

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

in sechs Bänden

Graphische Statik

**Föppl, August**

**1912**

Fünfter Abschnitt. Das Fachwerk im Raume

## Fünfter Abschnitt.

### Das Fachwerk im Raume.

#### § 42. Notwendige Stäbe und Auflagerbedingungen.

Im vorigen Abschnitte handelte es sich nur um den Widerstand, den ein ebener Stabverband gegen Formänderungen innerhalb seiner eigenen Ebene zu leisten vermag und um die Spannungen, die in den Stäben durch Lasten hervorgerufen werden, die selbst alle in der Konstruktionsebene enthalten sind. Gegen Formänderungen, bei denen die Knotenpunkte aus der Konstruktionsebene heraustreten, sind jedoch die ebenen Fachwerke an sich ganz widerstandslos oder sie vermögen wenigstens einen gewissen, geringen Widerstand gegen solche Formänderungen nur insoweit zu leisten, als der Biegungswiderstand der Stäbe und die Steifigkeit der Knotenpunkte dazu führen. Daher sind auch die Lehren des vorigen Abschnittes für die Beurteilung der Steifigkeit eines Stabverbandes nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung anwendbar, daß auf irgendeine Art ausreichende Fürsorge dafür getroffen ist, daß die Knotenpunkte nicht aus der Konstruktionsebene heraustreten können.

Hieraus erhellt, daß die Theorie des Fachwerkes erst dadurch zu einer allgemeineren Fassung gelangen kann, die allen bei ihrer praktischen Anwendung auftretenden Bedingungen gerecht wird, daß man die Fachwerke als Gebilde des dreifach ausgedehnten Raumes auffaßt. Dies hindert nicht, daß man, wie es auch hier geschehen ist, zuerst die einfacheren Betrachtungen über das ebene Fachwerk erledigt und sich erst nachher

in die verwickelteren Bedingungen vertieft, die sich im dreifach ausgedehnten Raume oder kürzer im „Raume“ geltend machen.

Wir haben hier vor allem wieder die Frage zu beantworten, wieviel Stäbe erforderlich sind, um  $n$  Knotenpunkte, die jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen dürfen, zu einer räumlichen Figur von unveränderlicher Gestalt zu verbinden. Dabei sind wieder verschiedene Bildungsgesetze möglich, entsprechend jenen, die wir schon beim ebenen Fachwerke kennen lernten. Wir gehen aber wie dort zunächst von der einfachsten Art des Aufbaues oder wenigstens von jener aus, die sich bei der ersten Betrachtung als die einfachste darbietet.

Zunächst verbinden wir wieder drei der Knotenpunkte durch drei Stäbe zu einem Dreiecke, denn das Dreieck ist bei unveränderlichen Seitenlängen auch im dreifach ausgedehnten Raume keiner Gestaltänderung fähig. Ein vierter Knotenpunkt, der mit den vorigen nicht in derselben Ebene liegen darf, kann hierauf durch drei Stäbe mit diesen steif verbunden werden. Hierbei entsteht ein Tetraeder, dessen Gestalt ebenfalls unveränderlich ist, solange sich die Stablängen nicht ändern. Der Ausnahmefall kann hier nur eintreten, wenn die vier Ecken in eine Ebene fallen, das Tetraeder selbst also als solches verschwindet und einer in der Ebene geometrisch überbestimmten, im Raume aber unendlich wenig verschieblichen, ebenen Figur Platz macht. Diesen Fall hatten wir aber schon ausgeschlossen.

Auch jeder folgende Knotenpunkt kann an die vorigen durch drei Stäbe unverschieblich angeschlossen werden, wenn nur darauf geachtet wird, daß die drei Anschlußstäbe niemals in einer Ebene liegen dürfen. Dies folgt sowohl aus der geometrischen Betrachtung, wie aus der statischen Bedingung, daß die Spannungen in den Anschlußstäben ausreichen müssen, um gegen jede Last, die an dem angeschlossenen Knotenpunkte angreifen mag, das Gleichgewicht zu sichern.

Für jeden anzuschließenden Knotenpunkt müssen wir hiernach drei Stäbe aufwenden und nur im Anfange genügten zur Verbindung der drei Ausgangsknotenpunkte drei Stäbe. Hiernach ist die Zahl  $m$  der notwendigen Stäbe

$$m = 3n - 6. \quad (54)$$

Natürlich können auch hier wieder nachträglich überzählige Stäbe zwischen die bereits steif miteinander verbundenen Knotenpunkte eingeschoben werden, wodurch das räumliche Fachwerk in ein geometrisch überbestimmtes und zugleich statisch unbestimmtes übergeht. Die hierüber bereits beim ebenen Fachwerke durchgeführten Betrachtungen bleiben auch hier gültig und brauchen nicht nochmals wiederholt zu werden. In diesem Abschnitte soll übrigens nur von den geometrisch und statisch bestimmten räumlichen Fachwerken die Rede sein.

Ferner kann man auch beim räumlichen Fachwerke von den nach dem soeben besprochenen Plane aufgebauten zu Fachwerken von abweichender Gliederung durch das schon früher angewendete Mittel der Stabvertauschung übergehen. Beseitigt man nämlich einen Stab, so erhält man einen zwangläufigen Mechanismus und der damit gegebene Freiheitsgrad kann wieder beseitigt, die Steifigkeit also wieder hergestellt werden, indem man irgend zwei Knotenpunkte, die bei einer Bewegung des Mechanismus ihren Abstand ändern müßten, durch einen neuen Stab miteinander verbindet.

Die Zahl der durchschnittlich von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe folgt aus Gl. (54) zu

$$\frac{2m}{n} \quad \text{oder} \quad 6 - \frac{12}{n};$$

sie bleibt also stets kleiner als sechs. Bei den gewöhnlich vorkommenden Fachwerkformen, die eine große Zahl von Knotenpunkten enthalten, gehen von den meisten Knotenpunkten je sechs Stäbe aus, während bei einigen Knotenpunkten die Zahl geringer ist. Jedenfalls müssen bei einem statisch bestimmten räumlichen Fachwerke Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens fünf Stäbe ausgehen. Andererseits dürfen von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen und außerdem dürfen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe niemals alle in derselben Ebene enthalten sein.

Wie beim ebenen Fachwerke die Scheibe, kann man hier den starren Körper als Fachwerkelement mit einführen. Man

kann sich darunter selbst wieder ein in sich steif verbundenes räumliches Fachwerk oder auch einen zusammenhängenden Körper vorstellen. Namentlich die ganze feste Erde kann als Fachwerkbestandteil aufgefaßt werden und man gewinnt damit auf einfachste Weise den Übergang von den nicht festgehaltenen, sondern nur in sich unverschieblichen Fachwerken zu zahlreichen Fachwerkträgern, nämlich zu allen, bei denen keine verschieblichen Auflager vorkommen.

Hat ein räumliches Fachwerk *einen* starren Körper und *n* freie (d. h. nicht zu jenem gehörige) Knotenpunkte, so beträgt die Zahl der notwendigen Stäbe

$$m = 3n, \quad (55)$$

denn jeder freie Knotenpunkt wird durch je drei Stäbe unverschieblich angeschlossen. Dabei ist es aber nicht nötig, daß auch wirklich von jedem Knotenpunkte drei Stäbe unmittelbar zum starren Körper geführt sind. Man kann, nachdem schon ein Knotenpunkt angeschlossen ist, einen der Verbindungsstäbe zum zweiten Knotenpunkte auch von jenem aus führen und später braucht man überhaupt keine Stäbe mehr unmittelbar vom starren Körper ausgehen zu lassen. Außerdem kann man nachträglich auch noch Stabvertauschungen vornehmen. Es kommt also im wesentlichen nur auf die Zahl der Verbindungsstäbe an, obschon natürlich Mißgriffe in der Verteilung der Stäbe, wie sie schon beim ebenen Fachwerke besprochen wurden, oder Ausnahmefälle, die nicht durch die Gliederung im allgemeinen, sondern dadurch bedingt sind, daß ein Stab im Maximum oder Minimum seiner Länge steht, hierbei vermieden sein müssen.

Enthält das Fachwerk mehr als einen, also etwa *r* starre Körper, so kann man sich zunächst zwei derselben verbunden denken. Hierzu braucht man sechs Stäbe. Dies geht einerseits daraus hervor, daß ein starrer Körper gegen den andern sechs Freiheitsgrade hat, so daß sechs Fesseln nötig sind, von denen jede einen Freiheitsgrad aufhebt, und andererseits auch daraus, daß jede an dem einen Körper auftretende Last nach sechs Richtungslinien eindeutig zerlegt werden kann. Natürlich müssen dabei die schon im dritten Abschnitte besprochenen Ausnahme-

fälle vermieden werden: es darf sich also keine Gerade ziehen lassen, die alle sechs Stabrichtungen schneidet und namentlich dürfen nicht mehr als drei Stabrichtungen durch denselben Punkt gehen und nicht mehr als drei dürfen in derselben Ebene enthalten sein.

Auch jeder folgende starre Körper kann durch sechs Stäbe an die vorigen und jeder freie Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen werden. Im ganzen beträgt daher die Stabzahl in diesem allgemeinen Falle

$$m = 3n + 6(r - 1) = 3n - 6 + 6r, \quad (56)$$

womit auch Gleichung (54) für  $r = 0$  mit umfaßt wird. Auch hier ist es natürlich nicht nötig, daß die Stäbe genau so verteilt sind, wie wir jetzt annehmen; man kann vielmehr nachträglich noch Stabvertauschungen vornehmen. Jedenfalls dürfen aber von keinem starren Körper weniger als sechs und von keinem freien Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen.

In Verbindung hiermit soll sofort auch die Frage der *Auflagerbedingungen* erledigt werden. Nötigt man einen Knotenpunkt, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, die man sich für eine unendlich kleine Verschiebung auch durch ihre Berührungsebene ersetzt denken kann, so schreibt man ihm eine Auflagerbedingung vor. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers wird nämlich dadurch, wenn sonst keine Bewegungsbeschränkung vorliegt, nur einer vernichtet. Wird der Knotenpunkt genötigt, auf einer Linie zu bleiben, so entspricht dies zwei Auflagerbedingungen und der Körper hat, wenn kein anderes Hindernis vorliegt, noch vier Freiheitsgrade. Wählt man nämlich den Auflagerknotenpunkt als Anfangspunkt für die Beschreibung der Bewegung, so müssen von den sechs Komponenten der Vektoren  $v_0$  und  $u$ , durch die der Geschwindigkeitszustand gekennzeichnet wird, zwei Komponenten von  $v_0$  verschwinden, da  $v_0$  nur in die Richtung der Auflagerbahn fallen kann. — Einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte sind drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben.

Die Zahl der Auflagerbedingungen, die man einem starren Körper im ganzen vorschreiben muß, um ihn festzuhalten, beträgt sechs, nämlich soviel als die Zahl der Freiheitsgrade, die aufzuheben sind. Die sechs Auflagerbedingungen müssen

sich auf mindestens drei Knotenpunkte verteilen. Wollte man zwei Knotenpunkte vollständig festhalten, so würde dies nur fünf voneinander unabhängigen Auflagerbedingungen entsprechen. Denkt man sich nämlich einen Knotenpunkt festgehalten und den andern längs irgendeiner Linie beweglich, so kann sich dieser schon nicht mehr bewegen, da er wegen des Zusammenhanges im starren Körper seinen Abstand von dem festgehaltenen Punkte nicht zu ändern vermag.

Man kann also etwa einem Knotenpunkte eine, einem zweiten zwei und einem dritten drei Auflagerbedingungen vorschreiben. Oder man kann auch die sechs Auflagerbedingungen auf sechs Knotenpunkte verteilen, von denen dann jeder auf einer Fläche gelagert ist, längs deren er sich, wenn sonst kein Hindernis vorläge, frei zu verschieben vermöchte. Außerdem vermag man auch, wie schon bei den ebenen Trägern, eine größere Zahl von Auflagerbedingungen einzuführen, ohne den Träger dadurch statisch unbestimmt zu machen, falls man dafür eine entsprechende Zahl von Stäben aus dem Verbande herausnimmt.

Bezeichnet man die Zahl der Auflagerbedingungen mit  $p$ , so erhält man an Stelle von Gl. (54)

$$m = 3n - p, \quad (57)$$

denn um ebensoviel als  $p$  größer wird als 6, ist  $m$  zu vermindern, damit der Träger nicht statisch unbestimmt wird.

Die Auflagerbedingungen vermag man übrigens stets auch durch Stäbe von hinreichender Länge zu erfüllen, die von der festen Erde nach den Auflagerknotenpunkten geführt sind. Ist ein Knotenpunkt nur durch einen Stab mit der festen Erde verbunden, so wird er dadurch genötigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, deren Halbmesser gleich der Länge des Stabes ist. Zwei Stäbe führen den Knotenpunkt auf einer Linie; er muß nämlich auf dem Kreise bleiben, in dem sich die den beiden Stäben zugehörigen Kugelflächen schneiden. Drei Stäbe halten den Knotenpunkt vollständig fest. Jeder Stab entspricht daher einer Auflagerbedingung.

Infolgedessen vermag man auch die nähere Untersuchung der Auflagerbedingungen ganz zu umgehen, indem man sie sich alle durch Stäbe ersetzt denkt; abgesehen von den festgehaltenen Knotenpunkten, die man unmittelbar als Punkte der festen Erde betrachtet. Man kann dann jeden räumlichen Fachwerkträger auch als ein Fachwerk auffassen, das die Erde als starren Körper enthält und in dem nur Verbindungsstäbe, sonst aber keine Bewegungsfesseln, die als Auflagerbedingungen zu bezeichnen wären, vorkommen.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man bei der Theorie des ebenen Fachwerkes jedem Knotenpunkte im Grunde genommen eine Auflagerbedingung vorschreibt, von der dort freilich gar keine Rede ist. Man setzt nämlich voraus, daß die Knotenpunkte genötigt seien, in der Konstruktionsebene zu bleiben und dies entspricht in der Tat, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese  $n$  Auflagerbedingungen bewirken einerseits, daß die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die notwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

### § 43. Das Flechtwerk.

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer größeren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannigfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmäßigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe

sämtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen einfach zusammenhängenden inneren Raum umschließt.

Um zu erkennen, daß räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Überlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des Polyeders. Setzt man eine neue Seitenfläche daran, so kommt eine neue Kante mehr dazu, als neue Ecken, weil diese zwischen jenen liegen. Dies gilt auch beim Ansetzen weiterer Seitenflächen und wir können sagen, daß die Zahl der neu hinzukommenden Kanten ebensogroß ist, als die Zahl der neu hinzukommenden Ecken, vermehrt um die Zahl der hinzukommenden Seitenflächen. Nur zuletzt, wenn der Mantel des Polyeders durch Einfügen der letzten Seitenfläche geschlossen wird, tritt weder eine neue Ecke, noch eine neue Kante, wohl aber eine neue Seitenfläche auf. Die Zahl der Ecken und Seitenflächen bleibt also sonst immer gleich der Zahl der Kanten, mit Ausnahme des Anfanges und des Endes, wo jedesmal eine Seitenfläche mehr auftritt, als zur Herstellung des Ausgleiches zwischen jenen Zahlen erforderlich wäre. Wird also die Zahl der Kanten mit  $m$ , die Zahl der Ecken mit  $n$ , die Zahl der Seitenflächen mit  $f$  bezeichnet, so hat man

$$m = n + f - 2 \quad (58)$$

und diese Gleichung spricht den Eulerschen Satz aus.

Wir wollen den Satz auf den besonderen Fall anwenden, daß alle Seitenflächen Dreiecke sind. In diesem Falle besteht noch ein leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen  $m$  und  $f$ . Das Dreifache von  $f$  gibt nämlich die Zahl der Kanten an, die man erhält, wenn man in jedem Dreiecke die Kanten von neuem zählt. Hierbei wird aber jede Kante, die immer eine Grenze zwischen zwei Dreiecken bildet, doppelt gezählt und die Anzahl der Polyederkanten beträgt daher gerade die Hälfte von  $3f$ .

Mit  $m = \frac{3f}{2}$  oder  $f = \frac{2m}{3}$  geht aber Gl. (58) über in

$$\frac{m}{3} = n - 2 \quad \text{oder} \quad m = 3n - 6$$

und damit ist, wie ein Vergleich mit Gl. (54) lehrt, nachgewiesen, daß die Zahl der Kanten in einem von lauter Dreiecken umschlossenen Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume gerade ausreicht, um bei unveränderlicher Länge die Ecken unverschieblich miteinander zu verbinden. Hiermit ist auch die Möglichkeit der Flechtwerke erkannt und zugleich nachgewiesen, daß sie nicht nur stabile, sondern zugleich auch statisch bestimmte Fachwerke bilden. Man muß sich nur vorbehalten, daß Ausnahmefälle, die hier natürlich ebenso gut, wie beim ebenen Fachwerke vorkommen können, vermieden werden. Dann kann man sagen:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die eineneinfach zusammenhängenden Raum vollständig umschließt, liefert im allgemeinen, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffaßt, ein stabiles und statisch bestimmtes Fachwerk, das man ein Flechtwerk nennt.

Hierbei ist nicht nötig, daß alle Dreiecke des Mantels in verschiedenen Ebenen liegen; nur dürfen nicht alle Dreiecke, die von einer Ecke ausgehen, in derselben Ebene liegen, weil dies sonst auch von den Stäben an dieser Ecke zuträfe und weil der Knotenpunkt gegen Verschiebungen senkrecht zu jener Ebene alsdann nicht genügend abgestützt wäre. — Ob im übrigen ein Ausnahmefall vorliegt oder nicht, entscheidet man am einfachsten dadurch, daß man die Stabspannungen berechnet. Bleiben diese für beliebige endliche Lasten stets endlich, so ist der Ausnahmefall vermieden.

Flechtwerkmäntel vermag man selbst wieder von sehr verschiedenen Gestalten anzugeben und man erkennt daraus leicht den Formenreichtum im Gebiete des räumlichen Fachwerkes. Von den regelmäßigen Polyedern sind z. B. das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder ohne weiteres Flechtwerke; beim

Würfel und beim Dodekaeder muß man jede Seitenfläche durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, um Flechtwerke zu erhalten.

Zieht man auf einer Kugel eine Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen, wie bei der Gradeinteilung auf einem Erdglobus, betrachtet die Schnittpunkte als Knotenpunkte und die zu den Kreisbögen zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten gehörigen Sehnen als Stäbe, so braucht man nur noch in jedes vierseitige Fach einen Diagonalstab einzuschieben, um zu einem Flechtwerke zu gelangen. Bei einem Ellipsoide oder einer geschlossenen Fläche von ähnlicher Art führt dasselbe Verfahren, das leicht auch noch ein wenig abgeändert werden kann, falls man dabei nur zu einem aus Dreiecken zusammengesetzten Mantel gelangt, ebenfalls zum Ziele.

Übrigens macht es auch nicht viel aus, wenn man bei dem in der beschriebenen Weise erhaltenen Kugelflechtwerke die Stäbe nicht geradlinig ausführt, sondern sie nach den Meridian- und Parallelkreisen, denen sie folgen, krümmt. Denn auch ein Stab, der zwischen seinen beiden Knotenpunkten ein wenig gekrümmt ist, vermag Entfernungsänderungen seiner Endpunkte zu verhüten, ohne dabei wesentlich auf Biegung beansprucht zu werden, solange nur die kreisförmige Stabachse sich von der zugehörigen Sehne nicht viel entfernt. Die Zahl der Knotenpunkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Zahl der Meridiane und Parallelkreise, darf also in diesem Falle nicht zu klein gewählt sein. Andererseits soll freilich die Zahl der Knotenpunkte auch nicht zu groß sein, weil sich sonst die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe zu wenig von der Tangentialebene an die Kugel abheben. Liegen die Stäbe nämlich nahezu in einer Ebene, so nähern wir uns dem Ausnahmefalle und wir erhalten für Einzelasten an einem solchen Knotenpunkte, die eine Komponente rechtwinklig zur Tangentialebene haben, große Stabspannungen.

