Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Graphische Statik

Föppl, August

1912

Siebenter Abschnitt. Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger

urn:nbn:at:at-ubi:2-7787

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger.

§ 58. Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe.

Die wichtigste Gewölbeform ist das zylindrische oder Tonnengewölbe. Bei gewölbten Brücken kommt es allein in Frage und auch im Hochbaue spielt es eine wichtige Rolle, zumal da sich manche der verwickelteren Gewölbeformen, namentlich die Kreuzgewölbe, auf jene Grundform zurückführen lassen. Nur die Kuppelgewölbe und die ihnen verwandten Klostergewölbe erfordern eine grundsätzlich verschiedene Behandlung. Hier soll in erster Linie an das Gleichgewicht eines Brückengewölbes gedacht werden, obschon natürlich für die übrigen Verwendungsarten des Tonnengewölbes ganz Ähnliches gilt.

Von der Last, die das Gewölbe zu tragen hat, nehme ich an, daß sie in der Richtung der Gewölbeachse gleichförmig verteilt sei, während sie im Gewölbequerschnitte beliebig verteilt sein kann. Es ist dann gleichgültig, wie lang das Gewölbe in der Richtung der Gewölbeachse sich ausdehnt, da sich jeder zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegende Abschnitt unter denselben Bedingungen befindet, wie ein anderer. Es genügt daher, einen einzigen Querschnitt zur Betrachtung auszuwählen.

Die von dem Gewölbe aufzunehmende Last besteht gewöhnlich aus einer Erdüberschüttung oder einer Übermauerung. Denkt man sich das Gewölbe in dem zuletzt genannten Falle fortgenommen, so ist es nicht unmöglich, daß sich die Last trotzdem selbst noch trägt, da sich auch die Übermauerung selbst wie ein Gewölbe verhalten kann. Wenn nun auch bei den

Fällen, die wir in erster Linie im Auge haben, also bei weit gespannten Brückengewölben, eine so große Tragfähigkeit der Übermauerung oder Überschüttung nicht anzunehmen ist, so vermag sie doch immerhin bis zu einem gewissen Grade eine Entlastung des Gewölbes herbeizuführen. Auf diesen günstigen Umstand nimmt man jedoch bei der Berechnung des Gewölbes keine Rücksicht; man nimmt vielmehr an, daß die Last ohne inneren Zusammenhang sei und keine horizontalen Kräfte übertrage, so daß jeder Teil der Rückenfläche des Gewölbes das senkrecht nach abwärts gerichtete Gewicht des gerade über ihm befindlichen Teiles der Belastung aufzunehmen habe. Dazu kommt dann noch das Eigengewicht des Gewölbes.

Wenn die Last aus einer Übermauerung von demselben spezifischen Gewichte wie der Wölbbogen besteht, gibt die Höhe der Übermauerung an jeder Stelle ohne weiteres ein Maß für die dort auftretende Belastung an. Im andern Falle, also etwa bei einer Erdüberschüttung, kann man sich diese durch eine gleich schwere Übermauerung von entsprechend geänderter Höhe ersetzt denken. Auch die beweglichen Lasten, die bei einem Brückengewölbe vorkommen, die aber in der Regel gegenüber der viel größeren Eigenlast keine große Rolle spielen, denkt man sich durch eine gleich schwere zusätzliche Übermauerung in entsprechender Verteilung ersetzt. Man erhält dann im Gewölbequerschnitte eine auf Mauerlasten zurückgeführte Fläche, deren obere Begrenzung die Belastungslinie heißt. Diese und die Gewölbeform seien gegeben; es handelt sich dann um die Entscheidung der Frage, ob das Gewölbe unter den gegebenen Umständen im Gleichgewichte bleiben wird oder ob ein Einsturz zu befürchten ist.

In Abb. 193 ist der Gewölbequerschnitt nebst der Belastungslinie AB gezeichnet. Man fasse einen einzelnen Wölbstein ins Auge, der in der Figur durch Schraffierung hervorgehoben ist. An diesem wirkt zunächst das Gewicht der zwischen den Linien m und n liegenden Lasten samt dem Eigengewichte des Wölbsteines. Dieses Gewicht G ist dem Inhalte der zwischen den Linien m und n und den beiden Wölbfugen liegenden Fläche proportional und geht durch den Schwerpunkt der Fläche; es ist daher als vollständig gegeben anzusehen. Außerdem greifen an dem Wölbsteine die in den beiden Fugen übertragenen Kräfte R und R_1 an. Über Lage, Größe und Richtung der Fugendrücke R und R_1 ist zunächst nichts bekannt. Offenbar könnten wir aber die andere sofort angeben, wenn eine von ihnen auf irgendeine Art bereits ermittelt wäre. Denn die drei Kräfte G, R und R_1 müssen sich, damit Gleichgewicht bestehe, in demselben Punkte schneiden und ihre geometrische Summe muß Null sein. Die

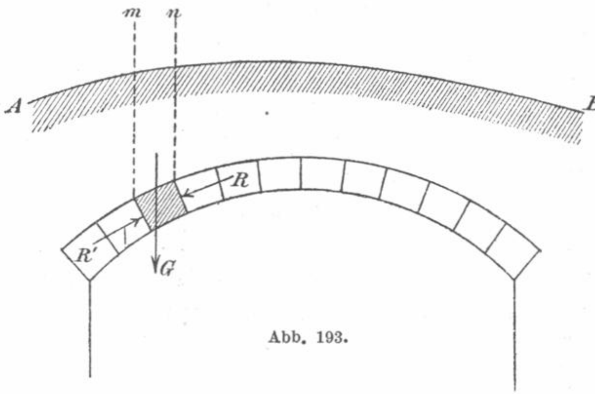

Abb. 193.

erste Bedingung liefert die Lage, die andere nach Zeichnen eines Kräftedreieckes Größe und Richtung von R_1, wenn R als bekannt angesehen wird.

Geht man nun zu einem benachbarten Wölbsteine über, so ist für diesen der eine Fugendruck sofort gegeben, da er sich nach dem Wechselwirkungsgesetze nur der Pfeilrichtung nach von dem Fugendrucke an dem jenseits der Fuge liegenden, vorher schon betrachteten Wölbsteine unterscheidet. Der andere Fugendruck kann daher wie vorher nach Lage, Größe und Richtung ermittelt werden. Dies läßt sich dann weiterhin in derselben Weise fortsetzen. Man erkennt daraus, daß alle Fugendrücke mit Hilfe dieser einfachen Kräftezerlegungen sofort gefunden werden können, sobald der Druck in einer einzigen Fuge bekannt ist.

Der hiernach allein noch fehlende erste Fugendruck in irgendeiner Fuge läßt sich dagegen durch bloße Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ermitteln. Das Gewölbe ist vielmehr eine statisch unbestimmte Konstruktion und zwar eine dreifach statisch unbestimmte, da drei — auf verschiedene Art zu wählende — Bestimmungsstücke erforderlich sind, um Lage, Größe und Richtung irgendeines Fugendruckes näher zu bezeichnen.

Falls das Gewölbe überhaupt tragfähig ist, sind sehr viele Gleichgewichtszustände statisch möglich. Jeder zulässigen, sonst aber beliebigen Wahl für den ersten Fugendruck entspricht ein anderer Gleichgewichtszustand. Zulässig ist dabei freilich nur eine solche Wahl, bei der überhaupt Gleichgewicht bestehen kann, worauf sofort noch näher einzugehen sein wird. Jedenfalls muß, wenn der Einsturz nicht erfolgen soll, mindestens eine Annahme für den ersten Fugendruck möglich sein, die das Gleichgewicht sichert. Ein Gewölbe, bei dem nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich wäre, sieht man aber nicht als hinreichend sicher an, da jede Gewißheit darüber fehlt, daß dieser eine Gleichgewichtszustand dann auch wirklich zustande käme. Man verlangt vielmehr einen gewissen Überschuß an Standsicherheit, so daß innerhalb eines nicht zu kleinen Bereiches verschiedene Gleichgewichtszustände statisch möglich sind.

§ 59. **Die Einsturzmöglichkeiten.**

Um die Frage zu beantworten, ob ein Gewölbe für eine beliebig getroffene Wahl des ersten Fugendruckes im Gleichgewichte steht oder nicht, müssen wir uns überlegen, auf welche Art der Einsturz des Gewölbes erfolgen kann. Hierbei ist vor allem zu betonen, daß bei der überwiegenden Mehrzahl der Gewölbeeinstürze das Nachgeben der Pfeiler oder Widerlager die Veranlassung bildet. Es wird sich später zeigen, auf welche Weise man sich von dieser Einsturzgefahr Rechenschaft zu geben vermag. Vorerst soll aber, da es sich jetzt nur um die Stabilität des Gewölbes selbst handelt, von diesem Umstande abgesehen, also vorausgesetzt werden, daß die Widerlagsmauern hinreichend standfest sind.

Dann kommt ferner in Betracht, daß der Einsturz durch ein Gleiten der Wölbsteine übereinander längs der Fugen eingeleitet werden könnte. Coulomb, der bekannte Physiker, der sich, soweit beglaubigte Nachrichten vorliegen, zuerst mit der Frage des Gewölbegleichgewichtes beschäftigt hat, sah diese Einsturzgefahr als die wesentlichste an. Sie läßt sich aber durch einen geeigneten Fugenschnitt stets vermeiden. Ein Gleiten der Wölbsteine übereinander kann nämlich offenbar nur dann eintreten, wenn der Fugendruck mit der Normalen zur Fuge einen Winkel einschließt, der den Reibungswinkel übersteigt. Der Reibungswinkel zwischen Stein und Stein ist sehr groß. Wenn ein weicher Mörtel dazwischen liegt, kann er freilich erheblich kleiner werden; aber auch dann ist er immer noch ausreichend, um ein Gleiten zu verhüten, wenn die Fugenrichtungen einigermaßen zweckmäßig gewählt werden. Tatsächlich ist daher die Gleitgefahr, wenn sie auch immerhin im Auge behalten werden muß, von viel geringerer Bedeutung, als Coulomb annahm.

Eine andere Einsturzmöglichkeit besteht darin, daß das Gewölbe durch Öffnen einiger Fugen (der sogenannten Bruchfugen) in mehrere Teile zerfällt, die sich um die Kanten der Bruchfugen abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen hin drehen. Wenn diese Bewegungen weit genug fortgesetzt werden, weichen einzelne Teile soweit nach oben hin aus, daß die andern Raum zum Herabstürzen erlangen. Hierbei ist zu beachten, daß die Zug- oder Haftfestigkeit des Mörtels, die vor dem Öffnen der Fugen überwunden werden muß, in vielen Fällen nur gering zu veranschlagen ist. Man fordert daher gewöhnlich, daß das Gleichgewicht des Gewölbes auch schon ohne Zuhilfenahme der Zugfestigkeit des Mörtels genügend gesichert sei. Für diesen Fall läßt sich die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen benachbarter Wölbsteine gegeneinander um eine Fugenkante leicht angeben. Der Angriffspunkt des Fugendruckes muß nämlich auf der Fuge selbst enthalten sein und darf nicht in deren Verlängerung fallen. Denn in die Verlängerung der Fuge könnte er offenbar nur dann fallen, wenn in der Fuge auch Zugkräfte übertragen würden.

Bei dieser Betrachtung ist jedoch noch keine Rücksicht auf die begrenzte Druckfestigkeit des Wölbmaterials genommen und diese ist es, die nun tatsächlich den Ausschlag gibt. Schon dann, wenn der Angriffspunkt des Fugendruckes in die Nähe einer Fugenkante fällt, steigt die Druckbeanspruchung an dieser Kante so erheblich, daß dort ein Zertrümmern des Wölbmaterials stattfindet. Nachdem dieses Absplittern der Kanten erfolgt ist, steht den vorher besprochenen Drehungen der einzelnen Wölbteile gegeneinander kein Hindernis mehr im Wege, wenn auch der Angriffspunkt des Fugendruckes noch innerhalb der ursprünglichen Fugenlänge liegt. Man muß daher verlangen, daß der Fugendruck nicht nur an keiner Stelle über den Gewölbequerschnitt hinaustritt, sondern daß er sich auch den Begrenzungslinien des Gewölbes nirgends soweit nähert, daß die zulässige Druckbeanspruchung des Wölbmateriales überschritten wird. Als möglich im vorher erörterten Sinne sind daher nur solche Gleichgewichtszustände des Gewölbes anzusehen, die dieser Forderung genügen und bei denen überdies an keiner Stelle ein Gleiten der Wölbsteine gegeneinander zu befürchten ist.

Die größte Kantenpressung, die zu einem gegebenen Fugendrucke gehört, kann unter der hier wie in anderen Fällen üblichen Annahme eines linearen Spannungsverteilungsgesetzes leicht ermittelt werden. Der Fugendruck (oder seine zur Fugenrichtung senkrecht stehende Komponente, die sich aber von dem gesamten Fugendrucke unter den gegebenen Verhältnissen nur unerheblich unterscheiden kann) sei für die Länge $= 1$ des Gewölbes mit R, die Fugenlänge mit f und der Abstand des Druckmittelpunktes von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Dann ist die Kantenpressung σ

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6Ru}{f^2} \tag{82}$$

zu setzen. Dies ist nämlich die früher (im ersten Bande) abgeleitete Formel für die exzentrische Druckbelastung. Das erste Glied stellt die von dem zentrisch angebrachten Drucke herrührende, gleichförmig verteilte Spannung, das zweite Glied die zu dem Momente Ru gehörige zusätzliche Biegungsspannung dar, wobei zu beachten ist, daß das Widerstandsmoment der Fuge gleich $\frac{f^2}{6}$ zu setzen ist, da die Fuge ein Rechteck von den Seitenlängen f und 1 bildet. Das obere oder untere Vorzeichen des zweiten Gliedes ist zu wählen, je nachdem die dem Druckmittelpunkte benachbarte oder die jenseits der Mitte liegende Kante in Frage kommt. Die größte Kantenpressung entspricht dem positiven Vorzeichen.

Die Formel ist indessen nur solange gültig, als sich die ganze Fuge an der Lastübertragung beteiligt. Setzt man $u = \frac{f}{6}$, so sinkt der Druck an der jenseits liegenden Kante auf Null und wenn u noch größer wird, treten an dieser Kante Zugspannungen auf. Vermag der Mörtel Zugspannungen aufzunehmen, so ist die Formel zwar auch dann noch gültig. Im andern Falle tritt aber auf der Zugseite ein Aufklaffen der Fuge ein. Das Spannungsverteilungsdiagramm geht dann in ein Dreieck über, das sich nur über den unter Druck stehenden Teil der Fuge erstreckt und dessen Schwerpunkt auf der Richtungslinie von R liegt. Der Abstand von R bis zur Kante ist $\frac{f}{2} - u$, die an der Druckübertragung beteiligte Strecke der Fuge das Dreifache davon und die Kantenpressung wird doppelt so groß, als der Mittelwert des Druckes längs jener Strecke. Daher ist die vorige Gleichung für diesen Fall zu ersetzen durch

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3\left(\frac{f}{2} - u\right)}. \tag{83}$$

§ 60. Stützlinie und Drucklinie.

