

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Festigkeitslehre

Föppl, August

1909

Erster Abschnitt. Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

§ 1. Aufgabe der Festigkeitslehre.

Bei vielen Untersuchungen der Mechanik genügt es, die festen Körper als durchaus unveränderlich oder als starr zu betrachten. In anderen Fällen aber, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, reicht dieser Grad der Annäherung an das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper nicht aus.

Man kann diese Fälle in zwei Gruppen einteilen. Bei der ersten Gruppe handelt es sich um die Entscheidung der Frage, ob sich ein gegebener Körper unter gewissen Umständen in der Tat ungefähr wie ein starrer verhalten wird oder ob man im Gegenteile größere Formänderungen oder einen Bruch zu erwarten hat. Aufgaben von dieser Art werden häufig zur Festigkeitslehre „im engeren Sinne“ gerechnet.

Die zweite Gruppe wird von jenen Fällen gebildet, bei denen man schon vorher weiß, daß der betrachtete Körper gegen größere Formänderungen oder gegen Bruch widerstandsfähig genug ist, um ihn annähernd als starr betrachten zu können, bei denen aber trotzdem die Lehren der Mechanik starrer Körper nicht ausreichen, gewisse Fragen, die sich anscheinend ganz innerhalb ihres eigenen Gebiets bewegen, zu beantworten. Einfache Beispiele dafür sind folgende. Ein Balken, der auf zwei Stützen aufruht, überträgt auf diese, wenn er belastet ist, Auflagerkräfte, die sich nach den Lehren der Mechanik starrer Körper berechnen lassen. Das ist aber nicht mehr möglich, wenn der Balken an drei Stellen gestützt ist. Ebenso wenig vermag man anzugeben, wie groß der Druck

ist, den jedes Bein eines beliebig belasteten vierbeinigen Tisches auf den Boden ausübt, wenn man von der in diesem Falle nicht zutreffenden Voraussetzung ausgeht, daß es genüge, den Tisch als starren Körper zu betrachten. Zu ähnlichen Schwierigkeiten gelangt man bei der Untersuchung des Stoßes der Körper, wenn man diese als starr ansieht.

Früher, als man noch annahm, daß bei manchen Körpern, z. B. bei den Bausteinen, das Bild des starren Körpers zur Beschreibung ihres Verhaltens genügen müsse, hat man sich öfters bemüht, die scheinbar vorhandene Lücke der Mechanik starrer Körper durch Aufstellung besonderer Gesetze (z. B. des sogenannten Gesetzes des kleinsten Widerstandes in der Gewölbetheorie) zu schließen, ohne von dem Bilde des starren Körpers abzuweichen. Heute weiß man, daß diese Bemühungen verfehlt waren. Es gibt keine Körper in der Natur, die wirklich starr wären. Alle vermögen ihre Form etwas zu ändern, ohne deshalb sofort zu zerbrechen, und alle Fragen, auf die man bei der früheren Anschauung keine Antwort zu geben vermochte, finden ihre Lösung, sobald man auf diese Eigenschaft der Naturkörper Rücksicht nimmt.

Aus jener Zeit, in der man sich über diesen Punkt noch nicht klar geworden war, stammt auch die Bezeichnung jener Aufgaben. Man nennt auch heute noch solche Aufgaben statisch unbestimmt, bei denen kein Zweifel darüber erhoben werden kann, daß die Körper nur geringe Gestaltänderungen erfahren, daß sie sich also auf den ersten Anschein wie starre verhalten werden, bei denen aber trotzdem die Mechanik der starren Körper zur Lösung nicht ausreicht.

Mit der zuerst genannten Gruppe von Fällen teilt diese zweite Gruppe die Eigentümlichkeit, daß man auf die Gestaltänderungen, wenn sie auch noch so klein seien, Rücksicht nehmen muß, um zu einer Lösung zu gelangen. Beide Gruppen werden daher am besten gemeinsam untersucht. Man macht zwar, wie schon bemerkt, öfters insofern einen Unterschied, als man nur die Fälle der ersten Gruppe der eigentlichen Festigkeitslehre, die der zweiten Gruppe der „Theorie der

Elastizität“ zuweist. Ich werde aber von einer solchen Unterscheidung hier vollständig absehen. Unter der Festigkeitslehre im weiteren Sinne verstehe ich vielmehr ganz allgemein jenen Teil der Mechanik fester Körper, bei dem auf die Betrachtung der gewöhnlich nur sehr kleinen Formänderungen dieser Körper eingegangen wird. „Fest“ steht daher hier ausdrücklich im Gegensatze zu „starr“, braucht aber darum noch nicht mit „elastisch“ zusammenzufallen. Die Untersuchung des Verhaltens eines plastischen Körpers, also etwa eines Klumpens aus knetbarem Tone, würde vielmehr auch als eine Aufgabe der Festigkeitslehre aufzufassen sein. Mit solchen Fällen hat man aber nur selten zu tun und es ist daher nicht nötig, in diesem Buche ausführlicher darauf einzugehen.

§ 2. Die inneren Kräfte.

Durch die kleine Formänderung, die ein Körper an irgend einer bestimmten Stelle unter dem Einflusse der Belastung erfährt, werden an dieser Stelle innere Kräfte wachgerufen, die die Formänderung wieder rückgängig zu machen suchen und sich ihrer Vergrößerung widersetzen. Man ist daher genötigt, bei allen Aufgaben der Festigkeitslehre, zu welcher Gruppe sie nun auch gehören mögen, sowohl in eine Untersuchung der Formänderung als auch in eine Untersuchung des mit ihr verbundenen Spannungszustandes einzutreten. Will man die zuletzt genannte Seite der Betrachtung besonders hervorheben, so kann man die Festigkeitslehre auch als die Mechanik der inneren Kräfte bezeichnen. Man darf dabei freilich nicht vergessen, daß die vollständige Lösung aller bei der Behandlung der inneren Kräfte auftretenden Fragen ohne Berücksichtigung der damit verbundenen Formänderung ebensowenig möglich ist, wie eine Untersuchung der Formänderung ohne Betrachtung der dazu gehörigen inneren Kräfte. Einige der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten, denen die inneren Kräfte unterworfen sind, lassen sich indessen auch schon ohne nähere Erörterung der Formänderung behandeln und mit ihnen haben wir uns in diesem ersten Abschnitte vorwiegend zu beschäftigen.

Wenn auch die Festigkeitslehre mit anderen Aufgaben zu tun hat und andere Verfahren anwendet, wie die Statik starrer Körper, so steht sie darum doch nicht im Gegensatze zu dieser. Die Festigkeitslehre stützt sich vielmehr auf die Mechanik starrer Körper und ergänzt deren Lehren nur so weit, als nötig ist, um das wirkliche Verhalten der festen Körper in der Natur zu beschreiben. Wenn nämlich auch die Mechanik starrer Körper nur einen Teil des ganzen Erfahrungsgebietes umfaßt, so gelten doch ihre Lehren innerhalb ihres Bereichs genau für alle Körper, auch wenn sie an sich nicht starr sind. Für die Anwendung dieser Lehren genügt es stets, wenn sich der Körper nur im gegebenen Falle so verhält, als wenn er starr wäre. Dies trifft namentlich zu, wenn der ganze Körper ruht, denn die Ruhe des ganzen Körpers und hiermit aller Teile, aus denen er besteht, schließt in sich, daß keine Gestaltänderung eintritt, daß sich also der Körper wenigstens während der Zeit, in der wir ihn betrachten, so wie ein starrer verhält. Wir brauchen daher, um von der Statik starrer Körper Gebrauch machen zu können, nur abzuwarten, bis sich die Formänderung, die ein Körper unter einer Belastung erfuh, vollzogen hat und der Körper wieder zur Ruhe gelangt ist.

Der wichtigste Grundsatz, von dem die Festigkeitslehre ausgeht, läßt sich in die Worte fassen: Jeder Teil eines Körpers, wie er auch in Gedanken aus diesem abgegrenzt werden möge, ist selbst wieder als ein Körper anzusehen, auf den sich die allgemeinen Sätze der Mechanik anwenden lassen. Mancher wird vielleicht geneigt sein, diesen Grundsatz einfach als selbstverständlich hinzunehmen. Er ist es auch ohne Zweifel, wenn man die Trennung nicht nur in Gedanken, sondern in Wirklichkeit vornimmt. Er soll aber nicht nur auf wirkliche Bruchstücke angewendet werden, sondern auch auf Teile des Körpers, die dauernd mit dem Reste verbunden bleiben und die wir nur deshalb für sich genommen betrachten, weil wir dadurch Aufschlüsse über das Verhalten des ganzen Körpers zu gewinnen

suchen. In dieser Form kann der Satz nur als ein Erfahrungsgesetz hingestellt werden, zu dessen Rechtfertigung es vollständig genügt, daß es sich bisher unter allen Umständen unbedingt bewährt hat.

In der Mechanik der starren Körper wird in der Regel nur auf die äußeren Kräfte geachtet, also auf jene, die von anderen Körpern her auf den gegebenen einwirken. Bei allen Sätzen, die für das Gleichgewicht solcher Körper aufgestellt sind, kommen die inneren Kräfte, die den Zusammenhang des Körpers aufrecht erhalten, überhaupt nicht vor. Sobald wir nun einen beliebig abgegrenzten Teil des Körpers zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, müssen wir beachten, daß Kräfte, die zwischen diesem Teile und dem Reste des Körpers auftreten, zwar für den ganzen Körper immer noch als innere, für jenen Teil — oder auch für den Rest — aber als äußere aufzufassen sind. Wir werden uns also, um die Sätze der gewöhnlichen Statik auf das Gleichgewicht eines Teiles des Körpers anwenden zu können, vor allen Dingen zu fragen haben, von welcher Art die Kräfte sein können, die zwischen dem Teile und dem Reste des Körpers wirken.

