# Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Graphische Statik

**Föppl, August**

**1912**

Dritter Abschnitt. Die Kräfte im Raume

# Dritter Abschnitt.

## Die Kräfte im Raume.

### § 21. Zurückführung auf ein Kraftkreuz.

Zwei Kräfte, deren Richtungslinien windschief zueinander liegen, lassen sich niemals durch eine einzige Kraft ersetzen. Dagegen kann man beliebig viele Kräfte, die alle windschief zueinander liegen dürfen, durch zwei windschiefe Kräfte ersetzen. Der Verein von zwei windschief zueinander liegenden Kräften spielt daher für die Zusammensetzung von Kräften im Raume eine ähnliche Rolle, wie eine Einzelkraft in der Ebene. Er bildet die einfachste Form, auf die sich jedes gegebene Kräftesystem mindestens bringen läßt. Aus diesem Grunde ist eine besondere kurze Bezeichnung dafür erwünscht. Wir nennen den Verein von zwei windschiefen Kräften ein Kraftkreuz. Um ein Kraftkreuz vollständig zu beschreiben, muß man beide Richtungslinien oder „Wirkungslinien“ und auf jeder von ihnen eine mit Pfeil versehene Strecke angeben, die die Größe der auf ihr enthaltenen Kraft darstellt.

Legt man einer von beiden Kräften des Kraftkreuzes den Wert Null bei, so geht das Kraftkreuz in eine Einzelkraft über; wir können daher, um die möglichen Ausnahmen nicht jedesmal besonders hervorheben zu müssen, eine Einzelkraft auch als einen besonderen Fall eines Kraftkreuzes auffassen. Ebenso soll es uns freistehen, auch ein Kräftepaar gelegentlich als Sonderfall eines Kraftkreuzes aufzufassen; denn das Kraftkreuz geht in ein Kräftepaar über, sobald wir beide Wirkungslinien parallel zueinander werden lassen und zugleich beide Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet annehmen. In der Regel wird aber, wenn von einem Kraftkreuze die Rede ist, vorausgesetzt, daß keiner von diesen Ausnahmefällen vorliege.

Die Zurückführung eines beliebig gegebenen Kräftesystemes auf ein Kraftkreuz beruht auf der folgenden einfachen Betrachtung. In Abb. 59 stelle $K$ den Umriß des Körpers dar, an dem die Kräfte angreifen, und M sei der Angriffspunkt einer dieser Kräfte, die mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet sei. Die übrigen Kräfte, die in der Zeichnung weggelassen sind, denke man sich an beliebigen Angriffspunkten und in beliebiger Größe und Richtung hinzu. Man wähle ferner einen Punkt $A$ und eine Ebene $\varepsilon$ beliebig aus, jedenfalls aber so, daß $A$ nicht in $\varepsilon$ liegt. Dann lege man von $A$ aus eine Ebene $\pi$ durch die Kraft $\mathfrak{P}$, durch die, wie wir sagen können, $\mathfrak{P}$ von $A$ als Projektionszentrum aus projiziert wird. Auch durch jede andere der gegebenen Kräfte denke man sich eine solche projizierende Ebene gelegt. Diese Ebenen schneiden im allgemeinen die Ebene $\varepsilon$, und die Schnittlinie geht durch jenen Punkt $M'$, in dem die Richtungslinie von $\mathfrak{P}$ die Ebene $\varepsilon$ durchstößt. Von den Ausnahmefällen, die hier möglich sind, sei zunächst abgesehen, da sie nachher besonders besprochen werden sollen.

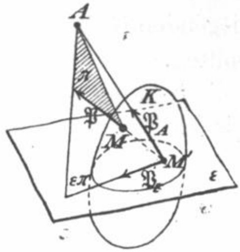

Abb. 59.

Nun verschiebe man den Angriffspunkt von $\mathfrak{P}$ nach dem in der Ebene $\varepsilon$ liegenden Punkte $M'$ und zerlege $\mathfrak{P}$ in zwei Kräfte $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{P}_\varepsilon$, von denen die erste längs der Verbindungslinie $M'A$, die zweite längs der Schnittlinie $\varepsilon\pi$ geht. Diese Zerlegung ist ohne weiteres ausführbar, da alle drei Richtungslinien in der Ebene $\pi$ enthalten sind.

Nachdem die gleiche Zerlegung auch mit allen übrigen gegebenen Kräften vorgenommen ist, haben wir doppelt soviel Kräfte als zu Anfang. Hiervon geht aber die eine Hälfte durch den Punkt $A$, während die andere in der Ebene $\varepsilon$ enthalten ist. Wir können die erste Gruppe ohne weiteres durch eine Resultierende $\mathfrak{R}_A$ ersetzen. und auch die in der Ebene $\varepsilon$ liegenden liefern im allgemeinen eine Resultierende $\mathfrak{R}_\varepsilon$, die nach den früher besprochenen Regeln gefunden werden kann. Hierbei kann zwar der Ausnahmefall vorkommen, daß die Kräfte in der Ebene $\varepsilon$ ein Kräftepaar liefern; wenn wir dieses aber als eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft deuten, braucht davon nicht besonders gesprochen zu werden. — Jedenfalls sind nach Ausführung der Zusammensetzung die gegebenen Kräfte vollständig durch das Kraftkreuz der Kräfte $\mathfrak{R}_A$ und $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ersetzt, wobei es freilich vorkommen kann, daß eine der beiden Kräfte eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft ist, oder daß auch eine von beiden ganz verschwunden ist, nämlich dann, wenn zufällig die durch den Punkt $A$ gehenden oder die in der Ebene $\varepsilon$ liegenden Kräfte im Gleichgewichte miteinander gestanden haben sollten.

Was nun die Ausnahmefälle anbelangt, von denen vorher schon die Rede war, so kann es zunächst vorkommen, daß eine der Kräfte $\mathfrak{P}$ zur Ebene $\varepsilon$ parallel ist. Im allgemeinen wird auch dann noch die projizierende Ebene $\pi$ die Ebene $\varepsilon$ längs einer Geraden $\varepsilon\pi$ schneiden, die dann zur Richtung von $\mathfrak{P}$ parallel ist. In diesem Falle ziehe man auch durch $A$ eine Gerade, die zu jenen beiden parallel ist und zerlege $\mathfrak{P}$ in der Ebene $\pi$ in zwei parallele Kräfte, von denen eine durch $A$ geht, während die andere in die Schnittlinie $\varepsilon\pi$ fällt. Diese Aufgabe läßt sich nach den Lehren des vorigen Abschnittes stets ohne weiteres lösen. Hiermit ist aber gerade so wie im früheren Falle $\mathfrak{P}$ in zwei Kräfte zerlegt, von denen eine durch $A$ geht, während die andere in $\varepsilon$ liegt.

Nun kann es freilich vorkommen, daß auch die projizierende Ebene $\pi$ parallel zu $\varepsilon$ wird. Die Schnittgerade $\varepsilon\pi$ fällt dann mit der unendlich fernen Geraden der Ebene $\varepsilon$ zusammen und die Kraft $\mathfrak{P}$ ist in eine durch $A$ gehende Kraft, die mit $\mathfrak{P}$ gleich groß und gleich gerichtet ist und in eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft zu zerlegen, deren Richtungslinie mit der unendlich fernen Geraden der Ebenen $\varepsilon$ und $\pi$ zusammenfällt, zu zerlegen. Wenn man die Benutzung der unendlich fernen Elemente zur Durchführung der Betrachtung nicht scheut, ist daher auch in diesem Falle die verlangte Zerlegung von $\mathfrak{P}$ sofort ausgeführt. Anstatt dessen kann man auch sagen, daß bei der Parallelverlegung von $\mathfrak{P}$ nach $A$ ein Kräftepaar auftritt, dessen Ebene parallel zu $\varepsilon$ ist und das nachträglich in die Ebene $\varepsilon$ verschoben werden kann. Dann ist $\mathfrak{P}$ durch eine Einzelkraft am Punkte $A$ und ein Kräftepaar in der Ebene $\varepsilon$ ersetzt. — Die fernere Zusammensetzung der Kräfte am Punkte $A$ und in der Ebene $\varepsilon$ kann aber auf jeden Fall genau so erfolgen, als wenn diese besonderen Lagen gar nicht vorgekommen wären.

## § 22. Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Von den Eigenschaften der Kräftepaare war schon früher, namentlich im ersten Bande, wiederholt die Rede. Hier wird es aber nötig, das Wichtigste davon noch einmal zusammenzustellen und die Betrachtungen zugleich so weit zu ergänzen, als erforderlich ist, um den Gegenstand vollständig zu erledigen.

Zunächst erinnere ich daran, daß als graphische Darstellung eines Kräftepaares das Parallelogramm betrachtet werden kann, von dem zwei gegenüberliegende Seiten die beiden Kräfte des Paares angeben (vgl. Abb. 60). Wählt man irgendeinen Punkt in der Ebene des Kräftepaares als Momentenpunkt, so ist das Moment des Kräftepaares — worunter man die Summe der Momente beider Kräfte versteht — stets gleich groß und der Wert dieses Momentes wird durch den Flächeninhalt des Parallelogramms angegeben. Das Vorzeichen des Momentes folgt zugleich aus dem Umlaufssinne, der durch die Pfeile beider Kräfte bestimmt ist.

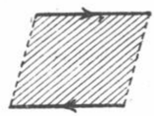

Abb. 60.

Wir wollen uns nun überlegen, welche Veränderungen man mit dem Kräftepaare und mit seinem sichtbaren Ausdrucke, dem Parallelogramm, vornehmen darf, ohne an dem Verhalten des Körpers, an dem es angreift, etwas zu ändern. Zunächst läßt sich zeigen, daß das Parallelogramm beliebig innerhalb seines Parallelstreifens verschoben werden darf, solange nur die beiden Grundlinien, die die Kräfte darstellen, hierbei ihre Längen und das Parallelogramm selbst daher seinen Inhalt nicht ändern. An Stelle des Parallelogramms I in Abb. 61 kann also das Parallelogramm II genommen werden. Dies folgt nämlich aus dem Satze von der Verschiebung des Angriffspunktes, indem II aus I durch bloße


Abb. 61.

Verschiebungen der Angriffspunkte beider Kräfte des Paares längs ihrer Richtungslinien hervorgeht.

Ferner kann man innerhalb des Parallelogramms eine Vertauschung jener Seiten vornehmen, die man als Darstellungen der beiden Kräfte des Paares betrachtet. Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich aus Abb. 62. In dieser sei zunächst das Kräftepaar der Kräfte 1 und 1′ gegeben. Man füge ihnen zwei neue Kräfte 2 und 2′ zu, die sich gegenseitig aufheben und von denen jede so groß ist, wie es der Diagonale des Parallelogrammes entspricht, mit der ihre Richtungslinien zusammenfallen. Setzt man nun 1 und 2 zu einer Resultierenden 3 zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt ihrer Richtungslinien, und Größe und Richtung ergibt sich durch geometrische Summierung aus 1 und 2. Es ist nicht nötig, dazu ein besonderes Kräftedreieck zu zeichnen, da schon innerhalb des vorhandenen Parallelogramms ein Dreieck vorkommt, von dem eine Seite die Kraft 1, die andere die Kraft 2 darstellt. Die dritte Seite gibt daher Größe und Richtung der Resultierenden 3 an und man erkennt, daß diese Kraft durch die mit der Ziffer 3 bezeichnete Parallelogrammseite schon vollständig nach Größe, Richtung und Lage dargestellt ist. Hierbei ist nur der Angriffspunkt auf den nächsten Eckpunkt des Parallelogramms längs der Richtungslinie zurückverlegt. Ebenso geben die Kräfte 1′ und 2′ die durch die Parallelogrammseite 3′ dargestellte Resultierende.