Eine gebrochene Linie, die die Druckmittelpunkte aller Fugen miteinander verbindet, wird die Stützlinie des Gewölbes genannt. Da die Verteilung und die Zahl der Fugen offenbar zufällig und unwesentlich ist, kann man sich auch unendlich viele Fugen oder wenigstens willkürlich durch die Wölbsteine in der Fugenrichtung gezogene „Fugenschnitte“ vorstellen und zu jedem dieser Fugenschnitte den Druckmittelpunkt aufgesucht denken. Die Stützlinie geht dann in eine Kurve über.

Eine zweite Kurve, die von der Stützlinie im allgemeinen etwas, wenn auch gewöhnlich nicht viel verschieden ist, wird von den Richtungslinien der zu allen Fugenschnitten gehörigen Fugendrücke als

Tangenten eingehüllt. Sie wird als die **Drucklinie** des Gewölbes bezeichnet. Indessen werden die Bezeichnungen „Stützlinie“ und „Drucklinie“ häufig auch miteinander vertauscht, um so mehr als beide unter einer Annahme, die sofort näher zu besprechen ist, miteinander zusammenfallen.

Die Konstruktion der Stützlinie oder der Drucklinie macht nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen gar keine Schwierigkeiten, sobald Lage, Richtung und Größe irgendeines Fugendruckes willkürlich gewählt oder gegeben sind. Man sucht aber diese Aufgabe dadurch noch weiter zu vereinfachen, daß man die Richtungen der Fugenschnitte so legt, wie es dafür am bequemsten ist. Am schnellsten kommt man zum Ziele für lotrechte Fugenschnitte. In diesem Falle bildet die Stützlinie eine zu der gegebenen Belastungsfläche gehörige Seilkurve und jede Tangente an die Seilkurve gibt zugleich die Richtung des zugehörigen Fugendruckes an, d. h. die Drucklinie fällt mit der Stützlinie zusammen.

Freilich dürfte man bei einem gemauerten Gewölbe die Fugen nicht wirklich in dieser Richtung ausführen, da sonst die Gefahr des Gleitens der Wölbsteine übereinander nahe gerückt würde. Bei einem Betongewölbe dagegen kommen Fugen im eigentlichen Sinne überhaupt nicht vor und es ist daher von vornherein gleichgültig, in welcher Richtung wir uns die Fugenschnitte bei ihm gelegt denken wollen. Aber auch bei gemauerten Gewölben steht es uns frei, uns trotz der anders gerichteten Mauerfugen auch noch Schnitte in lotrechter Richtung durch das Gewölbe gelegt zu denken, die wir als Fugenschnitte bezeichnen, und die in diesenSchnitten von der einen nach der andern Seite hinüber übertragenen Kräfte oder „Fugendrücke“ zu untersuchen.

Außerdem ist man auch jederzeit leicht imstande, den Fugendruck für eine beliebig geneigte Fuge nachträglich anzugeben, sobald die Stütz- oder Drucklinie für senkrechte Fugenschnitte bereits bekannt ist. In Abb. 194 sei SS diese Stützlinie und EF die geneigte Fuge, für die der Fugendruck ermittelt werden soll. Man ziehe durch den Schnittpunkt A der Fuge EF mit der Stützlinie SS den senkrechten Fugenschnitt BC. Der zu diesem gehörige Fugendruck R ist aus dem zu dem Seilpolygone SS gehörigen Kräfteplane zu entnehmen.

Dann ziehe man von E aus die Lotrechte ED. Der Fugendruck R' für die geneigte Fuge EF muß dann mit R und dem zwischen den Linien DEF und BC liegenden Belastungsstreifen im Gleichgewichte stehen. Dieser Belastungsstreifen besteht aus dem Trapeze $ACDE$ mit senkrecht nach abwärts und dem kleinen Dreiecke ABF mit senkrecht nach oben gekehrtem Gewichte (dies nach oben gerichtet, weil die Fläche ABF nicht hinzukommt, sondern wegfällt, wenn wir vom senkrechten Fugenschnitte zum geneigten übergehen). Die Richtungslinie der Resultierenden G beider Gewichte kann auch als die senkrechte Schwerlinie der verschränkten Figur $BCDEF$ angesehen werden, in der ABF negativ zu rechnen ist. Durch Aneinandertragen von R und G erhalten wir R' als dritte Seite in dem untenhin gezeichneten Kräftedreiecke. Eine Parallele zu R' durch den Schnittpunkt von R mit G in der Hauptfigur liefert den gesuchten Fugendruck.

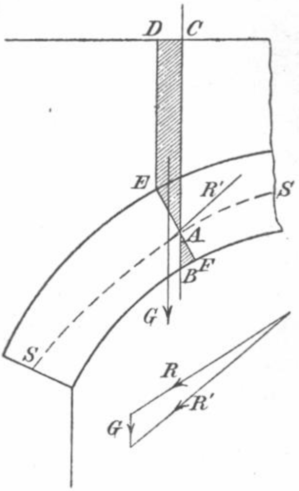

Abb. 194.

Man erkennt aus dieser Konstruktion, daß die Stützlinie für die wirklich vorhandenen geneigten Fugen stets etwas höher liegen wird, als die ihr für senkrechte Fugenschnitte entsprechende. Der Unterschied ist aber so gering, daß man ihn unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen meist ganz vernachlässigen kann. Daher begnügt man sich in der Regel damit, die Stützlinie für senkrechte Fugenschnitte einzuzeichnen und sie zugleich für die geneigten Fugen als gültig zu betrachten. Wenn man will, kann man jedoch die besprochene geringfügige Verbesserung jederzeit leicht vornehmen.

Um die Untersuchung für die Stütz- oder Drucklinien bei senkrechten Fugenschnitten analytisch durchzuführen, geht man von der Differentialgleichung der Seilkurve aus. Diese lautet

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q,$$

wenn q die Belastungsdichte an der Stelle mit der Abszisse x und H den Horizontalschub bedeutet. Durch zweimalige Integration folgt daraus die endliche Gleichung der Kurve

$$y = -\frac{1}{H}\int dx \int q dx + C_1 x + C_2. \tag{84}$$

Unter C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten zu verstehen. Grenzbedingungen zu deren Bestimmung stehen nicht zur Verfügung, falls nicht willkürliche Annahmen etwa über einen Fugendruck zu Hilfe genommen werden. Auch der Horizontalschub H läßt sich ohne solche Annahmen auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht ermitteln. In der Gleichung kommen daher drei zunächst willkürliche Konstanten vor. Dies steht in Übereinstimmung mit dem schon vorher gezogenen Schlusse, daß das Tonnengewölbe eine dreifach statisch unbestimmte Konstruktion bildet.

Diese Unbestimmtheit läßt sich freilich durch eine geeignete Konstruktion bis zu einem gewissen Grade heben. Durch Anordnung von Gelenken kann man (wenigstens nahezu) der Drucklinie Punkte vorschreiben, durch die sie gehen muß. Ordnet man drei Gelenke (eins im Scheitel und an jedem Kämpfer) an, so ist die Lage der Drucklinie dadurch völlig bestimmt.

Die Berechnung der Gewölbe mit drei Gelenken erfolgt im wesentlichen genau so, wie die der Bogenträger mit drei Gelenken. Die Gelenkdrücke findet man nach einem der damals besprochenen Verfahren (vgl. § 41) und hiermit kann auch die zugehörige Stützlinie ohne weiteres gezeichnet werden.

§ 61. Schiefe Projektion des Gewölbequerschnittes mit eingezeichneter Stützlinie.

Denkt man sich die Zeichnung eines Gewölbequerschnittes samt Belastungslinie, Stützlinie und deren Kräfteplan durch parallele Projektionsstrahlen auf irgendeine zur Zeichenebene nicht parallele Ebene projiziert, so stellt die erhaltene Projektion selbst wieder einen Gewölbequerschnitt dar. In diesem ist als Lastrichtung jene anzusehen, die sich als Projektion der Lastrichtung im ersten Falle ergibt. Auch die Projektion der Stützlinie bildet dann wieder eine Stützlinie für den neu erhaltenen Gewölbequerschnitt. Dies folgt leicht daraus, daß sich der Schwerpunkt jedes Belastungsstreifens mit projiziert (vgl. Bd. I § 24).

Schneiden sich beide Ebenen in einer zur wagrechten Richtung in beiden Zeichnungen parallelen Geraden, so ist die Projektion wiederum symmetrisch in bezug auf die Lastrichtung gestaltet, wenn dies von der ersten Zeichnung zutraf. Im andern Falle erhält man aus dem symmetrischen Gewölbequerschnitte mit gleich hoch liegenden Kämpfern den Querschnitt eines sog. „einhüftigen" Gewölbes.

Bei den weit gespannten flachen Brückenbögen von verhältnismäßig geringer Wölbstärke, die man in neuerer Zeit häufig (gewöhnlich unter Anordnung von Gelenken) ausführt, muß man, um die Stützlinie einigermaßen genau einzeichnen zu können, einen unbequem großen Maßstab anwenden. In diesem Falle gelangt man besser zum Ziele, wenn man die Zeichnung verzerrt ausführt, so daß man die Ordinaten in einem größeren Maßstabe, als die Abszissen, aufträgt. Man kann diese Zeichnung als eine schiefe Parallelprojektion jenes Wölbquerschnittes ansehen, für den man die Untersuchung durchzuführen hat. Die Stützlinie kann nun viel genauer eingetragen werden. Um nachher die Kantenpressung für irgendeine Fuge zu erhalten, muß man nur beachten, daß die Horizontalkomponente des zugehörigen Fugendruckes in einem andern Maßstabe auszumessen ist, als die Vertikalkomponente.

§ 62. Ältere Ansichten über die wirklich auftretende Stützlinie.

Bei einem gelenklosen Gewölbe muß man sich auf irgendeine Art ein Urteil darüber zu verschaffen suchen, welcher von den statisch möglichen Gleichgewichtszuständen in Wirklichkeit zustande kommt. Der erste, der sich hierüber eine bestimmte Ansicht bildete, war der englische Ingenieur Moseley, der im Jahre 1837 das sogenannte Prinzip des kleinsten Widerstandes aufstellte und in derselben Arbeit zugleich zuerst die Stützlinie als Hilfsmittel der Untersuchung einführte. Die Arbeit von Moseley wurde von Scheffler ins Deutsche übersetzt und von diesem eifrig vertreten. Die Moseleysche Theorie erlangte dadurch eine große Verbreitung und hat auch jetzt noch manche Anhänger. Es ist daher nötig, daß man sich mit ihr bekannt macht.

Zur Zeit Moseleys galten die Bausteine als starre Körper. Daß auch die Steine elastischer Formänderungen fähig sind, die durchaus mit denen der Metalle vor Überschreitung der Elastizitätsgrenze vergleichbar sind, hat man erst später gefunden. Sah man aber die Steine als starre Körper an und beachtete man, daß die Mechanik starrer Körper für sich allein nicht ausreicht, um eine Entscheidung zwischen den als statisch gleich möglich erkannten Gleichgewichtszuständen zu treffen, so mußte man zu dem Schlusse kommen, daß die Mechanik starrer Körper, so wie sie vorlag, auch nicht vollständig sein könne, sondern einer Ergänzung bedürfe. Denn offenbar kann unter den unendlich vielen statisch möglichen Gleichgewichtszuständen immer nur einer in Wirklichkeit auftreten und es muß daher ein Gesetz geben, nach dem sich dieser regelt. Diese — scheinbare — Lücke suchte nun Moseley durch das Prinzip des kleinsten Widerstandes auszufüllen.

Das Gewölbe wird auf einem Lehrgerüst ausgeführt, das anfänglich die ganze Last allein aufnimmt. Wenn nachher das Gewölbe ausgerüstet, also seiner früheren Unterstützung beraubt wird, „sucht" es herabzufallen. Daran wird es durch die Unterstützung an den Widerlagern verhindert. Denkt man sich die Ausrüstung allmählich vorgenommen, so daß ein allmählich wachsender Teil der Last auf das Gewölbe selbst entfällt, so wird auch der Horizontalschub des Gewölbes allmählich ansteigen. Moseley schloß nun, daß dieses Anwachsen gerade nur so lange andauere, bis der Horizontalschub groß genug geworden sei, um das Gewölbe zu befähigen, die Last allein aufzunehmen Hiernach würde nach Beendigung des Ausrüstens die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubs (der Horizontalschub ist in diesem Falle der kleinste „Widerstand" nach der Moseleyschen Auffassung) aufgetreten sein und diese würde nach Moseley auch weiterhin bestehen bleiben.

Die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubs ist, wie bei allen Seilkurven, jene, die die möglichst große Pfeilhöhe hat. Bei den gewöhnlich vorkommenden Gewölbequerschnitten geht sie durch den tiefsten Punkt jeder Kämpferfuge und den höchsten Punkt der Scheitelfuge. Jedenfalls berührt oder trifft sie aber sowohl die obere als die untere Begrenzungslinie des Gewölbequerschnittes.

Als man darauf aufmerksam wurde, daß bei dieser Drucklinie die Kantenpressung an den bezeichneten Stellen, sofern man auf die Zugfestigkeit des Mörtels nicht rechnen darf, unendlich groß würde, änderte man — unter Beibehaltung derselben Schlußweise im übrigen — die Betrachtung dahin ab, daß die Drucklinie von jenen Punkten gerade nur soweit abrücke, als es die Rücksicht auf die Festigkeit des Materials erfordere. In dieser Form wird die Moseley-Schefflersche Theorie heute noch vielfach als richtig angesehen. Man nimmt also an, daß unter allen „Gleichgewichtsdrucklinien“ in dem früher besprochenen Sinne die am steilsten verlaufende und daher dem kleinsten Horizontalschub entsprechende die richtige sei.

Freilich ist nun keineswegs einzusehen, weshalb dieser Vorgang des Abrückens der Stützlinie von den zunächst am meisten gefährdeten Kanten gerade nur solange andauern soll, als es der Festigkeit oder gar der schätzungsweise als „zulässig“ angesehenen Beanspruchung des Materials entspricht. Wenn man sich zu dieser Änderung der ursprünglichen Betrachtung, die zu einer unendlich großen Kantenpressung führte, einmal entschloß, hätte man weiter gehen, nämlich auf die Gründe eingehen müssen, die dieses Abrücken bedingen.

