Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Graphische Statik

Föppl, August

1912

Sechster Abschnitt. Die elastische Formänderung des Fachwerks und das statisch unbestimmte Fachwerk

urn:nbn:at:at-ubi:2-7787

Sechster Abschnitt.

Die elastische Formänderung des Fachwerks und das statisch unbestimmte Fachwerk.

§ 49. Methode von Maxwell und Mohr.

Wir betrachten einen statisch bestimmten Fachwerkträger, nehmen an, daß er irgendwie belastet werde und stellen uns die Aufgabe, die Verschiebung zu berechnen, die ein beliebig ausgewählter Knotenpunkt infolge der elastischen Formänderung erfährt. Es ist dabei gleichgültig, ob es sich um ein ebenes oder um ein räumliches Fachwerk handelt; wenn auch des besseren Verständnisses wegen zunächst an ein ebenes Fachwerk als Beispiel gedacht werden möge.

Bei einem steifen Stabverbande sind Gestaltänderungen nur infolge der elastischen Längenänderungen der Stäbe möglich. Wir müssen daher zunächst diese berechnen. Die Stabspannungen im statisch bestimmten Träger, die zu der gegebenen Belastung gehören, können auf Grund der Lehren der vorhergehenden Abschnitte ermittelt werden. Ferner ist nach dem Elastizitätsgesetze

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{S}{EF},$$

wenn S die ganze vom Stabe aufzunehmende Spannung, F den Querschnitt, E den Elastizitätsmodul, l die Länge und Δl die elastische Längenänderung bedeuten. Die Gleichung gibt auch das Vorzeichen von Δl richtig an, wenn Zugspannungen durch positive Werte von S und Verlängerungen durch positive Werte von Δl ausgedrückt werden.

Für jeden Stab faßt man die drei konstanten und von vornherein gegebenen Werte von l, E und F zu einer einzigen

Konstanten zusammen, die mit r bezeichnet werden möge, indem man

$$r = \frac{l}{EF} \tag{59}$$

setzt. Hierbei beachte man, daß die in dieser Weise definierte Stabkonstante jedenfalls stets positiv sein muß, da weder l, noch E, noch F negativ werden können.

Mit Einführung dieser Bezeichnung erhält man einfacher

$$\Delta l = rS \tag{60}$$

und nachdem die Spannungen S durch einen Kräfteplan oder sonstwie ermittelt sind, kennt man hiermit auch die Werte der Δl für alle Stäbe.

Unsere Aufgabe kommt daher nun auf die folgende hinaus: Gegeben sind die elastischen Längenänderungen aller Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerkträgers; man soll die dadurch hervorgebrachte Verschiebung irgend eines Knotenpunktes berechnen.

Diese Aufgabe ist eine rein geometrische. Sie kam uns schon früher in nahezu gleicher Form bei der analytischen Untersuchung des Ausnahmefalles beim ebenen Fachwerke in § 39 vor. Damals war δl an Stelle von Δl geschrieben und vorausgesetzt, daß δl unendlich klein sei. Wie die δl zustande gekommen seien, war damals gleichgültig. Wir können daher unter den δl jetzt auch die nach Gl. (60) berechneten Längenänderungen Δl verstehen, die ebenfalls sehr klein gegen die ursprünglichen Stablängen und gegen die Knotenpunktskoordinaten sind.

Zwischen den unbekannten Verschiebungskomponenten δx_i usf. und den gegebenen δl bestehen, wie wir schon damals sahen, ebensoviele Gleichungen ersten Grades als Unbekannte. Gl. (50) S. 213 gibt eine dieser Gleichungen an und in den Gleichungen (51) ist das ganze System übersichtlich zusammengestellt. Analytisch gesprochen kommt hiernach die Lösung unserer Aufgabe auf die Auflösung des Gleichungssystems (51) hinaus.

Der hiermit angegebene Weg zur Lösung der Aufgabe ist aber viel zu umständlich, als daß er für die praktische Anwendung brauchbar wäre. So wenig wie die Benutzung der Gleichungen (48) zur wirklichen Lösung des Spannungsproblems eignen sich die Gleichungen (51) zur Lösung des Verschiebungsproblems. Man muß sich vielmehr nach Hilfsmitteln umsehen, die das Ziel in einfacherer Weise zu erreichen gestatten.

Ein einfacher Weg zur Lösung der Aufgabe ist zuerst von Maxwell angegeben worden. Die sehr kurz gefaßte Abhandlung des großen Physikers über diesen Gegenstand, für den sich der Leserkreis physikalischer Zeitschriften damals sehr wenig interessierte, blieb aber ziemlich unbeachtet und jedenfalls fand die Methode zunächst gar keinen Eingang in die technische Praxis. Erst als durch Mohr derselbe Weg von neuem selbständig aufgefunden worden war, gelangte er zur Kenntnis und zur Beachtung in technischen Kreisen.

Das Maxwell-Mohrsche Verfahren gründet sich auf die Anwendung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten. Um etwa die Senkung x zu berechnen, die irgendein Knotenpunkt in senkrechter Richtung unter dem Einflusse der gegebenen Längenänderungen Δl der Stäbe erfährt, denke man sich an dem Knotenpunkte eine Last P in dieser Richtung willkürlich angebracht und berechne die Spannungen T, die von P in allen Stäben hervorgebracht werden. Dieser Belastungsfall und das ihm zugehörige Spannungsbild haben gar nichts mit jenem zu tun, das zu den Längenänderungen Δl und der dadurch veranlaßten Formänderung des Trägers führte. Man benutzt es vielmehr nur, um für jeden Knotenpunkt des Trägers ein System von Stabspannungen angeben zu können, die unter sich und mit der Last P und den zu P gehörigen Auflagerkräften im Gleichgewichte stehen.

Auf dieses Gleichgewicht wird nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten angewendet. Erteilt man jedem Knotenpunkte eine beliebige (virtuelle) Verschiebung, so ist die Summe der Arbeiten aller sich an ihm im Gleichgewichte haltenden Kräfte gleich Null. Dabei steht es uns frei, als virtuelle Verschiebungen jene anzunehmen, die der Knotenpunkt bei der zu untersuchenden Formänderung in Wirklichkeit erfährt. Alle in dieser Weise für die einzelnen Knotenpunkte gebildeten Arbeitsgleichungen denken wir uns addiert; wir kommen dadurch auf eine einzige Gleichung, die ausspricht, daß die Gesamtsumme der Arbeiten aller zum Spannungsbilde P, T gehörigen Kräfte an sämtlichen Knotenpunkten für jede Gestaltänderung des Trägers und daher auch für jene, die wir untersuchen wollen, zu Null werden muß.

Diese Arbeitsgleichung wollen wir nun tatsächlich anschreiben. Zu ihrer Vereinfachung dient dabei die Bemerkung, daß jede Stabspannung zwei Glieder zur Gesamtsumme aller Arbeitsleistungen beiträgt, die sich auf einfache Weise zu einem einzigen vereinigen lassen. In Abb. 153 ist irgendein Stab herausgezeichnet, der die Ordnungsnummer i haben möge. Wenn die Stabspannung T_i positiv ist, also eine Zugspannung bedeutet, haben die von dem Stabe auf seine Endpunkte übertragenen Kräfte die in der Abbildung angegebenen Pfeilrichtungen.

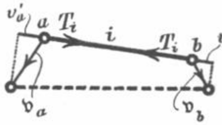


Abb. 153.

Die Endknotenpunkte a und b des Stabes i mögen nun irgendwelche Wege $\mathfrak{v}_a$ und $\mathfrak{v}_b$ zurücklegen, die als unendlich klein gegenüber der Länge des Stabes angesehen werden können. Um die von T_i am Knotenpunkte a geleistete Arbeit zu berechnen, projizieren wir den Weg $\mathfrak{v}_a$ auf die Richtungslinie von T_i; die Arbeit ist dann gleich $-T_i \cdot v'_a$, also negativ, wenn v'_a in die Verlängerung des Stabes fällt. Das zugehörige Glied am Knotenpunkte b kann ebenso gebildet werden und im ganzen haben wir daher als Summe der Arbeitsleistungen der Stabspannung T_i an beiden Knotenpunkten

$$-T_i(v'_a + v'_b).$$

Die in der Klammer stehende Summe hat aber eine einfache Bedeutung. Da nämlich die Knotenpunktswege als unendlich klein vorausgesetzt wurden, kann sich die Richtung des Stabes i nach Ausführung der Gestaltänderung des Trägers auch nur unendlich wenig von der ursprünglichen Richtung unterscheiden. Bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung genau, kann daher die Projektion des Stabes in der neuen Lage auf die ursprüngliche Richtung als ebenso groß angesehen werden, wie der Stab jetzt selbst geworden ist. Die Summe $v'_a + v'_b$ gibt demnach an, um wieviel sich der Stab bei der Gestaltänderung des Trägers verlängert hat, d. h. sie ist gleich der bei der Stellung der Aufgabe von vornherein gegebenen Längenänderung Δl_i. Für die Summe der zur Stabspannung T_i gehörigen Arbeitsleistungen hat man daher nun den einfachen, auf gegebene Größen zurückgeführten Ausdruck

$$-T_i \Delta l_i$$

und in der gleichen Form lassen sich auch alle übrigen, von den Stabspannungen herrührenden Glieder der Arbeitsgleichung paarweise zusammenfassen.

Es bleiben noch die Arbeitsbeträge der äußeren Kräfte aufzustellen. Als Last kam beim Spannungsbilde P, T nur P vor und der in die Richtung von P fallende Weg des Angriffspunktes von P bildet die vorher schon mit x bezeichnete Unbekannte, auf deren Berechnung es ankommt. Die Arbeit von P ist also gleich Px zu setzen. Die Auflagerkräfte endlich, die durch P hervorgerufen werden, leisten keine Arbeit; bei den festgehaltenen Auflagerpunkten deshalb nicht, weil der Weg gleich Null ist und bei den auf Auflagerbahnen geführten, weil der Weg senkrecht zur Richtung des Auflagerdruckes steht.

Die Arbeitsgleichung nimmt daher die einfache Form

$$Px - \Sigma T \Delta l = 0 \tag{61}$$

an, wobei Σ eine Summierung vorschreibt, die sich auf alle Stäbe des Trägers erstreckt. Setzt man noch für Δl seinen Wert aus Gl. (60) ein und löst nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{1}{P}\sum T \Delta l = \frac{1}{P}\sum rST. \tag{62}$$

Die Ausrechnung der Summe erfolgt am besten in tabellarischer Form, wobei man die einzelnen Produkte mit Hilfe des Rechenschiebers ermittelt, da die hiermit zu erzielende Genauigkeit für praktische Zwecke vollständig ausreicht.

Allerdings wird mit Hilfe von Gleichung (62) zunächst nur die Komponente der Verschiebung des ins Auge gefaßten Knotenpunktes in der vorher gewählten Richtung — also etwa senkrecht nach abwärts — gefunden. Es steht aber nichts im Wege, das Verfahren noch einmal zu wiederholen, indem man die Last P hierbei in horizontaler Richtung angreifen läßt. Auch zu diesem Belastungsfalle lassen sich die Stabspannungen T' berechnen und nachdem dies geschehen ist, findet man auch die Verschiebungskomponente des Knotenpunktes in der zweiten Richtung durch nochmalige Anwendung von Gl. (62). Durch beide Verschiebungskomponenten wird dann die Gesamtverschiebung des Knotenpunktes nach Richtung und Größe vollständig bekannt.

Wenn man für eine größere Zahl von Knotenpunkten die Verschiebungen angeben soll, wird freilich die immer wieder von neuem erforderliche Durchführung der ganzen Rechnung sehr umständlich. Das Verfahren ist dann nicht mehr recht brauchbar und man ersetzt es besser durch ein anderes, das wir in § 51 kennen lernen werden.

§ 50. Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Man betrachte zwei Knotenpunkte I und II irgendeines statisch bestimmten Trägers, z. B. des in nebenstehender Abbildung gezeichneten. Man denke sich zuerst den Träger im Knotenpunkte I durch die beliebig gerichtete Kraft Q belastet und später, nachdem die Last Q wieder entfernt ist, die in irgendeiner Richtung gehende Last P am Knotenpunkte II aufgebracht. Die Spannungsbilder und die Formänderungen des Trägers sind in beiden Belastungsfällen sonst völlig voneinander verschieden. In einer Hinsicht besteht aber zwischen beiden Formänderungen eine sehr merkwürdige Übereinstimmung, die durch den von Maxwell aufgestellten Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ausgesprochen wird.

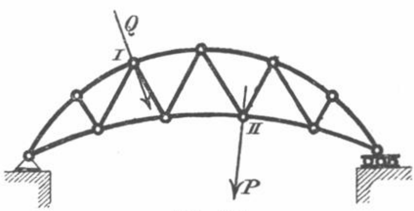


Abb. 154.

Wenn nämlich die Last Q am Knotenpunkte I angreift, verschiebt sich der Knotenpunkt II in irgendeiner Richtung. Wir wollen uns aber jetzt nur um jene Komponente der Verschiebung von II kümmern, die in die für P gewählte Richtungslinie fällt: Diese wird durch die rechtwinklige Projektion des Verschiebungsweges von II auf die Richtungslinie von P angegeben. Ebenso wollen wir umgekehrt, wenn nur die Last P am Knotenpunkte II angreift, die Komponente der Verschiebung des Knotenpunktes I in der für Q festgesetzten Richtung ins Auge fassen. Der Satz von Maxwell sagt nun aus, daß die beiden angegebenen Verschiebungen gleich groß sind, falls auch die Lasten P und Q von gleicher Größe sind.

Um den Satz zu beweisen, berechnen wir zunächst die Verschiebung von II in der Richtung von P unter dem Einflusse der Last Q nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode. Diese Methode schreibt vor, daß wir vor allem die Spannungen S berechnen, die von der Last Q in den Stäben des Trägers hervorgerufen werden und daß wir dann auch eine Kraft P am Knotenpunkte II in jener Richtung anbringen, für die wir die Verschiebung bestimmen wollen und die von dieser in den Stäben hervorgerufenen Spannungen T berechnen. Bezeichnen wir dann die gesuchte Verschiebung des Knotenpunktes II unter dem Einflusse der Last Q mit x, so finden wir, da alle Bezeichnungen in der gleichen Bedeutung wiederkehren, x einfach nach der Gleichung (62)

$$x = \frac{1}{P} \sum rST.$$

Ebenso können wir auch die Verschiebung y des Knotenpunktes I in der Richtung von Q unter dem Einflusse der Last P berechnen. Es ist dazu nicht nötig, nochmals neue Kräftepläne zu zeichnen. Denn die Stabspannungen S', die jetzt unter der Last P in Wirklichkeit zustande kommen, stimmen genau mit den Spannungen T überein, die zu der vorher nur willkürlich und in Gedanken aufgebrachten Last P berechnet wurden. Ebenso können wir die vorher wirklich vorhandene Last Q und das ihr zugehörige Spannungsbild S jetzt in demselben Sinne als willkürlich hinzugedachtes Spannungsbild gebrauchen, wie es nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren vorgeschrieben ist. Wir wollen dies dahin ausdrücken, daß die

Spannungen T' — wie wir sie zur Herstellung einer Übereinstimmung mit der früher gebrauchten Bezeichnung nennen können — gleichbedeutend mit den Spannungen S des vorher betrachteten Belastungsfalles sind.

Die Anwendung von Gl. (62) auf die durch die Last P verursachte Formänderung des Trägers liefert nun, wenn wir diese Übereinstimmungen beachten,

$$y = \frac{1}{Q}\sum rS'T' = \frac{1}{Q}\sum rTS.$$

Dabei zeigt sich, daß die in den Ausdrücken für x und y vorkommenden Summen einander gleich sind. Man hat daher

$$\frac{x}{y} = \frac{Q}{P} \tag{63}$$

oder, um auf die einfachste Form des Satzes zu kommen,

$$x = y \quad \text{für} \quad P = Q.$$

Die Leser des dritten Bandes wissen, daß der Satz nicht auf statisch bestimmte Fachwerkträger beschränkt ist, sondern für beliebig gestaltete Körper oder Systeme von Körpern gilt, die dem Hookeschen Gesetze von der Verhältnisgleichheit zwischen Formänderungen und Spannungen gehorchen. Es schien aber nützlich, hier einen von dem dort gegebenen ganz abweichenden Beweis des Satzes vorzuführen, der sich unmittelbar auf Fachwerkträger bezieht, weil in der Folge von dem Satze gerade in dieser Form noch ein wichtiger Gebrauch gemacht werden wird.

§ 51. **Der Verschiebungsplan.**

Die schon in § 49 behandelte Aufgabe, die Verschiebungen der Knotenpunkte eines Trägers zu ermitteln, die zu gegebenen Längenänderungen Δl der Fachwerkstäbe gehören, kann auch auf rein graphischem Wege gelöst werden. Die Lösung läßt sich auf die wiederholte Lösung einer einfacheren Aufgabe zurückführen, die sich wie folgt aussprechen läßt:

Man kennt bereits die Verschiebungen von zwei Ecken eines Stabdreiecks und überdies die Längenänderungen der zu diesem Dreiecke gehörigen Stäbe; man soll die Verschiebung der dritten Ecke bestimmen.

Um zur Lösung zu gelangen, wollen wir zunächst von dem Umstande absehen, daß die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind. In diesem Falle gelingt die Lösung schon mit den einfachsten Hilfsmitteln, wie aus Abb. 155 zu erkennen ist. In dieser Abbildung sind I, II, III die ursprünglichen Lagen der Knotenpunkte des Stabdreieckes und die zwischen ihnen gezogenen Linien geben die Stäbe vor der Formänderung an. Gegeben sind nach Voraussetzung die Verschiebungen $\mathfrak{v}_I$ und $\mathfrak{v}_{II}$ der Knotenpunkte I und II und damit haben wir auch, wenn wir diese Strecken abtragen, die Lagen I′ und II′ dieser Knotenpunkte nach der Formänderung.

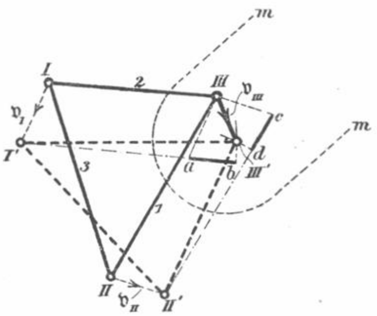


Abb. 155.

Um auch die neue Lage III′ des Punktes III zu erhalten, brauchen wir nur von I′ und II′ aus zwei Kreisbögen mit den jetzt zutreffenden Längen der Verbindungsstäbe 1 und 2 zu schlagen. Der Schnittpunkt liefert III′ und die Verbindungslinie von III nach III′ die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$.

Wir wollen aber, um auf eine Konstruktion zu kommen, die sich auch für den Fall sehr kleiner Knotenpunktswege mit hinreichender Genauigkeit ausführen läßt, anstatt dessen zunächst die ursprüngliche Länge des Stabes 2 von I′ aus, und zwar in der ursprünglichen Richtung des Stabes 2 abtragen. Wir kommen dadurch auf den Punkt a. Dann tragen wir die Längenänderung $\varDelta l_2$ des Stabes 2 von a aus ab, gleich ab. In der Abbildung ist angenommen, daß sich der Stab 2 verlängere; im andern Falle wäre ab in entgegengesetzter Richtung von a aus abzutragen. Erst durch den so gewonnenen Punkt b ziehen wir nun den Kreisbogen vom Mittelpunkte I′ aus. Wie man sieht, handelt es sich bei dieser Vorschrift nur um ein genauer umschriebenes Verfahren, wie die Länge des Stabes 2 nach der Formänderung in die Zeichnung eingetragen werden soll.

Hierauf verfahren wir ebenso mit dem Stabe 1. Dessen ursprüngliche Länge wird von II′ aus in der ursprünglichen Richtung abgetragen, wodurch wir zum Punkte c gelangen, worauf die Längenänderung $\Delta l_1 = cd$ von c aus auf dieser Linie angesetzt wird. In der Abbildung ist angenommen, daß sich der Stab 1 verkürzt habe. Durch den auf diese Weise gefundenen Punkt d legen wir hierauf den Kreisbogen dIII′ vom Mittelpunkte II′ aus. Der Schnittpunkt beider Kreisbögen liefert den Punkt III′.