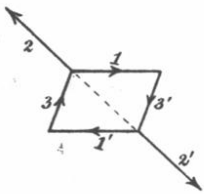

Abb. 62.

Damit ist aber der Satz bewiesen, denn in der Tat ist gezeigt, daß das Kräftepaar aus 1 und 1′ durch Zufügung der beiden sich gegenseitig aufhebenden Kräfte 2 und 2′ in das Kräftepaar aus 3 und 3′ übergeführt werden kann, das demnach mit dem vorigen gleichwertig ist. Es ist daher gar nicht nötig, beim Auftragen eines Parallelogramms zur Darstellung eines Kräftepaares genauer anzugeben, welches Paar Gegenseiten die Kräfte des Paares bezeichnen soll; man kann es vielmehr dem freien Belieben anheimstellen, welches Paar dazu gewählt werden soll, wenn nur der Umlaufssinn etwa durch Beifügung eines Drehpfeiles näher bezeichnet wird.

Durch eine bekannte planimetrische Konstruktion läßt sich ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das gleichen Inhalt hat und dessen Grundlinie daher in demselben Verhältnisse verkleinert, als die Höhe vergrößert ist (oder umgekehrt). Betrachtet man beide Parallelogramme als Darstellungen von Kräftepaaren von gleichem Umlaufssinne, so sind auch beide Kräftepaare gleichwertig miteinander, so daß sich das eine durch das andere ersetzen läßt. Der Beweis folgt aus Abb. 63. Man hat zunächst das Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seiten $DA$ und $BC$ die Kräfte 1 und 2 des ursprünglich gegebenen Kräftepaares darstellen. Nachdem das inhaltsgleiche Parallelogramm $AEFG$ konstruiert ist, denke man sich die

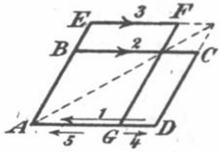

Abb. 63.

Kraft 2 in zwei parallele Komponenten 3 und 4 zerlegt, von denen eine auf die Grundlinie $AG$ oder $AD$, die andere auf die Gegenseite $EF$ fällt. Die Summe aus den Kräften 3 und 4 muß gleich 2 sein und außerdem muß für einen auf 2 liegenden Momentenpunkt das Moment von 3 gleich groß und entgegengesetzt gerichtet dem Momente von 4 sein. Daraus folgt, daß die gesuchte Kraft 3 durch die Strecke $EF$ und die Kraft 4 durch die Strecke $GD$ dargestellt wird.

Nachdem 2 zerlegt ist, kann man 1 und 4, die auf dieselbe Gerade fallen, zu einer Resultierenden vereinigen, die mit 5 bezeichnet werden mag. Da 1 und 4 entgegengesetzten Pfeil haben, ist 5 gleich der Differenz von beiden und wird durch die Strecke $GA$ dargestellt. Hiermit sind die ursprünglich gegebenen Kräfte 1 und 2 vollständig durch die Kräfte 3 und 5 ersetzt. Die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$ dargestellten Kräftepaare sind also in der Tat gleichwertig miteinander.

Schließlich läßt sich noch zeigen, daß zwei Kräftepaare, die durch irgend zwei in derselben Ebene liegende Parallelogramme dargestellt werden, falls diese nur gleichen Inhalt haben und zu demselben Umlaufssinne gehören, gleichwertig miteinander sind.

In Abb. 64 seien $ABCD$ und $EFGH$ die inhaltsgleichen Parallelogramme. Man verschiebe zunächst $ABCD$ innerhalb des Parallelstreifens in die Lage $JKLM$; dann forme man um auf $JNOP$. Dieses Parallelogramm läßt sich aber, da es mit $EFGH$ gleichen Inhalt haben soll und mit ihm in demselben Parallelstreifen liegt, durch $EFGH$ ersetzen und hiermit ist in der Tat nachgewiesen, daß die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ dargestellten Kräftepaare gleichwertig miteinander sind.

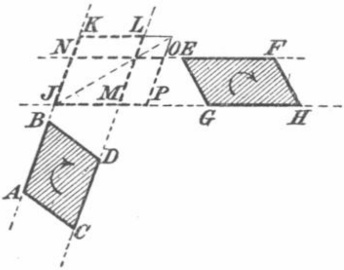


Abb. 64.

Ein Kräftepaar kann daher in seiner Ebene beliebig verschoben und zugleich sonst umgeformt werden, solange nur das statische Moment weder dem Werte noch dem Vorzeichen nach geändert wird. Es genügt daher zur Darstellung des Kräftepaares auch, irgendwo in der Ebene eine Normale nach jener Seite hin zu ziehen, von der aus gesehen das Kräftepaar eine Drehung im Uhrzeigersinne hervorzubringen sucht und die Größe des Momentes auf dieser Normalen in irgendeinem Maßstabe abzutragen. Diese Strecke heißt der Momentenvektor und aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, daß dieser beliebig parallel zu sich verschoben werden darf. In dieser Hinsicht steht er durchaus im Gegensatze zu jener Strecke, durch die man eine Einzelkraft darstellt. Diese darf keineswegs, oder wenigstens nicht ohne einen anderweitigen Ausgleich parallel zu sich verschoben werden, während beim Momentenvektor die Verschiebung ohne weiteres und ohne jede Kompensation zulässig ist.

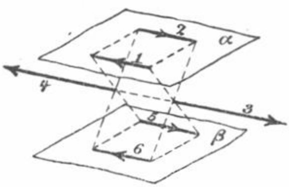


Abb. 65.

Ein Kräftepaar kann ferner auch in eine parallele Ebene verschoben werden. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man Abb. 65. In der Ebene $\alpha$ sei das aus den Kräften 1 und 2 gebildete Kräftepaar gegeben. Man ziehe irgendeine zu $\alpha$ parallele Ebene $\beta$ und projiziere das Parallelogramm 1, 2 durch rechtwinklige Projektionsstrahlen auf $\beta$; die Projektion liefert das Parallelogramm 5, 6. Dann lege man in dem hierbei entstehenden Parallelepiped die Diagonalebenen durch 1 und 5 und durch 2 und 6 und suche deren Schnittlinie auf, die in der Mitte zwischen $\alpha$ und $\beta$ verläuft. Nach diesen Vorbereitungen bringe man zwei neue Kräfte 3 und 4 an dem Körper an, die sich gegenseitig aufheben und deren Richtungslinien mit der vorher ermittelten Schnittlinie zusammenfallen. Jede dieser beiden Kräfte sei doppelt so groß als eine der Kräfte 1 oder 2. An Stelle des Kräftepaares 1, 2 tritt jetzt der Verein der vier Kräfte 1, 2, 3, 4. Diese kann man nun in geeigneter Weise zusammenfassen. Wir bilden zunächst die Resultierende aus 1 und 3. Da beide Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind und 3 doppelt so groß ist als 1, ist die Resultierende gleich gerichtet mit 3 und so groß wie 1 oder 2. Dabei liegt sie außerhalb des aus den Richtungslinien von 1 und 3 gebildeten Parallelstreifens nach der Seite der größeren Kraft hin, in solchem Abstande, daß für einen auf 3 gelegenen Momentenpunkt das Moment der Resultierenden gleich dem Momente von 1 ist. Daraus folgt, daß die Resultierende aus 1 und 3 durch die mit 5 bezeichnete, in der Ebene $\beta$ enthaltene Strecke dargestellt wird. Ebenso liefern 2 und 4 die durch die Strecke 6 dargestellte Resultierende.

Nach Ausführung dieser Zusammensetzungen sind die Kräfte 1, 2, 3, 4 und daher auch das ursprünglich gegebene Kräftepaar 1, 2 durch das Kräftepaar 5, 6 ersetzt. Das Parallelogramm 5, 6 bildet aber die Projektion des Parallelogramms 1, 2 auf die Ebene $\beta$ und damit ist bewiesen, daß das Kräftepaar 1, 2 ohne weitere Änderung auch in die beliebig angenommene parallele Ebene $\beta$ verschoben werden darf. Nachträglich können natürlich auch mit dem Kräftepaare 5, 6 innerhalb der Ebene $\beta$ wieder alle jene Verschiebungen und Umformungen vorgenommen werden, von denen vorher die Rede war.

Hieraus folgt zugleich auch, daß der Momentenvektor eines Kräftepaares nicht nur, wie wir vorher sahen, parallel zu sich selbst, sondern zugleich auch längs seiner eigenen Richtungslinie beliebig verschoben werden darf. Man kann daher alles, was bisher von den Kräftepaaren bewiesen wurde, auch dahin zusammenfassen, daß das Kräftepaar durch Angabe des Momentenvektors bereits genügend beschrieben wird und daß dieser Vektor ein völlig freier Vektor ist, der an jedem beliebig gewählten Punkte angeheftet werden darf. Es kommt bei ihm gar nicht auf die Lage, sondern nur auf seine Größe und seine Richtung an. Der Vektor, durch den eine Einzelkraft dargestellt wird, kann im Gegensatze zum Momentenvektor nur längs seiner Richtungslinie und nicht parallel dazu verschoben werden; bei ihm kommt es nicht nur auf Richtung und Größe, sondern auch auf die Lage der Richtungslinie an. Um diesen Unterschied in anschaulicher Sprache hervorzuheben, bezeichnet man die Einzelkraft als einen linienflüchtigen Vektor im Gegensatze zu dem völlig freien Vektor, durch den ein Kräftepaar dargestellt wird.

Sind zwei Kräftepaare gegeben, die entweder in derselben Ebene oder in zwei parallelen Ebenen liegen, so schiebe man sie zunächst in dieselbe Ebene, stelle jedes durch ein Parallelogramm dar, so daß die Seiten in beiden parallel laufen und die Grundlinien gleich groß sind und lege die Parallelogramme mit einer gemeinsamen Grundlinie nebeneinander oder aufeinander, aber so jedenfalls, daß die gemeinsame Grundlinie im einen Parallelogramme eine Kraft von entgegengesetztem Pfeile wie im andern Parallelogramme bedeutet. Von den vier Kräften heben sich dann die beiden aufeinander gelegten gegenseitig auf und die beiden andern bilden ein neues Kräftepaar, das die Resultierende der beiden gegebenen Kräftepaare bildet. Hatten beide Kräftepaare gleichen Drehsinn, so liegen ihre Flächen nebeneinander und das Parallelogramm des resultierenden Kräftepaares ist gleich der Summe aus den Flächen der Parallelogramme der einzelnen Kräftepaare. War der Umlaufssinn entgegengesetzt, so tritt an die Stelle der Summe die Differenz der Flächen.

Man kann diese einfache Betrachtung auch dahin zusammenfassen, daß der Momentenvektor des resultierenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der gegebenen Kräftepaare ist. Bei gleichem Umlaufssinne sind beide Momentenvektoren gleich gerichtet und ihre geometrische Summe ist gleich der numerischen Summe aus beiden, also gleich der durch einfaches Zusammenzählen der Momentenbeträge gebildeten Summe. Bei entgegengesetztem Umlaufssinne sind die Momentenvektoren entgegengesetzt gerichtet und ihre geometrische Summe wird durch die Differenz der absoluten Beträge angegeben. — Diese Betrachtungen bleiben natürlich auch noch anwendbar, wenn mehr als zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen zu einer Resultierenden vereinigt werden sollen.