Das ist zuerst von Culmann geschehen, der die Formänderungen des Gewölbes als bestimmend für die Ausbildung des Gleichgewichtszustandes erkannte. Dabei vernachlässigte Culmann aber immer noch die elastische Nachgiebigkeit der Wölbsteine und achtete nur auf die Zusammendrückbarkeit des bald nach der Ausrüstung noch als ziemlich weich angesehenen Mörtels in den Fugen. Er schloß, daß die Drucklinie des kleinsten Horizontalschubes, von der er zunächst ausging, zu einer sehr starken Zusammendrückung und zu einem Ausweichen des Mörtels an den meist beanspruchten Stellen führen müsse. Sobald der Mörtel an diesen Stellen nachgibt, kommen auch die andern Stellen der Fuge zur Lastübertragung und die Drucklinie rückt weiter ins Innere des Gewölbequerschnittes. Indem er sich diesen Vorgang in derselben Weise weiter fortgesetzt dachte, gelangte er zu der Ansicht, daß sich schließlich der günstigste Gleichgewichtszustand einstelle, nämlich jener, bei dem die Kantenpressung an den gefährdetsten Stellen den möglichst kleinen Wert annehme. Diese Culmannsche Theorie der günstigsten Drucklinie zählte lange Zeit hindurch die meisten Anhänger. Sie unterscheidet sich in ihren Ergebnissen übrigens auch nur wenig von der heute meist als zutreffend angesehenen, die von der Betrachtung des Gewölbes als eines elastischen Bogens ausgeht und die im folgenden Paragraphen näher besprochen werden soll.

§ 63. Die Elastizitätstheorie des Tonnengewölbes.

Die Mauersteine gehorchen zwar nicht genau dem Hookeschen Gesetze von der Verhältnisgleichheit der elastischen Formänderungen mit den Spannungen, ebensowenig der Zementbeton, aus dem man in neuerer Zeit häufig große Gewölbe herstellt. Immerhin sind bis zu den als zulässig angesehenen und daher in Aussicht zu nehmenden Spannungen die Abweichungen nicht sehr erheblich. Man darf es daher als eine recht gute Annäherung an das wirkliche Verhalten betrachten, wenn man die Theorie der Gewölbe auf die allgemeinen Lehrsätze der gewöhnlichen Elastizitätstheorie stützt.

Hierzu eignet sich am besten der (im dritten Bande besprochene) Lehrsatz von Castigliano, wonach die statisch unbestimmten Größen einer Konstruktion solche Werte annehmen, daß sie die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen. Es wird sich also vor allem darum handeln, einen Ausdruck für die elastische Formänderungsarbeit A aufzustellen, die in dem elastischen Bogen, als den wir das Gewölbe ansehen dürfen, infolge der in ihm auftretenden Spannungen und Formänderungen aufgespeichert ist. Dabei mag in erster Linie angenommen werden, daß die Widerlager als vollkommen starr und unbeweglich angesehen werden dürfen, so daß auf sie keine Formänderungsarbeit entfällt. Dagegen steht es späterhin auch frei, dieselbe Betrachtung auf die ganze Konstruktion mit Einschluß der Widerlagsmauern auszudehnen, wobei diese als Fortsetzungen des Gewölbes bis zur Fundamentsohle hin anzusehen sind.

Für irgendeinen normal zur Wölbmittellinie gezogenen Fugenschnitt sei der Fugendruck mit R, der Abstand des Druckmittelpunktes von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Die Formänderungsarbeit dA in einem Gewölbeelemente, das zum Bogenelemente ds der Wölbmittellinie gehört, setzt sich dann aus zwei Gliedern zusammen, von denen das erste dem zentrisch angebracht gedachten Drucke R, das andere dem Biegungsmomente $M = Ru$ entspricht. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die ganze

Fuge an der Druckübertragung beteiligt sei. Bei jenen Gewölben, für die man genauere Rechnungen dieser Art durchführt und auf deren Grund die Gestalt und Stärke des Gewölbes bemißt, trifft dies auch stets zu. Für dA hat man dann nach den Lehren des dritten Bandes

$$dA = \frac{R^2}{2EF} ds + \frac{M^2}{2E\Theta} ds.$$

Hierin bedeutet F die Fugenfläche, die auch gleich der Fugenlänge f gesetzt werden kann, da die senkrecht zum Gewölbequerschnitte stehende Länge der Fuge gleich der Längeneinheit ist. Unter Θ ist das Trägheitsmoment der Fugenfläche oder $\frac{f^3}{12}$ und unter E der Elastizitätsmodul des Wölbmaterials zu verstehen. Im ganzen wird daher die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right) ds, \tag{85}$$

wobei sich das Integral auf die ganze Bogenlänge (gegebenen Falles mit Einschluß der Widerlager) zu erstrecken hat.

Die Werte von R und M sind an jeder Stelle von der Stützlinie abhängig, die man ins Auge faßt. Für jede Stützlinie läßt sich A berechnen und der Castiglianosche Satz lehrt, daß jene Stützlinie wirklich zur Geltung kommt, für die A zu einem Minimum wird. Wir wissen ferner, daß jede Stützlinie von drei Bestimmungsstücken abhängig ist, also z. B. von Größe, Lage und Richtung irgendeines Fugendruckes. Denkt man sich diese Bestimmungsstücke auf irgendeine Art ausgewählt, so können alle R und M in ihnen ausgedrückt werden. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit A läßt sich dann vollständig auswerten, bis auf die drei zunächst willkürlich bleibenden Bestimmungsstücke, die als die statisch unbestimmten Größen des Problems anzusehen sind. Man differentiiert nun A partiell nach jeder dieser drei Größen und setzt die Differentialquotienten gleich Null. Damit erhält man drei Gleichungen, deren Auflösung die drei statisch unbestimmten Größen liefert, womit der zu erwartende Gleichgewichtszustand des Gewölbes vollständig bekannt wird.

Hiermit ist das Verfahren im allgemeinen umschrieben. Auf die ausführliche Ausrechnung brauche ich mich hier nicht einzulassen; es genügt vielmehr, im Anschlusse an das Vorausgehende die Ableitung eines näherungsweise zutreffenden Satzes zu geben, der von Winkler aufgestellt wurde und der einen raschen Überblick darüber gestattet, welche Stützlinie ungefähr zu erwarten ist.

Das erste Glied in dem Ausdrucke für A ändert sich nämlich von einer Stützlinie zur andern verhältnismäßig nur wenig. Für alle Stützlinien, die hierbei überhaupt in Frage kommen können, weichen die zu gegebenen Fugen gehörigen Fugendrücke R nicht allzuviel voneinander ab. Anders ist es dagegen mit dem zweiten Gliede, da die Abstände u der Druckmittelpunkte von den Fugenmitten und hiermit die Momente M bei verschiedenen Stützlinien sehr verschieden ausfallen. Dabei ist das zweite Glied, wie man aus dem Ausdrucke $M = Ru$ erkennt, der Größe nach im allgemeinen durchaus mit dem ersten vergleichbar. Nur bei solchen Stützlinien, die etwa überall sehr nahe an der Mittellinie verlaufen, wird das zweite Glied klein gegenüber dem ersten. Sehen wir aber von diesem Falle vorläufig ab, so wird A besonders dadurch verkleinert werden können, daß man das stark veränderliche zweite Glied möglichst klein macht, während man das wenig veränderliche erste Glied für eine erste Annäherung unbeachtet lassen kann. Bei der als wahrscheinlich in Aussicht zu nehmenden Stützlinie wird daher der Ausdruck

$$\int \frac{M^2}{f^3}\, ds$$

zu einem Minimum werden.

Anstatt $M = Ru$ zu setzen, wie es vorher geschehen war, kann man sich von der Fugenmitte aus eine Strecke z in lotrechter Richtung bis zur Richtungslinie von R gezogen denken und R im Endpunkte von z in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegen. Die horizontale Komponente ist der konstante Horizontalschub H des Gewölbes und dessen Moment ist gleich Hz, während das Moment der Vertikalkomponente in bezug auf den Fugenmittelpunkt verschwindet. Man hat daher auch $M = Hz$ und der Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll, geht über in

$$H^2 \int \frac{z^2}{f^3}\, ds.$$

Auch der Horizontalschub H zeigt bei den verschiedenen Stützlinien, die miteinander zu vergleichen sind, keine großen Abweichungen, während der zweite Faktor des Produktes stark veränderlich ist. Nimmt man überdies an, daß die Wölbstärke f

konstant sei, so wird demnach ungefähr jene Stützlinie zustande kommen, für die

$$\int z^2 ds$$

den möglichst kleinen Wert annimmt. Dieser Ausdruck hat aber eine einfache Bedeutung: er stellt die Summe der Quadrate der in lotrechter Richtung gemessenen Abweichungen zwischen Bogenmittellinie und Stützlinie dar und kann geradezu als ein Maß für die gesamte Abweichung zwischen beiden Linien betrachtet werden. Wir können demnach mit Winkler den Satz aussprechen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen jene Stützlinie nahezu die richtige ist, die sich der Bogenmittellinie so eng als möglich anschließt.

Gewöhnlich nimmt man freilich die Wölbstärke f nicht konstant an, sondern macht sie im Scheitel am kleinsten und läßt sie von da aus nach den Kämpfern hin etwas zunehmen, weil auch der Fugendruck R in dieser Richtung hin zunimmt. Bezeichnet man die Horizontalprojektion des Bogenelementes ds mit dx, so nimmt für gleiche dx auch ds vom Scheitel nach den Kämpfern hin zu. Für den Fall, daß sich f^3 gerade proportional mit $\frac{ds}{dx}$ ändert, daß also

$$f^3 = f_0^3 \frac{ds}{dx}$$

ist, wenn f_0 die Scheitelstärke bezeichnet, erhält man für den Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll,

$$\frac{H^2}{f_0^3}\int z^2\,dx,$$

d. h., da H nicht merklich veränderlich und f_0 konstant ist, muß

$$\int z^2\,dx$$

möglichst klein werden und auch dieses Resultat kann ähnlich gedeutet werden, wie das vorhergehende.

Wird die Mittellinie des Bogens so gewählt, daß sie selbst mit einem zur Belastungsfläche gehörigen Seilpolygone zusammenfällt, also eine der statisch möglichen Stützlinien darstellt, so kann sich nach den vorausgehenden Betrachtungen die wahre Stützlinie nicht viel von der Mittellinie entfernen. Für die Mittellinie selbst als Stützlinie wird nämlich $\int z^2 ds$ oder auch $\int z^2 dx$ zu Null und daher zu einem Minimum. Man darf daraus nun freilich nicht schließen, daß die wahre Stützlinie unter den bezeichneten Umständen genau mit der Mittellinie zusammenfiele. Bei den in nächster Nähe der Mittellinie verlaufenden Stützlinien wird nämlich das zweite Glied in dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12M^2}{f^3}\right)ds$$

überhaupt sehr klein und es kommt dann wesentlich auf die, wenn auch an sich nicht erheblichen, Änderungen des alsdann viel größeren ersten Gliedes an. Man kann auch leicht sagen, in welchem Sinne eine Abweichung der wahren Stützlinie von der Mittellinie in diesem Falle zu erwarten ist. Je steiler nämlich die Stützlinie verläuft, um so kleiner wird der Horizontalschub H und mit ihm auch jedes R. Die Abweichung wird also nach der Richtung der Drucklinie des kleinsten Horizontalschubs hin erfolgen. Sehr groß kann aber diese Abweichung andererseits niemals werden, weil sich sonst sofort ein starkes Anwachsen des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für A herausstellen müßte, das weit mehr ausmachte, als die Verkleinerung, deren das erste Glied fähig ist.

Diese Betrachtung liefert das für die praktische Beurteilung des Gewölbegleichgewichtes sehr wertvolle Resultat, daß die elastischen Formänderungen des Gewölbes infolge der Belastung die Stützlinie so verschieben, daß sie sich ziemlich eng an die Mittellinie anschließt, so weit dies durch die Gestalt des Gewölbes ermöglicht ist. Zugleich lehrt sie, daß es vorteilhaft ist, die Gestalt der Wölbmittellinie, deren Wahl dem Konstrukteur häufig freisteht, so zu bestimmen, daß sie mit einer Seilkurve für die Belastungsfläche zusammenfällt.

§ 64. **Vereinfachte Berechnung der Gewölbe.**

Die genauere Berechnung der Gewölbe auf Grund der Elastizitätstheorie, die vorher nur in allgemeinen Umrissen beschrieben wurde, macht ziemlich viel Mühe und lohnt sich nur bei besonders großen und wichtigen Ausführungen. Da man aber bei diesen jetzt meist Gelenke einschaltet, wird sie auch hier in der Regel entbehrlich. Bei kleineren Ausführungen macht man das Gewölbe lieber etwas stärker, als eigentlich nötig wäre und behilft sich dafür bei der Stabilitätsuntersuchung mit einer vereinfachten Berechnung. Man kann es auf Grund der zahlreichen Erfahrungen, die in dieser Hinsicht vorliegen, als verbürgt betrachten, daß ein Gewölbe, das den üblichen Vorschriften genügt, hinreichend sicher ist.

Wenn ein Gewölbequerschnitt samt Belastungsfläche gegeben ist, zeichnet man zunächst eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der beiden Kämpferfugen geht. Hierauf überzeugt man sich, ob diese willkürlich gewählte Stützlinie nicht nur überall innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft, sondern ob sie sich auch keiner Kante um mehr als bis auf ein Drittel der betreffenden Fugenlänge nähert. Dies sieht man nämlich als nötig an, teils um einen gewissen Überschuß an Sicherheit zu erlangen, teils um eine Zugbeanspruchung des Mörtels und ein bei dessen Versagen zu befürchtendes Aufklaffen der Fuge zu verhüten. Hierauf berechnet man nach den früher gegebenen Formeln die größte auftretende Kantenpressung und vergleicht sie mit der als zulässig zu betrachtenden Druckbeanspruchung des Materiales. Wird diese nirgends überschritten und ist die vorher genannte Bedingung erfüllt, so betrachtet man das Gewölbe an sich als vollkommen sicher.

Ergibt sich bei dieser Berechnung, daß die Kantenpressung überall erheblich kleiner bleibt, als die zulässige Materialbeanspruchung, so schließt man, daß das Gewölbe unnötig stark ist und hält eine Verkleinerung der Wölbstärke für angezeigt. Findet man umgekehrt, daß die zuerst gezeichnete Stützlinie nicht überall innerhalb des mittleren Fugendrittels verläuft, so kann man, namentlich für den Fall einer unsymmetrischen Belastung, zunächst versuchen, ob sich die Stützlinie durch eine Änderung in der Annahme der Druckmittelpunkte in Scheitel- und Kämpferfugen so verschieben läßt, daß sie nachher überall innerhalb des mittleren Drittels bleibt. Läßt sich dies erreichen und wird die Kantenpressung für die neu gezeichnete Stützlinie nicht zu groß, so ist das Gewölbe immer noch als hinreichend sicher für die gegebene Belastung anzusehen. Im andern Falle muß man entweder die zuerst in Aussicht genommene Gewölbeform entsprechend abändern oder die Wölbstärken vergrößern, bis den gegebenen Vorschriften genügt ist.

Hiermit ist die Untersuchung aber noch nicht abgeschlossen. Man muß nun auch noch die Druckübertragung in den Pfeilern oder Widerlagsmauern verfolgen, am einfachsten, indem man die Stützlinie in diese hinein fortführt (durch Zusammensetzung des Kämpferdruckes des Gewölbes mit den Mauergewichten des Widerlagers). Auf diese Weise gelangt man entweder unten zu ausgedehnten Mauermassen, deren Standsicherheit ohne weiteres feststeht, oder zur Fundamentsohle. Der Druck auf die Fundamentsohle wird ebenfalls berechnet und mit der zulässigen Belastung des Baugrundes, die gewöhnlich durch baupolizeiliche Bestimmungen vorgeschrieben ist, verglichen.