Zu diesem Zwecke erinnern wir uns daran, daß die irdischen Körper, die wir untersuchen, in der Regel nur dann Kräfte von meßbarer Größe aufeinander übertragen, wenn sie miteinander in Berührung kommen. Ausnahmsweise kommen allerdings auch Kräfte vor, die dem Anscheine nach ohne vermittelndes Bindeglied in die Ferne wirken. Wenn wir also z. B. einen Teil eines Magneten betrachten, müssen wir auch auf die magnetischen Fernkräfte achten, die von dem Reste auf das betrachtete Stück übertragen werden und an diesem Stücke als äußere Kräfte auftreten. Mit solchen Fällen hat man sich aber nur ganz ausnahmsweise zu beschäftigen und wir wollen daher, um die Betrachtung nicht verwickelter zu machen, als es in der Regel nötig ist, weiterhin ganz von ihnen absehen.

Wenn dies geschieht, bleiben zwischen einem gegebenen Teile eines Körpers und dem Reste nur solche Kräfte übrig,

die mit den Druckkräften bei der Berührung verschiedener Körper zu vergleichen sind, die also ihren Sitz (d. h. ihre Angriffspunkte) an den Grenzflächen zwischen beiden Teilen haben. Freilich ist hier von vornherein darauf zu achten, daß diese Kräfte nicht notwendig Druckkräfte zu sein brauchen, sondern auch Zugkräfte sein können oder überhaupt jede beliebige Richtung und Größe haben können, da ein fester Körper nicht nur einer Annäherung, sondern auch einer Entfernung seiner einzelnen Teile und überhaupt jeder Formänderung einen Widerstand entgegensetzt.

Diese in den gedachten Grenzflächen übertragenen Kräfte bezeichnet man als Spannungen des Körpers. Da man sich auf jede beliebige Weise einen Teil des Körpers von dem Reste abgegrenzt denken kann, vermag man die Spannung an jeder Stelle und nach jeder Richtung hin als äußere Kraft an einem Teile des Körpers aufzufassen. Dadurch werden alle Spannungen der Untersuchung zugänglich und aus den Gleichgewichtsbedingungen, die für jedes beliebig abgegrenzte Körperelement erfüllt sein müssen, folgen sofort die Beziehungen zwischen den Spannungen nach verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Stellen des Körpers, die zur Grundlage für alle weiteren Untersuchungen dienen müssen.

Wird ein Stück des Körpers so abgegrenzt, daß seine Oberfläche mit der Oberfläche des ganzen Körpers zum Teile zusammenfällt (also so, daß das Stück nicht ganz aus dem Innern des Körpers herausgeschnitten ist), so treten an diesen Stellen keine Spannungen auf, dagegen können hier Druckkräfte von außen, also von anderen Körpern her übertragen werden. Die äußeren Kräfte müssen im Gleichgewichte mit den an den übrigen Teilen der Oberfläche des Körperstücks (also an den Schnittflächen) übertragenen Spannungen und mit den etwa auf die Masse des Körperstücks selbst wirkenden Fernkräften stehen. Da die äußeren Kräfte gewöhnlich als gegeben angesehen werden können, erhält man durch diese Gleichgewichtsbedingung ein Mittel, um die Größe der Spannungen unter gewissen Umständen zu berechnen.

§ 3. Die spezifische oder bezogene Spannung.

Wir betrachten zunächst den in Abb. 1 dargestellten Fall einer Zugstange, die durch die an beiden Enden angreifenden Kräfte P in Spannung versetzt wird. Denkt man sich durch einen Schnitt mm den links davon liegenden Teil des Körpers von dem Reste abgetrennt, so erfordert die Gleichgewichtsbedingung für diesen Teil, daß im Schnitte mm Spannungen übertragen werden, deren Resultierende gleich P ist und in die Richtung der Stabmittellinie fällt.

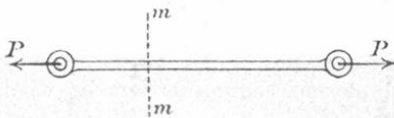


Abb. 1.

Freilich kennt man damit zunächst nur die gesamte durch die Schnittfläche mm übertragene Spannkraft, und man weiß noch nicht, wie sie sich auf die einzelnen Teile des Querschnitts verteilt. Solange man den Körper, was bisher immer noch zulässig war, als starr ansieht, fehlt in der Tat jedes Mittel, um selbst für diesen einfachsten Fall der Zugbeanspruchung einen Anhaltspunkt für die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zu finden. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, genau in demselben Sinne wie jene über die Druckverteilung auf die vier Beine eines Tisches, von der vorher die Rede war.

Wenn die Stange wirklich starr wäre, hätte es allerdings auch kaum ein Interesse, näheres über die Verteilung der Spannungen im Querschnitte zu erfahren, da sie für das physikalische Verhalten des Körpers ganz belanglos wäre. Der Widerstand, den ein Körper dem Zerreißen entgegenzusetzen vermag, ist aber immer nur begrenzt. Wenn ein Bruch eintritt, ist von vornherein nicht zu erwarten, daß dieser sich gleichzeitig über den ganzen Querschnitt erstreckt. Er kann auch an einer Stelle, an der die günstigsten Bedingungen dafür vorliegen, beginnen und sich dann erst über die übrigen Stellen ausbreiten. Um ein Urteil darüber zu erhalten, ob bei einer bestimmten Belastung ein Bruch zu erwarten ist, müssen wir

daher näheres über die Verteilung der gesamten Spannung über den Bruchquerschnitt zu erfahren suchen.

Dazu kann uns nur eine Untersuchung der Formänderungen verhelfen, die dem Bruche vorausgehen. Denn diese hängen in bestimmter Weise mit der Verteilung der Spannungen zusammen. Die Art dieses Zusammenhanges wird durch die besonderen Eigenschaften des belasteten Körpers bedingt und kann nur auf Grund der Erfahrung festgestellt werden. Wenn der Körper elastisch ist und der Schnitt *mm* von den Enden der Stange weit genug entfernt ist, läßt sich erwarten und findet sich auch durch den Versuch bestätigt, daß die elastische Dehnung in der Richtung der Stabachse für alle Punkte des Querschnitts *mm* ungefähr konstant ist, und daß dasselbe daher auch für die Spannungen zutrifft. Man findet dann, wieviel Spannung in der Flächeneinheit des Querschnitts übertragen wird, wenn man die ganze Kraft *P* durch die Maßzahl des Querschnitts *F* dividiert. Die in dieser Weise berechnete Spannung für die Flächeneinheit

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (1)$$

wird die spezifische oder bezogene (nämlich die auf die Flächeneinheit bezogene) Spannung genannt. Es hängt von dem Stoffe ab, aus dem die Zugstange besteht, wie groß die bezogene Spannung werden darf, ohne daß die Gefahr eines Bruches nahe gerückt ist. Die Berechnung der bezogenen Spannung ist daher in allen solchen Fällen eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre.

Nicht immer darf man indessen darauf vertrauen, daß diese einfachste, gleichförmige Verteilung der Spannungen eintritt. Ein wichtiges Beispiel dafür liefert die Prüfung von Zementkörpern auf Zugfestigkeit. Um einen Zement auf seine Zugfestigkeit zu prüfen, pflegt man einen Gewichtsteil mit drei Gewichtsteilen einer besonderen Sandsorte (sog. Normalsande) zu mischen, eine bestimmte Menge Wasser zuzusetzen, das Ganze gehörig durchzuarbeiten und den erhaltenen Mörtel in eine Metallform zu bringen, in der er durch Schläge eines (gewissen vereinbarten Anforderungen entsprechenden) Schlagwerks stark zusammengedrückt wird. Der so erhaltene Probe-

körper von der in Abb. 2 angegebenen Gestalt wird dann später, nachdem er erhärtet ist, in eine Maschine gebracht, in der der Körper von zwei Zangen erfaßt und durch eine abgewogene Belastung P abgerissen wird. Der Bruch erfolgt zwischen den Linien aa und bb in Abb. 2. Auch in diesem Falle pflegt man allerdings gewöhnlich die Festigkeit des Zements nach Gleichung (1) zu berechnen. Man erhält aber dabei nur einen Durchschnittswert der bezogenen Spannung σ für den ganzen Bruchquerschnitt und bleibt im Unklaren darüber, wie groß die bezogene Spannung an jener Stelle ist, an der der Bruch beginnt. Um sich davon zu überzeugen, daß diese viel höher ist, als der nach Gl. (1) berechnete Durchschnittswert, genügt es, ein Stück von derselben Gestalt aus Kautschuk herzustellen und dieses in derselben Weise auf Zug zu beanspruchen, wie es mit dem Zementkörper bei der Prüfung geschieht. Zieht man auf einer der ebenen Seitenflächen zwei feine Linien aa und bb , so bemerkt man, daß die Dehnung in der Nähe der Kanten viel größer wird als in der Mitte. Die vorher geraden Linien aa und bb werden etwas gekrümmt und zwar so, daß sie sich ihre konvexen Seiten zukehren. Bei einem Versuche, den ich in dieser Weise ausführte, wobei ich die Dehnungen zwischen aa und bb in verschiedenen Abständen von der Mitte mit dem Mikroskope maß, fand ich, wenn die Dehnung in 11,5 mm Abstand von der Mitte, d. h. in $1\frac{1}{2}$ mm Abstand von der Kante gleich 100 gesetzt wird,

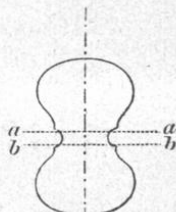


Abb. 2.

im Abstände von der Mitte =	0	4	8	11,5 mm
die Dehnungen	= 24	34	53	100.