Um zwei Kräftepaare zusammenzusetzen, die in verschiedenen Ebenen liegen, kann man sich des durch Abb. 66 dargestellten Verfahrens bedienen. Das Kräftepaar in der Ebene $\alpha$ sei durch das Parallelogramm 1, 2 zur Darstellung gebracht, von dem die Grundlinie 2 mit der Schnittlinie $\alpha\beta$ beider Ebenen zusammenfällt. Auf gleiche Art führe man auch das in der Ebene $\beta$ liegende Kräftepaar auf ein Parallelogramm 3, 4 zurück, von dem eine Seite 3 in die Schnittlinie $\alpha\beta$ fällt. Wir können es dabei so einrichten, daß beide Parallelogramme gleiche Grundlinien haben und daß sie mit einer gemeinschaftlichen Seite in der Schnittlinie $\alpha\beta$ aneinander grenzen. Ferner sollen auch beide so aneinander geschoben sein, daß die gemeinschaftliche Seite in beiden Parallelogrammen Kräfte von entgegengesetztem Pfeile darstellt. Dies läßt sich immer leicht erreichen; denn sollten etwa 2 und 3 nicht, wie in Abb. 66 angenommen ist, von entgegengesetztem, sondern von gleichem Pfeile sein, so brauchte man nur die Ebene $\beta$ über die Schnittlinie $\alpha\beta$ hinaus zu verlängern und das Parallelogramm 3, 4 in die Verlängerung zu

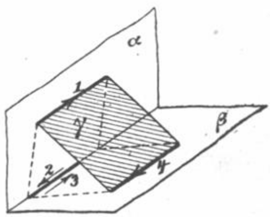

Abb. 66.

schieben, so daß nachher 4 sich mit 2 deckte. Diese wären dann von entgegengesetztem Pfeile und die Figur würde sich von Abb. 62 nur dadurch unterscheiden, daß das, was jetzt in einem der zwischen den Ebenen $\alpha$ und $\beta$ gebildeten Keile gezeichnet ist, sich nachher in dem Nebenkeile abspielte.

Die zum Zusammenfallen gebrachten Kräfte 2 und 3 heben sich gegenseitig auf und es bleiben nur noch die Kräfte 1 und 4 übrig, die ein Kräftepaar miteinander bilden, das die Resultierende aus den Kräftepaaren 1, 2 und 3, 4 ausmacht. Das resultierende Kräftepaar liegt in einer neuen Ebene $\gamma$, die von $\alpha$ und $\beta$ verschieden ist; es wird durch das mit einer Schraffierung versehene Parallelogramm dargestellt. Nachträglich kann man das Parallelogramm in der Ebene $\gamma$ wieder beliebig umformen oder es auch in eine zu $\gamma$ parallele Ebene verschieben, wenn man nur darauf achtet, daß der Momentenvektor dabei nach Größe und Richtung unverändert bleibt.

Um den Zusammenhang zu erkennen, der zwischen den Momentenvektoren der drei Kräftepaare besteht, fertigen wir in Abb. 67 eine neue Zeichnung an, die als rechtwinklige Projektion auf eine zur Schnittlinie $\alpha\beta$ senkrechte Ebene zu betrachten ist. Die drei Parallelogramme projizieren sich als Abschnitte auf den Spuren der Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Da die drei Parallelogramme gleiche Grundlinien

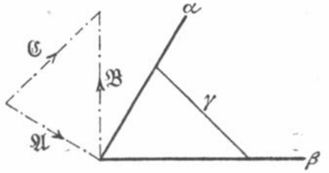


Abb. 67.

hatten, verhalten sich ihre Flächen oder die von ihnen dargestellten Momente wie die Seiten des von den Spuren $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gebildeten Dreieckes. Die Momentenvektoren der drei Kräftepaare seien mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet; sie liegen in der Ebene der Abb. 67 und können in dieser ohne weiteres aufgetragen werden. Der Momentenvektor $\mathfrak{B}$ des Kräftepaares in der Ebene $\beta$ steht rechtwinklig zu $\beta$ und ist, wie aus dem Vergleiche mit Abb. 66 ohne weiteres folgt, mit dem Pfeile senkrecht nach oben gerichtet. Der Maßstab, in dem die Momentenvektoren aufgetragen werden sollen, kann nach Belieben gewählt werden. Da wir schon wissen, daß sich die Momente jedenfalls wie die Seiten des Dreieckes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ verhalten, ist es am einfachsten, die Strecke $\mathfrak{B}$ gleich der auf $\beta$ liegenden Dreieckseite zu machen. Auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ sind dann gleich den Abschnitten auf $\alpha$ und $\gamma$ zu setzen. Der Momentenvektor $\mathfrak{A}$ des in der Ebene $\alpha$ liegenden Kräftepaares hat, wie aus Abb. 66 hervorgeht, einen dort dem Beschauer zugewendeten Pfeil. Hiernach ist auch der Pfeil von $\mathfrak{A}$ in Abb. 67 gewählt und zwar ist die Strecke so angetragen, daß die Pfeile von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufeinander folgen. Nachdem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgetragen sind, verbinde man ihre Endpunkte miteinander. Man erhält dann ein Dreieck, das mit dem Dreiecke $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ kongruent ist, da es mit ihm in zwei Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel übereinstimmt. Hieraus folgt, daß auch die dritte Seite gleich lang mit dem Abschnitte auf $\gamma$ ist und daß beide ebenso wie die andern einander entsprechenden Seiten rechtwinklig zueinander stehen. Die dritte Seite gibt daher den Momentenvektor $\mathfrak{C}$ an. Der Pfeil von $\mathfrak{C}$ folgt wieder aus dem Vergleiche mit der Übersichtszeichnung in Abb. 66.

Hiermit ist bewiesen, *daß der Momentenvektor des resultierenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der beiden gegebenen Kräftepaare ist.* Wir sind damit zu dem einfachsten Verfahren gelangt, dessen man sich zur Vereinigung beliebig gegebener Kräftepaare bedienen kann. Man stellt alle gegebenen Kräftepaare durch ihre Momentenvektoren dar und bildet aus diesen die geometrische Summe. Der Vektor, den man hierbei erhält, gibt das resultierende Kräftepaar an. Zugleich erkennt man, daß sich beliebig gegebene Kräftepaare stets durch ein einziges Kräftepaar ersetzen lassen. Ist die geometrische Summe der Momentenvektoren gleich Null, so stehen die Kräftepaare im Gleichgewichte miteinander.

Ich bemerke schließlich noch, daß man durch analytische Beweisführung auf Grund des Momentensatzes die vorhergehenden Betrachtungen freilich erheblich abkürzen kann; ich halte es aber für nützlicher, diese Untersuchung mit den einfachsten Hilfsmitteln, deren man sich beim Zusammensetzen von Kräften bedienen kann, folgerecht, wenn auch vielleicht etwas weitschweifig, durchzuführen. Man wird dadurch mit dem Gegenstande genauer vertraut, als wenn man sich damit begnügt, die letzten Folgerungen, zu denen wir gelangten, als Behauptungen aufzustellen, die mit Hilfe des Momentensatzes bewiesen werden.

## § 23. Gleichwertigkeit von Kraftkreuzen.

Wir kehren jetzt zu den Untersuchungen in § 21 zurück. Um ein beliebig gegebenes Kräftesystem auf ein Kraftkreuz zurückzuführen, wählten wir einen Punkt $A$ und eine Ebene $\varepsilon$ beliebig aus und zerlegten dann alle Kräfte so, daß eine Komponente durch $A$ ging, während die andere in $\varepsilon$ lag. Dadurch gelangten wir schließlich zu einem Kraftkreuze, dessen eine Kraft ebenfalls durch den beliebig gewählten Punkt $A$ ging, während die andere in der beliebig gewählten Ebene $\varepsilon$ enthalten war.

Hieraus folgt, daß man ein gegebenes System von Kräften nicht nur auf ein einziges Kraftkreuz zurückführen kann, sondern daß man, je nach anderer Wahl des Punktes $A$ und der Ebene $\varepsilon$, unendlich viele Kraftkreuze konstruieren kann, die alle das gegebene Kräftesystem ersetzen und die daher auch alle untereinander gleichwertig sind. Hierbei mag noch bemerkt werden, daß zwei Kraftkreuze oder überhaupt zwei Kräftesysteme als „gleichwertig" bezeichnet werden, wenn sich das eine durch das andere am starren Körper vollständig ersetzen läßt, so daß es für das Verhalten des Körpers gleichgültig ist, ob das eine oder das andere an ihm angreift. Eine Einzelkraft, die gegebenen Kräften gleichwertig ist, bezeichnet man als deren Resultierende. Man kann aber nicht wohl ein Kraftkreuz, das gegebene Kräfte ersetzt, als ein resultierendes Kraftkreuz bezeichnen, weil es nicht nur eines, sondern sehr viele gibt, die derselben Bedingung genügen. Deshalb gebraucht man in solchen Fällen besser das Wort „gleichwertig".

Wenn zwei Kräftesysteme gleichwertig miteinander sind und man kehrt im einen von ihnen die Pfeile aller Kräfte um, so hält es, wenn es nachher mit dem andern zugleich an einem starren Körper angebracht wird, mit diesem Gleichgewicht. Denn das andere Kräftesystem ist ihm nach Voraussetzung gleichwertig, solange die Pfeile noch nicht umgekehrt sind. Wir haben daher, wenn wir diesen Ersatz eintreten lassen, das eine Kräftesystem mit den ursprünglichen Pfeilen und zugleich auch dasselbe Kräftesystem mit den umgekehrten Pfeilen vor uns, und in beiden heben sich je zwei zur selben Richtungslinie gehörige Kräfte gegeneinander fort, so daß in der Tat Gleichgewicht bestehen muß. Der Fall des Gleichgewichtes zwischen zwei Kraftkreuzen wird daher schon sofort mit erledigt, sobald wir nur die Gleichwertigkeit näher untersuchen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die vorher beliebig gewählte Ebene $\varepsilon$ nun durch eine andere Ebene $\varepsilon'$ ersetzt werde, während der Punkt $A$ seine frühere Lage behalten soll. Anstatt das frühere Verfahren für diesen Fall ganz von neuem durchzuführen, können wir sofort von dem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ausgehen, das die gegebenen Kräfte ersetzt. Die Kraft $\mathfrak{R}_A$ geht bereits durch den vorgeschriebenen Punkt $A$ und es bleibt uns daher nur übrig, die Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen eine durch $A$ geht, während die andere in der Ebene $\varepsilon'$ enthalten ist. Diese Zerlegung ist genau nach der früher dafür gegebenen Vorschrift in Abb. 68 ausgeführt. Man projiziert $\mathfrak{R}_\varepsilon$ von $A$ aus durch die mit $\alpha$ bezeichnete Ebene, verlegt den Angriffspunkt von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ nach der Schnittlinie der Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ und zerlegt dort $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in der Ebene $\alpha$ längs der durch $A$ gehenden Linie und längs der Schnittlinie $\alpha\varepsilon'$. Die letzte Komponente liefert unmittelbar die Kraft $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ des neuen Kraftkreuzes, während die andere Komponente am Punkte $A$ mit $\mathfrak{R}_A$ zur zweiten Kraft dieses Kraftkreuzes zu vereinigen ist. In der Abbildung ist dies nicht weiter ausgeführt.

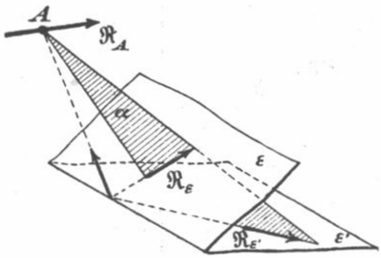

Abb. 68.