§ 65. **Die Kuppelgewölbe.**

Die Kuppel unterscheidet sich in ihrem statischen Verhalten von dem Tonnengewölbe wesentlich dadurch, daß außer den Fugenpressungen in den Lagerfugen, deren Angriffspunkte im Gewölbequerschnitte in ihrer Aufeinanderfolge die Stützlinie bilden, auch noch Fugenpressungen in den Meridianschnitten vorkommen. Man betrachte das Gleichgewicht eines Kuppelsektors, der zwischen zwei benachbarten Meridianschnitten liegt. Unter der Voraussetzung einer ringsum symmetrischen Belastung bildet jeder Meridianschnitt eine Symmetrieebene für die ganze Kuppel. Die in je zwei entsprechenden Flächenteilen der beiden Meridianschnitte übertragenen Stoßfugendrücke setzen sich daher zu einer horizontalen Resultierenden zusammen, die in die Mittelebene des Kuppelsektors fällt. Diese horizontal nach außen hin gehenden Resultierenden treten an die Stelle des Horizontalschubs beim Tonnengewölbe. Dabei besteht aber gegenüber dem Tonnengewölbe noch der weitere Unterschied, daß sich diese Resultierenden über die ganze Mittelebene des Kuppelsektors nach einem zunächst unbekannten Gesetze verteilen.

Hieraus folgt auch, daß die Stützlinie beim Kuppelgewölbe keineswegs ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors bildet. Vielmehr ist jede beliebig im Gewölbequerschnitte gezogene Linie als Stützlinie statisch möglich, falls nur die in den Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen (oder Stoßfugendrücke) passend dazu gewählt werden. Das Gleichgewicht im Kuppelgewölbe ist daher unendlichfach statisch unbestimmt.

Auch hier gilt, wie bei den Tonnengewölben, wenn man auf die elastischen Eigenschaften des Wölbmateriales Rücksicht nimmt, der Satz, daß jener Gleichgewichtszustand zu erwarten ist, für den die Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird. Dies wird nahezu jener sein, bei dem sich die Stützlinie so eng als möglich an die Mittellinie des Gewölbequerschnittes anschließt. Nun kann sich die Stützlinie hier bei jeder Gestalt des Gewölbequerschnittes mit der Mittellinie decken. Man nimmt also bei der Ausführung der Berechnung zunächst die Stützlinie als zusammenfallend mit der Mittellinie an und bestimmt die aus dieser Annahme folgenden Spannungen in den Meridianschnitten, die man sich der Gewölbedicke nach ebenfalls gleichförmig verteilt zu denken hat. Hierbei stellt sich nun bei den gewöhnlich ausgeführten Kuppelformen heraus, daß in den Meridianschnitten im oberen Teile Druckspannungen, weiter unten hin dagegen Zugspannungen zu übertragen wären, um den zunächst in Aussicht genommenen Gleichgewichtszustand zu verwirklichen.

Der Mörtel kann aber größere Zugspannungen nicht übertragen und in der Tat hat man auch bei vielen der berühmtesten Kuppelbauten die Erfahrung gemacht, daß sich in den unteren Teilen der Kuppel Risse einstellten, die in der Richtung der Stoßfugen (also der Meridianschnitte) verlaufen. Um diesem Übelstande abzuhelfen, hat man gewöhnlich nachträglich eiserne Reifen um die unteren Teile der Kuppel gelegt, die diese ähnlich zusammenhalten, wie die Reifen ein Faß. Man erreichte dadurch, daß nun in der Tat in den Meridianschnitten Zugspannungen übertragen werden konnten, zwar nicht mehr im Mauerwerke selbst, sondern in den eisernen Reifen, die dafür eintraten. Nebenbei bemerkt sind diese eisenarmierten Kuppeln als die ersten Vorläufer der heute so viel angewendeten Eisenbetonkonstruktionen zu betrachten.

Will man aber, daß das Gleichgewicht der Kuppel auch ohne eine Verstärkung durch Eisenringe gesichert sei, so muß man von jener Stelle ab, wo sonst die Zugspannungen einsetzen würden, die Stützlinie nach abwärts ohne Heranziehung der Ringspannungen fortsetzen. Im unteren Teile ist dann die Stützlinie wieder ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors. Sie ist ferner auch in die Widerlagsmauern der Kuppel hinein fortzusetzen. Entspricht die in dieser Weise ermittelte Stützlinie überall denselben Forderungen, wie sie schon beim Tonnengewölbe erhoben wurden, so kann das Gleichgewicht der Konstruktion auch ohne Zuhilfenahme einer Verstärkung durch Eisenringe als gesichert gelten.

In Abb. 195 ist die vorher besprochene Konstruktion für eine oben geschlossene Kuppel durchgeführt, die nur ihr eigenes Gewicht zu tragen bestimmt ist. Der Kuppelquerschnitt wurde durch Fugen, die rechtwinklig zur Mittellinie gezogen sind und deren längs der Mittellinie gemessenen Abstände gleich groß gewählt wurden, in acht Abschnitte eingeteilt. Die zu diesen Abschnitten gehörigen Gewichte im Kuppelsektor verhalten sich zueinander wie die Produkte aus den mittleren Wölbstärken und den Entfernungen der Schwerpunkte von der Kuppelachse. Das dem Abschnitte 5 entsprechende Gewicht wurde im Kräfteplane durch die mittlere Wölbstärke dieses Abschnittes dargestellt. Um die Gewichte der übrigen Abschnitte im gleichen Maßstabe auftragen zu können, mußten deren mittlere Wölbstärken im Verhältnisse der Schwerpunktsabstände zum Schwerpunktsabstande des fünften Abschnittes verkleinert oder vergrößert werden. Dies ist im unteren Teile der Figur, der keiner weiteren Erläuterung bedarf, ausgeführt worden.

Die Linien 1, 2 usf. im Kuppelquerschnitte sind durch die Schwerpunkte der betreffenden Abschnitte des Kuppelsektors zu ziehen, die etwas weiter nach außen hin liegen, als die Schwerpunkte der zugehörigen Abschnitte des Kuppelquerschnittes. Indessen macht sich der Unterschied nur bei den oberen Abschnitten stärker bemerklich; bei den tiefer liegenden ist er unerheblich.

Im oberen Teile soll die Stützlinie mit der Mittellinie zusammenfallen. Ferner kann angenommen werden, daß sich die Ringspannungen innerhalb jedes Abschnittes gleichförmig über die Fläche verteilen. Die in der Mittelebene des Kuppelsektors liegende Resultierende der in den beiden Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen ist daher durch den Schwerpunkt des zugehörigen Querschnittsteiles horizontal nach außen hin zu ziehen. Der Schnittpunkt dieser Resultierenden für den obersten Abschnitt mit der Richtungslinie des Gewichtes 1 ist mit der Mitte der nächsten Lagerfuge zu verbinden. Die Verbindungslinie gibt die Richtung des zugehörigen Fugendruckes an. Da das Gewicht 1 bekannt ist, liefert das Dreieck, dessen Hypotenuse Oa_1 und dessen vertikale Kathete 1

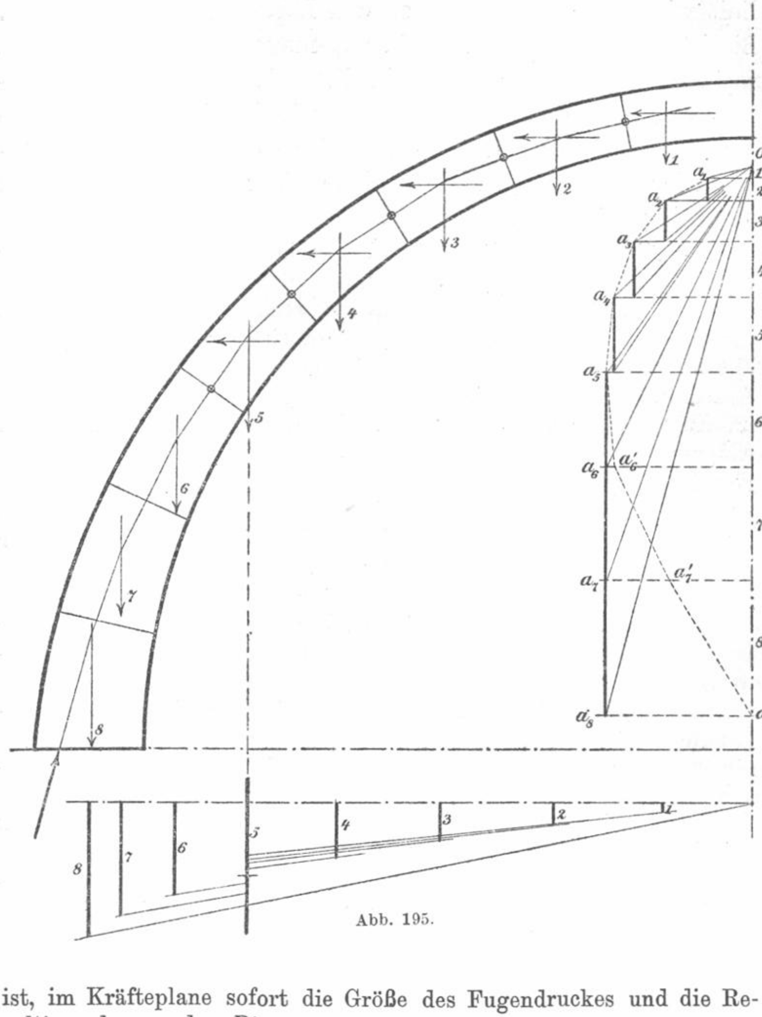

Abb. 195.

ist, im Kräfteplane sofort die Größe des Fugendruckes und die Resultierende aus den Ringspannungen.

Dann geht man zum Abschnitte 2 über, setzt dessen Gewicht mit dem von oben kommenden Lagerfugendrucke zusammen, ermittelt den Schnittpunkt der Resultierenden mit der Resultierenden der

Ringspannungen für diesen Abschnitt (in der Abbildung gehen die Richtungslinien der drei Kräfte zufällig fast genau durch einen Punkt) und verbindet den Schnittpunkt mit der nächstfolgenden Fugenmitte. Dadurch werden die Richtungen aller am Abschnitte 2 angreifenden Kräfte bekannt. Auch die Größen der beiden bis dahin noch unbekannten folgen ohne weiteres aus dem Kräfteplane. Der Fugendruck auf die untere Fuge wird durch die Strecke Oa_2, die Resultierende aus den Ringspannungen durch die horizontale Komponente der Strecke $a_1 a_2$ angegeben. In derselben Weise setzt man die Konstruktion weiter nach unten hin fort.

Wenn man zum fünften Abschnitte gelangt ist, bemerkt man, daß die Resultierende aus den Ringspannungen, die durch den horizontalen Abstand von a_4 und a_5 im Kräfteplane dargestellt wird, nur noch sehr klein ist. Beim sechsten Abschnitte würde diese Resultierende negativ (nach innen zu gerichtet) werden, d. h. es müßten Zugspannungen in den Meridianschnitten auftreten, wenn man die Stützlinie hier immer noch mit der Mittellinie zusammenfallen lassen wollte. Wir nehmen daher an, daß im sechsten, siebenten und achten Abschnitte überhaupt keine Ringspannungen mehr auftreten und setzen nur jedesmal den von oben her kommenden Fugendruck mit dem Gewichte des Abschnittes zusammen. Hierdurch erhält man den unteren Teil der Stützlinie, auf dessen Gestalt es vorwiegend ankommt.

Sitzt die Kuppel auf einer Mauertrommel, so ist die Stützlinie in diese hinein fortzusetzen, indem man den von der Kuppel herrührenden Fugendruck mit dem Gewichte des Trommelsektors zusammensetzt. Zu dessen Darstellung im Kräfteplane ist natürlich von derselben Konstruktion Gebrauch zu machen, die schon bei den Kuppelabschnitten verwendet wurde. Ringspannungen sind in der Mauertrommel außer Ansatz zu lassen.

Will man ferner durch Umlegen von eisernen Reifen vermeiden, daß die Trommel durch einen Horizontalschub der Kuppel beansprucht wird, so ist die Größe der Kräfte, die von den Eisenreifen aufzunehmen sind, ebenfalls aus dem Kräfteplane zu entnehmen. Man setzt dann die Stützlinie auch im unteren Teile längs der Mittellinie fort, wozu die Punkte a_6', a_7' und a_8' im Kräfteplane gehören. Die horizontalen Komponenten der Strecken $a_5 a_6'$, $a_6' a_7'$ und $a_7' a_8'$ geben nach einer sofort vorzunehmenden einfachen Umrechnung die von den Eisenreifen aufzunehmenden Ringspannungen an.

Für diese Umrechnung nehme man an, daß der Winkel zwischen den beiden Meridianebenen, die den betrachteten Kuppelsektor begrenzen, $d\alpha$ sei. Die Länge eines Abschnittes der Mittellinie zwischen zwei aufeinander folgenden Fugen in der natürlichen Größe gemessen sei l, der Schwerpunktsabstand des fünften Abschnittes von der Kuppelachse s, der Maßstab der Zeichnung $\frac{1}{n}$ und das Gewicht der Raumeinheit des Mauerwerkes γ. Dann sind die Gewichte im Kräfteplane so aufgetragen, daß die Längeneinheit ein Mauervolumen $nlsd\alpha$ und daher eine Kraft von der Größe $nls\gamma d\alpha$ vorstellt. Nun gibt die Strecke a_7a_7' die Resultierende der zum siebenten Abschnitte gehörigen Ringspannungen in diesem Maßstabe an. Die Ringspannungen selbst stehen senkrecht zu den beiden Meridianebenen, die den Kuppelsektor begrenzen und bilden einen Winkel miteinander, der um $d\alpha$ von einem gestreckten abweicht. Ihre Resultierende ist gleich der Größe von einer von ihnen, multipliziert mit $d\alpha$. Umgekehrt wird daher die in einem Teile des Meridianschnittes übertragene Ringspannung aus jener Resultierenden durch Streichen des Faktors $d\alpha$ gefunden. Hiernach bedeutet die Längeneinheit der Strecke a_7a_7' im Kräfteplane eine von den Eisenreifen aufzunehmende Ringspannung von der Größe $nls\gamma$. Wäre also z. B. a_7a_7' gleich 1 cm oder 0,01 m, der Maßstab der Zeichnung $1:n$ gleich $1:100$, $l = 2$ m, $s = 9$ m und das Gewicht von 1 m^3 Mauerwerk gleich 2000 kg, so würde die Ringspannung im siebenten Abschnitte gleich $100 \cdot 0{,}01 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2000$ oder gleich 36 000 kg zu setzen sein. — Ähnlich ist auch bei allen anderen Umrechnungen zu verfahren, z. B. wenn man die Kantenpressungen in einer Fuge ermitteln will. Der zunächst einzuführende Faktor $d\alpha$ hebt sich dann jedesmal wieder heraus.