Die Dehnung an der Kante ist also mehr als viermal so groß als jene in der Mitte und daraus folgt, daß jedenfalls auch die Spannung in der Nähe der Kante viel größer ist als in der Mitte.

Bei einem Zementkörper sind die elastischen Dehnungen, die dem Bruche vorausgehen, weit geringer als bei einem Kautschukkörper und daher einer unmittelbaren Messung, wenigstens bei so kleinen Körpern, wie sie zu den üblichen Festigkeitsprüfungen hergestellt werden, nicht zugänglich. Jedenfalls wissen wir aber aus anderen Versuchen, daß auch Zementkörper vor dem Bruche Dehnungen erfahren, die der Art nach in ganz ähnlicher Weise mit den Spannungen zusammenhängen, wie bei dem Kautschuk. Wir müssen daher schließen, daß der Vorgang der elastischen Dehnung, wenn auch die absoluten Beträge viel kleiner sind, als beim Kautschuk, doch im ganzen ein ähnliches Gesetz befolgt wie bei dem vorher be-

schriebenen Versuche. Freilich kann man aus den Ergebnissen dieses Versuches nicht unmittelbar erkennen, in welcher Weise sich die Spannung bei einem Zementkörper in Wirklichkeit genau über den Querschnitt verteilt. Darüber kann man sich auf andere Art ein Urteil verschaffen. Hier kommt es aber nur darauf an, zu zeigen, erstens mit welcher Vorsicht man bei der Berechnung der Spannungen verfahren muß, und zweitens, daß ein zuverlässiges Urteil über die Art der Spannungsverteilung immer erst aus einer Untersuchung der damit verbundenen Formänderung des Körpers gewonnen werden kann.

Mit der eigentlichen Berechnung der Spannungen haben wir es an dieser Stelle noch nicht zu tun. Ich habe diese Betrachtungen nur angestellt, um den Begriff der bezogenen Spannung in das rechte Licht zu setzen. Wenn eine gleichförmige Verteilung der Spannungen über eine größere Fläche nicht zu erwarten ist, müssen wir, um die bezogene Spannung an einer bestimmten Stelle dieser Fläche zu erhalten, einen kleinen Teil ΔF der Fläche an dieser Stelle abgrenzen und jenen Teil ΔP der ganzen Kraft P , der in ΔF übertragen wird, nach Gl. (1) durch ΔF dividieren. Wir erhalten dann den Durchschnittsbetrag von σ für die Fläche ΔF und dieser fällt um so genauer mit dem Werte von σ an der ins Auge gefaßten Stelle zusammen, je kleiner wir ΔF wählen. Als Definition der bezogenen Spannung an einem bestimmten Punkte des Querschnitts haben wir daher bei ungleichförmiger Spannungsverteilung den Grenzwert

$$\sigma = \lim \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \quad (2)$$

anzusehen, woraus auch umgekehrt

$$dP = \sigma dF \quad (3)$$

folgt.

Bisher setzte ich in Anlehnung an das einfache zur Erläuterung gewählte Beispiel stillschweigend voraus, daß die Spannungen σ senkrecht zum gewählten Querschnitte gerichtet seien. Im allgemeinen ist dies aber keineswegs der Fall. Wenn die in einem Flächenelemente dF übertragene Kraft irgendeinen Winkel mit der Normalen zu dF bildet, können wir uns die Kraft und daher auch die bezogene Spannung in

zwei Komponenten zerlegt denken, von denen eine in die Richtung der Normalen, die andere in die Fläche dF selbst fällt. Die erste heißt Normalspannung und zwar Zug- oder Druckspannung, je nachdem sie einer Entfernung oder einer Annäherung der beiden Teile des Körpers, zwischen denen der Schnitt gelegt ist, widerstrebt, und die andere die Schubspannung. Für jene werde ich den Buchstaben σ , für diese den Buchstaben τ gebrauchen. Wenn das Flächenelement gegeben ist, wird die in ihm übertragene Normalspannung vollständig durch die Angabe der Größe von σ und eines Vorzeichens beschrieben, durch das zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden wird. Ich werde den Zugspannungen stets das positive Vorzeichen geben. Zur Beschreibung der Schubspannung muß dagegen noch eine nähere Angabe über die Richtung von τ in der Fläche dF gemacht werden. Gewöhnlich ist es am bequemsten, zu diesem Zwecke auf der Fläche dF zwei zueinander senkrechte Richtungen zu ziehen und τ in zwei Komponenten nach diesen beiden Richtungen zu zerlegen. Im ganzen ist dann die Angabe von drei Komponenten erforderlich, um die durch die Fläche dF übertragene Spannung zu kennzeichnen.

Es wäre freilich ein Irrtum, wenn man annehmen wollte, daß der Spannungszustand des Körpers an der fraglichen Stelle durch die Angabe dieser drei Komponenten vollständig festgesetzt wäre. Dies ist keineswegs der Fall: um vollständig darüber unterrichtet zu sein, müssen wir diese Komponenten nicht nur für die Fläche dF , sondern auch für jedes andere Flächenelement anzugeben vermögen, das in beliebiger Stellung durch den gegebenen Punkt des Körpers gelegt werden kann.

Auf den ersten Blick erscheint es nun, als wenn dazu unendlich viele Angaben erforderlich wären. Man überzeugt sich aber leicht, daß es schon vollständig genügt, wenn man die Spannungskomponenten für drei verschiedene Stellungen von dF anzugeben vermag; für jedes vierte Flächenelement, das man durch den gegebenen Punkt legen mag, ist die Spannung dadurch schon mitbestimmt. Um dies zu erkennen,

denke man sich ein unendlich kleines Tetraeder aus dem Körper abgegrenzt, so daß der gegebene Punkt etwa die eine Ecke dieses Tetraeders bildet. Dieses Tetraeder sei der Teil des Körpers, auf den wir nach unserem gewöhnlichen Verfahren die Gleichgewichtssätze der Statik in Anwendung bringen wollen. Außerdem sollen die drei an den gegebenen Punkt angrenzenden Flächen in jenen Stellungen gezogen sein, für die wir die Spannungskomponenten bereits als gegeben betrachten, während die vierte Fläche ganz beliebige Stellung haben kann. Diese vierte Fläche geht nun zwar nicht durch den gegebenen Punkt, und bei einigem Abstände von ihm wird auch die Spannung, die durch sie übertragen wird, etwas verschieden sein von der Spannung einer parallel zu ihr durch den gegebenen Punkt gelegten Fläche, die wir eigentlich berechnen wollen. Wenn wir uns aber die Kanten des Tetraeders immer mehr verkleinert denken und die vierte Fläche dadurch dem Punkte immer näher rücken, wird der Unterschied immer mehr abnehmen und in der Grenze ganz verschwinden. Dies ist der Grund, weshalb wir uns das Tetraeder unendlich klein denken müssen, denn im anderen Falle könnten wir offenbar auch die Gleichgewichtsbedingungen für ein Tetraeder von endlicher Kantenlänge mit demselben Erfolge untersuchen. In der Tat muß hier schon allgemein gesagt werden, daß es in der Festigkeitslehre sehr oft zulässig ist, sich jene Körper, die als unendlich klein bezeichnet werden, auch in endlichen Abmessungen vorzustellen, ohne daß dadurch der Genauigkeit der Betrachtung ein erheblicher Abbruch geschehen würde. Im einzelnen Falle wird man sich immer leicht ein Urteil darüber verschaffen können, wie klein man die Kantenlängen mindestens wählen muß, ohne einen merklichen Fehler dadurch zu begehen, daß sich der betrachtete Spannungszustand etwas ändert, wenn man von der gegebenen Stelle um ein endliches Stück abrückt.

An dem vorgelegten Tetraeder wirken nun fünf äußere Kräfte, die im Gleichgewichte miteinander stehen müssen, nämlich die Spannungen, die auf den vier Seitenflächen über-

tragen werden, und die Fernkraft, die von außen her auf die Masse des Tetraeders einwirkt. Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Festigkeitslehre wird diese nur durch das Gewicht des Tetraeders gebildet. Will man Schwingungsbewegungen oder überhaupt Bewegungen untersuchen, die der Körper ausführt, so kommt noch eine Kraft hinzu, die man, wie im vierten Bande näher auseinandergesetzt werden wird, nach dem d'Alembertschen Principe anbringen muß, also z. B. eine Zentrifugalkraft — oder allgemein eine sogenannte Trägheitskraft — um den Fall der Bewegung auf den Gleichgewichtsfall zurückzuführen.