Als Hauptresultat dieser Betrachtung wollen wir uns merken, daß die Kraft $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ des neuen Kraftkreuzes, wie nun auch die Ebene $\varepsilon'$ gewählt werden möge, jedenfalls in der Ebene $\alpha$ enthalten sein muß, in der sich $\mathfrak{R}_\varepsilon$ von $A$ aus projiziert. G e h t a l s o d i e e i n e K r a f t e i n e s K r a f t -

*kreuzes, das einem gegebenen Kräftesysteme gleichwertig ist, durch einen beliebig vorgeschriebenen Punkt $A$, so muß die andere auf jeden Fall in einer dem Punkte $A$ zugeordneten und durch ihn hindurchgehenden Ebene $\alpha$ enthalten sein.*

Ferner sei angenommen, daß der Punkt $A$ durch irgendeinen anderen Punkt $A'$ ersetzt werden soll, während die Ebene $\varepsilon$ beibehalten wird. Wir können auch in diesem Falle von dem früheren Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ausgehen und haben nur $\mathfrak{R}_A$ von $A'$ aus in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine durch $A'$ geht, während die andere in $\varepsilon$ liegt. Wir projizieren $\mathfrak{R}_A$ von $A'$ aus durch eine Ebene, die keine besondere Bezeichnung erhalten hat, in Abb. 69 aber durch stückweise Schraffierung hervorgehoben ist. Dann verlegen wir den Angriffspunkt von $\mathfrak{R}_A$ nach dem Punkte $E$, in dem $\mathfrak{R}_A$ die Ebene $\varepsilon$ trifft. An diesem Punkte wird $\mathfrak{R}_A$ in eine Komponente zerlegt, die durch $A'$ geht, während die andere in der Ebene $\varepsilon$ liegt. Die erste Komponente liefert unmittelbar $\mathfrak{R}_A'$, während die andere mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zur zweiten Kraft des neuen Kraftkreuzes, die in der Ebene $\varepsilon$ liegt, zu vereinigen ist.

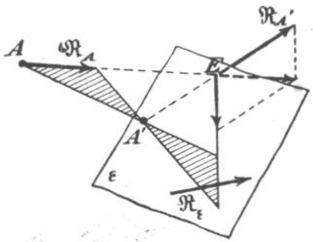

Abb. 69.

Auch von dieser Betrachtung ist ein Umstand besonders hervorzuheben. Solange nämlich die Ebene $\varepsilon$ festgehalten wird, muß die andere Kraft des Kraftkreuzes, wohin man auch den Punkt $A'$ verlegen möge, jedenfalls durch den Punkt $E$ gehen, in dem $\mathfrak{R}_A$ die Ebene $\varepsilon$ traf. *Liegt also die eine Kraft eines Kraftkreuzes, das einem gegebenen Kräftesysteme gleichwertig ist, in einer beliebig vorgeschriebenen Ebene $\varepsilon$, so muß die andere auf jeden Fall durch einen der Ebene zugeordneten und in ihr enthaltenen Punkt $E$ hindurchgehen.*

Man erkennt aus den vorausgehenden Betrachtungen bereits, daß man bei einem gegebenen Kräftesysteme nicht nur einen bestimmten Punkt $A$ vorschreiben kann, durch den die eine Kraft des Kraftkreuzes gehen soll, sondern daß auch noch unendlich viele durch diesen Punkt gehende Richtungslinien möglich sind, mit denen diese Kraft zusammenfallen kann, je nach der Wahl, die man für die Ebene $\varepsilon$ trifft. Ebenso kann man nicht nur verlangen, daß eine Kraft des Kraftkreuzes in einer beliebig gewählten Ebene $\varepsilon$ liegen soll, sondern innerhalb dieser Ebene sind auch noch unendlich viele Richtungslinien für diese Kraft möglich, je nach der uns freistehenden Wahl des Punktes $A$. Hierdurch werden wir zu der Vermutung geführt, daß die Richtungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes überhaupt ganz beliebig vorgeschrieben werden darf. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, ob diese Vermutung begründet ist.

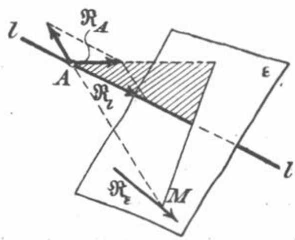

Abb. 70.

In Abb. 70 sei $l$ die für die eine Kraft des Kraftkreuzes vorgeschriebene Richtungslinie. Wir wählen einen Punkt $A$ beliebig auf $l$ aus und legen irgendeine Ebene $\varepsilon$. Dann fassen wir die gegebenen Kräfte zunächst auf gewöhnliche Art zu einem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zusammen. Nachdem dies geschehen ist, legen wir durch $\mathfrak{R}_A$ und die gegebene Gerade $l$ eine Ebene, die in Abb. 70 durch Schraffierung kenntlich gemacht ist. Wir suchen den Schnittpunkt $M$ dieser Ebene mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ auf und verbinden $M$ mit $A$. Hierauf zerlegen wir $R_A$ innerhalb der schraffierten Ebene in zwei Komponenten, von denen eine mit $l$, die andere mit der Verbindungslinie $AM$ zusammenfällt. Die erste Komponente ist die eine Kraft des verlangten Kraftkreuzes, die andere kann im Punkte $M$ mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zu einer Resultierenden vereinigt werden, die die zweite Kraft des Kraftkreuzes darstellt.

*Im allgemeinen kann hiernach für die eine Kraft des Kraftkreuzes, zu dem sich ein gegebenes Kräftesystem zusammenfassen* läßt, die Wirkungslinie beliebig vorgeschrieben werden. Damit ist dann sowohl die Lage der andern Wirkungslinie, als auch Größe und Pfeil für beide Kräfte des Kraftkreuzes eindeutig bestimmt.

Hierbei ist aber ein Ausnahmefall besonders hervorzuheben. Daß die durch $l$ und $\mathfrak{R}_A$ gelegte Ebene möglicherweise parallel zu $\mathfrak{R}_s$ geht, so daß der Schnittpunkt $M$ ins Unendliche fällt, kommt hierbei freilich nicht in Betracht; denn durch diese besondere Lage von $M$ wird die sinngemäße Ausführung der vorher beschriebenen Konstruktionen keineswegs gehindert. Auch wenn etwa $\mathfrak{R}_A$ zufälligerweise von vornherein in die Richtung von $l$ fallen sollte, ändert sich nichts Wesentliches. Man erspart dann nur die weitere Zerlegung von $\mathfrak{R}_A$ und hat schon im ersten Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_s$ das verlangte gefunden. Wesentlich geändert und geradezu unmöglich gemacht wird aber die Ausführung der Konstruktion, wenn zufälligerweise die Richtungslinie von $\mathfrak{R}_s$ die gegebene Gerade $l$ schneiden sollte. Denn dann ist es nicht möglich, $\mathfrak{R}_A$ in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine mit $l$ zusammenfällt, während die andere $\mathfrak{R}_s$ schneidet. In der Tat ist in diesem Ausnahmefalle die gegebene Gerade $l$ keine mögliche Wirkungslinie für die eine Kraft des Kraftkreuzes.

Man überzeugt sich hiervon leicht auch noch auf andere Art, indem man den Momentensatz anwendet. Für jeden beliebigen Momentenpunkt oder auch für jede beliebige Momentenachse muß nämlich die Momentensumme für alle gleichwertigen Kräftesysteme oder Kraftkreuze gleich sein. Wählt man nun eine Linie, die beide Kräfte eines Kraftkreuzes schneidet, als Momentenachse, so ist für sie das Moment dieses Kraftkreuzes gleich Null und auch das Moment aller gleichwertigen Kraftkreuze muß daher für dieselbe Momentenachse zu Null werden. — Wenn nun $\mathfrak{R}_s$, wie wir vorher annahmen, zufälligerweise die Gerade $l$ trifft, so ist $l$, da sie auch $\mathfrak{R}_A$ schneidet, eine solche Gerade, für die das Moment des gegebenen Kräftesystemes zu Null wird. Eine Gerade, der diese Eigenschaft zukommt, wird als eine Nullinie des Kräftesystemes bezeichnet. Daß nun eine Nullinie niemals mit der Richtungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes zusammenfallen kann, folgt sehr einfach daraus, daß für sie als Momentenachse zwar das Moment der mit ihr zusammenfallenden Kraft, aber auf keinen Fall das Moment der zweiten, zu ihr windschief liegenden Kraft verschwinden könnte. Hiernach wäre auch das Moment des ganzen Kraftkreuzes für diese Achse von Null verschieden und das Kraftkreuz könnte daher dem gegebenen Kräftesysteme, für das die Gerade nach Voraussetzung eine Nullinie sein sollte, nicht gleichwertig sein.

Man erkennt ferner, daß zu einem gegebenen Kräftesysteme sehr viele Nullinien gehören und daß sogar durch jeden Punkt des Raumes unendlich viele hindurchgehen. Dies folgt aus dem zuvor bewiesenen Satze, daß die andere Kraft eines Kraftkreuzes in einer durch den Punkt $A$ hindurchgehenden Ebene $\alpha$ enthalten sein muß, wenn für die erste Kraft vorgeschrieben ist, daß sie durch $A$ geht. Jede Linie, die man in dieser Ebene $\alpha$ durch den beliebig gewählten Punkt $A$ ziehen mag, ist daher eine Nullinie, denn sie schneidet auf jeden Fall außer der Kraft $\mathfrak{R}_A$ auch noch die zweite Kraft des Kraftkreuzes. Zugleich erkennt man aber auch, daß andere Nullinien, als die in der Ebene $\alpha$ enthaltenen, durch den Punkt $A$ nicht gelegt werden können.

Ein ähnlicher Schluß kann auch aus dem andern Satze gezogen werden, daß die zweite Kraft des Kraftkreuzes durch einen in der Ebene $\varepsilon$ enthaltenen Punkt $E$ gehen muß, wenn die Richtungslinie der ersten Kraft in $\varepsilon$ liegen soll. Alle Linien, die man in der Ebene $\varepsilon$ durch den Punkt $E$ ziehen kann, sind hiernach Nullinien — und außer diesen kommen keine andern in der Ebene $\varepsilon$ vor.

Aus diesem Grunde bezeichnet man auch die Ebene $\alpha$ im ersten Falle als die zum Punkte $A$ gehörige Nullebene und den Punkt $E$ im zweiten Falle als den zur Ebene $\varepsilon$ gehörigen Nullpunkt. Beide Fälle unterscheiden sich übrigens nicht wesentlich voneinander; war $A$ gegeben, so konnte $\alpha$ dazu gefunden werden, und wenn anfänglich $E$ gegeben war, folgte dazu $\varepsilon$. Bezeichnet man aber nachträglich die Ebene $\varepsilon$ mit $\alpha$, so fällt $E$ mit $A$ zusammen und umgekehrt. Jedem Punkte ist eine durch ihn hindurchgehende Nullebene zugeordnet und zu jeder Ebene gehört ein in ihr liegender Nullpunkt.