Ein anderer Fall wird durch das in Abb. 121 vorgeführte Zylinder- oder Tonnenflechtwerk gebildet. Wie vorher die Kugel, kann man sich auch einen Zylindermantel durch eine Anzahl von Parallelkreisen und durch Zylindererzeugende in vierseitige

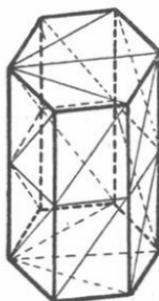


Abb. 121.

Fächer zerlegt denken, die durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke geteilt werden können. Um einen geschlossenen Flechtwerkmantel zu erhalten, muß man aber dann auch noch die beiden Basispolygone durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen.

Da die Bögen, wenn man ursprünglich von einem Zylinder ausging, nachträglich durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden müssen, wenn man nur geradlinige Stäbe anwenden will, erscheint der Flechtwerkmantel schließlich in der Gestalt eines Prismas. Bemerkenswert ist dabei, daß man sich dieses Flechtwerk auch durch Aneinanderfügen von lauter ebenen Fachwerken entstanden denken kann. Die auf jeder Seitenfläche des Prismas liegenden Stäbe bilden nämlich für sich genommen ein ebenes Fachwerk mit parallelen Gurten. Dabei haben je zwei aufeinander folgende ebene Fachwerke die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam. Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um die Berechnung der Stabspannungen im Tonnenflechtwerke bei gegebenen Lasten auf die Berechnung der Stabspannungen in den ebenen Fachwerken zurückzuführen.

Schließlich kann, um noch einen andern einfachen und wichtigen Fall hervorzuheben, das Prisma in Abb. 121 auch durch eine abgestumpfte Pyramide ersetzt werden, ohne daß sich sonst etwas änderte. Außerdem steht auch nichts im Wege, diese Pyramide bis zur Spitze hin durchzuführen. Das eine Basispolygon fällt dann fort und wird durch die Spitze ersetzt. Man gelangt so zu den bei neueren Kirchturmbauten oft zugrunde gelegten Pyramidenflechtwerken, die sich von den älteren Konstruktionen, wie alle Flechtwerke, durch den Umstand unterscheiden, daß der von dem Mantel umschlossene Innenraum von keinen Stäben durchsetzt wird.

Um von einem Flechtwerke zu einem Flechtwerkträger zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Zunächst kann man sechs voneinander unabhängige Auflagerbedingungen vorschreiben, durch die das Flechtwerk gegen die Erde festgehalten wird, wodurch es in einen Träger übergeht, der beliebige Lasten, die nun nicht mehr in derselben Ebene zu liegen brauchen, aufnehmen kann. Am einfachsten werden diese Auflagerbedingungen gewöhnlich durch Stäbe, die von

der Erde nach dem Flechtwerke geführt sind, ersetzt. Von früher her ist schon bekannt, welche Ausnahmefälle bei der Anordnung der sechs Verbindungsstäbe vermieden werden müssen, um eine steife Verbindung herzustellen. Ein Beispiel für einen in dieser Weise gewonnenen Flechtwerkträger wird in § 47 behandelt werden. Zieht man mehr als sechs Verbindungsstäbe, so wird der Träger statisch unbestimmt; man kann aber dann, ebenso wie es schon in der Lehre vom ebenen Fachwerke besprochen wurde, durch Fortlassen einer entsprechenden Anzahl von Stäben des Flechtwerkes die statische Bestimmtheit auch wieder herstellen.

Ein anderer Weg zur Gewinnung von Flechtwerkträgern wird durch die folgende Überlegung gewiesen. Man denke sich ein Flechtwerk durch einen beliebigen Schnitt in zwei Teile getrennt. Jeder Teil für sich ist dann nicht mehr steif, wenigstens dann nicht, wenn der Schnitt, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, mehr als sechs Stäbe trifft. Nimmt man aber den einen Teil und verbindet ihn durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe mit der festen Erde, so erhält man auf jeden Fall einen unverschieblichen Stabverband. Denn schon der Zusammenhang mit dem für sich nicht steifen Reste, der bei der Führung des Schnittes wegfiel, reichte aus, um Gestaltänderungen auszuschließen. Um so mehr muß also der Zusammenhang mit einem starren Körper denselben Erfolg herbeiführen.

Zugleich macht uns diese Betrachtung freilich auch darauf aufmerksam, daß der Flechtwerkträger, den man auf solche Art erhält, geometrisch überbestimmt und darum zugleich auch statisch unbestimmt ist. Wenn man darin einen Mangel erblickt, so kann man ihm nachträglich wieder dadurch abhelfen, daß man noch eine entsprechende Anzahl von Stäben aus dem Flechtwerkverbände entfernt.

#### § 44. Die Schwedlersche Kuppel.

Das älteste und bis auf den heutigen Tag wichtigste Beispiel für die praktische Ausführung eines folgerichtig aufgebauten Flechtwerkträgers bildet die von Schwedler herrührende

Kuppelkonstruktion. Man gelangt zu ihr, indem man von einem Kugelflechtwerke eine Haube abschneidet und sie mit der Erde durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe verbindet. Entfernt man nachträglich noch die Spitze mit den von ihr ausgehenden Stäben, so daß die Tragkonstruktion in einem „Nabelringe“ endet, so wird der Flechtwerkträger statisch bestimmt. Auf die besondere Gestalt des Meridians kommt es hierbei nicht an:

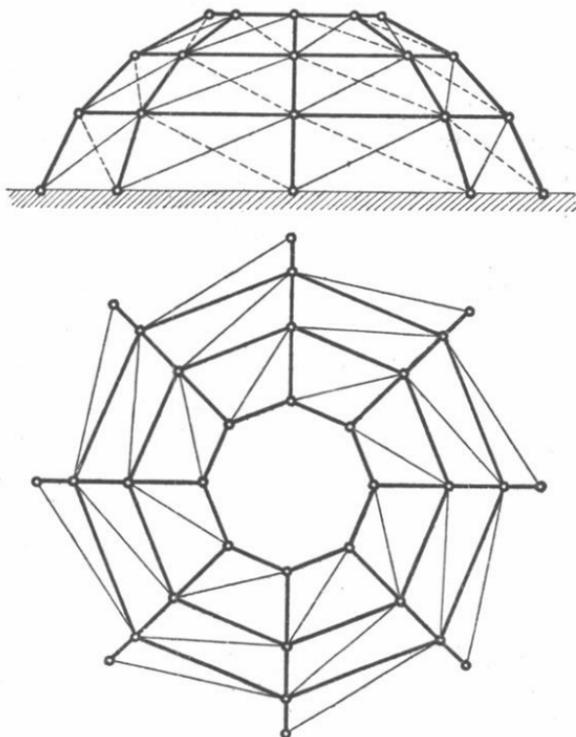


Abb. 122.

ebenso gut als nach der Kugel, kann man den Flechtwerkmantel auch nach irgendeiner andern Rotationsfläche gestalten. Der Meridian kann selbst geradlinig sein und das alsdann entstehende Kegeldach ist nur als ein besonderer Fall der Schwedlerschen Kuppel aufzufassen.

Abb. 122 zeigt eine Schwedlersche Kuppel mit offenem Nabelringe in Aufriß und Grundriß. Daß sie die zur Herstellung

eines steifen Verbandes erforderliche Zahl von Stäben umfaßt, kann durch Nachzählen leicht festgestellt werden. Man hat nämlich ebensoviel Ringstäbe, ferner ebensoviel Sparrenstäbe (so sollen die längs der Meridiane verlaufenden genannt werden) und auch ebensoviel Diagonalstäbe, als freie Knotenpunkte vorkommen, also die nach Gl. (55) erforderliche Zahl. Wird außerdem noch ein Auflagerring ausgeführt, der die Auflagerpunkte miteinander verbindet, wie es gewöhnlich geschieht, so wird dadurch an der statischen Bestimmtheit der Kuppel nichts geändert, denn die Stäbe des Auflagerringes dienen nur

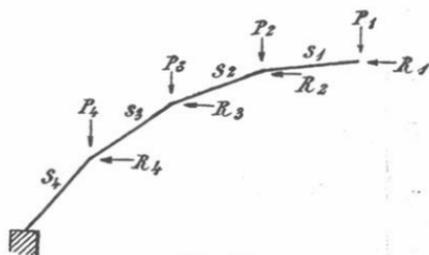


Abb. 123.

zur Verbindung von Punkten der festen Erde, helfen also die von vornherein vorausgesetzte Starrheit des Widerlagers herstellen, die ohne sie vielleicht nicht genügend gesichert wäre.

Daß kein Ausnahmefall vorliegt, daß also die Knotenpunkte durch die Stäbe auch wirklich steif miteinander und mit der Erde verbunden sind, wird sich daraus ergeben, daß jedem beliebigen Lastensysteme durch endliche Werte der Stabspannungen entsprochen werden kann.

Bei symmetrischer Belastung der Kuppel genügt es, die auf einer Kuppelseite liegenden Stabspannungen zu kennen, da die auf allen andern Seiten ebenso groß sind. Ferner kann man Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne die Spannungen der Diagonalstäbe dabei in Anspruch zu nehmen. Da in einem statisch bestimmten Fachwerke nur ein einziges System von Stabspannungen möglich ist, das den Gleichgewichtsbedingungen genügt, folgt daraus, daß die Diagonalstäbe bei symmetrischer Belastung auch wirklich spannungslos sind.

In Abb. 123 ist ein einzelner, aus vier Sparrenstäben mit den dazwischen liegenden Knotenpunkten bestehender Meridian einer Schwedlerschen Kuppel herausgezeichnet. Die Lasten  $P_1, P_2$  usf. an den Knotenpunkten können und werden auch im all-

gemeinen voneinander verschieden sein; zur symmetrischen Belastung gehört nur, daß sie sich an allen andern Meridianen in der gleichen Weise wiederholen. An jedem Knotenpunkte greifen zwei Ringstäbe an, die gleiche Spannungen von gleichem Vorzeichen haben und die man sich durch eine in der Meridianebene liegende Resultierende ersetzt denken kann. Die Resultierenden müssen zugleich in den Ringebenen liegen, also horizontal gerichtet sein. Sie wurden in der Abbildung mit  $R_1 R_2$  usw. bezeichnet und die Pfeile sind so eingetragen, wie sie bei Druckspannungen in den Ringstäben ausfallen.

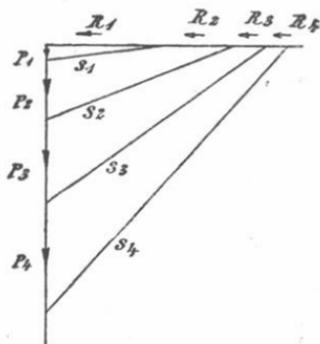


Abb. 124.

Zur Ermittlung der Resultierenden  $R$  und der Spannungen  $S_1 S_2$  usw. in den Sparrenstäben dient der Kräfteplan in Abb. 124. Man beginnt ihn mit dem Kräfte-dreiecke  $P_1 R_1 S_1$  für den Knoten-

punkt des Nabelringes, reiht daran das Kräfteviereck  $S_1 P_2 R_2 S_2$  für den Knotenpunkt des unteren Ringes und fährt in dieser Weise fort. Die Sparrenstäbe sind sämtlich gedrückt und ihre Spannungen wachsen von oben nach unten. Auch die Resultierenden  $R$  entsprechen bei dem gewählten Beispiele überall Druckspannungen in den Ringstäben, die aber nach unten hin abnehmen. Es kann aber auch vorkommen, daß die Stabspannungen in den unteren Ringen Null werden oder in Zugspannungen übergehen, wenn die Gestalt des Meridians etwas anders gewählt wird, oder wenn die Lasten  $P$  nach unten hin nicht so schnell zunehmen, als hier vorausgesetzt wurde. Aus dem Kräfteplane wird der Pfeil der  $R$  und hiermit das Vorzeichen der Ringspannungen immer leicht zu erkennen sein.

Die Seitenzahl des Grundrißpolygons, zu dem die Kuppel gehört, ist bis dahin ganz gleichgültig. Um aus den Resultierenden  $R$  die Spannungen der Ringstäbe selbst zu finden, muß man aber die Seitenzahl kennen. Jedes  $R$  ist dann in der Ringebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Grundrisse nach den

Richtungen der zugehörigen Ringstäbe zu zerlegen. Man kann die sich hierfür ergebenden Kräftedreiecke auch an die Strecken  $R$  in dem bereits gezeichneten Kräfteplane unmittelbar anreihen.

Um ein Urteil darüber zu gewinnen, wie sich das Spannungsbild bei unsymmetrischer Lastverteilung gestaltet, muß man vor allem untersuchen, welche Spannungen durch eine Einzellast, die an einem beliebigen Knotenpunkte angreift, hervorgerufen werden.

Zu diesem Zwecke muß ich aber zunächst eine Bemerkung über die sogenannten Gegendiagonalen vorausgehen lassen. Zur Aussteifung genügt es, wie wir sahen, wenn in jedes vierseitige, aus Sparren- und Ringstäben gebildete Fach eine einzige Diagonale eingeschaltet wird, die das Fach in zwei Dreiecke zerlegt. Bei symmetrischer Belastung sind die Diagonalen spannungslos, bei unsymmetrischer haben sie aber Spannungen aufzunehmen. Daraus folgt schon, daß sie bei manchen Belastungen gezogen, bei andern — namentlich also bei jenen, die die vorigen zu symmetrischen Belastungen ergänzen — gedrückt sein werden. Nun vermeidet man es gerne, solche Stäbe, die nur verhältnismäßig geringe Spannungen aufzunehmen haben, auf Druck in Anspruch zu nehmen, weil sie dann auf Zerknicken berechnet werden müßten und daher bei größerer Länge einen erheblichen Materialaufwand erforderten. Man kann dies dadurch umgehen, daß man jedes Fach mit zwei Diagonalstäben versieht, die nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen, so daß die Knickgefahr außer Betracht bleiben kann.

Freilich erhält man damit streng genommen überzählige Stäbe und ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Die statische Unbestimmtheit ist aber hier von besonders einfacher Art und sie hindert nicht, daß die Berechnung im wesentlichen gerade so erledigt werden kann, wie für den statisch bestimmten Träger. Denkt man sich nämlich zunächst nur in einem einzigen Fache zwei Diagonalen angeordnet, so können dadurch die Spannungen aller außerhalb dieses Faches liegenden Stäbe überhaupt nicht geändert werden, wie auch der Träger belastet sein möge. Man erkennt dies, wenn man sich den überzähligen Diagonalstab durchschnitten und die in ihm herrschende Spannung durch äußere Kräfte an den beiden Endknotenpunkten ersetzt denkt. Nach Durchschneidung der Diagonale wird der Träger wieder statisch bestimmt und die zu den beiden neu auftretenden Lasten gehörigen Stabspannungen verteilen sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe,

weil man hierdurch bereits Gleichgewicht an allen Knotenpunkten herstellen kann. Daraus folgt, daß es für alle übrigen Stäbe ganz gleichgültig ist, ob die zweite Diagonale vorhanden ist oder nicht und welche Spannung in ihr auftritt, wenn sie vorhanden ist.

In Abb. 125<sup>a</sup> ist ein einzelnes Fach herausgezeichnet. Die gestrichelt angegebene Linie 6 sei als die überzählige Diagonale angesehen. Herrscht in dieser eine beliebige Spannung, so findet man die Spannungen in den Stäben 1 bis 5, die zum statisch bestimmten Träger gehören, wenn 6 durch Lasten an den Endknotenpunkten ersetzt wird, aus dem Kräfteplane in Abb. 125<sup>b</sup>. Diese Spannungen stellen in der Tat Gleichgewicht an allen Knotenpunkten mit den Lasten 6 her, ohne daß die übrigen Stäbe des ganzen Trägers dabei in Mitleidenschaft gezogen würden. Der Kräfteplan ist zur Figur des einzelnen Faches rezipok und zugleich ihr auch ähnlich, wenn sich auch die einzelnen Seiten dabei nicht in der gleichen

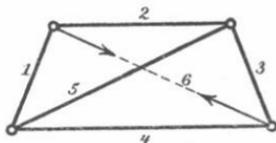


Abb. 125 a.

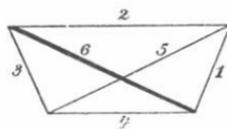


Abb. 125 b.

Weise entsprechen, wie sie sonst einander zugewiesen sind. Jedenfalls kann man aber hieraus leicht erkennen, wie groß die Spannungen in den fünf übrigen Stäben des Faches sind, die zu den Spannungen im statisch bestimmten Träger noch hinzutreten, wenn auch 6 in irgendeine Spannung gerät.

Über die Größe der Spannung in 6 kann man zunächst nichts aussagen; sie hängt vor allem davon ab, wie der Träger hergestellt wurde. Ist nämlich etwa die Diagonale 6, falls sie zuletzt eingesetzt wird, anfänglich ein wenig kürzer als die Entfernung der Knotenpunkte, so müssen diese gewaltsam ein wenig zusammengerückt werden, um die Diagonale zwischen ihnen befestigen zu können. Die Diagonale 6 gerät dann in Zugspannung und auch in den übrigen Stäben des Faches treten Montierungsspannungen auf, die dem Spannungsbilde in Abb. 125<sup>b</sup> entsprechen. Über diese Montierungsspannungen vermag die Theorie natürlich nichts auszusagen, solange über den Hergang bei der Montierung nichts bekannt ist.

Nimmt man an, daß die Montierungsspannungen durch genaues Einpassen vermieden sind und daß beide Diagonalen nur gegen Zug widerstandsfähig sind, so behalte man für die Berechnung der

Stabspannungen im Fachwerkträger zunächst nur eine von beiden Diagonalen bei und führe die Berechnung für den auf diese Weise erhaltenen statisch bestimmten Träger durch. Zeigt sich dann, daß die beibehaltene Diagonale bei der gegebenen Belastung auf Druck beansprucht würde, so schalte man sie aus und setze die andere an ihre Stelle. Diese muß dann, um die Druckspannung in der vorigen zu tilgen, gezogen sein und zwar ebenso stark, als jene gedrückt war. Dabei ändern sich auch die Spannungen der zu demselben Fache gehörenden Stäbe um die aus Abb. 125<sup>b</sup> zu entnehmenden Beträge.

Das gilt unter der Voraussetzung, daß der nach Fortnahme einer der beiden Diagonalen erhaltene Träger statisch bestimmt ist. Aber auch wenn er unbestimmt ist, gelten die vorhergehenden Schlußfolgerungen in den gewöhnlich vorkommenden Fällen immer noch mit hinreichender Annäherung.