Bei diesem Beispiele wurde vorausgesetzt, daß die Kuppel nur ihr eigenes Gewicht zu tragen habe. Kommt noch eine Belastungsfläche hinzu, so erhöhen sich die Gewichte der einzelnen Abschnitte entsprechend, während das Verfahren im übrigen genau so beizubehalten ist.

Auch dann übrigens, wenn die Kuppel tatsächlich nur ihre Eigenlast aufnehmen soll, muß man sie doch unter der Voraussetzung berechnen, daß ihr überdies noch eine passend gewählte fremde Last (in symmetrischer Verteilung um die Kuppelachse) aufgebürdet sei. Im andern Falle würde jeder Maßstab für die Bemessung der erforderlichen Wölbstärke fehlen. Macht man nämlich die Kuppel schwächer (namentlich in ihrem oberen Teile), so vermindern sich die Lasten in demselben Maße wie die Fugenflächen und die Beanspruchung des Materials bleibt dieselbe. Mit Rücksicht auf zufällige Umstände, die eine andere Art der Belastung herbeiführen könnten, ist aber die Kuppel mit größerer Wölbstärke trotzdem als sicherer zu betrachten, als die mit schwächerer Wölbstärke. Man trägt dem am besten durch Annahme einer etwa gleichförmig verteilten zufälligen Belastung Rechnung. Dann ergibt sich, wie groß die Wölbstärke etwa im Scheitel zu wählen ist, damit die Druckbeanspruchung des Materials nicht zu groß ausfällt.

§ 66. Die graphische Berechnung der durchlaufenden Träger.

Zunächst möge es sich um den in Abb. 196 dargestellten Fall handeln. Ein Balken sei in drei Punkten A, B, C unterstützt. Die eine Öffnung AB soll eine irgendwie verteilte Belastung tragen, während die andere Öffnung unbelastet ist. Es wird verlangt, die

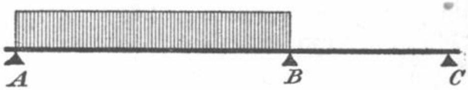

Abb. 196.

Momentenfläche zu konstruieren, ferner auch, was damit eng zusammenhängt, die Auflagerkräfte auf den drei Stützen und die Schwerkräfte V, die zu den einzelnen Querschnitten gehören, anzugeben.

Ihrer allgemeinen Gestalt nach kann die zu dem Belastungsfalle in Abb. 196 gehörige Momentenfläche ohne Schwierigkeit angegeben werden. Man bedenke nämlich, daß die Stütze C auch entfernt werden kann, wenn man dafür nur eine senkrecht nach abwärts gerichtete Kraft an dem Trägerende anbringt, die so bemessen wird, daß sich der Punkt C nicht in senkrechter Richtung — weder nach oben, noch nach unten hin — verschiebt. Der dann nur noch auf den Stützen A und B aufliegende Träger hat außer den gegebenen Lasten der Spannweite AB noch die der Größe nach vorläufig unbekannte Last an dem vorkragenden Ende C aufzunehmen. Das Biegungsmoment setzt sich daher an jeder Stelle aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine von den gegebenen Lasten, der andere von der Einzellast im Punkte C herrührt.

Der erste Teil wird mit Hilfe eines Seilpolygons, durch das man die gegebenen Lasten verbindet, nach den Lehren des zweiten Abschnittes leicht gefunden. Ist die Belastung gleichförmig über die Spannweite AB verteilt, so bildet dieser Teil der Momentenfläche einen Parabelabschnitt; aber auch bei anderer Lastverteilung kann er immer leicht ermittelt werden.

Jedenfalls ist das hierzu gehörige Moment innerhalb der Öffnung AB überall positiv (nämlich so gerichtet, daß es eine Biegung des Balkens hervorruft, bei der sich die Hohlseite der elastischen Linie nach oben hin kehrt,) während es an den Stützen A und B und auf der Strecke BC gleich Null ist.

Der von der Einzellast im Punkte C herrührende zweite Teil des Biegungsmomentes ist im Gegensatze hierzu längs des ganzen Balkens AC negativ; nur an den Enden A und C wird er zu Null. Die zugehörige Momentenfläche wird, wie gleichfalls aus den Lehren des zweiten Abschnittes hervorgeht, ein Dreieck, dessen Ecken auf den drei Auflagervertikalen liegen.

Setzen wir nun beide Teile zusammen, so erhalten wir im ganzen eine Momentenfläche von der in Abb. 197 angegebenen Gestalt. Die von den gegebenen Lasten herrührende positive Momentenfläche sowohl, als das Dreieck ADC der negativen Momente sind dabei der besseren Vergleichbarkeit wegen von der Balkenachse aus nach oben hin abgetragen. Innerhalb der Strecke AB kommt nur der Unterschied zwischen den positiven und den negativen Beiträgen zum Biegungsmomente in Betracht. Im Punkte E, wo sich die beiden Linien überschneiden, ist das Biegungsmoment Null, links von der durch E gezogenen Vertikalen überwiegt der positive, rechts davon der negative Beitrag. Die hiernach verbleibenden Flächen sind durch Schraffierung hervorgehoben und zwar die zu positiven Momenten gehörigen durch vertikale, die zu negativen gehörigen durch horizontale Schraffierung. Für jeden Punkt der Balkenachse wird demnach das zugehörige Biegungsmoment nach Größe und Vorzeichen durch den Abschnitt angegeben, der von einer durch diesen Punkt gezogenen Lotrechten in die schraffierten Flächen hineinfällt.

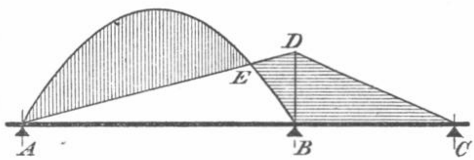

Abb. 197.

Um die Figur genau im Maßstabe zeichnen zu können, fehlt uns nur noch die Höhe BD des Dreieckes ADC, also das Biegungsmoment über der Mittelstütze. Dieses soll nun aus der Bedingung ermittelt werden, daß die elastische Linie durch die drei vorgeschriebenen Punkte A, B, C gehen muß.

Wir erinnern uns, daß die elastische Linie ein Seilpolygon bildet, dessen Belastungsfläche die Momentenfläche ist. Es ist dabei nicht nötig, den Horizontalzug dieses Seilpolygons nach der dafür früher aufgestellten Formel zu wählen, denn wenn er anders angenommen wird, erhalten wir die elastische Linie nur in entsprechender Verzerrung. Das Maß der Verzerrung ist aber hier gleichgültig, denn an der Bedingung, daß die Ordinaten an den drei Punkten A, B, C zu Null werden müssen, wird dadurch nichts geändert.

Wir wollen ferner von der Seilkurve, die zu der Belastungsfläche in Abb. 197 gehört, nur die Tangenten an den drei Punkten A, B, C ins Auge fassen, da dies für unsere Zwecke schon genügt. Die Seilspannungen bei A und B müssen mit den Lasten, die dazwischen liegen und ebenso die bei B und C mit den zwischen ihnen liegenden Lasten im Gleichgewichte stehen. Auf dieser Bemerkung beruht die Lösung der Aufgabe.

Über BC bildet die Belastungsfläche ein Dreieck. Die Resultierende der durch sie dargestellten Lasten geht durch den Schwerpunkt des Dreieckes und die vertikale Schwerlinie kann sofort angegeben werden, wenn man auch von der Höhe des Dreieckes noch nichts weiß; sie muß nämlich jedenfalls von B aus ein Drittel der Länge von BC auf BC abschneiden. Auf dieser der Lage nach bekannten Schwerlinie müssen sich die Tangenten der elastischen Linie in den Punkten B und C schneiden.

Über AB denken wir uns die Belastungsfläche wieder in die beiden Anteile zerlegt, aus denen sie vorher zusammengesetzt wurde. Der negative, durch das Dreieck ABD dargestellte Anteil liefert wieder eine nach oben gekehrte Resultierende, die durch den Schwerpunkt des Dreieckes geht, also ein Drittel der Spannweite AB von B aus auf AB abschneidet. Auch der positive Anteil kann durch eine Resultierende ersetzt werden, die durch den Schwerpunkt der betreffenden Fläche geht und nach abwärts gerichtet ist. Da als Beispiel eine gleichförmige Belastung der Öffnung AB angenommen wurde, geht die Schwerlinie dieses Teiles der Belastungsfläche für die elastische Linie hier durch die Mitte; aber auch in jedem andern Falle könnte diese Schwerlinie leicht gefunden werden.

Die durch die Punkte A und B gehenden Seilspannungen müssen im Gleichgewichte mit den beiden soeben angeführten Lasten stehen. Dabei ist zu beachten, daß die Richtungslinien beider Lasten bekannt sind, während man nur von der senkrecht nach abwärts gerichteten Last, die durch den Schwerpunkt des positiven Anteils der Momentenfläche geht, von vornherein die Größe kennt. Auch die Größe der nach oben gehenden Last zwischen B und C ist vorläufig unbekannt.

Dies hindert jedoch nicht, zu den der Lage nach bekannten Lasten I, II, III das Seilpolygon 1, 2, 3, 4 in Abb. 198 sofort auszuführen. Man ziehe von C aus den Seilstrahl 1 in beliebiger Richtung. Diese Linie kann als die Tangente an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene Seilkurve im Punkte C aufgefaßt werden. Der Seilstrahl 2, der die Tangente an dieselbe Seilkurve im Punkte B darstellt, schneidet sich mit 1 auf der gegebenen Richtungslinie I und folgt hieraus sofort. Um die Seilspannung 2 ferner mit der

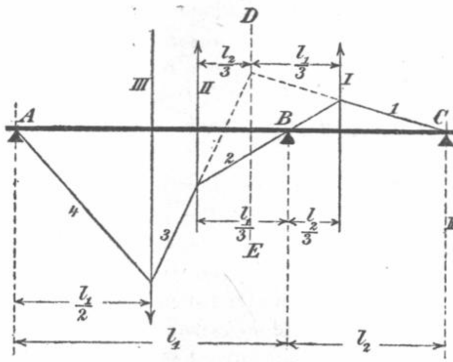

Abb. 198.

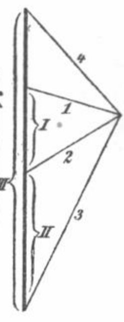

Abb. 199.

Last II zusammenzusetzen, beachten wir, daß sich 1 und 3 jedenfalls auf der Resultierenden der dazwischen liegenden Lasten I und II schneiden müssen. Wenn uns nun auch diese beiden Lasten der Größe nach vorläufig nicht bekannt sind, so kennen wir doch ihr Verhältnis. Denn I stellt das senkrecht nach oben gehende Gewicht des Dreieckes BCD in Abb. 197 und II das von ABD dar und die beiden Dreiecksflächen verhalten sich zueinander wie ihre Grundlinien AB und BC oder wie die beiden mit l_1 und l_2 in Abb. 198 bezeichneten Spannweiten. Die Resultierende der beiden parallelen und gleich gerichteten Kräfte I und II liegt zwischen beiden und teilt den Abstand zwischen ihnen im umgekehrten Verhältnisse zu den Größen beider Kräfte. Tragen wir daher $\frac{l_1}{3}$ von I aus nach links oder $\frac{l_2}{3}$ von II aus nach rechts hin ab, so erhalten wir die Richtungslinie DE der Resultierenden aus I und II. Wir brauchen jetzt nur 1 bis zum Schnittpunkte mit DE zu verlängern, um den durch diesen Punkt gehenden Seilstrahl 3 zu erhalten. Der Seilstrahl 4 endlich schneidet sich mit 3 auf der Richtungslinie von III und geht durch den Punkt A.

Von den vier Seilstrahlen des soeben konstruierten Seilpolygons haben nur 1, 2 und 4 eine unmittelbare Beziehung zur elastischen Linie des Balkens, indem sie deren Tangenten in den Punkten C, B, A unter der Voraussetzung einer entsprechend gewählten Verzerrung darstellen. Der Seilstrahl 3 ist nur zur Ermöglichung der Konstruktion dazwischen geschoben und hat mit der elastischen Linie unmittelbar nichts zu tun.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, können wir nachträglich auch den ihm zugehörigen Kräfteplan in Abb. 199 zeichnen. Hierbei ist zu beachten, daß III auch der Größe nach gegeben ist, indem es den von vornherein bekannten positiven Anteil der Momentenfläche in Abb. 197 darstellt. Die Strecken I und II, die man durch Ziehen der Parallelen zu den Seilstrahlen in Abb. 198 erhält, geben die Inhalte der Dreiecke BCD und ABD in Abb. 197 im gleichen Maßstabe an. Man braucht hierbei nur auf das Verhältnis der Strecken II und III im Kräfteplane, der in ganz willkürlichem Maßstabe gezeichnet sein kann, zu achten. Da der positive Anteil der Momentenfläche in Abb. 197 und das Dreieck ABD zur gleichen Grundlinie AB gehören, liefert das aus Abb. 199 entnommene Verhältnis II : III unmittelbar das Verhältnis der durchschnittlichen Höhen beider Flächen. Trägt die Öffnung AB des durchlaufenden Trägers eine gleichförmig verteilte Last, so ist der positive Anteil der Momentenfläche ein Parabelsegment, dessen durchschnittliche Höhe $\frac{2}{3}$ der größten Höhe ausmacht. Bezeichnen wir daher die Pfeilhöhe dieser Parabel mit f, so ist die Höhe BD des Dreieckes ABD gleich $\frac{4}{3} f \cdot \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}}$. Nachdem BD auf diese Weise ermittelt ist, kann Abb. 197 sofort im richtigen Maßstabe aufgetragen werden.

Hat der Träger in beiden Spannweiten gegebene Lasten aufzunehmen, so ermittelt man zuerst die Momentenfläche unter der Voraussetzung, daß nur eine Spannweite belastet, die andere unbelastet sei, wiederholt dann das Verfahren für den Fall, daß die zweite Öffnung belastet und die erste unbelastet ist und addiert beide Momentenflächen zueinander. Die dem gegebenen Belastungsfalle entsprechende Momentenfläche setzt sich daher aus zwei positiven Anteilen zusammen, von denen zu jeder

Spannweite einer gehört und die ebenso groß und ebenso gestaltet sind, als wenn diese Spannweite durch einen einfachen Träger überdeckt wäre, der die zugehörigen Lasten aufzunehmen hätte, sowie aus einem negativen Anteile, der wiederum ein Dreieck ADC, wie in Abb. 197 bildet, dessen Höhe BD jedoch gleich der Summe der Höhen ist, die zur Belastung der linken und der rechten Öffnung für sich genommen gehören.

