Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Graphische Statik

Föppl, August

1912

Vierter Abschnitt. Das ebene Fachwerk

urn:nbn:at:at-ubi:2-7787

Vierter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

§ 32. Die Zahl der notwendigen Stäbe.

In der Ebene seien n Punkte gegeben, die durch Linien von unveränderlicher Länge zu einer in sich unverschieblichen Figur miteinander verbunden werden sollen. Es fragt sich, wieviel Verbindungslinien hierzu erforderlich sind. Wir denken uns zunächst drei Punkte durch drei Linien zu einem Dreiecke verbunden. Diese drei Punkte können dann ihre Lage gegeneinander nicht mehr ändern, da die Gestalt des Dreieckes durch die Längen der drei Seiten vollständig bestimmt ist. Ein vierter Punkt kann durch zwei weitere Linien, die nach zwei Eckpunkten des Dreieckes geführt sind, an dieses angeschlossen werden.

Auch jeder weitere Punkt kann an die bereits vorhandene Figur durch zwei neue Verbindungslinien, die nach irgend zwei von deren Eckpunkten geführt sind, unverschieblich angeschlossen werden. Man erkennt daraus, daß man im allgemeinen doppelt soviel Verbindungslinien nötig hat, als Punkte angeschlossen werden sollen. Nur im Anfange, bei der Verbindung der drei ersten Punkte zu einem Dreiecke kommt man mit weniger Linien aus: man braucht hier nur drei Verbindungslinien, während das Doppelte der Anzahl der dadurch miteinander verbundenen Punkte sechs beträgt. Man kann also sagen, daß man im Anfange drei Linien spart, im übrigen aber doppelt so viele Linien als Punkte nötig hat. Die Zahl m der zur Herstellung der unveränderlichen Figur mit n Ecken erforderlichen Verbindungslinien beträgt daher, zunächst wenigstens für die hier vorausgesetzte Bildungsweise der Figur

$$m = 2n - 3. \tag{33}$$

Der Zusammenhang dieser rein geometrischen Betrachtung mit der Lehre von den Tragkonstruktionen liegt auf der Hand: auch von einem „Binder" wird in erster Linie verlangt, daß er eine in sich unverschiebliche Figur bilde. An Stelle der Verbindungslinien treten hier die Stäbe und an diese wird zur Aufrechterhaltung des Zusammenhanges nur die Anforderung gestellt, daß sie ebenso wie vorher die Verbindungslinien eine Entfernungsänderung ihrer Endknotenpunkte zu verhüten vermögen, d. h. es genügt, wenn sie nur gegen Zug- oder Druckbeanspruchung hinreichend widerstandsfähig sind. Gleichung (33) gibt daher die Zahl der notwendigen Stäbe in einem „Binder" oder allgemeiner gesagt in einem ebenen Fachwerke an.

Nachträglich kann man auch noch zwischen irgendzwei andern Punkten, zwischen denen vorher keine unmittelbare Verbindung bestand, einen Stab einschalten. Die Figur ist dann, wie man sagt, geometrisch überbestimmt und der für den Zusammenhang entbehrliche Stab wird als ein überzähliger Stab bezeichnet. Übrigens braucht nicht gerade der zuletzt eingefügte als der überzählige Stab betrachtet zu werden; man wird, nachdem er eingesetzt ist, auch diesen oder jenen von den übrigen Stäben fortnehmen können, ohne die Unverschieblichkeit der Figur dadurch aufzuheben. Wenn man von den überzähligen Stäben redet, handelt es sich daher mehr um deren Anzahl, die nach Gleichung (33) leicht festgestellt werden kann, als um eine bestimmte Bezeichnung jener Stäbe, die als überzählige angesehen werden sollen. In dieser Hinsicht dürfen wir vielmehr die Wahl innerhalb gewisser Grenzen nach Willkür treffen.

Wenn aber das Fachwerk auf die vorher beschriebene Weise, ohne nachträgliche Beifügung überzähliger Stäbe aufgebaut wurde, darf jedenfalls keiner von den Stäben mehr entfernt werden, ohne die Unverschieblichkeit aufzuheben. Um dies zu erkennen, denken wir uns ein zweites Fachwerk in derselben Weise hergestellt wie das erste, mit dem einzigen Unterschiede, daß ein beliebig ausgewählter Stab dabei etwas größer oder etwas kleiner ist, während die andern so lang sind wie vorher. Die Figur, die wir jetzt erhalten, ist aus denselben Gründen unverschieblich wie die erste. Jeder anderen Annahme über die Länge des einen Stabes, den wir ausgewählt hatten, entspricht auch eine andere Fachwerkgestalt.

Wir wollen uns die frühere Figur und die nach Änderung der einen Stablänge erhaltene neue Figur aufeinandergelegt denken, so daß zwei einander entsprechende Seiten zusammenfallen. Wir haben dann die ursprüngliche Lage der Knotenpunkte und die neue Lage nach der Gestaltänderung unmittelbar nebeneinander und die Verbindungslinie gibt die Verschiebungsrichtung an, in der sich jeder Knotenpunkt bewegt, wenn der Stab, dessen Länge wir als veränderlich betrachtet haben, herausgenommen ist. Hierbei werden übrigens manche der Knotenpunkte überhaupt nicht von der Gestaltänderung der Figur betroffen werden, sondern während derselben in Ruhe bleiben.

Wir wollen jetzt irgend zwei Knotenpunkte ins Auge fassen, zwischen denen kein Stab besteht und von denen sich mindestens der eine während der nach Fortnahme eines Stabes möglichen Gestaltänderung der Figur bewegt. Die Entfernung dieser beiden Knotenpunkte wird sich während der Gestaltänderung im allgemeinen ebenfalls ändern. Dann genügt es, beide Knotenpunkte durch einen neuen Stab miteinander zu verbinden, um die Unverschieblichkeit der Figur wieder herzustellen. Denn die Art der Bewegung, die vorher noch möglich war und die einem einzigen Freiheitsgrade des ganzen Systems entsprach, hatte die Entfernungsänderung der beiden Knotenpunkte zur notwendigen Folge und sobald diese durch Anbringen des neuen Stabes ausgeschlossen wird, fällt damit auch die Möglichkeit der Bewegung selbst.

Es kann freilich auch vorkommen, daß sich die beiden Punkte, die wir betrachteten, in der ursprünglichen Gestalt der Figur gerade im Maximum oder auch im Minimum des Abstandes befanden, der bei den gegebenen Längen der übrigen Stäbe möglich ist. Dann bringt eine kleine Gestaltänderung des Fachwerks nur eine von der zweiten Ordnung kleine Längenänderung des Abstandes beider Punkte hervor und ein Stab, den wir zwischen ihnen einsetzen, vermag alsdann unendlich kleine Gestaltänderungen nicht zu verhindern. Dieser Ausnahmefall ist daher zu vermeiden.

Wir sind durch diese Betrachtung zu dem Schlusse gelangt, daß ein Stab durch einen passend gewählten andern ersetzt werden kann. Diese Stabvertauschung spielt, wie wir noch sehen werden, in der Theorie des Fachwerkes eine wichtige Rolle. Wir können dadurch von solchen Fachwerken, die nach dem bisher allein angewendeten, einfachsten Verfahren zusammengesetzt wurden, zu andern aufsteigen, die eine davon ganz abweichende Gliederung besitzen. An der Zahl der notwendigen Stäbe wird aber durch die Stabvertauschung jedenfalls nichts geändert. Wir schließen daraus, daß Gleichung (33) auch für die nach anderen Bildungsgesetzen gegliederten Fachwerke gültig bleibt. Hierfür werden wir übrigens alsbald noch einen strengeren Nachweis kennen lernen.

§ 33. Die Stabspannungen.

Nach der geometrischen Untersuchung der Fachwerkfigur, auf die wir uns bisher beschränkten, bleibt noch die statische Aufgabe zu lösen, die in den Stäben des Fachwerkes bei gegebenen Lasten auftretenden Spannungen zu ermitteln. Die Lösung gestaltet sich sehr einfach, wenn das Fachwerk von einem Ausgangsdreiecke aus durch fortgesetzte Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe erzeugt werden kann. In diesem Falle kann man ohne weiteres einen Kräfteplan zeichnen, indem man mit dem zuletzt angeschlossenen Knotenpunkte beginnt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen. Nachdem die Spannungen dieser Stäbe durch Zeichnen eines Kräftedreieckes ermittelt sind, wendet man sich zu dem vorher angeschlossenen Knotenpunkte, dann zu dem diesem vorausgehenden usf., wobei man jedesmal nur zwei Stäbe vorfindet, deren Spannungen noch nicht aus dem bereits gezeichneten Teile des Kräfteplanes bekannt sind. Aus dem Kraftecke für den gerade vorliegenden Knotenpunkt findet man sofort die bis dahin unbekannt gebliebenen beiden Stabspannungen. Dieses Verfahren läßt sich bis zum Ausgangsdreiecke hin fortführen und auch die Stab spannungen des Ausgangsdreieckes erhält man in derselben Weise.

Wegen der einfachen Berechnung sollen die in dieser Weise gegliederten Fachwerke als einfache Fachwerke bezeichnet werden. Zugleich werden sie auch als statisch bestimmte Fachwerke bezeichnet, weil man bei gegebenen Lasten alle Stabspannungen ohne Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie bloß aus den Gleichgewichtsbedingungen der Statik finden kann. Nicht alle statisch bestimmten Fachwerke sind indessen zugleich einfache. Aus den einfachen Fachwerken kann man nämlich durch das zuvor besprochene Mittel der Stabvertauschung andere erhalten, die dann zwar immer noch statisch bestimmt sind, für die man aber einen Kräfteplan auf die bisher besprochene Art nicht mehr zu zeichnen vermag.

Statisch unbestimmt sind dagegen die vorher als „geometrisch überbestimmt“ bezeichneten Fachwerke, in denen überzählige Stäbe vorkommen. Hat man auch nur einen überzähligen Stab, so vermag man sehr viele Wertsysteme für die Stabspannungen anzugeben, die an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellen und die daher vom rein statischen Gesichtspunkte aus alle gleich gut möglich sind. Man kann z. B. annehmen, daß die Spannung des überzähligen Stabes gleich Null sei. Dann ist es ebensogut, als wenn der Stab gar nicht vorhanden wäre, und für den dann übrig bleibenden statisch bestimmten Rest kann man die in ihm vorkommenden Stabspannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen in eindeutiger Weise berechnen. Die Spannung des überzähligen Stabes könnte aber auch etwa gleich 1 t Zug oder 2 t Druck usf. angenommen werden. Zu jeder dieser Annahmen gehört ein anderes System von Spannungen in dem statisch bestimmten Reste. Man kann sich nämlich, um dieses zu finden, den überzähligen Stab wiederum beseitigt denken, falls man nur in den beiden Knotenpunkten, die er verbindet, dafür äußere Kräfte anbringt, die gleich den von ihm auf diese Knotenpunkte übertragenen Spannungen sind.

Man erkennt daraus, daß man allgemein im geometrisch überbestimmten Fachwerke so viele Stabspannungen willkürlich annehmen kann, als überzählige Stäbe vorkommen, worauf die übrigen so ermittelt werden können, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird. Natürlich kann von allen diesen unendlich vielen Wertsystemen der Stabspannungen oder „Spannungsbildern", wie man dafür oft zu sagen pflegt, nur eines wirklich zustande kommen. Die bloßen Gleichgewichtsbedingungen genügen aber nicht, um dieses unter den zunächst als möglich erkannten herauszufinden. Dazu muß man auf die elastischen Formänderungen der Stäbe eingehen, wie später gezeigt werden wird. In diesem Abschnitte soll aber von den statisch unbestimmten Fachwerken nicht weiter die Rede sein.

Ein Verfahren, das auf alle Fälle zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten statisch bestimmten Fachwerken ausreicht, soll hier sofort angegeben werden, wenn es auch wegen der Umständlichkeit der Rechnung praktisch nicht gut verwendbar ist. Dafür hat es aber den Vorzug, eine grundsätzlich sehr einfache und darum auch besonders leicht verständliche Vorschrift anzugeben, nach der es immer möglich sein muß, die Stabspannungen zu finden. Es eignet sich daher besonders zur Anstellung allgemeiner Betrachtungen über das Spannungsproblem und findet seinen Platz am besten am Eingange zu diesen Untersuchungen. Die für die praktische Ausführung bequemeren Methoden folgen erst in den späteren Paragraphen.

Man denke sich alle Stäbe von 1 bis m numeriert. Einer dieser Stäbe mit der Nummer i hat die unbekannte Stabspannung S_i, wobei durch das Vorzeichen zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden sein soll. Nun betrachte man einen der beiden Knotenpunkte, zwischen denen der Stab i verläuft. Die Gleichgewichtsbedingung erfordert, daß die geometrische Summe aus den an ihm angreifenden Stabspannungen und der daran angebrachten Last gleich Null sein muß. Wir können diese Bedingung auch durch das Anschreiben von zwei Komponentengleichungen ersetzen. Es muß also sowohl die Summe der Horizontalkomponenten als die Summe der Vertikalkomponenten aller Kräfte gleich Null sein. Die Horizontalkomponente von S_i finden wir aus S_i durch Multiplikation mit dem Kosinus des Neigungswinkels, den die Stabrichtung mit der Horizontalen bildet. Da die Gestalt des Fachwerkes gegeben ist, kennt man alle diese Richtungswinkel; außerdem kann auch das Vorzeichen der Horizontalkomponente von S_i sofort angegeben werden, indem man den Pfeil von S_i an dem Knotenpunkte so einträgt, wie er einer Zugspannung im Stabe i entspricht. Sollte nachher S_i in Wirklichkeit als Druckspannung gefunden werden, so kehrt sich ohnehin das Vorzeichen des Produktes aus S_i und dem Richtungskosinus um, weil S_i dann durch eine negative Zahl angegeben wird. Das unter der ersten Annahme bestimmte Vorzeichen bleibt daher auf jeden Fall richtig.

In jeder der beiden Komponentengleichungen kommen demnach nur die Spannungen S_i usf. der an dem Knotenpunkte angreifenden Stäbe als Unbekannte vor. Denn auch die äußeren Kräfte oder Lasten, sowie deren Komponenten in horizontaler und vertikaler Richtung müssen als gegeben vorausgesetzt werden, wenn die von ihnen hervorgebrachten Stabspannungen berechnet werden sollen.

Nachdem in derselben Weise für alle Knotenpunkte je zwei Komponentengleichungen angeschrieben sind, hat man im ganzen $2n$ Gleichungen, in denen nur die m Stabspannungen vorkommen und die für diese sämtlich vom ersten Grade sind. Man kann also nun die Stabspannungen durch Auflösen dieser Gleichungen berechnen. Dies führt zwar zu umständlichen Zahlenrechnungen (bei der Ermittelung der Determinanten, durch die die Lösung angegeben wird), kann aber zu keinen Schwierigkeiten anderer Art Veranlassung geben.

Hierbei ist jedoch auf einen Umstand wohl zu achten. Jedenfalls müssen nämlich auch die äußeren Kräfte unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden. Nachdem wir aber die Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knotenpunkte durch Aufstellung der Komponentengleichungen ausgedrückt haben, ist damit die Bedingung für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte schon mit ausgesprochen. Jene $2n$ Komponentengleichungen enthalten daher mehr, als nur die Bedingungen, denen die Stabspannungen genügen müssen. Drei von ihnen — denn so groß ist die Zahl der zwischen Kräften in der Ebene bestehenden Gleichgewichtsbedingungen — dienen vielmehr zum Nachweise für das Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften, und für die Ermittelung der Stabspannungen bleiben nur $2n - 3$ Komponentengleichungen übrig.

Am einfachsten stellt man sich die Sache so vor, daß die Lasten an allen andern Knotenpunkten bis auf zwei ganz willkürlich, ohne Rücksicht auf Gleichgewichtsbedingungen, gewählt wurden. Auch an einem der beiden übrigen Knotenpunkte mag noch die Horizontalkomponente der Last beliebig angenommen werden. Dann müssen aber, damit Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften bestehe, die beiden Komponenten der Last am letzten Knotenpunkte, sowie die Vertikalkomponente am vorhergehenden Knotenpunkte den Gleichgewichtsbedingungen entsprechend gewählt werden. Wenn man darauf achtete, daß die beiden Knotenpunkte nicht auf derselben Vertikalen lagen, können die drei Komponenten auch immer in eindeutiger Weise so berechnet werden, daß das Gleichgewicht gesichert ist. Anstatt eines solchen direkten Verfahrens können wir uns dazu aber auch die drei Komponentengleichungen für die betreffenden Richtungen an den beiden Knotenpunkten benutzt denken. Man schreibe diese unter den $2n$ Komponentengleichungen etwa zuletzt an. Die vorausgehenden $2n - 3$ müssen dann zur Ermittelung der Stabspannungen ausreichen. Nachdem sie nach den Stabspannungen aufgelöst sind, bleiben dann in den drei letzten nur noch die drei Komponenten der äußeren Kräfte als Unbekannte übrig.

Durch diese Anordnung vermag man also aus den $2n$ Gleichungen jene $2n - 3$, die zur Berechnung der Stabspannungen zu verwenden sind und jene 3, die nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften darstellen, sofort auszusondern. Natürlich ist diese Aussonderung, wie man zugleich erkennt, noch auf sehr verschiedene Art möglich. Jedenfalls bleiben aber stets $2n - 3$ Gleichungen zwischen den m unbekannten Stabspannungen zur Verfügung.

Auch hieraus erkennt man — und zwar diesmal ohne jede Voraussetzung über die Gliederung des Fachwerkes —, daß die Zahl der Stäbe

$$m = 2n - 3$$

betragen muß, wenn das Fachwerk statisch bestimmt sein soll. Auch ob etwa ein Ausnahmefall vorliegt, muß sich beim Auflösen der $2n - 3$ Gleichungen herausstellen. Die Gleichungen genügen nämlich nur dann zur Ermittelung der Unbekannten, wenn sie alle unabhängig voneinander sind und sich nicht widersprechen. Sollte eine von ihnen schon eine notwendige Folge der übrigen sein, so müßte sich dies bei Benutzung der Determinanten zur Auflösung darin zeigen, daß die Determinante aus den Koeffizienten der Unbekannten zu Null würde. Außerdem kann diese Determinante, auch ohne daß eine solche Abhängigkeit der Gleichungen voneinander besteht, zu Null werden. Auch dies entspricht einem Ausnahmefalle. Die Stabspannungen werden dann bei beliebig gegebenen Lasten, wie aus der Lösung der Gleichungen folgt, unendlich groß. Ein solches Fachwerk wäre für die Ausführung unbrauchbar.

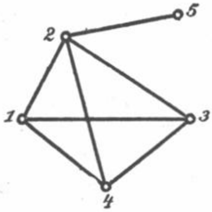

Abb. 87.

Schließlich seien noch beide Fälle an einfachen Beispielen vorgeführt. Um fünf Knotenpunkte unverschieblich miteinander zu verbinden, braucht man, wie aus Gl. (33) hervorgeht, sieben Stäbe. Wollte man diese aber etwa so verteilen, wie in Abb. 87, so würde man den Zweck trotzdem nicht erreichen. Das Viereck mit den beiden Diagonalen hat einen Stab zuviel und dieser fehlt zur Befestigung des fünften Knotenpunktes.

Der andere Fall kommt bei Abb. 88 vor. Hier sind die ersten vier Knotenpunkte zu einem statisch und geometrisch bestimmten Fachwerke durch die zwischen ihnen gezogenen Stäbe verbunden und auch der letzte Knotenpunkt 5 ist vorschriftsmäßig durch zwei Stäbe angeschlossen. Hier wäre also gegen die Gliederung nichts einzuwenden, wenn nicht die beiden zum

Knotenpunkte 5 gehenden Stäbe auf dieselbe Gerade fielen. Dadurch wird der Ausnahmefall bedingt.

Geometrisch erkennt man dies daran, daß sich Punkt 5 senkrecht zur gemeinsamen Richtungslinie beider Stäbe um eine unendlich kleine Strecke zu verschieben vermag, ohne daß sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung zu ändern brauchten. Oder mit andern Worten: da die Stäbe praktisch ihre Längen immer um kleine Größen zu ändern vermögen, so kann Knotenpunkt 5 Wege zurücklegen, die weit größer sind, als diese Längenänderungen und jedenfalls größer, als man es bei einem Fachwerke im allgemeinen dulden kann. Die Stabverbindung ist, wie man in der Umgangssprache zu sagen pflegt, „wackelig".

Auch vom statischen Gesichtspunkte zeigt sich, daß ein Ausnahmefall vorliegt. Sobald man eine Last am Knotenpunkte 5 anbringt, die zur Stabrichtung rechtwinklig ist, kann kein Gleichgewicht zwischen ihr und den Stabspannungen bestehen. Der Knotenpunkt wird also jedenfalls etwas ausweichen. Sobald dies geschehen ist, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht. Ist der Knotenpunkt unendlich wenig ausgewichen, was man bei unnachgiebigen Stäben allein voraussetzen kann, so kann man nachher ein Kräftedreieck zeichnen, bei dem aber der der Last gegenüberliegende Winkel unendlich klein ist. Die Stabspannungen werden dann unendlich groß.

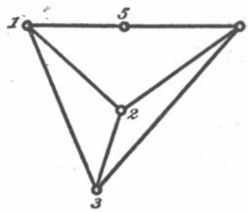

Abb. 88.