Um dies zu erkennen, nehme man an, von den beiden Diagonalen 5 und 6 in Abb. 125<sup>a</sup> sei zuerst 5 beibehalten, die Spannung berechnet und als eine Druckspannung gefunden worden. Dann denke man sich, wie in der vorhergehenden Betrachtung, längs der Richtungslinie von 6 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte als Lasten angebracht. Der Unterschied gegenüber dem vorhergehenden Falle besteht darin, daß durch diese Lasten jetzt nicht nur die zu dem gleichen Fache gehörenden Stäbe in Spannung versetzt werden, sondern auch der ganze übrige Stabverband, der nach Voraussetzung für sich schon ausreicht, einer Entfernungsänderung der Endknotenpunkte von 6 zu widerstehen, wenn auch die beiden Diagonalen des betrachteten Faches beseitigt sind. Die Zuglasten längs der Linie 6 werden zu einem gewissen Bruchteile von diesem übrigen Verbands und nur der Rest von dem Fache selbst aufgenommen. Aber in ziemlich allen praktisch vorkommenden Fällen wird der erste Teil viel kleiner sein als der zweite. Die beiden Teile verhalten sich nämlich umgekehrt zueinander wie die Längenänderungen der Strecke 6 unter der Voraussetzung, daß die Lasten entweder an dem „übrigen Verbands“ oder an dem Fache für sich genommen angebracht wird. Der übrige Verband, der nach Herausnahme der beiden Diagonalen erhalten wird, ist ohne Zweifel viel nachgiebiger gegen eine Entfernungsänderung der Endpunkte von 6 als der eng zusammengeschlossene Verband der zu dem gleichen Fache gehörigen Stäbe. Man wird daher in den meisten Fällen nur einen geringen Fehler begehen, wenn man auf den von dem übrigen Verbands aufgenommenen Anteil der längs 6 wirkenden Zuglasten gar nicht achtet, sondern annimmt, daß sich der Ausgleich wie in dem früheren Falle nur innerhalb eines Faches vollziehe.

Alsdann genügt es für die Berechnung der Stabspannungen, in jedem Fache nur eine der beiden Gegendiagonalen beizubehalten, die Spannungen unter dieser Annahme zu berechnen und hierauf nachträglich die gedrückten Diagonalen durch ihre auf Zug beanspruchten Gegendiagonalen in der vorher besprochenen Weise zu ersetzen. In der Folge wird daher immer nur von Trägern mit einer einzigen Diagonale in jedem vierseitigen Fache die Rede sein.

Zunächst suche man jene Stäbe auf, die durch die gegebene Einzellast überhaupt nicht in Spannung versetzt werden. Man beginne mit einem unbelasteten Knotenpunkte des Nabelringes. Von einem solchen gehen vier Stäbe aus, von denen drei in der-

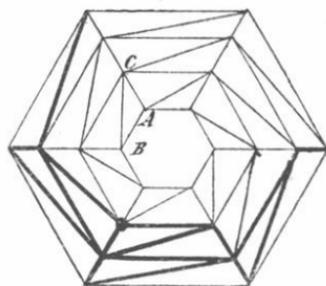
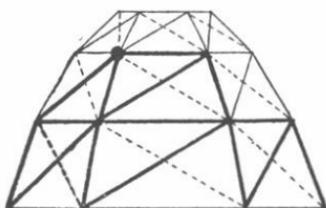


Abb. 126.

selben Ebene liegen (nämlich die zu demselben trapezförmigen Fache gehörenden). Der vierte, der nicht in dieser Ebene enthalten ist, muß notwendig spannungslos sein, weil einer etwa in ihm auftretenden Spannung durch die Resultierende der drei andern Stabspannungen, die mit diesen ebenfalls in derselben Ebene liegen, nicht Gleichgewicht gehalten werden könnte.

In dem Kuppelgrundrisse der Abb. 126 betrachte man z. B. das Gleichgewicht der Kräfte am Knotenpunkte *A*. Aus der soeben angestellten Überlegung folgt dann,

daß der mit den drei übrigen nicht in derselben Ebene liegende Ringstab *BA* spannungslos sein muß. Derselbe Schluß läßt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des Nabelringes wiederholen. Wenn die gegebene Last überhaupt nicht an einem Punkte des Nabelringes angreift, wie in Abb. 126 angenommen wurde, sind alle Stäbe dieses Ringes spannungslos. Nachdem man dies erkannt hat, gehe man zum Knotenpunkte *A* zurück. An ihm kommen jetzt nur noch zwei Stabspannungen vor, nämlich die Spannung des Sparrenstabes *AC* und die Spannung des Diagonalstabes. Da diese beiden Kräfte in verschiedene Rich-

tungslinien fallen, müssen sie, damit Gleichgewicht bestehen kann, notwendig beide gleich Null sein.

Wiederholt man diese Betrachtung für die übrigen Knotenpunkte des Nabelringes, so findet man, daß alle zum obersten Kuppelgeschoße gehörigen Stäbe an der Aufnahme einer weiter unten angebrachten Belastung unbeteiligt sind. Man kann sich daher dieses Kuppelgeschoß auch ganz entfernt denken und nun den nächst unteren Ring als Nabelring ansehen. Für ihn würden sich genau die gleichen Schlüsse wiederholen lassen, wenn nicht der Angriffspunkt der gegebenen Last zu ihm gehörte. In der Abbildung ist jener Punkt, an dem die Belastung angebracht sein soll, durch einen kleinen schwarzen Kreis hervorgehoben. Zugleich sei noch bemerkt, daß alle spannungslosen Stäbe durch feine Linien, die in Spannung versetzten durch starke Striche gekennzeichnet sind.

Immerhin lassen sich die früheren Schlüsse wenigstens für alle nicht belasteten Knotenpunkte, also z. B. für den Knotenpunkt *C* wiederholen. Da das obere Kuppelgeschoß nicht mehr in Betracht kommt, greifen an *C* nur noch vier Stabspannungen an, von denen drei in einer Ebene liegen, so daß die vierte gleich Null sein muß. Auch von diesem Ringe sind daher alle Stäbe mit einziger Ausnahme des durch einen starken Strich angegebenen ohne Spannung. Für diesen läßt sich nämlich derselbe Schluß nicht wiederholen, da zwar die übrigen Stäbe an dem belasteten Knotenpunkte ebenfalls in einer Ebene liegen, dafür aber die gegebene Last noch hinzukommt, von der vorausgesetzt wird, daß sie nicht ebenfalls in dieselbe Ebene fällt.

Kehren wir nun wieder zum Knotenpunkte *C* zurück, so greifen daran jetzt nur noch zwei Stabspannungen an, die nicht in dieselbe Gerade fallen und die daher beide gleich Null sein müssen. Wiederholt man diese Schlüsse nicht nur für die Knotenpunkte desselben Ringes, sondern auch für die tiefer liegenden, so findet man nach und nach alle spannungslosen Stäbe heraus, wobei nur noch die stark ausgezogenen übrig bleiben.

Nachdem man soweit ist, kann man alle Stabspannungen durch einfache Kräftezerlegungen finden. Man beginnt mit

dem Knotenpunkte, der die gegebene Last aufnimmt und an dem jetzt nur noch drei, nicht in derselben Ebene liegende Stabspannungen vorkommen. Diese erhält man mit Hilfe eines windschiefen Kräfteviereckes nach einer der im ersten Abschnitte dargelegten Methoden. Von da aus kann man dann, wie bei einem einfachen ebenen Fachwerke, der Reihe nach zu den übrigen Knotenpunkten übergehen, an denen immer nur noch entweder drei nicht in derselben Ebene liegende oder auch nur zwei unbekannte Stabspannungen vorkommen. Der einzige Unterschied gegenüber dem ebenen Fachwerke besteht darin, daß der Kräfteplan ein räumlicher ist und daher in zwei Projektionen gezeichnet werden muß. Dies macht zwar mehr Mühe, bereitet aber keinerlei Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art. Die Aufgabe kann daher als gelöst betrachtet werden.

Die Anordnung reziproker Kräftepläne, oder genauer gesagt solcher Kräftepläne, in denen jede Stabspannung nur einmal vorkommt, scheint übrigens im Raume nur in wenigen Fällen möglich zu sein. Diese Frage ist, soviel mir bekannt, bisher noch nicht genauer untersucht worden. Jedenfalls läßt sie sich nicht mit Hilfe des Nullsystems und überhaupt nicht in derselben Weise wie beim ebenen Fachwerke entscheiden. Für die praktische Ausführung des Verfahrens kommt es aber darauf nicht an.

Hat die Kuppel Gegendiagonalen, so ist sie symmetrisch und wenn die Last selbst in der durch den belasteten Knotenpunkt gehenden Symmetrieebene enthalten ist, kann man nur ein symmetrisches Spannungsbild erwarten, während das in Abb. 126 vorkommende sicher unsymmetrisch ist. Symmetrisch wird es erst nach den früher beschriebenen Umrechnungen innerhalb jener Fächer, in denen gedrückte Diagonalen vorkommen.

Um diese nachträglichen Umrechnungen zu vermeiden, kann man auch von vornherein die Wahl der beizubehaltenden Diagonalen so treffen, daß diese alle in Zugspannung versetzt werden. Welche dies sind, läßt sich allerdings von vornherein, d. h. ohne näheres Eingehen auf den Spannungszustand nicht wohl voraussehen. Da solche Betrachtungen schon öfters durch-

geführt wurden, weiß man aber, welche beizubehalten sind. In Abb. 127, die sich im übrigen auf denselben Fall bezieht, wie Abb. 126, ist der Tausch in dieser Weise vollzogen. Auch hier sind die in Spannung versetzten Stäbe durch starke Striche angegeben. Man erzielt bei dieser Auswahl der Diagonalstäbe, auch abgesehen davon, daß die späteren Umrechnungen vermieden werden, auch noch den weiteren Vorteil, daß der Kräfteplan nur auf die eine Trägerhälfte (mit Einschluß der Mitte) ausgedehnt zu werden braucht und sich erheblich einfacher gestaltet.

Anmerkung. Im wesentlichen ist hiermit das Spannungsproblem, soweit es überhaupt in das Gebiet der Mechanik gehört, als gelöst zu betrachten. Es wird aber gut sein, wenn ich noch einige Bemerkungen über die praktische Brauchbarkeit dieser Lehren hinzufüge.

In der Theorie des Fachwerkes — des ebenen, wie des räumlichen — zieht man nur den Widerstand in Rechnung, den die Stäbe einer Annäherung oder Entfernung ihrer Endpunkte entgegenzusetzen vermögen. Infolgedessen ist jede Stabspannung in der Richtungslinie des Stabes anzunehmen. In Wirklichkeit vermögen aber die Stäbe in den Fachwerkkonstruktionen, die an den Knotenpunkten miteinander vernietet sind, auch einen Biegungswiderstand zu leisten. Es ist daher nicht nötig und im allgemeinen auch nicht zu erwarten, daß die Stabspannung genau mit der Mittellinie des Stabes zusammenfällt. Denkt man sich zwei Querschnitte in der Nähe der Endpunkte durch den Stab gelegt, so mögen sich die in jedem dieser Querschnitte übertragenen Spannungen zu einer Resultierenden vereinigen lassen, deren Angriffspunkt einen gewissen Abstand von dem Querschnittsschwerpunkte hat. Verbindet man beide Angriffspunkte durch eine gerade Linie, so gibt diese die „Kraftachse“ des Stabes an. Der Abstand der Kraftachse von der Stabachse mit der Stabspannung multipliziert ist gleich dem Biegemomente, das von dem Stabe in dem zugehörigen Querschnitte aufgenommen wird.

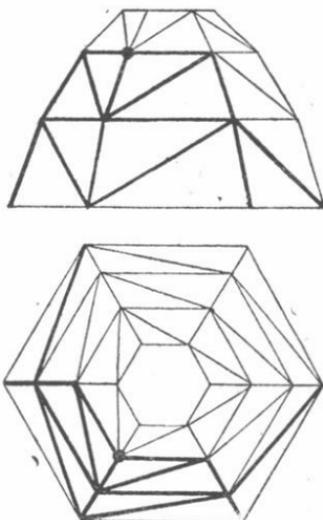


Abb. 127.

Wenn die Stäbe, wie es gewöhnlich der Fall ist, ziemlich lang im Verhältnisse zu ihren Querschnittsabmessungen sind, können sie freilich nur geringe Biegemomente aufnehmen und die Unterschiede zwischen den Richtungen der Kraftachsen und der Stabachsen können, wie es hier immer geschah, vernachlässigt werden. Freilich kommt auch dann die Zusatzspannung, die durch die Biegung hervorgerufen wird, neben der Längsspannung in Frage, wenn es sich um die größte Beanspruchung des Materials handelt. Auf die Berechnung dieser „Sekundärspannungen“, wie man sie zu nennen pflegt, gehe ich indessen hier nicht ein, da diese Betrachtungen besser der Konstruktionslehre vorbehalten bleiben.

Abgesehen davon, daß noch Sekundärspannungen hinzutreten, die eine Erhöhung der Beanspruchung des Materials an gewissen Stellen zur Folge haben, wird aber unter gewöhnlichen Umständen an den Hauptspannungen, d. h. an den Längsspannungen der Stäbe, die ohne Rücksicht auf die Stabbiegungen berechnet sind, nicht viel geändert. In einem Falle, der namentlich bei den Schwedlerschen Kuppeln vorkommt, bringen aber die Richtungsunterschiede zwischen Kraftachsen und Stabachsen auch große Abweichungen in den Längsspannungen der Stäbe hervor. Und zwar fallen die Abweichungen, um die es sich hier handelt, im Gegensatze zu den Sekundärspannungen, zugunsten der Tragfähigkeit der Konstruktion aus. Manche Flechtwerkkonstruktionen verdanken die verhältnismäßig große Steifigkeit, die sie der Erfahrung zufolge gegenüber einer Belastung durch eine Einzellast besitzen, ganz überwiegend den Abweichungen zwischen Kraftachsen und Stabachsen, d. h. dem an sich freilich gar nicht großen Biegungswiderstande ihrer Stäbe.

Der Fall, von dem ich sprach, tritt immer dann ein, wenn die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nahezu in einer Ebene liegen. Lagen sie genau in derselben Ebene, so würden die Stabspannungen, wenn man den Biegungswiderstand außer Ansatz ließe, bei einer Belastung dieses Knotenpunktes unendlich groß. Auch dann, wenn sie nur nahezu in einer Ebene liegen, erhält man sehr große Stabspannungen. Wenn es aber, wie man sieht, in solchen Fällen sehr wesentlich auf die geringen Abweichungen der Stabrichtungen von der im Knotenpunkte an den Flechtwerkmantel gelegten Berührungsebene ankommt, spielen ihnen gegenüber auch die an sich freilich ebenfalls nur geringen Abweichungen zwischen den Richtungen der Kraftachsen und Stabachsen eine wichtige Rolle.

Durch die von einem Knotenpunkte eines Flechtwerkmantels ausgehenden Stäbe wird ein Vielkant bestimmt, dessen körperlicher Winkel durch den Ausschnitt auf einer von dem Knotenpunkte als Mittel-

punkt gezogenen Kugel­fläche gemessen werden kann. Liegen die Stäbe in einer Ebene, so wird der in das Flechtwerkinnere fallende Kugelausschnitt zu einer Halbkugel. Liegen sie nur nahezu in einer Ebene, so unterscheidet sich der Kugelausschnitt nicht viel von einer Halbkugel. Für die Kräftezerlegung an dem Knotenpunkte kommt aber nicht das Vielkant aus den Stabachsen, sondern das aus den Kraftachsen gebildete in Betracht. Der zu diesem Vielkante gehörige Kugelausschnitt kann sich schon erheblich mehr von einer Halbkugel unterscheiden, wenn der andere Kugelausschnitt sich der Halbkugel nähert.

Bei einer flachen Schwedlerschen Kuppel, die über einem Grundrisse von großer Seitenzahl errichtet ist und deren aufeinanderfolgende Sparrenstäbe sich in der Richtung nicht viel voneinander unterscheiden, liegt der besprochene Fall vor. Wenn man hier keine Rücksicht auf die Abweichungen zwischen den Kraftachsen und den Stabachsen nimmt, rechnet man viel zu ungünstig. Schon für eine verhältnismäßig geringe Einzellast an einem Knotenpunkte findet man unter dieser Annahme sehr große Stabspannungen. Es darf als ein Glück bezeichnet werden, daß Schwedler von diesen Folgerungen nichts wußte, da er sonst wahrscheinlich Bedenken getragen hätte, seine Kuppelkonstruktionen auszuführen. Die Erfahrung lehrt aber, daß diese Kuppeln solche Lasten ganz gut aufzunehmen vermögen, die ohne die geringe Biegesteifigkeit der Stäbe und die dadurch bewirkten Abweichungen zwischen Kraftachsen und Stabachsen einen Zusammenbruch herbeiführen müßten.

### § 45. Die Netzwerkkuppel.

Ein sehr lehrreiches Beispiel für die Berechnung der Stabspannungen in räumlichen Fachwerken liefert die Netzwerkkuppel, die sich von der Schwedlerschen Kuppel in der Anordnung nur wenig unterscheidet. Sie geht aus dieser dadurch hervor, daß man jeden Ring gegen den vorhergehenden etwas dreht, so daß jedem Stabe des einen Ringes ein Knotenpunkt des andern gegenübersteht. Hierdurch fällt zugleich der Unterschied zwischen Sparrenstäben und Diagonalen fort; die an ihre Stelle tretenden sollen als „Netzwerkstäbe“ bezeichnet werden.

In Abb. 128 ist ein einzelnes Stockwerk einer Netzwerkkuppel über einem unregelmäßig sechseitigen Grundrisse dargestellt. Es möge zunächst besprochen werden, wie man die Stabspannungen findet, die durch eine an einem Knotenpunkte des oberen Ringes angreifende Last  $P$  hervorgerufen werden.

Man betrachte den Knotenpunkt des oberen Ringes, von dem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. Im Gegensatz zur Schwedlerschen Kuppel liegen von den vier Stäben dieses Knotenpunktes keine drei in einer Ebene; daher kommen auch keine spannungslosen Stäbe vor. Dagegen weiß man, daß die Resultierende der

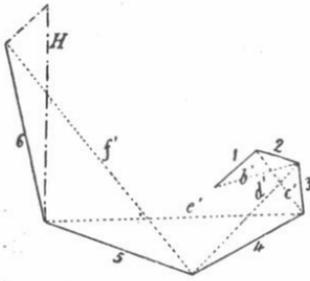
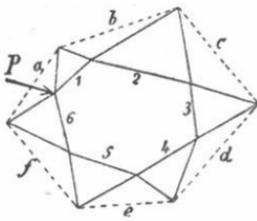
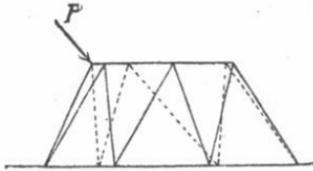


Abb. 128.

Stabspannungen 1 und 2 mit der Resultierenden aus den Spannungen der beiden Netzwerkstäbe im Gleichgewichte stehen und daher in die Schnittlinie der durch beide Stabpaare gelegten Ebenen fallen muß. Diese Schnittlinie geht parallel zur Grundrißseite  $b$ . Wenn aber die Resultierende aus zwei Stabspannungen nicht in dem von den Stäben eingeschlossenen Winkelraume (oder im Scheitelwinkelraume), sondern im Nebenwinkelraume liegt, müssen beide Stabspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Von den beiden Ringstäben 1 und 2 ist also einer gezogen und der andere gedrückt. Derselbe Schluß läßt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen und man erkennt daraus, daß die Ringstäbe abwechselnd gezogen und gedrückt sind.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Vorzeichen der Spannungen der von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe zueinander verhalten. Dies hängt offenbar davon ab, ob der Ring ein Polygon mit gerader oder mit ungerader Seitenzahl bildet. Es ist ein merkwürdiger Umstand, daß sich die Netzwerkuppeln in diesen beiden Fällen ganz verschieden verhalten. Netzwerkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind weit steifer und tragfähiger, als die mit geraden Seitenzahlen.

Bei gerader Seitenzahl, wie in dem Beispiele der Abb. 128, haben die von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe 1 und 6 Spannungen von ungleichem Vorzeichen, wie aus dem vorher besprochenen regelmäßigen Wechsel folgt. Die Resultierende aus beiden Stabspannungen muß daher ebenfalls in den Nebenwinkelraum des von beiden Stäben eingeschlossenen Winkels fallen. Hierbei kann es auch vorkommen, daß die Resultierende zur Grundrißseite  $a$  parallel geht, also mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene liegt. In diesem Falle, der z. B. immer bei regelmäßigen Kuppeln von gerader Seitenzahl eintritt, hat die Last  $P$  unendlich große Stabspannungen zur Folge, d. h. der Ausnahmefall liegt vor. Regelmäßige Netzwerkkuppeln mit gerader Seitenzahl sind also nicht steif und dürfen daher nicht ausgeführt werden. Übrigens wird auch schon dann, wenn die Kuppel nicht regelmäßig ist, die Resultierende aus den beiden Ringspannungen 1 und 6 leicht wenigstens nahezu in derselben Ebene mit den beiden Netzwerkstäben liegen und auch dann treten schon verhältnismäßig sehr große Stabspannungen auf.