Der wirklichen Ausführung des bis dahin beschriebenen Verfahrens steht freilich das Hindernis im Wege, daß die Knotenpunktswege und die Änderungen der Stablängen so klein sind, daß sich das Dreieck I′ II′ III′ vom Dreiecke I II III kaum oder gar nicht auseinander halten läßt. Die Schwierigkeit besteht jedoch nur darin, daß in der Zeichnung neben sehr kleinen Strecken auch sehr viel größere Strecken vorkommen. Denn so klein auch die Knotenpunktswege und die Stabverlängerungen sein mögen: bei einer passenden Wahl des Maßstabes lassen sie sich doch in zweckmäßiger Größe auftragen. Die Stablängen selbst kann man dann freilich nicht in dieselbe Zeichnung aufnehmen. Dies ist aber auch gar nicht nötig. Man denke sich nämlich den durch die Linie mm abgegrenzten Teil der Figur in der Umgebung des Knotenpunktes III von dem Reste abgeschnitten. Schon dieser Abschnitt der Figur genügt vollständig, um den Knotenpunktsweg von III zu ermitteln. Man kann nämlich diesen Teil der ganzen Figur in einem beliebigen Maßstabe auftragen, ohne dazu den sehr viel größeren Rest nötig zu haben. Zugleich sind alle Strecken in diesem Teile klein von der Ordnung der Knotenpunktswege und der Stabverlängerungen, so daß kein Hindernis besteht, den Maßstab so zu wählen, daß alle Strecken eine für das Auftragen oder Abmessen mit dem Zirkel bequeme Größe erlangen.

Freilich braucht man eigentlich streng genommen die Punkte I′ und II′, um von ihnen aus die Kreisbögen von b und d nach III′ zu schlagen. Aber gerade der Umstand, daß die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind, der uns zuerst störend im Wege stand, hilft uns jetzt zur Überwindung dieser Schwierigkeit. Ein kleiner Kreisbogen, der zu einem großen Halbmesser gehört, kann nämlich genau genug als geradlinig angenommen werden. Die Richtung der das Bogenelement ersetzenden Strecke muß natürlich senkrecht zum Halbmesser stehen und dessen Richtung ist in dem Abschnitte der Figur ohnehin schon durch die Strecke *ab* bzw. *cd* vertreten.

In Abb. 156 ist der in Frage kommende Teil von Abb. 155 noch einmal besonders herausgezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Teil für sich gezeichnet werden kann, ohne daß man zuvor Abb. 155 entworfen zu haben braucht. Von einem beliebigen Punkte, der hier der Übereinstimmung mit Abb. 155 wegen, mit III bezeichnet ist, den man aber sonst den Pol des Verschiebungsplanes nennt, trage man zunächst die gegebenen Knotenpunktswege $\mathfrak{v}_{I}$ und $\mathfrak{v}_{II}$ in einem passend gewählten Maßstabe ab. Dadurch erhält man die vorher mit *a* und *c* bezeichneten Punkte. Hieran schließen sich die Stabverlängerungen Δl_1 und Δl_2, die parallel zu den gegebenen Stabrichtungen zu ziehen sind. Hiermit hat man die Punkte *d* und *b* und es fehlen nur noch die Kreisbögen *b*III′ und *d*III′. In Abb. 156 mußten diese wirklich als Kreisbögen gezogen werden, weil diese Abbildung aus Abb. 155 losgetrennt war, in der die Knotenpunktswege von gleicher Größenordnung mit den Stablängen angenommen wurden. Hiermit hängt es auch zusammen, daß wir beim Übergange von Abb. 155 zu Abb. 156 keine Veranlassung hatten, den Maßstab zu vergrößern. In jenen Fällen, für die man die Verschiebungspläne tatsächlich zu konstruieren hat, ist aber Abb. 156 in weit größerem Maßstabe als Abb. 155 zu zeichnen und die Kreisbögen *b*III′ und *d*III′ gehören dann zu Halbmessern von vielen Metern Länge. Es genügt dann, *b*III′ als gerade Linie senkrecht zu *ab* und ebenso *d*III′ senkrecht zu *cd* zu ziehen. Die Verbindungslinie vom Pole des Verschiebungsplanes zum Schnittpunkte III′ der beiden Geraden gibt die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ des Knotenpunktes III nach Größe und Richtung an.

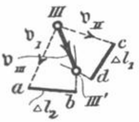


Abb. 156.

Die einfachere Aufgabe, die wir uns zunächst stellten, ist hiermit gelöst und es bleibt nur noch zu zeigen, wie man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens auch die zu gegebenen Stabverlängerungen gehörenden Knotenpunktsverschiebungen in einem beliebigen „einfachen" Fachwerkträger ermitteln kann. Hierzu bemerke ich, daß es für die Konstruktion des Verschiebungsplanes gleichgültig ist, ob der Träger statisch bestimmt oder unbestimmt ist, falls man nur die Verlängerungen aller Stäbe bereits kennt. Man kann dann die überzähligen Stäbe bei der Konstruktion ganz unberücksichtigt lassen. Nachher muß sich von selbst zeigen, daß die Verlängerungen der überzähligen Stäbe mit den im Verschiebungsplane gefundenen Wegen ihrer Endknotenpunkte in Übereinstimmung stehen.

In Abb. 157[a] ist ein Balkenträger gezeichnet, von dem die durch Schattenstriche hervorgehobenen Stäbe gedrückt, die andern gezogen sein sollen. Die Stabspannungen sollen durch Zeichnen eines Kräfteplanes und die Stabverlängerungen Δl nach Gl. (60) bereits berechnet sein.

Den Verschiebungsplan zeichnet man nebenan als besondere Figur (Abb. 157[b]), so etwa wie einen Kräfteplan. Der Pol, von dem aus die Knotenpunktswege nach Größe und Richtung aufzutragen sind, ist in der Abbildung mit dem Buchstaben O bezeichnet. Die Stabverlängerungen, die in passender Vergrößerung angegeben wurden, sind durch ausgezogene kleine Strecken dargestellt und nur mit den Nummern der zugehörigen Stäbe bezeichnet. Die gestrichelten Linien des Verschiebungsplanes bilden den Ersatz für die in den vorhergehenden Auseinandersetzungen besprochenen Kreisbögen.

Beim Anfange stößt man auf eine kleine Schwierigkeit. Man beginnt nämlich vom festen Auflagerpunkte I her. Nun weiß man zwar, daß dessen Verschiebung gleich Null ist. Von den Verschiebungen der beiden andern Ecken II und III des ersten Stabdreieckes I, II, III weiß man aber noch nichts. Es fehlt also hier eine der Voraussetzungen, von denen wir bei der Lösung der einfacheren Aufgabe für das Stabdreieck ausgingen.

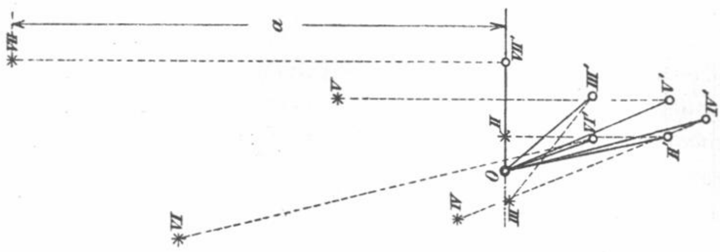


Abb. 157 c.

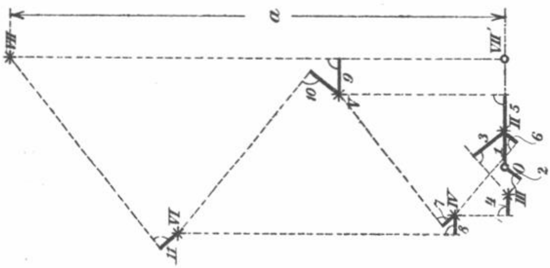


Abb. 157 b.

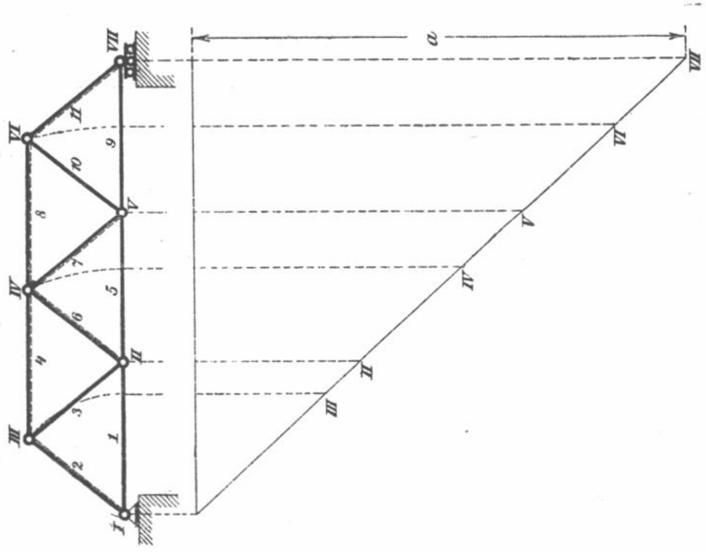


Abb. 157 a.

Man hilft sich damit, daß man die ganze Aufgabe in zwei Teile zerlegt, die man nacheinander erledigt. Man denkt sich nämlich mit dem Träger zunächst nur die Änderung der Gestalt vorgenommen, während man die Lage, in die er dabei übergeht, einstweilen als unbestimmt betrachtet. Die Lage, die der Träger nachher einnimmt, wird durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Nun kann man zwar die dem festen Auflager punkte vorgeschriebenen Bedingungen sofort verwerten, indem man seinen Knotenpunktsweg gleich Null setzt. Die Auflagerbedingung am andern Ende, durch die der Knotenpunkt VII auf seiner horizontalen Auflagerbahn gehalten wird, läßt sich aber von Anfang an nicht benutzen, wenn man die Konstruktion des Verschiebungsplanes vom linken Trägerende her beginnt. Man sieht daher von der Erfüllung dieser Auflagerbedingung einstweilen ganz ab und denkt sich den Träger, nachdem er die ihm auferlegte Gestaltänderung erfahren hat, in irgendeiner andern Lage gegeben.

Diese ganz willkürlich auszuwählende Lage kann z. B. dadurch näher bezeichnet werden, daß man sich die Richtung des Stabes 1 festgehalten denkt. In diesem Falle muß sich der Knotenpunkt II in horizontaler Richtung verschieben.

Hiermit ist — freilich unter Aufopferung der unmittelbaren Erreichung des gesteckten Zieles — die vorher erwähnte Schwierigkeit beim Anfange des Verschiebungsplanes gehoben. Wir tragen die Längenänderung Δl_1 oder kurz 1 des Stabes 1 vom Pole des Verschiebungsplanes horizontal nach rechts hin ab. Der Stab ist nämlich nach Voraussetzung gezogen und der Knotenpunkt II entfernt sich daher von I, d. h. er bewegt sich nach rechts hin. An den Endpunkt der Strecke 1 schreiben wir II.

Nun steht der Konstruktion des Verschiebungsweges von III nach dem vorher besprochenen Verfahren kein Hindernis mehr im Wege. Wir tragen von II aus Δl_3 nach links oben hin ab, da der Stab 3 gezogen ist, der Knotenpunkt III sich also infolge der Stabverlängerung von II entfernt, d. h. nach links oben hin bewegt. Ebenso tragen wir Δl_2 von O aus nach links unten hin ab, weil Stab 2 gedrückt ist, sich also verkürzt. Die durch die Endpunkte von Δl_3 und Δl_2 gezogenen Senkrechten, die zum Ersatze der betreffenden Kreisbögen dienen, schneiden sich im Punkte III (entsprechend dem Punkte III' nach der Bezeichnung in Abb. 156) des Verschiebungsplanes. Die Strecke vom Pole O nach III gibt den Verschiebungsweg des Knotenpunktes III an für den Übergang des Trägers in seine neue Gestalt, aber freilich nicht zugleich in die richtige Lage, sondern in die anstatt deren willkürlich gewählte.

Nachdem III im Verschiebungsplane gefunden ist, sucht man den Punkt IV auf. Dieser Knotenpunkt ist durch die Stäbe 4 und 6 an III und II angeschlossen. Die Verschiebungswege von III und II sind schon im Verschiebungsplane enthalten. Wir brauchen also nur an III die Stabverlängerung Δl_4 und Δl_6 an II anzutragen und durch die Endpunkte dieser Strecken Senkrechte zu ziehen, um IV zu erhalten. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Stäbe 4 und 6 nach Voraussetzung gedrückt sind, daß sich also IV den Knotenpunkten II und III nähert. Demnach ist die Strecke 4 von III aus nach links hin, 6 von II aus nach links unten hin abzutragen gewesen.

In derselben Weise findet man dann auch der Reihe nach die Punkte V, VI und VII des Verschiebungsplanes. Man tut zwar gut, sich jeden Schritt, der hierzu führt, wieder im einzelnen zu überlegen und dabei namentlich auf den Sinn zu achten, in dem die Δl jedesmal anzuschließen sind. Es ist aber nicht nötig, die Beschreibung fortzusetzen, da ich dabei immer nur von neuem dieselben Worte zu wiederholen hätte.

Nachdem man bis zum rechten Auflagerpunkte VII gelangt ist, zeigt sich, daß man mit der willkürlichen Annahme, der Stab 1 ändere seine Richtung nicht, von der man ausgegangen war, nicht das Rechte getroffen hat. Darum werden aber unsere Ergebnisse noch nicht wertlos; sie bedürfen nur einer Verbesserung, die leicht an ihnen anzubringen ist.

Jedenfalls haben wir nämlich Knotenpunktsverschiebungen gefunden, die, wenn sie wirklich vorgenommen werden, den Träger in jene Gestalt überführen, die er infolge der Stabverlängerungen tatsächlich annimmt. Wir brauchen also nur noch eine Lagenänderung ohne Gestaltänderung vorzunehmen, nämlich den Träger nachträglich um den festen Auflagerpunkt I so lange zu drehen, bis der andere Auflagerpunkt VII in die ihm vorgeschriebene Auflagerbahn gelangt. Hierbei beschreibt VII einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt I ist. Da dieser Kreisbogen aber nur sehr klein im Verhältnisse zum Halbmesser ist, genügt es, ihn im Verschiebungsplane durch eine gerade Strecke zu ersetzen, die zur Richtung des Halbmessers von I nach VII senkrecht steht. Diese Strecke ist in Abb. 157[b] mit a bezeichnet; sie reicht vom Punkte VII bis zu der durch den Pol O gezogenen Horizontalen.

Erst die Linie O VII′ gibt den wahren Verschiebungsweg des Knotenpunktes VII nach Größe und Richtung in dem gewählten Maßstabe an. Aus der Figur folgt, daß dieser Weg gleich der Summe der Stabverlängerungen Δl_1, Δl_5 und Δl_9 ist. Dies war auch von Anfang an vorauszusehen, da sich VII von dem festen Auflager um den Betrag der elastischen Dehnung des ganzen Untergurtes entfernen muß.

Beim Zurückdrehen des seiner Gestalt nach unveränderlichen Trägers aus der zuerst willkürlich gewählten Lage in jene, die er in Wirklichkeit einnehmen muß, beschreiben auch alle andern Knotenpunkte Kreisbögen um I als Mittelpunkt. Auch die hierdurch bedingten Verschiebungswege können wegen ihrer Kleinheit (im Verhältnisse zu den Halbmessern) durch gerade Linien im Verschiebungsplane ersetzt werden, die zu den aus der Trägerfigur in Abb. 157[a] zu entnehmenden Halbmesserrichtungen senkrecht stehen. Um ihre Größen zu finden, bedenke man, daß alle diese Kreisbögen zu gleichen Zentriwinkeln gehören, nämlich jeder zu einem Zentriwinkel, der gleich der Drehung ist, die wir mit der unveränderlichen Trägerfigur vornehmen müssen, um VII auf seine Auflagerbahn zurückzuführen. Die bei der Drehung zurückgelegten Wegestrecken verhalten sich daher wie die Halbmesser der Kreisbögen und da der Weg von VII bereits gleich der Strecke a gefunden ist, können auch die Längen der übrigen Wege sofort ermittelt werden.

Man trage etwa, wie es in Abb. 157[a] geschehen ist, die Strecke a nach abwärts auf, schlage die Entfernung der einzelnen Knotenpunkte von I auf die Horizontale durch I herab und ziehe von da aus Parallelen zu a. Aus der Zeichnung lassen sich dann die Größen der Verschiebungswege der zugehörigen Knotenpunkte ohne weiteres entnehmen.

Man braucht jetzt nur noch die nach Richtung und Größe bekannten Verschiebungswege an die zugehörigen Punkte des Verschiebungsplanes anzusetzen, um sofort zu jenen Punkten zu gelangen, deren Lage zum Pole die wahre Verschiebung nach Größe und Richtung angibt. Um die Deutlichkeit der Figur nicht zu beeinträchtigen, ist dies in Abb. 157[b] selbst nicht ausgeführt worden. Vielmehr sind die richtigen Lagen der Punkte im Verschiebungsplane in Abb. 157[c] besonders herausgezeichnet worden. Eigentlich hat man sich Abb. 157[c] mit Abb. 157[b] zu einer einzigen Figur übereinander gedeckt vorzustellen, so nämlich, daß sich die Pole O in beiden Abbildungen decken.

Im übrigen ist das Verfahren noch mancher Abänderungen fähig. Es ist z. B. nicht nötig, bei der Konstruktion des Verschiebungsplanes vom festen Auflager her zu beginnen. Man kann sich auch irgendeinen Knotenpunkt in der Mitte und einen von ihm ausgehenden Stab der Richtung nach vorläufig festgehalten denken und von hier aus den Verschiebungsplan nach beiden Seiten hin konstruieren. Dann findet man freilich, daß keiner der Auflagerpunkte die ihm vorgeschriebenen Auflagerbedingungen erfüllt. Durch Drehung um einen Pol, dessen Lage leicht zu ermitteln ist, kann man aber nachträglich den seiner Gestalt nach bereits veränderten und während der Drehung daher unveränderlichen Träger in jene Lage zurückbringen, die durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben ist.

Dieses Verfahren hat den Vorzug vor dem vorher beschriebenen, daß der Verschiebungsplan einen kleineren Umfang annimmt und daß man daher bei einem gegebenen Raume der Zeichenfläche den Maßstab für das Auftragen der Stabverlängerungen und der Verschiebungen größer wählen kann, wodurch die Genauigkeit erhöht wird. Man bemerkt nämlich schon an dem einfachen Beispiele, das vorher behandelt wurde, daß der Raum, den der Verschiebungsplan einnimmt, in immer stärkerem Verhältnisse anwächst, je weiter man vorschreitet.

Ferner steht es auch frei, die einzelnen Polygone, aus denen sich der Verschiebungsplan zusammensetzt, in die Trägerfigur selbst einzutragen, so daß an jedem Knotenpunkt jenes Polygon angesetzt wird, das vorher dazu diente, die Lage des dem Knotenpunkte entsprechenden Punktes des Verschiebungsplanes aufzusuchen. Mancher wird dieses Verfahren vielleicht für anschaulicher halten und es soll daher durch eine besondere Figur, die sich ebenfalls auf das vorher behandelte Beispiel bezieht, erläutert werden.

Zugleich sind hierbei noch einige Abänderungen getroffen, die sich unter diesen Umständen als zweckmäßig erweisen. Die Knotenpunktsverschiebungen sind in Abb. 158 von jedem Knotenpunkte aus in vergrößertem Maßstabe abgetragen und in der Zeichnung durch starke Striche hervorgehoben. Zuerst trägt man $\mathfrak{v}_{II}$ vom Knotenpunkte II aus in beliebiger Richtung ab, indem man nur dafür sorgt, daß die Horizontalkomponente von $\mathfrak{v}_{II}$ gleich Δl_1 (in der Abbildung Δ_1 geschrieben) ist. Dann projiziert man $\mathfrak{v}_{II}$ auf die Richtung von 3

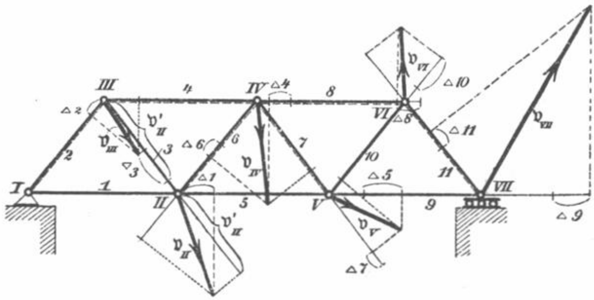


Abb. 158.

und trägt die Projektion v'_{II} von III aus in gleicher Richtung auf 3 ab. Wenn der Stab III seine Länge nicht änderte, müßte der Knotenpunkt III nach der Verschiebung auf der durch den Endpunkt von v'_{II} gezogenen Senkrechten liegen. Da aber 3 gezogen ist und sich verlängert, muß die Projektion von III einen größeren Abstand von der Projektion von II auf die Richtung von 3 haben. Man hat daher Δ_3 vom Endpunkte von v'_{II} aus nach dem Knotenpunkte III hin abzutragen und durch den Endpunkt eine Senkrechte zu ziehen, auf der der Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ enthalten sein muß. Ferner nähert sich der Knotenpunkt III dem festen Auflagerpunkte I wegen der Verkürzung des Stabes 2. Man trägt daher Δl_2 von III aus nach I hin ab und zieht durch den Endpunkt eine Senkrechte zur Stabrichtung. Der Schnittpunkt von ihr mit der vorigen Senkrechten liefert den Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$.