Unendlich große Stabspannungen sind freilich nicht mehr zu befürchten, wenn man eine Belastung des Knotenpunktes 5 vermeidet, die äußeren Kräfte also nur an den vier übrigen Knotenpunkten angreifen läßt. Dann kommt aber der Knotenpunkt 5 überhaupt nicht mehr in Betracht und die beiden von ihm ausgehenden Stäbe können durch einen einzigen, unmittelbar zwischen 1 und 4 geführten Stab ersetzt gedacht werden. Das Fachwerk 1, 2, 3, 4 ist daher für solche Lasten zwar stabil, aber zugleich statisch unbestimmt, da es einen Stab zuviel enthält.

§ 34. Die Grundfigur.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk mit n Knoten enthält, wie wir sahen, $2n - 3$ Stäbe. Stellen wir nun für jeden Knotenpunkt fest, wieviel Stäbe gerade von ihm ausgehen, und addieren alle diese Zahlen, so erhalten wir, da jeder Stab dabei zweimal gezählt wird, $4n - 6$. Die durchschnittliche Anzahl der von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe beträgt hiernach

$$\frac{4n-6}{n} \quad \text{oder} \quad 4 - \frac{6}{n}.$$

Es müssen also jedenfalls Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens drei Stäbe ausgehen. Ist n kleiner als 6, so sinkt die durchschnittliche Stabzahl unter drei und es müssen dann auch Knotenpunkte mit nur zwei Stäben vorkommen. Wenn aber n mindestens gleich 6 ist, kann es sein, daß von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen.

Enthält das gegebene Fachwerk zunächst wenigstens einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen, so mag dieser samt den beiden Stäben fortgelöscht werden. Findet man in dem Reste wiederum einen Knotenpunkt, an dem jetzt nur noch zwei Stäbe angreifen, so mag auch dieser mit seinen Stäben beseitigt werden. Dieses Verfahren soll so lange fortgesetzt werden, als es möglich ist, d. h. solange man noch auf Knotenpunkte stößt, von denen nachher nur noch zwei Stäbe ausgehen. War das Fachwerk nach der im Eingange von § 32 besprochenen Weise aufgebaut, so durchlaufen wir beim fortgesetzten Abbrechen der Knotenpunkte den Vorgang beim Aufbaue im umgekehrten Sinne, bis wir wieder bei dem Ausgangsdreiecke angelangt sind, von dem dann, wenn man will, auch noch eine Ecke abgebrochen werden kann.

Bei einer andern Gliederung des Fachwerkes gelangen wir dagegen schließlich zu einer Figur, in der von jedem Knotenpunkte noch mindestens drei Stäbe ausgehen. Diese Figur heißt die Grundfigur des Fachwerkes. Beim einfachen Fachwerke ist als Grundfigur ein Dreieck (oder, wenn man will, ein einzelner Stab) anzusehen. Die Grundfigur eines nicht einfachen, statisch bestimmten Fachwerkes muß nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen mindestens sechs Knotenpunkte umfassen. Hatte das gegebene Fachwerk überhaupt keinen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgingen, so bildet es, wie wir sagen wollen, selbst eine Grundfigur.

Sind die an den Knotenpunkten des Fachwerkes angreifenden Lasten gegeben, so kann man für alle Stäbe, die nicht zur Grundfigur gehören, die Spannungen ohne weiteres durch einen Kräfteplan ermitteln. Man kann dann alle diese Stäbe fortnehmen, falls man von jenen, die von Ecken der Grundfigur ausgingen, die Spannungen als äußere Kräfte oder Lasten an den Knotenpunkten der Grundfigur anbringt. In der Folge wird es sich daher nur noch darum handeln, die Stabspannungen der Grundfigur zu berechnen, wenn an deren Knotenpunkten gegebene Lasten angreifen.

Als Beispiele für nicht einfache Fachwerke können hier zunächst die schon früher besprochenen zusammengesetzten Polonçeau- oder Wiegmannbinder, Abb. 17 (S. 40) und Abb. 26 (S. 54), angeführt werden. Die Grundfigur kann in jenen Fällen leicht aufgefunden werden.

Ein anderes Beispiel führt Abb. 89 vor. Es ist zugleich jenes Beispiel, an dessen Hand sich die Theorie der Grundfiguren zuerst entwickelt hat und das früher zu zahlreichen Erörterungen Veranlassung gegeben hat, bevor die Frage endgültig entschieden war.

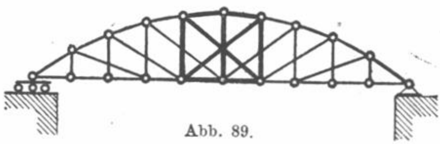

Abb. 89.

Man überzeugt sich zunächst leicht, daß das Fachwerk die notwendige Stabzahl enthält. Der Untergurt zählt in der Abbildung mit Einschluß der Auflagerknotenpunkte 11 Knoten und der Obergurt mit Ausschluß der Auflagerpunkte 9 Knoten. Im ganzen kommen daher 20 Knoten vor, zu deren steifer Verbindung nach Gl. (33) 37 Stäbe erforderlich sind. In der Tat hat man aber 10 Untergurt-, 10 Obergurtstäbe, 9 Vertikalstäbe und 8 Diagonalen, zusammen also 37 Stäbe. Auch wenn man die Zahl der Knoten des Untergurtes allgemeiner gleich a setzt, falls a eine ungerade Zahl bedeutet, die mindestens gleich 5 ist, läßt sich der Nachweis, daß die notwendige Zahl von Stäben bei der Gliederung nach Abb. 89 vorhanden ist, leicht erbringen.

Hierbei ist zu beachten, daß Stäbe, deren Richtungslinien sich schneiden, an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden sein sollen. Wenn sich nur zwei Stabrichtungen in einem Punkte treffen, ist es übrigens ziemlich gleichgültig, ob man sich die Stäbe in diesem Punkte verbunden denkt oder nicht. Werden sie miteinander verbunden, so zählt die Verbindungsstelle als neuer Knotenpunkt mit; zugleich zerfällt aber jeder von beiden Stäben in zwei neue, so daß man einen Knotenpunkt und zwei Stäbe mehr hat, wodurch an der Bedingung für die notwendige Stabzahl und an den Stabspannungen nichts geändert wird, solange an dem neu geschaffenen Knotenpunkte keine Lasten angreifen. Da nämlich von diesem Knotenpunkte vier Stäbe ausgehen, von denen je zwei in eine Gerade fallen, kann nur dadurch Gleichgewicht zustande kommen, daß die Spannungen paarweise gleich groß und von gleichem Vorzeichen sind. Die Spannungen laufen also durch den Knotenpunkt genau in derselben Weise weiter, als wenn keine Verbindung vorhanden wäre und es ist daher für die Berechnung der Stabspannungen am bequemsten, von der etwa vorhandenen Verbindung ganz abzusehen.

Anders ist es aber, wenn sich drei (oder noch mehr) Stäbe in einem Punkte schneiden, wie es in der Mitte von Abb. 89 vorkommt. Vernietet man nur zwei der drei Stäbe an der Kreuzungsstelle miteinander, so wird zwar ebensowenig geändert wie im vorigen Falle. Wenn aber alle drei miteinander verbunden werden, tritt nur e i n neuer Knotenpunkt auf, während drei Stäbe in je zwei zerfallen. Man erhält also einen Knotenpunkt und drei Stäbe mehr, d. h. wir haben dann einen Stab zuviel und das Fachwerk wird damit geometrisch überbestimmt und statisch unbestimmt. Hier soll aber vorausgesetzt werden, daß die Stäbe an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden sind.

Die Grundfigur finden wir, indem wir zunächst den linken Auflagerknotenpunkt, hierauf die folgenden Knotenpunkte des Obergurtes und des Untergurtes, von denen alsdann nur noch zwei Stäbe ausgehen, abtrennen und in dieser Weise fortfahren. Dann wird das Fachwerk auch vom rechten Auflagerknoten her in derselben Weise abgebaut. Man behält schließlich in der Mitte die durch starke Striche hervorgehobene Grundfigur übrig. Sie umfaßt sechs Knotenpunkte und neun Stäbe, enthält also die geringste Anzahl von Elementen, die in der Grundfigur eines nicht einfachen Fachwerkes vorkommen können. Sie kann als ein Sechseck mit drei Hauptdiagonalen aufgefaßt werden, denn daß im Untergurte zwei aufeinander folgende Seiten in eine Gerade fallen, macht hierfür keinen Unterschied. — Mit der Berechnung dieser sechseckigen Grundfigur werden wir uns in der Folge noch eingehend beschäftigen.

§ 35. Die Bildungsweisen des Fachwerkes.

Eine Bildungsweise des Fachwerkes, nämlich jene, durch die alle einfachen Fachwerke gewonnen werden können, wurde schon in § 32 eingehend besprochen. Auch jedes nicht einfache Fachwerk, das nicht schon selbst eine Grundfigur bildet, kann aus seiner Grundfigur heraus auf dieselbe Weise, also durch Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe gewonnen werden. Hier handelt es sich nur noch um die Besprechung solcher Bildungsweisen, die zu den Grundfiguren selbst führen.

Eine zweite Bildungsweise, die häufig vorkommt und daher eine genauere Besprechung erfordert, besteht in der Vereinigung von zwei geometrisch und statisch bestimmten Fachwerken zu einem einzigen durch drei Verbindungsstäbe. Auf die genauere Gestalt und Gliederung der beiden Fachwerke, die miteinander verbunden werden sollen, kommt es bei dieser Betrachtung nicht an. Es ist daher am besten, wenn man von ihr zunächst ganz absieht, also nur darauf achtet, daß beide Fachwerke jedenfalls unveränderliche Figuren bilden. Um dies auch in der Ausdrucksweise hervorzuheben, bezeichnet man eine solche unveränderliche Figur als eine Scheibe und stellt sie in der Zeichnung durch einen willkürlich begrenzten Umriß dar, dessen Fläche zur Erhöhung der Übersichtlichkeit zweckmäßigerweise durch eine Schraffierung ausgefüllt wird.

Zwei Stäbe genügen nicht, um zwei Scheiben fest miteinander zu verbinden. Die eine Scheibe kann sich dann immer noch relativ zur andern, aber nur in ganz bestimmter Weise oder, wie man sagt, zwangläufig bewegen. Gehen beide Verbindungsstäbe von demselben Punkte der einen Scheibe aus, wie in Abb. 90, so besteht diese Bewegung in einer Drehung der einen Scheibe gegen die andere um diesen Punkt. Denkt man sich etwa die Scheibe *I* festgehalten, so kann sich *II* um den Knotenpunkt *G*, der durch die beiden Stäbe fest mit *II* verbunden ist, drehen, und jeder Punkt von *II* beschreibt dabei einen Kreis, dessen Mittelpunkt *G* ist. Man nennt dann den Knotenpunkt *G* ein Gelenk und sagt, daß beide Scheiben in diesem Gelenke miteinander zusammenhängen.

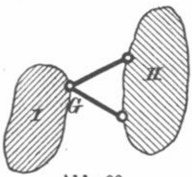

Abb. 90.

In Abb. 91 ist angenommen, daß die beiden Verbindungsstäbe nicht von einem gemeinsamen Knotenpunkte ausgehen. Denken wir uns auch jetzt wieder *I* festgehalten, so ist die Bewegung von *II* von verwickelterer Art, als im vorigen Falle. Es ist aber für unsere Zwecke nicht nötig, diese Bewegung auf eine längere Strecke hin zu verfolgen, sondern es genügt, wenn wir sie nur bis zur nächsten, unendlich nahen (oder doch sehr nahen) Lage ins Auge fassen.

Schon aus Band I (§ 20, S. 113 der 4. Aufl.) ist bekannt, daß jede unendlich kleine Bewegung einer starren Figur in ihrer Ebene als Drehung um einen bestimmten Punkt, den Pol der Bewegung, aufgefaßt werden kann. In diesem Punkte schneiden sich die Normalen aller Bahnelemente und man findet ihn daher schon als Schnittpunkt von zwei solchen Normalen. Nun kann sich Punkt *B* der beweglichen Figur wegen des Verbindungsstabes *AB* nur auf einem Kreise bewegen, dessen Mittelpunkt *A* und dessen Halbmesser *AB* ist. Hiernach ist *BA* die Normale zu dem von *B* beschriebenen Bahnelemente und ebenso *DC* die Normale zum Bahnelemente des Punktes *D*. Der Schnittpunkt *G* beider Normalen ist daher der Pol der Bewegung der Scheibe *II* relativ zur Scheibe *I* oder auch, nach den gleichen Gründen, umgekehrt der Pol der Bewegung der Scheibe *I* gegen die fest-

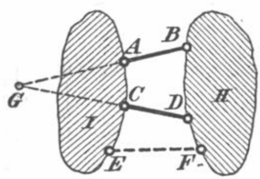

Abb. 91.

gehalten gedachte Scheibe *II*. Solange es nur auf unendlich kleine Verschiebungen ankommt, verhalten sich beide Scheiben genau so, als wenn sie im Punkte *G* durch ein Gelenk zusammenhingen. Wir wollen daher den Punkt *G* als ein imaginäres Gelenk zwischen *I* und *II* bezeichnen.

In einem Gelenke kann zwischen zwei Scheiben eine Kraft von beliebiger Richtung übertragen werden. Diese Kraft heißt der Gelenkdruck. Gleichgewicht zwischen zwei Scheiben, die in einem Gelenke zusammenhängen, ist nur möglich, wenn die Resultierende der an einer (und dann auch der andern) Scheibe angreifenden Lasten durch den Gelenkpunkt geht. Dies gilt nicht nur für die eigentlichen Gelenke, wie in Abb. 90, sondern auch für das imaginäre Gelenk *G* der Abb. 91. Zunächst können nämlich zwischen *I* und *II* in Abb. 91 nur zwei Stabspannungen längs der Richtungslinien *AB* und *CD* übertragen werden. Faßt man aber beide Kräfte zu einer Resultierenden zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt *G* der Richtungslinien. Die Resultierende kann daher als der im Gelenke *G* übertragene Gelenkdruck betrachtet werden. Kennt man diesen Gelenkdruck nach Größe und Richtung, so folgen daraus auch umgekehrt die beiden Stabspannungen durch Zerlegen nach beiden Richtungslinien.

Durch Einschalten eines dritten Stabes zwischen beiden Scheiben kann man die bis dahin noch bestehende Beweglichkeit im allgemeinen aufheben. Betrachtet man nämlich irgend zwei andere Punkte *E* und *F* der beiden Scheiben, so wird deren Entfernung bei einer Drehung von Scheibe *II* gegen *I* um das Gelenk *G* im allgemeinen geändert. Sobald daher *E* und *F* durch einen dazwischen eingeschalteten Stab in unveränderlicher Entfernung gehalten werden, wird die vorher noch bestehende Bewegungsmöglichkeit dadurch aufgehoben. Nur dann, wenn die Richtungslinie des Stabes *EF* ebenfalls durch *G* geht, kann sich *II* immer noch relativ zu *I* wenigstens um einen unendlich kleinen Winkel drehen, denn *F* bewegt sich dabei senkrecht zu *EF*, und hiermit ist nur eine von der zweiten Ordnung kleine Änderung der Stablänge *EF* verbunden, der der Stab keinen ausreichenden Widerstand entgegenzusetzen vermag. Sobald freilich *II* eine Bewegung gegen *I* ausgeführt hat, die nicht mehr als unendlich klein angesehen werden kann, schneiden sich nachher die drei Stabrichtungen nicht mehr in demselben Punkte, und die weitere Bewegung wird, wenn die Stäbe hinreichend widerstandsfähig sind, von da ab verhindert.

Im Falle der Abb. 90 würde ein dritter Stab, der ebenfalls von G aus nach irgendeinem Punkte von II geführt wäre, an der vorher bestehenden Bewegungsfreiheit überhaupt nichts ändern: es bliebe dann immer noch eine endliche Bewegungsfreiheit beider Scheiben bestehen. Im einen, wie im andern Falle ist aber, da auch kleine Verschiebungen nicht geduldet werden dürfen, der Ausnahmefall zu vermeiden, daß sich die Richtungen der drei Verbindungsstäbe in demselben Punkte treffen.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch auf Grund der statischen Betrachtung. Die drei Stabspannungen müssen nämlich imstande sein, an jeder Scheibe mit den daran angreifenden Lasten Gleichgewicht herzustellen. Die Stabspannungen erhält man durch Zerlegen der Resultierenden dieser Lasten nach den Richtungslinien der drei Stäbe. Eine solche Zerlegung ist aber, wie schon im ersten Abschnitte gefunden wurde, nur möglich, wenn sich die drei Richtungslinien nicht in einem Punkte schneiden. Gehen sie nicht genau durch denselben Punkt, sondern bilden sie ein unendlich kleines Dreieck miteinander, so werden die Stabspannungen unendlich groß. Auch hier entsprechen daher der unendlich kleinen Verschieblichkeit unendlich große Spannungen.

Wenn die Grundfigur eines Fachwerkes durch Vereinigung von zwei Scheiben durch drei Verbindungsstäbe gebildet wird, kann man hiernach die Spannungen der Verbindungsstäbe auf ganz einfache Weise ermitteln. Am einfachsten wendet man die Rittersche Momentenmethode an, indem man, um z. B. die Spannung des Stabes EF in Abb. 91 zu berechnen, das aus den beiden andern Stäben gebildete imaginäre Gelenk zum Momentenpunkte wählt. Die für das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben angeschriebene Momentengleichung enthält dann die Stabspannung EF als einzige Unbekannte.

Nachdem die Spannungen der Verbindungsstäbe (oder auch nur eines der Verbindungsstäbe) ermittelt sind, kann man gewöhnlich die in den Stäben der Scheiben auftretenden Spannungen ohne weiteres durch Zeichnen eines Kräfteplanes ermitteln. Hiervon wurde schon im ersten Abschnitte bei Berechnung des Polonçeau-Binders Gebrauch gemacht.

Eine auf diese Art erhaltene und durch Anwendung der Momentenmethode (oder auch nach dem Culmannschen Verfahren für die Zerlegung nach drei gegebenen Richtungslinien) leicht zu berechnende Grundfigur zeigt auch Abb. 92. Sie ist aus der Vereinigung der beiden Dreiecke ABC und DEF durch die drei Verbindungsstäbe AE, BD und CF hervorgegangen. Ob eine Grundfigur überhaupt auf diese Art gebildet ist, kann man entscheiden, indem man zusieht, ob sich ein Schnitt durch sie legen läßt, der nur drei Stäbe trifft, die nicht von demselben Punkte ausgehen.

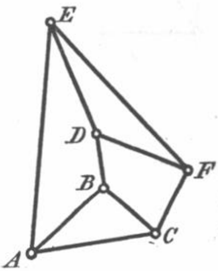

Abb. 92.

Ein Fachwerk kann ferner auch aus mehreren Scheiben mit Hilfe von Verbindungsstäben zusammengesetzt werden. Bezeichnet man die Anzahl der Scheiben mit s und die Anzahl der nicht zu ihnen gehörigen „freien" Knotenpunkte, die etwa ebenfalls noch mit einbezogen werden sollen, mit n, so ist die Zahl m der erforderlichen Verbindungstäbe

$$m = 2n + 3s - 3. \qquad (34)$$

Um nämlich zunächst die zweite Scheibe an die erste anzuschließen, braucht man drei Stäbe und ebensoviele für jede folgende Scheibe, zu diesem Zwecke also $3(s-1)$. Dazu kommen dann noch für jeden „freien" Knotenpunkt zwei Stäbe. Gl. (34) geht übrigens in Gl. (33) über, wenn man darin $s = 0$ setzt. — Die einfache Berechnung auf Grund der Ritterschen Momentenmethode ist in diesem Falle im allgemeinen nicht mehr möglich.

Ein weiterer Plan zum Aufbaue eines Fachwerkes besteht darin, zuerst 4, 5 oder allgemein a Knotenpunkte durch a aufeinanderfolgende Stäbe zu einem geschlossenen Vielecke zu verbinden. An diese für sich nicht steife Figur schließt man die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe an und beseitigt schließlich die noch vorhandene Beweglichkeit durch weitere $a - 3$ Stäbe, die zwischen passend ausgewählten Knotenpunkten eingeschaltet werden. Schon die in Abb. 92 gezeichnete Grundfigur kann in dieser Weise entstanden gedacht werden. Man gehe von dem Vierecke $BCFD$ aus, schließe daran A und E durch je zwei Stäbe und beseitige die noch zurückbleibende Verschieblichkeit durch den Stab AE. Eine andere, auf diese Art gebildete Grundfigur zeigt Abb. 93. Als Ausgangsfigur kann man etwa das Viereck $ABCD$ annehmen, an das der Reihe nach die Knotenpunkte E, F, G, H durch je zwei Stäbe angeschlossen werden, worauf die Steifigkeit durch Einziehen des letzten Stabes DH hergestellt wird. Die Rittersche Momentenmethode führt hier nicht, oder jedenfalls nicht ohne weiteres, zum Ziele.

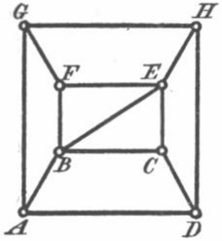

Abb. 93.