Für einen über drei oder noch mehr Öffnungen durchlaufenden Träger läßt sich dieselbe Konstruktion ohne wesentliche Änderung gleichfalls durchführen, solange nur eine der beiden Endöffnungen belastet ist. Es ist daher nicht nötig, hierfür ein besonderes Beispiel vorzuführen. Dagegen muß noch ein Hilfsverfahren dazutreten, wenn eine der Mittelöffnungen belastet ist. In Abb. 200 ist ein über drei Öffnungen durchgehender Träger gezeichnet, dessen Mittelöffnung BC eine gleichförmig verteilte Belastung aufnehmen soll, während die beiden Endöffnungen als unbelastet vorausgesetzt werden. An Stelle der gleichförmig verteilten kann übrigens auch eine irgendwie anders angeordnete Belastung der Mittelöffnung treten, ohne daß sich darum die Betrachtung zu ändern brauchte.

Man denke sich die beiden Stützen A und D entfernt und die Auflagerkräfte durch passend gewählte Lasten ersetzt, die so zu bestimmen sind, daß die Punkte A und D keine Bewegung in vertikaler Richtung ausführen. Wenn diese Kräfte von vornherein bekannt wären, könnte man die Momentenfläche mit Hilfe eines Seilpolygons sofort konstruieren. Jedenfalls kennt man aber aus dieser Überlegung bereits die allgemeine Gestalt der Momentenfläche. Die Lasten an den Enden A und D des auf B und C gestützten Trägers bringen nämlich überall negative Momente hervor, die durch das Viereck $AEFD$ in Abb. 201 dargestellt werden. Dazu kommen die positiven, durch das Parabelsegment über BC dargestellten Momente, die durch die gegebenen Lasten in der Öffnung BC unmittelbar hervorgerufen werden. Beide Momentenflächen überschneiden sich und die Unterschiede zwischen ihnen, die durch Schraffierung hervorgehoben sind, geben, wie im früheren Falle, die im ganzen auftretenden Biegungsmomente an. Um Abb. 201 richtig auftragen zu können, bleiben nur die Höhen BE und FC, d. h. die Momente über den Mittelstützen zu ermitteln.

Dies geschieht wieder auf Grund der Erwägung, daß die elastische Linie, die als Seilpolygon zur Momentenfläche als Belastungs-

Abb. 200.

Abb. 201.

Abb. 202.

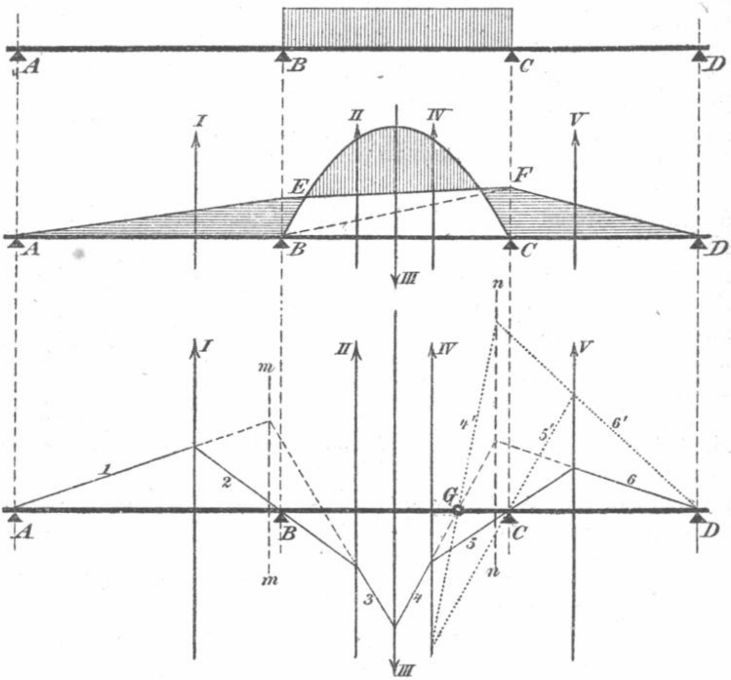

Abb. 200 bis 202.

fläche konstruiert werden kann, durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehen muß. Wir achten nur auf die durch diese Punkte gehenden Seilspannungen der in beliebiger Verzerrung gezeichneten Seilkurve, von denen wir wissen, daß sie mit den zwischen ihnen liegenden Lasten, die wir in geeigneter Weise zusammenfassen, im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Lasten für das „zweite" Seilpolygon sind in Abb. 201 eingetragen. In den beiden Endöffnungen kommt nur je eine Last in Frage, die durch den Schwerpunkt des zugehörigen Belastungsdreieckes geht. In der Mittelöffnung geht III durch den Schwerpunkt des Parabelsegmentes; diese Last ist von allen allein ihrer Größe nach sofort bekannt, da sie durch die Fläche des Parabelsegmentes dargestellt wird. Das Trapez $BFFC$ vom negativen Anteile der Momentenfläche zerlegen wir durch die Diagonale BF in zwei Dreiecke und führen die nach oben gekehrten Lasten dieser Dreiecke gesondert ein. Wir erreichen dadurch, daß auch die Richtungslinien II und IV, die durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehen, sofort angegeben werden können, wenn man auch die Inhalte der Dreiecke noch nicht kennt. Ebenso muß man übrigens auch verfahren, wenn eine Endöffnung belastet ist.

Wir tragen jetzt die hiermit ermittelten Richtungslinien der Lasten von I bis V in Abb. 202, die nichts mehr enthält, was noch als unbekannt anzusehen wäre, von neuem ein. Zugleich ziehen wir die Linie mm als Richtungslinie der Resultierenden von I und II, die ebenso wie im früheren Falle gefunden wird, da sich auch jetzt die Lasten I und II oder die Dreieckflächen AEB und BEF in Abb. 201 wie die Spannweiten AB und BC zueinander verhalten müssen. Ebenso kann die Linie nn als Richtungslinie der Resultierenden aus IV und V gefunden werden, indem man den Abstand zwischen IV und V im umgekehrten Verhältnisse der Spannweiten BC und CD teilt, d. h. indem man den Abstand von C bis V von IV aus nach rechts hin aufträgt.

Wir zeichnen ferner das durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehende Seilpolygon zu diesen Lasten, indem wir die Seilspannung 1 in beliebiger Richtung — entsprechend der beliebig zu wählenden Verzerrung der elastischen Linie — eintragen. Auf 1 folgen 2 und 3 sofort, da sich 1 und 3 auf mm schneiden müssen, während 2 durch B gehen muß. Die Fortsetzung 4, 5, 6 macht indessen zunächst einige Schwierigkeiten, da man vorerst nicht wissen kann, in welcher Richtung 4 weiter zu führen ist.

Man bedenke jedoch, daß die Richtungslinien von 4, 5, 6 ein Dreieck miteinander bilden müssen, das sechs vorgeschriebene Bedingungen zu erfüllen hat, wodurch es ausreichend gekennzeichnet wird. Die Seiten müssen nämlich durch drei vorgeschriebene Punkte gehen (4 durch den Schnittpunkt von 3 mit III, 5 durch C und 6 durch D) und die Ecken müssen auf drei gegebenen Geraden liegen, die parallel zueinander sind, nämlich auf den Geraden IV, nn und V.

Wir zeichnen zuerst irgendein Dreieck, das nur fünf der aufgezählten Bedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linie $6'$ in beliebiger Richtung durch D und reihen daran in leicht ersichtlicher Weise die Seiten $4'$ und $5'$. Das Dreieck $4'5'6'$ erfüllt nur die eine Bedingung nicht, daß $4'$ durch den Endpunkt von 3 gehen sollte. Denkt man sich das Dreieck $4'5'6'$ veränderlich, so daß es stets dieselben fünf Bedingungen erfüllt, so muß sich die Seite 4′ ebenfalls um einen festen Punkt drehen. Dieser Punkt G muß auf der Balkenachse liegen, da eines der Dreiecke 4′5′6′ mit allen Punkten und Seiten auf die Balkenachse fällt. Punkt G ist daher als Schnittpunkt von 4′ mit der Balkenachse bekannt.

Auch das gesuchte Dreieck 4 5 6 bildet eines der Dreiecke 4′5′6′ und wir wissen jetzt, daß 4 durch den Punkt G zu ziehen ist. Nachdem dies geschehen ist, macht auch die Fortsetzung 5, 6 keine Schwierigkeiten mehr.

Von den Seilpolygonseiten 1 bis 6 sind 1, 2, 5, 6 Tangenten an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene elastische Linie in den Auflagerpunkten, während die dazwischen eingeschobenen Seiten 3 und 4 in keiner unmittelbaren Beziehung zur elastischen Linie stehen.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, kann man dazu, wie im früheren Falle, nachträglich den Kräfteplan zeichnen. Da die Last III ihrer Größe nach bekannt ist, folgen daraus auch die Größen der übrigen Lasten. — Hiermit findet man die Inhalte der Dreiecksflächen I, II, IV, V in Abb. 201, so daß dem richtigen Auftragen von Abb. 201 kein Hindernis mehr im Wege steht. — Auch für den Fall, daß mehrere Öffnungen belastet sind, kann man so verfahren, wie es schon vorher bei dem einfacheren Falle des über zwei Öffnungen durchlaufenden Trägers auseinandergesetzt worden ist.

§ 67. Gleichung von Clapeyron.

Wenn jede Öffnung des durchlaufenden Trägers nur eine gleichförmig verteilte Belastung trägt, die aber bei den einzelnen Öffnungen verschieden groß sein darf (und bei einigen daher auch gleich Null sein kann), erhält man die Biegungsmomente über den Stützen, die man zum Auftragen der Momentenfläche nötig hat, auch sehr einfach auf analytischem Wege, mit Hilfe der von Clapeyron aufgestellten „Gleichung der drei Momente“.

Die Zahl der Öffnungen kann jetzt beliebig groß sein. Wir denken uns zwei aufeinanderfolgende Öffnungen, die wir als die $n$te und die $(n+1)$te bezeichnen, herausgegriffen. Die positiven Anteile der Momentenflächen bestehen wieder aus Parabelabschnitten, die negativen aus Trapezen. Abb. 203 gibt den zu den beiden Öffnungen gehörigen Teil der Momentenfläche an. Die Pfeilhöhen der Parabeln sind mit B_n und B_{n+1} bezeichnet. Trägt die $n$te Öffnung eine Belastung q_n für die Längeneinheit, so hat man für das Biegungsmoment B_n, das in der Mitte dieser Öffnung entstehen würde, wenn diese durch einen einfachen Träger überdeckt wäre,

$$B_n = \frac{q_n l_n^2}{8} \text{ und ebenso } B_{n+1} = \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{8}. \tag{86}$$

Die Momente M_n, M_{n+1} und M_{n+2} über den drei Stützen sind dagegen vorläufig unbekannt.

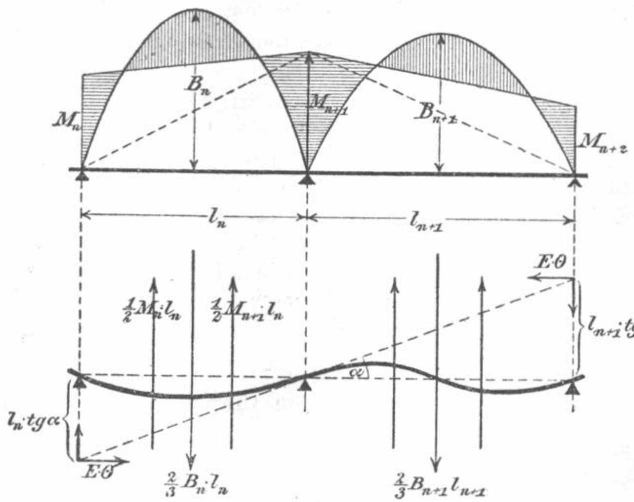

Abb. 203.

Im unteren Teile von Abb. 203 ist der zu den beiden Öffnungen gehörige Abschnitt der elastischen Linie des Balkens gezeichnet. Wir wissen, daß die elastische Linie als ein Seilpolygon aufgefaßt werden kann, dessen Belastungsfläche durch die Momentenfläche gebildet wird. Wie schon früher, ersetzen wir die zu jeder Öffnung gehörigen Lasten durch drei Resultierende von bekannter Lage. In der $n$ten Öffnung erhalten wir die durch die Mitte der Spannweite nach abwärts gehende Belastung $\frac{2}{3} B_n l_n$, indem der Inhalt der Parabel gleich Zweidrittel von dem Produkte aus Grundlinie und Höhe ist. Freilich ist B_n nicht eigentlich selbst die Höhe der Parabel, sondern das Biegungsmoment, das aus der Ordinate der Momentenfläche durch Multiplikation mit dem Horizontalzuge H_{I} des ersten Seilpolygons gefunden wird. Wir können uns aber alle Lasten mit dem konstanten Faktor H_{I} multipliziert denken, falls wir dann nur auch den Horizontalzug H_{II} des zweiten Seilpolygons, der nach Gl. 27 (S. 94)

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{E\Theta}{H_{\mathrm{I}}}$$

ist, mit H_{I} multiplizieren, ihn also gleich $E\Theta$ setzen. — Das Trapez mit den Seiten M_n und M_{n+1} zerlegen wir in zwei Dreiecke, deren Lasten mit $\frac{1}{2} M_n l_n$ und $\frac{1}{2} M_{n+1} l_n$ anzusetzen sind. Beide gehen nach oben hin und teilen die Spannweite l_n in drei gleiche Teile. Ebenso verfahren wir in der zweiten Öffnung.