Um zur Verschiebung des Knotenpunktes IV zu gelangen, der mit II und III durch die Stäbe 6 und 4 verbunden ist, projiziert man zunächst $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{III}$ auf die Richtungen der Verbindungsstäbe 6 und 4. Die beiden Projektionen trägt man am Knotenpunkte IV im gleichen Sinne auf den Stabrichtungen ab. Hätten sich die Längen der Verbindungsstäbe nicht geändert, so müßte der Knotenpunkt IV nach der Formänderung auf den durch die Endpunkte jener Strecken gezogenen Senkrechten liegen. Um auch die Längenänderungen zu berücksichtigen, tragen wir Δ_4 an die eine Strecke nach links hin, Δ_6 an die andere nach links unten hin an, weil die Stäbe 4 und 6 nach Voraussetzung gedrückt sind und der Knotenpunkt IV sich daher den Knotenpunkten II und III nähert. Wenn wir jetzt Senkrechten zu den Stabrichtungen an den Endpunkten von Δ_4 und Δ_6 errichten, erhalten wir als Schnittpunkt die neue Lage des Punktes IV oder mit andern Worten den Endpunkt des Verschiebungsweges $\mathfrak{v}_{IV}$.

In derselben Weise kann man bis zum Ende hin fortfahren. Sollte man die zuvor willkürlich gewählte Richtung von $\mathfrak{v}_{II}$ zufällig gerade richtig getroffen haben, so müßte sich dies darin zeigen, daß die Verschiebung $\mathfrak{v}_{VII}$ des rechten Auflagerpunktes horizontal ausfiele. Im allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man muß daher nachträglich noch um I zurückdrehen, bis VII in die horizontale Auflagerbahn gelangt. Dies kann wieder so wie vorher ausgeführt werden. Man setzt an den Endpunkt jeder Strecke $\mathfrak{v}$ den bei der Drehung beschriebenen Weg an. Freilich darf man hierbei nicht etwa wirklich einen Kreisbogen aus dem Punkte I schlagen. Da alle Stabverlängerungen und Knotenpunktswege in viel größerem Maßstabe über die in kleinem Maßstabe gezeichnete Trägerfigur gedeckt sind, lassen sich die Teile des Verschiebungsplanes nicht in unmittelbare Beziehung zu den Teilen der Trägerfigur setzen. Jener Punkt I, von dem aus man den Kreisbogen zu ziehen hätte, liegt vielmehr viel weiter ab, so wie es der Maßstab des Verschiebungsplanes im Gegensatze zum Maßstabe der Trägerfigur erfordert. Man ersetzt daher, wie schon früher, den Kreisbogen durch eine zum Radius senkrecht gezogene Gerade. Die Richtung des Radius wird hierbei durch die vom Knotenpunkte I der Trägerfigur gezogene Verbindungslinie richtig angegeben. — Um die Deutlichkeit der Figur nicht durch Hinzufügung weiterer Linien zu beeinträchtigen, ist von der Ausführung der Zurückdrehung in Abb. 158 abgesehen worden.

§ 52. Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger.

Wenn ein Stab oder eine Auflagerbedingung überzählig ist, gibt es zu jedem Belastungsfalle unendlich viele Spannungsbilder. Denkt man sich nämlich den überzähligen Stab oder die überzählige Auflagerbedingung entfernt und bringt dafür an den Endpunkten des Stabes oder an dem Auflagerpunkte äußere Kräfte von beliebiger Größe an, so wie sie von dem Stabe oder durch den Auflagerzwang ausgeübt werden könnten, so sind dadurch die Spannungen in dem übrig bleibenden statisch bestimmten Träger eindeutig bestimmt. Da man aber die Größe der Stabspannung des überzähligen Stabes oder der überzähligen Auflagerkomponente beliebig wählen kann, hat man im ganzen Träger unendlich viele Spannungsbilder, die vom Standpunkte der Mechanik des materiellen Punktes oder des starren Körpers aus alle gleich möglich sind.

Von allen diesen verschiedenen Spannungszuständen kann aber nur einer wirklich zustande kommen und um ihn unter allen möglichen herauszufinden, bedarf es noch einer über die Lehren der Mechanik starrer Körper hinausreichenden Kenntnis über das Verhalten des Trägers gegenüber aufgebrachten Lasten. Hierzu verhilft uns die Lehre von den elastischen Formänderungen. Wenn das Material, aus dem die Stäbe angefertigt sind, das Hookesche Gesetz befolgt, hört jede Unbestimmtheit auf und die Stabspannungen können in eindeutiger Weise berechnet werden.

Wenn diese Berechnung nur für einen einzelnen Belastungsfall erforderlich ist, führt die Anwendung des bereits in § 49 besprochenen Maxwell-Mohrschen Verfahrens, das sich auf die jetzt vorliegende Aufgabe ohne weiteres übertragen läßt, am schnellsten zum Ziele. Man denke sich irgendeinen Stab entfernt, der als der überzählige betrachtet werden kann. Der übrigbleibende statisch bestimmte Rest des Trägers möge als das „Hauptnetz“ bezeichnet werden. Wir berechnen zunächst die Spannungen, die im Hauptnetze unter den gegebenen Lasten auftreten müßten, wenn der überzählige Stab wirklich fehlte. Dies ist nach den Lehren der früheren Abschnitte stets möglich, da das Hauptnetz nach Voraussetzung einen statisch bestimmten Träger bildet. Man wird also etwa einen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan T nennen wollen. Die aus ihm entnommene, zu irgendeinem Stabe mit der Ordnungsnummer i gehörige Stabspannung sei mit T_i bezeichnet. Auch das Spannungsbild T gehört zu jenen, die wir für den ganzen statisch unbestimmten Träger vorher als möglich hingestellt hatten; es ist jenes, bei dem die Spannung des überzähligen Stabes willkürlich gleich Null gesetzt ist.

Hierauf betrachte man das Hauptnetz unter der Annahme, daß alle äußeren Lasten entfernt sind, während an den Endpunkten des überzähligen Stabes willkürlich Lasten angebracht werden, die gleich der Lasteinheit sind und jene Richtung haben, wie eine vom überzähligen Stabe auf seine Endpunkte ausgeübte Zugspannung. Diesem Belastungsfalle entsprechen Spannungen in den Stäben des statisch bestimmten Hauptnetzes, die sich ebenfalls auf bekannte Art leicht ermitteln lassen. Man wird hierzu einen neuen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan u nennen wollen. Die im Stabe i jetzt auftretende Spannung sei mit u_i bezeichnet. Wirkt ferner längs der Richtungslinie des überzähligen Stabes nicht eine Zugspannung von der Lasteinheit, sondern eine Spannung beliebigen Vorzeichens vom Werte X, so entsprechen ihr im Hauptnetze die Spannungen uX.

Aus den beiden Spannungsbildern T und uX lassen sich nun auch alle andern zusammensetzen, die den Gleichgewichtsbedingungen an allen Knotenpunkten genügen. Es muß sich also auch jenes darunter befinden, das wir suchen und das mit dem Buchstaben S bezeichnet werden soll. Es wird sich nur darum handeln, der hierbei allein noch vorkommenden Unbekannten X den richtigen Wert zu erteilen. Die wahre Spannung S_i im Stabe i wird sich also in der Form

$$S_i = T_i + u_i X \tag{64}$$

darstellen lassen.

Die elastische Längenänderung Δl_i des Stabes i folgt hieraus mit Benutzung der in Gl. (59) und (60) S. **303** eingeführten Stabkonstanten r zu

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i (T_i + u_i X). \tag{65}$$

Um die Unbekannte X zu berechnen, wenden wir, wie schon in § 49, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten an. Wir beziehen diesen Satz auf irgend ein Spannungsbild von der Art u. Da es aber nicht nötig ist, gerade das Spannungsbild u selbst zu nehmen, wollen wir, um dies klarer hervortreten zu lassen, annehmen, daß im überzähligen Stabe irgendeine Spannung C — also etwa eine Montierungsspannung — auftrete, die im Stabe i eine Spannung Cu_i zur Folge hat. Äußere Lasten, abgesehen von Auflagerkräften, die dadurch hervorgerufen werden können, kommen in diesem Spannungsbilde nicht vor.

Die Spannungen Cu stehen also an allen Knotenpunkten unter sich, oder an den Auflagerpunkten mit den dort auftretenden Auflagerkräften im Gleichgewichte. Denken wir uns den Knotenpunkten, also den Angriffspunkten dieser Kräfte, beliebige (virtuelle) Verschiebungen erteilt, so ist die Summe der von ihnen geleisteten Arbeiten gleich Null. Wir denken uns, wie schon bei der früheren ähnlichen Betrachtung in § 49, diese Arbeitsgleichung für jeden Knotenpunkt angeschrieben und hierauf alle Gleichungen addiert. Dabei können wir wieder je zwei Glieder, die sich auf dieselbe Stabspannung beziehen, zu einem Gliede von der Form

$$-\,Cu \cdot \Delta l$$

vereinigen.

Hierbei ist es zunächst gleichgültig, welche virtuellen Verschiebungen wir voraussetzen wollen, wenn nur Δl im vorhergehenden Ausdrucke die dazu gehörige Stabverlängerung angibt. Es steht uns daher jedenfalls auch frei, jene Knotenpunktswege als die virtuellen Verschiebungen anzusehen, die bei der Formänderung des statisch unbestimmten Trägers unter dem Einflusse der gegebenen Lasten in Wirklichkeit zustande kommen. Die hierbei auftretenden Stabverlängerungen sind aber durch Gl. (65) — abgesehen von der darin noch vorkommenden Unbekannten X — bereits festgestellt. Wir können also die von den Stabspannungen herrührenden Glieder der

Arbeitsgleichung ohne weiteres anschreiben; zum Stabe i z. B. gehört das Glied

$$- C u_i r_i (T_i + u_i X).$$

Es bleiben nur noch die Arbeiten der Auflagerkräfte übrig, die zum Spannungsbilde Cu gehören. Diese Arbeiten sind aber gleich Null, weil sich die festgehaltenen Auflagerpunkte überhaupt nicht bewegen, während bei den längs Auflagerbahnen verschieblichen der Weg senkrecht zur Kraftrichtung steht. Die Arbeitsgleichung reduziert sich daher auf

$$- \Sigma C u r (T + u X) = 0. \tag{66}$$

Die Summierung hat sich auf alle Stäbe mit Einschluß des überzähligen zu erstrecken; für ihn ist, wie aus der Ableitung hervorgeht, $T = 0$ und $u = +1$ zu setzen.

Das Vorzeichen vor der Summe ist ohne Bedeutung und auch der vorher eingeführte, unbestimmt gelassene Faktor C, der in allen Gliedern wiederkehrt, kann wieder gestrichen werden. Die Gleichung enthält daher nur die eine Unbekannte X. Die Summe läßt sich in zwei Glieder trennen und aus der so entstehenden Gleichung

$$\Sigma u r T + X \Sigma u^2 r = 0$$

erhält man durch Auflösung nach X

$$X = - \frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}. \tag{67}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Denn alle in den Summen vorkommenden Glieder können auf Grund der beiden Kräftepläne T und u und der Angaben über die Längen und Querschnitte der Stäbe zahlenmäßig angegeben werden. Wie groß man den Elastizitätsmodul annehmen will, bleibt übrigens gleichgültig, falls alle Stäbe aus demselben Material bestehen, da E nach Einsetzen des Wertes von r aus Gl. (59) in jedem Gliede von Zähler und Nenner in gleicher Weise auftritt und sich daher forthebt.

Nachdem X bekannt ist, folgt auch die Spannung jedes andern Stabes nach Gl. (64).

Bisher nahm ich an, daß ein überzähliger Stab herausgenommen werden soll, um zum statisch bestimmten Hauptnetze zu gelangen. Man kann aber anstatt dessen ebensogut auch eine überzählige Auflagerbedingung beseitigen. In diesem Falle ist unter X die Komponente des Auflagerdruckes zu verstehen, die durch den beseitigten Auflagerzwang in Wirklichkeit hervorgerufen wird.

Man überzeugt sich leicht, daß die vorhergehenden Entwicklungen auch für diesen Fall ohne Änderung gültig bleiben. Man nehme z. B. an, daß es sich um einen Fachwerkbogenträger handele, der aus einem statisch bestimmten Fachwerke durch feste Auflagerung beider Endknotenpunkte hervorgegangen ist. Der festen Auflagerung beider Endpunkte entsprechen vier Auflagerbedingungen also eine zuviel. Anstatt nun einen Stab herauszunehmen und dadurch zu einem Hauptnetze zu gelangen, das einen Bogenträger mit drei Gelenken darstellt, kann man auch eine Auflagerbedingung entfernen, nämlich voraussetzen, daß der Träger nur an einem Ende fest, am andern auf einer horizontalen Auflagerbahn verschieblich aufgelagert sei. Als „Hauptnetz" ist jetzt das als Balkenträger aufgelagerte Fachwerk anzusehen. Man zeichne den Kräfteplan T für die im Balkenträger durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stabspannungen. Dann bringe man als einzige Last eine horizontale Kraft von der Lasteinheit an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte an, die auf den festen Auflagerpunkt zu gerichtet ist. Dieser Last entspricht ein horizontaler Auflagerdruck von derselben Größe am festen Auflager. Man zeichne den Kräfteplan u für die hierdurch hervorgerufenen Stabspannungen im Balkenträger. Bezeichnet dann X den in Wirklichkeit bei dem statisch unbestimmten Träger unter den gegebenen Lasten auftretenden Horizontalschub, so werden die Stabspannungen S durch Gl. (64) angegeben und X selbst findet man durch dieselben Überlegungen wie vorher gleich dem durch Gl. (67) angegebenen Werte.

§ 53. Träger mit zwei oder mehr überzähligen Stäben.

Allzugroß ist die Zahl der überzähligen Stäbe nicht leicht bei den in der Praxis angewendeten Tragkonstruktionen, für die man solche Rechnungen auszuführen hat. Träger mit zwei oder drei überzähligen Stäben kommen indessen noch öfters vor. Ich werde hier einen Träger mit zwei überzähligen Stäben behandeln; man sieht nachher leicht ein, wie sich das Verfahren gestaltet, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe (oder Auflagerbedingungen) noch größer ist.

Abb. 159 zeigt ein Beispiel für einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Denkt man sich die Stäbe X und Y herausgenommen, so bleibt ein Hauptnetz übrig, das einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Gelenken vorstellt. Das Mittelgelenk wird durch den Kreuzungspunkt G der beiden zwischen X und Y liegenden Diagonalstäbe dargestellt. Sind die Stäbe in G miteinander verbunden, so ist G ein eigentliches Gelenk; gehen sie aneinander vorüber, so ist G ein imaginäres Gelenk. Für die Berechnung ist es aber gleichgültig, ob der eine oder der andere Fall vorliegt. Ebenso ist es auch einerlei, ob die übrigen Diagonalen an den Kreuzungsstellen miteinander vernietet sind oder nicht: in jedem Falle bildet jede der beiden Scheiben, die im Gelenke G zusammenhängen, ein einfaches statisch bestimmtes Fachwerk, das von dem sich an den Auflagerpunkt anschließenden Dreiecke aus durch fortgesetzte Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe erzeugt werden kann.

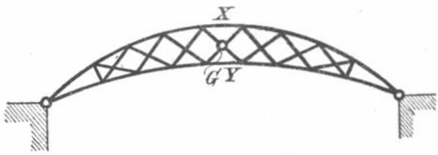


Abb. 159.

Man berechnet zunächst die Stabspannungen T, die im Hauptnetze durch die gegebenen Lasten hervorgerufen werden. Dann bringt man am Hauptnetze Kräfte von der Lasteinheit an den Endpunkten des ersten überzähligen Stabes X an, von jener Richtung, wie sie einer im Stabe X auftretenden Zugspannung entspricht. Diese beiden Lasten bringen Auflagerkräfte und Stabspannungen im Hauptnetze hervor, die auf dieselbe Art wie vorher ermittelt werden können. Der zugehörige Kräfteplan soll als Kräfteplan u bezeichnet werden.

Bis jetzt entspricht das Verfahren genau dem im vorigen Paragraphen befolgten. Hier kommt nur noch hinzu, daß man sich auch an den Endpunkten des zweiten überzähligen Stabes Y Kräfte von der Lasteinheit am Hauptnetze angebracht zu denken hat, die so gerichtet sind, wie es einer Zugspannung im Stabe Y entspricht. Auch für diesen dritten Belastungsfall führt man die Berechnung der Stabspannungen im Hauptnetze durch, indem man einen dritten Kräfteplan v zeichnet.

Versteht man unter X und Y zugleich auch die unbekannten Spannungen in den beiden überzähligen Stäben (nach Größe und Vorzeichen), so setzt sich die in irgendeinem Stabe i unter den gegebenen Lasten tatsächlich eintretende Spannung S_i aus den drei Spannungsbildern T, u und v nach der Gleichung

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y \tag{68}$$

zusammen. Um die beiden Unbekannten X und Y zu ermitteln, müssen wir jetzt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zweimal anwenden.

Das erste Mal legen wir, wie früher, das Spannungsbild Cu zugrunde und sehen als virtuelle Verschiebungen jene an, die die Knotenpunkte bei der elastischen Formänderung des statisch unbestimmten Trägers unter den gegebenen Lasten tatsächlich erleiden. Dies liefert die Arbeitsgleichung

$$-\Sigma Cu \cdot \Delta l = 0.$$

Beachten wir, daß Δl_i hier

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i (T_i + u_i X + v_i Y)$$

gesetzt werden kann, so geht die Gleichung nach Streichung des konstanten Faktors C über in

$$\Sigma urT + X \Sigma u^2 r + Y \Sigma uvr = 0. \tag{69}$$

Die unter den Summenzeichen auftretenden Größen sind sämtlich bekannt und die Summen können daher zahlenmäßig ausgerechnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Summen zwar an und für sich über alle Stäbe mit Einschluß der überzähligen auszudehnen sind, daß aber T für beide überzähligen Stäbe, u für den Stab Y und v für den Stab X zu Null wird. Für den Stab X ist $u = +1$ und für den Stab Y ist $v = +1$ zu setzen. Tatsächlich kommen hiernach in der ersten und in der letzten der drei Summen nur Glieder vor, die sich auf die Stäbe des Hauptnetzes beziehen, während in der zweiten Summe außerdem noch der Stab X durch ein Glied vertreten ist.

Dann wenden wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nochmals und zwar auf ein Spannungsbild Cv an, worin C wieder eine beliebige Konstante bedeutet. Als virtuelle Verschiebungen nehmen wir dieselben wie im vorigen Falle an. Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$-\Sigma Cv \cdot \Delta l = 0$$

oder nach Einsetzen des Wertes von Δl und Streichung des konstanten Faktors

$$\Sigma vrT + X\Sigma uvr + Y\Sigma v^2r = 0. \tag{70}$$

Von den hier auftretenden drei Summen ist eine schon aus der vorigen Gleichung bekannt; die beiden andern können ebenfalls ihrem Zahlenwerte nach ausgerechnet werden. Nachdem dies geschehen ist, bleibt nur noch übrig, die beiden Gleichungen ersten Grades (69) und (70) nach den darin allein noch vorkommenden beiden Unbekannten X und Y aufzulösen. Man findet

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma urT \cdot \Sigma v^2r - \Sigma vrT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2r \cdot \Sigma v^2r}; \\ Y &= \frac{\Sigma vrT \cdot \Sigma u^2r - \Sigma urT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2r \cdot \Sigma v^2r}. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Kommen schließlich drei überzählige Stäbe vor und bezeichnet man den dritten mit Z, so ist noch ein weiterer Kräfteplan w zu zeichnen für die Spannungen, die im Hauptnetze durch eine längs des Stabes Z angenommene Zugspannung von der Lasteinheit hervorgerufen werden. In Gl. (68) hat man noch ein Glied $w_i Z$ beizufügen und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist noch ein drittes Mal für ein Spannungsbild Cw in Anwendung zu bringen. Man erhält dadurch drei Arbeitsgleichungen, die nach den drei Unbekannten X, Y, Z aufgelöst werden können. — Entsprechend wäre auch zu verfahren, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe noch größer sein sollte.