Ganz anders ist es bei einer Netzwerkkuppel über einem Grundrisse von ungerader Seitenzahl. Die beiden vom belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe haben bei ihr Spannungen gleichen Vorzeichens und die Resultierende fällt in den von den Stabrichtungen gebildeten Winkelraum. Sie liegt dann weit ab von der durch die Netzwerkstäbe gelegten Ebene und die Stabspannungen fallen klein aus. So sind besonders Netzwerkkuppeln über regelmäßigen Grundrissen von ungerader Seitenzahl durchaus stabil.

Bisher habe ich nur auf die Vorzeichen der in den Ringstäben auftretenden Spannungen geachtet. Man kann aber auch die verhältnismäßigen Größen dieser Spannungen leicht finden. Dazu zeichnet man den Kräfteplan in Abb. 128, indem man zunächst die Stabspannung 1 in beliebiger Größe abträgt. Das kommt darauf hinaus, daß man über den Maßstab des Kräfteplanes keine Angabe macht. Unter dem Vorbehalte, daß der Maßstab nachträglich richtig ermittelt werden muß, kann jede

beliebige Strecke zur Darstellung der Spannung 1 dienen. Auch das Vorzeichen dieser Spannung muß zunächst unentschieden bleiben.

Nachdem 1 aufgetragen ist, erhält man 2 aus dem Kräfte-dreiecke 1, 2,  $b'$ , wo  $b'$  eine Parallele zur Grundrißseite  $b$  bedeutet. Hieran schließt sich das Kräftedreieck 2, 3,  $c'$ , durch das ausgesprochen wird, daß die Resultierende der Ringspannungen 2 und 3 an dem zwischen ihnen liegenden Knotenpunkte parallel zu  $c$  gehen muß. Man fährt in dieser Weise fort, bis man zum letzten Ringstabe 6 gelangt ist. Daß die Stabspannungen abwechselnd Zug und Druck bedeuten, wird durch den Kräfteplan ebenfalls schon mit ausgesprochen, wenn man vorläufig auch noch nicht weiß, welche dieser Stäbe gezogen und welche gedrückt sind.

Jedenfalls haben aber wegen der geraden Seitenzahl des Grundrisses die erste und die letzte Ringspannung 1 und 6 entgegengesetzte Vorzeichen und wenn man beide an dem belasteten Knotenpunkte zu einer Resultierenden  $H$  vereinigen will, muß man die Strecke 1 an den Endpunkt von 6 so antragen, wie es in der Abbildung geschehen ist. Bei ungerader Seitenzahl des Grundrisses hätte die Strecke 1 an den Endpunkt der letzten Ringspannung in entgegengesetzter Richtung angetragen werden müssen, um die Resultierende  $H$  zu erhalten.

Dieser Kunstgriff, den Kräfteplan zunächst einmal im unbestimmt gelassenen Maßstabe aufzutragen, kann auch in andern Fällen, bei denen die übrigen Knotenpunkte bis auf einen unbelastet sind, manchmal mit Vorteil gebraucht werden und zwar nicht nur beim räumlichen, sondern auch schon beim ebenen Fachwerke. Hier erfahren wir dadurch, wie die Resultierende aus den Stabspannungen 1 und 6 am belasteten Knotenpunkte gerichtet ist. Am belasteten Knotenpunkte haben wir es daher nur noch mit vier Kräften zu tun, die sich Gleichgewicht halten und von denen  $P$  vollständig gegeben ist, während man von den drei übrigen die Richtungslinien kennt. Wir brauchen daher nur  $P$  nach den drei Richtungslinien mit Hilfe eines windschiefen Kräfteviereckes zu zerlegen und finden damit die Span-

nungen der beiden Netzwerkstäbe, sowie die absolute Größe und den Pfeil der Resultierenden  $H$ . Damit ist auch der Maßstab des vorher gezeichneten ebenen Kräfteplanes bekannt und man kann daraus alle Ringspannungen entnehmen. Indem man schließlich noch die Resultierenden  $b'$ ,  $c'$  usf. nach den Richtungslinien der zugehörigen Netzwerkstäbe zerlegt, findet man alle Stabspannungen.

Wenn der Grundriß regelmäßig ist, gestaltet sich der Kräfteplan ebenfalls regelmäßig. Der Endpunkt von 6 fällt dann mit dem Anfangspunkte von 1 zusammen, d. h. der Kräfteplan bildet ebenfalls ein geschlossenes, regelmäßiges Sechseck. Daraus folgt auch, daß die Richtungslinie von  $H$  in der Tat parallel zur Grundrißseite  $a$  werden muß.  $H$  liegt daher mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene und die Last  $P$  kann durch diese drei Kräfte nicht im Gleichgewichte gehalten werden. Damit ist die vorher schon aufgestellte Behauptung bewiesen, daß eine regelmäßige Kuppel bei gerader Seitenzahl einen Ausnahmefall bildet.

Bemerkenswert ist übrigens, daß eine solche Kuppel nicht nur unendlich kleine, sondern sogar endliche Bewegungen ausführen kann, ohne daß sich die Stablängen zu ändern brauchten, obschon deren Zahl bei Vermeidung des Ausnahmefalles ausreicht, um die Unverschieblichkeit aufrecht zu halten. Der ganze Stabverband bildet hier einen zwangsläufigen, „übergeschlossenen“ Mechanismus.

Aus Abb. 129, die eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse darstellt, ist dies leicht ersichtlich.

Man betrachte das durch eine Schraffierung hervorgehobene Dreieck mit der Spitze  $A$ . Denkt man sich alle andern Stäbe weggeschnitten, so kann sich das Dreieck um seine Grundlinie drehen und die Spitze bewegt sich dabei auf einem Kreisbogen. Nun nehme man das Dreieck  $B$  und den

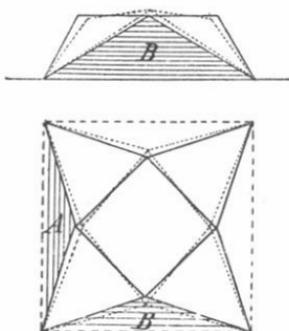


Abb. 129.

Ringstab zwischen  $A$  und  $B$  hinzu. Es ist klar, daß die vorige Bewegung von  $A$  immer noch möglich ist; nur muß sich das Dreieck  $B$  heben, wenn sich  $A$  senkt, damit die Entfernung der Dreiecksspitzen nicht geändert wird. Durch punktierte Linien sind in der Abbildung die neuen Lagen der Stäbe nach einer kleinen Bewegung dieser Art angegeben.

Mit dem Anschließen der übrigen Dreiecke kann man in der gleichen Weise fortfahren. Man behält dabei immer einen zwangläufigen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Dreiecksspitzen abwechselnd heben und senken. Nun fehlt noch der letzte Ringstab, der das letzte Dreieck in der Kuppel mit dem ersten verbindet. Ist der Kuppelgrundriß von ungerader Seitenzahl, so müssen sich die Spitzen von  $A$  und vom letzten Dreiecke in dem zuvor besprochenen Mechanismus gleichzeitig heben oder gleichzeitig senken. Dabei vergrößert oder verkleinert sich ihr Abstand. Sobald man also den letzten Ringstab einfügt, der beide Spitzen in unveränderlichem Abstände hält, wird damit die zuvor noch bestehende Bewegungsfreiheit aufgehoben und man erhält eine steife Kuppelkonstruktion.

Bei gerader Seitenzahl des Grundrisses senkt sich dagegen die letzte Dreiecksspitze, wenn sich die erste hebt und umgekehrt. Dabei kann es vorkommen, daß sich der Abstand beider Spitzen ohnehin nicht ändert, wenn auch der letzte Ringstab gar nicht eingeschaltet ist. Wenn die Kuppel regelmäßig ist, wie in Abb. 129, folgt schon aus Symmetriegründen, daß sich der Abstand beider Spitzen nicht ändern kann. Die Einschaltung des letzten Ringstabes ändert daher überhaupt nichts an der vorher bestehenden Bewegungsmöglichkeit und die Kuppel bleibt ein Mechanismus von endlicher Beweglichkeit. Eine Anordnung wie in Abb. 129 ist daher unbedingt zu vermeiden.

Regelmäßige Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind dagegen vollkommen stabil. Das Verfahren für die Berechnung der Stabspannungen sei an dem Beispiele der Abb. 130, die eine sieben-seitige Kuppel darstellt, erläutert.

Zunächst weiß man, daß die Stäbe des Nabelringes abwechselnd gezogen und gedrückt sind und zwar sind diese Spannungen des regelmäßigen Grundrisses wegen alle von gleicher Größe. Die Resultierende der Stabspannungen  $1^a$  und  $7^a$  an dem belasteten Knotenpunkte  $1^a$  fällt also in die durch diesen Punkt gelegte Symmetrieebene der Kuppel. Die Kräftezerlegung an diesem Punkte kann daher ohne weiteres vorgenommen werden. Abb. 131 (S. 272) zeigt den Kräfteplan in Aufriß und Grundriß. Man beginnt im Aufrisse mit dem Dreiecke aus  $P$ ,

der horizontalen Resultierenden von  $1^a$  und  $7^a$  und einer zu  $8^a$  und  $21^a$ , die sich im Aufrisse decken, parallelen Seite. Das Dreieck ist zugleich als Aufriß eines räumlichen Kräftefünfecks aufzufassen, dessen Grundriß gefunden wird, indem man die aus dem Aufrisse herabgetragene Resultierende von  $1^a$  und  $7^a$  nach den Richtungen dieser beiden Stäbe zerlegt und aus den Endpunkten von  $P$  und  $7^a$  Parallelen zu  $8^a$  und  $21^a$  im Grundrisse zieht. Projiziert man die Ecken, in denen  $1^a$  und  $7^a$  sowie  $8^a$  und  $21^a$  aneinander stoßen, nach oben, so geht auch das Dreieck im Aufrisse in ein Fünfeck über, von dem nur zweimal zwei Seiten in eine Gerade fallen.

Hierauf geht man zum Knotenpunkte  $II^a$  über, indem man im Grundrisse  $2^a$  an  $1^a$  in gleicher Größe anreihet und dann die Parallelen zu  $9^a$  und  $10^a$  zieht. Die gestrichelt gezogene Resultierende aus  $1^a$  und  $2^a$  geht parallel zum Stabe  $2^b$  des unteren Ringes. Auch in den Aufriß kann das Kräfteviereck  $1^a 2^a 9^a 10^a$  sofort übertragen werden und für die Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient dabei die Bemerkung, daß die Eckpunkte, in denen  $9^a$  und  $10^a$  an-

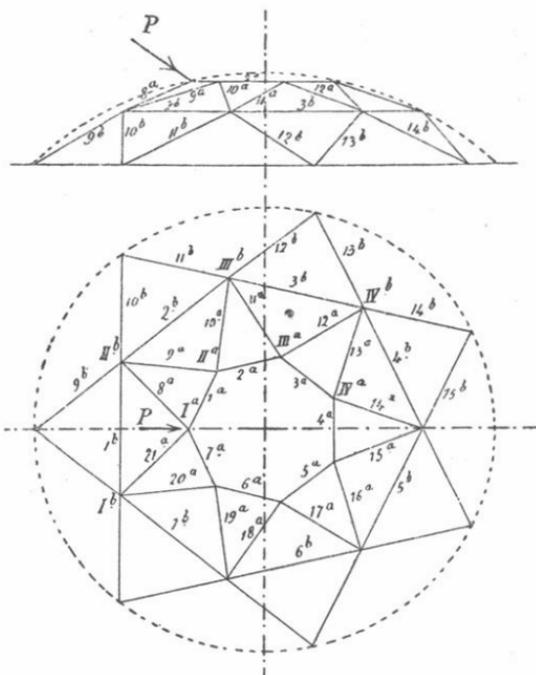


Abb. 130.

einander stoßen, in Aufriß und Grundriß senkrecht übereinander liegen müssen.

Es ist nicht nötig, noch weitere Knotenpunkte des Nabelringes ins Auge zu fassen, da an allen dieselben Stabspannungen wie an  $II^a$  auftreten, nur mit dem Unterschiede, daß vom einen zum andern jedesmal die Vorzeichen der Stabspannungen wechseln.

Wenn wir jetzt zum unteren Stockwerke übergehen, können wir uns das obere Stockwerk ganz beseitigt und die Spannungen der Netzwerkstäbe des oberen Geschosses an dem dazwischen liegenden Ringe als äußere Kräfte angebracht denken. Freilich greifen dann

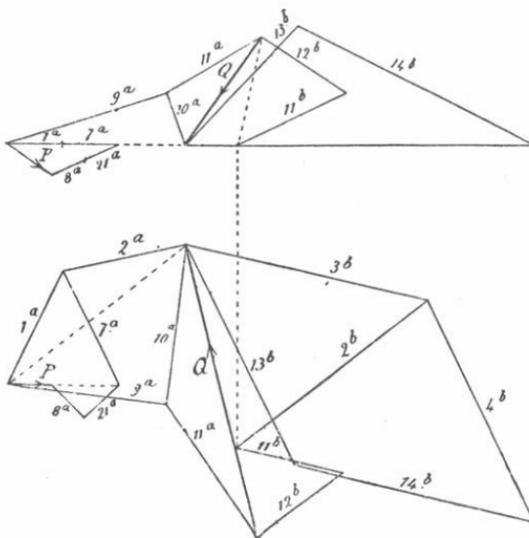


Abb. 131.

an allen Knotenpunkten dieses Ringes fünf Kräfte, nämlich die Resultierende der äußeren Kräfte und vier Stabspannungen an und direkt läßt sich daher die Zerlegung nicht weiter führen. Man kommt aber über diese Schwierigkeit leicht hinweg. — Zunächst stelle man Größe und Richtung der in Abb. 131 mit  $Q$  bezeichneten Resultierenden der äußeren Kräfte am Knotenpunkte  $III^b$

fest, indem man an  $10^a$  die nach Größe und Vorzeichen gleiche Netzwerkspannung  $11^a$  anträgt. Die Richtung von  $Q$  muß übrigens, wie man leicht einsieht, in der durch  $III^b$  gelegten Symmetrieebene der Kuppel enthalten sein und daher mit der Schnittlinie dieser Ebene und der durch die beiden Netzwerkstäbe gelegten Ebene zusammenfallen.

Am Knotenpunkte  $IV^b$  trifft in bezug auf Größe und Richtung der zugehörigen Resultierenden  $Q$  dasselbe zu; nur der Pfeil ist entgegengesetzt und wenn wir zum folgenden Knotenpunkte weiter gehen, kehrt er sich immer wieder um. Nur die Knotenpunkte  $I^b$  und  $II^b$  machen eine Ausnahme. An ihnen stößt jedesmal ein gezogener und ein gedrückter Netzwerkstab zusammen und die Resultierende  $Q'$  an

$\text{II}^b$  aus  $8^a$  und  $9^a$  konnte in dem besonderen Kräfteplane Abb. 132 aus den bekannten Strecken sofort gefunden werden.

Man untersucht nun, welche Spannungen in den Stäben des unteren Stockwerkes durch eine einzige Last  $Q$ , die am Knotenpunkte  $\text{III}^b$  angreift, hervorgerufen werden. Dies geschieht genau so wie vorher die Ermittlung der Stabspannungen im oberen Geschosse unter der Last  $P$ . Die Resultierende aus den Stabspannungen  $11^b$  und  $12^b$  unter der Last  $Q$  fällt in die Richtung der Winkelhalbierenden des von beiden Stäben gebildeten Winkels, die leicht gefunden werden kann. Die Resultierende aus den Ringspannungen  $2^b$  und  $3^b$  ist horizontal und fällt ebenfalls in die Durchmessersebene. Hiernach konnte das Dreieck aus  $Q$ , der horizontalen Richtung und der vorher konstruierten Richtung der Resultierenden von  $11^b$  und  $12^b$  im Aufrisse gezeichnet werden. Im Grundrisse projiziert sich das Dreieck als Gerade. Dann zerlegt man die Resultierenden nach den Richtungen der Stabspannungen  $2^b$ ,  $3^b$  und  $11^b$ ,  $12^b$ , aus denen sie zusammengesetzt waren. Außerdem ist in Abb. 131 noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt  $\text{IV}^b$  angeschlossen. Weiter zu gehen, ist nicht mehr nötig, da man wie im vorigen Falle nun schon alle durch  $Q$  hervorgerufenen Spannungen anzugeben vermag.

Hierauf wiederhole man in Abb. 132 dieselbe Untersuchung für die am Knotenpunkte  $\text{II}^b$  angreifende Belastung  $Q'$ , die als Resultierende der Stabspannungen  $8^a$  und  $9^a$  gefunden war. Auch hier genügt es, die Kräftecke für die Knotenpunkte  $\text{II}^b$  und  $\text{III}^b$  aufzutragen.

Nun bleibt uns nur noch übrig, die Spannungen aus allen Lasten  $Q$  und  $Q'$  zusammenzuzählen. Die Spannung jedes Stabes im unteren Kuppelstockwerke wird als eine Summe von sieben Gliedern gefunden, deren Werte sich aus den gezeichneten Kräfteplänen sämtlich entnehmen lassen. Man betrachte z. B. den Stab  $3^b$ . Die Last  $Q$  am Knotenpunkte  $\text{III}^b$  versetzt ihn, wie aus dem Kräfteplane Abb. 131 hervorgeht, in eine Zugspannung, deren Betrag mit  $s$  bezeichnet sein möge. Am Knotenpunkte  $\text{IV}^b$  greift eine Last  $-Q$  an, deren Pfeil nach oben hin gekehrt ist und die, da sich sonst alles gleich bleibt, die Spannung  $-s$  in Stab  $3^b$  hervorbringt. Am folgenden Knotenpunkte  $\text{V}^b$  geht der Pfeil von  $Q$  wieder nach abwärts und der Ringstab  $4^b$  erfährt daher eine Zugspannung vom Betrage  $s$ . Der Stab  $3^b$ , den wir jetzt ins Auge gefaßt haben, wird daher gedrückt und der vom Knotenpunkte  $\text{V}^b$  herrührende Beitrag zur Spannung in  $3^b$  ist gleich  $-s$ . Dieselben Überlegungen lehren,

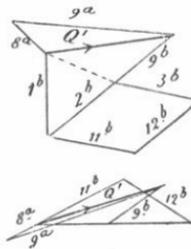


Abb. 132.

daß auch von VI<sup>b</sup> und VII<sup>b</sup> her die Spannungen —  $s$  in 3<sup>b</sup> erzeugt werden.

Die Last  $Q'$  am Knotenpunkte II<sup>b</sup> bringt in 3<sup>b</sup>, wie aus dem dem Kräfteplane folgt, eine Zugspannung hervor. Die entsprechende und symmetrisch zur vorigen liegende Last  $Q'$  am Knotenpunkte I<sup>b</sup> versetzt den Stab 1<sup>b</sup> in Druckspannung, daher 2<sup>b</sup> in Zug- und 3<sup>b</sup> wieder in Druckspannung und zwar vom gleichen Betrage wie vorher die Zugspannung.