Wie dies aber auch sein möge, jedenfalls ist die an der Masse des Tetraeders unmittelbar angreifende Kraft dem Volumen des Tetraeders proportional, während die Spannungen an den Seitenflächen den Flächeninhalten proportional sind. Nun haben wir vorher schon gesehen, daß wir uns, um genauere Resultate zu erhalten, die Abmessungen des Tetraeders immer mehr verkleinert denken müssen, so daß sie in der Grenze zu Null werden. Bei dieser Verkleinerung nimmt aber das Volumen viel schneller ab, als die Inhalte der Seitenflächen, da jenes der dritten, diese aber nur der zweiten Potenz der Längen proportional sind. Durch hinreichende Verkleinerung werden wir es also immer dahin bringen können, daß die dem Volumen proportionale Kraft gegenüber den Spannungen an den Seitenflächen ganz unmerklich wird.

Wir haben es hier mit einer Überlegung zu tun, die überall anwendbar ist, wo der Einfluß von Kräften, die den Massen proportional sind, mit dem verglichen werden soll, der von Oberflächenkräften herrührt. So wird z. B. ein kleiner Stein im fließenden Wasser leicht fortgerissen, während ein ihm geometrisch ähnlicher von großen Abmessungen unter den gleichen Bedingungen liegen bleibt, weil der Wasserdruck nur mit der zweiten Potenz, das Gewicht des Steins aber mit der dritten Potenz der Längen abnimmt. Derselbe Grund bedingt auch, daß ein Elefant im allgemeinen schwerfälliger sein muß, als ein Tier von geringer Körpergröße, denn das Eigengewicht, mit dem der Elefant bei seinen Bewegungen zu tun hat, steht bei ihm in einem ungünstigeren Verhältnisse zu den Querschnitten der Muskeln, durch die die bewegende Kraft übertragen wird.

Übrigens ist in der Tat bei den meisten Anwendungen der Festigkeitslehre das Eigengewicht des vorher betrachteten Tetraeders selbst dann schon ganz unmerklich, wenn die Kantenlängen noch nach Zentimetern zählen. Das Eigengewicht des Tetraeders berechnet sich dann auf Gramme, während die Spannungen an den Seitenflächen sich oft genug auf tausende von Kilogrammen belaufen. Um die Spannungen an solchen kleinen Stücken unmittelbar miteinander zu vergleichen, braucht man daher in erster Annäherung auf das Eigengewicht keine Rücksicht zu nehmen. Erst dann, wenn man etwa auf sehr kleine Unterschiede achten will, die dadurch bedingt werden, daß man um ein kleines Stück in einer gewissen Richtung weiter geht, wird es nötig, auch auf die den Massen proportionalen Kräfte zu achten.

Mit Rücksicht auf diese Erwägungen bleibt daher nur noch das Gleichgewicht der Spannungen an den vier Seitenflächen des Tetraeders für sich genommen zu untersuchen. Das Gleichgewicht erfordert, daß die geometrische Summe dieser vier Spannungen gleich Null ist. Wenn drei Spannungen gegeben sind, folgt daher Größe und Richtung der vierten durch Zeichnen eines windschiefen Kräftevierecks oder nach dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte oder nach irgend einer anderen Methode der gewöhnlichen Statik.

Die genannte Bedingung genügt freilich noch nicht, um das Gleichgewicht eines Körpers unter der Wirkung dieser vier Kräfte sicher zu stellen. Dazu gehört noch, daß sich die vier Richtungen entweder in einem Punkte schneiden oder daß wenigstens auf andere Art auch ein Gleichgewicht gegen Drehung gesichert ist. Dies weist uns darauf hin, daß schon die Spannungen auf drei gegebenen Flächenelementen dF gewisse Bedingungen erfüllen müssen, wenn sie überhaupt miteinander verträglich sein sollen. Man kann diese Bedingungen für das Tetraeder ableiten, indem man Momentengleichungen anschreibt. Wir wollen aber dazu einen bequemer Weg wählen, indem wir an Stelle des Tetraeders ein unendlich kleines Parallelepiped betrachten.

§ 4. Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten.

Wir sahen vorher, daß der Spannungszustand, in dem sich der Körper an einer gewissen Stelle befindet, durch Angabe der Spannungskomponenten für drei beliebige Flächenelemente von verschiedener Stellung, die man durch den gegebenen Punkt legen kann, eindeutig beschrieben wird. Es steht uns frei, diese Flächenelemente so auszuwählen, wie es für die weitere Untersuchung am bequemsten ist. Dieser Umstand weist uns von selbst auf die Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems hin. In der Festigkeitslehre wird nicht viel damit gewonnen, wenn man an Stelle von Koordinaten oder Komponenten mit den gerichteten Größen selbst rechnet, was in den meisten übrigen Teilen der Mechanik von Vorteil ist. Ich werde daher hier überall der ohnehin bekanntesten Cartesischen Methode, der Untersuchung mit Koordinaten und Komponenten den Vorzug geben und nur ganz gelegentlich einmal auf die andere Art der Darstellung hinweisen.

In Abb. 3 sei O der Punkt des Körpers, für den der Spannungszustand untersucht werden soll. Er möge die Ecke eines unendlich kleinen Parallelepipeds bilden, dessen aufeinander senkrecht stehende Kanten in die Richtungen der Koordinatenachsen OX , OY , OZ gelegt sind. Unendlich klein müssen wir uns das Parallelepiped wieder deshalb denken, weil sonst die Spannungen an verschiedenen Stellen der von O ausgehenden Seitenflächen merklich von einander abweichen könnten. So aber können wir ohne in Betracht kommenden Fehler annehmen, daß die Spannungen über jede Seitenfläche gleichmäßig verteilt sind. Die Resultierende der Spannungen für jede Seitenfläche geht dann auch durch deren Schwerpunkt, also durch die Mitte, und die Größe ist nach Gleichung (3) gleich dem Produkte aus der bezogenen Spannung für die betreffende Flächenstellung und dem Inhalte des Rechtecks.

Die Normalspannungen gehen auf allen Seitenflächen schon von selbst in den Richtungen der Koordinatenachsen, und auch

die Schubspannungen wollen wir uns an jeder Fläche in zwei Komponenten zerlegt denken, die in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen. Wir haben dann an den sechs Seitenflächen des abgegrenzten Körperstücks zusammen 18 Spannungskomponenten, deren Gleichgewicht zu untersuchen ist, denn in erster Annäherung brauchen wir aus den in § 3 auseinander gesetzten Gründen auf die Massenkraft, die sonst noch dazu käme, nicht zu achten.

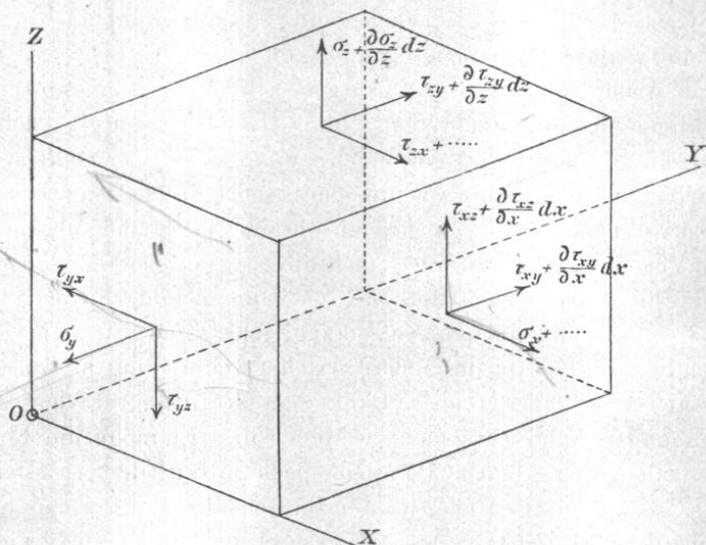


Abb. 3a.

Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, in welchen Beziehungen die Spannungen auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds zueinander stehen. In jeder Trennungsfläche, die wir uns in einem Körper gezogen denken können, grenzen zwei Teile des Körpers aneinander, zwischen denen sich die Spannungen durch die Trennungsfläche übertragen. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung ist die Kraft, die etwa *A* auf *B* überträgt, ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die von *B* auf *A* wirkt. Wir wollen uns, um beide Teile deutlich voneinander unterscheiden zu können, eine Normale zur Trennungsfläche nach einer der

beiden möglichen Richtungen gezogen denken. Für den einen Teil geht diese Normale dann nach außen hin und für den anderen nach innen. Eine Zugspannung ist für jeden der beiden Teile eine Kraft, deren Pfeil mit der Richtung der äußeren Normale dieses Teiles übereinstimmt. Betrachten wir nämlich den anderen Teil, so kehrt sich nach dem Wechselwirkungsgesetze der Pfeil der übertragenen Spannung um, gleichzeitig ist aber nun die entgegengesetzte Richtung der Normalen als die äußere zu bezeichnen, und wir können daher in der Tat die für beide Teile zutreffende, eindeutige Aussage machen, daß eine Normalspannung immer als Zugspannung, also positiv zu rechnen ist, wenn sie in die Richtung der äußeren Normale fällt.