§ 54. Die Temperaturspannungen.

Wir haben bisher nur jene Spannungen berechnet, die durch eine Belastung hervorgebracht werden. Jetzt fragen wir nach den Spannungen, die ganz unabhängig von den Lasten durch Temperaturänderungen der Fachwerkstäbe hervorgerufen werden. Man bezeichnet sie als „Temperaturspannungen" oder „Wärmespannungen" und muß sie ebenso sorgfältig berechnen, wie die von den Lasten selbst herrührenden, da sie unter Umständen sehr groß werden können. Die Temperaturschwankungen, durch die sie hervorgerufen werden, sind gewöhnlich von vornherein gegeben, z. B. bei Konstruktionen, die im Freien aufgestellt sind, durch die meteorologischen Erfahrungswerte.

Sehr leicht überzeugt man sich z. B. von dem Einflusse, den eine Temperaturänderung ausübt, beim Bogenträger mit zwei Gelenken. An einem heißen Sommertage sind die Stäbe viel wärmer, als bei der Montierungstemperatur und wenn sie spannungslos bleiben sollten, müßten sie die Möglichkeit haben, sich dementsprechend auszudehnen. Wäre der Bogenträger als Balken aufgestellt, also eine Auflagerbedingung beseitigt, so würde dem kein Hindernis im Wege stehen. Jeder Stab würde sich dann, falls alle die gleiche Temperatur haben, im selben Verhältnisse verlängert haben und die Trägerfigur würde der ursprünglichen ähnlich geblieben sein. Im gleichen Verhältnisse würde sich demnach auch die Spannweite, also die Entfernung der beiden Auflagerpunkte vergrößert haben. Beim Bogenträger wird aber diese Entfernung durch die Auflagerbedingungen konstant erhalten. Es muß daher ein Auflagerzwang, d. h. ein Horizontalschub auftreten, der die Ausdehnung verhindert. Dieser hat zugleich ein System von Spannungen in allen Stäben zur Folge. — Beim Bogenträger mit drei Gelenken (und überhaupt bei den statisch bestimmten Trägern) ist dies anders. Bei ihm hebt sich einfach das Mittelgelenk um soviel, daß die Spannweite konstant bleibt, während jede Scheibe bei der Erwärmung ihrer ursprünglichen Gestalt ähnlich (wenn auch nicht mehr ähnlich gelegen) bleibt.

Durch die vorhergehenden Bemerkungen ist auch schon ein Weg gewiesen, auf dem man zur Berechnung des durch die Erwärmung hervorgerufenen Horizontalschubes beim einfach statisch unbestimmten Bogenträger gelangen kann. Dieser Horizontalschub muß so groß sein, daß er die Vergrößerung der Spannweite durch die Erwärmung wieder rückgängig machen kann. Versteht man daher in Gl. (62), S. 306 unter x die gegebene Vergrößerung der Spannweite bei Wegfall des Auflagerzwanges, unter P den gesuchten Horizontalschub, unter S und T, die hier gleich miteinander sind, die durch P hervorgerufenen Stabspannungen (die gleich P mal einer Verhältniszahl sind, die aus einem Kräfteplan für $P = 1$ entnommen werden kann), so kann Gl. (62) unmittelbar nach der Unbekannten P aufgelöst werden.

Ich nehme jetzt ferner an, daß irgendein einzelner Stab, der die Ordnungsnummer k tragen möge, um t Grad Celsius erwärmt (oder bei negativem t abgekühlt) werde, während die übrigen ihre Temperatur behalten sollen. Es handelt sich darum, die Spannungen zu berechnen, die hierdurch in dem statisch unbestimmten Träger hervorgerufen werden.

Wenn der Träger einfach statisch unbestimmt ist, können wir den Stab k als den überzähligen betrachten. Es könnte freilich auch vorkommen, daß der beliebig ausgewählte Stab k gar nicht als überzähliger aufgefaßt werden dürfte, indem er nicht zu jenem Teile des ganzen Stabverbandes gehörte, der etwa allein statisch unbestimmt wäre. In diesem Falle würde aber die Temperaturänderung des Stabes k überhaupt keine Temperaturspannungen hervorrufen. Denn wenn wir ihn uns herausgenommen dächten, dürfte unter der genannten Voraussetzung der Rest kein steif verbundenes System mehr bilden. Der Rest würde daher einer Entfernung oder Annäherung der Knotenpunkte, zwischen denen der Stab k verlief, keinen Widerstand entgegensetzen, d. h. die Ausdehnung des Stabes unter dem Einflusse der Erwärmung könnte ohne jeden Zwang erfolgen und es kämen überhaupt keine Spannungen zustande. Da dieser Fall ohne weiteres Interesse ist, können wir daher den Stab k als den überzähligen ansehen.

Die im Stabe k auftretende Spannung sei mit X bezeichnet und werde, wie immer, positiv gerechnet, wenn sie eine Zugspannung ist, obschon man natürlich bei einem positiven t eine Druckspannung im Stabe zu erwarten hat. Dies muß sich aber bei der Ausrechnung von selbst herausstellen.

Wie in früheren Fällen zeichnen wir auch jetzt wieder einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Hauptnetze angibt, die zu einer Zugspannung von der Größe der Lasteinheit im überzähligen Stabe gehören. Die tatsächlich im Stabe i auftretende Spannung S_i ist dann

$$S_i = u_i X$$

zu setzen und es handelt sich nur noch um die Ermittelung der Unbekannten X.

Hierzu verfahren wir ebenso wie früher. Wir betrachten ein Spannungsbild Cu, das ohne äußere Lasten (abgesehen von den zugehörigen Auflagerkräften) an jedem Knotenpunkte

Gleichgewicht herstellt und wenden darauf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten an, indem wir als virtuelle Verschiebungswege der Knotenpunkte jene ansehen, die unter dem Einflusse der Erwärmung des Stabes k tatsächlich zustande kommen.

Dabei ist zu beachten, daß die Längenänderung jedes zum Hauptnetze gehörigen Stabes i

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i u_i X$$

zu setzen ist, während beim Stabe k noch ein Glied hinzutritt, das unmittelbar auf die Temperaturänderung zurückzuführen ist. Aus dem gegebenen Ausdehnungskoeffizienten η des Materials (für Eisen $\frac{1}{80\,000}$ der Länge für 1^0 C.) und der Länge l_k des Stabes k folgt die auf die Erwärmung allein zurückzuführende Längenänderung zu

$$\eta l_k t.$$

Dazu kommt die von der Spannung X hervorgerufene Längenänderung $r_k X$, die für ein positives X ebenfalls positiv zu rechnen ist. Man hat daher für den Stab k im Gegensatze zu den übrigen

$$\Delta l_k = r_k X + \eta l_k t = r_k u_k X + \eta l_k t,$$

wenn im letzten Ausdrucke zur Herstellung der Symmetrie mit Δl_i noch der Faktor u_k mit einbezogen wird, der den Wert $+1$ hat.

Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$-\Sigma C u \Delta l = 0$$

oder nach Einführung der Werte von Δl

$$\Sigma u \cdot r u X + \eta l_k t = 0,$$

woraus durch Auflösung nach X

$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r} \tag{72}$$

gefunden wird. Damit ist die zunächst gestellte Aufgabe gelöst und man sieht auch, daß X in der Tat negativ wird, wenn t positiv ist, da sowohl η, als l_k, als $\Sigma u^2 r$ stets positiv sind. Die

Summe ist auf den überzähligen Stab mit zu erstrecken und zwar ist für ihn, wie bereits bemerkt, $u_k = +1$ zu setzen.

Die Spannung irgendeines Stabes i ist nun

$$S_i = -u_i \frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r}. \tag{73}$$

Sollten ferner mehrere Stäbe, anstatt eines einzigen, ihre Temperatur um beliebig gegebene Beträge ändern, so setzt sich S_i aus einer entsprechenden Anzahl von Gliedern zusammen, die alle nach dem vorstehenden Muster gebildet sind. Hierbei ist es übrigens nicht nötig, für jeden Fall einen besonderen Kräfteplan u von neuem zu zeichnen. Kommt nämlich nachher die Temperaturerhöhung eines Stabes m in Frage, so tritt an Stelle von u in der vorhergehenden Formel einfach das Verhältnis $\frac{u_i}{u_m}$, wobei der konstante Nenner u^2_m auch noch vor das Summenzeichen gesetzt werden kann. — Anstatt dessen kann man auch die vorige Betrachtung für den Fall der Temperaturänderung mehrerer Stäbe von neuem wiederholen.

Die unmittelbare Anwendung dieser Entwicklungen auf den Fall, daß sich alle Stäbe um gleichviel erwärmen, wäre unbequem und man hilft sich dann besser auf andere Art, wie hier an dem Beispiele des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens gezeigt werden soll. Man kann sich nämlich einen solchen Fachwerkbogen dadurch in einen Balkenträger verwandelt denken, daß man einen Stab a zwischen die Auflagerpunkte einschaltet (Abb. 160), der von so großem Querschnitte angenommen wird, daß er unter der in ihm auftretenden Spannung keine merkliche elastische Längenänderung erfährt. Man braucht dazu nur $r_a = 0$ zu setzen. Wenn dann das rechte Ende auf ein Rollenlager gesetzt wird, so ist trotzdem die Bedingung noch erfüllt, daß sich dieses Ende unter dem Einflusse von Lasten nicht zu verschieben vermag.

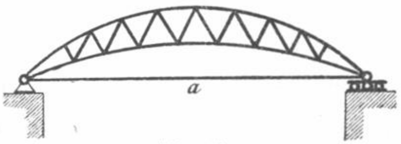


Abb. 160.

Dagegen kann man sich die Länge des Stabes a unter dem Einflusse von Temperaturänderungen veränderlich denken. Wenn nun alle übrigen Stäbe in der Temperatur um t' erhöht werden, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn sich der Stab a um t^0 abkühlte. Hiernach kann die Spannung jedes Stabes i sofort nach Gl. (73) berechnet werden, wenn man darin Stab k durch Stab a ersetzt. Hierbei ist nur zu beachten, daß bei der Bildung von $\Sigma u^2 r$ für den überzähligen Stab a die Stabkonstante $r_a = 0$ zu setzen ist.

Ähnlich wie vorher hat man auch zu verfahren, wenn der Träger zweifach statisch unbestimmt sein sollte. Die Spannung im Stabe k, der sich um t^0 erwärmt und als ein überzähliger angesehen werden soll, sei wieder mit X, die in einem zweiten überzähligen Stabe mit Y bezeichnet. Dann hat man

$$S_i = u_i X + v_i Y$$

und für jeden Stab, mit Ausnahme von k

$$\Delta l_i = r_i(u_i X + v_i Y).$$

Für den Stab k selbst dagegen wird

$$\Delta l_k = r_k(u_k X + v_k Y) + \eta l_k t.$$

Hierbei sind der Symmetrie wegen u_k und v_k wieder mit aufgenommen, obschon $u_k = +1$ und $v_k = 0$ ist.

Die Anwendung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten auf die beiden Spannungsbilder Cu und Cv liefert die Arbeitsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X\Sigma u^2 r + Y\Sigma uvr + \eta l_k t &= 0 \\ X\Sigma uvr + Y\Sigma v^2 r &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

aus deren Auflösung die beiden Unbekannten X und Y gefunden werden.

§ 55. **Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen.**

Die Maxwell-Mohrsche Methode führt am schnellsten zum Ziele, solange es sich nur um die Berechnung der Stabspannungen für einen einzigen, oder doch nur für ganz wenige Belastungsfälle handelt. Muß man dagegen sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen, wie sie etwa nacheinander bei der Überfahrt eines Eisenbahnzuges über eine Brücke vorkommen, so tut man besser, sich nach andern Hilfsmitteln umzusehen, die nicht dazu nötigen, die ganze Rechnung für jede Laststellung von neuem zu wiederholen.

Der Anschaulichkeit wegen werde ich mich hierbei auf die Untersuchung des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens beschränken, obschon man leicht bemerken wird, daß die ganze Betrachtung ohne wesentliche Änderungen auch allgemeiner durchgeführt werden könnte.

Ein solcher Fachwerkbogen bildet an sich ein statisch bestimmtes Fachwerk und der aus ihm entstehende Träger wird nur dadurch statisch unbestimmt, daß ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als statisch unbestimmte Größe sieht man hier am besten den Horizontalschub an. Sobald dieser für irgendeine Laststellung berechnet ist, kann man alle Stabspannungen auf einfache Art, also etwa durch Zeichnen eines Kräfteplanes erhalten, da die Vertikalkomponenten der Auflagerkräfte ebenso groß sind, wie bei einem Balkenträger, also durch Momentengleichungen oder mit Hilfe eines Seilpolygons sofort ermittelt werden können.

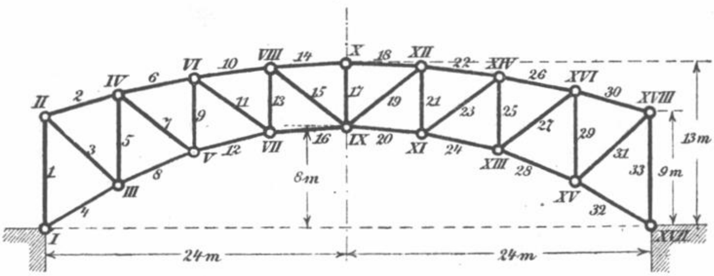
Man nehme nun an, daß eine Einzellast von der Größe der Lasteinheit über den Träger hin fortschreite. Zu jeder Stellung dieser Einzellast sei der Horizontalschub auf irgendeine Art berechnet. Trägt man den Abstand der Last vom einen Auflager her als Abszisse und den zu dieser Laststellung gehörigen Horizontalschub in einem passenden Maßstabe als Ordinate auf, so erhält man einen Linienzug, der als die Einflußlinie für den Horizontalschub bezeichnet wird. Es ist hierbei übrigens nur nötig, den Horizontalschub für die Laststellungen über den Knotenpunkten gesondert zu berechnen. Denn zwischen zwei Knotenpunkten wird die Last von der Fahrbahnkonstruktion aufgenommen, die sie in bekannten Anteilen auf die beiden Knotenpunkte überträgt. Da dieses Verhältnis eine lineare Funktion der Abszisse der Laststellung ist, wird auch die Einflußlinie zwischen beiden Knotenpunkten durch eine gerade Linie gebildet. Die Einflußlinie ist daher ein Polygon, dessen Ecken auf Lotrechten mit jenen Knotenpunkten liegen, an denen die Fahrbahntafel befestigt ist und es ist nur nötig, die Ordinaten dieser Eckpunkte auf irgendeine Art zu berechnen.

Setzen wir für den Augenblick voraus, daß die Einflußlinie bereits konstruiert sei, so kann man mit ihrer Hilfe sofort auch den Horizontalschub für ein beliebiges System senkrechter Lasten angeben. Man braucht nur jede Last mit der Verhältniszahl zu multiplizieren, die als Ordinate der Einflußlinie ihr zugeordnet ist, und die Summe der Produkte zu addieren. Sobald die Einflußlinie gegeben ist, unterscheidet sich daher die Berechnung des Trägers kaum noch von der eines statisch bestimmten Trägers.

Ich kann mich daher hier darauf beschränken, die Ermittelung der Ordinaten der Einflußlinie für den Horizontalschub auseinanderzusetzen.

Zu diesem Zwecke kann man sich zwar auch wieder des bereits früher auseinandergesetzten Maxwell-Mohrschen Verfahrens bedienen, indem man für jeden Knotenpunkt, der zur Unterstützung der Fahrbahn dient, den zugehörigen Horizontalschub nach Gl. (67), S. 324 berechnet. Hier soll aber ein anderes

Abb. 161a.



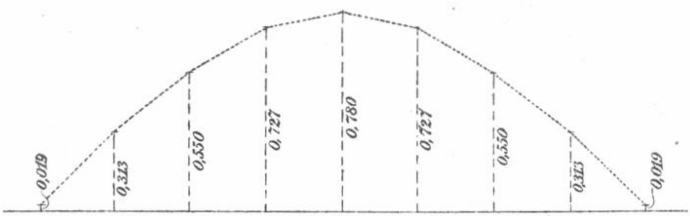


Abb. 161b.

Verfahren beschrieben werden, das sich auf die Anwendung des Verschiebungsplanes in Verbindung mit dem Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen gründet.

Man denke sich den in Abb. 161a gezeichneten Fachwerkbogen zunächst als Balkenträger aufgestellt und an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte eine horizontale Kraft, die gleich der Lasteinheit ist, als einzige Belastung angebracht. Für diesen Belastungsfall wurde auf einem Zeichenblatte in größerem Maßstabe ein Kräfteplan gezeichnet, der nichts Bemerkenswertes bietet und der daher hier nicht mit aufgenommen wurde. Indessen sind die aus ihm entnommenen

Stabspannungen u in der weiter unten folgenden Tabelle (S. 341) angegeben.

Die Stablängen und auch die Stabquerschnitte müssen als bereits bekannt vorausgesetzt werden, wenn die Einflußlinie konstruiert oder überhaupt die Berechnung der Stabspannungen für den statisch unbestimmten Träger durchgeführt werden soll. Freilich kennt man bei der Aufstellung eines Projektes die Stabquerschnitte nicht von vornherein, sondern beabsichtigt, sie erst auf Grund des Ergebnisses der statischen Berechnung festzusetzen. Es bleibt aber hier nichts anderes übrig, als daß man vorläufig versuchsweise Annahmen über die in Aussicht zu nehmenden Querschnitte macht und zwar auf Grund von Erfahrungen, die man bei früheren ähnlichen Ausführungen oder auch auf Grund von Vorprojekten gewonnen hat. Überzeugt man sich dann nach den Ergebnissen der Berechnung, daß die Stabquerschnitte gegenüber der vorläufigen Annahme erheblich zu ändern sind, so muß nach Vornahme der Berichtigung die Untersuchung nochmals wiederholt werden und zwar nötigenfalls so oft, bis eine hinreichende Übereinstimmung erzielt ist.

Auch die aus der Zeichnung entnommenen Stablängen und die — übrigens ganz willkürlich gewählten — Stabquerschnitte sind nebst den danach berechneten Stabkonstanten r in der Tabelle zusammengestellt. Dabei genügte es, der symmetrischen Anordnung des Trägers wegen, die Aufzählung der Stäbe auf nur eine Trägerhälfte zu erstrecken. Der Elastizitätsmodul wurde, obschon es auf seinen genaueren Wert gar nicht ankommt, solange es sich nur um die durch die Lasten hervorgerufenen Spannungen handelt, der Anschaulichkeit wegen ebenfalls mit eingesetzt und zwar wurde er zu 2 000 000 atm angenommen. Hiernach sind die Längenänderungen Δl der Stäbe berechnet, die zum Spannungsbilde u gehören.

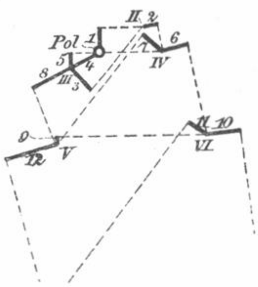


Abb. 162.

Nach diesen Vorbereitungen zeichnet man den Verschiebungsplan für den angenommenen Belastungsfall. Dabei wurde zunächst angenommen, daß Stab 4 seine Richtung nicht ändere. Das erste Stück des Verschiebungsplanes ist in Abb. 162 dargestellt. Dabei sind alle Längenänderungen in 125 facher Vergröße-rung aufgetragen. Wenn man die Zeichnung in demselben Maßstabe fortsetzen wollte, würde sie aber den hier zur Verfügung stehenden Raum überschreiten. Deshalb ist der gesamte Verschiebungsplan außerdem noch in Abb. 163 in nur 40 facher Vergrößerung gezeichnet. Wer die Zeichnung zur Übung wiederholen will, möge sie jedoch in dem Maßstabe der Abb. 162 weiterführen, da sonst selbst bei aller Sorgfalt nur eine ungenügende Genauigkeit erzielt werden könnte.

Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens, das beim Zeichnen des Verschiebungsplanes einzuhalten ist, wurde schon in § 51 gegeben. Da sich hier alles nach den dort besprochenen Regeln abspielt, ist es nicht nötig, nochmals darauf zurückzukommen. Nur auf das Zurückdrehen, das nach-

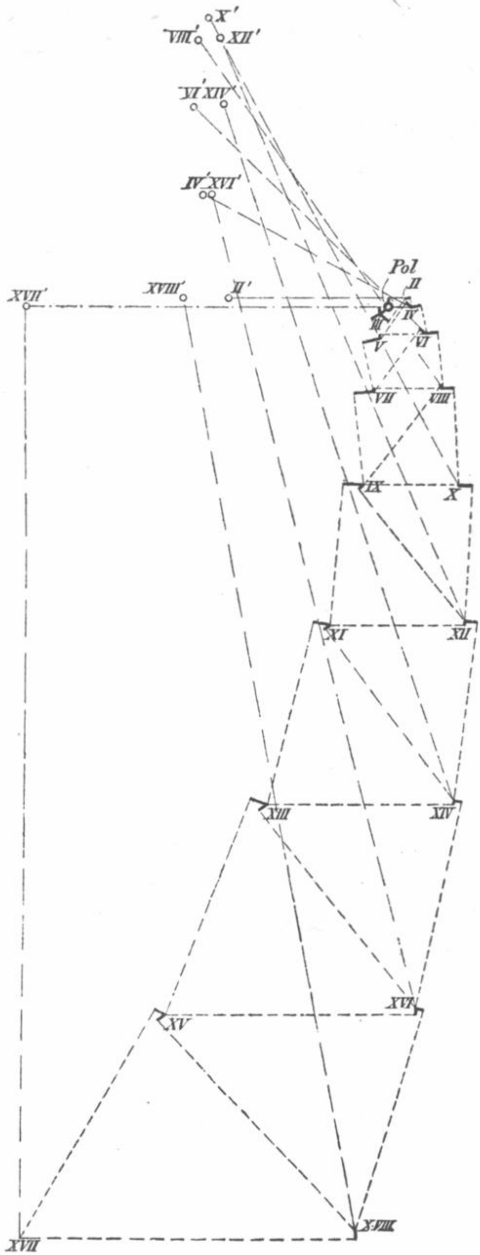


Abb. 163.

träglich vorzunehmen ist, sobald der Verschiebungsplan bis zum Auflagerpunkte *XVII* hin durchgeführt wurde, gehe ich noch mit wenigen Worten ein.

Der Auflagerpunkt *XVII* kann sich, da jetzt vorausgesetzt war, daß er auf einem Rollenlager sitze, nur in horizontaler Richtung verschoben haben. Daß Abb. 163 zugleich eine Verschiebung in vertikaler Richtung nachweist, rührt nur von der eingangs zugrunde gelegten unzutreffenden Voraussetzung her, daß sich die Richtung des Stabes 4 nicht geändert habe. Wir müssen daher zuletzt noch eine Drehung des ganzen Trägers ohne Gestaltänderung vornehmen, durch die *XVII* auf die horizontale Auflagerbahn zurückgeführt wird. Hierbei beschreibt *XVII* einen kleinen Kreisbogen um den festen Auflagerpunkt *I*, der im Verschiebungsplane durch eine lotrechte gerade Linie angegeben wird. Wir ziehen also in Abb. 163 eine Horizontale durch den Pol und eine Lotrechte durch *XVII* und erhalten als Schnittpunkt die richtige Lage *XVII'* von Knotenpunkt *XVII* im Verschiebungsplane. Auch alle übrigen Knotenpunkte beschreiben beim Zurückdrehen kleine Kreisbögen um *I*, die im Verschiebungsplane durch geradlinige Strecken darzustellen sind, die senkrecht zu den in Abb. 161[a] von *I* nach den betreffenden Knotenpunkten gezogenen Halbmessern stehen und deren Längen sich zur Strecke *XVII*—*XVII'* des Verschiebungsplanes wie die zugehörigen Halbmesser verhalten.

Dabei war es für unseren Zweck nur nötig, das Zurückdrehen mit den Knotenpunkten des Obergurtes vorzunehmen, an denen, wie dabei vorausgesetzt wird, die Fahrbahn befestigt sein soll, so daß die Lasten an ihnen angreifen. Man hat hierbei noch eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der symmetrischen Gestalt des Trägers wegen die sich auf beiden Trägerhälften entsprechenden Knotenpunkte nach der Formänderung in gleicher Höhe, also auch die Punkte *VIII'*, *XII'* usf. des Verschiebungsplanes auf derselben Horizontalen liegen müssen. Außerdem müssen sie auch von einer durch *X'* gezogenen Lotrechten nach beiden Seiten hin um gleichviel abstehen. Bei der im größeren Maßstabe auf dem Zeichenblatte ausgeführten Zeichnung war diese Probe recht befriedigend erfüllt.

Zugleich sei noch darauf hingewiesen, daß die Zeichnung erheblich hätte vereinfacht werden können, wenn man, wie es früher besprochen war, den Verschiebungsplan von dem mittleren Knotenpunkte *X* aus unter der — in diesem Falle auch wirklich zutreffenden — Voraussetzung konstruiert hätte, daß Stab 17 seine Richtung behält. Man hätte dann nachträglich noch eine für alle Knotenpunkte gemeinsame Verschiebung vorzunehmen gehabt, durch die der feste Knotenpunkt *I* in seine Lage, also im Verschiebungsplane zum Pole (und hiermit zugleich auch Knotenpunkt *XVII* auf seine horizontale Auflagerbahn) zurückgeführt würde. Anstatt dessen hätte man auch umgekehrt den Pol im Verschiebungsplane nachträglich auf Punkt *I* rücken können, womit alle weiteren Änderungen entbehrlich geworden wären. Es hätte auch genügt, den Verschiebungsplan nur für eine Trägerhälfte zu entwerfen.

Obschon ich aber nicht unterlassen wollte, auf die Möglichkeit dieser Vereinfachungen hinzuweisen, hielt ich es doch für besser, zunächst bei dem ursprünglich angegebenen Verfahren stehen zu bleiben, da es nützlicher ist, sich zunächst einmal mit diesem gründlich vertraut zu machen.

Nachdem der Verschiebungsplan fertig ist, kann man daraus mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen die in Abb. 161[b] (S. 335) bereits unterhalb der Trägerfigur gezeichnete Einflußlinie für den Horizontalschub entnehmen. Hierzu bedenke man, daß die Lasteinheit etwa am Knotenpunkte *VI* eine Horizontalverschiebung des immer noch auf einem Rollenlager sitzend gedachten Auflagerpunktes *XVII* hervorbringt, die nach dem Maxwellschen Satze ebensogroß ist, als die Vertikalverschiebung des Knotenpunktes *VI* bei dem vorigen Belastungsfalle, auf den sich der Verschiebungsplan bezieht. Wir entnehmen also aus Abb. 163 die senkrechte Entfernung des Punktes *VI'* von der durch den Pol gezogenen Horizontalen, die wir mit x_6 bezeichnen wollen und setzen sie gleich der Vergrößerung der Spannweite, die durch eine am Punkte *VI* in lotrechter Richtung angreifende Lasteinheit herbeigeführt wird für den Fall, daß das rechte Auflager auf einem Rollenlager sitzt. Damit diese Verschiebung wieder rückgängig gemacht werde, müssen wir einen Horizontalschub H_6 an dem Auflager anbringen, dessen Berechnung unsere Aufgabe bildet. Wir wissen aber bereits, um wieviel sich der auf auf dem Rollenlager sitzende Auflagerpunkt unter dem Einflusse einer horizontalen Kraft verschiebt. Dieser Verschiebungsweg, der mit y bezeichnet werden mag, ist gleich der Strecke vom Pole des Verschiebungsplanes bis zum Punkte *XVII'*. Für eine horizontale Kraft von der Größe H ist demnach der Verschiebungsweg gleich Hy und da dies gleich x_6 sein soll, finden wir

$$H_6 = \frac{x_6}{y}. \tag{75}$$

Die beiden Strecken sind aus dem Verschiebungsplane bekannt und hiermit auch ihr Verhältnis. Daß H_6 gleich einer Verhältniszahl gefunden wird, rührt davon her, daß es zur Lasteinheit am Knotenpunkte VI gehören sollte. Wird eine Last von der beliebigen Größe P an VI aufgebracht, so ist der zugehörige Horizontalschub

$$H = P\frac{x_6}{y}. \tag{76}$$

Für alle übrigen Knotenpunkte findet man diese Verhältniszahlen oder „Einflußzahlen" auf gleiche Art. Hiernach wurde die Einflußlinie in Abb. 161^b aufgetragen. Den Ordinaten sind ihre Werte überdies beigeschrieben.

Schließlich wurde noch der Horizontalschub des Trägers für den Fall bestimmt, daß an den Knotenpunkten II und $XVIII$ eine Last von je 500 kg, an allen übrigen Knotenpunkten des Obergurtes eine Last von je 1000 kg angreift. Multipliziert man diese Lasten mit den aus Abb. 161^b ersichtlichen Einflußzahlen und addiert, so erhält man

$$H = 10 + 313 + 550 + 727 + 780 + 727 + 550 + 313 + 10 = 3980 \text{ kg}.$$

Zum Zwecke des Vergleiches wurde außerdem der Horizontalschub auch nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren für denselben Belastungsfall berechnet. Die Ausrechnung der Summen erfolgte in Form der auf Seite 341 folgenden Tabelle, auf die schon vorher mehrmals hingewiesen wurde.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Spannungen T durch die gegebenen Lasten in dem als Balken aufgelagerten Träger hervorgerufen werden. Sie wurden mit Hilfe eines besonderen Kräfteplanes ermittelt, der hier nicht mit aufgenommen wurde. Der Elastizitätsmodul ist gleich 2000000 atm gesetzt.

Für den Horizontalschub findet man nun nach Gl. (67), S. 324

$$H = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r} = \frac{243{,}91 \cdot 10^{-3}}{60{,}873 \cdot 10^{-6}} = 4007 \text{ kg}.$$

Es genügt nämlich, beide Summen nur auf eine Trägerhälfte zu erstrecken, da sonst nur noch der Faktor 2 in Zähler und Nenner hinzukäme. Deshalb sind auch in der Tabelle die Beiträge von Stab 17 zu den beiden Summen nur zur Hälfte eingesetzt.

Der Vergleich mit dem vorher gefundenen Werte von $H = 3980$ zeigt einen Unterschied von weniger als 1 Prozent, worauf es bei den in der Praxis vorliegenden Aufgaben gewöhnlich nicht ankommt. Freilich ist das Resultat des Vergleiches verhältnismäßig günstig und es fragt sich, ob es sich immer so gut gestaltet. Jedenfalls ist dies nur durch große Sorgfalt bei der Konstruktion des Verschiebungsplanes zu erreichen und der nach der Mohrschen Methode ermittelte Wert ist im allgemeinen als der genauere zu betrachten. Der Kräfteplan T, der bei ihm noch in Frage kommt, läßt sich nämlich genauer zeichnen als der Verschiebungsplan. Freilich kann man anderseits beim Ausrechnen der Summen auch leichter einmal einen groben Fehler begehen als beim Verschiebungsplane, bei dem er sich dem Auge sehr bald bemerklich machen würde.

Tabelle.

Stab Nr.	Stablänge l in cm	Querschnittsfläche F in cm²	$r = \frac{l}{EF}$ in $\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	Spannung T in kg	Verhältniszahl u	$r\,Tu$	$u^2 r$
1	900	115	$3{,}92 \cdot 10^{-6}$	−4000	+0,59	$-\ \ 9{,}25 \cdot 10^{-3}$	$1{,}360 \cdot 10^{-6}$
2	630	118	2,67 „	−3000	+0,50	− 4,00 „	0,667 „
3	810	89,9	4,50 „	+3900	−0,65	−11,45 „	1,900 „
4	720	115	3,14 „	0	−1,16	0	4,230 „
5	730	89,9	4,05 „	−3800	+0,47	− 7,27 „	0,895 „
6	610	118	2,58 „	−6200	+1,00	−16,00 „	2,580 „
7	770	89,9	4,27 „	+3950	−0,64	−10,80 „	1,750 „
8	650	115	2,83 „	+3150	−1,60	−14,25 „	7,250 „
9	600	89,9	3,33 „	−2750	+0,30	− 2,75 „	0,300 „
10	600	118	2,54 „	−8600	+1,43	−31,20 „	5,200 „
11	750	89,9	4,16 „	+3200	−0,55	− 7,31 „	1,260 „
12	620	115	2,70 „	+6200	−2,05	−34,30 „	11,300 „
13	530	89,9	2,94 „	−1150	+0,03	− 0,10 „	0,027 „
14	600	118	2,54 „	−9700	+1,60	−39,40 „	6,500 „
15	770	89,9	4,28 „	+1400	−0,23	− 1,38 „	0,226 „
16	600	115	2,61 „	+8600	−2,43	−54,50 „	15,400 „
17	500	89,9	2,78 „	− 250	−0,14	+ 0,05 „	0,028 „
					Summen:	$-243{,}91 \cdot 10^{-3}$	$60{,}873 \cdot 10^{-6}$

Anmerkung. Für den Stab 17 sind nur die Hälften eingesetzt, weil er zu jeder Trägerhälfte gehört.

§ 56. Die Ausnahmefachwerke als statisch unbestimmte Konstruktionen.

Ein Fachwerk oder ein Fachwerkträger möge die zur Herstellung der Steifigkeit erforderliche Anzahl von Stäben gerade besitzen; dabei soll aber der in den vorhergehenden Abschnitten schon mehrfach besprochene Ausnahmefall vorliegen, bei dem wegen der besonderen Gestalt der Trägerfigur die Stäbe trotz ihrer sonst ausreichenden Anzahl keine hinreichende Steifigkeit herbeiführen. Solange man die Stablängen als unveränderlich ansieht, findet man dann aus den Gleichgewichtsbedingungen, daß im allgemeinen durch irgendeine beliebig gegebene Belastung unendlich große Stabspannungen hervorgebracht werden. Indessen kann man bei den Ausnahmefachwerken auch solche besondere Belastungsarten angeben, die nicht zu unendlich großen Stabspannungen führen. Man braucht z. B. nur zwei durch einen Stab verbundene Knotenpunkte mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften auseinanderzuziehen. Wenn andere Lasten nicht vorkommen, treten offenbar keine unendlich großen Stabspannungen auf, da der Stab zwischen beiden Knotenpunkten schon für sich allein ausreicht, um die angenommene Belastung aufzunehmen, ohne daß die übrigen dabei mitwirken müßten. Man wäre jedoch im Irrtume, wenn man auf Grund dieser Überlegung annehmen wollte, daß dieser Stab nun auch allein gespannt würde, während die übrigen spannungslos blieben. *Die Ausnahmefachwerke sind vielmehr solchen Lasten gegenüber, die nicht zu unendlich großen Stabspannungen führen, statisch unbestimmt.*

Denkt man sich nämlich den Stab zwischen den beiden belasteten Knotenpunkten entfernt, so erhält man einen Mechanismus, der sich zwar im allgemeinen zu bewegen vermag, der sich aber unter der gegebenen Belastung im Gleichgewichte befindet. Um sich davon zu überzeugen, lasse man den Mechanismus eine unendlich kleine virtuelle Bewegung ausführen. Dabei ist die Summe der Arbeiten der beiden Lasten gleich Null (oder doch unendlich klein zweiter Ordnung), weil sich nach der Voraussetzung, daß es sich um ein Ausnahmefachwerk handeln soll, die Entfernung der beiden Angriffspunkte bei der Bewegung nicht ändert. Das ist aber die ausreichende Bedingung für das Gleichgewicht der beiden äußeren Kräfte an dem Mechanismus. Hiernach kann auch schon durch Spannungen in den zu dem Mechanismus gehörigen Stäben an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt werden, ohne daß dabei der herausgenommene Stab mitwirken müßte. Man erkennt daraus, daß in dem Ausnahmefachwerke bei den hier in Frage kommenden Belastungsfällen unendlich viele Spannungsbilder möglich sind, die an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellen. Bei dem einfachsten Falle, daß nur die Endknotenpunkte eines Stabes auseinandergezogen werden, unterscheiden sich diese verschiedenen Spannungsbilder in dem Verhältnisse voneinander, nach dem sich die Last auf den dazwischen liegenden Stab und auf den nach dessen Fortnahme entstehenden Mechanismus verteilt.

Ferner erkennt man, daß im Ausnahmefachwerke auch selbst beim Fehlen aller Lasten Stabspannungen möglich sind. Denn man denke sich irgendeinen Stab beliebig gespannt. Nimmt man ihn heraus und ersetzt seine Spannung an den Endknotenpunkten durch äußere Kräfte, so ist, wie wir schon vorher sahen, der entstehende Mechanismus unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewichte. Man kann daher Stabspannungen in den zu dem Mechanismus gehörigen Stäben angeben, die mit der willkürlich angenommenen Spannung des herausgenommen gedachten Stabes überall Gleichgewicht herstellen.

Obschon das Ausnahmefachwerk sonst als ein Grenzfall des statisch bestimmten Fachwerkes erscheint, teilt es, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, viele Eigenschaften mit dem statisch unbestimmten Fachwerke. In der Tat muß man auch zur Berechnung der Stabspannungen für jene Belastungsfälle, die nach dem Vorhergehenden überhaupt als zulässig erscheinen, dieselben Methoden anwenden, wie beim statisch unbestimmten Fachwerke.

Man nehme also einen Stab heraus und ermittele mit Hilfe eines Kräfteplanes T die Spannungen in den Stäben des Mechanismus, die zu den gegebenen Lasten gehören. Dann zeichne man einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Mechanismus liefert, die durch eine Einheitsspannung in dem vorher beseitigten Stabe hervorgerufen werden. Nachdem dies geschehen ist, findet man die Spannung X des beseitigten Stabes auf Grund derselben Überlegungen wie in § 52 nach der schon damals für das statisch unbestimmte Fachwerk abgeleiteten Formel (67), S. 324

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}.$$

Auch die Spannungen aller übrigen Stäbe folgen dann leicht in derselben Weise wie früher.

§ 57. Die Ausnahmefachwerke bei beliebiger Belastung.

Wird ein Ausnahmefachwerk in beliebiger Weise belastet, so müßten die Stabspannungen unendlich groß werden, wenn die Stäbe ihre Längen nicht ändern könnten. In Wirklichkeit wird aber unter dem Einflusse der Belastung und der durch sie hervorgerufenen Stabspannungen eine Gestaltänderung des Fachwerkes eintreten, die, wie wir schon wissen, im Verhältnisse zu den elastischen Längenänderungen der Stäbe sehr groß ist. Damit hört der Ausnahmefall auf, genau verwirklicht zu sein und die Spannungen der Stäbe werden nicht unendlich groß, sondern nur, weil sich die Gestalt des Fachwerkes immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden entfernt hat, sehr groß ausfallen.

Im allgemeinen wird man nun zwar, wie schon früher bemerkt wurde, die Ausnahmefachwerke ihrer ungünstigen Eigenschaften wegen vermeiden. Wenn es sich aber nur um verhältnismäßig geringe Lasten handelt, die von einer Tragkonstruktion aufzunehmen sind, so daß man die dadurch hervorgerufenen, wenn auch sehr stark vergrößerten Spannungen nicht zu fürchten braucht, kann man doch gelegentlich mit Rücksicht auf andere Erwägungen zur Ausführung von Ausnahmefachwerken schreiten. Man muß dann imstande sein, die tatsächlich (an Stelle der unendlich großen) auftretenden Stabspannungen zu berechnen.

