den vier freien Seitenflächen Stücke loslösen, so daß die Pyramiden übrig bleiben. Hierbei muß aber noch auf einen anderen, wichtigen Umstand geachtet werden. Die Druckflächen des Steines sind nämlich durch die Reibung zwischen ihnen und den Druckplatten der Prüfungsmaschine gehindert, sich der Quere nach auszudehnen. Dadurch kommt in der Nähe der Druckflächen überhaupt kein einachsiger Spannungszustand heraus. Auch die benachbarten Stellen werden an der freien Querdehnung gehindert; man muß daher erwarten, daß der Bruch in der Mitte beginnt, bis wohin sich diese Hemmung der Querdehnung am wenigsten erstreckt. Beachtet man, daß die Druckflächen durch die Reibung an jeder Querdehnung gehindert sind, daß also ein auch über sie sich erstreckender Riß kaum zu erwarten ist, so wird die nahezu pyramidenförmige Gestalt der Hauptbruchreste leicht verständlich. Zugleich gibt diese Betrachtung auch Rechenschaft über eine andere Erscheinung, die man bei der Prüfung von Steinen auf Druckfestigkeit beobachtet. Man findet nämlich die Festigkeit abhängig von dem Verhältnisse der Höhe des Probekörpers zur Grundfläche; je höher er ist, desto geringer ist gewöhnlich die Festigkeit. Da sich der Einfluß der durch Reibung festgehaltenen Grundflächen bei höheren Prismen in der Mitte nicht mehr so fühlbar machen kann, als bei niederen, erklärt sich diese Erscheinung ganz ungezwungen. Zugleich erwähne ich noch, daß ich auch einmal Druckversuche an Steinwürfeln mit geschmierten Druckflächen vorgenommen habe. In diesem Falle spaltet sich der Stein nicht in schiefer Richtung sondern in gerader, so daß er in eine Reihe von Prismen zerfällt. Die Bruchlast ist in diesem Falle weit geringer ($^1/_2$ oder selbst $^1/_3$ bis $^1/_4$) von der bei nicht geschmierten Druckflächen beobachteten. — Es ist üblich, die Druckfestigkeit von Steinen immer nur an Probekörpern in Würfelform mit ungeschmierten Druckflächen zu ermitteln. Bei der Deutung der so erhaltenen Ziffern ist auf die vorausgehenden Darlegungen wohl zu achten.

6. *Aufg. Ein Zylinder von nachgiebigerem Material (kleinem E) ist in den zylindrischen Hohlraum einer ihn auf dem Mantel dicht umschließenden (nahezu) starren Masse eingepaßt und wird der Längsrichtung nach mit 200 atm zusammengedrückt. Wie groß ist der Druck, den er am Mantel auf die ihn umschließende Masse ausübt a) wenn $m = 4$, b) wenn $m = 2$ gesetzt wird?*

Lösung. Man hat hier $\sigma_{\mathrm{I}} = 200$ und $\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{III}} = x$. Die Unbekannte x muß so gewählt werden, daß $\varepsilon_{\mathrm{II}} = \varepsilon_{\mathrm{III}} = 0$ wird, also

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\mathrm{II}} - \frac{1}{m}(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})\right) = 0; \qquad x - \frac{1}{m}(x + 200) = 0.$$

Für $m = 4$ folgt daraus $x = 66\tfrac{2}{3}$ atm und für $m = 2$ wird $x = 200$ atm. Im letzten Falle ist der Seitendruck genau so groß, als wenn der zylindrische Hohlraum von einer Flüssigkeit ausgefüllt wäre.

7. *Aufg. Wie groß ist die reduzierte Spannung für den in Aufg. 3, S. 34 angegeben Fall, wenn $m = 4$ gesetzt wird?*

Lösung. Für $m = 4$ ist nach § 14

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \tfrac{3}{8}\sigma_x + \tfrac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2},$$

und hier ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ atm zu setzen. Setzt man dies ein, so wird $\sigma_{\mathrm{red}} = 646$ atm.

8. *Aufg. Eine an beiden Enden durch starke Böden geschlossene zylindrische Röhre stehe unter einem inneren Überdrucke. Die Zugspannung der Rohrwand in tangentialer Richtung betrage 800 atm, die in der Längsrichtung 400 atm. Wie groß ist die reduzierte Spannung für* $m = 3\frac{1}{3}$?

Lösung. Nach Gl. (34) hat man

$$\sigma_{\text{red}} = 800 - \frac{1}{3\frac{1}{3}} \cdot 400 = 680 \text{ atm.}$$

Anmerkung. Gewöhnlich berechnet man zwar die Anstrengung der Rohrwand in dieser Weise. Nach der Theorie von Mohr macht aber, da die drei Hauptspannungen hier $+800$, $+400$, 0 sind, die mittlere Hauptspannung $+400$ gar nichts aus und die Anstrengung ist so zu beurteilen, als wenn die Hauptspannung von 800 atm allein vorkäme.