## § 24. Das Nullsystem.

Die geometrischen Beziehungen zwischen gleichwertigen Kraftkreuzen lassen sich in übersichtlicher Weise zusammenfassen, indem man den Begriff des Nullsystems aufstellt. Darunter versteht man den ganzen unendlichen Raum, dessen Punkte, Ebenen und Geraden in der Art aufeinander bezogen sind, wie dies den vorhergehenden Betrachtungen entspricht. Jedem Punkte $A$ soll also eine Ebene $\alpha$ zugeordnet sein, die durch $A$ hindurchgeht und umgekehrt jedem Punkte $E$ eine Ebene $\varepsilon$. Jeder durch $A$ gezogenen Geraden $l$ ist eine in $\alpha$ liegende Gerade $l'$ zugeordnet mit Ausnahme der gleichzeitig in $\alpha$ liegenden und durch $A$ hindurchgehenden Geraden, die man die Nulllinien nennt und von denen man sagt, daß sie sich selbst zugeordnet oder „konjugiert" seien. Im übrigen ist die Art der Zuordnung näher bestimmt durch das gegebene Kräftesystem oder auch schon durch die Angabe eines der unendlich vielen Kraftkreuze, die alle unter sich gleichwertig sind.

Wählt man als Ebene $\varepsilon$ die unendlich ferne Ebene des Raumes, so erhält man ein Kraftkreuz, von dem die eine Kraft unendlich fern liegt und daher unendlich klein sein muß, während die durch den beliebig gewählten Punkt $A$ gehende zweite Kraft des Kraftkreuzes gleich der geometrischen Summe der gegebenen Kräfte $\mathfrak{P}$ gefunden wird. Läßt man den Punkt $A$ der Reihe nach verschiedene Lagen durchlaufen, so behält die an ihm angreifende Kraft $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$ stets die gleiche Größe und Richtung bei. Diese Richtung wird als die Achsenrichtung des Nullsystems bezeichnet; sie geht durch den der unendlich fernen Ebene $\varepsilon$ zugeordneten Nullpunkt $E$.

In Abb. 71 seien $l$ und $l'$ (die man sich windschief zueinander denken muß) zwei konjugierte Geraden eines Nullsystems und $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_{l'}$ seien die beiden Kräfte des Kraftkreuzes, das zu ihnen gehört.

Reiht man, wie es in der Abbildung geschehen ist, $\mathfrak{R}_{l'}$ an $\mathfrak{R}_l$ graphisch an, so stellt die dritte Seite des entstehenden Kräftedreieckes die geometrische Summe $\mathfrak{R}$ oder $\Sigma\mathfrak{P}$ aus den gegebenen Kräften dar. Diese Seite fällt also in die Achsenrichtung des Nullsystemes; in der Abbildung ist ihr daher auch noch die darauf hinweisende Bezeichnung $aa$ beigeschrieben. Die Ebene des Dreieckes ist in der Abbildung schraffiert. Diese Ebene muß parallel zu $l'$ gehen, da eine Seite des in ihr enthaltenen Dreieckes parallel zu $l'$ gezogen war. Legt man also durch eine der konjugierten Geraden $l$ und durch die Achsenrichtung $aa$ eine Ebene, so ist diese Ebene der andern der konjugierten Geraden $l'$ parallel.

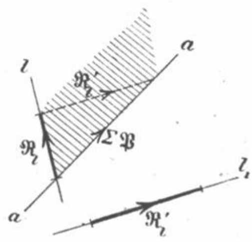


Abb. 71.

Die durch $aa$ und eine Gerade $l$ gelegte Ebene kann auch als jene Ebene bezeichnet werden, durch die die Gerade $l$ in der Achenrichtung $aa$ projiziert wird. Man kann daher auch sagen, *daß konjugierte Geraden in der Achsenrichtung durch parallele Ebenen projiziert werden.* Offenbar gilt nämlich das, was vorher für die Gerade $l$ bewiesen wurde, ebenso auch für die andere Gerade $l'$; auch $l'$ wird in der Achsenrichtung durch eine Ebene projiziert, die zu $l$ parallel geht.

An diese Betrachtung knüpft sich noch eine weitere Folgerung. Man denke sich nämlich irgendwie eine Anzahl von Strecken gezogen, die mit den Endpunkten aneinander stoßen, so daß eine Anzahl aneinander grenzender ebener Polygone entsteht, die im Zusammenhange entweder einen ganzen Polyedermantel oder einen Teil eines solchen bilden. Betrachtet man die so erhaltene räumliche Figur als Bestandteil eines Nullsystemes, so kann man zu jeder der in ihr enthaltenen Geraden die konjugierte Gerade aufsuchen. Man erhält dann eine zweite polyedrische Figur und zwar so, daß jeder Polygonebene in der ersten Figur eine Ecke in der zweiten (nämlich der zur Ebene gehörige Nullpunkt) und jeder Ecke in der ersten Figur eine Polygonebene in der zweiten (nämlich die zur Ecke gehörige Nullebene) entspricht. Hierauf denke man sich beide Polyeder in der Achsenrichtung auf eine beliebige Ebene projiziert. Nach dem, was wir vorher sahen, liefern die zueinander konjugierten Geraden parallele Projektionen. Die Projektionen beider Polyedermäntel stehen daher genau in demselben Verhältnisse zueinander wie die reziproken Figuren, mit denen wir früher bei der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene und bei der Konstruktion von Kräfteplänen zu tun hatten.

## § 25. Die praktische Ausführung der Kräftezusammensetzung.

Für die praktische Durchführung einer Kräftezusammensetzung im Raume empfiehlt es sich am meisten, die unendlich ferne Ebene zur Ebene $\varepsilon$ zu wählen, d. h. die Kräfte auf eine durch einen beliebig gewählten Punkt $A$ gehende Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückzuführen. Die Wahl des Punktes $A$ wird dabei oft durch die besonderen Umstände der Aufgabe nahegelegt. Die Resultierende $\mathfrak{R}$ findet man jedenfalls immer leicht durch graphische Summierung der gegebenen Kräfte, also so wie in § 1, Abb. 1, indem es hierfür ganz gleichgültig ist, ob die Kräfte an demselben oder an verschiedenen Angriffspunkten angreifen.

Um $\mathfrak{M}$ zu erhalten, könnte man zu jedem Kräftepaare, das bei der Parallelverlegung einer Kraft nach dem Punkte $A$ entsteht, den Momentenvektor aufsuchen und in den Rissen darstellen und hierauf alle Momentenvektoren graphisch summieren. Einfacher gelangt man aber auf folgendem Wege zum Ziele. Verbindet man nämlich in jedem Risse die Projektion des Punktes $A$ mit den Endpunkten der Projektion einer der Kräfte $\mathfrak{P}$, so erhält man die Projektionen des zur Kraft $\mathfrak{P}$ gehörigen, im Raume liegenden Momentendreieckes in den Projektionsebenen. Aus Band I, § 17 (Abb. 14 der 4. Aufl.) ist aber bereits bekannt, daß die senkrechte Projektion des Momentendreieckes auf eine Ebene zugleich das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für eine durch den Punkt $A$ senkrecht zur Projektionsebene gezogene Achse darstellt. Man braucht daher nur in jeder Projektionsebene die algebraische Summe der Momente der Kräfteprojektionen in bezug auf die Projektion des Punktes $A$ als Momentenpunkt zu bilden, um damit sofort die senkrecht zu dieser Projektionsebene stehende Komponente des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Diese Zusammensetzung kann in jedem Risse sofort leicht vorgenommen werden. Hatte man den Körper mit allen an ihm angreifenden Kräften von vornherein in drei zueinander senkrechten Rissen gezeichnet, so findet man nach der algebraischen Summierung der Momente der Kräfteprojektionen in diesen Rissen — oder der ihnen entsprechenden Flächen der Momentendreiecke — zugleich drei zueinander rechtwinklig stehende Komponenten von $\mathfrak{M}$. Man braucht dann nur noch die graphische Summierung dieser drei Komponenten vorzunehmen, um $\mathfrak{M}$ selbst zu erhalten. — In Aufgabe 22 ist dies an einem Beispiele vollständig in der Zeichnung durchgeführt.

## § 26. **Drei oder vier windschiefe Kräfte.**

Wir wollen jetzt den besonderen Fall betrachten, daß am starren Körper nur drei windschief zueinander liegende Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ vorkommen. Auf ein Kraftkreuz kann man diese, wie wir schon wissen, unter allen Umständen zurückführen. Es fragt sich aber jetzt, ob sich die Kräfte etwa ausnahmsweise auch im Gleichgewichte halten können, oder ob sie wenigstens durch eine einzige Resultierende ersetzt werden können oder ob sie schließlich einem Kräftepaare gleichwertig sein können. Der erste Fall kann, wie man leicht erkennt, niemals vorkommen. Man denke sich etwa durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ irgendeine Gerade gelegt, die $\mathfrak{P}_3$ nicht schneidet. Da die Kräfte windschief zueinander, also jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen sollten, wird man sehr viele Geraden ziehen können, die dieser Bedingung entsprechen. Wählt man eine von ihnen als Momentenachse, so verschwindet für sie das Moment von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, während das Moment von $\mathfrak{P}_3$ von Null verschieden ist. Die Momentensumme wird also nicht zu Null, während doch für Kräfte, die Gleichgewicht miteinander halten sollen, das Moment für jede Momentenachse zu Null werden muß. Gleichgewicht zwischen drei windschief liegenden Kräften ist daher niemals möglich.

Um die zweite Frage zu entscheiden, betrachten wir zunächst nur die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die für sich genommen ein Kraftkreuz darstellen. Wir denken uns dieses in ein ihm gleichwertiges umgewandelt, von dem eine Kraft mit der Wirkungslinie von $\mathfrak{P}_3$ zusammenfallen soll. Diese kann dann mit $\mathfrak{P}_3$ vereinigt werden und die Resultierende liefert im allgemeinen in Verbindung mit der andern Kraft des Kraftkreuzes das neue Kraftkreuz, das die drei gegebenen Kräfte ersetzt. Es kann aber auch vorkommen, daß die auf die Richtungslinie von $\mathfrak{P}_3$ fallende Kraft des die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ersetzenden Kraftkreuzes zufällig gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{P}_3$ ist. In diesem Falle verschwindet die Resultierende aus beiden und es bleibt nur noch die andere Kraft des Kraftkreuzes übrig, die nun die drei gegebenen Kräfte vollständig ersetzt. Ausnahmsweise kann daher, wie wir hieraus erkennen, ein Verein von drei windschief zueinander liegenden Kräften auch schon durch eine einzige Resultierende ersetzt werden. Man sieht auch, daß man durch passende Wahl der Größe und des Pfeiles der Kraft $\mathfrak{P}_3$ immer noch erreichen kann, daß dieser Fall eintritt, wenn auch die drei Richtungslinien und die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ schon beliebig vorgeschrieben sind.

Sollen endlich die drei Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ einem Kräftepaare gleichwertig sein, so muß die geometrische Summe der drei Kräfte gleich Null sein. Damit dies möglich sei, müssen die drei Richtungslinien zu einer Ebene parallel sein. Sind dann außerdem die Größen so gewählt, daß sich die Strecken $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ zu einem Dreiecke mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander reihen lassen, so verschwindet für jeden Punkt $A$ die Resultierende $\mathfrak{R}$ und es bleibt nur noch das Moment $\mathfrak{M}$ übrig. Ausnahmsweise können also drei windschief zueinander liegende Kräfte auch einem Kräftepaare gleichwertig sein.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für vier windschief zueinander liegende Kräfte anstellen. Vor allem erkennt man hier, daß unter Umständen vier windschiefe Kräfte auch im Gleichgewichte miteinander stehen können. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, nur irgend zwei einander gleichwertige Kraftkreuze ins Auge zu fassen. Kehrt man dann im einen Kraftkreuze die Pfeile beider Kräfte um, so stehen diese mit dem andern Kraftkreuze im Gleichgewichte. Natürlich müssen in diesem Falle drei der vier Kräfte eine Resultierende ergeben und diese muß überdies mit der vierten Kraft zusammenfallen, ihr gleich und entgegengesetzt gerichtet sein.