Die durch die $n$te und die $(n+1)$te Stütze gehenden Seilspannungen müssen mit den drei zuvor aufgeführten Lasten im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben dafür eine Momentengleichung in bezug auf den $n$ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Die durch diesen Stützpunkt gehende Seilspannung fällt aus der Momentengleichung fort. Der Winkel, den die durch den $(n+1)$ten Stützpunkt gehende Seilspannung mit der Horizontalen bildet, sei mit α bezeichnet. Wir verlegen den Angriffspunkt dieser Seilspannung auf die durch die $n$te Stütze gehende Auflagervertikale und zerlegen sie dort in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Die vertikale Komponente geht durch den Momentenpunkt und tritt daher nicht in die Momentengleichung ein. Die horizontale Komponente ist der vorher schon zu $E\Theta$ festgestellte Horizontalzug des zweiten Seilpolygons. Dessen Moment ist gleich $-E\Theta l_n \operatorname{tg}\alpha$. Die Momente der drei Lasten lassen sich ebenfalls sofort anschreiben und im ganzen erhält man daher

$$-E\Theta l_n \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} M_n l_n \cdot \frac{l_n}{3} + \frac{2}{3} B_n l_n \cdot \frac{l_n}{2} - \frac{1}{2} M_{n+1} l_n \cdot \frac{2 l_n}{3} = 0.$$

Eine Momentengleichung von derselben Form schreiben wir ferner auch für die $(n+1)$te Öffnung und zwar in bezug auf den $(n+2)$ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Auch hier wird wieder die durch den $(n+1)$ten Stützpunkt gehende Seilspannung zum Schnitte mit der durch den Momentenpunkt gehenden Vertikalen gebracht und dort in zwei Komponenten zerlegt, von denen nur die Horizontalkomponente $E\Theta$ in die Momentengleichung eintritt. Die Gleichung lautet

$$-E\Theta l_{n+1}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{3}M_{n+2}l_{n+1}\cdot\frac{l_{n+1}}{3} - \frac{2}{3}B_{n+1}l_{n+1}\cdot\frac{l_{n+1}}{2}$$
$$+\frac{1}{2}M_{n+1}l_{n+1}\cdot\frac{2l_{n+1}}{3} = 0.$$

Wir wollen beide Gleichungen, nachdem die in ihnen vorkommenden Faktoren l_n bzw. l_{n+1} weggehoben sind und mit 6 multipliziert ist, noch einmal untereinander schreiben. Sie lauten dann

$$\left.\begin{aligned} &-6\,E\Theta\operatorname{tg}\alpha - M_n l_n + 2\,B_n l_n - 2\,M_{n+1}l_n = 0,\\ &-6\,E\Theta\operatorname{tg}\alpha + M_{n+2}l_{n+1} - 2\,B_{n+1}l_{n+1}\\ &\qquad\qquad + 2\,M_{n+1}l_{n+1} = 0.\end{aligned}\right\}\qquad(87)$$

Subtrahiert man sie voneinander, so heben sich die mit dem unbekannten Winkel α behafteten Glieder gegeneinander fort und nachdem man die Glieder passend geordnet hat, erhält man die Clapeyronsche Gleichung

$$\left.\begin{aligned} M_n l_n + 2\,M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2}l_{n+1}&\\ = 2\,(B_n l_n + B_{n+1}l_{n+1}).&\end{aligned}\right\}\qquad(88)$$

Zwischen je drei aufeinander folgenden Stützenmomenten M_n, M_{n+1} und M_{n+2} besteht eine Gleichung von dieser Form, in der alle übrigen Größen bekannt sind, da man für die B die dafür vorher schon aufgestellten Werte einsetzen kann. Schreibt man alle diese Gleichungen für je zwei aufeinander folgende Öffnungen an, so erhält man ebenso viele Gleichungen als unbekannte Stützenmomente. Diese lassen sich daher durch Auflösen der Gleichungen ermitteln, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Bei einem Träger, der über nur zwei Öffnungen durchgeht, sind z. B. die Momente M_n und M_{n+2} an den Enden gleich Null zu setzen und die Gleichung der drei Momente enthält nur noch das unbekannte Moment M_{n+1} über der Mittelstütze, das daraus sofort gefunden werden kann. Bei einem Träger über drei Öffnungen sind nur die Momente über der zweiten und der dritten Stütze unbekannt und die Gleichung kann zweimal angeschrieben werden, einmal für die erste und zweite und das nächste Mal für die zweite und dritte Öffnung. Bezeichnet man allgemein die Zahl der Öffnungen mit m, so ist die Zahl der unbekannten Stützenmomente gleich $(m - 1)$ und ebensoviele Gleichungen lassen sich auch nach der Clapeyronschen Formel ansetzen.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Enden frei aufliegen. Sollten diese eingespannt sein, so sind die zugehörigen Stützenmomente freilich nicht gleich Null zu setzen und man hat zwei Unbekannte mehr, als Gleichungen vorhanden sind. Dafür kann man aber in diesem Falle auch noch zwei neue Gleichungen angeben. Man nehme z. B. an, daß die $(n + 1)$te Öffnung in Abb. 203 die letzte und der Träger über der Endstütze $(n + 2)$ eingespannt sei. Dann muß auch die zugehörige Endtangente der elastischen Linie horizontal gerichtet sein. Schreibt man daher nun noch eine Momentengleichung für den $(n + 1)$ten Stützpunkt an, so hebt sich das Moment der letzten Seilspannung fort und man erhält unter dieser Voraussetzung

$$-\frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} + \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{2 l_{n+1}}{3} = 0,$$

oder nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren usf.

$$M_{n+1} + 2 M_{n+2} = 2 B_{n+1}. \tag{89}$$

und eine Gleichung von derselben Form gilt auch für die erste Öffnung, wenn der Träger auch über der ersten Stütze eingespannt ist, nämlich

$$M_2 + 2 M_1 = 2 B_1. \tag{90}$$

Die Clapeyronschen Gleichungen reichen daher in Verbindung mit diesen beiden auch bei eingespannten Enden aus, um alle unbekannten Stützenmomente zu berechnen.

Aufgaben.

51. Aufgabe. Für ein symmetrisch gestaltetes und symmetrisch belastetes Gewölbe soll eine Drucklinie eingezeichnet werden, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge geht.

Lösung. Die Hälfte des Gewölbequerschnittes ist in Abb. 204[a] gezeichnet; AB sei die Belastungslinie und BC die Symmetrieachse. Man ziehe durch den Anfangspunkt F der inneren Wölblinie einen lotrechten Fugenschnitt DE und teile die zwischen DE und BC liegende Belastungsfläche in eine Anzahl lotrechter Streifen von gleicher

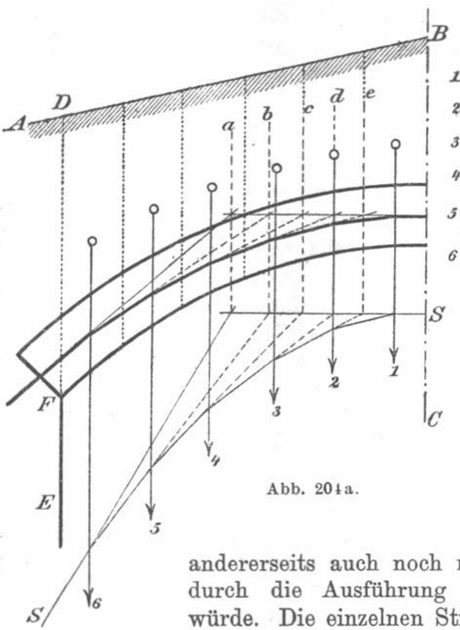

Abb. 204 a.

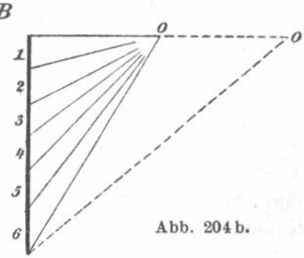

Abb. 204 b.

Breite. In der Abbildung sind sechs Belastungsstreifen gewählt, eine Zahl, die schon ausreicht, um die einzelnen Streifen näherungsweise als unendlich schmal betrachten zu können und die andererseits auch noch nicht so groß ist, daß dadurch die Ausführung der Zeichnung erschwert würde. Die einzelnen Streifen können genau genug als Trapeze betrachtet werden, deren Schwerpunkte aufgesucht und durch kleine Kreise hervorgehoben wurden. Die durch diese Schwerpunkte gehenden Lasten 1, 2 usf. sind wegen der gleichen Breite der Streifen den mittleren Höhen proportional. Im Kräfteplane, Abb. 204[b], wurden die Lasten durch $^1/_6$ der mittleren Streifenhöhe dargestellt. Hierauf wählt man einen Pol O beliebig und vereinigt die gegebenen Lasten durch das im unteren Teile von Abb. 204[a] gezeichnete Seileck SS. Durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen geht die Schwerlinie a der ganzen Belastungsfläche. Außerdem ermittelt man auch noch die Schnittpunkte der übrigen Seilstrahlen mit dem horizontalen Anfangsstrahle und zieht durch sie die Lotrechten b, c, d, e. Man kann diese Linien als Schwerlinien jener Teile der Belastungsfläche ansehen, die vom Scheitel bis zum fünften, vierten, dritten oder zweiten Belastungsstreifen reichen.

Nach diesen Vorbereitungen kann man leicht jede gewünschte Drucklinie in den Gewölbequerschnitt eintragen. Zunächst beachte man, daß wegen der vollständigen Symmetrie des Gewölbes und seiner Belastung auch die Drucklinie symmetrisch sein muß, daß also der Druck in der Scheitelfuge jedenfalls horizontal gerichtet ist. Da in der Aufgabe verlangt wird, die Drucklinie durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen zu führen, ziehen wir eine Horizontale durch die Mitte der Scheitelfuge, suchen deren Schnitt mit der Schwerlinie a auf und verbinden den Schnittpunkt mit der Mitte der Kämpferfuge. Die Verbindungslinie gibt die Richtungslinie der Kämpferdruckes an, da sich diese Kraft mit dem Drucke in der Scheitelfuge und dem Gewichte der Gewölbehälfte im Gleichgewichte halten und daher mit ihnen in demselben Punkte treffen muß. Zieht man zu dieser Linie eine Parallele im Kräfteplane durch den Endpunkt der Last 6, so erhält man den Pol O' des neuen, zur gesuchten Drucklinie gehörigen Kräfteplanes.

Anstatt aber die Drucklinie durch Ziehen von Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane zu konstruieren, ist es bequemer, darauf zu achten, daß sich jeder andere Seilstrahl der Drucklinie mit dem horizontalen Seilstrahle auf einer der Linien a, b, c, d, e schneiden muß. Dies folgt sowohl aus dem in § 11 bewiesenen Satze über die zu denselben Lasten, aber zu verschiedenen Polen im Kräfteplane gehörigen Seilecke, als auch daraus, daß jene Linien als Schwerlinien der zwischen der Scheitelfuge und den übrigen Fugenschnitten gelegenen Teile der Belastungsfläche angesehen werden können.

Um nachträglich aus dem Kräfteplane auf die Größe des Fugendruckes und die dadurch hervorgebrachte Kantenpressung zu schließen, beachte man, daß jede Strecke im Kräfteplane zunächst einen Flächeninhalt angibt, nämlich ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Breite jedes Belastungsstreifens und dessen Höhe gleich dem Sechsfachen der betreffenden Strecke ist. Dieser Fläche entspricht ein Mauervolumen und diesem ein Gewicht.

52. *Aufgabe. Nach welchem Gesetze muß die innere Wölblinie gestaltet sein, wenn die Belastungsfläche nach oben durch eine horizontale Gerade begrenzt wird und eine Stützlinie möglich sein soll, die mit der inneren Wölblinie zusammenfällt?*

Lösung. In bezug auf ein durch den Bogenanfang in horizontaler und vertikaler Richtung gelegtes Koordinatensystem seien die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Wölblinie x und y, die

Höhe der Belastungslinie über dem Koordinatenursprunge a, die Spannweite l und die als gegeben zu betrachtende Pfeilhöhe des Bogens f. Die Höhe der Belastungsfläche bei der Abszisse x ist dann gleich $a - y$ zu setzen und die Differentialgleichung der Wölblinie lautet, da sie mit einer Stützlinie zusammenfallen soll,

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = y - a.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y = a + A e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + B e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}.$$

Die Integrationskonstanten A und B folgen aus den Grenzbedingungen, nach denen $y = 0$ für $x = 0$ und $y = f$ für $x = \frac{l}{2}$ werden muß. Dazu kommt zur Bestimmung des gleichfalls unbekannten Horizontalschubes H die Bedingung, daß im Scheitel, also für $x = \frac{l}{2}$ der Differentialquotient von y zu Null werden muß. Die drei Gleichungen lassen sich nach den Unbekannten A, B und H ohne Schwierigkeit auflösen und durch Einsetzen der gefundenen Werte erhält man für y

$$y = a - \frac{a-f}{2}\left\{\left(\frac{a+\sqrt{2af-f^2}}{a-f}\right)^{\frac{2x-l}{l}} + \left(\frac{a+\sqrt{2af-f^2}}{a-f}\right)^{\frac{l-2x}{l}}\right\},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

53. *Aufgabe. Auf einen Pfeiler stützen sich von beiden Seiten her Gewölbe in ungleicher Höhe (Abb. 205); man soll die Stabilität des Pfeilers untersuchen.*

Lösung. Der rechts angreifende Bogen ist halbkreisförmig. In einem solchen Falle ist der untere Teil des Bogens nicht mehr zum Gewölbe, sondern schon als Bestandteil des Widerlagers zu rechnen. Jedenfalls muß nämlich der Pfeiler den vom Gewölbe kommenden Horizontalschub aufnehmen. Dies kann aber nicht oder wenigstens nicht ausschließlich durch die horizontale Kämpferfuge geschehen, sondern die unteren Teile des Gewölberückens, die vom Pfeilermauerwerke gegen eine horizontale Verschiebung gestützt sind, müssen sich daran wesentlich mit beteiligen. Die bei der Behandlung der Gewölbe vorangestellte Annahme, daß auf den Wölbrücken nur Lasten in lotrechter Richtung einwirkten, ist demnach im unteren Teile des halbkreisförmigen Bogens sicher nicht mehr erfüllt, d. h. dieser Teil ist bei der Untersuchung des Gewölbes nach den dafür früher gegebenen Lehren ganz auszuschließen und dafür als Bestandteil des Widerlagers zu behandeln.

Nun fragt sich freilich, wie weit man diesen unteren Teil rechnen soll. In der Abbildung ist der Fugenschnitt xx gezogen und an-

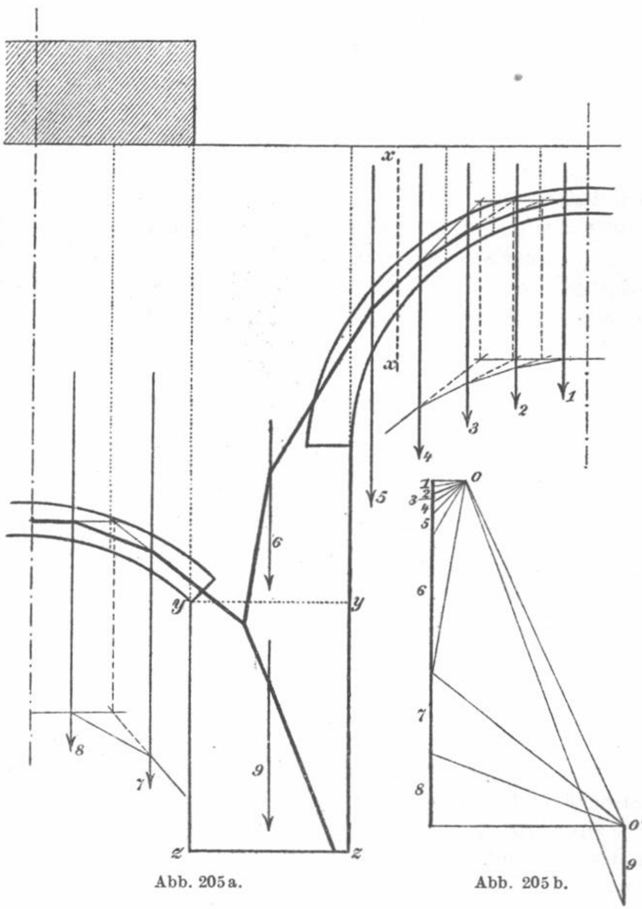

Abb. 205a. Abb. 205b.

genommen, daß der rechts davon liegende Teil als Gewölbe, der links davon liegende als Widerlager anzusehen sei. Man könnte aber xx ganz gut auch etwas mehr nach links oder mehr nach rechts rücken. Im allgemeinen empfiehlt es sich in solchen zweifelhaften Fällen, die beiden äußersten Lagen, die man schätzungsweise noch für annehmbar halten kann, in Aussicht zu nehmen und die Betrachtung für die beiden extremen Fälle gesondert durchzuführen. Dabei muß nicht gerade verlangt werden, daß das Gleichgewicht auch für beide extreme Fälle noch hinreichend gesichert sei; man weiß vielmehr umgekehrt, daß Gewölbeeinstürze nur dann zu erfolgen pflegen, wenn überhaupt auf keine Art mehr Gleichgewicht zustande kommen kann. Immerhin wird man sich nicht damit beruhigen, nachgewiesen zu haben, daß das Gewölbe gerade noch an der Grenze des Gleichgewichts steht, sondern man wird noch einen gewissen Spielraum für die Gleichgewichtszustände verlangen, die keinen Einsturz befürchten lassen. Hierüber wird man sich am besten dadurch einen Überblick verschaffen, daß man die äußersten Fälle in Betracht zieht. In Abb. 205 ist indessen nur für eine mittlere Lage des Schnittes xx die Konstruktion durchgeführt; für andere Annahmen von xx wäre sie in derselben Weise zu wiederholen.