Zählen wir alle sieben Posten zusammen, so finden wir die Spannung des Stabes 3<sup>b</sup> gleich  $-3s$ , d. h. der Stab 3<sup>b</sup> wird im ganzen mit einer dreifach so großen Kraft gedrückt, als sie aus Abb. 131 zu entnehmen ist. — Ähnlich läßt sich die Betrachtung auch für alle übrigen Stäbe durchführen. Außerdem kann man auch, nachdem die Spannung eines Stabes auf diese Art ermittelt ist, den Kräfteplan für das untere Kuppelgeschoß unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller darauf von oben her übertragenen Lasten konstruieren. Man umgeht dadurch die Zusammenziehung der sieben Posten, von denen vorher die Rede war, für alle übrigen Stäbe, wofür man freilich die Konstruktion eines neuen Kräfteplanes mit in den Kauf nehmen muß.

#### § 46. Das Tonnenflechtwerkdach.

Abb. 133 zeigt einen Teil eines Tonnenflechtwerkdaches in axonometrischer Zeichnung. Nach vorn hin muß man sich

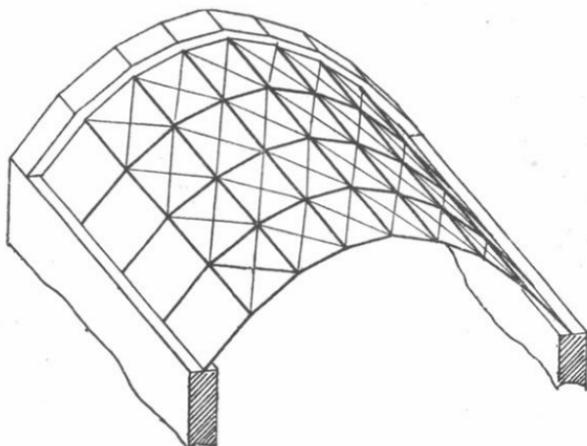


Abb. 133.

den Stabverband in derselben Weise bis zu einer zweiten Stirnmauer hin, an der er ebenso wie an der hinteren aufgelagert wird, fortgesetzt denken.

Die Konstruktion entsteht aus dem geschlossenen Tonnenflechtwerke auf die schon in § 42 näher beschriebene Weise. Die statische Bestimmtheit kann durch nachträgliche Fortlassung der Diagonalstäbe in den beiden untersten Seitenflächen der Tonne und durch längsverschiebliche Auflagerung der Knotenpunkte auf einer der beiden Stirnmauern herbeigeführt werden. Diagonalen, die etwa in den Fächern der unteren Tonnenseiten beibehalten werden, machen den Träger zwar statisch unbestimmt, die Unbestimmtheit erstreckt sich aber dann nur auf die zu diesen unteren Tonnenseiten gehörigen Stäbe, da eine Spannung in einer solchen überzähligen Diagonale, wenn sie als Last an dem statisch bestimmten Träger aufgefaßt wird, nur in diesen Stäben Spannungen hervorrufen kann. Daher ist es für den Gang der Berechnung ziemlich gleichgültig, ob der Träger auf diese Art wirklich statisch bestimmt gemacht wurde, oder ob man die überzähligen Diagonalen auch in den untersten Fächern beibehält.

In der Abbildung sind in allen Fächern Gegendiagonalen angenommen und auch hierdurch wird nach den Ausführungen in § 43 über die Gegendiagonalen nichts wesentliches geändert.

Wenn nur eine der Längsrichtung nach gleichförmige Belastung, also z. B. die Eigenlast des Daches in Frage käme, könnte man etwa das Sparrenpolygon (also den Querschnitt des Daches) nach einem Seilpolygone für die an den Knotenpunkten angreifenden Lasten gestalten. Dann genügten schon die in den Sparrenstäben auftretenden, aus dem Kräfteplane des Seileckes zu entnehmenden Druckspannungen, um an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herzustellen und die in horizontaler Richtung verlaufenden „Pfettenstäbe“ blieben ebenso wie die Diagonalen spannungslos. Wie bei allen Flechtwerken, bei denen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nicht allzuviel von einer durch den Knotenpunkt gelegten Ebene abweichen, werden aber auch hier durch Einzellasten verhältnismäßig große Spannungen hervorgerufen und auf die Berechnung für einen solchen Belastungsfall kommt es daher vor allen Dingen an.

Der Knotenpunkt  $B$ , an dem die Einzellast  $P$  angreifen soll, ist in Abb. 134 in einem rechtwinklig zur Längsrichtung des Daches stehenden Risse besonders herausgezeichnet. Die Strecken  $BA$  und  $BC$  sind die Projektionen der sich an  $B$  beiderseits anschließenden Tonnenseiten. Man zerlege die Last  $P$  mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms in die Komponenten  $P_1$  und  $P_2$ , die in die Ebenen der Tonnenseiten fallen. Beachtet man nun, daß die auf jeder Tonnenseite liegenden Stäbe unter sich ein ebenes Fachwerk, nämlich einen auf den beiden Stirnmauern aufgelagerten ebenen Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen bilden, so kann

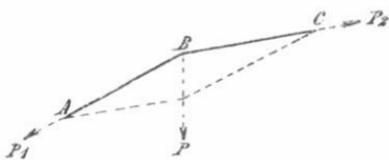


Abb. 134.

man leicht die Stabspannungen berechnen, die in jedem dieser Fachwerkbalken durch die in die zugehörige Ebene fallende Lastkomponente  $P_1$  oder  $P_2$  hervorgerufen werden. Die sich im Punkte  $B$  projizierende Reihe

der Pfettenstäbe bildet eine gemeinsame Gurtung für die beiden sich in ihr aneinander schließenden ebenen Fachwerkbalken. Man muß daher, um die in diesen Pfettenstäben auftretenden Spannungen zu erhalten, die Gurtspannungen in beiden Fachwerkbalken zueinander addieren.

Durch diese Kräftezerlegung läßt sich an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen und da der Träger im wesentlichen statisch bestimmt ist, erhält man hiermit auch das richtige Spannungsbild. Alle andern Stäbe, die nicht zu den beiden an den belasteten Knotenpunkt sich anschließenden Tonnenseiten gehören, bleiben demnach unter dem Einflusse der Einzellast spannungslos.

Bei einer praktischen Ausführung läßt sich nicht vermeiden, daß die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Sparrenstäben nur wenig von gestreckten abweichen. Die beiden Lastkomponenten  $P_1$  und  $P_2$  werden dann, wie man aus Abb. 134 erkennt, verhältnismäßig groß und mit ihnen auch die Stabspannungen, namentlich jene der Pfettenstäbe, wenn überdies die Länge des Daches, die zugleich die Spannweite der einzelnen ebenen Fachwerkbalken darstellt, ziemlich groß ist. Aber auch hier gelten die gegen den Schluß von § 43 gemachten Bemerkungen. Infolge der, wenn auch nur verhältnismäßig geringen, Biegesteifigkeit der Stäbe wird die Tragfähigkeit der Konstruktion viel größer, als es nach dieser Berechnung scheinen könnte. Ich habe mich davon auch direkt durch ausführliche Versuche überzeugt, die ich mit einem, in ziemlich großem Maßstabe ausgeführten Tonnenflechtwerke in meinem Laboratorium vornahm,

worüber in den „Mitteilungen“ des Laboratoriums, Heft 24, 1896 eingehend berichtet ist. Ich erwähne davon hier nur, daß die Einsenkung, die der in der Mitte der Firstpfette gelegene Knotenpunkt unter einer an ihm angebrachten Einzellast erfuhr, nur 17 Prozent von jener betrug, die bei Vernachlässigung der Biegesteifigkeit der Flechtwerkstäbe zu erwarten gewesen wäre. Die Längsspannungen der Stäbe werden sogar in noch höherem Maße vermindert.

Für den Fall einer der Längsrichtung des Daches nach gleichförmigen Lastverteilung, die aber von einem Knotenpunkte desselben Querschnittes zum andern beliebig wechseln kann, lassen sich die Stabspannungen ebenfalls sehr leicht berechnen, ohne daß man nötig hätte, die von den einzelnen Lasten für sich hervorgerufenen Spannungen getrennt zu berechnen und sie dann zu

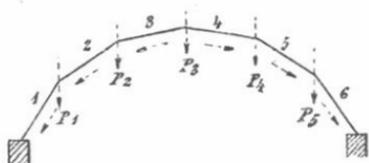


Abb. 135 a.

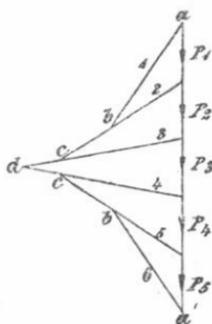


Abb. 135 b.

summieren. In Abb. 135<sup>a</sup> seien die Lasten  $P_1, P_2$  usw. beliebig gegeben. Man entwerfe den Kräfteplan Abb. 135<sup>b</sup>, indem man zuerst  $P_1$  nach 1 und 2 zerlegt, hierauf  $P_2$  nach 2 und 3 usw. Durch die Strecken  $ab, bc, cd$  werden dann jene Lasten angegeben, die man an den ebenen Fachwerkbalken auf den Tonnenseiten 1, 2, 3 anzubringen hat und durch die diese Fachwerkbalken auf Biegung in ihrer Ebene beansprucht werden. Hierbei hat man zuletzt wieder darauf zu achten, daß jede Pfettenreihe (abgesehen von der im Firste) gleichzeitig als Obergurt des einen und als Untergurt des andern Fachwerkbalkens auftritt. Die zugehörigen Zug- und Druckspannungen gleichen sich dann zum großen Teile gegeneinander aus.

In Abb. 136<sup>a</sup> und 136<sup>b</sup> ist dasselbe für den Fall einer Belastung durch Winddruck ausgeführt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Widerlagsmauer nicht hinreichend widerstandsfähig gegen horizontale Kräfte ist, so daß auch in den Auflagerpunkten noch ein

Winddruck  $P_0$  von dem Träger aufzunehmen ist. Natürlich dürfen in diesem Falle die Diagonalen in den Fächern der untersten Tonnenseite nicht fehlen. — Auch hier werden die von den ebenen Fachwerkbalken aufzunehmenden Lasten durch die Strecken  $ab, bc, cd$  des Kräfteplanes angegeben, und die Pfeile, nach denen sie an diesen

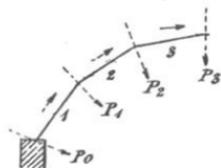


Abb. 136 a.

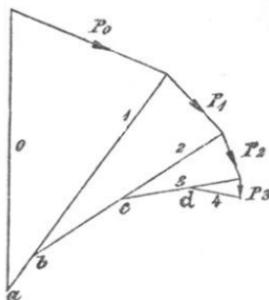


Abb. 136 b.

Balken biegend angreifen, sind in Abb. 136<sup>a</sup> eingetragen. Die weitere Berechnung der Stabspannungen, die zu diesen Lasten gehören, erfolgt wie im vorigen Falle.

Ein von Löhle in Zürich zur Anwendung gebrachtes Flechtwerkdach möge hier auch noch erwähnt werden. Zur Überdachung eines größeren Werkstattraumes verwendet man gewöhnlich der besseren Lichtzuführung wegen ein sogenanntes „Sägedach“ von dem aus Abb. 137 ersichtlichen Umriss.

Nach der älteren Bauart unterstützte man die Dachflächen durch eine Reihe kleiner Binder, die die Spannweiten  $A$  bis  $C$  usf. überdecken und sich bei  $A$  und  $C$  auf Unterzüge stützen, die zwischen den in größeren Abständen stehenden Pfeilern angeordnet sind.

Anstatt dessen führt Löhle auf den Tonnenseiten, die sich in den Strecken  $AB, BC$  usf. projizieren, ebene Fachwerkbalken aus, von denen je zwei aneinander grenzende die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam haben. Hierdurch werden nicht nur die Binder, sondern auch die vorher erwähnten Unterzüge entbehrlich gemacht und für den Fall von großen (zur Zeichenebene senkrecht gemessenen) Pfeilerentfernungen wird eine ziemlich erhebliche Materialersparnis erzielt.

Gegenüber der in Abb. 133 gezeichneten Anordnung besteht ein Unterschied nur in der abweichenden Querschnittslinie der Tonne;

die vorher auseinandergesetzte Berechnung kann daher auf diesen Fall ohne weiteres übertragen werden.

#### § 47. Flechtwerkträger eines Krangerüstes.

In Abb. 24a, S. 52 war ein ebenes Traggerüst für einen Kran dargestellt und im zugehörigen Kräfteplane Abb. 24<sup>b</sup> waren die Stabspannungen ermittelt worden, die darin durch eine am Ausleger angreifende Last  $\mathfrak{A}$  hervorgerufen werden.

Dabei mußte aber vorausgesetzt werden, daß die Richtungslinie der Last  $\mathfrak{A}$  in der Ebene des Binders liege, denn gegen Kräfte, die senkrecht zur Binderebene gerichtet sind, ist ein ebener Stabverband, wenigstens in seiner Eigenschaft als Fachwerk, nicht widerstandsfähig.

Nun ist freilich bei einem Krane der bei jener Gelegenheit vorausgesetzte Belastungsfall der wichtigste. Es kann aber immerhin auch vorkommen, daß die am Ausleger angreifende Kraft entweder selbst eine zur Binderebene senkrechte Komponente hat oder daß daneben andere Lasten (Winddruck u. dgl.) vorkommen, die zu dieser Ebene senkrecht stehen. Man muß daher auch für eine gewisse Steifigkeit der Konstruktion senkrecht zur Binderebene sorgen. Dies kann nun zwar auf verschiedene Art geschehen; am wirksamsten geschieht es aber durch den Übergang vom ebenen zum räumlichen Fachwerke.

Man kann sich hier die Aufgabe stellen, aus der ebenen Binderfigur heraus einen räumlichen, statisch bestimmten Fachwerkträger zu entwickeln, der gegenüber Lasten, die in der Symmetrieebene liegen, im wesentlichen ebenso wirkt, wie vorher der ebene Binder, dabei aber zugleich noch imstande ist, gegenüber Lasten, die senkrecht zu jener Ebene gerichtet sind, als Fachwerkträger, d. h. unter ausschließlicher Beanspruchung der Stäbe auf Zug oder Druck zu widerstehen. Auch diese Aufgabe läßt noch verschiedene Lösungen zu. Die einfachste wird durch Abb. 138 in axonometrischer Zeichnung angegeben. Dabei sei bemerkt, daß auch die gestrichelten Linien Stäbe vorstellen, die nur bei dem betreffenden Belastungsfalle spannungslos sind.

Daß der Träger statisch bestimmt ist, erkennt man am einfachsten daraus, daß sich die zu dem oberen Teile gehörigen Stäbe zu Dreiecken zusammenschließen, die einen inneren Raum vollständig umgrenzen. Der obere Teil bildet daher ein vollständiges Flechtwerk, das durch die sechs unteren Stäbe starr mit der festen Erde verbunden ist. Mit Ausnahme der gestrichelt ausgezogenen Diagonale in dem nach unten gekehrten trapezförmigen Fache des Flechtwerkmantels ist die ganze Anordnung symmetrisch. Man kann aber die Symmetrie auch vollständig machen, indem man in dieses Fach eine zweite Diagonale einschiebt. Wir

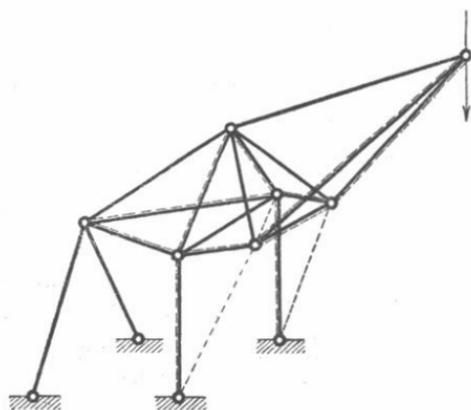


Abb. 138.

wissen schon, daß die statische Unbestimmtheit, die hierdurch eingeführt wird, unerheblich ist, da sie sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe erstreckt und daß auch selbst für diese Stäbe sofort klare Verhältnisse geschaffen werden, sobald man annimmt, daß beide Diagonalen als

Gegendiagonalen ausgebildet, d. h. nur gegen Zug widerstandsfähig konstruiert werden.

Der Aufriß des räumlichen Trägers stimmt genau mit der früheren Binderfigur überein. Daher kann auch die Berechnung der Stabspannungen für solche Lasten, die in der Mittelebene liegen, aus der früher für den Binder durchgeführten Berechnung ohne weiteres abgeleitet werden. Wenn sich nämlich Kräfte an einem Punkte im Raume im Gleichgewichte halten und man projiziert sie alle auf eine Ebene, so ist auch die geometrische Summe ihrer Projektionen gleich Null. Auf die Linien der Binderfigur projizieren sich aber die Stabspannungen des räumlichen Trägers und die im Kräfteplane der Abb. 24<sup>b</sup> erhaltenen

Strecken geben daher ohne weiteres die Summe der Aufrißprojektionen der Spannungen jener Stäbe an, die sich in der Binderfigur, als Aufriß des räumlichen Trägers betrachtet, übereinander decken.

Der symmetrischen Anordnung und Belastung wegen, läßt sich ferner an jedem Knotenpunkte dadurch Gleichgewicht herstellen, daß man die Spannungen der spiegelbildlich zueinander liegenden Stäbe gleich groß und von gleichem Vorzeichen annimmt, die einzelne, unsymmetrisch vorkommende Diagonale dagegen spannungslos läßt. Da der Träger statisch bestimmt und daher nur ein einziges Gleichgewichtssystem von Spannungen möglich ist, muß die genannte Diagonale hiernach auch wirklich spannungslos sein. Die aus dem Kräfteplane der Abb. 24<sup>b</sup> entnommenen Strecken geben sofort die in der Mittelebene liegenden Resultierenden der Stabspannungen an, die sich in den entsprechenden Seiten der Binderfigur übereinander decken. Man braucht daher nur nachträglich noch eine Zerlegung der durch den Kräfteplan gelieferten Resultierenden nach den Richtungen der betreffenden Stäbe vorzunehmen, was etwa im Grundrisse geschehen kann.

Von jenen Stäben, die selbst in der Mittelebene liegen und die sich daher im Aufrisse nicht mit andern überdecken, liefert der ebene Kräfteplan schon unmittelbar die Spannung, ohne daß eine weitere Zerlegung nötig wäre. Für jene Stäbe endlich, die senkrecht zur Mittelebene stehen und sich daher im Aufrisse als Punkte projizieren, findet man die Spannungen nachträglich durch Zeichnen von Kraftecken für einen ihrer Endpunkte im Grundrisse. Da die übrigen Stabspannungen schon sämtlich bekannt sind, können diese Kraftecke ohne weiteres aufgetragen werden.

Da alle diese Zerlegungen sehr einfach sind, habe ich die Beigabe einer besonderen Zeichnung des Kräfteplanes für entbehrlich gehalten. Dagegen sind in Abb. 138 jene Stäbe, die für den Fall einer senkrechten Last am Ausleger gedrückt sind, durch Schattenstriche hervorgehoben und die spannungslosen durch gestrichelte Linien angegeben.

Wenn die Last am Ausleger eine beliebige Richtung im Raume hat, hört die symmetrische Spannungsverteilung auf und das bisher besprochene Verfahren ist daher nicht mehr anwendbar. Man zerlegt die Last in diesem Falle am besten in zwei Komponenten, von denen eine in der Mittelebene liegt und die andere senkrecht zu ihr steht, und berechnet die von jeder dieser Komponenten für sich hervorgerufenen Spannungen, die man dann nachträglich summieren kann. Für den ersten Belastungsfall ist die Lösung schon bekannt; es bleibt also nur noch der zweite zu untersuchen.