Die früher besprochenen Methoden für die Ermittelung der Stabspannungen versagen in diesem Falle. Wenn man bereits wüßte, in welche Gestalt das Fachwerk infolge der Belastung endgültig übergeht, wäre die Lösung der Frage freilich sehr einfach. Denn nach der Gestaltänderung ist das Fachwerk nicht mehr im Ausnahmefalle und damit wird es statisch bestimmt. Kann man also aus der unmittelbaren Beobachtung an einem bereits ausgeführten Ausnahmefachwerke die Gestaltänderung feststellen, die es nach einer Belastung erfahren hat, so findet man die nun in den Stäben bestehenden Stabspannungen sofort durch Zeichnen eines Kräfteplanes oder auch nach einer der andern früher besprochenen Methoden. Die Schwierigkeit besteht aber darin, daß man die zu erwartende Gestaltänderung von vornherein nicht kennt, sondern sie selbst erst voraussagen soll.

Abb. 164 zeigt ein Beispiel, an dem die Lösung der Aufgabe durchgeführt werden soll. Die Stäbe 3 und 3′ sollen im

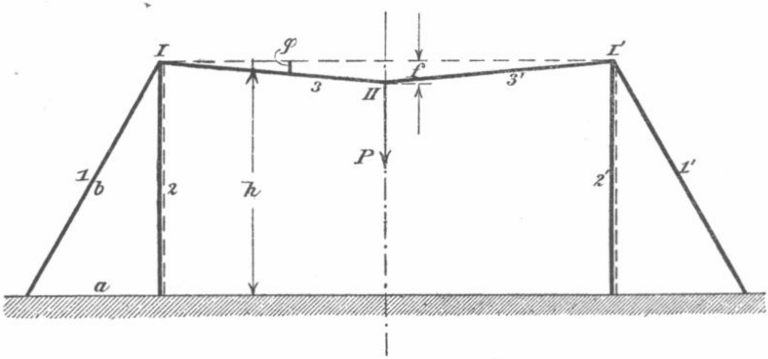


Abb. 164.

spannungslosen Zustande in eine Gerade fallen, Knotenpunkt II also mit I und I′ ursprünglich in gleicher Höhe liegen. Nachdem die Last P am Knotenpunkte II angebracht ist, senkt sich dieser um eine Strecke f, die zwar im Vergleiche zu den Stablängen immer noch klein, gegenüber den elastischen Längenänderungen der Stäbe dagegen sehr groß ist. Man soll f und die Stabspannungen berechnen.

In der Gestalt, die das Stabgerüst nach der Belastung annimmt, wie es in der Abbildung gezeichnet ist, bildet es einen statisch bestimmten ebenen Fachwerkträger. Die Knotenpunkte I und I′ sind durch je zwei Stäbe mit der festen Erde und der Knotenpunkt II mit den beiden vorigen ebenfalls durch zwei Stäbe verbunden. Kennt man die Senkung f von Knotenpunkt II und hiermit die Trägergestalt nach der Formänderung, so braucht man zur Ermittelung der Stabspannungen nur zwei Kräftedreiecke zu zeichnen, zuerst das für Knotenpunkt II und dann das für I. In Abb. 165 ist der aus den beiden Kräftedreiecken bestehende Kräfteplan angegeben. Die Spannungen in der rechten Trägerhälfte stimmen mit denen in der linken der Symmetrie wegen überein.

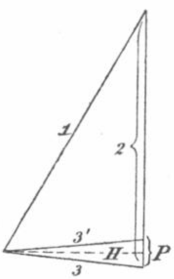


Abb. 165.

Der Umstand, daß die neue Trägergestalt bereits ausreichend durch den Verschiebungsweg eines einzigen Knotenpunktes beschrieben wird, erleichtert die Aufgabe erheblich. Die Knotenpunkte I und I′ sind steif mit der festen Erde verbunden und ihre Verschiebungswege während der Gestaltänderung sind daher von derselben Ordnung klein wie die Längenänderungen der Stäbe, also viel kleiner als die Senkung f des Knotenpunktes II. Deshalb genügt es auch, die Senkung f zu kennen, um die Stabspannungen zu berechnen.

Freilich haben die kleinen Horizontalverschiebungen der Knotenpunkte I und I′ selbst einen großen Einfluß auf die Größe der Senkung f von II. Zunächst möge aber, um die Lösung der Aufgabe für den allereinfachsten Fall vorweg zu nehmen, vorausgesetzt werden, daß sich die Knotenpunkte I und I′ überhaupt nicht verschieben.

In diesem Falle findet man f aus der folgenden einfachen Rechnung. Man bezeichne die ursprüngliche Länge von Stab 3 mit l, die Längenänderung mit Δl, dann ist nach dem Pythagoräischen Satze

$$(l + \Delta l)^2 = l^2 + f^2$$

und hieraus mit Vernachlässigung des von höherer Ordnung kleinen Gliedes Δl^2 gegenüber $2l\Delta l$,

$$\Delta l = \frac{f^2}{2l}. \tag{77}$$

Andererseits hängt aber Δl auch mit der Stabspannung S zusammen und diese kann aus einem Kräftedreiecke entnommen werden. Man braucht sich nur in Abb. 164 von I aus eine Parallele zu 3' bis zur Symmetrieachse gezogen zu denken, um ein Dreieck zu erhalten, das unter Voraussetzung eines passend gewählten Maßstabes als Kräftedreieck betrachtet werden kann. Man hat daher die Proportion

$$\frac{S}{P} = \frac{l}{2f} \text{ und hieraus } S = \frac{Pl}{2f}. \tag{78}$$

Für die Stabverlängerung Δl findet man daraus, unter Benutzung der Stabkonstanten r

$$\Delta l = rS = \frac{Prl}{2f}. \tag{79}$$

Setzt man die beiden für Δl aufgestellten Ausdrücke einander gleich, so erhält man eine Gleichung, in der f die einzige Unbekannte bildet. Man findet

$$\frac{f^2}{2l} = \frac{Plr}{2f} \text{ und hieraus } f = \sqrt[3]{Pl^2 r}.$$

An Stelle von r kann man noch seinen Wert $\frac{l}{EF}$ einführen und nachträglich auch noch S durch Einführung des Ausdruckes für f in die zuvor schon aufgestellte Formel (78) berechnen. Dadurch erhält man

$$f = l\sqrt[3]{\frac{P}{EF}}; \quad S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{P^2 EF}. \tag{80}$$

Beachtenswert ist hierbei, daß sowohl die Spannung als (in noch höherem Grade) die Formänderung nicht proportional mit der Last P wachsen, wie bei den stabilen Fachwerken, sondern langsamer. Wenn man bedenkt, daß das Fachwerk um so widerstandsfähiger wird, je weiter es sich vom Ausnahmefalle entfernt, kann dies auch nicht überraschen. Bei der Deutung der Formeln beachte man, daß das darin neben P vorkommende Produkt EF selbst eine Kraft vorstellt, aber eine ganz außerordentlich große, die z. B. bei Eisen ungefähr 2000 mal so groß ist, als die zulässige Spannung des Stabes 3.

Nach Erledigung des einfacheren Falles kehre ich nun zur ursprünglichen Aufgabe zurück. Aus dem Kräfteplane in Abb. 165 erkennt man, daß sich die Spannungen von 3 und 3′ nur unerheblich von ihrer Horizontalkomponenten H unterscheiden und daß auch 2, obschon der Unterschied hier etwas größer ist, genau genug bis zum Endpunkte von H, anstatt bis zum Endpunkte von P gerechnet werden kann. Wenn man sich diese geringe Vernachlässigung, die ohne merklichen Einfluß auf das Schlußresultat ist, zur Vereinfachung der Rechnung gestattet, stehen die drei Spannungen S_1 S_2 S_3 in einem von vornherein bekannten Verhältnisse zueinander, da sie sich wie die Seiten b, h, a des zwischen den Stäben 1 und 2 liegenden Dreieckes der Trägerfigur zueinander verhalten. Man hat daher

$$S_1 = S_3 \cdot \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad S_2 = S_3 \cdot \frac{h}{a}$$

und hieraus folgt für die Längenänderungen der Stäbe 1 und 2

$$\triangle l_1 = S_3 \cdot r_1 \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \triangle l_2 = S_3 \cdot r_2 \frac{h}{a}.$$

Wäre S_3 gleich der Lasteinheit, so könnte man die Verschiebung des Knotenpunktes I sofort mit Hilfe des in Abb. 166 gezeichneten Verschiebungsplanes erhalten. Die Horizontalkomponente des unter dieser Voraussetzung gefundenen Verschiebungsweges ist in der Abbildung mit c bezeichnet. Da S_3 aber nicht gleich der Lasteinheit ist, so hat diese Horizontalkomponente den Wert $S_3 \cdot c$.

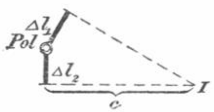


Abb. 166.

Das Ausweichen von I um eine kleine Strecke in horizontaler Richtung hat auf die Senkung f von II denselben Einfluß, als wenn sich der Stab 3 um das gleiche Maß mehr gedehnt hätte. An Stelle von Gl. (77) tritt daher jetzt

$$S_3 c + \triangle l_3 = \frac{f^2}{2 l_3}.$$

Die Gleichungen (78) und (79) können dagegen ohne weiteres übernommen werden. Man hat daher

$$\triangle l_3 = \frac{P l_3 r_3}{2 f}$$

und wenn man dies und den Wert von S_3 in die vorhergehende Gleichung einsetzt, findet man

$$\frac{Pl_3}{2f}c + \frac{Pl_3 r_3}{2f} = \frac{f^2}{2l_3}.$$

In dieser Gleichung ist f die einzige Unbekannte und durch Auflösen findet man

$$f = \sqrt[3]{Pl_3^2(c + r_3)}. \tag{81}$$

Natürlich kann man die Strecke c des Verschiebungsplanes, wenn man will, auch durch trigonometrische Rechnung bestimmen, da von dem Vierecke, in dem es als Seite vorkommt, zwei Seiten $\left(\triangle l_1 = r_1 \frac{b}{a} \text{ und } \triangle l_2 = r_2 \frac{h}{a}\right)$ und alle Winkel gegeben sind. Die zeichnerische Ermittelung ist aber bequemer und soll daher hier beibehalten werden.

Setzt man in Gl. (81) $c = 0$, so geht sie wieder — unter Beachtung des für r_3 einzusetzenden Wertes — in die erste der Gl. (80) über. — Nachdem f bekannt ist, findet man auch S_3 in derselben Weise wie vorher und hierauf S_1 und S_2. Es ist nicht nötig, die Formeln anzuschreiben.

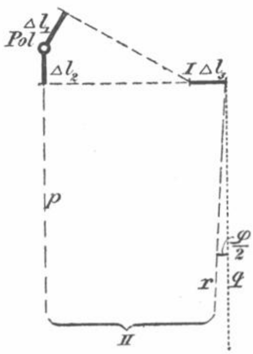


Abb. 167.

Dagegen soll noch auf einen besonderen Umstand hingewiesen werden, der sich geltend macht, wenn man den Verschiebungsplan, der in Abb. 166 nur bis zum Knotenpunkte I ausgedehnt wurde, zum Knotenpunkte II weiterzuführen sucht. In Abb. 167 ist das erste Polygon des Verschiebungsplanes in Übereinstimmung mit Abb. 166 aufgetragen. Man beachte nun, daß sich Knotenpunkt II der Symmetrie wegen nur in lotrechter Richtung nach abwärts verschieben kann. Zieht man also vom Pole aus die Linie p in lotrechter Richtung, so muß auf ihr der Punkt II des Verschiebungsplanes enthalten sein. Trägt man ferner von I aus die Längenänderung $\triangle l_3$ ab, so liegt II auch auf einem durch den Endpunkt dieser Strecke gehenden Kreisbogen, dessen sehr großer Halbmesser durch die Länge des Stabes 3 angegeben wird. Wollte man aber, wie es sonst stets geschehen darf, den Kreisbogen durch eine senkrecht zur Stabrichtung gezogene gerade Linie q ersetzen, so würde diese parallel zu p gehen und der Schnittpunkt II fiele ins Unendliche. Dies bestätigt zunächst, daß die Senkung von II jedenfalls sehr groß ist im Verhältnisse zu den Längenänderungen der Stäbe. Zugleich erkennen wir aber, daß es hier mit Rücksicht auf die verhältnismäßig große Länge des Kreisbogens nicht mehr zulässig ist, ihn durch eine Gerade zu ersetzen, die senkrecht zur Richtung des ersten Halbmessers steht.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung von 3 und der Horizontalen in Abb. 164 mit φ und beachtet man, daß dieser Winkel zugleich der Zentriwinkel des Kreisbogens ist, den wir durch eine Gerade ersetzen wollen, so erkennt man, daß die zum Kreisbogen gehörige Sehne den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ mit der lotrechten Richtung einschließt. Wir ziehen also in Abb. 167 eine Linie r, die gegen q um $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist. Der Schnittpunkt von p und r liefert den Punkt II des Verschiebungsplanes. — Freilich setzt diese Konstruktion voraus, daß φ vorher schon auf andere Art ermittelt ist.

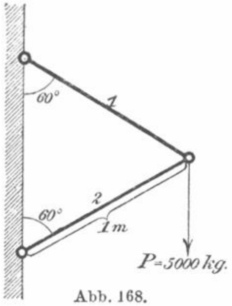


Abb. 168.

Aufgaben.

40. Aufgabe. Die Stäbe 1 und 2 in Abb. 168 liegen in einer senkrechten Ebene und sind an einer Wand befestigt, mit der sie ein gleichseitiges Dreieck von 1 m Seitenlänge bilden. Beide Stäbe sind aus Winkeleisen von 15 qcm Querschnittsfläche gebildet. Um wieviel senkt sich der freie Knotenpunkt unter einer Last P von 5000 kg, wenn der Elastizitätsmodul = 2 . 10⁶ atm. gesetzt wird?

Lösung. Nach der Maxwell-Mohrschen Formel, Gl. (62) ist die Senkung x des Knotenpunktes

$$x = \frac{1}{P} \sum S T r$$

und hier fällt das Spannungsbild S mit dem Spannungsbilde T zusammen und jede dieser beiden Spannungen ist für jeden Stab dem Absolutwerte nach gleich P oder gleich 5000 kg. Die Stabkonstante r ist für jeden Stab

$$r = \frac{l}{EF} = \frac{100 \text{ cm}}{2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 15 \text{ cm}^2} = 3{,}33 \quad 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{1}{5000} \cdot 2 \cdot 5000^2 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-6} = 3{,}33 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = 0{,}33 \text{ mm}.$$

Die Senkung beträgt also $^1/_3$ mm. — Es ist nützlich, für dieses einfache Beispiel zur Übung auch den Verschiebungsplan zu konstruieren. Dies ist in Abb. 169 geschehen. Von einem Pole O aus trägt man zunächst die Längenänderungen der Stäbe ab. Für jeden Stab ist die Längenänderung

$$\Delta l = 5000 \text{ kg} \cdot 3{,}33 \,.\, 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}} = 16{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

und zwar verlängert sich Stab 1 um diesen Betrag, während sich Stab 2 um ebensoviel verkürzt. In Abb. 169 sind diese Längenänderungen in hundertfacher Vergrößerung abgetragen, und zwar Δl_1 von O aus nach rechts abwärts, weil die Verlängerung von Stab 1 für sich genommen eine Bewegung des freien Knotenpunktes nach dieser Richtung hin hervorbringt, während Δl_2 nach links abwärts aufzutragen ist. Hieran schließen sich die zum Ersatze der Kreisbögen dienenden Senkrechten und deren Schnittpunkt liefert den gesuchten Punkt des Verschiebungplanes. Man erkennt nun auch, daß sich der freie Knotenpunkt ausschließlich in senkrechter Richtung verschiebt. Auch aus der Figur findet man, ohne erst nachmessen zu müssen, daß der Verschiebungsweg doppelt so groß ist als die Längenänderung jedes der beiden Stäbe.

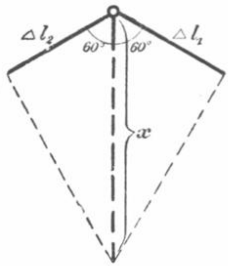


Abb. 169.

41. Aufgabe. Ein an einer Wand befestigter Kragträger, der in Abb. 170ᵃ gezeichnet ist, trägt am freien Ende eine Last P von 5000 kg. Man soll die Stabspannungen ermitteln, hierauf den Verschiebungsplan zeichnen und außerdem die Senkung des belasteten Knotenpunktes auch nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren berechnen. Die Stablängen l, Querschnitte F und Stabkonstanten r sind in den ersten Spalten der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

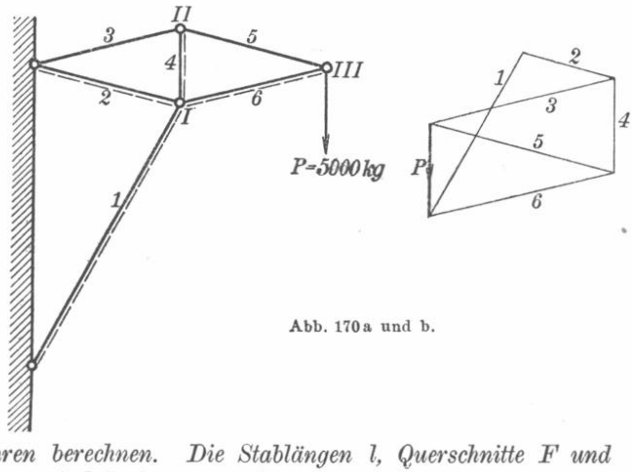


Abb. 170a und b.

Lösung. Die Stabspannungen S entnimmt man dem leicht zu zeichnenden reziproken Kräfteplan in Abb. 170[b] und trägt sie in die folgende Tabelle ein:

Stab	l in cm	F in cm²	r in cm kg	S in kg	$\Delta l = rS$ in cm	rS^2 in cm kg
1	800	40	$10\cdot10^{-6}$	$-10\,000$	$-\ 10.10^{-2}$	1000
2	400	20	$10\cdot10^{-6}$	$-\ 5000$	$-\ 5\cdot10^{-2}$	250
3	400	16	$12{,}5\cdot10^{-6}$	$+10\,000$	$+12{,}5\cdot10^{-2}$	1250
4	200	12,5	$8{,}0\cdot10^{-6}$	$-\ 5000$	$-\ 4\cdot10^{-2}$	200
5	400	16	$12{,}5\cdot10^{-6}$	$+10\,000$	$+12{,}5\cdot10^{-2}$	1250
6	400	25	$8{,}0\cdot10^{-6}$	$-10\,000$	$-\ 8\cdot10^{-2}$	800

$$\Sigma\, rS^2 = 4750 \text{ cmkg}$$

Die beiden letzten Spalten lassen sich hierauf ebenfalls sofort ausfüllen. Für die Senkung des belasteten Knotenpunktes hat man nach Gl. (62)

$$x = \frac{1}{P} \sum rST$$

oder hier, wo das Spannungsbild T mit dem Spannungsbilde S zusammenfällt

$$x = \frac{1}{P} \sum rS^2 = \frac{1}{5000} \cdot 4750 = 0{,}95 \text{ cm}.$$

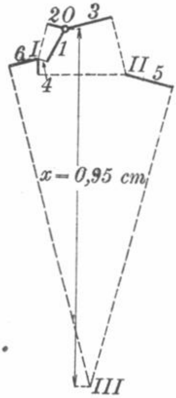


Abb. 171.

Der Verschiebungsplan ist in Abb. 171 gezeichnet, und zwar in fünffacher Größe. Man beginnt dabei mit Knotenpunkt I, der durch die Stäbe 1 und 2 an zwei Punkten der Wand angeschlossen ist, die sich nicht verschieben können. Hierauf läßt man Punkt II und dann Punkt III folgen. — Aus dem Verschiebungsplane erkennt man übrigens, daß der belastete Knotenpunkt III nicht nur eine Senkung, sondern außerdem auch noch eine kleine horizontale Verschiebung nach rechts hin erfährt.

42. Aufgabe. Sechs Stäbe sind zu einem Quadrate mit eingeschobenen Diagonalen (Abb. 172) verbunden und haben alle gleichen Querschnitt. An den Endknotenpunkten von 5 greifen zwei Lasten von der Größe P an; man soll die dadurch hervorgerufenen Stabspannungen berechnen.