9. *Aufg. Eine sich von einem Ende zum anderen gleichmäßig verjüngende Zugstange von den Endquerschnitten* F_1 *und* F_2 *und der Länge* l *wird mit der Kraft* P *zentrisch gezogen. Wie groß ist die Formänderungsarbeit?*

Lösung. Der Querschnitt F im Abstande x von jenem Ende, an dem der Querschnitt $= F_1$ ist, berechnet sich zu

$$F = \left(\sqrt{F_1} + \frac{x}{l}(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1})\right)^2.$$

Für die Formänderungsarbeit dA in einem Abschnitte der Stange von der Länge dx, also von dem Volumen $F\,dx$, erhält man nach Gl. (39)

$$dA = F\,dx\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{2E} \cdot \frac{dx}{F}$$

und die Formänderungsarbeit A der ganzen Stange wird daraus durch Integration nach x gefunden, also

$$A = \frac{P^2}{2E}\int_0^l \frac{dx}{\left[\sqrt{F_1} + \frac{x}{l}(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1})\right]^2}.$$

Mit Benutzung der Integralformel

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

geht dies über in

$$A = -\frac{P^2}{2E} \cdot \frac{l}{\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{F_1} + \frac{x}{l}(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1})} \right]_0^l$$
$$= \frac{P^2}{2E} \cdot \frac{l}{\sqrt{F_1 F_2}}.$$

Setzt man $F_2 = F_1$, so erhält man

$$A = \frac{P^2 l}{2 E F_1},$$

und dies ist der Ausdruck für die Formänderungsarbeit einer Stange vom konstanten Querschnitte F_1. Unterscheiden sich F_1 und F_2 nur wenig voneinander, so kann man genau genug das geometrische Mittel $\sqrt{F_1 F_2}$ durch das arithmetische $\frac{F_1 + F_2}{2}$ ersetzen.

10. *Aufg. Eine an beiden Enden festgehaltene Zugstange war ursprünglich mit 600 atm gespannt. Dann wird sie um* 50^0 C. *abgekühlt. Um wieviel erhöht sich die spezifische Formänderungsarbeit, wenn* $E = 2 \cdot 10^6$ atm *und der Ausdehnungskoeffizient des Eisens* $= \frac{1}{80000}$ *für* 1^0 C. *gesetzt wird?*

Lösung. Wenn die Enden der Stange frei wären, hätte die Abkühlung eine spezifische Verkürzung ε zur Folge, die

$$\varepsilon = \frac{50}{80000} = \frac{1}{1600}$$

wäre. Um diese Verkürzung zu verhindern, muß eine Zugspannung in der Stange auftreten, die für sich genommen eine elastische Dehnung von demselben Betrage zustande bringt. Diese Spannung σ ist nach Gl. (18)

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{1600} = 1250 \text{ atm.}$$

Durch die Abkühlung wird also die Zugspannung von ursprünglich 600 atm auf 1850 atm erhöht. Bei vielen Eisensorten liegt dies schon über der Proportionalitätsgrenze, wir wollen indessen annehmen, daß dies hier nicht zutrifft, da wir die Formänderungsarbeit nicht mehr genau berechnen können, sobald jene Grenze überschritten ist.

Nach Gl. (39) ist im ursprünglichen Zustande

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{600^2}{4 \cdot 10^6} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 0{,}09 \frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^3}.$$

Die im letzten Ausdrucke gegebene Bezeichnung der Dimensionen weist darauf hin, daß A eine Arbeitsleistung (cm kg) bezogen auf ein

Einheitsvolumen (cm^3) darstellt. — Setzt man an Stelle von 600 atm jetzt 1850 atm in den vorstehenden Ausdruck ein, so wird

$$A = \frac{1850^2}{4 \cdot 10^6} = 0{,}856 \frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^3}.$$

Die Formänderungsarbeit hat sich daher um 0,766 erhöht. Diese potentielle Energie ist nicht durch Aufwand von Arbeit äußerer Kräfte hervorgebracht worden, kann sich aber gleichwohl jederzeit in solche verwandeln. Sie hat ihren Ursprung in einem Teile der dem Stabe bei der Temperaturerhöhung zugeführten Wärme, der in mechanische Energie umgewandelt wird. Man erkennt daraus, daß die spezifische Wärme des Stabes im gespannten und im ungespannten Zustande etwas verschieden sein muß, und daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen dem elastischen Formänderungszustande und dem Wärmezustande bestehen muß. Die weitere Erörterung dieses Zusammenhanges ist eine Aufgabe der mechanischen Wärmetheorie; in der Festigkeitslehre sind diese Erscheinungen ohne Bedeutung, und man kann sie daher hier gewöhnlich vollständig vernachlässigen. Es möge nur noch bemerkt werden, daß ein Stab, der ohne Zufuhr oder Ableitung von Wärme gedehnt wird, sich dabei ein wenig abkühlt. In der Festigkeitsmaschine bemerkt man diese Abkühlung nicht, da sie sich nur auf Tausendstel Grade beläuft. Dies gilt indessen nur so lange, als die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Von da ab wird die äußere Arbeit nicht mehr ausschließlich in Form von potentieller Energie aufgespeichert, sondern zum Teile in Wärme umgewandelt, die beim Abreißen eines Stabes eine recht beträchtliche Temperaturerhöhung bewirkt.