Das allgemeinste Mittel, um alle möglichen Grundfiguren zu erhalten, besteht aber in der wiederholten Anwendung der schon in § 32 besprochenen Stabvertauschung. Um dies zu beweisen, betrachte man zunächst einen von jenen Knotenpunkten einer gegebenen Grundfigur, von denen nur drei Stäbe ausgehen. Man beseitige einen der drei Stäbe; dann müssen auch die übrigen Knotenpunkte gegeneinander verschieblich sein, denn wenn sie es nicht wären, würde auch der betrachtete Knotenpunkt durch die ihm verbliebenen beiden Stäbe fest an sie angeschlossen, was gegen die Voraussetzung verstößt, daß die gegebene Grundfigur keine überzähligen Stäbe enthielt. Die Verschieblichkeit kann durch Einziehen eines neuen Stabes wieder aufgehoben werden. Nachdem diese Stabvertauschung vorgenommen ist, hat man einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen. Wird er beseitigt, so behält man eine Grundfigur übrig, die mindestens einen Knotenpunkt weniger umfaßt. Mit dieser kann man nun auf dieselbe Weise verfahren usf., bis schließlich ein einfaches Fachwerk übrig bleibt. Dabei macht es auch nichts aus, wenn man die Knotenpunkte, von denen nur zwei Stäbe ausgingen, in Wirklichkeit gar nicht abtrennt, sondern sie so beibehält.

Hieraus folgt zunächst, daß man durch hinreichend oft fortgesetzte Stabvertauschungen jede Grundfigur auf ein einfaches Fachwerk zurückführen kann. Wenn man denselben Weg in umgekehrter Reihenfolge zurücklegt, gelangt man aber von dem einfachen Fachwerke auch wieder zu der gegebenen Grundfigur. Die Methode der Stabvertauschungen kann daher benutzt werden, um jede beliebige Grundfigur aus einem zwischen den gegebenen Knotenpunkten als Ausgang gewählten einfachen Fachwerke abzuleiten.

§ 36. Die Methode von Henneberg.

Ein allgemein anwendbares Verfahren zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten Grundfiguren bei gegebenen Lasten ist im Anschlusse an die vorausgehenden Betrachtungen von Prof. Henneberg aufgestellt worden.

Man nehme zunächst an, daß die Grundfigur durch eine einmalige Stabvertauschung auf ein einfaches Fachwerk zurückgeführt werden kann. Man bewirkt den Austausch und berechnet vorläufig die Stabspannungen, die von den gegebenen Lasten in dem einfachen Fachwerke hervorgerufen werden. Hierzu braucht man nur einen Kräfteplan zu zeichnen. Ich will ihn den Kräfteplan T nennen und die daraus für irgendeinen Stab mit der Nummer i entnommene Stabspannung mit T_i bezeichnen. Jener Stab, der bei der Stabvertauschung an die Stelle des beseitigten tritt, soll der Ersatzstab heißen und mit dem Zeiger e versehen werden. Im Kräfteplane kommt auch T_e vor, dagegen fehlt natürlich darin die Spannung des beseitigten Stabes.

Um von dem Spannungsbilde T auf jenes zu kommen, das in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke besteht, denke man sich den zuvor beseitigten Stab in einer gewissen Mitwirkung begriffen. Dazu überlegen wir uns, welchen Einfluß auf die Spannungen der Stäbe in dem einfachen Fachwerke eine längs jenes Stabes ganz willkürlich angenommene Spannkraft ausübt. Es ist dazu gar nicht nötig, daß wir uns den beseitigten Stab sofort wieder eingesetzt denken. Um seinen Einfluß auf die Spannungen der andern Stäbe kennen zu lernen, genügt es vielmehr, wenn wir uns nur an den beiden Endknotenpunkten Lasten von gleicher Größe und entgegengesetztem Pfeile angebracht denken, die in die Stabrichtung fallen und der Spannung in dem beseitigten Stabe entsprechen. Denn jeden Stab kann man ohne Einfluß auf das Gleichgewicht aller übrigen beseitigen, wenn man nur dafür Sorge trägt, daß an seinen beiden Endknotenpunkten Kräfte angebracht werden, die die vorher von dem Stabe selbst übertragenen genau ersetzen.

Am besten ist es, wenn man sich längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes einstweilen eine Zugspannung angebracht denkt, die gleich der Belastungseinheit, also etwa gleich 1 Tonne ist. Die beiden Lasten an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes, die jener Einheitsspannung entsprechen, bringen in dem einfachen Fachwerke Stabspannungen hervor, die sich ebenfalls durch Zeichnen eines zweiten Kräfteplanes sofort ermitteln lassen. Alle gegebenen Lasten denkt man sich hierbei ganz von dem Fachwerke entfernt, da man nur jene Spannungen zu ermitteln wünscht, die ausschließlich durch die längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes angebrachte Spannkraft hervorgerufen werden.

Den jetzt gezeichneten Kräfteplan will ich den Kräfteplan u nennen und die daraus entnommene Spannung irgendeines Stabes i mit u_i bezeichnen. Die u_i sind nur als Verhältniszahlen aufzufassen; sie geben zunächst für die Spannungseinheit im beseitigten Stabe die zugehörigen Spannungen der übrigen Stäbe, hiermit aber zugleich auch allgemeiner die Verhältnisse zwischen diesen Stabspannungen und der durch den beseitigten Stab übertragenen Spannkraft an. Ein positives Vorzeichen von u_i drückt aus, daß die Spannung im Stabe i von gleicher Art mit der im beseitigten Stabe ist, denn sobald sich die Spannung im beseitigten Stabe umkehrt, kehren sich auch die Vorzeichen aller übrigen durch diese Belastung hervorgerufenen Stabspannungen um.

Bezeichnen wir ferner die unbekannte Spannung, die der beseitigte Stab in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke aufzunehmen hat, mit X, so entsprechen ihr in dem nach der Stabvertauschung entstehenden einfachen Fachwerke Spannungen, die nach Größe und Vorzeichen durch das Produkt uX angegeben werden. Lassen wir die Lasten X an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes zugleich mit den gegebenen

Lasten an dem einfachen Fachwerke angreifen, so kommt im Stabe i eine Spannung S_i zustande, die sich aus den vorher im einzelnen besprochenen Spannungen zusammensetzt, also

$$S_i = T_i + u_i X \tag{35}$$

ist. Welchen Wert wir auch für X annehmen mögen: jedenfalls wird durch das hiermit angegebene Spannungsbild S an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und den äußeren Kräften, in die auch die Kräfte X an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes mit einzurechnen sind, hergestellt. Man kann auch sagen, daß die unendlich vielen Spannungsbilder, die verschiedenen Annahmen über X entsprechen, zu dem statisch unbestimmten Fachwerke gehören, das man erhält, wenn man den beseitigten Stab wieder einsetzt und den Ersatzstab e daneben auch noch beibehält.

Unter allen diesen Spannungsbildern muß auch jenes enthalten sein, das wir suchen, und zwar ist es offenbar jenes unter allen, bei dem die Spannung des Ersatzstabes zu Null wird. Denn in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke kam der Ersatzstab überhaupt nicht vor; dessen Spannung muß daher ausfallen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht der Kräfte an allen Knotenpunkten gestört wird. Wenden wir Gl. (35) auf den Ersatzstab e an, setzen S_e gleich Null und lösen nach X auf, so erhalten wir

$$X = -\frac{T_e}{u_e}. \tag{36}$$

Die Spannung T_e kann aus dem ersten und die Verhältniszahl u_e aus dem zweiten Kräfteplane nach Größe und Vorzeichen unmittelbar entnommen werden. Hiermit kennen wir also auch nach Gl. (36) sofort die Spannung in dem zuvor beseitigten Stabe nach Größe und Vorzeichen.

Nachdem X bekannt ist, findet man auch die Spannung in jedem andern Stabe nach Gl. (35). Oft ist es übrigens zweckmäßiger, die beiden Kräftepläne T und u nur so weit zu zeichnen, bis man darin zu T_e und u_e gelangt ist. Denn hiermit vermag man bereits X nach Gl. (36) zu berechnen. Hierauf entwirft man einen dritten Kräfteplan, den man vollständig bis zu Ende durchführt, und aus dem sich die wirklichen Spannungen in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke ergeben. Dieser Kräfteplan kann nämlich sofort gezeichnet werden, nachdem X bereits bekannt ist. Zuletzt ergeben sich dabei noch Proben für die Richtigkeit der Bestimmung von X, indem sich die letzten Kraftecke von selbst schließen müssen.

Auch ob ein Ausnahmefall vorliegt, ergibt sich bei dieser Methode. Findet man nämlich, daß u_e zufällig den Wert Null oder doch einen sehr kleinen Wert annimmt (denn dies allein kann auf Grund einer Zeichnung, die mit unvermeidlichen Zeichenfehlern behaftet ist, unmittelbar nachgewiesen werden), so folgt nach Gl. (36), daß X sehr groß (oder unendlich groß) wird. Ein Spannungsbild, bei dem zu Lasten von endlicher Größe sehr große oder unendlich große Stabspannungen gehören, entspricht aber dem zu vermeidenden Ausnahmefalle.

Sind endlich zwei Stabvertauschungen nötig, um das gegebene Fachwerk auf ein einfaches zurückzuführen, so zeichne man zuerst, wie im vorigen Falle, den Kräfteplan T, der die Spannungen in dem einfachen Fachwerke kennen lehrt. Dann bringe man eine Zugspannung von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des ersten der beseitigten Stäbe an und zeichne hierfür, wiederum ganz wie vorher, den Kräfteplan u. Hierzu kommt dann noch ein dritter Kräfteplan v für die Spannungen in dem einfachen Fachwerke, die durch eine längs des zweiten der beseitigten Stäbe angebrachte Zugspannung von der Lasteinheit hervorgerufen werden. Wird dann die Spannung in dem ersten der beseitigten Stäbe mit X, die im zweiten mit Y bezeichnet, so ist die Spannung im Stabe i, wenn X und Y gleichzeitig mit den gegebenen Lasten angreifen

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y. \tag{37}$$

Die beiden Unbekannten X und Y ergeben sich aus der Bedingung, daß die beiden Ersatzstäbe, die jetzt mit e und f bezeichnet werden sollen, in dem von uns gesuchten Spannungsbilde überhaupt nicht vorkommen, daß also die für sie nach Gl. (37) berechneten Spannungen zu Null werden müssen. Man erhält daher X und Y durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} T_e + u_e X + v_e Y = 0, \\ T_f + u_f X + v_f Y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

in denen alle übrigen Größen außer X und Y aus den drei Kräfteplänen, die wir zeichneten, bekannt sind.

Man sieht nun auch ein, daß dasselbe Verfahren auch für drei oder noch mehr Ersatzstäbe anwendbar bleibt; aber schon der Fall mit zwei Ersatzstäben kommt in der technischen Praxis, wenigstens bei den ebenen Bindern, kaum vor. Bei der Berechnung von räumlichen Fachwerkträgern, auf die sich das gleiche Verfahren übertragen läßt, kann es jedoch von Vorteil sein, noch mehr Stabvertauschungen vorzunehmen.

§ 37. Die Berechnung der sechseckigen Grundfigur mit Hilfe der imaginären Gelenke.

Für die aus einem Sechsecke mit drei Hauptdiagonalen bestehende Grundfigur kann man die Spannungen auch noch auf verschiedene andere Arten berechnen. Man kommt dabei unter Umständen kürzer zum Ziele, als nach dem vorher beschriebenen, allgemein anwendbaren Verfahren; namentlich kann man sich dabei besser Rechenschaft darüber geben, unter welchen Umständen ein Ausnahmefall zu erwarten ist.

Hierbei ist unter dem Ausnahmefalle, woran noch einmal erinnert werden soll, jener zu verstehen, bei dem eine unendlich kleine Beweglichkeit besteht, weil einer der Stäbe das Maximum oder Minimum der Länge hat, das mit den übrigen Stablängen verträglich ist oder bei dem zu einem beliebig gegebenen Lastensysteme unendlich große Stabspannungen gehören. Daß beide Kennzeichen gleichwertig miteinander sind und sich gegenseitig bedingen, wird übrigens aus einer Untersuchung, die ich alsbald folgen lassen werde, noch deutlich hervorgehen.

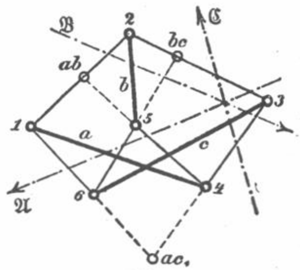

Abb. 94.

In Abb. 94 ist eine sechseckige Grundfigur dieser Art dargestellt. Die sechs Knotenpunkte 1, 2 ... 6 sind in dieser Aufeinanderfolge durch sechs Stäbe verbunden, die wir als die

Umfangsstäbe des Sechseckes bezeichnen wollen. Dazu kommen dann noch die drei durch stärkere Striche hervorgehobenen Diagonalstäbe a, b, c. An den sechs Knotenpunkten mögen von außen her beliebig gegebene Lasten angreifen, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie den Bedingungen für das Gleichgewicht an einem starren Körper genügen. Man soll die dadurch in den Stäben hervorgerufenen Spannungen berechnen.

Zuvor mag indessen noch bemerkt werden, daß die Verteilung der Rollen von Umfangs- und Diagonalstäben auch in anderer Weise, als vorher angegeben, hätte durchgeführt werden können. Man hätte z. B. auch die in den Zug 1, 2, 5, 4, 3, 6, 1 fallenden Stäbe als Umfangsstäbe und die drei übrig bleibenden als Diagonalstäbe ansehen können. Wie man diese Wahl trifft, bleibt für das Folgende gleichgültig; jedenfalls wollen wir aber an der einmal getroffenen Wahl festhalten.

Wir lösen die Aufgabe auf Grund der Bedingung, daß jeder der drei Diagonalstäbe a, b, c für sich genommen unter dem Einflusse aller an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewichte stehen muß. An jedem von ihnen, z. B. an a, greifen sechs Kräfte an, zunächst nämlich die gegebenen Lasten an den Endknotenpunkten 1 und 4 und dann die Spannungen der vier Umfangsstäbe, die von 1 und 4 ausgehen. Denn wenn wir das Gleichgewicht des Stabes a für sich untersuchen wollen, müssen wir uns die vier Stäbe, die mit ihm zusammenstoßen, abgetrennt und die von ihnen übertragenen Spannungen durch Kräfte ersetzt denken, die für den Stab a als äußere anzusehen sind, wenn sie auch für die ganze Grundfigur als innere gelten. Ebenso ist es bei b und c.

Die vorher bezeichneten sechs Kräfte wollen wir paarweise zusammenfassen. Dies ist zunächst leicht möglich mit den gegebenen Lasten an den Endknotenpunkten. Diese Lasten selbst sind, um die Zeichnung nicht zu überladen, nicht eingetragen. Dafür ist sofort die Resultierende $\mathfrak{A}$ aus den an 1 und 4 angreifenden Lasten angegeben, die wir in kürzerer Ausdrucksweise als die gegebene äußere Kraft am Stabe a bezeichnen können. Ebenso sei $\mathfrak{B}$ die Resultierende aus den Lasten an 2 und 5, oder die am Stabe *b* angreifende äußere Kraft und $\mathfrak{C}$ die Resultierende aus den Lasten an 3 und 6.

Die drei Resultierenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ersetzen die gegebenen Lasten in bezug auf das Gleichgewicht am ganzen starren Körper vollständig, und da die Lasten ein Gleichgewichtssystem bilden sollten, müssen sich die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in einem Punkte treffen und ihre geometrische Summe muß Null sein.

Wir fassen ferner auch die vier an den Enden von *a* angreifenden Stabspannungen paarweise zusammen und zwar die Spannung im Stabe 1, 2 mit 4, 5 und 1, 6 mit 3, 4. Jedenfalls muß die Resultierende aus den Spannungen 1, 2 und 4, 5 durch den mit *ab* bezeichneten Schnittpunkt beider Richtungslinien gehen und ebenso die Resultierende aus 1, 6 und 3, 4 durch den Schnittpunkt *ac*. Wie groß und wie gerichtet diese Resultierenden sind, vermag man dagegen einstweilen nicht zu sagen.

Die gewählte Art der Zusammenfassung bedarf noch einer näheren Begründung. Hierzu mache ich darauf aufmerksam, daß die Diagonalstäbe *a* und *b* durch die beiden Umfangsstäbe 1, 2 und 4, 5 in unmittelbarer Verbindung stehen. Wären die übrigen Stäbe nicht vorhanden, so könnten sich *a* und *b* relativ zueinander bewegen und zwar vermöchten sie sich, wie aus den Untersuchungen in § 35 (vgl. besonders Abb. 91) hervorgeht, um das imaginäre Gelenk *ab* gegeneinander zu drehen. Hieraus geht auch der Sinn der für diese Schnittpunkte gewählten Bezeichnungen hervor.

Wir können hiernach die Rolle der sechs Umfangsstäbe auch so auffassen, daß je zwei sich im Sechsecke gegenüber liegende ein imaginäres Gelenk darstellen, in dem zwei der Diagonalstäbe miteinander zusammenhängen. Die Resultierende aus beiden Stabspannungen bildet den im imaginären Gelenke übertragenen Gelenkdruck. Die Resultierende aus den an den Enden von *a* angreifenden Stabspannungen, die wir vorher bildeten, ist daher nichts anderes als der im Gelenke *ab* von *b* auf *a* übertragene Gelenkdruck. Der umgekehrt von *a* auf *b* übertragene Gelenkdruck ist die Reaktion des vorigen und daher ebensogroß und entgegengesetzt gerichtet.

Alle vorausgehenden Bemerkungen dienen nur dazu, die Dinge, mit denen wir zu tun haben, in passender Weise zu ordnen, nämlich so, daß alles auf die drei Diagonalstäbe *a*, *b*, *c* bezogen wird, wodurch eine bessere Übersicht erzielt wird, so daß uns der Kern der Aufgabe deutlicher erkennbar wird. Wir sind so dazu gelangt, alle am Stabe *a* angreifenden Kräfte auf die gegebene äußere Kraft 𝔄 und zwei durch *ab* und *ac* gehende Gelenkdrücke von unbekannter Größe und Richtung zurückzuführen. Wir können jetzt hinzufügen, daß sich die Richtungslinien der drei Kräfte in einem Punkte schneiden müssen, den wir jedenfalls auf der bereits bekannten Richtungslinie von 𝔄 zu suchen haben.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die drei Gelenkdrücke zu ermitteln und zwar zuerst ihre Richtungslinien. Diese drei Richtungslinien bilden jedenfalls ein Dreieck, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte *ab*, *ac* und *bc* gehen. Außerdem müssen aber, wie wir soeben fanden, die drei Ecken auf den Richtungslinien von 𝔄, 𝔅, ℭ liegen. Denn was vorher über das Gleichgewicht der drei Kräfte am Stabe *a* bemerkt wurde, läßt sich ohne weiteres auch auf die Stäbe *b* und *c* übertragen.

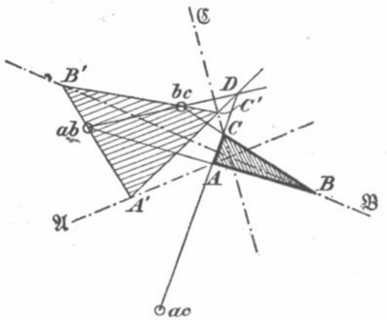

Abb. 95.

Ein Dreieck, das die genannten sechs Bedingungen erfüllen soll, ist aber dadurch eindeutig bestimmt. Man kann es leicht nach einem zuvor schon mehrmals benutzten Verfahren konstruieren. In Abb. 95 ist dies ausgeführt. In diese Abbildung sind aus der vorigen nur die drei Richtungslinien 𝔄, 𝔅, ℭ und die drei Gelenkpunkte *ab*, *bc* und *ac* mit übernommen. Einfacher wäre es zwar gewesen, die Konstruktion sofort in Abb. 95 zu Ende zu führen. Die Figur wäre aber dann etwas undeutlich geworden, und sie wurde daher in zwei Abbildungen auseinander gezogen, die man nachträglich, wenn man will, auch leicht wieder aufeinander decken kann.

Man ziehe etwa zuerst in willkürlicher Richtung eine Linie $A'B'$ durch ab, dann von dem auf $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte B' eine Linie $B'C'$ durch bc und verbinde C' mit A'. Dadurch erhält man ein Dreieck $A'B'C'$, das von den sechs Bedingungen fünf erfüllt; nur die Seite $A'C'$ geht noch nicht durch den vorgeschriebenen Punkt ac. Wenn man nun die Anfangsseite $A'B'$ um ab dreht, verändert sich das Dreieck und man erhält unendlich viele verschiedene Dreiecke, von denen jenes auszusuchen ist, dessen Seite AC außerdem noch durch ac geht.

Da aber die drei Ecken des veränderlichen Dreieckes auf drei gegebenen Geraden fortschreiten, die sich in einem Punkte schneiden, während sich zugleich zwei Seiten um festePunkte drehen, muß sich auch die dritte Seite um einen festen Punkt D drehen. Dieser Satz ist einem schon in § 2 angeführten und benutzten reziprok. Wir finden den Punkt D als Schnitt der dritten Seiten von irgend zwei Dreiecken. Als zweites benutzen wir dabei am bequemsten jenes, dessen drei Seiten in eine Gerade, also in die Verbindungslinie der Punkte ab und bc fallen.