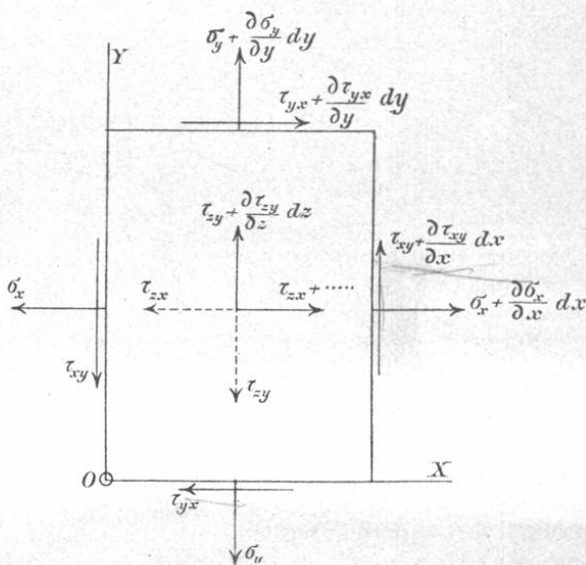


Abb. 3b.

Nun fasse man in Abb. 3 etwa die beiden sich gegenüberliegenden Seitenflächen ins Auge, die senkrecht zur X-Achse stehen. Die äußere Normale der einen geht in der Richtung der positiven X-Achse, die der anderen in der entgegengesetzten Richtung. Denkt man sich beide Flächen immer näher aneinander gerückt, so wird zuletzt die in der einen Fläche übertragene Spannung nur einfach die nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion auftretende Gegenwirkung der zur anderen gehörigen Spannung sein. In erster Annäherung können wir daher bei je zwei sich gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds die Spannungen als gleich groß und entgegengesetzt gerichtet betrachten. Nur

wenn man absichtlich auf die kleinen Unterschiede achten will, die dadurch zu Stande kommen, daß die eine Fläche etwas entfernt von der zu ihr parallelen ist, wird man die in Abb. 3 eingeschriebenen genaueren Ausdrücke zu benutzen haben.

In Bezug auf die Richtungen, die als positiv anzusehen sind, ist noch folgendes zu beachten. Bei jenen Seitenflächen, deren äußere Normalen in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen gehen, zählt die Normalspannung σ ebenfalls in dieser Richtung positiv, denn wir haben schon vorher festgesetzt, daß Zugspannungen immer positiv gerechnet werden sollen. Wir kommen daher zur einfachsten Übereinkunft über die Wahl der Vorzeichen, wenn wir bestimmen, daß nicht nur σ , sondern auch die beiden Komponenten der Schubspannung τ auf jenen Flächen in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen positiv gezählt werden sollen, deren äußere Normalen in die positiven Achsenrichtungen fallen. Bei den gegenüberliegenden Flächen sind dann natürlich alle Pfeile umzukehren, wenn die Spannungskomponenten positive Werte haben. Nach diesen Grundsätzen sind die Pfeile in Abb. 3, mit der man sich recht vertraut machen möge, eingetragen. In der axonometrischen Zeichnung sind die Spannungen auf den drei verdeckt liegenden Seitenflächen weggelassen. Von den drei sichtbaren Seitenflächen hat die in der XZ -Ebene liegende eine äußere Normale, die der positiven Y -Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Daher sind hier auch die Pfeile von σ und den beiden Komponenten von τ den Koordinatenachsen entgegengesetzt gerichtet gezeichnet. Bei den beiden anderen sichtbaren Seitenflächen gehen dagegen die Pfeile in den positiven Achsenrichtungen, weil dies auch von den äußeren Normalen zutrifft.

Die den Spannungskomponenten σ und τ angehängten Ordnungszeiger reden eine leicht verständliche Sprache. Jedes σ trägt nur einen Zeiger, denn hier genügt es, die Stellung des Flächenelementes anzugeben, zu dem σ gehört, und dies geschieht, indem die Achsenrichtung angemerkt wird, zu der das Flächenelement senkrecht steht und zu der σ daher parallel geht. Auch der erste der beiden Zeiger der Schubspannungs-

komponenten τ bezieht sich auf die Stellung des zugehörigen Flächenelementes und stimmt daher auf jeder Fläche mit dem Zeiger von σ überein. Der zweite Zeiger gibt dagegen an, welcher Achsenrichtung die betreffende Komponente parallel geht.

Zur Erläuterung von Abb. 3 muß ich endlich noch auf einen Umstand aufmerksam machen, an den der Leser freilich schon längst gedacht haben wird. Von den drei sichtbaren Seitenflächen geht nur eine durch den Punkt O , in dem der Spannungszustand untersucht werden soll. Hier konnte man sich damit begnügen, die Spannungskomponenten einfach mit σ_y , τ_{yx} und τ_{yz} zu bezeichnen. Freilich sieht man dabei schon von unendlich kleinen Unterschieden ab, die sich daraus ergeben, daß der Spannungszustand nicht über die ganze Rechteckfläche genau mit dem in O übereinstimmt. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommen aber dieselben Unterschiede ebenfalls vor und gerade weil von beiden Flächen in dieser Hinsicht dasselbe gilt, ist es nicht nötig, auf diese unendlich kleinen Unterschiede weiter zu achten. Dagegen kann es nötig werden, den Unterschied hervorzuheben, der dadurch entsteht, daß die gegenüberliegende Seitenfläche um das Stück dy in der Richtung der Y -Achse gegen die vordere verschoben ist. Wir müssen, um diese feinen Abstufungen zu berücksichtigen, der Normalspannung σ_y auf der gegenüberliegenden Seitenfläche noch ein Differential zufügen, so daß wir dort

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

erhalten und ähnliches gilt für die anderen Komponenten. Aus dem Grundrisse in Abb. 3b ist dies ersichtlich. Ebenso sind in der axonometrischen Figur die Spannungskomponenten auf den beiden sichtbaren Seitenflächen, die nicht durch den Punkt O gehen, schon mit den Zuwüchsen versehen, die den Abständen von den gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Wo der Platz nicht ausreichte, sind diese Differentiale auch nur durch Punkte angedeutet, wie in $\tau_{zx} + \dots$ an Stelle von

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz.$$

Nachdem man sich mit allen diesen Einzelheiten, die in Abb. 3 zu berücksichtigen waren, hinreichend vertraut gemacht hat, ist schon der erste und wichtigste Schritt zum Verständnisse der Grundgleichungen der Festigkeitslehre geschehen; diese ergeben sich nämlich aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte am Parallelepipet. Zunächst wollen wir das Gleichgewicht gegen Drehung ins Auge fassen, da wir schon in § 3 erkannten, daß wir hierdurch zu den Bedingungen geführt werden, die zwischen den neun Spannungskomponenten $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} \tau_{yx} \tau_{zx} \tau_{zy}$ für die drei durch den Punkt O gelegten Flächenelemente bestehen müssen, damit sie miteinander verträglich sind. Um z. B. zu erkennen, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit keine Drehung um eine zur Z -Achse parallele Grade eintreten kann, projizieren wir den Körper mit allen daran angreifenden Kräften auf die XY -Ebene, wie dies in Abb. 3b bereits geschehen ist. Wir sehen dann, daß zwei Kräftepaare vorkommen, die eine solche Drehung in entgegengesetzter Richtung anstreben. Ein Kräftepaar wird durch die Spannungen τ_{yx} auf den beiden Rechteckseiten gebildet, deren Normalen zur Y -Achse parallel gehen. Die Größe jeder Kraft dieses Paares wird gefunden, wenn wir die bezogene Spannung τ_{yx} mit dem Inhalte des Flächenelementes, über das sie verteilt ist, multiplizieren; sie ist also gleich $\tau_{yx} \cdot dx dz$ zu setzen. Das statische Moment des Kräftepaares ist daher gleich

$$\tau_{yx} \cdot dx dy dz.$$

Ebenso finden wir für das Moment des Kräftepaares der Schubspannungen τ_{xy} , die über die beiden zur X -Achse senkrechten Seitenflächen verteilt sind,

$$\tau_{xy} \cdot dx dy dz.$$

Die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen erfordert daher, daß

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ist*). Natürlich läßt sich dieselbe Betrachtung auch für eine

*) Im Innern eines Magneten ist dieser Schluß nicht zulässig, da hier außer den Schubspannungen noch ein auf Verdrehen des ganzen

Drehung um jede der beiden anderen Koordinatenachsen wiederholen, und wir erhalten daher im ganzen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (4)$$

die einen der wichtigsten Sätze der Festigkeitslehre aussprechen, den wir als den Satz von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen bezeichnen wollen.

Man kann ihn auch noch in etwas allgemeinerer Form aufstellen, wenn man an Stelle des rechtwinkligen Parallelepipeds in Abb. 3 ein schiefwinkliges untersucht; ich sehe aber davon ab, dies weiter auszuführen, da nicht viel dabei herauskommt. Ferner erwähne ich noch, daß viele Schriftsteller für die einander gleichen Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{yx} eine einheitliche Bezeichnung, nämlich τ_z einführen, wobei jetzt der Zeiger z darauf hinweisen soll, daß jene Schubspannungen gemeint sind, die sich im Gleichgewichte gegen eine Drehung um die Z -Achse halten, und ähnlich für die übrigen. Man spart hierbei zwar das Anschreiben eines zweiten Zeigers; es will mir aber scheinen, daß dieser Vorteil nicht erheblich genug ist, um die anschaulichere Schreibweise mit zwei Zeigern aufzugeben. Ich werde daher diese beibehalten.

Wir haben jetzt erkannt, daß zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes des Körpers in einem gegebenen Punkte O die Angabe von sechs Zahlen erforderlich ist. Diese Anzahl kann auch durch weitere Betrachtungen nicht herabgedrückt werden. Man pflegt diese Tatsache auch wohl mit den Worten auszusprechen, daß ∞^6 verschiedene Spannungszustände möglich sind, oder daß die Reihe aller Spannungszustände eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bildet.