Man kann noch eine andere einfache Bedingung anführen, der vier windschiefe Kräfte genügen müssen, wenn sie im Gleichgewichte miteinander stehen sollen. Durch drei windschiefe Geraden kann man nämlich sehr viele gerade Linien ziehen, die alle drei schneiden, und zwar ist durch jeden Punkt der ersten Geraden eine Linie zu ziehen, die zugleich die beiden andern trifft, wie aus einer einfachen geometrischen Betrachtung hervorgeht. Alle diese schneidenden Geraden bilden eine Regelschar und die drei gegebenen Geraden gehören zu einer zweiten Regelschar, die mit jener zusammen auf demselben Hyperboloide liegt. Man denke sich nun irgendeine von jenen Geraden ausgewählt, die etwa die Richtungslinien der drei Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ schneidet. Betrachtet man sie als Momentenachse, so verschwindet für sie das Moment jener drei Kräfte. Wenn Gleichgewicht bestehen soll, muß daher auch das Moment von $\mathfrak{P}_4$ verschwinden, d. h. die Gerade muß von selbst auch die Richtungslinie von $\mathfrak{P}_4$ schneiden. Da dies von jeder Geraden zutrifft, die drei der Kräfte schneidet, so folgt *als Gleichgewichtsbedingung für vier Kräfte, daß sie alle vier zu einer Regelschar gehören müssen, oder daß sie, wie man sich ausdrückt, hyperboloidisch zueinander liegen müssen.* Dieser Satz gilt natürlich ebenso auch für zwei einander gleichwertige Kraftkreuze, da man diesen Fall, wie wir vorher sahen, durch bloße Umkehrung der Pfeile im einen Kraftkreuze auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. — Außerdem können vier Kräfte ausnahmsweise auch durch eine einzige Resultierende oder durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden; es ist aber nicht nötig, darauf näher einzugehen.

## § 27. Das Kraftkreuz-Tetraeder.

Irgendein Kraftkreuz sei gegeben, dessen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch Strecken auf beiden Wirkungslinien zur Darstellung gebracht sind. Man denke sich die vier Endpunkte dieser Strecken durch vier Verbindungsstrecken miteinander verbunden. Hierdurch wird ein Tetraeder gebildet, in dem $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei einander gegenüber liegende Kanten darstellen. Man kann zeigen, daß für alle untereinander gleichwertigen Kraftkreuze die in dieser Weise konstruierten Tetraeder gleichen Inhalt haben.

Den Beweis führt man am einfachsten auf Grund der in § 23 durchgeführten Betrachtung im Anschlusse an die hier wieder abgedruckte Abb. 68. Es zeigte sich dort, daß die zweite Kraft des Kraftkreuzes $\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ in einer Ebene $\alpha$ enthalten sein muß, wenn die erste Kraft $\mathfrak{R}_A$ durch einen beliebig gewählten Punkt $A$ gehen soll. Dabei ist $\alpha$ die Nullebene des Punktes $A$. Verbindet man in Abb. 68 den Punkt $A$, der als Anfangspunkt der Strecke $\mathfrak{R}_A$ gewählt sein möge, mit den Endpunkten der Strecke, durch die $\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ dargestellt wird, so erhält man eines der vier Dreiecke, die die Seitenflächen des zugehörigen Kraftkreuz-Tetraeders ausmachen. Wir wollen dieses in der Ebene $\alpha$ liegende Dreieck als die Basis des Tetraeders betrachten; die zugehörige Höhe wird dann durch die Projektion der von $A$ aus abgetragenen Strecke $\mathfrak{R}_A$ auf eine zur Ebene $\alpha$ errichtete Normale dargestellt

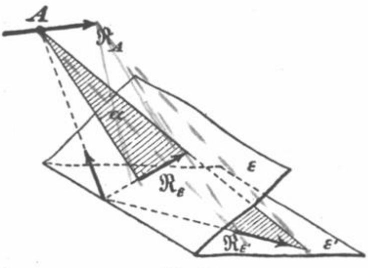

Abb. 68.

Nun stellt die Basisfläche des Tetraeders oder das Dreieck $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ zugleich das Momentendreieck der Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ für den Momentenpunkt $A$ dar. Geht man aber von der Ebene $\varepsilon$ zu irgendeiner anderen Ebene $\varepsilon'$ über, womit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ durch $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ ersetzt wird, so ist das Moment von $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ für den Punkt $A$ gleich dem Momente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$. Dies folgt am einfachsten daraus, daß $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ durch eine Zerlegung von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in zwei Komponenten erhalten wurde, von denen die andere durch den Punkt $A$ ging, so daß deren Moment verschwindet. Das Momentendreieck $A\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ hat demnach gleichen Inhalt mit dem Momentendreiecke $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder mit andern Worten: die Tetraeder der beiden Kraftkreuze, die wir uns jetzt miteinander zu vergleichen anschicken, haben Basisflächen von gleichem Inhalte.

Wir betrachten ferner die Höhen beider Tetraeder. Vorher war schon bemerkt, daß die zur Ebene $\alpha$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{R}_A$ die Höhe des zum Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_\varepsilon$ gehörigen Tetraders darstellt. Gehen wir zur Ebene $\varepsilon'$ und hiermit zu dem andern

Kraftkreuze über, so ändert sich auch $\mathfrak{R}_A$, sagen wir in $\mathfrak{R}'_A$; und zwar wird $\mathfrak{R}'_A$ als Resultierende von $\mathfrak{R}_A$ und der durch den Punkt $A$ gehenden Komponente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ gefunden. Da aber diese Komponente in der Ebene $\alpha$ enthalten ist, kann sie durch ihren Hinzutritt zu $\mathfrak{R}_A$ nichts an der zu $\alpha$ senkrechten Komponente ändern. Hieraus folgt, daß die beiden Tetraeder, die wir jetzt miteinander vergleichen, gleiche Höhen haben. Da auch die Basisflächen gleich waren, sind demnach die Tetraeder inhaltsgleich.

Hiermit ist der Satz zunächst für alle Kraftkreuze bewiesen, von denen die eine Kraft $\mathfrak{R}_A$ von demselben Angriffspunkte $A$ ausgeht, während die andere in der Nullebene $\alpha$ liegt. Ehe wir ihn auf die übrigen Fälle übertragen, wollen wir uns überlegen, welche Deutung dem Tetraederinhalte gegeben werden kann. Wir sahen schon, daß die Basisfläche das Momentendreieck von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ für den Punkt $A$ angibt. Bezeichnen wir die Fläche dieses Dreieckes mit $F$, den Winkel zwischen der Normalen zu $\alpha$ und $\mathfrak{R}_A$ mit $\gamma$ und die Größe von $\mathfrak{R}_A$ mit $R_A$, so ist das Tetraedervolumen gleich

$$\frac{1}{3} F \cdot R_A \cos \gamma.$$

Hier können wir den Faktor $\cos \gamma$ auch zu $F$ nehmen und das Produkt $F \cos \gamma$ stellt dann die Projektion des Momentendreieckes auf eine zu $\mathfrak{R}_A$ senkrechte Ebene dar, d. h. das Produkt bildet das Maß für das statische Moment der einen Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ des Kraftkreuzes in bezug auf die Richtungslinie der andern Kraft $\mathfrak{R}_A$ als Momentenachse. Der Inhalt des Tetraeders selbst ist demnach dem Produkte aus einer Kraft des Kraftkreuzes und dem in bezug auf deren Wirkungslinie als Momentenachse genommenen Momente der andern Kraft proportional.

Hieraus folgt auch sofort, daß sich der Inhalt des Tetraeders nicht ändern kann, wenn man den Angriffspunkt einer Kraft des Kraftkreuzes längs deren Wirkungslinie verschiebt, ohne sonst etwas zu ändern. Im übrigen ist dies eine rein geometrische Eigenschaft des Tetraeders, die auch geometrisch, ohne Bezugnahme auf die mechanische Bedeutung, die dem Tetraeder in unserem Falle zukommt, leicht bewiesen werden kann.

Kehren wir nun zu unserem Satze zurück, so erkennen wir leicht, daß wir von einem der Kraftkreuze, deren eine Kraft im Punkte $A$ angriff, durch bloße Verschiebung des Angriffspunktes längs der Richtungslinie sofort auch zu einem Kraftkreuze übergehen können, dessen eine Kraft durch irgendeinen andern Punkt $B$ dieser Richtungslinie geht. Das Tetraedervolumen wird hierbei nicht geändert. Zugleich wissen wir, daß sich das Tetraedervolumen auch weiterhin nicht ändert, wenn wir dieses Kraftkreuz in irgendein anderes umwandeln, bei dem $B$ als Angriffspunkt der einen Kraft festgehalten wird; denn was vorher von dem beliebig gewählten Punkte $A$ bewiesen wurde, gilt ohne weiteres auch für den jetzt mit $B$ bezeichneten Punkt. Durch wiederholte Umwandlungen dieser Art können wir aber auch zu allen andern der unter sich gleichwertigen Kraftkreuze gelangen und damit folgt in der Tat, daß deren Tetraederinhalte sämtlich untereinander gleich sind.

## § 28. **Die Zentralachse eines Kräftesystemes.**

Man denke sich ein Kräftesystem auf eine durch irgendeinen Punkt $A$ geführte Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückgeführt. Die Richtung von $\mathfrak{R}$ gibt die „Achsenrichtung" des Kräftesystemes oder des dadurch bestimmten Nullsystemes an. Der Übergang vom Punkte $A$ zu irgendeinem andern Punkte $A'$ kann dann leicht bewirkt werden. Wir verlegen zu diesem Zwecke $\mathfrak{R}$ parallel zu sich selbst und in gleicher Größe als $\mathfrak{R}'$ nach dem Punkte $A'$. Hierbei tritt noch ein neues Kräftepaar auf aus den Kräften $\mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{R}'$, dessen Momentenvektor mit $\mathfrak{M}$ zu einem neuen resultierenden Momente $\mathfrak{M}'$ zusammenzusetzen ist.

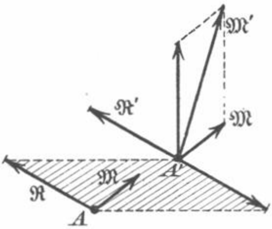


Abb. 72.

In Abb. 72 ist dies in achsonometrischer Zeichnung angedeutet. Das Parallelogramm des bei der Parallelverlegung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ von $A$ nach $A'$ entstehenden Kräftepaares ist durch Schraffierung hervorgehoben; senkrecht zur Parallelogrammfläche ist der Memententvektor angetragen, der keine besondere Bezeichnung erhalten hat. $\mathfrak{M}$ kann von $A$ nach $A'$ ohne weiteres verlegt werden, da ein Momentenvektor ein völlig freier Vektor ist Das resultierende Moment $\mathfrak{M}'$ ist mit Hilfe eines Parallelogrammes ermittelt, das genau wie ein Kräfteparallelogramm aufzuzeichnen ist.