Auch die Seite AC des gesuchten Dreieckes muß durch den Punkt D gehen. Da sie ferner auch durch ac gehen soll, brauchen wir nur ac mit D zu verbinden. Diese Linie schneidet die Punkte A und C auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ ab. Zieht man hierauf von ab und bc aus die Linien AB und CB, so muß der Schnittpunkt B von selbst auf $\mathfrak{B}$ fallen, was zur Prüfung für die Genauigkeit der Zeichnung dient.

Überträgt man das Dreieck ABC aus Abb. 95 nach Abb. 94, so hat man dort die Richtungslinien der drei Gelenkdrücke. Die Größen ergeben sich ohne weiteres daraus, daß die geometrische Summe von zwei Gelenkdrücken und der an demselben Diagonalstabe angreifenden gegebenen äußeren Kraft gleich Null sein muß. Man braucht also nur noch den in Abb. 96 angegebenen Kräfteplan zu zeichnen, der bei der wirklichen Ausführung natürlich unmittelbar neben Abb. 94 seinen Platz finden müßte.

Man geht aus von dem Dreiecke, das sich durch Aneinanderreihung von 𝔄, 𝔅, ℭ bilden lassen muß und zieht von den Ecken Parallelen *ab*, *ac*, *bc* zu den in Abb. 95 ermittelten Gelenkdruckrichtungen. Diese müssen sich von selbst in einem Punkte schneiden; die Abb. 95 und 96 sind, wenn man in der ersten die nur zur Konstruktion dienenden Hilfslinien wegläßt, reziproke Figuren. — Nachdem die Gelenkdrücke bekannt sind, findet man die Spannungen der Umfangsstäbe des Sechseckes, indem man jeden Gelenkdruck nach den Richtungen der beiden Stabspannungen zerlegt, als deren Resultierende er betrachtet werden kann. Als gestrichelte Linien sind die am Diagonalstabe *a* angreifenden Stabspannungen 1, 2; 4, 5; 3, 4; 1, 6, die sich durch Zerlegen der Gelenkdrücke *ab* und *ac* ergeben, ebenfalls in Abb. 96 angegeben. Zugleich sind auch jene Pfeile darauf eingetragen, die zum Stabe *a* gehören. Sie ergeben sich aus dem Pfeile von 𝔄, da in dem Fünfecke 𝔄; 1, 2; 4, 5; 3, 4; 1, 6 die Pfeile stetig aufeinander folgen. Hieraus folgt also, daß in dem Beispiele, auf das sich die Abbildung bezieht, die Stäbe 1, 2 und 3, 4 gezogen, dagegen 4, 5 und 1, 6 gedrückt sind. Der Gelenkdruck *bc* kann natürlich ebenso nach 2, 3 und 5, 6 zerlegt werden.

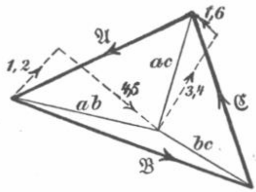

Abb. 96.

Um auch die Spannungen der Diagonalstäbe zu finden, muß man noch die Kraftecke für die Endknotenpunkte zeichnen. Hierzu kann die Kenntnis der Resultierenden 𝔄, 𝔅, ℭ allein nichts nützen, sondern man muß auf die an jedem Knotenpunkte für sich angreifenden gegebenen Lasten zurückgreifen. Ein Kräfteviereck aus der Last am Knotenpunkte 1, aus den beiden bereits bekannten Stabspannungen 1, 2 und 1, 6 und der unbekannten Stabspannung *a* liefert nicht nur *a*, sondern gestattet zugleich eine Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der vorhergehenden Ermittelungen, da die vierte Seite von selbst parallel zur Richtung des Stabes *a* gehen muß.

Wir wollen uns jetzt überlegen, unter welchen Umständen der Ausnahmefall eintritt. Aus Abb. 96 erkennt man, daß die Gelenkdrücke — und hiermit auch die Stabspannungen — nur dann unendlich groß werden können, wenn der Schnittpunkt der drei Linien *ab, ac, bc* ins Unendliche rückt. Dann sind aber die drei Gelenkdrücke alle gleich gerichtet und das Gelenkdruckdreieck *ABC* in Abb. 95 muß in eine gerade Linie übergehen. Das ist aber nur möglich, wenn die drei Gelenke *ab, bc, ac* in Abb. 95 in einer Geraden liegen. Umgekehrt wird auch immer dann, wenn die drei Gelenke in einer Geraden liegen, das Gelenkdruckdreieck in eine Gerade übergehen und die Stabspannungen werden bei beliebig gegebenen endlichen Lasten unendlich groß.

Auch geometrisch läßt sich der Ausnahmefall leicht nachweisen. Man denke sich in der hier wieder abgedruckten Abb. 94 den Stab *a* festgestellt und *b* durch das Gelenk *ab* mit *a* verbunden. Dann kann sich *b* gegen *a* um *ab* drehen. Hierauf sei noch *c* durch das Gelenk *bc* an *b* angeschlossen, so daß sich *c* gegen *b* um *bc* drehen kann. Gegen *a* hat dann *c* zwei Freiheitsgrade, da sowohl eine Drehung um das Gelenk *ab*, als eine um das Gelenk *bc*, die ganz unabhängig voneinander erfolgen können, seine Lage gegen *a* ändern. Verbindet man *ab* und *bc* durch eine Gerade, die bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie von *c* verlängert wird, so verschiebt sich dieser Punkt von *c* auf jeden Fall rechtwinklig zur Verbindungslinie beider Gelenke, gleichgültig ob nun die Drehung um *ab* oder um *bc* erfolgt. Auch wenn eine gleichzeitige Drehung um beide Gelenke eintritt, muß sich daher jener Punkt von *c* rechtwinklig zur Verbindungslinie verschieben. Hieraus folgt, daß eine Drehung um das Gelenk *ab*, verbunden mit einer zu ihr in einem beliebigen Verhältnisse stehenden Drehung um *bc* auf jeden Fall gleichwertig ist einer einzigen Drehung um einen Pol, der auf der Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* enthalten ist. — Der soeben abgeleitete (zuerst von Burmester aufgestellte) Satz spielt, nebenbei bemerkt, in der Kinematik eine wichtige Rolle.

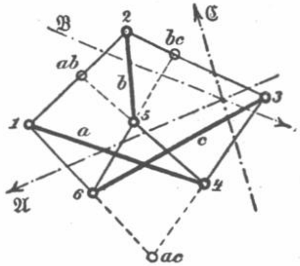

Abb. 94.

Die Verschieblichkeit, die zwischen *c* und *a* noch bestehen bleibt, wenn nur die Gelenke *ab* und *bc* vorhanden, die zum Gelenke *ac* gehörigen Umfangsstäbe 1, 6 und 3, 4 dagegen fortgelassen sind, läßt sich hiernach auf sehr einfache Art beschreiben: der Stab *c* vermag sich gegen *a*, den zwei Freiheitsgraden entsprechend, um jeden beliebigen Pol zu drehen, der auf der Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* enthalten ist. Die Lage des Poles auf der Verbindungslinie hängt nur von dem Verhältnisse der Drehungen um beide Gelenke (nach Größe und Vorzeichen) ab.

Das Gelenk *ac* gestattet dagegen für sich genommen nur Drehungen von *c* gegen *a* um *ac*. Tritt also das Gelenk *ac* zu den vorher schon bestehenden Verbindungen hinzu, so fragt es sich, ob beide Bewegungsmöglichkeiten, die vorher im einzelnen vorhanden waren, miteinander verträglich sind, oder ob sie sich widersprechen. Sie vertragen sich, wenn das Gelenk *ac* ebenfalls auf die Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* fällt, weil die Drehung um *ac* dann zu jenen Bewegungen gehört, die auch schon vor Zufügung des Gelenkes *ac* möglich waren. In jedem andern Falle widersprechen sie sich. Sobald also die drei Gelenkpunkte ein Dreieck bilden, ist jede unendlich kleine Beweglichkeit der Figur ohne eine Änderung der Stablängen von der gleichen Größenordnung ausgeschlossen.

Die Bedingung für den Ausnahmefall läßt sich mit Hilfe des Lehrsatzes von Pascal in eine Form bringen, die sich dem Gedächtnisse bequemer einprägt. Nach diesem Satze schneiden sich die Gegenseiten eines Sechseckes, dessen Eckpunkte auf einem Kegelschnitte enthalten sind, in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen. Umgekehrt kann man durch die Eckpunkte einen Kegelschnitt legen (der aber auch in zwei gerade Linien zerfallen kann), wenn die genannten Schnittpunkte auf einer Geraden liegen.

Die imaginären Gelenke wurden als Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechseckes erhalten. Wir können daher die vorher gefundene Bedingung für den Ausnahmefall einfacher dahin aussprechen, daß die aus einem Sechsecke mit drei Hauptdiagonalen gebildeten Grundfiguren trotz der genügenden Stabzahl immer dann nicht steif sind, wenn das Sechseck ein Pascalsches ist.

Zu den Pascalschen gehören u. a. auch die regelmäßigen Sechsecke. Ein solches von etwa 70 cm Durchmesser habe ich in meinem Laboratorium aus kleinen Winkeleisen (von 13 mm Schenkellänge) zusammennieten lassen, wobei die Diagonalen an den Kreuzungsstellen übereinander weg geführt sind, so daß keine Verbindung zwischen ihnen besteht. Eine Last von 50 kg, die man in geeigneter Weise an einem Knotenpunkte angreifen läßt, bringt Formänderungen hervor, bei denen sich der Abstand anderer Knotenpunkte um 3 bis 4 mm ändert. Zum Vergleiche sei erwähnt, daß stabile Fachwerke, aus denselben Winkeleisen und in ungefähr gleichen Größen ausgeführt, Entfernungsänderungen zwischen zwei nicht durch einen Stab miteinander verbundenen Knotenpunkten von höchstens einigen Zehntelmillimetern, gewöhnlich aber noch viel weniger bei Lasten von 50 kg erkennen lassen. Auch wenn man in dem regelmäßig sechseckigen Versuchsfachwerke die Diagonalen an der Kreuzungsstelle mit Hilfe einer kräftigen Schraubzwinge fest miteinander verbindet, wodurch man zu einem stabilen Fachwerke mit einem überzähligen Stabe gelangt (vgl. den vorletzten Absatz in § 34), findet man bei einer Wiederholung des Versuches mit denselben Lasten nur noch so kleine Formänderungen, daß sie mit den gewöhnlich angewendeten einfachen Mitteln gar nicht mehr gemessen werden können, d. h. sie sind noch nicht einmal von der Größe eines Zehntelmillimeters.

Hiernach läßt sich das Bestehen des Ausnahmefalles beim Pascalschen Sechsecke auch experimentell leicht nachweisen und die dabei gemachten Beobachtungen dienen zugleich dazu, eine Vorstellung davon zu geben, in welchem Maße und Grade sich der Ausnahmefall praktisch zur Geltung bringt. Hierbei erwähne ich noch, daß die zuvor angegebenen verhältnismäßig starken Formänderungen des Kreissechseckes rein elastisch sind; bleibende Verbiegungen von erkennbarer Größe treten bei dieser Belastung noch nicht auf.

§ 38. Die kinematische Methode.

Hält man in einem statisch bestimmten Fachwerke von beliebiger Gliederung einen Stab fest und entfernt irgendeinen andern Stab, so ist die Figur verschieblich, aber so, daß sich alle Knotenpunkte, sofern sie nicht in Ruhe bleiben, nur längs bestimmter Kurven, also zwangläufig bewegen können. Man kann sich an dem in dieser Weise gebildeten Mechanismus, an dessen Knotenpunkten irgendwelche Lasten angreifen, dadurch wieder Gleichgewicht hergestellt denken, daß längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes an den Endknotenpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von passender Größe angebracht werden. Durch diese werden dann in Verbindung mit den gegebenen Lasten Spannungen in den Stäben hervorgerufen, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Größe und Richtungssinn der beiden Kräfte geben daher zugleich die Stabspannung an, die in dem Stabe, den man sich beseitigt dachte, in Wirklichkeit auftritt.

Aus dieser Überlegung ergibt sich ein Mittel, um die Stabspannung in irgendeinem Stabe des gegebenen Fachwerkes, den man sich zu diesem Zwecke beseitigt denkt, zu berechnen. Man braucht hierzu nur das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine unendlich kleine Bewegung des Mechanismus anzuschreiben. Die Summe der Arbeitsleistungen aller äußeren Kräfte muß, damit Gleichgewicht bestehe, gleich Null sein. Zu den äußeren Kräften an dem Mechanismus gehören außer den gegebenen Lasten auch die Kräfte, die man an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes als Ersatz für dessen Stabspannung anbringen muß. Deren Größe (mit Einschluß des Vorzeichens) bildet die einzige Unbekannte in der Arbeitsgleichung, denn die Knotenpunktswege während der unendlich kleinen Lagenänderung lassen sich aus der gegebenen Gestalt des Fachwerkes und des aus ihm hervorgegangenen Mechanismus ermitteln. Die inneren Kräfte des Mechanismus, also die in ihm vorkommenden Stabspannungen leisten während der Bewegung keine Arbeit, da die Stablängen hierbei unveränderlich sind. Dies geht schon aus den Lehren des ersten Bandes hervor.

Nachdem ich selbst schon früher auf die Möglichkeit der Berechnung der Stabspannungen auf diesem Wege hingewiesen hatte, gab Müller-Breslau ein einfaches Verfahren dafür an, wie die Knotenpunktswege — zunächst wenigstens bei den gewöhnlich vorkommenden, nicht allzu verwickelten Fällen — bequem ermittelt werden können. Hierdurch wurde das Verfahren erst praktisch nutzbar gemacht

In der Zeichnung muß man sich die Knotenpunktswege bei einer unendlich kleinen Lagenänderung, um sie auftragen zu können, natürlich alle in demselben Verhältnisse vergrößert denken, so daß sie durch endliche Strecken zur Darstellung gebracht werden können. Man macht dies so, daß man an Stelle der Knotenpunktswege die Knotenpunktsgeschwindigkeiten abträgt. Die Knotenpunktswege können aus diesen durch Multiplikation mit dem Zeitelemente dt, während dessen man sich die Bewegung ausgeführt denkt, erhalten werden.

Man betrachte zunächst die Bewegung irgendeines Stabes AB in Abb. 97, der zu dem Mechanismus gehören mag. Jedenfalls kann die Bewegung in die unendlich benachbarte Lage als Drehung um irgendeinen Pol O aufgefaßt werden. Die Geschwindigkeiten AA'' und BB'' der Endknotenpunkte — oder, wenn man will, die im gleichen Verhältnisse vergrößerten Knotenpunktswege — stehen jedenfalls senkrecht zu den vom Pole aus gezogenen Strahlen OA und OB und sie verhalten sich zueinander wie die Längen dieser Strahlen, da der Zentriwinkel, um den die Drehung erfolgt, in beiden Fällen derselbe ist.

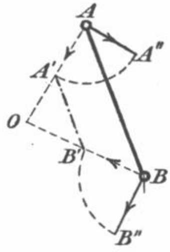

Abb. 97.

Anstatt die Geschwindigkeiten in jenen Richtungen anzutragen, die ihnen eigentlich zukommen, kann man sich beide um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers gedreht denken. Nach diesem, zwar ganz willkürlichen, aber für die weiteren Untersuchungen sehr vorteilhaften Verfahren erhalten wir die auf die Polstrahlen selbst fallenden Strecken AA' und BB' als Darstellungen der Geschwindigkeiten oder auch der Knotenpunktswege bei der betrachteten Lagenänderung. Man bezeichnet diese Strecken als die „senkrechten Geschwindigkeiten“ der Knotenpunkte. Sind sie gegeben, so kann man daraus nicht nur die Größen der Geschwindigkeiten (oder die verhältnismäßigen Größen der Knotenpunktswege), sondern auch deren Richtungen erkennen. Zu diesem Zwecke muß man sie nur nachträglich um einen rechten Winkel — entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne — zurückdrehen.

Die senkrechten Geschwindigkeiten fallen, wie man sieht, stets auf die vom Pole nach den bewegten Punkten gezogenen Strahlen. Außerdem geht die Verbindungslinie der Endpunkte A' und B' parallel zur Stabrichtung AB. Denn wir erkannten vorher schon, daß sich die Geschwindigkeiten, also auch AA' und BB' wie OA und OB zueinander verhalten, und dies ist die Bedingung dafür, daß $A'B'$ zu AB parallel ist. Kennt man also von der Bewegung eines Stabes den Pol O und die senkrechte Geschwindigkeit AA' des einen Endknotenpunktes, so kann man durch Ziehen der Parallelen sofort auch die des andern erhalten.

Auf Grund dieser Bemerkungen vermag man gewöhnlich leicht die Bewegung des Mechanismus, den man durch Beseitigung eines Stabes aus einem statisch bestimmten Fachwerke erhält, deutlich und für die Berechnung auf Grund des Prinzipes der virtuellen

Geschwindigkeiten ausreichend zu beschreiben. Als Beispiel dafür möge die schon vorher betrachtete sechseckige Grundfigur dienen, die in Abb. 98 von neuem dargestellt ist. Nur der in Abb. 94 mit *c* bezeichnete Stab zwischen den Knotenpunkten 3 und 6 ist in Abb. 98 bereits weggelassen oder wenigstens nur durch eine punktierte Linie angedeutet. Als festgehalten denkt man sich am besten einen der Stäbe, die mit dem beseitigten nicht in einem Knotenpunkte zusammenstoßen. In Abb. 98 wurde dazu Stab 1, 2 gewählt; eine daneben angebrachte Schraffierung soll daran erinnern, daß dieser Stab mit der Konstruktionsebene fest verbunden und daher als Gestell des aus den übrigen Stäben gebildeten Mechanismus anzusehen ist.

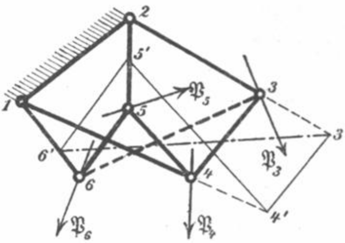

Abb. 98.

Man betrachte zunächst den Stab 5, 6. Der Knotenpunkt 5 vermag nur einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt 2 und dessen Halbmesser 2, 5 ist; ebenso kann sich der Punkt 6 nur auf einem um den Mittelpunkt 1 beschriebenen Kreise bewegen. Hieraus folgt, daß der Pol der Bewegung des ganzen Stabes 5, 6 auf dem Schnittpunkte der Richtungslinien von 2, 5 und 1, 6 liegt. Der Stab 5, 6 dreht sich, wie man auch sagen kann, gegen die Konstruktionsebene um ein imaginäres Gelenk, das aus den Stäben 2, 5 und 1, 6 gebildet wird. In der Zeichnung ist der Pol oder der Gelenkpunkt fortgelassen. Die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 6 fallen auf die Richtungslinien der Stäbe 2, 5 und 1, 6 oder auf deren Verlängerungen, je nachdem man sich die Drehung im einen oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen denkt. Auf Sinn und Größe der Drehung oder der Geschwindigkeit kommt es hier nicht an, wenn wir nur darauf achten, daß die Bewegungen aller übrigen Glieder damit in Übereinstimmung stehen. Wir können daher einen Punkt $6'$ beliebig auf 1, 6 annehmen, so daß $6\,6'$ die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 6 angibt. Zieht man $6', 5'$ parallel zu 6, 5, so gibt $5\,5'$ die zugehörige senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 an.

Hierauf gehe man zum Stabe 4, 5 über. Auch dessen Endpunkte können sich nur auf Kreisen um die Mittelpunkte 1 und 2 bewegen; er hängt, wie der vorige, in einem imaginären Gelenke mit dem festgestellten Stabe 1, 2 zusammen, das als Schnittpunkt der Stabrichtungen 1, 4 und 2, 5 gefunden werden kann. Die senkrechten Geschwindigkeiten von 4 und 5 müssen daher auf diesen beiden Stabrichtungen liegen. Die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 bei der angenommenen Bewegung kennen wir aber bereits und wir brauchen daher nur die Parallele $5', 4'$ zu $5, 4$ zu ziehen, um die senkrechte Geschwindigkeit $44'$ auf der Richtunglinie des Stabes $1, 4$ zu erhalten.

Dieselbe Betrachtung läßt sich endlich auch noch für den Stab $3, 4$ wiederholen, dessen Endpunkte ebenfalls durch Stäbe mit 1 und 2 verbunden sind. Auch hier müssen die senkrechten Geschwindigkeiten beider Endpunkte auf den Richtungslinien der Verbindungsstäbe enthalten sein und da $4, 4'$ bereits bekannt ist, erhalten wir die senkrechte Geschwindigkeit $3, 3'$ des Punktes 3 durch Ziehen der Parallelen $4', 3'$ zu $4, 3$.