Wir wollen jetzt noch das Gleichgewicht des Parallelepipeds gegen Verschieben in den drei Achsenrichtungen betrachten. Dieses wird schon durch das Gesetz der Aktion und Reaktion verbürgt, wenn wir auf die sehr kleinen Unterschiede

Volumenelementes hinwirkendes Moment der magnetischen Kräfte auftritt, das von derselben Größenordnung sein kann. Von solchen ausnahmsweise vorkommenden Fällen soll aber hier stets abgesehen werden.

der Spannungen an gegenüberliegenden Seitenflächen keine Rücksicht nehmen, wie es bei der vorigen Betrachtung geschehen konnte. Wir wollen aber dabei nicht stehen bleiben, weil wir bei dieser Gelegenheit noch erfahren können, in welchen Beziehungen die Zuwüchse der Spannungskomponenten bei verschiedenen Fortschreitungsrichtungen zueinander stehen müssen. Natürlich ist es jetzt, wo wir nur auf die kleinen Unterschiede der Spannungen auf gegenüberliegenden Flächen zu achten haben, nicht mehr zulässig, die dem Volumen des Parallelepipedes proportionale Fernkraft, also etwa das Gewicht des Körperchens, zu vernachlässigen. Dieses ist zwar unendlich klein gegen die Spannungen selbst, aber durchaus vergleichbar mit den kleinen Unterschieden zwischen den Spannungen auf gegenüberliegenden Seiten. Ich denke mir die auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft in drei Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegt, die ich mit X, Y, Z bezeichne und positiv rechne, wenn sie mit den positiven Achsen gleichgerichtet sind.

In der Richtung der X -Achse kommen jetzt an dem Körperchen sieben Kräfte vor, deren Summe gleich Null sein muß, damit das Gleichgewicht gesichert sei. An jeder Seitenfläche des Parallelepipedes haben wir eine zur X -Achse parallele Spannungskomponente, und dazu kommt die Komponente der Massenkraft im Betrage $X dx dy dz$. Die Spannungskomponenten kann man paarweise zusammenfassen. Auf dem durch den Punkt O gehenden, zur X -Achse senkrechten Rechtecke haben wir die Komponente σ_x der bezogenen Spannung, also im ganzen den Betrag $\sigma_x \cdot dy dz$ einer Kraft, die der positiven X -Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommt dazu die um ein Differential verschiedene und nach der positiven X -Achse hin gerichtete Normalspannung. Fassen wir beide zusammen, so behalten wir einen Überschuß von der Größe

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx dy dz$$

in der Richtung der positiven X -Achse. Ebenso tragen die

beiden zu Y -Achse senkrechten Seitenflächen zusammen genommen das Glied

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx dy dz$$

zur Komponentensumme in der Richtung der X -Achse bei und ähnlich die beiden letzten Seitenflächen. Schreiben wir nun die Bedingung an, daß die algebraische Summe aller parallel zur X -Achse gehenden Komponenten verschwinden muß, so erhalten wir nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $dx dy dz$ die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Die beiden letzten sind ebenso gebildet, wie die erste, die wir eben ableiteten, und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y - und der Z -Achse aus. Es ist zwar nützlich, sie zur Übung ebenfalls aus Abb. 3 abzulesen, aber nicht notwendig, da keine Koordinatenachse vor den anderen etwas voraus hat und was für die eine bewiesen ist, daher auch für die anderen gelten muß. Es genügt daher vollständig, sich davon zu überzeugen, daß die beiden anderen Gleichungen aus der ersten hervorgehen, wenn man die Koordinaten x, y, z zyklisch miteinander vertauscht.

§ 5. Das Gleichgewicht am Tetraeder.

Wir wollen jetzt die am Schlusse von § 3 in allgemeinen Umrissen angestellte Betrachtung auch noch in einen Satz von Gleichungen umprägen. Dazu beziehe ich mich auf Abb. 4, in der das Tetraeder in Aufriß und Grundriß gezeichnet ist. Als gegeben werden die Spannungskomponenten betrachtet, die zu den Stellungen der drei Koordinatenebenen gehören; verlangt wird die Berechnung der Spannungskomponenten auf der in beliebiger Stellung gezogenen vierten Tetraederfläche, deren äußere Normale mit n bezeichnet ist. Es ist

am bequemsten, die Spannung für diese Fläche, die mit p_n bezeichnet werden möge, zunächst in drei Komponenten zu zerlegen, die den Koordinatenachsen parallel laufen. In der Abbildung sind diese Komponenten mit p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} bezeichnet; die Zeiger haben also dieselbe

Bedeutung wie bei den früheren Betrachtungen. Nachdem diese Komponenten gefunden sind, kann man leicht auch die Normalspannung σ_n und die in gegebenen Richtungen verlaufenden Schubspannungskomponenten daraus ableiten, wenn sich dies als nötig herausstellt.

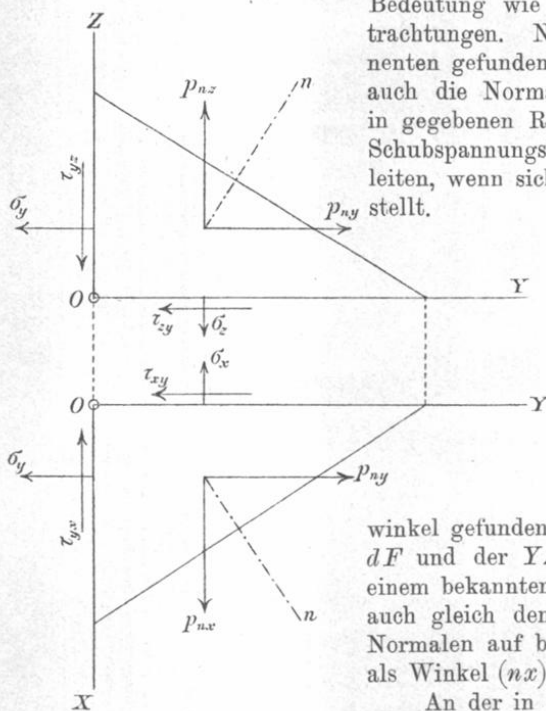


Abb. 4.

Die Fläche der vierten Tetraederseite sei gleich dF ; die Flächen der drei anderen bilden die Projektionen von dF auf die Koordinatenebenen und werden daher aus dF durch Multiplikation mit den Kosinus der Neigungswinkel gefunden.

Der Winkel zwischen dF und der YZ -Ebene ist aber nach einem bekannten Satze der Stereometrie auch gleich dem Winkel zwischen den Normalen auf beiden Ebenen, der kurz als Winkel (nx) bezeichnet werden soll.

An der in die YZ -Ebene fallenden Seitenfläche des Tetraeders kommt eine in der Richtung der negativen X -Achse verlaufende Spannungskomponente σ_x vor, die nach Multiplikation mit dem Flächeninhalte dieser Tetraederseite den Beitrag

$$\sigma_x dF \cos(nx)$$

zur Komponentengleichung liefert. Von der Seitenfläche in der XZ -Ebene stammt ebenso, wie man aus Abb. 4 unmittelbar ablesen kann, der Beitrag

$$\tau_{yx} dF \cos(ny)$$

und von der Seitenfläche in der XY -Ebene der Beitrag

$$\tau_{zx} dF \cos(nz),$$

wobei zu beachten ist, daß alle diese drei Komponenten, sofern die

Spannungskomponenten σ und τ alle das positive Vorzeichen haben, nach der über die Richtungsbezeichnungen getroffenen Übereinkunft in der Richtung der negativen X-Achse gehen. Die Spannungskomponente p_{nx} auf der vierten Tetraederseite wollen wir, da hierüber bisher noch nichts festgesetzt ist, als positiv betrachten, wenn sie in die Richtung der positiven X-Achse fällt. Die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der X-Achse erfordert nun, daß die Komponente $p_{nx}dF$ der Summe der vorher aufgeführten Kräfte, die in entgegengesetzter Richtung gehen, gleich ist. Nach Wegheben des gemeinsamen Faktors dF erhalten wir daher die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Die beiden folgenden ergeben sich aus der ersten durch zyklische Vertauschung von x, y, z und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und Z-Achse aus.

Damit ist die Aufgabe gelöst. Man wendet die Gleichungen (6) namentlich dann an, wenn die vierte Tetraederseite in die Oberfläche des ganzen Körpers fällt. Unter den p sind dann die Druckkräfte zu verstehen, die von außen her auf den ganzen Körper übertragen werden. Diese sind gewöhnlich gegeben; sehr häufig sind sie gleich Null und die vorigen Gleichungen geben dann in der Form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) &= 0 \\ \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) &= 0 \\ \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

die Beziehungen an, die zwischen den Spannungskomponenten in der Nähe einer freien Oberfläche des ganzen Körpers bestehen müssen.

Der denkende Anfänger wird leicht auf die Frage verfallen, weshalb ich dabei stehen bleibe, die Gleichgewichtsbedingungen für Körperelemente von der Gestalt eines Parallelepipeds oder eines Tetraeders zu untersuchen. Für ihn bemerke ich hier noch, daß in der Tat nichts im Wege steht, das Gleichgewicht eines beliebig gestalteten Körperelements in derselben Weise zu behandeln. Man kommt aber dabei zu keinen neuen Resultaten.