Durch geeignete Wahl des Punktes $A'$ kann man dem Momentenvektor des aus $\mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{R}'$ bestehenden Kräftepaares jede beliebige Größe und zugleich jede senkrecht zur Achsenrichtung stehende Richtung erteilen. Hiernach kann auch der zur Achsenrichtung senkrecht stehende Anteil von $\mathfrak{M}'$ durch verschiedene Wahl des Punktes $A'$ beliebig umgestaltet werden, während die in die Achsenrichtung fallende Komponente von $\mathfrak{M}'$ davon unberührt bleibt. Sollte etwa $\mathfrak{M}$ von vornherein zufälligerweise senkrecht zu $\mathfrak{R}$ gewesen sein, so könnte auch jedes daraus abgeleitete $\mathfrak{M}'$ keine Komponente in der Achsenrichtung haben. Es bliebe dann immer nur ein zur Achsenrichtung senkrechter Momentenvektor übrig und dieser kann durch geeignete Wahl von $A'$ auf jede im übrigen beliebige Richtung und Größe gebracht werden. Bei passender Wahl von $A'$ kann er daher auch zu Null gemacht werden. Dann bleibt aber nur noch die Resultierende $\mathfrak{R}'$ als vollständiger Ersatz des Kräftesystemes übrig. Wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ für irgendeine Wahl des Punktes $A$ rechtwinklig zueinander stehen, läßt sich daher das Kräftesystem stets auf eine einzige Resultierende zurückführen.

Im andern Falle, wenn also $\mathfrak{M}$ nicht rechtwinklig zu $\mathfrak{R}$ ist, ist die Zurückführung auf eine einzige Resultierende niemals möglich. Man kann indessen auch in diesem Falle durch passende Wahl des Angriffspunktes $A'$ von $\mathfrak{R}'$ die zur Achsenrichtung senkrecht stehende Komponente von $\mathfrak{M}'$ zum Verschwinden bringen Dann bleibt neben $\mathfrak{R}'$ nur noch ein damit gleich gerichteter Momentenvektor $\mathfrak{M}'$ übrig. Diese Darstellung des Kräftesystemes kann als die einfachste angesehen werden, auf die es sich zurückführen läßt. Die zugehörige Richtungslinie von $\mathfrak{R}'$ wird als die Zentralachse des Kräftesystemes bezeichnet. Es ist nämlich ohne weiteres klar, daß, wenn irgendein Punkt $A'$ gefunden ist, für den $\mathfrak{M}'$ gleich gerichtet mit $\mathfrak{R}'$ ist, dies auch für jeden andern Punkt auf der durch $A'$ in der Achsenrichtung gezogenen Geraden zutrifft. Für alle andern, nicht auf dieser Linie gelegenen Punkte $A'$ muß dagegen immer noch eine zur Achsenrichtung senkrecht stehende Komponente von $\mathfrak{M}'$ hinzutreten.

## § 29. Die Koordinaten eines Kräftesystemes nach der analytischen Darstellung.

Um die Zusammensetzung der Kräfte im Raume nach den Methoden der analytischen Geometrie behandeln zu können, denkt man sich alle gegebenen Kräfte in Komponenten nach den Richtungen der drei rechtwinklig aufeinander stehenden Koordinatenachsen $XYZ$ zerlegt. Auch die Momentenvektoren der Kräftepaare zerlegt man in ihre Komponenten nach diesen Richtungen, d. h. man schreibt an Stelle der auf Momentenpunkte bezogenen Momente die Momente in bezug auf Achsen an, die den Koordinatenachsen parallel gehen.

Am bequemsten ist auch hier der Ersatz des gegebenen Kräftesystemes durch eine Resultierende in Verbindung mit einem resultierenden Kräftepaare. Den Punkt $A$, durch den die Resultierende geführt werden soll, läßt man gewöhnlich mit dem Koordinaten-Ursprunge zusammenfallen. Die Komponenten des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ sind dann gleich den Momentensummen der gegebenen Kräfte in bezug auf die Koordinatenachsen als Momentenachsen.

Die Koordinaten des Angriffspunktes einer der gegebenen Kräfte, $\mathfrak{P}_1$, seien mit $x_1 y_1 z_1$ und die Komponenten der Kraft in den Richtungen der Koordinatenachsen mit $X_1 Y_1 Z_1$ bezeichnet und ähnlich für die übrigen. Dann erhält man zunächst für die Komponenten $XYZ$ der Resultierenden $\mathfrak{R}$ die Gleichungen

$$X = X_1 + X_2 + \cdots = \Sigma X; \quad Y = \Sigma Y; \quad Z = \Sigma Z, \tag{31}$$

wenn auf der rechten Seite $X$ unter dem Summenzeichen irgendeine der Komponenten $X_1$, $X_2$ usf. bedeutet.

Die Komponenten des auf den Ursprung als Momentenpunkt bezogenen resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ seien mit $LMN$ bezeichnet. Man kann sie nach den schon im ersten Bande dafür gegebenen Vorschriften unmittelbar berechnen. Zur besseren Übersicht seien indessen die dafür gültigen Ausdrücke an der Hand von Abb. 73 noch einmal abgeleitet. In der Abbildung ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in drei Rissen gezeichnet und in diese Risse sind auch die Komponenten $X_1 Y_1 Z_1$ von $\mathfrak{P}_1$ in jenen Richtungen eingetragen, in denen sie positiv gerechnet werden.

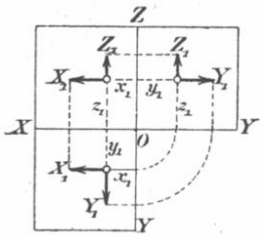

Abb. 73.

Um das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in bezug auf die $X$-Achse zu erhalten, betrachten wir ihre Projektion auf die $YZ$-Ebene und nehmen in dieser Ebene das Moment für den Ursprung $O$ als Momentenpunkt. Anstatt von der Projektion von $\mathfrak{P}_1$ selbst das Moment zu berechnen, können wir indessen auch die Summe der Momente von $Y_1$ und $Z_1$ dafür setzen, da die Resultierende aus diesen beiden die Projektion von $\mathfrak{P}_1$ auf die $YZ$-Ebene liefert. Als positiv sind dabei jene Momente in Ansatz zu bringen, die für den vorn, d. h. auf der Seite der positiven $X$-Achse stehenden Beschauer im Uhrzeigersinne drehen. Hiernach findet man für das Moment von $\mathfrak{P}_1$ in bezug auf die $X$-Achse

$$Y_1 z_1 - Z_1 y_1.$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für die übrigen Kräfte $\mathfrak{P}$ und in bezug auf die beiden andern Koordinatenachsen als Momentenachsen. Im ganzen erhält man daher

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma(Yz - Zy); \\ M &= \Sigma(Zx - Xz); \\ N &= \Sigma(Xy - Yx). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die aus den Gleichungen (31) hervorgehenden Komponenten $XYZ$ von $\mathfrak{R}$ und die jetzt berechneten Komponenten $LMN$ von $\mathfrak{M}$ faßt man unter der Bezeichnung der sechs Koordinaten des gegebenen Kräftesystemes zusammen. Diese sechs Größen genügen, um ein Kräftesystem hinreichend zu beschreiben. Bei Aufgaben über das Gleichgewicht oder die Bewegung eines starren Körpers braucht man nämlich von den äußeren Kräften nichts als jene sechs Koordinaten zu kennen.

Im Gleichgewichte kann ein Kräftesystem nur dann stehen, wenn alle sechs Koordinaten zu Null werden. Setzt man die Summengrößen auf den rechten Seiten der Gleichungen (31) und (32) gleich Null, so erhält man demnach die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen für ein beliebiges Kräftesystem. — Bemerkenswert ist, daß die Zahl dieser Gleichgewichtsbedingungen sechs beträgt; sie entspricht der Zahl der Freiheitsgrade für die Bewegung eines starren Körpers. Überhaupt besteht zwischen den Untersuchungen über die Kräftezusammensetzung im Raume und den im ersten Bande durchgeführten Betrachtungen über die Bewegung eines starren Körpers eine enge Verwandtschaft. So wie wir hier ein Kräftesystem auf eine Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückführten, wurde dort die beliebige Bewegung eines starren Körpers in die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ irgendeines Anfangspunktes und die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um eine durch diesen Anfangspunkt gehende Achse zerlegt. Der

Darstellung der Bewegung als eine schraubenförmige (bei gleicher Richtung von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$) entspricht hier die Konstruktion der Zentralachse des Kräftesystemes usf. — Man kann den Vergleich noch erheblich weiter führen, worauf aber hier verzichtet werden darf.

## § 30. Zerlegung einer Kraft nach sechs gegebenen Richtungslinien.

An die schon im ersten Abschnitte besprochenen einfacheren Zerlegungsaufgaben reiht sich jetzt die allgemeinste an, die man von der gleichen Art stellen kann, nämlich die Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien, die irgendeine Lage im Raume zueinander haben, die nicht an solche Beschränkungen wie in den früheren Fällen gebunden ist. Hierbei fragt es sich zunächst, wie groß die Zahl der gegebenen Richtungslinien, nach denen die Zerlegung erfolgen soll, sein muß, damit die Aufgabe eindeutig gelöst werden kann.

Man entscheidet diese Frage am einfachsten auf Grund der analytischen Darstellung im vorigen Paragraphen. Die Kräfte, deren Richtungslinien gegeben sind und deren Größen gesucht werden, bilden nämlich ein Kräftesystem, dessen sechs Koordinaten $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ mit den Komponenten der gegebenen Kraft, die zerlegt werden soll und mit den Momenten dieser Kraft in bezug auf die Koordinatenachsen der Reihe nach übereinstimmen müssen. Schreibt man dies an, so erhält man sechs Gleichungen, in denen nur die Größen der gesuchten Kräfte als Unbekannte auftreten. Hierbei ist nämlich zu beachten, daß die nach den Achsenrichtungen genommenen Komponenten der Unbekannten, die in die Gleichungen (31) und (32) einzutreten haben, aus den Unbekannten selbst durch Multiplikation mit den Kosinus der Neigungswinkel hervorgehen. Diese Kosinus sind aber bekannt, weil die Richtungslinien gegeben waren, so daß in der Tat die Größen der unbekannten Kräfte die einzigen Unbekannten in jenen sechs Gleichungen bilden, die für sie vom ersten Grade sind.

Hieraus erkennt man, daß die Zahl der Kraftrichtungslinien, nach denen die Zerlegung erfolgen soll, sechs betragen muß. Wäre die Zahl geringer, etwa gleich 5, so könnte man im allgemeinen die sechs Gleichungen, die zwischen ihnen erfüllt sein müssen, nicht durch eine passende Wahl der Größe der Kräfte befriedigen. Anderseits könnte bei sieben Kraftrichtungslinien die Größe einer dieser Kräfte beliebig gewählt werden und die übrigen könnten durch Auflösen der sechs Gleichungen gefunden werden. Es wäre daher keine eindeutige Zerlegung mehr vorgeschrieben, sondern man hätte ein System von unendlich vielen Lösungen der Zerlegungsaufgabe.

Daß bei sechs Richtungslinien nur eine einzige Lösung möglich ist, folgt sofort daraus, daß sechs Gleichungen ersten Grades mit sechs Unbekannten nur eine Lösung zulassen. Zugleich folgt auch, daß Ausnahmefälle vorkommen können; sie treten, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, dann ein, wenn die Eliminationsdeterminante, also die aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildete sechsreihige Determinante zu Null wird. Aus dieser analytischen Bedingung lassen sich alle möglichen Ausnahmefälle ableiten. Anstatt dessen wollen wir uns auf einfacherem Wege Rechenschaft darüber geben, welche besonderen Fälle bei der Annahme der sechs gegebenen Richtungslinien unter allen Umständen vermieden werden müssen.