Hiermit sind die zusammengehörigen Lagenänderungen aller beweglichen Knotenpunkte des Mechanismus genau bezeichnet und wir können dazu übergehen, die Spannung des im Mechanismus beseitigten Fachwerkstabes $3, 6$ auf Grund des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten zu ermitteln.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, wie man bei diesem kinematischen Verfahren erkennt, ob ein Ausnahmefall vorliegt. Zu diesem Zwecke vergleicht man die Bewegungen der Knotenpunkte 3 und 6 miteinander, zwischen denen der vorher beseitigte Stab wieder eingesetzt werden soll. Wenn die durch die senkrechten Geschwindigkeiten $3, 3'$ und $6, 6'$ beschriebene Bewegung der beiden Knotenpunkte durch das Einsetzen des Stabes nicht gehindert wird, liegt der Ausnahmefall vor. Nun bedenke man, daß der Stab $3, 6$, falls er der bisher besprochenen unendlich kleinen Bewegung kein Hindernis bereiten soll, sich dabei jedenfalls selbst um irgendeinen Pol dreht und daß die senkrechten Geschwindigkeiten seiner beiden Endpunkte auf den von diesen nach dem Pole gezogenen Strahlen enthalten sein müssen. Der Pol könnte daher nur der Schnittpunkt der Richtungslinien von $3, 3'$ und $6\ 6'$ sein. Zugleich müßte aber, wie wir schon zu Anfang des Paragraphen fanden, die Verbindungslinie $3', 6'$ parallel zur Stabrichtung $3, 6$ sein. Also nur dann, dann aber auch immer, wenn die Verbindungslinie $3', 6'$ parallel zu $3, 6$ ausfällt, kann die vorher besprochene unendlich kleine Bewegung des Mechanismus auch noch von dem Fachwerke, das man durch Einziehen des Stabes $3, 6$ erhält, ausgeführt werden, d. h. das Fachwerk ist nicht steif, sondern es liegt der Ausnahmefall vor.

Man kann diesem Schlusse auch noch eine andere, anschaulichere Deutung geben. Man vergleiche nämlich die Figur 1, 2, 3', 4' 5', 6' mit der Fachwerksfigur 1, 2, 3, 4, 5, 6. In beiden laufen alle Seiten und Diagonalen in gleicher Richtung, mit Ausnahme der letzten Seiten 3, 6 und 3', 6'. Liegt aber der Ausnahmefall vor, so gehen auch diese in gleicher Richtung. Kann man also zu der gegebenen Grundfigur eine zweite Figur von gleicher Gliederung zeichnen, deren Seiten sämtlich zu denen der Grundfigur parallel laufen, so liegt der Ausnahmefall vor. Das Fachwerk ist mit andern Worten steif, wenn seine Gestalt durch die Angabe der Gliederung und der Richtungen aller Stäbe bestimmt ist. Diesen Gedanken hat Schur weiter ausgeführt, indem er es als die Hauptaufgabe der allgemeinen Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerkes hinstellte, die Fachwerksfigur zu zeichnen, falls die Gliederung und die Stabrichtungen, sowie die Länge eines Stabes gegeben sind.

Um die Arbeiten zu berechnen, die von den äußeren Kräften $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ usf. während der unendlich kleinen Bewegung des Mechanismus geleistet werden, könnte man alle Wege 3, 3' usf. nachträglich wieder um einen rechten Winkel, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne, zurückdrehen, um sie in ihre wahren Richtungen zu bringen. Einfacher gelangt man aber auf Grund der folgenden Überlegung zum Ziele. In Abb. 99 ist von Abb. 98 nur der Knotenpunkt 6 herausgezeichnet mit der an ihm angreifenden Last $\mathfrak{P}_6$ und der senkrechten Geschwindigkeit 6, 6', die der Deutlichkeit wegen etwas größer gezeichnet ist als in der vorigen Figur.

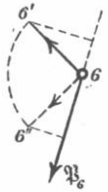

Abb. 99.

Zugleich ist 6 6' zurückgedreht nach 6, 6''. Die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ ist gleich der Größe von $\mathfrak{P}_6$ multipliziert mit der Projektion von 6, 6'' auf $\mathfrak{P}_6$. Projiziert man auch 6' auf $\mathfrak{P}_6$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, das dem mit der Hypotenuse 6, 6'' kongruent ist. Die Länge des Projektionsstrahles von 6' auf $\mathfrak{P}_6$ ist daher gleich der Projektion des Weges 6, 6'' auf $\mathfrak{P}_6$. Wir brauchen also 6, 6'' gar nicht erst zu zeichnen, um die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ angeben zu können. Es genügt, $\mathfrak{P}_6$ mit der Länge des von 6' aus gezogenen Projektionsstrahles zu multiplizieren. Dieses Produkt gibt aber das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}_6$ für den Momentenpunkt 6' an.

Ist die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ positiv, so ist auch das Moment positiv. Man erkennt dies zunächst aus Abb. 99. Es gilt aber auch für andere Lagen, wie man erkennt, wenn man sich $\mathfrak{P}_6$, das eine beliebige Richtung haben kann, in andere Lagen gedreht denkt. Wenn die Arbeit negativ oder Null wird, wird auch das Moment negativ oder Null und das Moment kann daher weiterhin an Stelle der Arbeit der Kraft gebraucht werden.

Durch diesen Tausch geht die kinematische Methode von Müller-Breslau in eine Momentenmethode über, die sich auch als eine Verallgemeinerung der Ritterschen Methode für die Berechnung der einfachen Fachwerke ansehen läßt, indem sie bei einfachen Fachwerken geradezu in diese übergeht. Man kann sie in der Tat auch anwenden und begründen, ohne auf die vorhergehenden kinematischen Betrachtungen, aus denen sie ursprünglich abgeleitet ist, irgendwie Bezug zu nehmen.

Nachdem der Linienzug $6', 5', 4'\ 3'$ wie vorher konstruiert ist, schreibt man nämlich für jeden dieser Punkte eine Momentengleichung an, die das Gleichgewicht der an dem zugehörigen Knotenpunkte 6 oder 5 usf. angreifenden Last mit den Stabspannungen ausdrückt. Man kann dabei der Vollständigkeit wegen auch noch die Punkte $1'$ und $2'$, die mit 1 und 2 selbst zusammenfallen, als Momentenpunkte mit aufführen, obschon für diese die Momente der dazu gehörigen Kräfte sämtlich verschwinden. Alle diese Momentengleichungen addiert man. In der Summe tritt das Moment jeder Stabspannung zweimal auf, z. B. das Moment von 5, 6 sowohl in bezug auf $5'$ als Moment der an 5 angreifenden Stabspannung, wie auch in bezug auf $6'$ für die Stabspannung an 6. Nach der Konstruktion der Punkte $6', 5'$ usf. sind aber die Hebelarme jedesmal gleich, mit Ausnahme jener, die zum Stabe 3, 6 gehören, während die Spannungen dem Wechselwirkungsgesetze zufolge an den beiden Endknotenpunkten entgegengesetzt gerichtet sind. In der Summe heben sich daher die Momente aller Stabspannungen mit jener einen Ausnahme gegeneinander fort und man behält eine Gleichung, in der nur noch die Spannung des Stabes 3, 6 als Unbekannte auftritt.

Um diese Gleichung in bequemer Form anschreiben zu können, möge der aus der Zeichnung in Abb. 98 zu entnehmende Hebelarm der Last $\mathfrak{P}_n$ am Knotenpunkte n in bezug auf n' mit p_n bezeichnet werden, wobei p_n positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem das Moment von $\mathfrak{P}_n$ positiv oder negativ ist. Ferner sei die Spannung des Stabes 3, 6 mit S bezeichnet, wobei ein positiver Wert eine Zugspannung bedeutet. Der Hebelarm von S in bezug auf $3'$ sei s_3 und dies sei dem Vorzeichen nach in Übereinstimmung mit dem Momente einer Zugspannung S am Knotenpunkte 3; ebenso bedeute s_6 den Hebelarm von S in bezug auf $6'$. Alle diese Hebelarme können nach Größe und Vorzeichen aus der Abbildung entnommen werden.

Die Momentengleichung (oder, genauer gesagt, die aus der Summierung aller einzelnen Momentengleichungen gewonnene Gleichung) lautet dann

$$S(s_3 + s_6) + \Sigma Pp = 0,$$

woraus

$$S = -\frac{\Sigma Pp}{s_3 + s_6} \tag{39}$$

folgt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn nachdem eine Stabspannung bekannt ist, kann man die übrigen leicht durch Zeichnen des Kräfteplanes ermitteln.

§ 39. Analytische Untersuchung des Ausnahmefalles.

Den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems lasse ich mit einem Knotenpunkte des Fachwerkes zusammenfallen und die Richtung der X-Achse soll stets durch einen zweiten Knotenpunkt gehen. Wenn sich das Fachwerk bewegt, folgt ihm das Koordinatensystem, so daß die beiden genannten Bedingungen in jedem Augenblicke erfüllt sind. Ich denke mir sowohl die Knotenpunkte als auch die Stäbe mit je einer besonderen Numerierung versehen. In Abb. 100 sind von dem ganzen Fachwerke nur zwei Knotenpunkte angegeben, die die Nummern i und k tragen, nebst dem zwischen ihnen verlaufenden Stabe g. Die übrigen Knotenpunkte und Stäbe möge man sich beliebig hinzudenken.

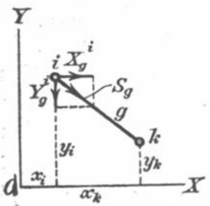

Abb. 100.

Die im Knotenpunkte i angreifende Last sei in zwei Komponenten in den Richtungen der Koordinatenachsen zerlegt, die ich mit X_0^i und Y_0^i bezeichne. Am Knotenpunkte i greifen ferner die Stabspannungen an, die man sich ebenfalls in rechtwinklige Komponenten zerlegt denken kann. Die Spannung des Stabes g sei mit S_g, die Komponenten der Spannung am Knotenpunkte i seien mit X_g^i und Y_g^i bezeichnet. Wenn man bedenkt, daß S_g positiv ist, wenn es eine Zugspannung bedeutet, erhält man aus Abb. 100

$$X_g^i = S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} = -S_g \frac{x_i - x_k}{l_g}, \tag{40}$$

wenn unter l_g die Länge des Stabes g verstanden wird. Ebenso ist

$$Y_g^i = -S_g \frac{y_i - y_k}{l_g}. \tag{41}$$

Der Stab g greift auch am Knotenpunkte k an und für diesen erhält man die Spannungskomponenten

$$X_g^k = -S_g \frac{x_k - x_i}{l_g}; \qquad Y_g^k = -S_g \frac{y_k - y_i}{l_g}. \tag{42}$$

Die Vorzeichen haben sich hier gegenüber dem vorigen Falle umgekehrt.

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze hat man ferner für jeden Stab eine Gleichung, die für Stab g

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - l_g^2 = 0 \tag{43}$$

lautet und die in der Folge kurz in der Form

$$f_g = 0 \tag{44}$$

angeschrieben sein mag. Differentiiert man f_g partiell nach x_i, so erhält man

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i} = 2(x_i - x_k), \quad \text{ebenso} \quad \frac{\partial f_g}{\partial x_k} = 2(x_k - x_i) \quad \text{usf.} \tag{45}$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen (40) bis (42) auch in der Form

$$X_g^i = -\frac{1}{2} \frac{S_g}{l_g} \frac{\partial f_g}{\partial x_i} \quad ; \quad Y_g^i = -\frac{1}{2} \frac{S_g}{l_g} \frac{\partial f_g}{\partial y_i} \text{ usf.} \tag{46}$$

anschreiben.

Die Last und die Stabspannungen am Knotenpunkte i müssen sich im Gleichgewichte halten. Die Summe der X-Komponenten aller Kräfte muß daher zu Null werden. Dies gibt eine Gleichung von der Form

$$X_0^i + \Sigma X_g^i = 0$$

oder, wenn man für die X_g^i ihre Werte nach Gl. (46) einsetzt,

$$\sum \frac{S_g}{2 l_g} \frac{\partial f_g}{\partial x_i} = X_0^i. \tag{47}$$

Die Summe auf der linken Seite ist über alle Stäbe zu erstrecken, die vom Knotenpunkte i ausgehen. Anstatt dessen kann man sie aber auch auf alle Stäbe ausdehnen, die überhaupt im Fachwerke vorkommen. Ein Stab, der nicht vom Knotenpunkte i ausgeht, vermag zwar zur Komponentengleichung (47) nichts beizusteuern; in der Tat wird aber auch das Glied, das man formell in Gl. (47) für ihn beibehält, zu Null, da der partielle Differentialquotient von f_g nach einer in dieser Funktion gar nicht vorkommenden Knotenpunkts-Koordinate stets zu Null wird. Diese Bemerkung erleichtert die weitere Betrachtung erheblich: wir brauchen uns nicht darum zu kümmern, welche Stäbe von einem Knotenpunkte, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ausgehen, sondern können so rechnen, als wenn alle Stäbe des Fachwerkes an ihm angriffen, weil der Ausdruck, den wir für die Spannungskomponenten aufgestellt haben, schon so gebaut ist, daß er von selbst für alle Stäbe verschwindet, die mit dem betreffenden Knotenpunkte nichts zu tun haben. Ausführlicher geschrieben würde demnach Gl. (47) lauten

$$\frac{S_1}{2l_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{S_2}{2l_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{S_g}{2l_g}\frac{\partial f_g}{\partial x_i}+\cdots+\frac{S_m}{2l_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=X_0^i, \tag{48}$$

worin sich das erste Glied der linken Seite auf den Stab mit der Nummer 1 bezieht usf., so daß alle Stäbe in der Gleichung vertreten sind.

Für jeden Knotenpunkt haben wir zwei Komponentengleichungen von dieser Form, mit Ausnahme des Knotenpunktes, der mit dem Ursprunge zusammenfällt, für den wir keine Gleichung anschreiben, und des Knotenpunktes, durch den die X-Achse gelegt wurde, für den wir nur eine Komponentengleichung in der X-Richtung bilden. Die andern $2n-3$ Gleichungen genügen nämlich, wie wir von früher her wissen, bereits, um die unbekannten Stabspannungen zu berechnen, während die drei ausgelassenen Gleichungen dazu verwendet werden können, die zugehörigen Lastkomponenten an den festgehaltenen Knotenpunkten so zu berechnen, daß sie mit den übrigen ganz beliebig gewählten Lasten ein Gleichgewichtssystem herstellen.

Nach der Lehre von den Gleichungen erhält man aber bei beliebig gegebenen endlichen Werten der X_0^i usf. nur dann eindeutige und endliche Werte für die Unbekannten, als die wir hier die $\frac{S_1}{2l_1}, \frac{S_2}{2l_2}, \ldots, \frac{S_g}{2l_g} \ldots$ auffassen können, wenn die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist. Wir bilden diese Determinante; sie ist von der Form

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Darin bedeutet ξ allgemein eine Knotenpunktskoordinate, also z. B. x_i oder y_i und zwar natürlich immer jene, die zu dem Knotenpunkte und der Koordinatenrichtung gehört, worauf sich die betreffende Komponentengleichung bezieht.

Für die praktische Ausrechnung, um etwa für einen bestimmten, genau bezeichneten Fall nachzuweisen, ob der Ausnahmefall vorliegt oder nicht, wäre Gl. (49) viel zu umständlich. Für die Ableitung eines allgemein gültigen Satzes, die wir hier anstreben, ist die Determinantenform aber recht bequem.

Wir betrachten jetzt das Fachwerk nach seinem geometrischen Verhalten. Denkt man sich jede Stablänge ein wenig geändert, so wird auch die Fachwerkfigur eine kleine Gestaltänderung erfahren. Bezeichnet man mit δl_g die unendlich kleine Änderung von l_g und mit δx_i, $\delta y_i \ldots$ die Änderungen der Knotenpunktskoordinaten, so erhält man aus Gl. (43) durch Differentiieren

$$(x_i - x_k)\,\delta x_i + (x_k - x_i)\,\delta x_k + (y_i - y_k)\,\delta y_i + (y_k - y_i)\,\delta y_k = l_g \delta l_g. \tag{50}$$

Wir denken uns für jeden Stab eine solche Gleichung angeschrieben, betrachten die δl als gegeben und lösen die Gleichungen nach den Unbekannten δx_i, δy_i usf. oder, nach der vorher schon gebrauchten Bezeichnung, allgemeiner nach den Unbekannten $\delta\xi$ auf. Die Zahl der Unbekannten ist nämlich gleich $2n-3$, da durch die Art, wie wir das Koordinatensystem gegen die Figur festlegten, drei Verschiebungskomponenten gleich Null sind und daher nicht unter den Unbekannten auftreten. Wir haben demnach ebensoviele Gleichungen ersten Grades, als Unbekannte vorkommen.

Mit Benutzung der durch Gl. (45) eingeführten Differentialquotienten läßt sich Gl. (50) auch schreiben

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_g}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_g}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_g}{\partial y_k}\delta y_k = 2l_g\delta l_g.$$

Auch hier brauchen wir uns aber nicht darauf zu beschränken, nur jene Glieder anzuführen, die wirklich in der Gleichung vorkommen, sondern wir können, um auf eine symmetrische Form zu kommen, auch noch eine Reihe von Gliedern mit aufnehmen, von denen jedes schon seiner Definition nach den Wert Null hat. Wir schreiben also die Gleichung in der Form

$$\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\delta\xi_m = 2l_g\delta l_g,$$

worin nun jede der $2n-3$ oder m Unbekannten $\delta\xi$ durch ein Glied vertreten ist, obschon sich nur vier dieser Glieder von Null unterscheiden. Das vollständige System der $2n-3$ Gleichungen, die nach den $\delta\xi$ aufzulösen sind, läßt sich in dem Schema

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m}\delta\xi_m = 2l_1\delta l_1\\
\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m}\delta\xi_m = 2l_2\delta l_2\\
\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\delta\xi_m = 2l_g\delta l_g\\
\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac{\partial f_m}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m}\delta\xi_m = 2l_m\delta l_m
\end{array}\right\} \qquad (51)$$

zusammenfassen. Wenn die Gleichungen unabhängig voneinander sind und sich nicht widersprechen, lassen sie sich nach den Unbekannten auflösen. Man erkennt dies daran, ob die Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix} \tag{52}$$

von Null verschieden ist. Hat sie einen von Null verschiedenen Wert, so müssen auch alle $\delta\xi$ Null sein, wenn man alle δl gleich Null setzt. In diesem Falle sind keine unendlich kleinen Knotenpunktsverschiebungen möglich, ohne daß sich die Stablängen um Größen von derselben Ordnung änderten, d. h. das Fachwerk ist steif. Der Ausnahmefall tritt dagegen ein, sobald die Determinante Δ' zu Null wird.

Vergleicht man Δ' in Gl. (52) mit Δ in Gl. (49), so findet man, daß sich beide Determinanten nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die Reihen mit den Zeilen vertauscht sind. Hierdurch wird aber nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie an dem Werte der Determinante nichts geändert. Die Bedingung dafür, daß die Stabspannungen für jede beliebige Belastungsart eindeutige, endliche Werte annehmen, ist daher identisch mit der Bedingung, daß das Fachwerk unverschieblich ist und wir haben damit den Satz bewiesen:

Ein Fachwerk, das nur die notwendige Zahl von Stäben enthält und stabil ist, ist auch statisch bestimmt und es ist umgekehrt auch stabil, wenn es statisch bestimmt ist, d. h. wenn man für jede beliebig gegebene Belastung ein System endlicher Stabspannungen anzugeben vermag, durch das an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird.

Zu demselben Schlusse waren wir zwar auch vorher schon in allen darauf hin untersuchten Fällen gelangt; immerhin ist es aber wertvoll, einen Beweis für den Satz zu besitzen, der ganz allgemein gültig ist. Man ist dann sicher, daß kein Fall vorkommen kann, den man etwa außer acht gelassen hätte und in dem der Satz aufhörte, gültig zu sein. — Ich bemerke noch, daß der Satz auch für räumliche Fachwerke gültig ist und genau ebenso bewiesen werden kann.

§ 40. Die Fachwerkträger.

Eine starre Figur hat in ihrer Ebene drei Freiheitsgrade und wir müssen ihr daher drei Fesseln anlegen, um sie festzuhalten. Eine solche Fessel, die einen Grad der Freiheit aufhebt, kann darin bestehen, daß wir irgendeinem Knotenpunkte nur eine Verschiebung in einer bestimmten Richtung gestatten, indem wir ihn etwa längs einer Führung laufen lassen, die jede Verschiebungskomponente senkrecht dazu unmöglich macht. Wir nennen diese Führung eine Auflagerung, die dem Fachwerke dadurch auferlegte Bewegungsbeschränkung eine Auflagerbedingung und den Knotenpunkt, dem sie vorgeschrieben wird, einen Auflagerknotenpunkt.

Wenn ein Knotenpunkt vollständig festgehalten wird, werden dadurch zwei Freiheitsgrade aufgehoben und wir sagen daher, daß einem festen Auflagerpunkte zwei Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Man kann sich die feste Auflagerung nämlich auch dadurch bewirkt denken, daß man den Knotenpunkt nötigt, gleichzeitig auf zwei voneinander verschiedenen Auflagerbahnen zu bleiben, so daß er sich wegen der andern auf keiner von beiden bewegen kann.

Je nachdem man die drei Auflagerbedingungen auf drei oder nur auf zwei Auflagerpunkte verteilt, erhält man verschiedene Trägerarten. In der heutigen Praxis kommt freilich nur der zuletzt erwähnte Fall vor. Es würde aber nichts im Wege stehen, auch den andern zur Ausführung zu bringen, und da man nicht wissen kann, was die Zukunft auf diesem

Gebiete bringt, ist es immerhin nützlich, auch bei jenem für einen Augenblick zu verweilen.