§ 6. Der ebene Spannungszustand.

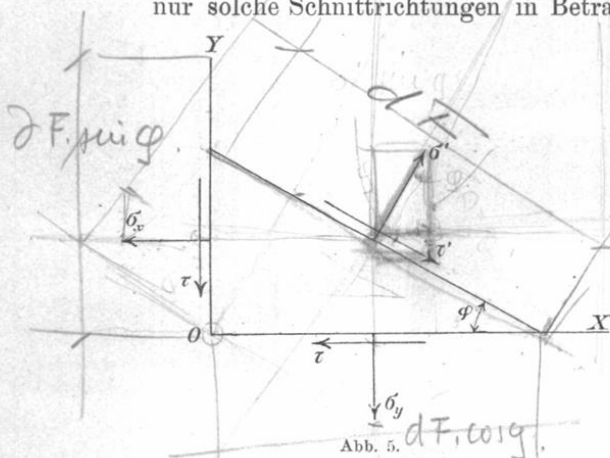
Bisher haben wir den allgemeinsten Spannungszustand untersucht, der überhaupt in einem Körper auftreten kann. Die Fälle, mit denen man praktisch zu tun bekommt, sind aber

gewöhnlich viel einfacher. Aus diesem Grunde wollen wir die weitere Untersuchung an dieser Stelle auf den Fall des sogenannten ebenen Problems beschränken. Man versteht darunter einen Spannungszustand, bei dem nach einer bestimmten Richtung hin überhaupt keine Spannungskomponenten auftreten. Um diesen Fall weiter zu untersuchen, wollen wir uns das Koordinatensystem so gewählt denken, daß die Z -Achse in die soeben bezeichnete Richtung fällt. Der Fall des ebenen Problems wird dann durch die Aussagen

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (8)$$

gekennzeichnet. Von den sechs Spannungskomponenten, die im allgemeinen zur Beschreibung des Spannungszustandes erforderlich sind, unterscheiden sich demnach hier nur noch drei von Null, nämlich σ_x , σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wofür wir jetzt, da keine Verwechslung mehr möglich ist, kurz τ schreiben können.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, wie man beim ebenen Problem die Schnittrichtung wählen muß, damit die Spannungen ihre größten Werte annehmen. Dabei genügt es, nur solche Schnittrichtungen in Betracht zu ziehen, die parallel



zur Z -Achse gehen. Wir denken uns ein dreiseitiges Prisma abgegrenzt, dessen Grundfläche in Abb. 5 angegeben ist, während die zur Z -Achse parallelen Kanten die Längen dz haben mögen. Auf die beiden Grundflächen wirken nach den Gleichungen (8) überhaupt keine Kräfte. Die Spannungskomponenten an

den drei Seitenflächen sind in die Abbildung nach jenen Richtungen eingetragen, die als positiv gerechnet werden. Die Spannung auf der unter dem Winkel φ gegen die X -Achse ge-

neigten Seitenfläche ist in die Normalkomponente σ' und die Schubspannung τ' zerlegt. Die letzte kann ebenfalls keine Komponente in der Richtung der Z -Achse haben, weil an den übrigen Seitenflächen keine Kraft in dieser Richtung, die mit ihr Gleichgewicht halten könnte, vorkommt; sie ist also ebenso wie σ' und alle übrigen Spannungen parallel zur XY -Ebene.

Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Verschieben nach der X -Achse liefert, wenn wir den Inhalt der schief zu den Achsen stehenden Seitenfläche mit dF bezeichnen, die Bedingungsgleichung

$$\sigma' dF \sin \varphi + \tau' dF \cos \varphi - \sigma_x dF \sin \varphi - \tau dF \cos \varphi = 0,$$

aus der man den gemeinsamen Faktor dF wegheben kann. Ebenso liefert die Komponentengleichung für die Richtung der Y -Achse

$$\sigma' \cos \varphi - \tau' \sin \varphi - \sigma_y \cos \varphi - \tau \sin \varphi = 0.$$

Beide Gleichungen lösen wir nach den Unbekannten σ' und τ' auf. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin \varphi$, der zweiten mit $\cos \varphi$ und Addition erhält man zunächst

$$\sigma' = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2\tau \sin \varphi \cos \varphi.$$

Bequemer ist es für das Folgende, diesen Ausdruck dadurch noch etwas umzugestalten, daß man den doppelten Winkel einführt, also z. B.

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

setzt. Dadurch geht der vorige Wert über in

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

In der zweiten Gleichung ist der Wert von τ' angegeben, der auf dieselbe Weise erhalten wird. Die Spannungskomponenten σ' und τ' sind damit als Funktionen des Winkels φ gefunden, den wir uns veränderlich denken können, wodurch wir zu allen Schnittrichtungen gelangen, die zur XY -Ebene

senkrecht stehen. Um die Maximalwerte zu finden, differenzieren wir zunächst σ' nach φ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Aus der so entstandenen Gleichung

$$0 = -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot 2 \sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi \quad (10)$$

erhalten wir zunächst $\operatorname{tg} 2\varphi$ und daraus auch φ selbst, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n \frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Durch die Zufügung eines Vielfachen von π wird nämlich der Wert von $\operatorname{tg} 2\varphi$ nicht geändert; man kann also $n\pi$ beliebig zu 2φ und daher $n\frac{\pi}{2}$ beliebig zu φ addieren, ohne die Bedingung für ein Maximum oder Minimum von σ' zu ändern.

Die rechte Seite von Gl. (10) stimmt genau mit dem doppelten Werte von τ' in Gl. (9) überein. Wir erkennen daraus, daß σ' in jenen Schnittflächen seinen größten oder kleinsten Wert annimmt, für die τ' verschwindet. Zugleich folgt aus Gl. (11), daß dies immer mindestens in zwei Schnittflächen zutrifft, die aufeinander senkrecht stehen (für die sich φ um einen rechten Winkel unterscheidet). Daneben ist nur noch ein Ausnahmefall möglich, der dann eintritt, wenn $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ war. Dann ist auch für alle anderen Schnittrichtungen $\tau' = 0$ und σ' ist unabhängig von φ , d. h. für alle Schnittrichtungen gleich groß.

Von diesem Ausnahmefalle abgesehen, kommen aber beim ebenen Probleme immer nur zwei, aufeinander senkrechte und zur Z -Achse parallele Schnittrichtungen vor, für die τ verschwindet, auf denen also die gesamte Spannung senkrecht steht und für die zugleich σ' seinen kleinsten und seinen größten Wert annimmt. Man nennt jene Richtungen die Hauptrichtungen und die zugehörigen Spannungen die Hauptspannungen des Körpers an der betreffenden Stelle.

Die Größe der Hauptspannungen findet man aus Gl. (9)

durch Eintragen des durch Gl. (10) oder (11) bestimmten Wertes von φ . Am einfachsten ist es, zuerst Gl. (10) nach $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ aufzulösen. Man erhält dann

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}.$$

Aus Gl. (9) findet man dann weiter

$$\sigma'_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

und, wenn man beachtet, daß im letzten Bruche der Zähler die Hälfte vom Quadrate des Nenners bildet, kürzer

$$\sigma'_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \quad (12)$$

Daß der eine Wert ein Maximum, der andere ein Minimum liefert, kann auf gewöhnlichem Wege durch Bilden des zweiten Differentialquotienten von σ' nach φ nachgewiesen werden; es folgt aber auch schon daraus, daß jede stetige Funktion des Winkels φ , die nicht konstant ist, bei einmaligem Umlaufe des ganzen Kreises mindestens ein Maximum und ein Minimum haben muß.

Wenn $\tau = 0$ ist, fallen die Richtungen der Koordinatenachsen mit den Hauptrichtungen zusammen und σ_x, σ_y sind selbst die Hauptspannungen. Einander gleich können die Hauptspannungen nur dann werden, wenn zugleich $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ ist. Dann kann jede Richtung in der XY -Ebene als Hauptrichtung angesehen werden.

Wir wenden uns jetzt zur Ermittlung der Maximalwerte der Schubspannungskomponente τ' . Aus Gl. (9) erhalten wir

$$\frac{d\tau'}{d\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2 \cos 2\varphi - 2\tau \sin 2\varphi.$$

Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum wird daher ausgesprochen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \quad (13)$$

Dieser Wert ist das Negative der Kotangente von 2φ , die aus der Bedingungsgleichung (10) gefunden wird. Daraus folgt, daß der nach Gl. (13) bestimmte Winkel sich von dem aus Gl. (10) abgeleiteten um einen Rechten oder um $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Die Winkel φ selbst, für die einerseits σ und andererseits τ' die Maximal- oder Minimalwerte annehmen, unterscheiden sich demnach um $\frac{\pi}{4}$. Die größten Schubspannungen erhält man also für solche Schnitttrichtungen, die mit den Hauptrichtungen Winkel von 45° einschließen. Beachtenswert ist, daß die Normalspannungen auf diesen Ebenen im allgemeinen nicht verschwinden, wie man auf Grund des Vorausgegangenen hätte vermuten können. Setzt man 2φ aus Gl. (13) in die erste der Gl. (9), so findet man für die zugehörige Normalspannung $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, und dieser Wert gilt für jede der beiden zueinander senkrechten Schnittebenen, auf denen τ' zum Maximum oder Minimum wird. Nur wenn $\sigma_x = -\sigma_y$ ist, wird diese Normalspannung zu Null.