Lösung. Wir betrachten Stab 6 als überzählig. Im Hauptnetze nimmt dann Stab 5 die Spannung P allein auf, während die übrigen Stäbe spannungslos sind. Dies folgt schon daraus, daß im statisch bestimmten Hauptnetze nur auf eine Art Gleichgewicht an allen Knotenpunkten hergestellt werden kann. Die eine, sofort als möglich erkannte Art der Lastübertragung, bei der nur Stab 5 in Spannung gerät, ist daher die richtige. Man kann sich davon auch noch durch die Überlegung überzeugen, daß nach Beseitigung des überzähligen Stabes 6 die Stäbe 1 und 2 allein an einem Knotenpunkte zusammenstoßen, an dem keine äußere Kraft angreift. Da diese Stäbe nicht in die gleiche Richtungslinie fallen, könnten Spannungen, die etwa in ihnen auftreten sollten, unmöglich im Gleichgewichte miteinander stehen. Beide Stäbe sind also, ebenso wie die Stäbe 3 und 4, für die sich dieselbe Betrachtung wiederholen läßt, unter der Voraussetzung, daß Stab 6 beseitigt ist, spannungslos. Man hat also

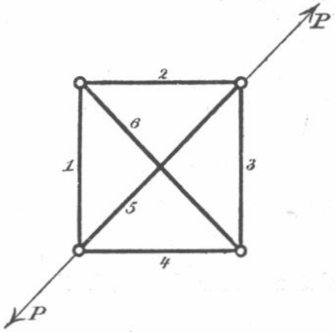


Abb. 172.

$$T_5 = + P \quad \text{und} \quad T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0.$$

Nun bringt man an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes Kräfte von der Lasteinheit an von solcher Richtung, wie sie einer in diesem Stabe auftretenden Zugspannung entsprechen. Die Spannungen im Hauptnetze, die diesem Belastungsfalle entsprechen, lassen sich durch Zeichnen eines Kräfteplanes ermitteln. Es ist aber gar nicht einmal nötig, den Kräfteplan wirklich auszuführen, da man bei der Einfachheit der Figur sofort vorauszusehen vermag, wie groß diese Spannungen ausfallen. Man hat nämlich (wenn wie gewöhnlich das negative Vorzeichen eine Druckspannung angibt)

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad u_5 = + 1.$$

Hierbei ist daran zu erinnern, daß die Spannung u des überzähligen Stabes stets gleich $+ 1$ zu setzen ist, also

$$u_6 = + 1.$$

Die Stabkonstanten r sind für die vier Umfangsstäbe untereinander gleich; der gemeinsame Wert sei mit r ohne Zeiger bezeichnet. Für die Diagonalen sind die Stabkonstanten der größeren Länge wegen $\sqrt{2}$mal so groß, also

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r \quad \text{und} \quad r_5 = r_6 = r\sqrt{2}.$$

Nun bleibt nur noch übrig, die aufgestellten Werte in die Gl. (67)

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}$$

einzuführen. Zur Summe im Zähler trägt hier nur der Stab 5 ein Glied bei. Von den sechs Gliedern der Summe im Nenner sind jene vier, die sich auf die Umfangsstäbe beziehen, untereinander gleich und ebenso die beiden andern unter sich. Man hat daher

$$X = -\frac{u_5 r_5 T_5}{4 \cdot u_1{}^2 r_1 + 2 \cdot u_5{}^2 r_5} = -\frac{r\sqrt{2} \cdot P}{4 \cdot \frac{1}{2} r + 2 \cdot r\sqrt{2}} = -0{,}293\ P.$$

Der überzählige Stab erfährt demnach eine Druckspannung. Auch die Spannungen der übrigen Stäbe ergeben sich nun nach der Gleichung

$$S = T + uX,$$

also z. B. für den Stab 1

$$S_1 = 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-\ 0{,}293\ P) = +\ 0{,}207\ P.$$

Auch die drei übrigen Umfangsstäbe nehmen Zugspannungen von demselben Betrage auf. Der Stab 5 endlich erfährt die Spannung

$$S_5 = +\ P + (+\ 1) \cdot (-\ 0{,}293\ P) = +\ 0{,}707\ P.$$

Anmerkung. Hier war vorausgesetzt, daß die Diagonalstäbe 5 und 6 an der Kreuzungsstelle übereinander weggehen, ohne miteinander verbunden zu sein. Aber auch dann, wenn man sie an dieser Stelle miteinander verbindet, treten dieselben Spannungen auf, wie vorher. Jede Diagonale besteht dann aus zwei Stäben und wir haben im ganzen acht Stäbe, zugleich aber auch einen Knotenpunkt mehr. Die notwendige Stabzahl für fünf Knotenpunkte beträgt sieben, demnach ist das Fachwerk immer noch einfach statisch unbestimmt. An Stelle des Stabes 6 nehmen wir jetzt einen der beiden Stäbe heraus, in die 6 durch den mittleren Knotenpunkt zerlegt ist. Die Kräftepläne T und u fallen nun gerade so aus wie vorher, abgesehen davon, daß im Kräfteplan u die andere Hälfte von 6 ebenfalls mit der Spannung $+1$ vorkommt. Bildet man hierauf die Summen, die in der Formel für X auftreten, so ändert sich an der im Zähler überhaupt nichts; bei der Summe im Nenner kommen zwar jetzt für jede Diagonale zwei Glieder vor, die aber zusammen ebensoviel ausmachen als das eine Glied im vorigen Falle. In der Tat erhält man daher für X denselben Wert.

Übrigens gilt dies ganz allgemein für zwei sich kreuzende Stäbe, solange an der Kreuzungsstelle keine äußeren Kräfte angebracht werden. Nur wenn sich drei (oder noch mehr) Stäbe an derselben Stelle überkreuzen, wird durch ihre Verbindung der Spannungszustand im allgemeinen geändert.

43. Aufgabe. Zwölf Stäbe (vgl. Abb. 173) sind zu einem regelmäßigen Sechsecke mit einem im Mittelpunkte gelegenen Knotenpunkte vereinigt. Wie groß ist der Anteil der Last P, der von den in die gleiche Richtungslinie fallenden Stäben 7 und 10 aufgenommen wird, wenn alle Stäbe gleich untereinander sind?

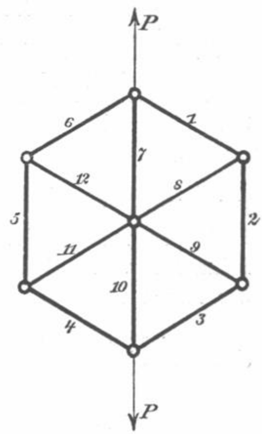


Abb. 173.

Lösung. Man denke sich etwa Stab 1 beseitigt. In dem dann verbleibenden statisch bestimmten Hauptnetze sind (ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe) nur die in die Lastrichtung fallenden Stäbe 7 und 10 mit der Spannung $+ P$ beansprucht; alle übrigen T sind gleich Null. Bringt man hierauf längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes eine Zugspannung $+ 1$ als Belastung des Hauptnetzes an, so erfahren alle Umfangsstäbe Spannungen $+ 1$ und alle Radialstäbe Spannungen $- 1$. Der Kräfteplan u setzt sich nämlich, wie man leicht erkennt, aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammen. In der Formel

$$X = - \frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}$$

kann zunächst in jedem Gliede von Zähler und Nenner der konstante Faktor r gestrichen werden. Die Summe im Zähler umfaßt nur zwei Glieder, die sich auf die Stäbe 7 und 10 beziehen und von denen jedes gleich $(- 1) \cdot (+ P) = - P$ zu setzen ist. In Σu^2 sind alle Glieder gleich und diese Summe ist gleich 12. Man hat daher

$$X = - \frac{- 2P}{12} = + \frac{P}{6}.$$

Für S_7 erhält man

$$S_7 = T_7 + u_7 X = + P + (- 1) \cdot \; + \frac{P}{6} \; = + \frac{5P}{6}.$$

Die Spannung im Stabe 10 ist ebensogroß. Alle Umfangsstäbe haben eine Zugspannung von der Größe $\frac{P}{6}$ und die Radialstäbe 8, 9, 11, 12 eine Druckspannung von derselben Größe aufzunehmen.

Anmerkung. Wenn der mittlere Knotenpunkt fehlte, die Stäbe sich also an dieser Stelle ohne Verbindung überkreuzten, läge ein Ausnahmefachwerk vor, das trotz Erfüllung der Bedingung für die notwendige Stabzahl bei der angenommenen Belastung, die zu keinen unendlich großen Stabspannungen führen kann, statisch unbestimmt wäre. Die Stabspannungen würden aber dann ebensogroß ausfallen, als im vorigen Falle. Man erkennt dies, auch ohne nochmalige Durchführung der Rechnung nach der in § 56 gegebenen Anleitung, am einfachsten daraus, daß auch bei fester Verbindung in der Mitte die in dieselbe Diagonale fallenden Radialstäbe gleiche Spannungen haben. Man ändert daher nichts, wenn man die Verbindung nachträglich wieder aufhebt. — Natürlich gilt dies aber nur für den besonderen Belastungsfall, der hier vorausgesetzt war. Bei beliebiger Belastung verhält sich das steife, statisch unbestimmte Fachwerk mit mittlerem Knotenpunkte ganz anders als das Ausnahmefachwerk mit durchgehenden Diagonalen ohne Verbindung an der Kreuzungsstelle.

44. Aufgabe. Abb. 174 zeigt eine radartige Konstruktion, die ebenfalls ein Fachwerk mit einem überzähligen Stabe darstellt. Die Speichen sind in der Mitte miteinander verbunden und der Radkranz soll einen Kreis bilden. Der zwischen zwei aufeinander folgenden Speichen liegende Bogen des Radkranzes weicht nicht viel von der zugehörigen Sehne ab und die geringe Krümmung hindert nicht, diesen Teil als einen Stab aufzufassen, der die Enden der Speichen miteinander verbindet. Das Rad soll im mittleren Knotenpunkte mit P belastet sein. Man soll die Stabspannungen unter der Voraussetzung berechnen, daß eine Speiche lotrecht steht, so daß der Auflagerdruck P des Fußbodens in die Speichenrichtung fällt.

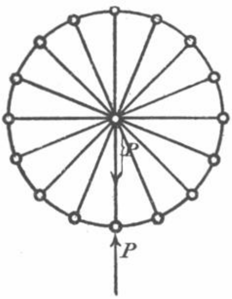


Abb. 174.

Lösung. Die Zahl der Speichen sei n, so daß zwei aufeinander folgende den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ miteinander bilden. Die Speichen seien alle gleich untereinander und ihre Stabkonstante sei mit r, die Stabkonstante der Radkranzstäbe mit r' bezeichnet. Wir verfahren wie bei der vorigen Aufgabe, indem wir einen Stab des Radkranzes als überzählig betrachten. Dann erfährt nach dessen Beseitigung nur die lotrecht nach abwärts gehende Speiche eine Spannung $-P$. Eine Zugspannung von der Größe 1 im überzähligen Stabe hat ferner in allen Radkranzstäben die Spannung $u = +1$ zur Folge, während die Speichen dadurch sämtlich in eine Druckspannung von der Größe $\frac{2\pi}{n}$ versetzt werden. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Zahl der Speichen groß genug ist, um den zwischen ihnen liegenden Bogen mit der Sehne vertauschen zu dürfen. Für die Spannung im überzähligen Stabe erhält man nun

$$X = -\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\cdot r\cdot(-P)}{n\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 r + n\cdot r'} = -P\frac{2\pi}{4\pi^2 + n^2\frac{r'}{r}}.$$

Auch alle übrigen Stäbe des Radkranzes erfahren eine Druckspannung von dieser Größe. Die Speichen erfahren mit Ausnahme der in die Lastrichtung fallenden eine Zugspannung von der Größe

$$P\frac{4\pi^2}{n\left(4\pi^2 + n^2\frac{r'}{r}\right)}$$

und die in die Lastrichtung fallende eine Druckspannung von der Größe

$$P - P\frac{4\pi^2}{n\left(4\pi^2 + n^2\frac{r'}{r}\right)}.$$

Bei dieser Lösung ist freilich, wie überall in der Theorie des Fachwerkes, der Biegungswiderstand der Stäbe vernachlässigt, während der Radkranz, wenn er einen verhältnismäßig steifen Querschnitt besitzt, wegen der in kurzen Abständen aufeinander folgenden Knotenpunkte, auch einen merklichen Biegungswiderstand aufweisen wird, durch den die Art der Lastübertragung erheblich geändert werden kann. Eine Behandlung der Aufgabe mit Berücksichtigung des Biegungswiderstandes des Radkranzes gehört in das Gebiet der Festigkeitslehre und kann hier nicht weiter verfolgt werden.

Anmerkung. Bringt man in der Mitte des Rades an Stelle des Knotenpunktes eine „Nabe" von verhältnismäßig großem Durchmesser an, so ist diese als eine Scheibe aufzufassen, an die die Knotenpunkte des Radkranzes durch die Speichen und die Radkranzstäbe angeschlossen sind. Man findet in diesem Falle, daß gerade die notwendige Stabzahl vorhanden ist, um einen unverschieblichen Anschluß zu bewirken. Zugleich liegt aber dann ein „Ausnahmefall" vor, falls die Speichen immer noch in radialer Richtung gehen, denn die von einer Scheibe ausgehenden Stäbe dürfen sich, um eine steife Verbindung herzustellen, nicht alle in demselben Punkte schneiden. Man hilft sich dadurch, daß man die Speichen alle um einen gewissen Winkel gegen den Radius schräg stellt. Räder dieser Art werden häufig ausgeführt. Sofern man den Biegungswiderstand der Radkranzstäbe immer noch vernachlässigen darf, steht der Berechnung der Stabspannungen für jeden beliebigen Belastungsfall nach der

Lehre vom statisch bestimmten Fachwerke kein Hindernis im Wege. — Häufig ordnet man auch — bei den Rädern der Fahrräder — die Speichen in zwei Kegelflächen an und erhält dann ein räumliches Fachwerk. Ferner werden auch oft in jeder Kegelfläche zwei Speichenscharen angeordnet, von denen die eine Schar gegen den Radius um denselben Winkel, aber in der entgegengesetzten Richtung gedreht ist, wie die andere. Durch diese Anordnung erreicht man, daß die Speichen alle nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen; die Speichen der beiden Scharen verhalten sich zueinander etwa wie die früher besprochenen Gegendiagonalen bei den Schwedlerschen Kuppeln. Freilich spielt auch in diesen Fällen der Biegungswiderstand des Radkranzes gewöhnlich eine so wichtige Rolle, daß die Behandlung nach den Lehren der Fachwerktheorie nicht ausreicht.

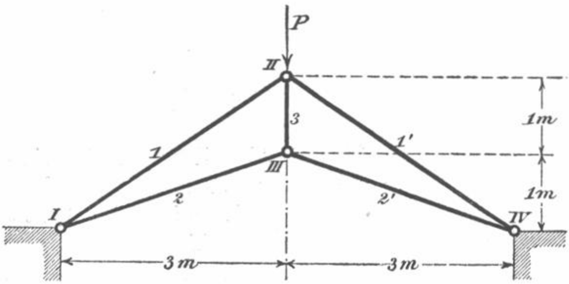


Abb. 175.

45. Aufgabe. Abb. 175 stellt einen — der Einfachheit wegen nur aus wenigen Stäben zusammengesetzten — Bogenträger dar, der in den Punkten I und IV fest aufgelagert ist. Man soll den Horizontalschub berechnen, der durch die am Knotenpunkte II angreifende Last P hervorgebracht wird, wenn die Stäbe die in der nachstehenden Zusammenstellung angegebenen Querschnitte haben.

Erste Lösung. Das Fachwerk ist an sich statisch bestimmt; der Träger ist aber einfach statisch unbestimmt, weil ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als überzählig betrachte man die Auflagerbedingung, die eine Verschiebung von IV in horizontaler Richtung verhindert. Die zugehörige Auflagerkraft, also der gesuchte Horizontalschub, bildet dann die statisch unbestimmte Größe X, die nach der Maxwell-Mohrschen Formel zu berechnen ist. Als „Hauptnetz" ist der als Balken aufgelagerte ganze Träger zu betrachten. Der Kräfteplan T für die Hauptnetzspannungen wird durch Abb. 176 angegeben. Abb. 177 zeigt den Kräfteplan u für die Spannungen, die im Hauptnetze durch einen von außen her als Belastung angebrachten Horizontalschub $H = 1$ hervorgerufen werden. Dies alles stellt man in der folgenden Tabelle zusammen. Dabei ist der Elastizitätsmodul, obschon es auf dessen Größe, sofern er nur überhaupt

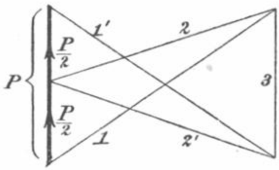


Abb. 176.

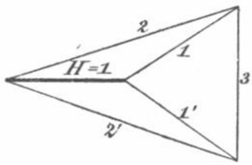


Abb. 177.

bei allen Stäben gleich ist, nicht ankommt, der Übersichtlichkeit wegen zu $2 \cdot 10^6$ atm angenommen. Die Längen l folgen aus den in die Abb. 175 eingeschriebenen Maßen; die Querschnitte sind willkürlich angenommen.

Tabelle.

Stab Nr.	l in cm	F in qcm	r in $\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	T	u	ruT	u^2r
1	360,6	25	$7{,}21 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}803\,P$	$+1{,}202$	$-15{,}62$	10,41
2	316,2	15	10,54 „	$+1{,}581\,P$	$-2{,}108$	$-35{,}13$	46,84
3	100,0	10	5,00 „	$+1{,}000\,P$	$-1{,}333$	$-6{,}67$	8,89
1'	360,6	25	7,21 „	$-1{,}803\,P$	$+1{,}202$	$-15{,}62$	10,41
2'	316,2	15	10,54 „	$+1{,}581\,P$	$-2{,}108$	$-35{,}13$	46,84
					$\Sigma =$	$-108{,}17$	123,39

In der Spalte für ruT ist überall der Faktor $10^{-6} \cdot P$, in der Spalte für u^2r der Faktor 10^{-6} beizufügen. Nach der Formel erhält man jetzt

$$X = \frac{108{,}17 \cdot 10^{-6}\,P}{123{,}39 \cdot 10^{-6}} = 0{,}88\,P.$$

Zweite Lösung (mit Hilfe des Verschiebungsplanes). Man berechnet die r und u wie vorher und zeichnet den Verschiebungsplan unter der Voraussetzung, daß am Balkenträger eine horizontale Auflagerkraft von 1 kg als äußere Belastung an dem auf Rollen gelagerten Auflagerpunkte IV angreift. Für die Längenänderungen der Stäbe erhält man

$$\Delta l_1 = 7{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}202 = +\,8{,}67 \cdot 10^{-6}\ \text{cm};$$
$$\Delta l_2 = -\,21{,}52 \cdot 10^{-6};$$
$$\Delta l_3 = -\,6{,}67 \cdot 10^{-6}.$$

Der Verschiebungsplan ist in Abb. 178 in 25000facher Vergrößerung gezeichnet. Die vom Pole nach II, III, IV gezogenen Strecken geben die Verschiebungen der zugehörigen Knotenpunkte unter der Voraussetzung an, daß Stab 2 seine Richtung beibehalten hätte. Hieraut wird eine Drehung des Trägers um Knotenpunkt I ausgeführt, durch die der Auflagerpunkt IV wieder auf seine Auflagerbahn zurückgebracht wird, so daß nur die Horizontalverschiebung bestehen bleibt. Im Verschiebungsplane wird der kleine Kreisbogen IV—IV′ durch eine gerade Linie ersetzt. Auch II und III verschieben sich hierbei nach II′ und III′. Die Verschiebungswege sind rechtwinklig zu den aus der Trägerfigur ersichtlichen Halbmessern und proportional zu diesen abzutragen, wobei die Länge des Verschiebungsweges IV—IV′ zum Vergleiche dient. Nachher hat man noch als Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, daß II′ und III′ lotrecht übereinander liegen müssen und daß ihr Abstand gleich Δl_3 sein muß.

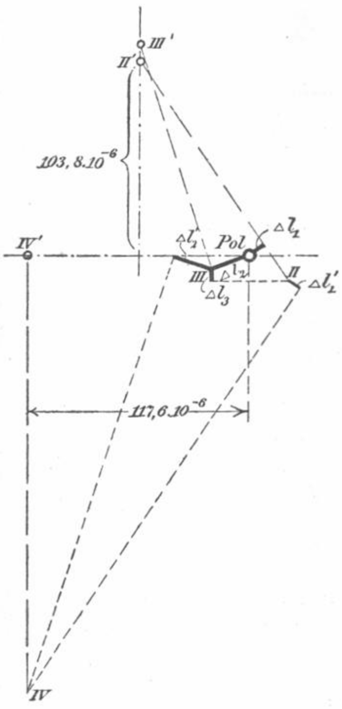


Abb. 178.