Abb. 101 gibt den gewöhnlich vorkommenden Fall des „Balkenträgers“ an, bei dem ein Auflagerknotenpunkt ganz festgehalten ist, während sich der andere längs einer horizontalen Auflagerbahn verschieben kann. Von ihm unter-

Abb. 101.

Abb. 102.

scheidet sich der „Träger mit schiefer Auflagerung“ in Abb. 102 nur durch die in anderer Richtung geführte Auflagerbahn. In beiden Fällen vermag man die durch beliebige Lasten hervorgerufenen Auflagerkräfte nach den schon früher dafür gegebenen Lehren sofort zu berechnen und nachdem dies geschehen ist, hat man es nur noch mit der Ermittelung der Stabspannungen im Fachwerke für bekannte äußere Kräfte zu tun.

Eine der möglichen Trägerarten mit drei Auflagerknotenpunkten, denen nur je eine Auflagerbedingung vorgeschrieben ist, führt Abb. 103 vor. Als Auflagerpunkte der starren Figur sind die Punkte A, B, C anzusehen und die Auflagerbedingungen in den Punkten A und B werden hier durch die Stäbe AD und BE verwirklicht, die den Punkten kreisförmige Auflagerbahnen um die Mittelpunkte D und E vorschreiben. In das Fachwerk sind daher diese Stäbe bei jener Auffassung nicht mit einzurechnen.

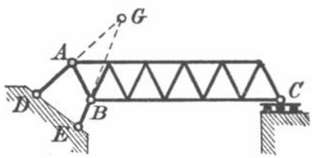

Abb. 103.

Man kann aber auch sagen, daß die Stäbe DA und EB zusammen ein imaginäres Gelenk G ausmachen, um das sich das Fachwerk gegen die Konstruktionsebene zu drehen vermöchte, wenn die Auflagerbedingung in C nicht im Wege wäre. Der Gelenkdruck in G gibt den auf das linke Widerlager übertragenen Auflagerdruck an. Er wird dahin zwar nicht als einzelne Kraft, sondern in zwei Komponenten durch die beiden Stabspannungen in AD und BE übergeleitet.

Wenn das Fachwerk an sich statisch bestimmt ist, erhält man in allen diesen Fällen auch statisch bestimmte Fachwerkträger. Zu solchen kann man aber auch noch auf andere Art gelangen. Schreibt man nämlich einem Fachwerke vier oder noch mehr Auflagerbedingungen vor, so erhält man zunächst einen statisch unbestimmten Fachwerkträger. Dieser kann aber dadurch wieder zu einem statisch bestimmten gemacht werden, daß man unter Beibehaltung der überzähligen Auflagerbedingungen eine entsprechende Zahl von Stäben fortnimmt.

Auf diese Art entsteht der häufig angewendete Fachwerkbogen mit drei Gelenken in Abb. 104. Die beiden Auflagerknoten A und B sind vollständig festgehalten; es sind also vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Denkt man sich den punktiert gezeichneten Stab DE zugefügt, so geht die Trägerfigur in ein einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk über. Die Berechnung der unbekannten Auflagerkräfte und daher auch die Berechnung der Stabspannungen, die zu einer gegebenen Belastung gehören, könnte dann nur auf Grund der Elastizitätslehre erfolgen. Wenn man aber den Stab DE fortläßt, ist der Träger statisch bestimmt, weil hiermit eine der Unbekannten, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für alle Knotenpunkte ermitteln lassen müssen, wieder fortfällt, so daß wieder ebensoviele Gleichungen als Unbekannte zur Verfügung stehen. — Auf die besondere Gestalt des Trägers kommt es übrigens hierbei nicht an; wesentlich ist nur, daß der Träger aus zwei Scheiben aufgebaut ist, die für sich genommen statisch bestimmte Fachwerke darstellen, daß diese Scheiben in einem Scheitelgelenke C zusammenhängen und mit je einem Endknotenpunkte fest aufgelagert sind. Da sich die

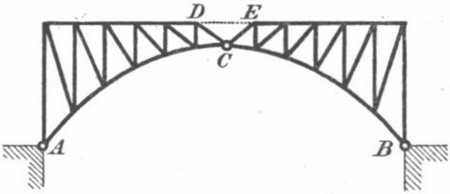

Abb. 104.

Scheiben bei einer elastischen Formänderung um ihre Auflagerpunkte ohne Widerstand zu drehen vermögen, bezeichnet man diese Auflagerpunkte ebenfalls als Gelenke und zwar als die „Kämpfergelenke" des Dreigelenkbogens.

Ein anderes Beispiel zeigt Abb. 105. Hier sind vier Auflagerbedingungen auf den festgehaltenen Knotenpunkt A und die auf Walzenlager gesetzten Auflagerpunkte B und C verteilt. Auch hier wird die Trägerfigur aus zwei Scheiben gebildet, die im Gelenke D zusammenhängen. Fügte man den zwischen

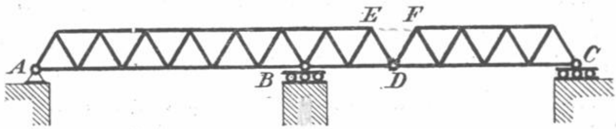

Abb. 105.

E und F fortgelassenen Stab hinzu, so ginge die Trägerfigur in ein statisch bestimmtes Fachwerk, der Träger selbst aber in einen statisch unbestimmten über. Der Träger in Abb. 105 ist ein Gerberscher Gelenkträger, für den die Berechnung der Auflagerkräfte bereits im zweiten Abschnitte auseinandergesetzt wurde. Nachdem die Auflagerkräfte bekannt sind, ergeben sich die Stabspannungen auf einfache Weise, z. B. durch Zeichnen eines Kräfteplanes.

Ein Beispiel mit fünf Auflagerbedingungen ist in Abb. 106 dargestellt. Als Auflagerpunkte sind der festgehaltene Knotenpunkt A, der auf Walzen verschiebliche B und die durch die Stäbe EC und FD auf Kreisbögen geführten Knotenpunkte C und D aufzufassen. Die

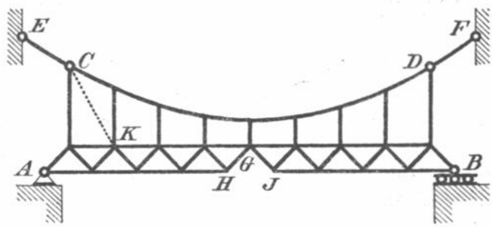

Abb. 106.

Stäbe CE und DF sind hiernach in die Fachwerkfigur nicht mit einzurechnen, sie dienen vielmehr nur zur Verwirklichung der Auflagerbedingungen. Man überzeugt sich leicht, daß die zwischen den Auflagerpunkten A, C, D, B liegende Trägerfigur zwei Stäbe weniger hat, als zur Aussteifung nötig wären, wenn nicht zwei überzählige Auflagerbedingungen hinzukämen. Anstatt die Knotenpunkte und die Stäbe abzuzählen, kann man hierbei davon ausgehen, daß die Einschaltung eines Stabes zwischen H und J den unteren Teil, für sich betrachtet, in ein einfaches statisch bestimmtes Fachwerk umwandeln würde. Um die Knotenpunkte C und D und die zwischen ihnen liegenden hieran anzuschließen, genügen die vorhandenen Stäbe nicht. Man müßte dazu etwa noch einen Stab CK einführen. Dann hätte man aber in der Tat wieder ein einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk vor sich, denn zunächst wäre der Punkt C durch zwei Stäbe mit dem unteren Teile verbunden, an C und den unteren Teil wäre der folgende Knotenpunkt durch zwei Stäbe angeschlossen und so fort bis zum andern Ende bei D.

Als jene Stäbe, die aus dem statisch bestimmten Fachwerke entfernt und durch zwei überzählige Auflagerbedingungen ersetzt sind, kann man demnach HJ und CK betrachten, obschon die Wahl auch noch anders getroffen werden könnte.

Träger von der Gliederung der Abb. 106 werden bei der Errichtung von sogenannten versteiften Hängebrücken verwendet. Die die Figur nach oben hin abschließenden Stäbe werden nur auf Zug beansprucht und man kann sie daher auch aus Seilen oder Ketten herstellen. Der von ihnen gebildete Linienzug mag daher die „Kette" genannt werden. An der Kette ist der untere „Versteifungsträger" durch „Hängeeisen" angehängt. Die Hängeeisen sind hier in lotrechter Stellung angenommen und sie vermögen daher auf die Kette nur lotrechte Lasten zu übertragen.

Zwischen den Spannungen in den Hängeeisen und den Kettenspannungen bestehen die früher untersuchten einfachen Beziehungen zwischen den Lasten und den Seilspannungen in einem Seilecke. Wählt man die Gestalt der Kette so, daß ihre Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, so können alle Hängeeisen nur gleich große Spannungen aufnehmen. Nimmt der untere Träger eine gleichförmig verteilte Last auf, so wird diese ausschließlich auf die Kette übertragen. Dies folgt daraus, daß ein Spannungsbild dieser Art an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellt und daß bei einem statisch bestimmten Träger nur ein einziges Spannungsbild möglich ist, das diese Bedingung erfüllt. Die ganze Eigenlast wird daher ebenso wie die gleichförmig verteilte Gesamtlast von der Kette aufgenommen. Diese stellt daher den wichtigsten Teil der ganzen Konstruktion dar. Der untere Träger wird nur bei ungleichförmig verteilten Lasten in Mitleidenschaft gezogen; daher kommt seine Bezeichnung als Versteifungsträger der Kette.

Wird ein beliebig gegebenes Lastensystem aufgebracht, so denke man sich, um die Auflagerkräfte und Stabspannungen zu berechnen, die Hängeeisen durchschnitten und betrachte das Gleichgewicht des Versteifungsträgers, nachdem die Spannungen der Hängeeisen durch lotrechte Kräfte ersetzt sind, von denen man zunächst nur weiß, daß sie alle untereinander gleich sind. Bezeichnet man die Spannung eines Hängeeisens mit X und ihre Anzahl mit n, so bringt die von ihnen übertragene, nach oben gerichtete Gesamtlast an den Auflagern A und B für sich genommen negative Auflagerdrücke von der Größe $\frac{nX}{2}$ hervor. Dazu kommen die von dem gegebenen Lastensysteme herrührenden positiven Auflagerdrücke, die auf gewöhnliche Art leicht berechnet werden können.

Zur Ermittelung der Unbekannten X dient hierauf die Bedingung, daß im Gelenke G zwischen den beiden Scheiben, die den Versteifungsträger zusammensetzen, kein Moment übertragen werden kann. Man kann diese Bedingung etwa in einer Momentengleichung in bezug auf Punkt G für das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben zum Ausdrucke bringen, in der X als einzige Unbekannte auftritt.

Bezeichnet man allgemein die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man für die notwendige Stabzahl, also für die Zahl der Stäbe im statisch bestimmten Träger,

$$m = 2n - p; \tag{53}$$

denn diese Formel gilt zunächst für $p = 3$ und da man für jede weitere Auflagerbedingung einen Stab fortzunehmen hat, bleibt sie auch für größere Werte von p gültig. Natürlich muß man zugleich darauf achten, daß kein Ausnahmefall vorliegt.

§ 41. **Der Dreigelenkbogen.**

Für den schon im Anschlusse an Abb. 104 besprochenen Fachwerkbogen mit drei Gelenken soll die Betrachtung noch etwas weiter durchgeführt werden. Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Berechnung der Auflagerkräfte und des im Scheitel übertragenen Gelenkdruckes, denn die Spannungen in den beiden Scheiben können, nachdem die äußeren Kräfte gefunden sind, auf bekannte Weise ermittelt werden. Da Gestalt und Gliederung der Scheiben für die Ermittlung der Auflagerkräfte gleichgültig sind, wurden die Scheiben in Abb. 107 nur durch schraffierte Flächen von beliebigem Umrisse angegeben.

In Abb. 107 ist angenommen, daß nur eine Einzellast an einer der beiden Scheiben angebracht sei. Um die von ihr hervorgerufenen Gelenkdrücke zu ermitteln, bedenke man, daß an der unbelasteten Scheibe nur zwei Kräfte angreifen, die in den Gelenken B und C auf sie übertragen werden. Damit Gleichgewicht bestehe, müssen beide in dieselbe Richtungslinie, also in die Verbindungslinie der Punkte B und C fallen. Hiermit ist die Richtung des Gelenkdruckes in C auch für die andere Scheibe bekannt. An dieser halten sich drei Kräfte im Gleichgewichte, deren Richtungslinien sich in einem Punkte treffen müssen. Verlängert man also BC bis zum Schnitte mit der Richtungslinie der Last P, so muß durch diesen Punkt auch der in A übertragene Auflagerdruck gehen. Es bleibt nur noch übrig, die Kraft P nach den beiden Richtungslinien zu zerlegen, was mit Hilfe eines Kräftedreieckes geschehen kann.

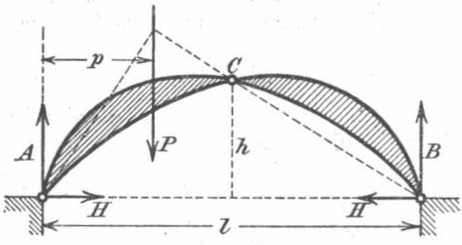

Abb. 107.

Anstatt dessen kann man die durch P hervorgerufenen Auflagerkräfte auch durch Rechnung bestimmen. Dabei sei vorausgesetzt, daß die Auflager A und B in gleicher Höhe liegen. Zerlegt man jeden Auflagerdruck in eine vertikale und eine horizontale Komponente, so folgt zunächst aus der Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Trägers gegen Verschieben in der horizontalen Richtung, daß die beiden Horizontalkomponenten H von gleicher Größe sein müssen, wenigstens dann, wenn die Last P lotrecht gerichtet ist. Die vertikalen Komponenten erhält man aus Momentengleichungen für die Auflagerpunkte zu

$$A = P\frac{l-p}{l}; \quad B = P\frac{p}{l},$$

also ebensogroß, als wenn die Last P an einem Balkenträger angebracht wäre, der die gleiche Spannweite überdeckte.

Um den Horizontalschub H zu finden, betrachtet man das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben für sich. In bezug auf C als Momentenpunkt erhält man für die unbelastete Scheibe die Momentengleichung

$$Hh = B\frac{l}{2} \quad \text{und daher} \quad H = \frac{Pp}{2h}.$$

Diese Gleichung gilt indessen nur so lange, als p zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ liegt. Wird p größer, so ist dafür der Abstand $l - p$ vom andern Auflager einzuführen und der Ausdruck für H lautet

$$H = \frac{P(l-p)}{2h}.$$

Trägt man die Abstände p als Abszissen und den von der Lasteinheit, wenn sie an der Stelle p angebracht wird, hervorgerufenen Horizontalschub als Ordinate in einem beliebigen Maßstabe auf, so erhält man die in Abb. 108 gezeichnete graphische Darstellung für das Abhängigkeitsgesetz zwischen dem Horizontalschube und der Laststellung.

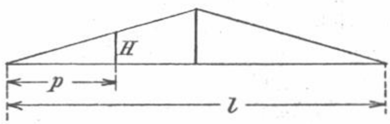

Abb. 108.

Die gebrochene Linie, die die Endpunkte aller Ordinaten verbindet, wird als die Einflußlinie für H bezeichnet. Mit Hilfe der Einflußlinie kann man für jedes beliebige System lotrechter Lasten den zugehörigen Horizontalschub berechnen, indem man jede Last mit der Verhältniszahl multipliziert, die von der auf ihrer Richtungslinie gelegenen Ordinate der Einflußlinie angegeben wird, und alle Produkte addiert.

Denkt man sich bei einem beliebig gegebenen Lastensysteme den Auflagerdruck am linken Auflager mit der nächst gelegenen Last zusammengesetzt, die Resultierende mit der folgenden Last usf., so erhält man ein Seileck. Da sich auch der Gelenkdruck im Scheitelgelenke und der Auflagerdruck am andern Trägerende unter diesen Resultierenden befinden, muß das Seileck auch durch diese Gelenkpunkte gehen. Die Aufgabe, die Gelenkdrücke für den Dreigelenkbogen zu ermitteln, kommt daher im wesentlichen auf dasselbe hinaus wie die Aufgabe, zu gegebenen Lasten ein Seileck zu zeichnen, das durch drei vorgeschriebene Punkte geht.

Für die Lösung dieser einfachen Aufgabe hat man schon viele Wege ausgedacht. Man kann z. B. mit einem Seilecke beginnen, das zunächst nur durch einen der drei Punkte geht, dann unter Benutzung des in § 11 bewiesenen Satzes durch Verschieben des Poles im Kräfteplane ein zweites daraus ableiten, das durch zwei Punkte geht und durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens ein drittes, das alle drei Bedingungen erfüllt.

Ein anderes Verfahren besteht darin, die gegebenen Lasten zunächst durch ein beliebiges Seilpolygon zu verbinden und mit dessen Hilfe (nach § 10) sowohl die Resultierenden $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ der an der linken und rechten Scheibe, einzeln genommen, angreifenden Lasten als auch die Gesamtresultierende $\mathfrak{R}$ aller Lasten zu ermitteln. Hierauf beachte man, daß sich die Gelenkdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die zu den Gelenken A, B, C gehören, paarweise auf den Richtungslinien der drei Resultierenden schneiden müssen, nämlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_r$. Die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmen demnach ein Dreieck, dessen Seiten durch die Punkte A, B, C gehen und dessen Ecken auf den drei parallelen (oder bei nicht parallelen Lasten wenigstens in einem Punkte sich schneidenden) Richtungslinien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_l$, $\mathfrak{R}_r$ liegen müssen. Wir haben also dieselbe Aufgabe zu lösen wie schon in § 37.

In Abb. 109 ist dies ausgeführt. Die Einzellasten und das zu ihrer Zusammensetzung dienende Seilpolygon sind weggelassen, die Richtungslinien der drei Resultierenden daher als unmittelbar gegeben angenommen worden. Man ziehe zuerst die Dreieckseite 1 von A aus in beliebiger Richtung, hierauf 2 durch C und 3 durch den Schnittpunkt von 1 mit $\mathfrak{R}$. Dadurch erhält man ein Dreieck

1, 2, 3, das fünf von den sechs Bedingungen erfüllt; nur die Seite 3 geht nicht durch den vorgeschriebenen Punkt B. Ein zweites Dreieck, das dieselben fünf Bedingungen erfüllt, wird von der durch A und C gezogenen Linie 4 gebildet. Durch den Schnittpunkt D von 4 mit 3 muß daher die dritte Seite jedes andern Dreieckes gehen, das denselben fünf Bedingungen genügt, also auch jenes, das zugleich die sechste Bedingung erfüllt. Man zieht hiernach 5 von B aus durch D und erhält so das gesuchte Dreieck 5, 6, 7. Nachdem die Richtungslinien der Gelenkdrücke bekannt sind, ergeben sich ihre Größen durch einfache Kräftezerlegungen.

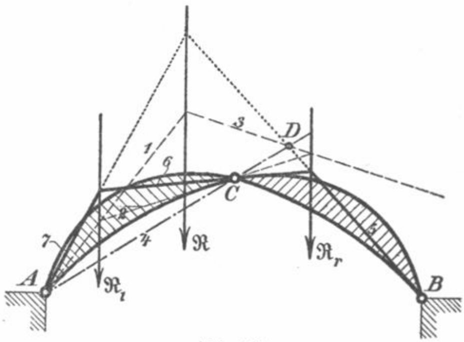

Abb. 109.

Natürlich kann man auch, nachdem $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ gefunden sind, nach dem vorher für eine Einzellast beschriebenen Verfahren zuerst die Gelenkdrücke ermitteln, die entstehen, wenn nur die linke Scheibe mit $\mathfrak{R}_l$ belastet, die andere aber unbelastet ist, hierauf dasselbe für $\mathfrak{R}_r$ wiederholen und die unter der ganzen Last entstehenden Gelenkdrücke durch geometrische Summierung aus den Einzelwerten bestimmen. Dieses Verfahren ist vielleicht noch das einfachste, bedarf aber gerade darum hier keiner weiteren Erläuterung.

Aufgaben.

29. Aufgabe. Die in Abb. 110^a gezeichnete Grundfigur trägt die Lasten P und P'; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Figur zählt sechs Knotenpunkte und neun Stäbe, also die notwendige Zahl. Sie kann durch Verbindung des Stabdreieckes 2, 3, 4 mit dem Dreiecke 7, 8, 9 durch die drei Stäbe 1, 5, 6 entstanden gedacht werden. Man kann also auch einen Schnitt legen, der nur drei Stäbe trifft (nämlich die drei Verbindungsstäbe), deren Richtungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden. Die Spannungen der Verbindungsstäbe findet man entweder nach der Ritterschen Methode oder mit Hilfe der Culmannschen Kräftezerlegung. Dabei liegt hier insofern noch ein besonderer Fall vor, als zwei der Verbindungsstäbe, nämlich 1 und 6, parallel zueinander verlaufen. In diesem Falle, der öfters vorkommt und deshalb hier noch besonders berührt werden sollte, vereinfacht sich das Culmannsche Verfahren erheblich. Denkt man sich nämlich einen horizontalen Schnitt durch die Mitte der Figur gelegt und betrachtet das Gleichgewicht der oberen Hälfte, so folgt sofort, daß die Resultierende aus P und 5 parallel zu 1 und 6 sein muß. Man findet daher 5 durch das nebenan gezeichnete Kräftedreieck und zwar als Druckspannung.