Aus Gl. (13) folgt

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}},$$

und wenn man diese Werte in die zweite der Gleichungen (9) einsetzt, erhält man

$$\tau'_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \quad (14)$$

Die beiden Werte $\tau'_{\max}$ und $\tau'_{\min}$ unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen voneinander. Dieses Ergebnis ist, soweit es sich um die absoluten Größen handelt, selbstverständlich nach dem in den Gleichungen (4) ausgesprochenen Satze über die Gleichheit der in senkrechten Schnittflächen einander zugeordneten Schubspannungen. Die Vorzeichen dagegen sind in Gleichung (14) gleichgültig, da sie nur durch die willkürliche Festsetzung darüber bedingt sind, in welcher Richtung τ' als positiv gerechnet werden sollte.

§ 7. Der lineare oder einachsige Spannungszustand.

Setzt man beim ebenen Spannungszustande eine der Hauptspannungen gleich Null, so gelangt man auf den einachsigen oder linearen Spannungszustand, der z. B. bei der in § 3 besprochenen Zugstange unter den dort angegebenen Voraussetzungen auftritt. Man nehme etwa an, daß die Koordinatenachsen schon von vornherein in die Hauptrichtungen gelegt gewesen seien, setze also $\tau = 0$ und, um auf den linearen Spannungszustand zu kommen, außerdem noch $\sigma_y = 0$. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \sigma_x \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \sigma_x \sin^2 \varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wir merken uns für diesen Fall, daß nach der zweiten der Gleichungen (15) bei ihm die größte Schubspannung halb so groß ist als die Zug- oder Druckspannung in der Hauptrichtung.

Den ebenen Spannungszustand kann man sich durch das Zusammenwirken von zwei einachsigen Spannungszuständen hervorgebracht denken, deren Hauptrichtungen rechtwinklig zueinander stehen. Ebenso kann auch, wie in Band V näher besprochen werden wird, der allgemeinste Spannungszustand auf drei rechtwinklig zueinander stehende einfache Zug- oder Druckbeanspruchungen, also auf drei nebeneinander auftretende einachsige Spannungszustände zurückgeführt werden.

§ 8. Spannungskreis und Spannungsellipse.

Zur Veranschaulichung der durch die Formeln in § 6 ausgesprochenen Eigenschaften des ebenen Spannungszustandes bedient man sich mit Vorteil der von Mohr angegebenen graphischen Darstellung durch den Spannungskreis. Denkt man sich die Koordinatenachsen in die beiden Hauptrichtungen gelegt, setzt also $\tau = 0$, so daß σ_x und σ_y die Hauptspannungen bedeuten, so gehen die Gleichungen (9) über in

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Man trage auf einer Aszissenachse in Abb. 6 vom Ursprunge O aus die beiden Hauptspannungen $\sigma_x = OB$ und $\sigma_y = OA$ ab und schlage über AB als Durchmesser einen Kreis. Zieht man dann vom Mittelpunkt M aus den Halbmesser MC , der den Winkel 2φ mit der Abszissenachse einschließt, so gibt, wie ein Vergleich der Figur mit den Gleichungen (16) sofort erkennen läßt, die Abszisse des Punktes C die Normalspannung σ' und die Ordinate die Schubspannung τ' für eine Schnittrichtung an, die den Winkel φ mit der Richtung der Hauptspannung σ_x bildet. Der Mittelpunkt M des Spannungskreises hat nämlich die Abszisse $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, und der

Radius ist gleich $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$. Hieraus folgt auch, daß die in diesem Schnitt übertragene, aus σ' und τ' resultierende Gesamtspannung ρ der Größe nach durch die Verbindungslinie OC dar-

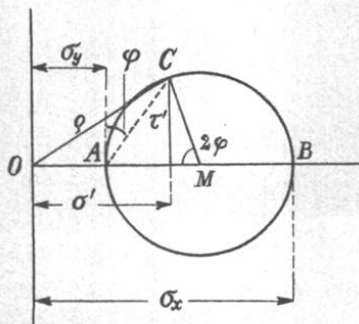


Abb. 6.

gestellt wird und daß sie mit der Normalen zur Schnittfläche einen Winkel einschließt, der dem Winkel COM in der Abbildung gleich ist.

In der Abbildung war angenommen, daß beide Hauptspannungen Zugspannungen seien und unter σ_x die größere von beiden verstanden. Sollte σ_y eine Druckspannung sein, so ist OA von O aus nach links hin abzutragen; ebenso

sind beide nach links abzutragen, wenn auch noch σ_x eine Druckspannung (und zwar in diesem Falle die dem Absolutbetrage nach kleinere von beiden) ist. Im übrigen ändert sich dadurch an der gewählten Darstellung nichts.

Eine andere Art der Darstellung wird durch die Spannungselipse gewonnen. Man denke sich für eine Reihe von Schnitten

die Resultierende q aus σ' und τ' ermittelt und sie von einem Punkte O aus in jener Richtung, die sie tatsächlich einnimmt, abgetragen. Die Endpunkte aller dieser Strahlen liegen auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt O ist und die man als die Spannungsellipse bezeichnet. Auf den Beweis dafür kann hier verzichtet werden, da mit dieser Darstellung ohnehin nicht viel gewonnen wird.

§ 9. Die reine Schubbeanspruchung.

Ein besonderer Spannungszustand, mit dem man häufig zu tun hat, wird dadurch gekennzeichnet, daß man einen kleinen Würfel abgrenzen kann, an dem auf vier Seitenflächen ausschließlich Schubspannungen senkrecht zur Z -Richtung vorkommen, während die beiden zur Z -Achse senkrechten Seitenflächen ohne Spannung sind (Abb. 7). Dieser, als der Fall der reinen Schubbeanspruchung bezeichnete Spannungszustand ist zunächst ein ebener und daher in den allgemeinen Formeln von § 6 mit enthalten. Man kommt auf ihn, wenn man die beiden Hauptspannungen gleich groß und von entgegengesetztem Vorzeichen wählt. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes fallen dann mit den Diagonalebenen des Würfels, die durch die Z -Richtung gelegt werden können, zusammen, und die Schubspannung auf der Würfelseite ist ebenso groß als jede der beiden Hauptspannungen.

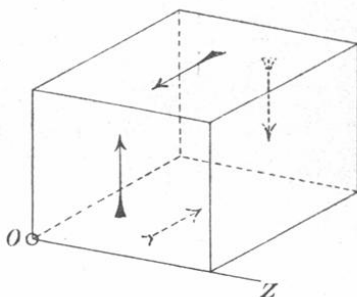


Abb. 7.

Diese Behauptungen folgen auch, ohne daß man auf die Formeln von § 6 zurückzugreifen braucht, sehr einfach aus dem Mohrschen Spannungskreise, dessen Mittelpunkt in diesem Falle mit dem Ursprunge O in Abb. 6 zusammenfällt.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Leite die den Gleichungen (5) entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für das ebene Problem ab!

Lösung. Streicht man die nach den Gleichungen (8) beim ebenen Probleme wegfallenden Spannungen aus den Gleichungen (5),

so gibt die letzte $Z = 0$, d. h. dieser Spannungszustand ist nur möglich, wenn die äußere Kraft senkrecht zu der als Z -Achse bezeichneten Richtung steht (oder wenn die äußere Kraft überhaupt verschwindet), und die beiden ersten Gleichungen liefern

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y = 0.$$

Grenzt man ein rechtwinkliges Parallelepiped ab, von dem eine Kantenrichtung mit der Z -Richtung zusammenfällt, und trägt die beim ebenen Spannungszustande daran angreifenden Spannungen ein, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch unmittelbar aus der Figur ablesen; es wird empfohlen, dies auszuführen.

2. Aufgabe. Aus den Gleichungen (6) ist der Wert der Normalkomponenten σ_n der spezifischen Spannung p_n zu ermitteln!

Lösung. Anstatt die Spannung p_n selbst auf die Normale n zu projizieren, kann man, um σ_n zu erhalten, auch ihre drei Komponenten nach den Koordinatenachsen auf n projizieren und aus den Projektionen die algebraische Summe nehmen. Dies liefert

$$\sigma_n = p_{nx} \cos(nx) + p_{ny} \cos(ny) + p_{nz} \cos(nz),$$

oder nach Einsetzen der Werte aus den Gleichungen (6)

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + \sigma_z \cos^2(nz) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny) \\ & + 2\tau_{xz} \cos(nx) \cos(nz) + 2\tau_{yz} \cos(ny) \cos(nz). \end{aligned}$$

3. Aufgabe. Eine Welle, die gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehen beansprucht wird, erfahre an der gefährlichsten Stelle eine Biegungsspannung rechtwinklig zum Querschnitte von der Größe 300 atm und eine Schubspannung infolge der Verdrehung von 400 atm. Wie groß ist $\sigma'_{\max}$ und $\tau'_{\max}$?

Lösung. Der Spannungszustand ist ein ebener. Die Richtung der Stabachse wähle man zur Richtung der X -Achse, die Y -Achse lege man in die Richtung der Schubspannung im Querschnitte. Dann ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ und $\sigma_y = 0$ in die Gleichungen (12) und (14) einzusetzen. Man erhält $\sigma'_{\max} = +577,2$ atm, $\sigma'_{\min} = -277,2$ atm, $\tau'_{\max} = 427,2$ atm.