Für den rechts von xx liegenden Teil des Bogens zeichnet man nun eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der Fuge xx geht. Dies wird genau so durchgeführt wie in Aufg. 51 und bedarf hier keiner weiteren Besprechung. Den zum Schnitte xx gehörigen Fugendruck setzt man dann mit dem Gewichte des links von xx gehörigen Abschnittes 5 und die daraus hervorgehende Resultierende weiterhin mit dem Pfeilergewichte 6 zusammen, das bis zum Kämpfer des unteren Bogens, also bis zu dem mit yy bezeichneten horizontalen Fugenschnitte gerechnet ist.

Hierauf zeichnet man auch die zum unteren Bogen gehörige Drucklinie, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge gelegt wird. Im Kräfteplane Abb. 205^b kann O' als der zu dieser Drucklinie gehörende Pol angesehen werden. Die für die erste Zusammensetzung der Lasten dienenden Seilpolygone wurden übrigens mit Hilfe von Kräfteplänen konstruiert, die in die Abbildung nicht mit aufgenommen sind. — Vereinigt man die vom oberen Bogen und dem Pfeilergewichte 6 herstammende Kraft mit dem Kämpferdrucke des unteren Bogens, so erhält man den im Kräfteplane durch die Strecke OO' dargestellten resultierenden Fugendruck für den Fugenschnitt yy. Dieser ist dann ferner noch mit dem zwischen yy und zz liegenden Pfeilergewichte 9 vereinigt, womit der Druck auf den Pfeilerfuß gefunden wird. — Wenn man will, kann man zwischen yy und zz auch noch einige andere horizontale Fugenschnitte einschalten und die zugehörigen resultierenden Fugendrücke in derselben Weise konstruieren. Man erhält dann den Verlauf der Stützlinie im Pfeiler noch etwas genauer. Die Berechnung der Kantenpressung in der Fuge zz kann nach den früher gegebenen Anleitungen nun auch noch leicht ausgeführt werden.

In Abb. 205 ist angenommen, daß die Belastungslinie der bleibenden Last nach oben durch eine horizontale Gerade begrenzt sei, daß aber auch eine über dem linken Bogen stehende verhältnismäßig große bewegliche Last hinzukomme, die ebenfalls in einer Übermauerungshöhe ausgedrückt ist. Diese könnte ebensogut auch über dem rechten Bogen stehen und die Untersuchung wäre für diesen Belastungsfall zu wiederholen. Dabei zeigt sich indessen, daß der hier betrachtete Fall der gefährlichere für den Bestand des Pfeilers ist.

Schließlich bemerke ich noch, daß außer den durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen gezogenen Stützlinien natürlich auch noch andere möglich sind und darunter solche, die dem Bestande des Pfeilers günstiger sind als jene. Es ist daher selbst dann, wenn für keine Lage der vorher eingeschätzten Linie xx Gleichgewicht des Pfeilers ohne Überschreitung der zulässigen Kantenpressung möglich ist, immer noch keineswegs zu erwarten, daß der Pfeiler nun auch wirklich einstürzen müsse. Zu erwarten ist weit eher, daß nach geringen Bewegungen des Pfeilers ein anderer Gleichgewichtszustand in den Wölbbögen zustande kommt, der für die Beanspruchung des Pfeilers günstiger ist. Erst dann, wenn es auch durch solche Veränderungen in den Lagen der Stützlinien in den Gewölben nicht möglich sein sollte, einen mit der Festigkeit des Materials verträglichen Gleichgewichtszustand herzustellen, wäre ein Einsturz ohne Zweifel zu erwarten.

54. Aufgabe. Ein Träger ist auf beiden Seiten eingespannt und trägt die in Abb. 206 angegebenen Lasten. Man soll die Gestalt der Momentenfläche nach der in § 66 besprochenen Methode ermitteln.

Lösung. Die Momentenfläche wird jedenfalls aus einem Seilpolygone $ABCDE$ in Abb. 207 gebildet, das zu den gegebenen Lasten sofort gezeichnet werden kann, dessen Schlußlinie FG aber vorläufig unbekannt ist, da deren Lage von den Auflagerkräften und Einspannmomenten abhängig ist. Die Endtangenten 1 und 4 der elastischen Linie in Abb. 208 müssen beide horizontal sein und auf dieselbe Gerade fallen. Zwischen den Seilspannungen 1 und 4 des zweiten Seilpolygons liegen die aus der Momentenfläche hervorgehenden Lasten I, II, III. Man ermittelt die Schwerlinie und den Inhalt des positiven Anteils $ABCDE$ der Momentenfläche und kennt damit die Last II nach Lage und Größe. Von der Lastlinie I weiß man, daß sie eine Schwerlinie des Dreieckes AFG bildet und daher um ein Drittel der Spannweite vom linken Auflager entfernt ist. Die zum Dreiecke AGE gehörige Lastlinie ist um ebensoviel vom rechten Auflager entfernt. Man zieht die Seilspannung 2 in Abb. 208 in beliebiger Richtung (entsprechend der willkürlichen

Verzerrung der elastischen Linie) und schiebt 3 dazwischen. Hierauf kann der zu dem Seilpolygone gehörige Kräfteplan in Abb. 209 konstruiert werden, indem man die der Größe nach bekannte Last II in einem passend gewählten Maßstabe abträgt und Parallelen zu

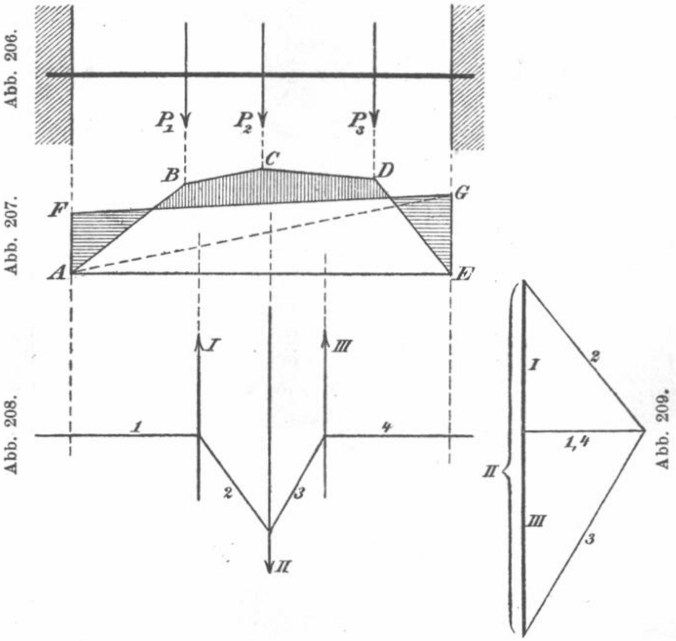

Abb. 206 bis 209.

den Seilstrahlen zieht. Dadurch findet man die Größen der Lasten I und III in demselben Maßstabe, d. h. die Flächen der Dreiecke AFG und AGE in Abb. 207. Hiermit kennt man auch die Höhen AF und GE dieser Dreiecke, d. h. die beiden Einspannmomente des Balkens und die Verbindungslinie FG liefert die gesuchte Schlußlinie, womit die Aufgabe gelöst ist.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Seite

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q, \qquad (2)\ 71$$

Differentialgleichung der Seilkurve, H Horizontalzug, q Belastung auf die Längeneinheit bezogen.

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}, \qquad (4)\ 72$$

Gleichung der Seilkurve für gleichförmige Lastverteilung.

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \qquad (5)\ 72$$

f Pfeil der Seilkurve, l Spannweite, Q gesamte (gleichförmig verteilte) Last.

$$b = l + \frac{q^2 l^3}{24\,H^2} = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}, \qquad (7 \text{ u. } 8)\ 74$$

Näherungsformel für die Bogenlänge b des Parabelbogens.

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma\frac{ds}{dx}, \qquad (9)\ 75$$

Differentialgleichung der Kettenlinie, γ Belastung für die Längeneinheit.

$$s = \frac{H}{\gamma}\sinh\frac{\gamma x}{H}, \qquad (14)\ 77$$

Formel für die Bogenlänge s der Kettenlinie, vom Scheitel bis zu einem Punkte mit der Abszisse x.

$$y = a\cosh\frac{x}{a}, \qquad (17)\ 78$$

Gleichung der Kettenlinie, a deren Parameter.

Seite

$$S = \gamma y,$$ (18) **78**

S Seilspannung der Kettenlinie an einem Punkte mit der Ordinate y.

$$\Theta = F \cdot F',$$ (20) **91**

Θ Trägheitsmoment einer Querschnittsfläche vom Inhalte F. Die Fläche F' wird von einer Seilkurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossen.

$$H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I},$$ (27) **94**

H_{II} Horizontalzug der Seilkurve, die die elastische Linie eines Balkenträgers angibt, wenn die Momentenfläche als Belastungsfläche gewählt wird, E Elastizitätsmodul, Θ Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes und H_I Horizontalzug des ersten Seilpolygons, das die Momentenfläche darstellt.

$$m = 2n - 3,$$ (33) **173**

m Zahl der Stäbe für das statisch bestimmte ebene Fachwerk von n Knotenpunkten.

$$X = -\frac{T_e}{u_e},$$ (36) **193**

X Spannung eines Stabes in einer Grundfigur (Methode von Henneberg), T_e Spannung im Ersatzstabe unter den gegebenen Lasten, u_e Spannung infolge eines Zuges von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes.

$$m = 3n - 6,$$ (54) **244**

m Zahl der notwendigen Stäbe im räumlichen statisch bestimmten Fachwerke von n Knotenpunkten.

$$m = n + f - 2,$$ (58) **249**

Satz von Euler, m Zahl der Kanten, n Zahl der Ecken, f Zahl der Flächen in einem einfach zusammenhängenden Polyedermantel.

$$r = \frac{l}{EF},$$ (59) **303**

r Stabkonstante, die zu einem Stabe von der Länge l und dem Querschnitte F gehört, E Elastizitätsmodul;

$$\Delta l = rS,$$ (60) **303**

Δl elastische Längenänderung des Stabes unter der Spannung S.

Seite

$$x = \frac{1}{P}\sum T\varDelta l = \frac{1}{P}\sum rST, \qquad (62)$$ **306**

Maxwell-Mohrsche Formel für die elastische Verschiebung x eines Knotenpunktes im Sinne der Lastrichtung von P; S Stabspannungen, die zu den wirklich vorhandenen Lasten gehören, T die Spannungen, die durch die willkürlich hinzugedachte Last P hervorgebracht würden.

$$X = -\frac{\Sigma urT}{\Sigma u^2 r}, \qquad (67)$$ **324**

Maxwell-Mohrsche Formel für die Spannung X im überzähligen Stabe eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes, T Spannungen, die im „Hauptnetze“ (nach Fortnahme des überzähligen Stabes) durch die gegebenen Lasten hervorgebracht würden, u Spannungen im Hauptnetze infolge einer längs der Richtungslinie des überzähligen Stabes angebrachten Zugspannung von der Lasteinheit, r Stabkonstanten. Die Summen sind über den überzähligen mit zu erstrecken.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma urT \cdot \Sigma v^2 r - \Sigma vrT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r \cdot \Sigma v^2 r};\\ X &= \frac{\Sigma vrT \cdot \Sigma u^2 r - \Sigma urT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r \cdot \Sigma v^2 r}, \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$ **328**

dasselbe für den Fall des zweifach statisch unbestimmten Fachwerkes, X, Y die Spannungen in den beiden überzähligen Stäben, v die Spannungen im Hauptnetze für eine Zugspannung von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des zweiten überzähligen Stabes.

$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r}, \qquad (72)$$ **331**

X Spannung im überzähligen Stabe (k) eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes, wenn die Temperatur des überzähligen Stabes um t^0 erhöht wird, η Ausdehnungskoeffizient.

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6Ru}{f^2}, \qquad (82)$$ **373**

Formel für die Kantenpressung σ im Gewölbe, die durch den im Abstande u von der Fugenmitte angreifenden Fugendruck R (für die Längeneinheit) hervorgebracht wird, wenn sich

Seite

die Spannungsverteilung über die ganze Fuge von der Länge f erstreckt;

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3\left(\frac{f}{2} - u\right)}, \tag{83}$$ 374

dasselbe für den Fall, daß sich die Fuge auf der andern Seite öffnet.

$$y = -\frac{1}{H}\int dx \int q\,dx + C_1 x + C_2, \tag{84}$$ 376

Gleichung der Stützlinie eines Gewölbes für lotrechte Fugenschnitte, H Horizontalschub, C_1 und C_2 unbestimmte Integrationskonstanten, q Belastungsintensität (Last für die Längeneinheit) an der Stelle x.

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right) ds, \tag{85}$$ 382

A Formänderungsarbeit im Wölbbogen, R Fugendruck, E Elastizitätsmodul, M Moment des Fugendruckes für die Fugenmitte, f Fugenlänge.

$$\left.\begin{aligned} M_n l_n + 2\,M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} \\ = 2\,(B_n l_n + B_{n+1} l_{n+1}), \end{aligned}\right\} \tag{88}$$ 404

Gleichung der drei Momente für den durchlaufenden Balken (Clapeyron); M_n, M_{n+1} M_{n+2} die unbekannten Momente über drei aufeinander folgenden Stützen, B_n und B_{n+1} die von den zugehörigen, gleichförmig verteilten Lasten in den Mitten beider Öffnungen unter der Voraussetzung getrennter Überdeckung der einzelnen Öffnungen hervorgerufenen Biegungsmomente, l_n und l_{n+1} die Spannweiten der beiden Öffnungen.

$$M_{n+1} + 2M_{n+2} = 2\,B_{n+1} \tag{89}$$ 405

und

$$M_2 + 2\,M_1 = 2\,B_1, \tag{90}$$ 405

Gleichungen für die beiden Trägerenden, die den Clapeyronschen Gleichungen (88) hinzutreten, wenn der Träger an den Enden eingespannt ist; $n+2$ letzte Stütze, sonst dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Falle.