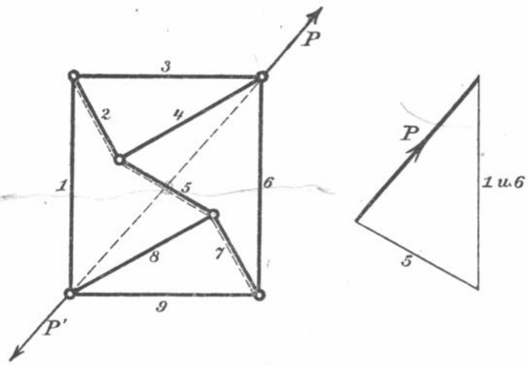

Abb. 110 a.

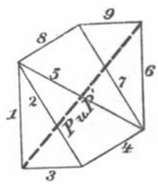

Abb. 110 b.

Nachdem 5 bekannt ist, kann man auch den Kräfteplan in Abb. 110^b auftragen, indem man mit den Dreiecken 5, 2, 4 und 5, 7, 8 beginnt, worauf sich die Dreiecke 2, 1, 3 und 7, 9, 6 anreihen. Der Kräfteplan ist ein reziproker. Die auf Druck beanspruchten Stäbe sind in Abb. 110^a durch beigesetzte Schattenstriche hervorgehoben. — Natürlich könnte man ganz ähnlich verfahren, wenn beliebig gegebene andere Lasten an dem Fachwerke angriffen. Man müßte dann zuerst jene Lasten, die an der oberen Hälfte der Figur angreifen, zu einer Resultierenden vereinigen, die an Stelle von P nach 5 und 1, 6 zu zerlegen wäre.

30. Aufgabe. An dem in Abb. 111 gezeichneten Fachwerke greifen die Lasten P und P' an; man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Die Aufgabe ist der vorigen ganz ähnlich; man kann sich die Figur durch Vereinigung der Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 durch die drei Verbindungsstäbe 7, 8, 9 entstanden denken. Daß hier das eine Dreieck von dem andern umschlossen wird, macht nur wenig aus. Der Schnitt, den man zu führen hat, um das Rittersche oder Culmannsche Verfahren anzuwenden und der die Figur in zwei Teile zerlegen muß, die nur durch drei Stäbe zusammenhängen, die nicht durch einen Punkt gehen, muß hier freilich ringförmig zwischen den Dreiecken 1, 2, 3 und 4, 5, 6 gezogen werden. Dies hindert aber die Anwendung des Verfahrens nicht: die Zerlegung von P nach den drei Richtungslinien 7, 8, 9 liefert sofort die Spannungen in den Verbindungsstäben.

Anstatt dessen kann man auch den Begriff des imaginären Gelenkes zur Lösung benutzen. Von den drei Stäben 7, 8, 9 z. B. hängt jeder mit dem andern durch zwei Stäbe oder, wie wir sagen können, in einem imaginären Gelenke zusammen. Die Gelenkpunkte sind in der Abbildung mit 7, 8, mit 8, 9 und mit 7, 9 bezeichnet. Auf den Stab 8 werden nur die Gelenkdrücke 7, 8 und 8, 9 übertragen; beide müssen daher gleich sein und in dieselbe Richtungslinie fallen. Zieht man die Verbindungslinie beider Gelenkpunkte, so kennt man damit auch für den Stab 9 die Richtungslinie des Gelenkdruckes 8, 9. Am Stabe 9 greifen außerdem noch die Last P und der Gelenkdruck 7, 9 an. Die drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden und hieraus erhält man auch die Richtung des Gelenkdruckes 7, 9. Mit Hilfe eines Kräftedreieckes (das in der Abbildung weggelassen wurde) erhält man auch die Größen der Gelenkdrücke und durch Zerlegung jedes Gelenkdruckes nach den Richtungen der beiden Stäbe, die das Gelenk bilden, die Stabspannungen.

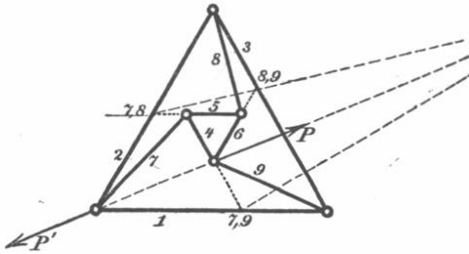

Abb. 111.

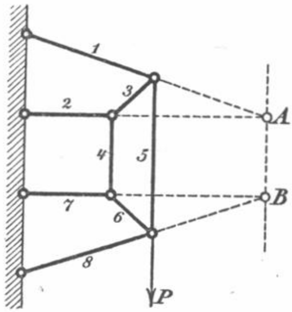

Abb. 112.

31. Aufgabe. An einer Wand ist in einer lotrechten Ebene das aus den Stäben 1 bis 8 bestehende Stabgerüst (Abb. 112) befestigt, das dazu bestimmt ist, die Last P aufzunehmen; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Wand ist als eine Scheibe aufzufassen, an die vier freie Knotenpunkte angeschlossen sind. Dazu braucht man acht Stäbe und diese sind auch vorhanden. Bei der Berechnung der Stabspannungen ergibt sich jedoch, daß diese unendlich groß werden und daraus folgt, daß ein Ausnahmefall vorliegt. Das Stabgerüst ist daher gar nicht tragfähig; wenigstens vermag es Lasten nur insoweit aufzunehmen, als es die Biegungsfestigkeit der Stäbe in Verbindung mit der Steifigkeit der Knotenpunkte zuläßt, d. h. nur geringe Lasten, die schon verhältnismäßig große Formänderungen herbeiführen.

Beseitigt man nämlich etwa Stab 5, um das Hennebergsche Verfahren anzuwenden, und bringt dafür irgendeinen geeignet gewählten Ersatzstab e an, so ist das hierdurch entstehende Fachwerk zwar tragfähig und die Stabspannungen lassen sich leicht ermitteln. Sobald man aber dann in der Richtungslinie des Stabes 5 eine Zugspannung von der Lasteinheit anbringt und einen zweiten Kräfteplan für diesen Belastungsfall zeichnet, findet man, daß der Stab e, wie er nun auch gewählt sein möge, hierbei spannungslos bleibt. Dies geht schon aus der Symmetrie der Figur hervor. Die zur horizontalen Symmetrieachse symmetrisch liegenden Stäbe erfahren Spannungen gleicher Größe und gleichen Vorzeichens und man kann auf diese Weise Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne den Ersatzstab e in Anspruch zu nehmen. Dies ist aber bei dem Hennebergschen Verfahren das Kennzeichen für den Ausnahmefall.

Noch einfacher und hier zugleich allgemeiner verwendbar ist die Untersuchung mit Hilfe der imaginären Gelenke. Stab 3 hängt mit der Wand im imaginären Gelenke A und Stab 6 mit der Wand in B zusammen. Außerdem sind noch 3 und 6 unter sich durch die beiden parallelen Stäbe 4 und 5 verbunden, die einem im unendlichen liegenden imaginären Gelenke C gleichwertig sind. Die drei Gelenke A, B, C liegen aber bei der in der Abbildung getroffenen Anordnung in einer Geraden und darin besteht bei dieser Art der Untersuchung das Kennzeichen des Ausnahmefalles.

Auch die Methode von Müller-Breslau führt schnell zum gleichen Ergebnisse. Man kann nämlich eine Figur zeichnen, die in der Gliederung und in allen Stabrichtungen mit der Stabfigur übereinstimmt, ohne ihr ähnlich zu sein.

32. Aufgabe. An iner Wand ist in einer lotrechten Ebene die in Abb. 113 gezeichnete, aus den Stäben 1 bis 8 bestehende, statisch bestimmte Stangenverbindung befestigt. Man soll die Stabspannungen berechnen, die von einer am unteren Knotenpunkte angebrachten Last von $P = 6000$ kg hervorgerufen werden.

Erste Lösung. Man beseitige etwa Stab 5 und bringe dafür den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Ersatzstab e an.

Dann zeichne man den Kräfteplan T für das dadurch erhaltene einfache Fachwerk. Dieser Kräfteplan besteht hier nur aus einem einzigen Dreieck. Betrachtet man nämlich den oberen Knotenpunkt, in dem die Stäbe 1 und 3 zusammenstoßen, so müssen deren Spannungen zu Null werden, da Stab 5 beseitigt ist und keine äußere Kraft an dem Knotenpunkte angreift. Geht man dann zum Knotenpunkte 2, 3, 4 weiter, so folgt, nachdem 3 als spannungslos erkannt ist, daß auch 2 und 4 spannungslos sein müssen; ebenso die Stäbe 7 und 6 am Knotenpunkte 4, 6, 7. Spannungen können daher im Kräfteplan T nur von den Stäben 8 und e aufgenommen werden.

Hierauf beseitigt man die Last P, bringt eine Zugspannung von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes 5

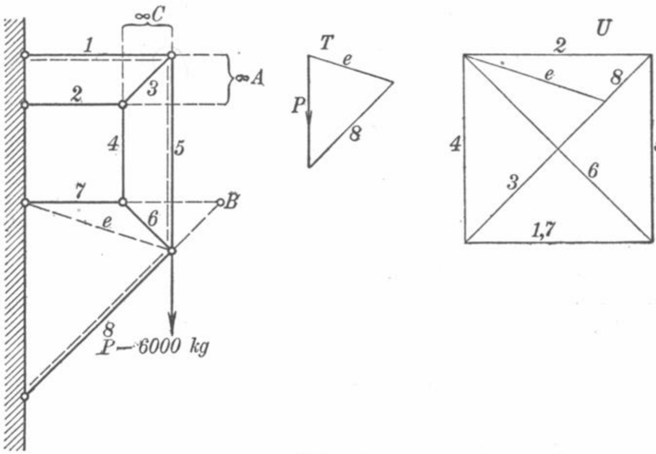

Abb. 113.

an und zeichnet den Kräfteplan u. Aus den Kräfteplänen entnimmt man

$$T_e = +\,4760 \text{ kg}, \qquad u_e = +\,0{,}794,$$

woraus $X = -\,6000$ kg folgt. Für die Stäbe 1, 2, 3, 4, 6, 7 findet man daraus die Spannung durch Multiplikation mit dem zugehörigen u der Reihe nach zu

$$-\,6000; \; +\,6000; \; +\,8460; \; +\,6000; \; +\,8460; \; +\,6000 \text{ kg}.$$

Für den Stab 8 erhält man die Spannung nach der Formel

$$S_8 = T_8 + u_8 X = -\,6380 - 0{,}346 \cdot 6000 = -\,8460 \text{ kg}.$$

Zweite Lösung. Stab 3 hängt mit der Wand durch die Stäbe 1 und 2 zusammen, die einem imaginären Gelenke A gleichwertig sind, das mit dem Schnittpunkt der Stabrichtungslinien 1 und 2 im Unendlichen zusammenfällt. Ebenso ist Stab 3 mit Stab 6 durch das aus den Stäben 4 und 5 gebildete, ebenfalls im Unendlichen liegende imaginäre Gelenk C verbunden und Stab 6 mit der Wand durch das von den Stäben 7 und 8 gebildete imaginäre Gelenk B. Bei dieser Auffassung der Figur erscheinen die Stäbe 3 und 6 als Hauptstäbe, die übrigen als Verbindungsstäbe. Das Gleichgewicht des Stabes 3 erfordert, daß die beiden an ihm angreifenden, durch A und C gehenden Gelenkdrücke in eine Gerade fallen, da eine äußere Kraft an diesem Stabe fehlt. Diese Gerade ist die unendlich ferne Gerade der Ebene. Jeder Gelenkdruck entspricht daher einer unendlich fernen und unendlich kleinen Kraft oder einem Kräftepaare. Daraus folgt, daß die Spannungen 1 und 2 gleich groß und von entgegengesetztem Vorzeichen sein müssen; ebenso 4 und 5. Am Stabe 6 wirken die beiden durch C und B gehenden Gelenkdrücke und die Last P. Nachdem bereits erkannt ist, daß der Gelenkdruck C einem Kräftepaar entspricht, folgt, daß auch P und der Gelenkdruck B ein Kräftepaar bilden müssen. Man zerlegt nun den hiermit bekannten Gelenkdruck B nach den Richtungen der Stäbe 7 und 8, womit man sofort $S_7 = + 6000$ und $S_8 = - 6000 \cdot \sqrt{2} = - 8460$ findet. Daran läßt sich ohne weiteres ein Kräfteplan S anschließen, der in der Abbildung weggelassen ist.

33. Aufgabe. Man soll für das in Abb. 114^a *gezeichnete Fachwerk, an dem sich die gegebenen äußeren Kräfte P, A und B im Gleichgewichte halten, die Stabspannungen nach dem Henneberg-schen Verfahren berechnen.*

Lösung. Man beseitigt hier am besten den Stab 1, weil sich dann die Berechnung am einfachsten gestaltet, und führt etwa den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Ersatzstab e ein. Da die Richtungslinien der Kräfte A und B hier in die Richtungen der Stäbe 2 und 12 fallen, braucht man für die zugehörigen Knotenpunkte gar keine Kräftedreiecke zu zeichnen; man weiß sofort, daß die Stäbe 3 und 13 spannungslos werden, während die Stäbe 2 und 12 die äußeren Kräfte A und B allein aufzunehmen haben. Da 3 spannungslos ist, müssen auch die beiden andern, mit ihm von demselben Knotenpunkte ausgehenden Stäbe 4 und 5 spannungslos sein und ebenso auf der andern Seite 10 und 11. Am Angriffspunkte von P bleiben hiernach nur die Spannungen von e und 8 übrig. Da aber P in die Richtung von 8 fällt, so ist auch e spannungslos. In dem einfachen Fachwerke, das wir durch die Stabvertauschung erhielten, geraten demnach unter der angegebenen Belastung nur die Stäbe 2, 6, 7, 8, 9 und 12 in Spannung.

Von diesen Ergebnissen interessiert uns zunächst nur der Umstand, daß im Spannungsbilde T, wie es in § 36 genannt wurde, die Spannung T_e des Ersatzstabes gleich Null ist. Zugleich erkennt man aber auch, daß dieser besondere Wert von T_e nur zu dieser besonderen Belastung gehört; bei anderm Lastangriffe würde auch e Spannung aufzunehmen haben.

Jetzt fragt es sich, ob etwa die Spannung u_e im Ersatzstabe, die durch eine längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes 1 angebrachte Zugspannung hervorgerufen wird, ebenfalls zu Null wird. Wird sie nicht zu Null, so ist nach Gl. (36), S. 193, was

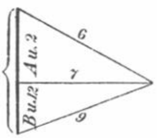

Abb. 114c.

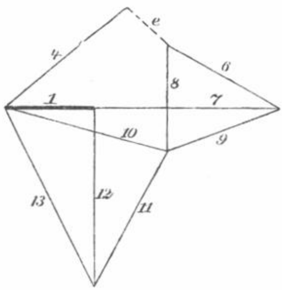

Abb. 114b.

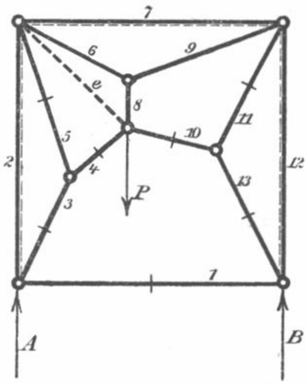

Abb. 114a.

auch sonst der Wert von u_e sein möge, jedenfalls die wirklich eintretende Spannung X des beseitigten Stabes gleich Null. Der Kräfteplan u läßt sich leicht zeichnen, indem man (Abb. 114^b) zuerst 1 gleich der Lasteinheit aufträgt, hierauf das Dreieck 1, 12, 13, dann das Dreieck 13, 10, 11, das Viereck 11, 12, 7, 9, das Dreieck 9, 6, 8 und schließlich das Viereck 8, 10, 4, e zufügt. Der Kräfteplan kann zugleich, wie es in der Abbildung geschehen ist, als reziproker konstruiert werden, da sich die Fachwerkfigur ohne weiteres in Polygone zerlegen läßt, so daß an jedem Stabe zwei aneinander grenzen. Nachdem u_e gefunden ist, hat es keinen Zweck, den Kräfteplan noch weiter zu führen, obschon dies leicht geschehen könnte. Überdies brauchen wir auch den Kräfteplan u im vorliegenden Falle nur, um uns zu überzeugen, ob u_e von Null verschieden ist.

Nachdem dies nachgewiesen ist, wissen wir, daß der Stab 1 in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke bei der gegebenen Belastung die Spannung Null hat. Der Kräfteplan S ist daher im vorliegenden Falle identisch mit dem schon vorher besprochenen, aber noch nicht gezeichneten Kräfteplane T. In Abb. 114[c] ist dies nachträglich geschehen und die Stabspannungen, die in dem gegebenen Fachwerke tatsächlich auftreten, können daraus unmittelbar entnommen werden. Gezogen sind die Stäbe 6, 8, 9, gedrückt die Stäbe 2, 7, 12; alle andern, die in Abb. 114[a] überdies durch kurze Querstriche gekennzeichnet sind, bleiben spannungslos.

Symmetrisch darf man das Fachwerk in Abb. 114[a] freilich nicht annehmen, sonst kommt man auf einen Ausnahmefall. Bei der hier vorausgesetzten Belastungsart wäre freilich auch dann noch Gleichgewicht ohne unendlich große Stabspannungen möglich. Das Gleichgewicht wäre aber labil und bei jeder Abweichung von der symmetrischen Belastung kämen unendlich große Stabspannungen vor. Man erkennt dies daraus, daß u_e bei der symmetrischen Anordnung zu Null wird, während T_e bei einer unsymmetrischen Belastung von Null verschieden ist.

Daß man gerade bei symmetrischen Figuren leicht auf Ausnahmefälle geführt wird, kann übrigens nicht überraschen, da die Symmetrie einer Figur selbst schon einen ausgezeichneten Fall bildet, der sich mit jenem andern leicht deckt.

34. Aufgabe. Der in Abb. 115[a] gezeichnete Dachbinder hat in der Mitte eine sechseckige, statisch bestimmte Grundfigur, da die drei sich in der Mitte kreuzenden Sechseckdiagonalen an der Kreuzungsstelle nicht miteinander verbunden sein sollen. Jeder Knotenpunkt des Obergurtes trägt eine Last von 3000 kg; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Spannungen der nicht zur Grundfigur gehörenden Stäbe können sofort mit Hilfe des Kräfteplanes in Abb. 115[b] gefunden werden. Wegen der symmetrischen Belastung genügte es, ihn nur für die linke Trägerhälfte bis zur Grundfigur hin fortzuführen; andernfalls müßte auch für die rechte Trägerhälfte der Kräfteplan in derselben Weise vom rechten Auflagerpunkte aus beginnend konstruiert werden.

Die Grundfigur ist in Abb. 115[c] in doppelter Größe herausgezeichnet. An ihren Knotenpunkten sind vor allem die äußeren Kräfte, also sowohl die Lasten von je 3000 kg, als die bereits aus Abb. 115[b] bekannten Spannungen der weggeschnittenen Stäbe anzubringen. Am links oben gelegenen Knotenpunkte ist nur der Druckstab 12 weggeschnitten. Dessen Spannung wurde im Kräfteplane Abb. 115[b] mit der Last von 3000 kg zu einer Resultieren-

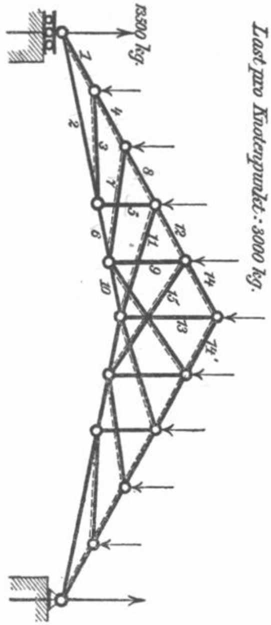

Abb. 115 a.

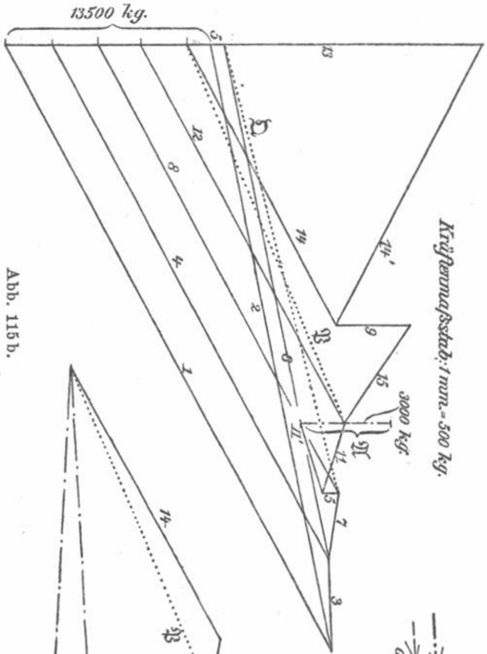

Abb. 115 b.