In Abb. 139 ist zunächst wieder eine axonometrische Zeichnung

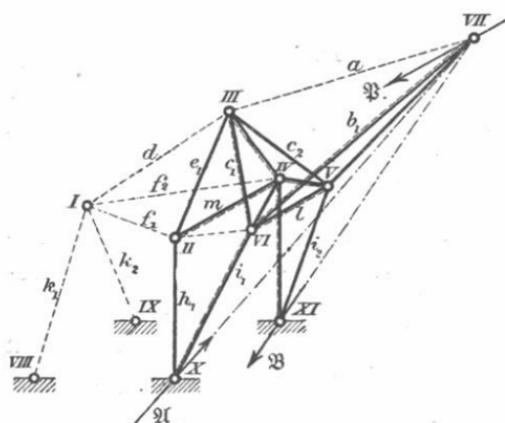


Abb. 139.

des Krangerüstes gegeben, in der genau wie vorher die bei dem jetzt vorliegenden Belastungsfall spannungslos bleibenden Stäbe durch gestrichelte Linien angegeben sind. Wir wollen uns zunächst überzeugen, daß diese in der Tat spannungslos bleiben müssen.

Denkt man sich die sechs Stäbe, die den oberen Flechtwerkkörper mit der festen

Erde verbinden, durchschnitten, so müssen die an den Schnittstellen als äußere Kräfte anzubringenden Stabspannungen mit der Last  $\mathfrak{P}$  am Ausleger ein Gleichgewichtssystem bilden. Für eine Momentenachse, die durch die Auflagerpunkte  $X$  und  $XI$  gelegt ist, verschwinden die Momente von  $\mathfrak{P}$  und von den vier von diesen Punkten ausgehenden Stabspannungen. Die Summe der Momente der beiden am Knotenpunkte  $I$  angreifenden Stabspannungen  $VIII, I$  und  $IX, I$  muß daher ebenfalls gleich Null sein. Nun kann man sich diese beiden Spannungen zu einer am Knotenpunkte  $I$  angreifenden Resultierenden vereinigt denken. Die Resultierende muß in der Ebene  $I, VIII, IX$  enthalten sein, die zur Momentenachse parallel ist, und damit ihr Moment zu Null wird, muß sie selbst zur Momentenachse parallel sein.

Nachdem man dies erkannt hat, wende man den Momentensatz nochmals für eine durch den Knotenpunkt  $VII$  in lotrechter

Richtung gelegte Momentenachse an. Auch für diese Achse verschwinden die Momente von  $\mathfrak{P}$  und von den zu den Auflagerpunkten  $X$  und  $XI$  gehörigen Stabspannungen. Dies erkennt man aus dem in Abb. 140<sup>b</sup> gezeichneten Grundrisse, aus dem hervorgeht, daß sich die Ebenen  $X, II, VI$  und  $XI, IV, V$  in der jetzt als Momentenachse gewählten Geraden schneiden. Demnach muß auch für diese Momentenachse das Moment der am Knotenpunkte  $I$  gebildeten Resultierenden aus den Stabspannungen  $VIII, I$  und  $IX, I$  gleich Null sein. Wir erkannten aber schon vorher, daß diese Resultierende, falls sie überhaupt besteht, nur parallel zur vorigen Momentenachse gehen kann. Wäre sie von Null verschieden, so könnte ihr Moment für die jetzt gewählte Momentenachse nicht verschwinden, da die beiden Linien windschief zueinander liegen. Die Resultierende muß also Null sein und daher müssen auch die Stäbe, aus deren Spannungen die Resultierende gebildet war, beide spannungslos sein.

Die drei übrigen Stäbe, die noch vom Knotenpunkte  $I$  ausgehen, müssen nun auch spannungslos sein, da zwischen drei Kräften, die nicht in derselben Ebene liegen, nur dadurch Gleichgewicht hergestellt werden kann, daß man sie alle drei gleich Null setzt. Wir kommen ferner zum Stabe  $III, VII$ . Daß dieser spannungslos ist, folgt daraus, daß die Kraft  $\mathfrak{P}$  am Knotenpunkte  $VII$  mit den beiden andern von diesem Knotenpunkte ausgehenden Stäben in einer Ebene liegt. Die vierte, mit den drei andern nicht in derselben Ebene liegende Kraft muß daher gleich Null sein. Schließlich bleibt noch der Stab  $II, VI$ . Auch bei ihm folgt der Schluß, daß er spannungslos sein muß, daraus, daß die drei andern vom Knotenpunkte  $II$  ausgehenden Stabspannungen in einer Ebene liegen. Dabei ist zu beachten, daß man vorher schon erkannte, daß Stab  $II, I$  spannungslos ist.

Um ferner die Spannungen der bei dem betrachteten Belastungsfalle in Tätigkeit kommenden Stäbe zu ermitteln, erwäge man vorerst, daß der Träger in den Punkten  $X$  und  $XI$  Auflagerkräfte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  überträgt, die mit der Last  $\mathfrak{P}$  ein Gleichgewichtssystem bilden. Zugleich muß  $\mathfrak{A}$  in der Ebene der beiden sich in  $X$  anschließenden Stäbe enthalten sein, da  $\mathfrak{A}$  auch mit den Spannungen dieser Stäbe im Gleichgewichte sein muß. Entsprechendes gilt für  $\mathfrak{B}$ . Daraus folgt, daß die Richtungslinien von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sich mit  $\mathfrak{P}$  in Knotenpunkte  $VII$  schneiden müssen.

Nach diesen Vorbemerkungen kann man zu der in Abb. 140<sup>c</sup> in Grundriß und Aufriß ausgeführten Kräftezerlegung schreiten. Die Kraft  $\mathfrak{P}$  zerlegt man zuerst im Grundrisse nach den Richtungen von  $b_1$  und  $b_2$  oder auch von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , denn diese Richtungen

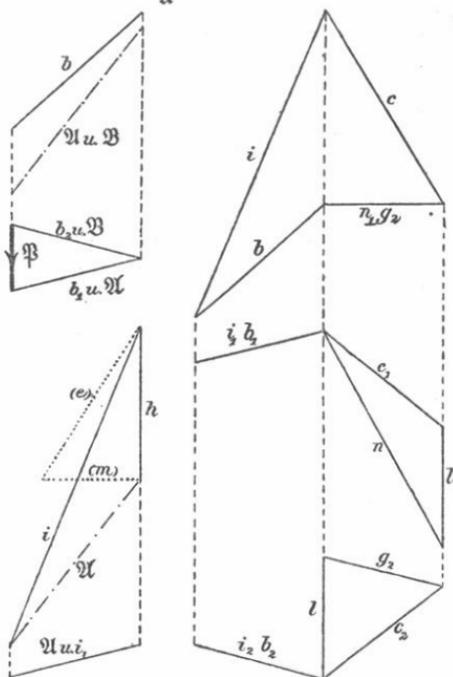
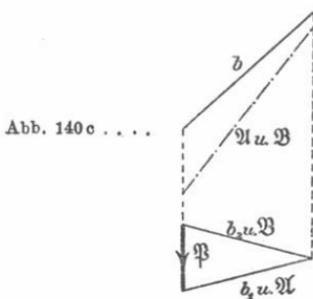
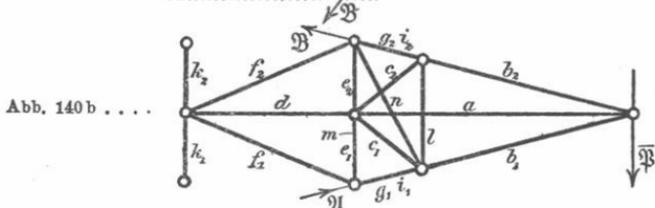
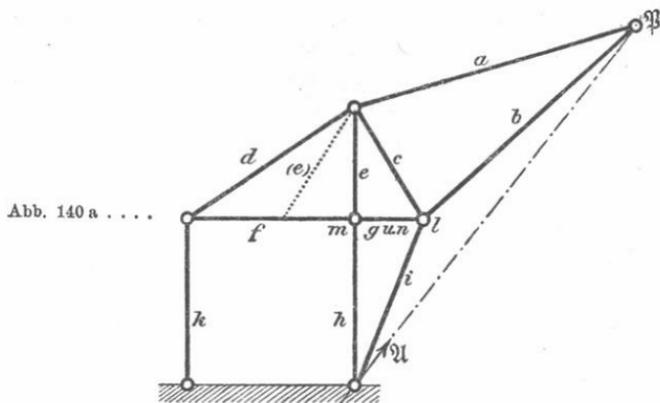


Abb. 140 d.

Abb. 140 e.

decken sich hier. Im Aufrisse decken sich sowohl  $b_1$  und  $b_2$ , wofür kurz  $b$  geschrieben ist, als auch  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ .

Dann folgt Abb. 140<sup>d</sup>. Man zerlegt hier  $\mathfrak{A}$ , das von der vorigen Zeichnung übernommen wird, in die Stabspannungen  $h$  und  $i$ . Der Grundriß des Kräftedreieckes bildet eine Gerade. Auch die von  $\mathfrak{B}$  am andern Auflagerpunkte hervorgerufenen Stabspannungen sind hiermit bekannt; sie sind ebenso groß, als die ihnen auf der Vorderseite entsprechenden, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Dies folgt schon aus der bereits beim vorigen Belastungsfalle angestellten Überlegung über die Stabspannungen in der Binderfigur, die den Aufriß des räumlichen Trägers bildet. Die Projektion von  $\mathfrak{B}$  im Aufrisse ist nämlich im vorliegenden Falle gleich Null; daher sind auch die Stabspannungen im Binder gleich Null, d. h. die sich im Aufrisse auf denselben Linien überdeckenden Projektionen der Stabspannungen des räumlichen Trägers sind von gleicher Größe und entgegengesetztem Vorzeichen. Auch schon auf Grund dieser Überlegung hätte man den Nachweis erbringen können, daß die in der Mittelebene selbst liegenden Stäbe  $a$  und  $d$  spannungslos sein müssen. Im übrigen ist darauf auch bei den weiter folgenden Zerlegungen Rücksicht zu nehmen.

Wir kommen nun zu Abb. 140<sup>e</sup>, die zwei verschiedene Grundrisse und einen zu beiden gehörigen, gemeinsamen Aufriß umfaßt. Der obere Grundriß samt dem Aufrisse bildet das Krafteck für den Knotenpunkt  $VI$  (siehe wegen der Numerierung der Knotenpunkte die zugehörige axonometrische Zeichnung in Abb. 139); der untere Grundriß gehört zu dem hinter  $VI$ , symmetrisch dazu liegenden Knotenpunkte  $V$ . Vom Kraftecke für den Knotenpunkt  $VI$  kennt man bereits die Stabspannungen  $i_1$  und  $b_1$ . Diese sind im Aufrisse im Sinne ihrer Pfeile aneinander gereiht; im Grundrisse überdecken sie sich. Dann zieht man im Aufrisse die Parallelen zu  $c$  und  $n$ . Im Grundrisse tritt dazu noch die Stabspannung  $l$ , die sich im Aufrisse als Punkt projiziert. Damit sind die Projektionen des windschiefen Kräftefünfeckes für den Knotenpunkt  $VI$  bereits gefunden.

Für den Knotenpunkt  $V$  gilt derselbe Aufriß; nur hat jetzt die vorher mit  $n$  bezeichnete horizontale Seite bei ihm die Bedeutung von  $g_2$ . Auch hier ergibt sich die Stabspannung  $l$  von neuem und sie muß natürlich ebenso groß ausfallen als im vorigen Kraftecke.

Nun fehlt nur noch die Spannung der mit  $e$  bezeichneten Stäbe. Sie folgt aus dem Kräftedreiecke für den Knotenpunkt  $II$ . Dieses ist in Abb. 140<sup>d</sup> in umgeklappter Lage, also in wahrer Gestalt, und zwar mit punktierten Linien eingetragen. Dazu wurde

schon im Aufrisse  $e$  in die Mittelebene umgeklappt und zu der hierdurch gefundenen, punktiert ausgezogenen Richtung ( $e$ ) die Parallele ( $e$ ) in Abb. 140<sup>d</sup> gezogen.

Nachträglich hat man noch die wahren Längen der im Aufrisse und Grundrisse gegebenen Stabspannungen zu ermitteln und sie nach dem gewählten Kräftemaßstabe auszumessen. Die dazu nötigen Linien sind in der Zeichnung weggelassen.

#### § 48. Anwendung des Stabvertauschungsverfahrens auf die Berechnung räumlicher Fachwerke.

Wenn andere Mittel zur Berechnung der Stabspannungen in statisch bestimmten räumlichen Fachwerkträgern versagen, kann man stets durch das schon in § 35 für das ebene Fachwerk auseinandergesetzte Hennebergsche Verfahren der Einführung von Ersatzstäben zum Ziele gelangen. Dieses Verfahren ist nämlich für räumliche Fachwerke genau ebenso wie für ebene anwendbar und *Henneberg* hat es auch schon von Anfang an für beide Fälle angegeben, obschon er es zunächst nur für die Berechnung ebener Fachwerke wirklich verwendet hat. Dies ist später von *Müller-Breslau* geschehen.

Schon in einigen andern Fällen, die in diesem Abschnitte behandelt wurden, kann man die Untersuchung auch mit Hilfe des Stabvertauschungsverfahrens durchführen. Man gewinnt aber dadurch nichts. Vielmehr beschränkt man die Anwendung des Verfahrens am besten auf solche Fälle, in denen einfachere Wege nicht mehr zum Ziele führen.

Ein solcher Fall liegt bei einer Kuppel vor, die von *Zimmermann*, dem hervorragenden Techniker im Preußischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten für das Reichstagshaus in Berlin entworfen und ausgeführt wurde. Abb. 141 zeigt den Grundriß der Zimmermannschen Kuppel in etwas verallgemeinerter Darstellung. Auf den Aufriß kommt es vorläufig nicht an, wenn man nur beachtet, daß die Kuppel aus zwei Stockwerken besteht, daß ferner der Fußring und der mittlere Ring achteckig sind, während der Nabelring quadratisch gestaltet ist. Die 12 Knotenpunkte der beiden oberen Ringe werden, wie man durch Abzählen findet, gegen den zur festen Erde

gehörigen Fußring durch 36 Stäbe abgestützt. Das Stabgerüst ist daher statisch bestimmt. Daß kein Ausnahmefall vorliegt, schließt man, wie gewöhnlich, aus der weiterhin folgenden statischen Berechnung.

Der in Abb. 141 mit X bezeichnete Knotenpunkt des Nabelringes möge eine beliebig gegebene Last  $P$  tragen, während alle übrigen Knotenpunkte unbelastet sind. Man soll die zu dieser Belastung gehörigen Stabspannungen berechnen.

Zu diesem Zwecke denke man sich irgend zwei passend ausgewählte Stäbe, die in der Abbildung mit X und Y bezeichnet sind, durchschnitten

und die in ihnen auftretenden, vorläufig unbekanntem Spannungen durch äußere Kräfte, die an den Endknotenpunkten als Lasten anzubringen sind, ersetzt. Dadurch kann an dem Gleichgewichtszustande des ganzen Verbandes nichts geändert werden, falls nur vorausgesetzt wird, daß die Spannungen X und Y passend gewählt wurden.

Um die Ersatzstäbe, die wir an Stelle der Stäbe X und Y einzuführen hätten, um das Fachwerk zu einem einfachen zu machen, brauchen wir uns vorläufig nicht zu kümmern; später wird sich von selbst herausstellen, wie diese Wahl getroffen werden kann.

Nun beginne man mit dem Zeichnen der Kräftepläne für den nach Wegnahme der beiden Stäbe verbliebenen Kuppelrest. Daß man die wahren Größen der Stabspannungen X und Y und der ihnen an dem Kuppelreste entsprechenden Lasten noch nicht kennt, stört dabei nicht viel, indem man sich des schon bei der Berechnung der Netzwerkkuppel in § 43 benutzten Mittels bedienen kann, den Maßstab des Kräfteplanes einstweilen unbestimmt zu lassen, so daß man die erste Kraft, die man beim Zeichnen des Kräfteplanes aufzutragen hat, durch eine beliebig lange Strecke zur Darstellung bringen kann.

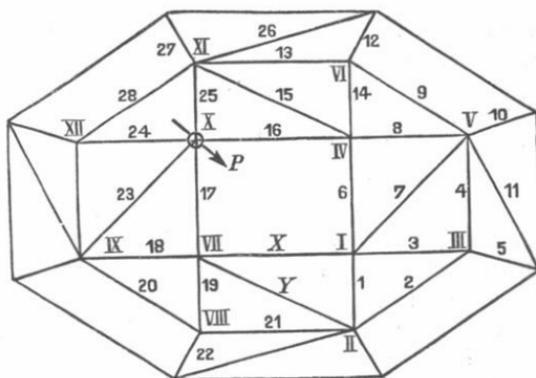


Abb. 141.

Freilich kommen hier zwei Lasten,  $X$  und  $Y$ , vor, die man beide noch nicht kennt und deren Verhältnis ebenfalls unbekannt ist. Man kann daher nicht beide in denselben Kräfteplan eintragen. Dagegen steht nichts im Wege, zuerst nur  $X$  am Kuppelreste anzubringen und hierfür einen Kräfteplan in unbestimmt gelassenem Maßstabe zu zeichnen und hierauf mit  $Y$  ebenso zu verfahren, wobei der dazu gehörige Kräfteplan in irgendeinem andern unbestimmt gelassenen Maßstabe aufzutragen ist. Sei nun etwa  $1 \text{ mm} = m \text{ kg}$  der Maßstab des ersten und  $1 \text{ mm} = n \text{ kg}$  der Maßstab des zweiten Kräfteplanes, so ist die in irgendeinem Stabe  $i$  durch das Zusammenwirken beider Lasten hervorgerufene Stabspannung  $S_i$

$$S_i = mx_i + ny_i,$$

wenn mit  $x_i$  und  $y_i$  die aus beiden Kräfteplänen zu entnehmenden Spannungen bezeichnet werden, die dem Stabe  $i$  entsprechen. Es kommt also dann nur noch darauf an, nachträglich die beiden Unbekannten  $m$  und  $n$  zu ermitteln, um die Aufgabe vollständig zu lösen. Hierbei ist zu beachten, daß  $m$  und  $n$  sowohl positive als negative Größen sein können; denn beim Zeichnen beider Kräftepläne setzt man einstweilen voraus, daß  $X$  und  $Y$  Zugspannungen seien. Ist aber eine von ihnen in Wirklichkeit eine Druckspannung, so sind nachträglich noch alle Vorzeichen in dem betreffenden Kräfteplane umzukehren, was dadurch geschieht, daß man  $m$  oder  $n$  einen negativen Wert beilegt.

Nachdem man beide Kräftepläne vollständig durchgeführt hat, ergeben sich am Schlusse von selbst die Bedingungen, denen die Unbekannten  $m$  und  $n$  genügen müssen und aus denen sie sich berechnen lassen. Ist man nämlich zum belasteten Knotenpunkte gelangt, so findet man, daß dort in jedem der beiden Kräftepläne nur noch zwei Stabspannungen nicht vertreten sind. Man zerlegt daher die Resultierende der übrigen Spannungen nach diesen beiden Richtungslinien und nach der Richtungslinie der gegebenen Last  $P$ . Bezeichnet man die in die Richtung von  $P$  fallenden Kräfte in beiden Kräfteplänen mit  $P_x$  und  $P_y$ , so muß

$$P = mP_x + nP_y$$

sein und hiermit hat man schon eine der beiden Bedingungen zwischen den Unbekannten  $m$  und  $n$ .

Die zweite ergibt sich, nachdem man zum letzten Knotenpunkte (XII in Abb. 141) gelangt ist. Dort sind die Spannungen 24 und 28 in beiden Kräfteplänen schon vertreten. Da aber an diesem Knotenpunkte nur vier Stäbe angreifen, muß die Resultierende aus den Spannungen  $S_{24}$  und  $S_{28}$  in die Schnittlinie der

durch sie und der durch die beiden andern Stäbe gelegten Ebenen fallen. Hiernach kann das Verhältnis beider Stabspannungen durch Zeichnen eines Kräfte dreieckes ermittelt werden. Bezeichnet man dieses Verhältnis mit  $\alpha$ , so lautet die zweite Bedingungsgleichung, der  $m$  und  $n$  genügen müssen,

$$\frac{S_{24}}{S_{28}} = \frac{m x_{24} + n y_{24}}{m x_{28} + n y_{28}} = \alpha.$$

Die Auflösung beider Bedingungsgleichungen liefert  $m$  und  $n$  nach Größe und Vorzeichen.