Aus dem Verschiebungsplane entnimmt man, daß sich Knotenpunkt II bei dem vorausgesetzten Belastungsfalle um $103{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm in senkrechter Richtung verschiebt. Nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen erfährt Knotenpunkt IV eine ebensogroße Verschiebung in horizontaler Richtung, wenn an dem Balkenträger die Last von 1 kg im Knotenpunkte II angebracht wird. Für P kg ist die Verschiebung das P-fache. Um diese Verschiebung wieder rückgängig zu machen und hierdurch auf den Fall des Bogenträgers zu gelangen, müssen wir eine horizontale Auflagerkraft X an IV anbringen. Aus dem Verschiebungsplane erfahren wir aber ferner, daß sich Knotenpunkt IV um eine Strecke von $117{,}6 \cdot 10^{-6}$ cm in horizontaler Richtung verschiebt, wenn an ihm eine horizontale Kraft von 1 kg angebracht wird. X folgt daher aus der Gleichsetzung

$$X \cdot 117{,}6 \cdot 10^{-6} = P \cdot 103{,}8 \cdot 10^{-6} \quad \text{zu} \quad X = 0{,}88\,P.$$

Das Resultat stimmt mit dem vorher auf anderem Wege gefundenen überein, wobei jedoch zu bemerken ist, daß der Verschiebungsplan, aus dem die angegebenen Knotenpunktswege entnommen sind, doppelt so groß als hier in der Abbildung gezeichnet wurde, um genauere Resultate zu erlangen.

46. Aufgabe. Aus sechs Stäben, die alle gleichen Querschnitt von 50 qcm Fläche haben, ist ein Stabverband (Abb. 179[a]) in Gestalt eines regelmäßigen Dreiecks mit einem in der Dreiecksmitte liegenden Knotenpunkte zusammengestellt. Der Stab 1 wird um 40° C erwärmt. Wie groß sind die dadurch hervorgerufenen Spannungen, wenn der Ausdehnungskoeffizient gleich $\frac{1}{80\,000}$ *für 1° C und der Elastizitätsmodul gleich 2.10⁶ atm gesetzt wird? Die Dreieckseite kann gleich 1 m angenommen werden.*

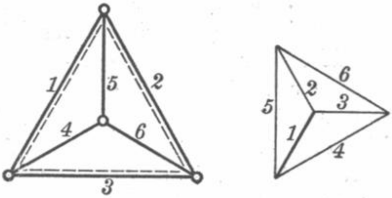


Abb. 179 a und b.

Lösung. Man zeichnet zuerst den Kräfteplan Abb. 179[b] für das statisch bestimmte Fachwerk, das durch Wegnahme von Stab 1 übrig bleibt und zwar für den Fall, daß längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes an dessen Endpunkten Zugspannungen von der Lasteinheit auftreten. Das ist der in § 52 mit u bezeichnete Kräfteplan. Die Spannungen für die Stäbe 1, 2, 3 werden alle gleich $+1$, die der Stäbe 4, 5, 6 alle gleich $-\sqrt{3}$ oder gleich $-1{,}73$ gefunden.

Die Stabkonstanten der Umfangsstäbe sind unter sich gleich und zwar gleich

$$\frac{l}{EF} = \frac{100 \text{ cm}}{2 \cdot 10^6 \text{ atm} \cdot 50 \text{ cm}^2} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$$

während die der inneren Stäbe 4, 5, 6 daraus durch Division mit $\sqrt{3}$, also gleich $0{,}577 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$ gefunden werden.

Hiernach wird

$$\sum u^2 r = 3 \cdot 1^2 \cdot 10^{-6} + 3(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{10^{-6}}{\sqrt{3}} = 8{,}196 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

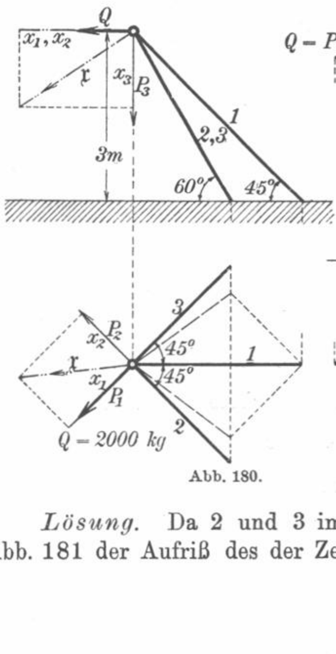
erhalten. Für die in Gl. (72) S. 331 vorkommende Größe $\eta l_k t$ hat man hier $\frac{1}{2000} \cdot 100 = \frac{1}{20}$ cm und die angeführte Formel liefert daher für die Spannung X des erwärmten Stabes 1

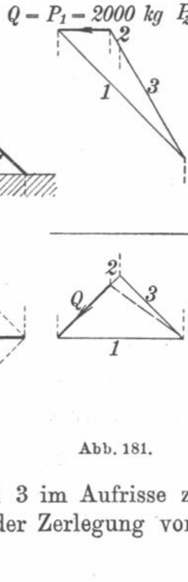
$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r} = -\frac{\frac{1}{20}}{8{,}196 \cdot 10^{-6}} = -6100 \text{ kg}.$$

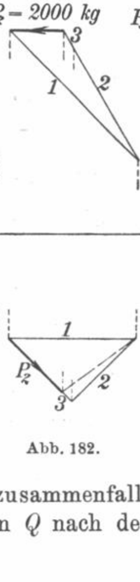
Das Minuszeichen entspricht einer Druckspannung. Auch die Stäbe 2 und 3 haben eine ebensogroße Druckspannung aufzunehmen, während die inneren Stäbe eine $\sqrt{3}$mal so große Zugspannung erfahren.

Man bemerkt nachträglich leicht, daß es nichts ausmacht, wenn man alle Stablängen in demselben Verhältnisse größer oder kleiner annimmt. Jede Stabkonstante r wird dann nämlich in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert, wie der im Zähler der Formel für X auftretende Faktor l_k, während alle anderen Größen in der Formel unverändert bleiben. Die Stabspannung X bleibt daher ebenfalls ungeändert und mit ihr auch alle anderen Spannungen. Deshalb hieß es auch in der Aufgabe, daß „die Dreieckseite zu 1 m angenommen werden könne“; in der Tat wäre nämlich eine Angabe über die absoluten Maße der Stablängen entbehrlich gewesen.

47. Aufgabe. Aus den Stäben 1, 2, 3 ist das aus Abb. 180 im Aufriß und Grundriß ersichtliche Bockgerüst zusammengestellt. Am oberen Knotenpunkte greift eine horizontale Kraft Q von 2000 kg an, die in der durch den Stab 3 gelegten Lotebene enthalten ist (siehe Grundriß). Man soll zuerst die Stabspannungen bestimmen und hierauf nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren die Verschiebung nach Größe und Richtung ermitteln, die der Angriffspunkt der Belastung erfährt. Für Stab 1 soll die Stabkonstante gleich $30 \cdot 10^{-6}$ *und für Stab 2 und 3 gleich* $20 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$ *sein.*







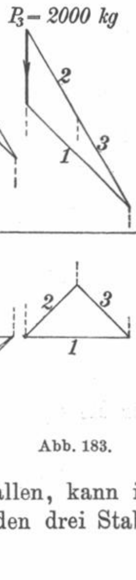


Abb. 180. Abb. 181. Abb. 182. Abb. 183.

Lösung. Da 2 und 3 im Aufrisse zusammenfallen, kann in Abb. 181 der Aufriß des der Zerlegung von Q nach den drei Stabrichtungen dienenden Kräftevierecks sofort gezeichnet werden. Hierauf kann der Grundriß nach Herabtragen von 1 aus dem Aufrisse durch Ziehen der Parallelen zu 2 und 3 vervollständigt und der Schnittpunkt von 2 und 3 in den Aufriß übertragen werden. Zur Kontrolle oder zur genaueren Zeichnung kann man auch noch die Schnittlinie der durch 2 und 3 einerseits und durch Q und 1 anderseits gelegten Ebenen in Abb. 180 konstruieren, zu der die Diagonale im Kräftevierecke der Abb. 181 parallel gehen muß. Man findet die Stabspannungen S für 1, 2, 3 zu

$$+ 4720; \qquad - 600; \qquad - 3750 \text{ kg}$$

Um die Verschiebung des Knotenpunktes nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren berechnen zu können, wählen wir zunächst drei aufeinander senkrecht stehende Richtungen und zwar die beiden ersten horizontal in den durch die Stäbe 3 und 2 gehenden Lotebenen und die dritte vertikal nach abwärts. Die Komponenten der Verschiebung $\mathfrak{x}$ nach diesen drei Richtungen seien mit x_1 x_2 x_3 bezeichnet; sie sind einzeln zu berechnen, indem man in ihren Richtungen Kräfte P_1 P_2 P_3 anbringt und für jede von ihnen die zugehörigen Stabspannungen T ermittelt. Die Kraft P_1 geht in der Richtung von Q und stimmt daher mit Q überein, wenn man sie ebenfalls zu 2000 kg annimmt. Für die Lasten P_2 und P_3, die ebenso groß genommen wurden, sind die Stabspannungen in den Kräfteplänen Abb. 182 und Abb. 183 ermittelt.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Stab	S	r	Δl	T_1	T_2	T_3	$T_1\Delta l$	$T_2\Delta$	$T_3\Delta l$
1	$+4720$	$30\ 10^{-6}$	$+141{,}6\cdot 10^{-3}$	$+4720$	$+4720$	$+3850$	668	668	545
2	-600	$20\cdot 10^{-6}$	$-12\cdot 10^{-3}$	-600	-3750	-3050	7	45	37
3	-3750	$20\cdot 10^{-6}$	$-75\cdot 10^{-3}$	-3750	-600	-3050	281	45	229
						$\Sigma T\Delta l =$	956	758	811

Hierauf folgt nach Gl. 62

$$x_1 = \frac{956}{2000} = 0{,}478 \text{ cm}; \qquad x_2 = 0{,}379 \text{ cm}; \qquad x_3 = 0{,}405 \text{ cm}.$$

Aus den drei Komponenten läßt sich die Verschiebung $\mathfrak{x}$ in Abb. 180 zusammensetzen. Die wahre Größe der Verschiebung beträgt 0,725 cm.

48. Aufgabe. An Knotenpunkt I des in Abb. 184 gezeichneten Stabgerüstes greift eine Last P von 2000 kg an. Die Stabkonstanten seien für die oberen Ringstäbe 1, 2, 3 gleich $2\cdot 10^{-6}$ *und für die Netzwerkstäbe 4 bis 9 gleich* $3\cdot 10^{-6}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$. *Man soll die Stabspannungen, sowie die Senkung des belasteten Knotenpunktes I ermitteln.*

Lösung. Zunächst folgt aus den Betrachtungen in § 45, daß die Stäbe 1, 3, 2 des oberen Ringes Spannungen von gleicher Größe und abwechselnden Vorzeichen haben müssen. Am Knotenpunkte I dann man daher die Spannungen von 1 und 2 zu einer Resultierenken zusammensetzen, die mit der den Winkel zwischen 1 und 2 halbierenden Linie zusammenfällt. Nachdem dies erkannt ist, zerlegt man P nach dieser Winkelhalbierenden und den Richtungslinien von 4 und 5. Da sich 4 und 5 im Aufrisse decken, bildet der Aufriß des windschiefen Kräftevierecks ein Dreieck, das in Abb. 185 sofort gezeichnet werden kann. Auch die Gruudrißprojektion ist ein Dreieck, weil sich P als Punkt projiziert. Dann zerlegt man die Dreieckseite im Grundrisse, die die Resultierende aus 1 und 2 darstellt, nach 1 und 2, worauf man auch den Aufriß vervollständigen kann. Die Stabspannung 3 erhält man im Grundrisse aus der Bedingung, daß die Resultierende aus 1 und 3 in die aus der früheren Betrachtung bekannte Richtung fallen muß.

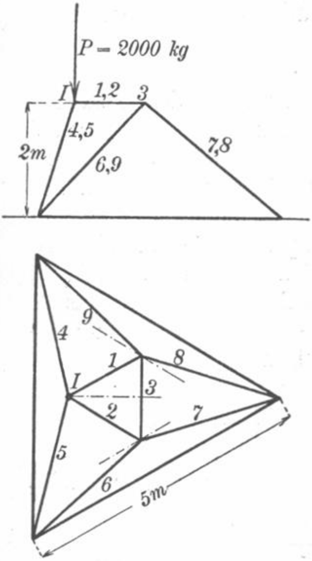


Abb. 184.

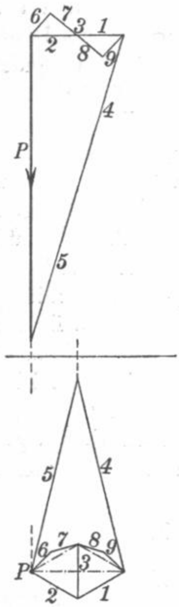


Abb. 185.

Nachdem der Kräfteplan gezeichnet ist, trägt man die Spannungen in die folgende Tabelle ein, mit deren Hilfe man auch die Bewegung vom Knotenpunkt I in Richtung der Last P berechnet.

Stab	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S	-350	-350	$+350$	-1640	-1640	$+230$	-230	-230	$+230$
r	$2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$
$100\cdot rS^2$	24,5	24,5	24,5	806,9	806,9	15,9	15,9	15,9	15,9

Hiernach ist $\Sigma r S^2 = 17{,}51$

und daher die Senkung $x = \frac{1}{P}\Sigma r S^2 = \frac{17{,}51}{2000} = 0{,}875\cdot10^{-2}$ cm.

49. Aufgabe. Vier Stäbe sind zu einem statisch unbestimmten Bockgerüst zusammengestellt, das in Abb. 136 im Aufriß und Grundriß gezeichnet ist. An dem oberen Knotenpunkte greift in der angegebenen Richtung eine Last P von 1000 kg an. Wie groß sind die Stabspannungen, wenn alle Stäbe gleiche Querschnitte und gleichen Elastizitätsmodul, daher auch gleiche Stabkonstanten haben?

Lösung. Stab 1 wurde als überzählig betrachtet und für das aus 2, 3, 4 gebildete Hauptnetz der Kräfteplan T, Abb. 187 in Auf-

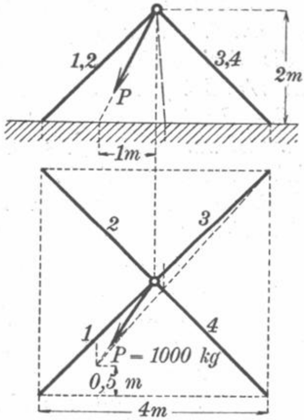


Abb. 186.

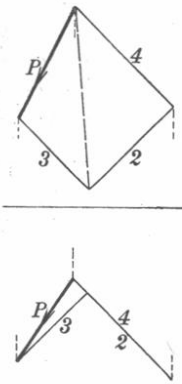


Abb. 187.

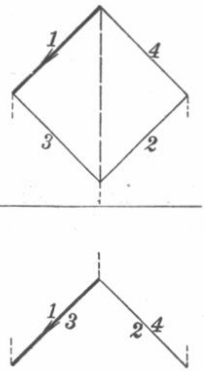


Abb. 188.

riß und Grundriß nach dem Culmannschen Verfahren ermittelt. Der Kräfteplan u in Abb. 188 für die Lasteinheit im Stabe 1 konnte in derselben Weise konstruiert werden. Für die Spannung X im Stabe 1 hat man dann nach Gl. (67)

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}$$

oder wenn man berücksichtigt, daß hier alle r einander gleich sind, einfacher

$$X = -\frac{\Sigma u T}{\Sigma u^2}.$$

Nun folgt aus den Kräfteplänen für die Stäbe

	1	2	3	4
$T =$	0	-970	$+810$	-1140
$u =$	$+1$	-1	$+1$	-1

und wenn man diese Werte einsetzt, erhält man

$$X = -\frac{2920}{4} = -730 \text{ kg}.$$

Für die drei anderen Stäbe findet man hierauf der Reihe nach

$$-\,240; \qquad +\,80; \qquad -\,410 \text{ kg}.$$

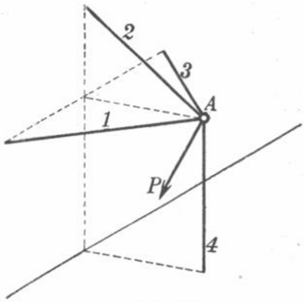


Abb. 189.

50. Aufgabe. Ein Knotenpunkt A wird, wie Abb. 189 in einer axonometrischen Zeichnung und die Abbildungen 190ᵃ bis 190ᶜ in drei Rissen zeigen, durch vier Stäbe mit der festen Erde verbunden. Einer davon geht abwärts zum Fußboden, während die drei andern an einer senkrechten Wand befestigt sind. An A greife eine Last P von 1000 kg an, die parallel zur Wand geht und einen Winkel von 45⁰ mit der Lotrechten bildet. Man soll zuerst die Stabspannungen unter der Voraussetzung berechnen, daß nur die drei nach der Wand gehenden Stäbe vorhanden sind, der lotrechte Stab also fehlt. Dann sollen die Stabspannungen auch für den Fall berechnet werden, daß alle vier Stäbe vorhanden sind. Die Stäbe haben alle 5 m Länge, alle den gleichen Querschnitt von 40 qcm und den Elastizitätsmodul von 2 000 000 atm.

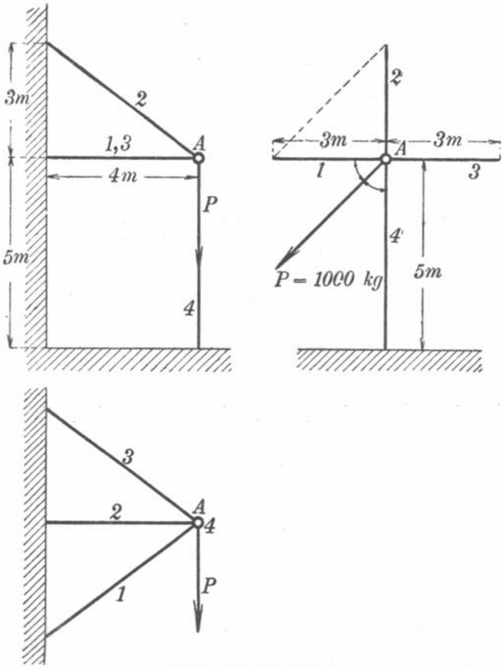


Abb. 190a bis 190c.

Lösung. Die Last P fällt in die durch die Stäbe 1 und 2 gelegte Ebene. Wenn Stab 4 fehlt, muß daher 3 spannungslos sein. Die Spannungen von 1 und 2 sind aus dem Kräfteplane T zu entnehmen, der in Abb. 191 im Aufriß und Grundriß gezeichnet ist. Um die zweite Frage zu beantworten, bringt man längs der

Richtungslinie von 4 die Lasteinheit am Knotenpunkt A an und zeichnet dafür den Kräfteplan u in Abb. 192 im Aufriß und Grund-

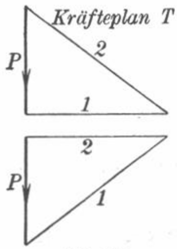


Abb. 191.

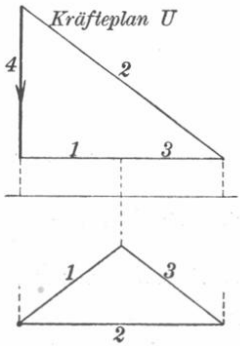


Abb. 192.

riß. Die weitere Ausrechnung ergibt sich dann mit Hilfe der nachstehenden Tabelle nach Gl. (67), die hier, weil alle Stabkonstanten gleich sind, wieder

$$X = -\frac{\Sigma u\,T}{\Sigma u^2} = \frac{2938}{5{,}18} = -561 \text{ kg}$$

geschrieben werden kann.

Stab	T	u	$u\,T$	u^2	S
1	− 1170	− 0,84	+ 984	0,70	− 699
2	+ 1170	+ 1,67	+ 1954	2,78	+ 228
3	0	− 0,84	0	0,70	+ 471
4	0	+ 1,0	0	1,0	− 561
		$\Sigma =$	2938	5,18	

Die letzten Stellen sind, wie immer bei solchen Rechnungen, nicht mehr sicher.