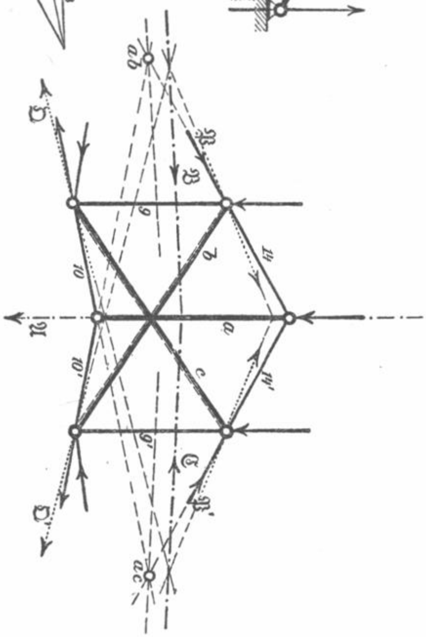

Abb. 115 c.

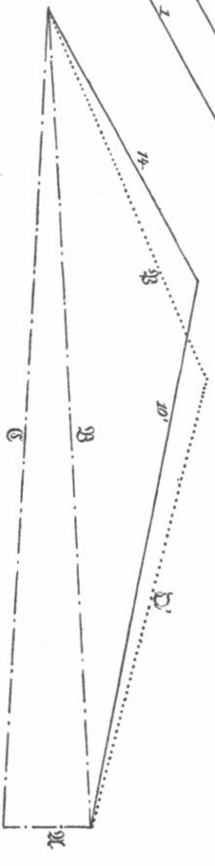

Abb. 115 d.

den $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt, die durch eine punktierte Linie angegeben ist. Für die Grundfigur kommt dann an diesem Knotenpunkte nur noch die Resultierende $\mathfrak{P}$ als äußere Kraft in Frage. Aus $\mathfrak{P}$ folgt sofort auch $\mathfrak{P}'$ an dem symmetrisch gelegenen Knotenpunkte der rechten Seite.

Ebenso sind auch im Kräfteplane die Spannungen der von dem links unten liegenden Knotenpunkte weggeschnittenen Stäbe 6 und 7 zu einer Resultierenden $\mathfrak{Q}$ vereinigt, die als äußere Kraft an der Grundfigur eingetragen ist. Ihr entspricht zugleich die symmetrisch dazu liegende Kraft $\mathfrak{Q}'$ auf der rechten Seite.

Vom unteren, mittleren Knotenpunkte gingen vorher noch die Stäbe 11 und 11′ aus (wenn die Stäbe der rechten Hälfte auf diese Weise bezeichnet werden). Auch ihre Spannungen sind im Kräfteplane zu einer Resultierenden vereinigt, die keine besondere Benennung erhalten hat. — Am oberen Knotenpunkte der Mitte greift nur die Last von 3000 kg an.

Nach diesen Vorbereitungen muß man sich für die Methode entscheiden, die man zur Berechnung der Stabspannungen in der Grundfigur anwenden will. Am einfachsten gestaltet sich hier die Berechnung mit Benutzung der imaginären Gelenke. Darum sind auch in Abb. 115^c die drei Sechseckdiagonalen mit den schon früher bei Besprechung dieses Verfahrens benutzten Buchstaben a, b, c bezeichnet, während sie in Abb. 115^a die Nummern 13, 15 und 15′ trugen.

Die imaginären Gelenke ab und ac sind in der Abbildung angegeben; das Gelenk bc fällt dagegen im vorliegenden Falle ins unendliche, da die Verbindungsstäbe 9 und 9′ von b und c parallel zueinander sind. Dies stört nicht, sondern vereinfacht im Gegenteile die Betrachtung.

Wir müssen ferner die an den Endpunkten der Stäbe a, b, c angreifenden äußeren Kräfte zu den Resultierenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zusammenfassen. An den Endpunkten von a greifen zwei senkrecht gerichtete Kräfte an, deren Summe die in Abb. 115^b angegebene Resultierende $\mathfrak{A}$ liefert. An den Endpunkten von b wirken die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}'$, deren geometrische Summe $\mathfrak{B}$ in Abb. 115^d gebildet ist. Die Richtungslinie von $\mathfrak{B}$ ist in Abb. 115^c durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}'$ zu ziehen. Der Symmetrie wegen hat man hiermit sofort auch die Resultierende $\mathfrak{C}$ an c.

Nun ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch die Gelenke ab, ac und bc gehen und dessen Ecken auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen. Das Dreieck muß ferner symmetrisch sein und die durch bc geführte Seite muß daher die unendlich ferne Gerade der Ebene sein. Die beiden andern Dreieckseiten sind daher die durch die Gelenke ab und ac zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gezogenen Parallelen.

Anstatt dessen kann man aber auch eine andere Überlegung benutzen, die vielleicht anschaulicher ist. Man betrachte etwa den Stab b. Die Spannungen der Stäbe 9 und 9', die von seinen Endpunkten ausgehen, sind gleich groß und von gleichem Vorzeichen. Die Pfeile sind aber an diesen Endpunkten von entgegengesetzter Richtung, weil bei 9 der obere, bei 9' der untere Knotenpunkt in Frage kommt. Die von 9 und 9' auf b übertragenen Kräfte bilden daher ein Kräftepaar. Hiernach müssen auch die sonst noch auf b wirkenden Kräfte, nämlich $\mathfrak{B}$ und der Gelenkdruck in ab ein Kräftepaar von entgegengesetztem Momente bilden, damit Stab b im Gleichgewichte sein kann. Auch hiermit ist bewiesen, daß der Gelenkdruck ab parallel zu $\mathfrak{B}$ geht und gleich groß damit ist.

Nachdem man die Größe und Richtung des Gelenkdruckes ab kennt, findet man durch die in Abb. 115^d vorgenommene Zerlegung nach den Richtungen von 14 und 10 sofort auch die Spannungen in diesen Verbindungsstäben von b mit a. Auch die übrigen Stabspannungen in der Grundfigur können, nachdem zwei schon bekannt sind, durch Anreihung von weiteren Kraftecken an Abb. 115^d sofort ermittelt werden. Da dies ganz einfach ist, wurden die Linien in der Abbildung weggelassen. — Die gedrückten Stäbe sind in der von früher her bekannten Weise kenntlich gemacht.

35. Aufgabe. Das in Abb. 116^a gezeichnete Traggerüst trägt die Last P von 10000 kg. Man soll die davon hervorgerufenen Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte bei A und B, am einfachsten nach dem Momentensatze. Dann streicht man, falls das Hennebergsche Verfahren angewendet werden soll, etwa den Stab 5 weg und setzt dafür den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Stab e ein. Für das so erhaltene einfache Fachwerk kann der Kräfteplan in Abb. 116^b, von dem Auflagerpunkte bei B beginnend, ohne weiteres gezeichnet werden. Man führt die Zeichnung aber nur so weit durch, bis man aus dem Kraftecke 6, 4, 8, e die Spannung des Ersatzstabes e gefunden hat.

Hierauf wurde eine Zugspannung von 1000 kg im Stabe 5 als Belastung des einfachen Fachwerkes angenommen. Die Auflagerkräfte A und B sind für diesen Belastungsfall gleich Null. Der Kräfteplan in Abb. 116^c kann dafür genau wie der vorige gezeichnet werden; man bricht ihn ebenfalls ab, sobald man bis zur Stabspannung e gelangt ist.

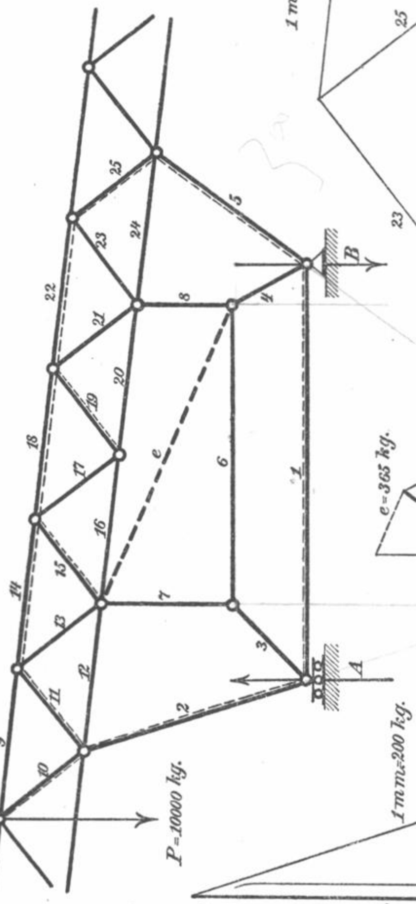

Abb. 116a.

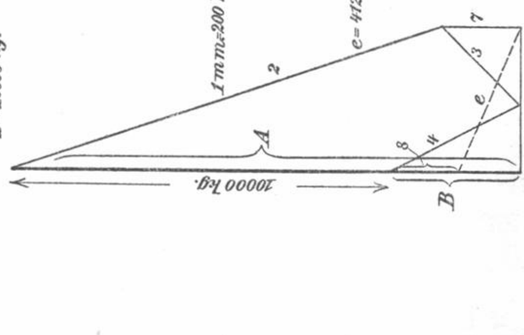

Abb. 116b.

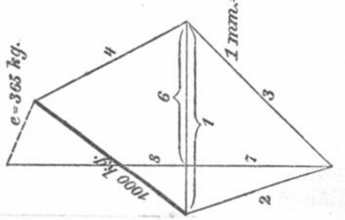

Abb. 116c.

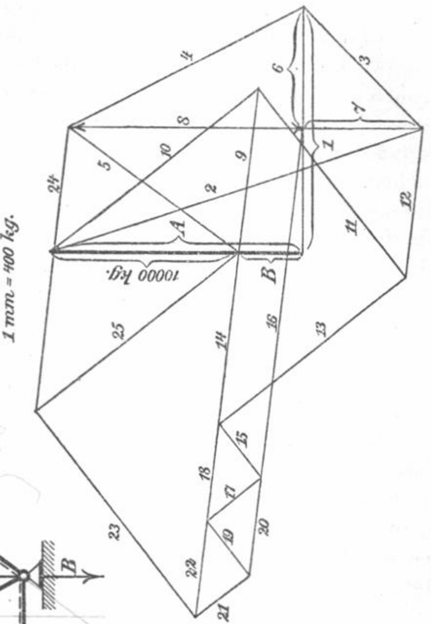

Abb. 116d.

Aus Abb. 116[b] findet man die Spannung T_e des Stabes e zu $+ 4120$ kg und aus Abb. 116[c] $u_e = + 0{,}365$, woraus nach Gl. (36), S. 193 die Spannung X des beseitigten Stabes 5

$$X = -\frac{T_e}{u_e} = -\frac{4120}{0{,}365} = 11\,300 \text{ kg Druck}$$

folgt. — Nachdem die Spannung des Stabes 5 bekannt ist, kann man zur Konstruktion des Kräfteplanes schreiten, der die in dem gegebenen Träger wirklich auftretenden Spannungen vereinigt. Dies ist in Abb. 116[d] geschehen. Man beginnt mit dem Kraftecke für den Auflagerpunkt B, indem man zuerst die bekannten Kräfte B und 5 aneinander reiht und Parallelen zu den Stabrichtungen 1 und 4 zieht. Dann folgen die Kraftecke A, 1, 2, 3 und 3, 6, 7. Bei dem dann folgenden Dreiecke 6, 4, 8 hat man noch eine Probe für die Richtigkeit der vorausgegangenen Bestimmung der Stabspannung 5. Von den drei Kräften sind nämlich 4 und 6 bereits bekannt und die dritte Seite des Dreieckes muß daher von selbst in die Richtung des Stabes 8 fallen. Nachher fehlen nur noch die Stabspannungen in der durch das obere Dreiecksfachwerk gebildeten Scheibe. Man zeichnet zuerst das Kräftedreieck P, 9, 10, dann das Viereck 10, 2, 11, 12 usf. Die bereits ermittelten Stabspannungen 2, 7, 8, 5 sind nämlich neben P als die an der Scheibe angreifenden Lasten aufzufassen und der reziproke Kräfteplan kann daher leicht in gewöhnlicher Weise bis zum andern Ende hin fortgesetzt werden. Die nach links und rechts hin an der oberen Scheibe noch übergreifenden Stäbe, die keine Nummern erhielten, sind bei der gegebenen Laststellung spannungslos. — Die Stabspannungen 16 und 20, sowie 14, 18 und 22 überdecken sich im Kräfteplane teilweise, worauf beim Abgreifen der Strecken wohl zu achten ist.

Anmerkung. Man hätte die Aufgabe auch mit Hilfe der imaginären Gelenke lösen können. Die obere Scheibe und die Stäbe 3 und 4 hängen nämlich paarweise untereinander durch imaginäre Gelenke zusammen, die durch die Schnittpunkte der Stabrichtungen 2 und 7, ferner 5 und 8, sowie 1 und 6 gebildet werden. Man hätte dann ein Gelenkdruckdreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch diese Gelenkpunkte gehen und dessen Ecken auf den Richtungen der äußeren Kräfte P, A und B liegen. Diese Überlegung gestattet zugleich den Ausnahmefall zu erkennen, der bei der Anordnung des Stabgerüstes vermieden werden muß. Die drei Gelenke dürfen nämlich nicht auf einer Geraden liegen, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte von 2 und 7 und von 5 und 8 darf nicht parallel zu den Stabrichtungen 1 und 6 gehen.

— In dieser Hinsicht gleicht übrigens, wie man leicht bemerkt, der hier besprochene Fall vollständig dem schon in Aufgabe 31 untersuchten.

36. Aufgabe. Der in Abb. 117 gezeichnete statisch bestimmte Träger mit einem Mittelgelenke und vier Stützen nimmt an dem nach links hin vorkragenden Ende eine Last P von 1000 kg auf. Man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Obschon natürlich auch das Hennebergsche Verfahren angewendet werden kann, wollen wir uns des Verfahrens der imaginären Gelenke bedienen, da es hier schneller zum Ziele führt. Die vom Mittelgelenk A aus nach rechts hin liegende Scheibe hängt einerseits durch A mit der linken Scheibe und außer-

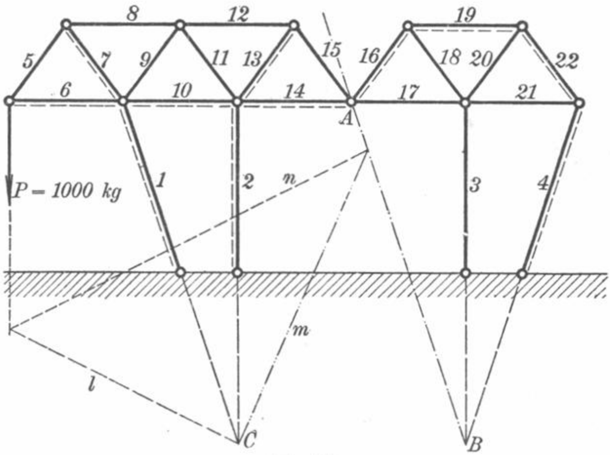

Abb. 117.

dem durch das aus den Stäben 3 und 4 gebildete imaginäre Gelenk B mit der festen Erde zusammen. Zum Gleichgewichte der rechten Scheibe, die keine Last aufzunehmen hat, gehört, daß die beiden Gelenkdrücke in B und A in eine Gerade fallen, also in die Verbindungslinie BA. Betrachtet man hierauf das Gleichgewicht der linken Scheibe, so wirken daran drei äußere Kräfte, nämlich die Last P, der in die Richtung BA fallende Gelenkdruck im Mittelgelenk und der durch das imaginäre Gelenk C, das aus den Stäben 1 und 2 gebildet wird, übertragene Auflagerdruck. Die Richtungslinien der drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden; verlängert man daher die Linie BA, bis sie die Richtungslinie von P schneidet, so muß durch diesen Schnittpunkt auch der durch C übertragene Auflagerdruck gehen. Sind die Richtungslinien auf diese Weise ermittelt, so folgen die Größen der Kräfte aus einem Kräftedreieck.

Da der Schnittpunkt von BA mit P zu weit wegfiel, wurde in der Abbildung die Zerlegung von P nach den Richtungslinien der Gelenkdrücke mit Hilfe eines Seilpolygons vorgenommen. Zu diesem Zwecke zeichnet man irgendein Dreieck l, m, n, so daß eine Ecke auf C fällt und die andern Ecken auf der Richtungslinie von P und auf AB irgendwo liegen. Dieses Dreieck sieht man als ein zwischen den drei Kräften bestehendes geschlossenes Seileck an und zeichnet dazu den Kräfteplan in Abb. 118. Der Gelenkdruck bei A wird durch die zwischen n und m liegende, zu AB parallel gezogene Strecke angegeben; der Gelenkdruck bei C durch

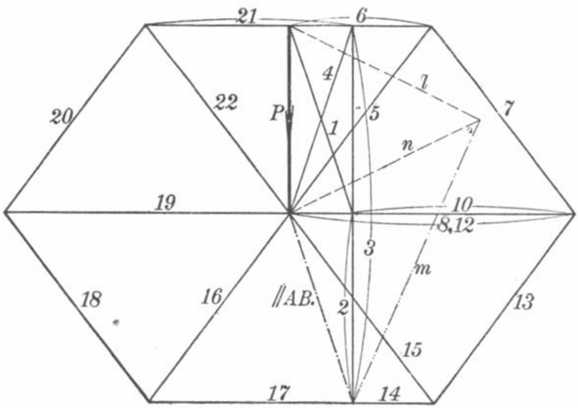

Abb. 118.

die in der Abbildung nicht ausgezogene Verbindungslinie der Endpunkte von l und m. Der erste Gelenkdruck ist sofort nach den Richtungen 3 und 4 sowie auch nach 14 und 15 und nach 16 und 17 zu zerlegen; der Gelenkdruck bei C nach den Richtungen von 1 und 2.

Das Polygon P, 1, 2, 3, 4 bildet nun das Polygon der an dem oberen Binder angreifenden äußeren Kräfte, an das der reziproke Kräfteplan in gewohnter Weise weiter angeschlossen werden kann. Hierbei ergibt sich, daß die Stäbe 9 und 11 spannungslos sind. Die Vorzeichen der übrigen Stabspannungen sind durch Schattenstriche kenntlich gemacht.

37. Aufgabe. Der in Abb. 119 gezeichnete Fachwerkträger stützt sich rechts auf ein Rollenlager, links auf die beiden Stangen

1 und 2, die zusammen einem imaginären Gelenke O gleichwertig sind. Die Knotenpunkte des Obergurtes tragen Lasten P von je 1000 kg. Man soll zuerst den Auflagerdruck B am rechten Auflager und die Spannungen in den Stangen 1 und 2 berechnen und hierauf einen reziproken Kräfteplan für den Träger zeichnen.

Lösung. Als äußere Kräfte wirken an dem Träger die fünf Lasten P, der Auflagerdruck B am rechten Ende und der durch

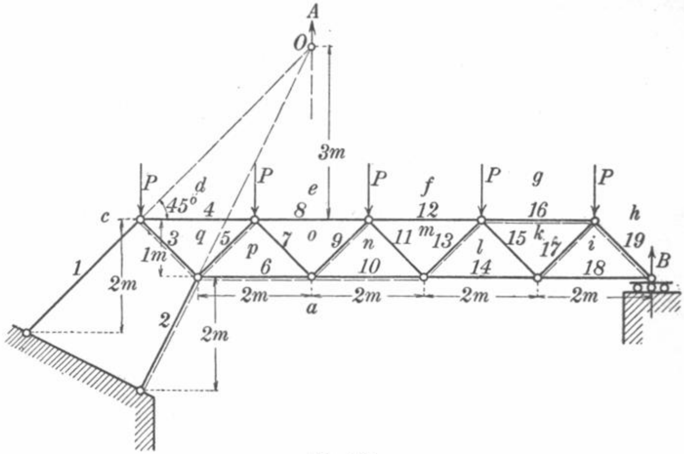

Abb. 119.

das imaginäre Gelenk O gehende, durch die Stangen 1 und 2 vermittelte Auflagerdruck A. Dieser muß, damit die geometrische Summe aller äußeren Kräfte verschwindet, ebenfalls senkrecht gerichtet sein. Den Auflagerdruck B findet man aus einer für den Punkt O aufgestellten Momentengleichung. In dieser heben sich die Momente von vier der fünf Lasten P gegeneinander weg, da zwei von ihnen im negativen, die beiden folgenden im positiven Sinne drehen und die Hebelarme nach links und rechts gleich sind. Es bleibt daher das Moment der letzten Kraft P nach rechts hin übrig, das dem Momente von B gleich sein muß. Daraus folgt

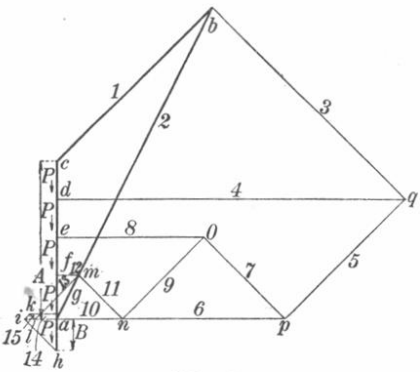

Abb. 120.

$$B = \frac{1000 \cdot 5}{6} = 833 \text{ kg}.$$

Hiernach ist $A = 5000 - 883 = 4167$ kg. Aus dem mit starken Strichen in Abb. 120 angegebenen Kräftedreiecke findet man die Spannungen in den Auflagerstäben 1 und 2 zu $+ 5800$ und $- 9200$ kg. Die Zeichnung des sich an dieses Dreieck anschließenden reziproken Kräfteplans kann nach den gewöhnlichen Regeln erfolgen und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Die auf Druck beanspruchten Stäbe sind in der Binderfigur, wie üblich, durch beigesetzte Schattenstriche gekennzeichnet.