Die Bezeichnungen in Abb. 141 sind so gewählt, daß die Aufeinanderfolge der Stabnummern zugleich angibt, in welcher Reihenfolge die zugehörigen Stabspannungen in den Kräfteplänen X und Y gefunden werden.

In Abb. 141 war der bequemeren Übersicht wegen vorausgesetzt, daß die Seitenflächen des unteren Kuppelgeschosses ebenfalls in geneigten Ebenen liegen sollten. Dadurch sollte vermieden werden, daß sich im Grundrisse einzelne Stabprojektionen übereinander deckten. Bei der im Reichstagshause ausgeführten Zimmermannschen Kuppel liegen die Seitenflächen des unteren Kuppelgeschosses in lotrechten Ebenen. Dadurch ändert sich aber nichts im Gange der Untersuchung; die Ausführung der Zeichnung wird dadurch nur noch etwas erleichtert.

In den Abb. 142 bis 148 (S. 292) ist die ganze Kräftezerlegung für das wirklich zur Ausführung gebrachte Stabgerüst im Maßstabe durchgeführt. Die Zeichnung wurde zuerst in größerem (etwa doppelt so großem) Maßstabe aufgetragen und dann auf das hier zur Verfügung stehende Format verkleinert.

Abb. 142<sup>a</sup> und 142<sup>b</sup> stellen die Kuppel in Aufriß und Grundriß dar; die Bezeichnungen sind hier etwas anders gewählt, als in Abb. 141. Im Aufrisse sind die nach hinten zu liegenden Stäbe durch stark gestrichelte Linien dargestellt. Als Stab X ist der Diagonalstab 11, als Stab Y der Nabelringstab 3 ausgewählt. Knotenpunkt I trägt eine lotrecht gerichtete Last von 1000 kg.

In die Risse der Kuppel sind auch alle Schnittlinien von Ebenen eingetragen, die man bei den nach dem Culmannschen Verfahren vorgenommenen Kräftezerlegungen nötig hatte. Dagegen sind die Hilfslinien, die zur Ermittlung dieser Ebenenschnittlinien dienten, in der Zeichnung weggelassen worden. Jene Schnittlinien, die man zum Auftragen des Kräfteplanes X braucht, sind als feine Linien durchgezogen, die zum Kräfteplan Y gehörigen sind fein punktiert angegeben; wo zwei davon zusammenfallen, steht eine durchgezogene Linie. Sowohl in der Kuppelfigur

als in den Kräfteplänen sind die Ebenenschnittlinien mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, wobei zur besseren Unterscheidung den zum Kräfteplane  $Y$  gehörigen ein Strich beige setzt wurde.

Zuerst wurde der Kräfteplan  $X$  in Abb. 143 aufgetragen. Er wurde mit der in beliebiger Größe gewählten Strecke  $X$  begonnen. Aus der Betrachtung des Knotenpunktes III erkennt man zunächst, daß Stab 10 in diesem Kräfteplane spannungslos ist, da die drei übrigen Stäbe 2, 8, 9 in einer Ebene liegen. Am Knotenpunkte XI greifen daher, außer  $X$ , das vorläufig als Zugspannung vorausgesetzt wird, nur noch die Stabspannungen 20, 21, 32 und 31 an, von denen aber die drei letztgenannten in einer Ebene liegen. Man ermittelt die Schnittlinie  $b$  dieser Ebene mit der durch  $X$  und 20 gelegten Ebene und zerlegt im Kräfteplane  $X$  nach  $b$  und 20. Damit hat man das erste Kräfdreieck im Kräfteplane  $X$ . Dann geht man zum Knotenpunkte  $X$  über. Hier kann man 20 ohne weiteres nach 9, 19 und 30 zerlegen (die Diagonale 29 geht so wie in Abb. 141 die dort mit 11 bezeichnete Diagonale, greift also hier an Knotenpunkt IX an).

Es wird genügen, wenn ich hier nur die Reihenfolge der Knotenpunkte anführe, an denen sich dann die weiteren Kräftezerlegungen abspielen; es sind dies, mit Einschluß der schon angeführten, die Knotenpunkte III, XI,  $X$ , III, II, IX, VIII, II, I, VII, VI. Wo hier eine Ziffer zweimal vorkommt, ist dies dahin zu deuten, daß man beim erstmaligen Vorkommen noch nicht alle zugehörigen Stabspannungen ermitteln kann, sondern jene, die unter sich in einer Ebene liegen, einstweilen unbestimmt lassen muß. Beim zweimaligen Auftreten des betreffenden Knotenpunktes vermag man dann auch die vorher unbestimmt gelassenen zu ermitteln. So konnte gleich zu Anfang bei Betrachtung des Knotenpunktes III nur geschlossen werden, daß die Spannung 10 gleich Null ist. Nachdem man aber aus Knotenpunkt  $X$  inzwischen die Spannung von 9 gefunden hat, kann man zu III zurückkehren und dort 2 und 8 ermitteln. Geradeso verhält es sich auch mit dem zweimaligen Auftreten von Knotenpunkt II.

Nachdem der Kräfteplan  $X$  in Abb. 143 bis zum Knotenpunkte VI fortgeführt ist, muß man zu dem andern Endknotenpunkte des Stabes  $X$ , nämlich zu IV zurückkehren und von dort aus die Kräftezerlegungen nach der andern Seite hin weiterführen. Diese Fortsetzung ist in einer besonderen Figur, Abb. 144, dargestellt. Man zerlegt erst  $X$  im Knotenpunkte IV nach 4, 13, 12 und geht von da zu den Knotenpunkten XII und V weiter.

Hiermit ist der erste Teil der Aufgabe erledigt. Der zweite Teil besteht in dem Auftragen des Kräfteplanes  $Y$ , wobei man

ganz ähnlich wie vorher verfährt. Der Deutlichkeit wegen ist jedoch dieser Kräfteplan in 3 Teile, Abb. 145, 146 und 147 auseinandergezogen, von denen die beiden ersten Teile zusammen genommen der Abb. 143 des vorigen Kräfteplanes entsprechen, während sich Abb. 147 auf dieselben Knotenpunkte wie vorher Abb. 144 bezieht. Begonnen wurde mit Abb. 145, bei der sich Aufriß und Grundriß der Platzersparnis wegen zum Teil überdecken. Die in beliebiger Größe aufgetragene und zunächst als Zugspannung vorausgesetzte Spannung  $Y$  wird am Knotenpunkte III nach 10 und der Ebenenschnittlinie  $a'$  zerlegt. Dann folgt am Knotenpunkte XI die Zerlegung von 10 nach 20 und der Ebenenschnittlinie  $b'$ . Im ganzen kommen in Abb. 145 die Kraftecke für die Knotenpunkte in der Reihenfolge III, XI, X, III, II, IX vor. Man sieht, daß diese Reihenfolge genau mit der schon beim Kräfteplane X eingehaltenen übereinstimmt.

Am Knotenpunkte IX hat man, wie noch beispielsweise erwähnt werden mag, zuerst die schon vorher ermittelten Spannungen 19, 8, 7, die alle drei Zugspannungen sind, zu einer Resultierenden  $R'_1$  zusammenzufassen, deren Richtungslinie in die Kuppelzeichnung einzutragen, hierauf durch sie und 18 eine Ebene zu legen, deren Schnittlinie mit der durch 19 und 29 gehenden Lotebene mit  $d'$  bezeichnet ist, und nach diesen Vorbereitungen  $R'_1$  nach 18 und  $d'$  im Kräfteplane zu zerlegen. Stab 18 erfährt hiernach eine Druckspannung.

Die Stabspannung 18 wird in Abb. 145 schon durch eine verhältnismäßig große Strecke dargestellt. Wollte man in derselben Weise fortfahren, so würde man, da die folgenden Spannungen noch größer ausfallen, in Abb. 145 bald mit dem Platze nicht mehr ausreichen. Deshalb ist die weitere Fortsetzung des Kräfteplanes in Abb. 146 in  $\frac{1}{4}$  der vorhergehenden Größe gezeichnet. Abb. 146 umfaßt in diesem neuen Maßstabe die Kraftecke für die Knotenpunkte VIII, II, I, VII, VI in der angegebenen Reihenfolge, wobei dem Knotenpunkte VIII das Dreieck aus 18, 6 und der Ebenenschnittlinie  $e'$  entspricht. Der Maßstab für Abb. 146 sei  $1 \text{ mm} = n \text{ kg}$ ; dann ist der Maßstab für Abb. 146

$$1 \text{ mm} = \frac{n}{4} \text{ kg.}$$

Schließlich gibt noch Abb. 147 den Kräfteplan für die nach der andern Seite hin liegenden Knotenpunkte IV, XII und V an. Dieser ist in demselben Maßstabe wie Abb. 145 aufgetragen, also

$$\text{so, daß } 1 \text{ mm} = \frac{n}{4} \text{ kg bedeutet.}$$

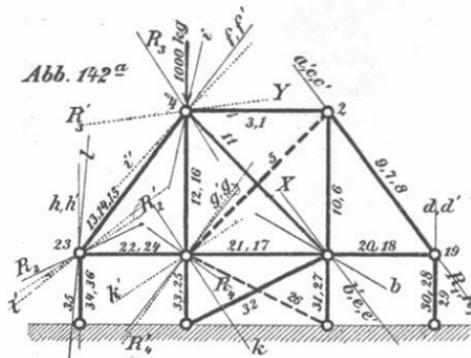


Abb. 142<sup>a</sup>

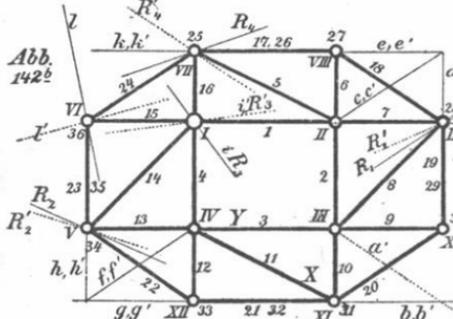


Abb. 142<sup>b</sup>

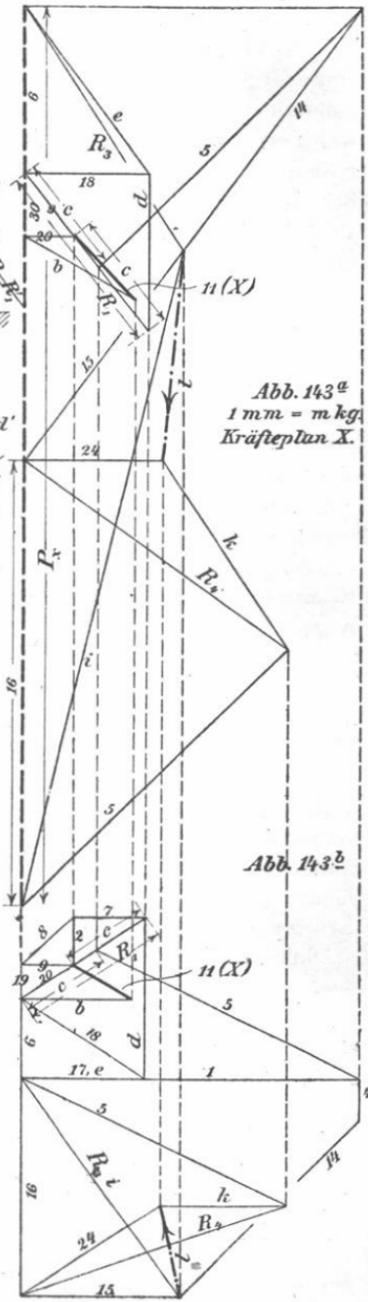


Abb. 143<sup>a</sup>  
1 mm = m kg  
Kräfteplan X.

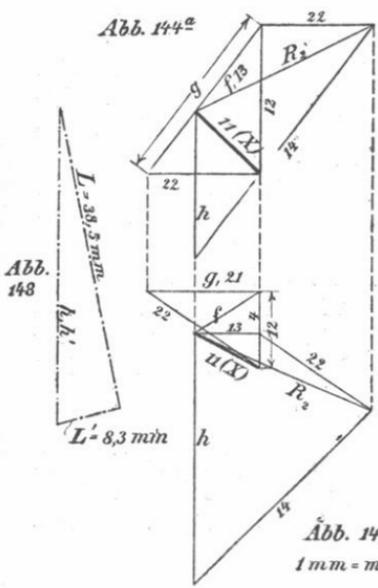


Abb. 144<sup>a</sup>

Abb. 148

Abb. 144<sup>b</sup>  
1 mm = m kg

Abb. 143<sup>b</sup>

Abb. 147<sup>a</sup>,  $1 \text{ mm} = \frac{n}{4} \text{ kg}$

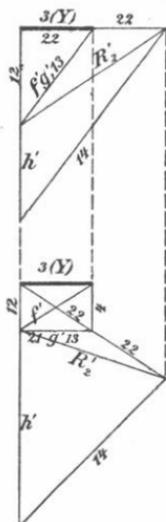


Abb. 147<sup>b</sup>

Kräfteplan Y.

Abb. 145,  $1 \text{ mm} = \frac{n}{4} \text{ kg}$

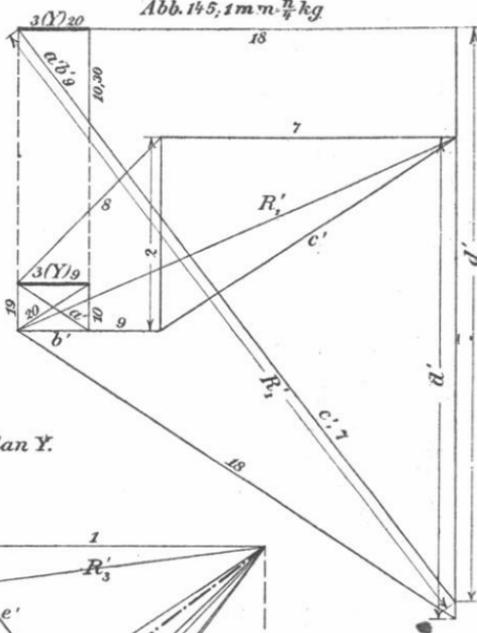
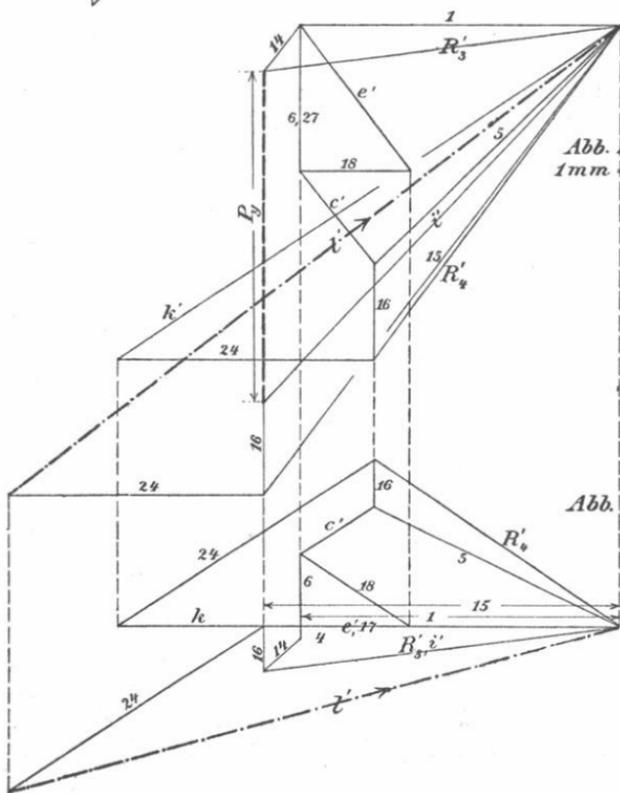


Abb. 146<sup>a</sup>,  $1 \text{ mm} = n \text{ kg}$

Abb. 146<sup>b</sup>



Nun kommt der dritte Teil des Verfahrens. Man entnimmt aus den Kräfteplänen  $X$  und  $Y$  die Resultierenden aus den Stabspannungen 15 und 24 am Knotenpunkte VI. Diese sind in den Abbildungen durch strichpunktierte Linien dargestellt und mit  $l$  und  $l'$  bezeichnet. Auch die Pfeile dieser Resultierenden sind mit einzutragen, so wie sie sich aus den zuvor festgestellten Pfeilen der Stabspannungen ergeben. Andererseits weiß man aber, daß die Resultierende jener Stabspannungen 15 und 24, die in Wirklichkeit zustande kommen, in die mit  $hh'$  bezeichnete Ebenenschnittlinie am Knotenpunkte VI fallen muß. Man kann daher das in Abb. 148 im Grundrisse gezeichnete Kräftedreieck auftragen, von dem eine Seite in die Richtung  $hh'$  fällt, während die beiden andern Seiten parallel zu  $l$  und  $l'$  gezogen sind. Auf die Größe dieses Kräftedreieckes kommt es nicht an, da man mit seiner Hilfe nur das Verhältnis der beiden zuletzt genannten Seiten ermitteln will. Diese Seiten sind in Abb. 148 mit  $L$  und  $L'$  bezeichnet und man mißt aus ihnen die Strecken  $L = 38,5$  und  $L' = 8,3$  ab, wobei es aber nur auf das Verhältnis

$$\frac{L'}{L} = \frac{8,3}{38,5} = 0,2155$$

ankommt. Zugleich erkennt man, daß die Pfeile der durch  $L$  und  $L'$  dargestellten Kräfte, die in dem Kräftedreiecke aufeinanderfolgen müssen, entweder beide mit den in den Kräfteplänen  $X$  und  $Y$  festgestellten Pfeilen von  $l$  und  $l'$  übereinstimmen oder ihnen beide entgegengesetzt sein müssen. Der Anteil  $L$  der Resultierenden aus 15 und 24 muß nun aus dem im Spannungsbilde  $X$  vorkommenden  $l$  und der Anteil  $L'$  aus dem zu  $Y$  gehörigen  $l'$  unter Berücksichtigung der verschiedenen Maßstäbe gebildet werden. Dabei brauchen wir uns nur um die Grundrisse dieser Strecken zu kümmern, da auch schon Abb. 148 einen Grundriß darstellte. Im Grundrisse findet man nun durch Nachmessen in Abb. 143<sup>b</sup>  $l = 11,9$  mm und aus Abb. 146<sup>b</sup>  $l' = 78,6$  mm. Hiernach erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{78,6 \cdot n}{11,9 \cdot m} = \frac{L'}{L} = 0,2155,$$

womit zunächst wenigstens das Verhältnis beider Kräftemaßstäbe bekannt ist.

Die zweite Bedingungsgleichung folgt aus den Kraftecken für den mit der Last von 1000 kg behafteten Knotenpunkt I. Diese Kraftecke setzen sich in den Aufrissen beider Pläne aus den Spannungen der Stäbe 1, 14, 15, 16 und den Strecken  $P_x$  bzw.  $P_y$  zusammen. Die Stabspannung 4 fehlt, da sie senkrecht zur

Aufrißebene steht. Der Pfeil von  $P_x$  ergibt sich senkrecht nach abwärts, der von  $P_y$  dagegen senkrecht nach oben hin. Durch Ausmessen beider Strecken erhält man

$$P_x = + 112,1 \text{ mm} \quad ; \quad P_y = - 41,7 \text{ mm.}$$

Die Bedingungsgleichung lautet

$$P_x \cdot m + P_y \cdot n = 1000 \text{ kg}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$112,1 \cdot m - 41,7 \cdot n = 1000$$

und durch Auflösung dieser Gleichung in Verbindung mit der vorher aufgestellten erhält man für die bis dahin unbekanntenen Kräftemaßstäbe

$$m = 9,01 \text{ kg} \quad ; \quad n = 0,3 \text{ kg.}$$

Beide Zahlen ergeben sich als positiv und dies sagt aus, daß die von vornherein als Zugspannungen angenommenen Spannungen X und Y der Stäbe 3 und 11 auch in Wirklichkeit Zugspannungen sind. Eine Umkehrung der Pfeile in einem oder in beiden Kräfteplänen ist daher im vorliegenden Falle nicht mehr erforderlich. Man findet jetzt die Spannung  $S_i$  irgendeines Stabes  $i$  aus den beiden Spannungsanteilen  $x_i$  und  $y_i$ , die in den Kräfteplänen X und Y vorkommen, nach der schon zuvor aufgestellten Formel

$$S_i = m x_i + n y_i.$$

Die Aufgabe ist also hiermit vollständig gelöst.

Um ein Urteil über die Genauigkeit des graphischen Verfahrens im vorliegenden Falle zu erlangen, ließ ich, nachdem alle Stabspannungen auf Grund der im größeren Maßstabe ausgeführten Zeichnung ermittelt waren, dieselben Spannungen außerdem auch noch nach den Zimmermannschen Formeln berechnen. Dabei ergab sich in Kilogramm für die

Spannung des Stabes	1	2	3	4
durch Rechnung . .	- 368,5	+ 53,8	+ 0,6	- 48,0
graphisch . . . . .	- 367,9	- 52,2	+ 0,7	- 48,1
Spannung des Stabes	5	6	7	8
durch Rechnung . .	+ 427,0	- 200,0	- 135,2	- 103,4
graphisch . . . . .	+ 426,1	- 198,5	- 132,5	- 101,2
Spannung des Stabes	9	10	11	12
durch Rechnung . .	+ 88,4	- 1,7	+ 108,0	- 188,0
graphisch . . . . .	+ 89,0	- 1,0	+ 107,2	- 189,0

Spannung des Stabes	13	14	15	16
durch Rechnung . .	+ 124,8	- 392,0	- 277,0	- 568,0
graphisch . . . . .	+ 121,5	- 393,5	- 276,7	- 568,0
Spannung des Stabes	17	18	19	20
durch Rechnung . .	+ 134,4	+ 161,2	- 35,5	- 63,9
graphisch . . . . .	+ 134,4	+ 158,0	- 36,0	- 64,8
Spannung des Stabes	21	22	23	24
durch Rechnung . .	+ 126,3	+ 151,8	+ 111,0	+ 200,0
graphisch . . . . .	+ 126,6	+ 151,6	+ 114,5	+ 201,5.

Man erkennt aus dem Vergleiche, daß die auf dem angegebenen Wege durch einen geübten Zeichner gefundenen Werte eine für praktische Zwecke mehr als ausreichende Genauigkeit gewähren.

Mit den fertig ausgerechnet vorliegenden Zimmermannschen Formeln kommt man freilich für jene Anordnung, auf die sich diese beziehen, schneller zum Ziele, als mit der Zeichnung. Die Zeichnung liefert aber die Lösung ebenso schnell auch für andere Fälle, die durch die Zimmermannschen Formeln nicht mehr umfaßt werden.

Das hier eingeschlagene Verfahren weicht zwar von dem Stabvertauschungsverfahren etwas ab; aber der Unterschied ist doch nur unerheblich. Auch nach dem Stabvertauschungsverfahren nimmt man zuerst zwei Stäbe  $X$  und  $Y$  heraus, genau so wie es hier geschehen war. Als Ersatzstäbe wähle man hierauf einen von der festen Erde nach dem belasteten Knotenpunkte ( $X$  in Abb. 141) in der Richtung der Last  $P$  geführten Stab und einen Stab, der auch von der festen Erde nach dem Knotenpunkte XII in Abb. 141, etwa in der Ebene der Stäbe 24 und 28 geführt ist. In dem so erhaltenen einfachen Fachwerke nimmt nur der erste Ersatzstab die Last  $P$  auf, alle übrigen Stäbe sind spannungslos. Nun bringt man die Spannungen  $X$  und  $Y$  als äußere Lasten an dem einfachen Fachwerke an und zeichnet die zugehörigen Kräftepläne  $X$  und  $Y$ , die genau mit den vorher konstruierten übereinstimmen. Zuletzt sind  $X$  und  $Y$  so zu wählen, daß die Spannungen in den Ersatzstäben verschwinden. Aber auch diese beiden Bedingungen stimmen genau mit jenen überein, die vorher zur Ermittlung der unbekanntenen Maßstäbe  $m$  und  $n$  benutzt wurden.

Man sieht daher, daß das hier angewendete Verfahren und das Stabvertauschungsverfahren im Grunde genommen auf dasselbe hinauskommen. Nur die Überlegung, die zur Lösung führt, stellt sich ein klein wenig anders dar, während sich an den Kräfteplänen nichts ändert. Der Unterschied besteht darin, daß man sich nicht vorher zu überlegen braucht, wie die Stabvertauschung vorzunehmen ist, um auf ein Fachwerk zu kommen, für das sich ohne weiteres

ein Kräfteplan zeichnen läßt. Man kann vielmehr irgend zwei passend gewählte, benachbarte Stäbe herausnehmen und findet während des Zeichnens der Kräftepläne von selbst, wie die Ersatzstäbe zu wählen sind oder anstatt dessen, welche Bedingungen von den Stabspannungen  $X$  und  $Y$  erfüllt werden müssen.

## Aufgaben.

38. Aufgabe. Der in Abb. 149 dargestellte, (nach einer Ausführung in der Markthalle zu Leipzig als „Leipziger Kuppel“ bezeichnete) räumliche Fachwerkträger wird an dem durch einen kleinen schwarzen Kreis im Grundrisse hervorgehobenen Knotenpunkte durch die beliebig gerichtete Last  $P$  belastet; man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß diese Kuppel aus der Schwedlerschen dadurch hervorgeht, daß die Stäbe des zweiten Ringes durch einen in ihrer Mitte liegenden Knotenpunkt unterbrochen sind, nach dem die Diagonalen hingeführt werden. Man gewinnt durch diese Zwischenschaltung noch einen weiteren Punkt auf jeder Kuppelseite, der unverschieblich fest gehalten ist und der als Stützpunkt für die Auflagerung der Dachhaut verwendet werden kann. Eine solche Einschaltung neuer Knotenpunkte ist für den Konstrukteur oft sehr wertvoll.

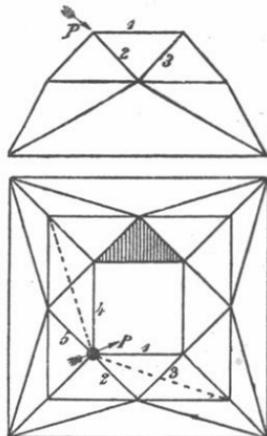


Abb. 149.

Ferner überzeugen wir uns durch Abzählen der Knotenpunkte und Stäbe, daß der Träger statisch bestimmt ist. Auf jedem Sparrenzuge kommen 2 freie Knotenpunkte vor und mit den im zweiten Ringe eingeschalteten haben wir daher im ganzen 12 Knotenpunkte, zu deren Verbindung mit der festen Erde 36 Stäbe erforderlich sind. So viele sind aber auch vorhanden, nämlich 4 im inneren Ringe, 8 im zweiten Ringe, 8 Sparrenstäbe und 16 Diagonalstäbe, im ganzen 36.

Hierauf suchen wir die bei dem gegebenen Belastungsfall spannungslos bleibenden Stäbe auf. Man betrachte das im Grundrisse der Abb. 149 durch eine Schraffierung hervorgehobene Stabdreieck. Wir wollen uns dieses Dreieck aus dem ganzen Verbands losgelöst denken, indem wir alle nicht dazu gehörigen, von den drei Ecken ausgehenden Stäbe wegschneiden und dafür deren Stabspannungen als äußere Kräfte an diesen Ecken anbringen. Diese äußeren Kräfte

müssen dann ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden. Nun liegen aber an jeder Ecke die dort weggeschnittenen Stäbe unter sich in einer Ebene. Denken wir uns also deren Spannungen zu einer Resultierenden vereinigt, so muß diese auch in derselben Ebene enthalten sein. Andererseits muß aber die Resultierende in der Dreiecksebene liegen, da sie an dem betreffenden Knotenpunkte mit den Spannungen der beiden Dreiecksstäbe im Gleichgewichte steht. Die Resultierende kann also nur in die Schnittlinie der beiden Ebenen fallen und damit kennen wir sofort die Richtungslinien der äußeren Kräfte, die an den drei Ecken des Dreieckes anzubringen sind. Bei den zum inneren Ringe gehörigen beiden Knotenpunkten fallen diese Richtungslinien mit den Sparrenstäben zusammen und an dem zum zweiten Ringe gehörigen Knotenpunkte fällt die Richtungslinie der Resultierenden auf die Ringstäbe.

Diese drei Richtungslinien liegen in einer Ebene; sie schneiden sich aber nicht in einem Punkte. Damit Gleichgewicht zwischen den drei Resultierenden möglich sei, müssen sie daher alle drei gleich Null sein. Demnach sind auch die zu dem Dreiecke selbst gehörigen Stäbe spannungslos.

Dieselbe Betrachtung kann auch noch für das sonst ebenso liegende Dreieck auf der nach rechts hin anstoßenden Kuppelseite durchgeführt werden und auch für die zwischen beiden Kuppelseiten liegenden Stäbe findet man hierauf leicht, daß sie spannungslos sind. Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist in Abb. 150 zusammengestellt, in der die spannungslosen Stäbe durch feine, die in Spannung versetzten durch starke Striche kenntlich gemacht sind.

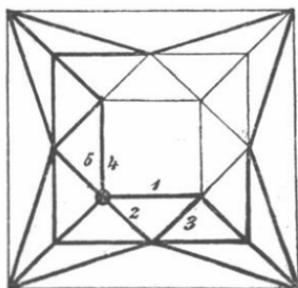


Abb. 150.

Wir betrachten ferner das an den belasteten Knotenpunkt anstoßende und dem schraffierten gegenüberliegende Dreieck 1, 2, 3 in Abb. 149 und stellen dafür die gleiche Betrachtung an. Diese führt nur an dem belasteten Knotenpunkte zu einem andern Ergebnisse. Denn da hier zu den Spannungen der weggeschnittenen Stäbe noch die Last  $P$  als äußere Kraft hinzutritt, kann die Resultierende aus den äußeren Kräften vorerst jede beliebige Richtung haben. Dagegen muß die Resultierende der Spannungen der weggeschnittenen Stäbe an dem Knotenpunkte, in dem 1 und 3 aneinander stoßen, immer noch in die Richtung des Sparrenstabes und die Resultierende an dem Knotenpunkte, in dem 2 und 3 zusammenstoßen, in die Richtung

des Ringes fallen. Suchen wir den Schnittpunkt dieser beiden Richtungslinien auf und verbinden ihn mit dem belasteten Knotenpunkte durch die punktiert angegebene Linie, so finden wir damit auch die vorher unbestimmt gelassene Richtungslinie der Resultierenden der äußeren Kräfte an der dritten Ecke des Dreieckes. Mit dieser Richtungslinie muß auch die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 an dem belasteten Knotenpunkte zusammenfallen.

Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für die andere, an den belasteten Knotenpunkt anstoßende Kuppelseite durchführen und man findet so, daß die Resultierende der Stabspannungen 4 und 5 am belasteten Knotenpunkte in die auf dieser Seite angegebene punktierte Linie fallen muß.

Hiermit sind wir aber in den Stand gesetzt, ohne weiteres die Kräftezerlegungen vornehmen zu können, die zu den Stabspannungen führen. Denn von den fünf Stabspannungen am belasteten Knotenpunkte haben wir 1 mit 2 und ebenso 4 mit 5 in zwei Resultierende von bekannten Richtungslinien zusammengefaßt, so daß wir nur noch nötig haben,  $P$  nach diesen beiden Richtungslinien und nach der damit nicht in derselben Ebene liegenden Richtung des Sparrenstabes zu zerlegen. Die Zerlegung wird noch durch die Bemerkung vereinfacht, daß sich das windschiefe Kräfteviereck im Aufrisse als Dreieck projiziert, da sich zwei der Richtungslinien im Aufrisse überdecken. Nachdem die Projektionen des Viereckes gezeichnet sind, findet man auch die Stabspannungen 1 und 2, sowie 4 und 5, indem man ihre Resultierenden nach den Stabrichtungen zerlegt.

Vom belasteten Knotenpunkte kann man dann zu den übrigen fortschreiten und findet auch bei diesen die Stabspannungen durch einfache Zerlegungen nach drei Richtungen im Raume oder nach zwei Richtungen in der Ebene. Da alle diese Zerlegungen keinerlei Schwierigkeiten machen, sehe ich davon ab, die Kräftepläne hier mit aufzunehmen.

*39. Aufgabe.* In den Abbildungen 151<sup>a</sup> bis <sup>c</sup> ist in drei Rissen eine Kuppel über einem unregelmäßigen Fünfecke mit offenem Nabelring gezeichnet. Die eine Seitenwand der Kuppel steht lotrecht. An dem mit I bezeichneten Knotenpunkte greift eine lotrecht nach abwärts gehende Kraft  $P$  von 1000 kg an. Man soll zunächst die spannungslosen Stäbe ermitteln und hierauf den Kräfteplan zeichnen.

*Lösung.* Der Stabverband ist als eine Schwedlersche Kuppel zu betrachten, da es für die Berechnung der durch eine Einzellast hervorgebrachten Stabspannungen nichts ausmacht, ob die Grundrißgestalt regelmäßig ist oder nicht. Die Stäbe des Nabelringes sind aus den in § 43 besprochenen Gründen alle spannungslos bis auf den zwischen den Knotenpunkten I und II verlaufenden Stab 1. Die von

den übrigen Knotenpunkten des Nabelringes ausgehenden Sparren und Diagonalstäbe müssen alsdann ebenfalls spannungslos sein. Alle spannungslos bleibenden Stäbe sind in den Abbildungen 151 mit dünneren Linien, die in Spannung geratenden mit dickeren ausgezogen, wobei die später als gedrückt erkannten überdies noch durch beigesezte Schattenstriche hervorgehoben wurden.

Am Knotenpunkt *I* muß auch noch der zum Knotenpunkt *IV* gehende Sparrenstab spannungslos sein, weil *P* mit den beiden Stäben 1 und 2 in einer Ebene enthalten ist, während jener Stab

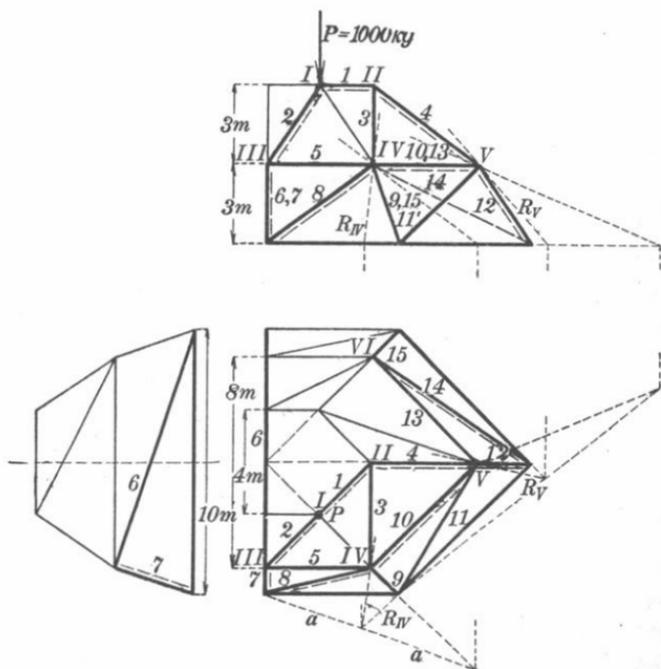


Abb. 151a bis 151c.

nicht in dieser Ebene liegt. Den in Abb. 152<sup>a</sup> im Aufrisse und in Abb. 152<sup>b</sup> im Grundrisse gezeichneten Kräfteplan kann man nun mit dem durch starke Striche hervorgehobenen Kräftedreiecke für Knotenpunkt *I* beginnen. Im Grundrisse projiziert sich das Dreieck als eine Gerade.

Hieran schließt sich ein zweites Dreieck für den Knotenpunkt *II* mit den Seiten 1, 3, 4. Ferner läßt sich am Knotenpunkt *III* die bereits bekannte Stabspannung 2 nach den Richtungen der Stäbe 5, 6, 7 zerlegen. Da die Seiten 6, 7 in einer zum Aufrisse und Grund-

risse lotrecht stehenden Ebene enthalten sind, klappt man das Dreieck, das von diesen Seiten und der zugehörigen Vierecksdiagonale gebildet wird, in den Grundriß um, womit man die wahren Längen von 6 und 7 erhält und außerdem den zwischen 6 und 7 liegenden Viereckspunkt in Grundriß und Aufriß eintragen kann. Anstatt dieses Umklappens hätte man übrigens den Kräfteplan von vornherein noch in einem dritten Risse zeichnen können.

Nun kann man zum Knotenpunkt *IV* übergehen. Einer von den daran angreifenden sechs Stäben ist als spannungslos erkannt und von den Stäben 3 und 5 sind die Spannungen bereits ermittelt. Beide Stäbe sind gezogen und die Seiten 3 und 5 findet man im Kräfteplane bereits in solcher Lage vor, daß die Pfeile richtig aufeinanderfolgen. Die Verbindungslinie der Endpunkte liefert Größe und Richtung der Resultierenden, die man in der Zeichnung des Stabverbandes am Knotenpunkt *IV* einträgt. Dann ist durch diese Resultierende und Stab 8 eine Ebene gelegt, deren Grundrißspur aufgesucht und mit *aa* bezeichnet wurde. Die Grundrißspur der durch die Stäbe 9 und 10 gelegten Ebene fällt mit der zu 10 parallelen Seite des untersten Ringes zusammen. Der Schnittpunkt mit *aa* liefert einen Punkt der Schnittlinie beider Ebenen, die mit  $R_{IV}$  bezeichnet wurde. Hierauf kann im Kräfteplane zuerst die Resultierende aus 3 und 5 nach  $R_{IV}$  und 8 zerlegt und daran ein zweites Dreieck aus  $R_{IV}$ , 9 und 10 angereiht werden.

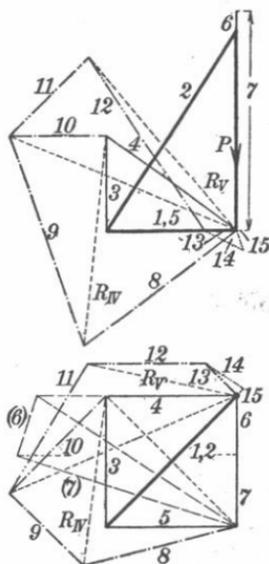


Abb. 152a und 152b.

Dann geht man zum Knotenpunkt *V* über, an dem die Resultierende aus 4 und 10 nach den Stäben 11, 12, 13 zu zerlegen ist, was wiederum nach dem Culmannschen Verfahren ausgeführt wurde und endlich folgt noch ein Dreieck für Knotenpunkt *VI*. Aus dem Kräfteplane findet man für die mit 1 bis 15 bezeichneten Stäbe der Reihe nach die folgenden Spannungen:

— 920; — 1350; + 830; — 830; + 660; + 320; — 1160; — 990;  
+ 1200; — 680; + 860; — 1060; + 220; — 250; + 110 kg.