Zunächst dürfen sich von den sechs Richtungslinien nicht mehr als drei in einem Punkte schneiden. Gingen nämlich vier durch denselben Punkt, so könnte man durch diesen Punkt eine Gerade ziehen, die zugleich auch die beiden andern Richtungslinien schnitte. Für diese Gerade als Momentenachse wäre dann das Moment aller sechs unbekannten Kräfte gleich Null. Das Moment der gegebenen Kraft, die eine ganz beliebige Lage haben kann, wäre dagegen von Null verschieden. Hiernach wäre es nicht möglich, die sechs unbekannten Kräfte so zu wählen, daß sie der gegebenen Kraft gleichwertig wären (oder auch bei der Umkehrung der Zerlegungsaufgabe so, daß sie mit der gegebenen Kraft Gleichgewicht hielten). Unter besonderen Annahmen für die gegebene Kraft, falls nämlich deren Richtungslinie die vorher gezogene Momentenachse ebenfalls schneiden sollte, würde der angegebene Hinderungsgrund zwar wegfallen. Eine Zerlegung wäre dann möglich, aber, wie hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, nicht mehr in eindeutiger Weise. Der hier erwähnte Fall kümmert uns nämlich deshalb nicht weiter, weil die Zerlegungsaufgabe dahin zu verstehen ist, daß die Zerlegung für jede Wahl ausführbar bleiben soll, die man für die gegebene Kraft treffen mag.

Ebenso dürfen auch von den gegebenen Richtungslinien nicht mehr als drei parallel zueinander sein. Denn wenn vier parallel wären, so könnte man sagen, daß sie durch denselben unendlich fernen Punkt gingen und von diesem Punkte aus könnte man ebenso wie vorher eine Momentenachse ziehen, die zugleich die beiden andern Richtungslinien träfe. Überhaupt braucht man bei allen diesen Betrachtungen zwischen unendlich fernen Elementen und den im Endlichen gelegenen keinen grundsätzlichen Unterschied zu machen. Man erspart sich dadurch die ausdrückliche Besprechung von Fällen, die sich auf Grund dieser Anschauung auf die andern, gewöhnlich vorliegenden zurückführen lassen.

*Ferner dürfen von den sechs gegebenen Richtungslinien auch nicht mehr als drei in einer Ebene liegen.* Lägen nämlich vier in derselben Ebene, so könnte man durch die Schnittpunkte der beiden andern mit dieser Ebene eine Gerade ziehen, die ebenfalls alle sechs Richtungslinien träfe, und die vorigen Schlußfolgerungen könnten auf diesen Fall ohne Änderung übertragen werden. Auch hier sind die Fälle, daß einer oder beide Schnittpunkte ins Unendliche fallen, schon als mit eingeschlossen zu betrachten. Mit den jetzt angeführten sind freilich noch nicht alle möglichen Ausnahmefälle erschöpft; sie sind aber, weil sie am häufigsten vorkommen, die wichtigsten. Jedenfalls sieht man, daß ein Ausnahmefall immer dann eintritt, wenn man eine Gerade ziehen kann, die alle sechs Richtungslinien trifft.

Wir wollen uns jetzt überlegen, auf welche Weise die Zerlegung, falls sie überhaupt möglich ist, wirklich ausgeführt werden kann. Ein Mittel dazu — und zwar das allgemeinste, das stets anwendbar bleibt — haben wir schon im Aufstellen der sechs Gleichungen und deren Auflösung nach den sechs Unbekannten kennen gelernt. Die Durchführung der Rechnung ist aber in dieser Form, wenn nicht gerade besondere Vereinfachungen vorliegen, sehr umständlich, und man setzt daher, wenn es irgend angeht, lieber ein anderes Verfahren an deren Stelle, das kürzer zum Ziele führt.

Am einfachsten läßt sich die Aufgabe erledigen, wenn zufällig die sechs gegebenen Richtungslinien mit den Kanten eines Tetraeders zusammenfallen, oder überhaupt immer dann, wenn sich drei davon in einem Punkte schneiden und die drei andern in einer Ebene liegen. Man wähle dann jenen Schnittpunkt als Punkt $A$ (im Sinne der früher gebrauchten Bezeichnungen) und die Ebene, in der die drei übrigen Richtungslinien liegen, als Ebene $\varepsilon$ aus. Die beliebig gegebene Kraft läßt sich dann durch zwei Komponenten ersetzen, von denen eine durch $A$ geht, während die andere in $\varepsilon$ liegt. Man braucht nur noch die erste Komponente nach den drei mit ihr von $A$ ausgehenden Richtungslinien und die andere nach den drei mit ihr in $\varepsilon$ liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Diese Konstruktionen sind früher bereits ausführlich besprochen worden und können daher hier als bekannt angesehen werden. Nach ihrer Ausführung ist die Aufgabe gelöst. Zugleich erkennt man, daß der hier besprochene Fall jedenfalls nicht zu den Ausnahmefällen gehört; die Zerlegung ist vielmehr immer möglich, solange nicht etwa der Punkt $A$ in die Ebene $\varepsilon$ fällt.

Ferner ist auch klar, daß die Lösung nicht nur für die Zerlegung einer Einzelkraft anwendbar bleibt, sondern daß man auf demselben Wege auch ein beliebig gegebenes Kräftesystem durch Kräfte ersetzen kann, die längs der sechs gegebenen Richtungslinien wirken. Dieselbe Erweiterung ist übrigens auch in allen andern Fällen möglich, denn sobald man irgendeine Kraft nach sechs Richtungslinien zu zerlegen vermag, kann man diese Zerlegung auch für alle Kräfte eines Kräftesystemes anwenden und hiermit das ganze Kräftesystem durch Kräfte längs der vorgeschriebenen Richtungslinien ersetzen.

Im allgemeinsten Falle läßt sich ein Verfahren anwenden, das als eine Verallgemeinerung der aus der Kräftezerlegung in der Ebene bekannten Ritterschen Momentenmethode betrachtet werden kann. Nach der Ritterschen Methode sucht man den Schnittpunkt von zwei der drei unbekannten Kräfte auf und schreibt für ihn eine Momentengleichung an, in der nur noch die dritte der Richtungslinie nach gegebene Kraft als Unbekannte auftritt. Wir wollen sehen, wie sich dieses Verfahren auf den Raum übertragen läßt. An Stelle des Momentenpunktes tritt hier eine Momentenachse, die man durch möglichst viele der gegebenen Richtungslinien zu ziehen sucht. Gelingt es, eine solche Momentenachse durch fünf Richtungslinien zu legen, was in praktisch vorkommenden Fällen oft ohne weiteres möglich ist, so erhält man die sechste Kraft genau wie bei der Ritterschen Methode aus der Momentengleichung, in der dann nur noch diese eine Unbekannte auftritt.

Im allgemeinsten Falle ist es freilich nicht möglich, eine Gerade zu ziehen, die fünf der gegebenen Richtungslinien trifft. Dagegen kann man im allgemeinen durch je vier von ihnen zwei Geraden legen. Man erkennt dies am einfachsten aus der Überlegung, daß durch drei windschief zueinander liegende Richtungslinien ein Hyperboloid gelegt werden kann, das von der vierten Richtungslinie als Fläche zweiter Ordnung in zwei Punkten getroffen wird. Durch jeden dieser Schnittpunkte geht ein Strahl der Regelschar, der auch die drei andern trifft. Schreibt man nun für jede der beiden Schnittgeraden als Momentenachsen eine Momentengleichung an, so erhält man zwei Gleichungen, in denen die Größen der beiden letzten Kräfte als Unbekannte vorkommen. Diese muß man nun freilich immer noch nach den Unbekannten auflösen; aber es ist klar, daß die Auflösung von zwei Gleichungen viel weniger Mühe macht, als die Auflösung von sechs bei dem früher besprochenen allgemeinsten Verfahren.

Die wirkliche Aufsuchung der beiden Geraden, die man durch vier der gegebenen Richtungslinien zu legen vermag, bildet eine Aufgabe der darstellenden Geometrie, die freilich selbst so viel Schwierigkeiten machen kann, daß das Verfahren keinen Vorteil mehr bietet. Praktisch liegt aber die Sache bei solchen Fällen, wie sie in den Anwendungen vorkommen können, gewöhnlich viel einfacher: gewöhnlich kann man hier die beiden Schnittgeraden ohne weiteres angeben. Man nehme z. B. an, daß die sechs Richtungslinien wenigstens paarweise in einer Ebene liegen, also etwa 1 und 2 in einer Ebene und 3 und 4 in irgendeiner andern. Verbindet man dann den Schnittpunkt von 1 und 2 mit dem Schnittpunkte von 3 und 4, so hat man sofort eine der beiden gesuchten Geraden. Die andere ergibt sich als Schnittlinie der Ebene 1, 2 mit der Ebene 3, 4.

Auch ob etwa ein Ausnahmefall vorliegt, bei dem die Zerlegung nach den sechs Richtungslinien nicht möglich ist, muß sich beim Aufstellen der beiden Momentengleichungen herausstellen. Es kann nämlich vorkommen, daß beide Gleichungen sich widersprechen, so daß sie nicht nach den beiden Unbekannten aufgelöst werden können. Dieser Ausnahmefall tritt immer ein, wenn sich eine Gerade ziehen läßt, die alle sechs Richtungslinien trifft. Er kann aber auch unter andern Umständen eintreten, nämlich immer dann, wenn die Eliminationsdeterminante der beiden Momentengleichungen zu Null wird.

## § 31. **Praktische Anwendungen dieser Zerlegungsaufgabe.**

Die wichtigste Anwendung, die von den vorausgehenden Untersuchungen gemacht werden kann, bezieht sich auf die Ermittelung der Spannungen von Stäben, durch die zwei starre Körper fest miteinander verbunden werden. Aus den Untersuchungen des ersten Bandes ist bereits bekannt, daß ein starrer Körper relativ zu einem zweiten, der als feststehend angenommen wird, wenn gar keine Fessel zwischen beiden besteht, sechs Freiheitsgrade der Bewegung besitzt. Daraus wurde schon damals geschlossen, daß man sechs Fesseln, von denen jede einen Freiheitsgrad der Bewegung aufhebt, anlegen müsse, um beide Körper in feste Verbindung miteinander zu bringen. Solche Fesseln sind im einfachsten Falle Stäbe, die zwischen geeignet ausgewählten Punkten beider Körper angebracht werden und die eine Entfernungsänderung zwischen ihren Endpunkten verhindern.

Wollte man Stäbe verwenden, die an den Endpunkten steif mit beiden Körpern verbunden wären, so daß sie sich nicht gegen diese zu drehen vermöchten und die auch zugleich widerstandsfähig genug gegen Verbiegen und Verdrehen konstruiert wären, so würde zwar offenbar schon ein einziger Stab ausreichen, um zwei starre Körper unveränderlich miteinander zu verbinden. Hier wird aber, wie schon in früheren Fällen, vorausgesetzt, daß die Verbindungsstäbe nur gegen Zug und Druck hinreichend widerstandsfähig sind und daß sie sich daher auch namentlich an den Befestigungsstellen leicht etwas gegen die mit ihnen verbundenen Körper zu drehen vermögen, so daß man dem wirklichen Verhalten ziemlich nahe kommt, wenn man annimmt, daß die Verbindung an diesen Stellen gelenkförmig (nach Art eines Kugelgelenkes) bewirkt sei. Dies entspricht auch der konstruktiven Praxis, in der man, wenigstens bei größeren Ausführungen, Stabverbindungen immer so anzuordnen sucht, daß die Widerstandsfähigkeit der Stäbe gegen Zug und Druck schon vollständig ausreicht, um die Unverschieblichkeit des ganzen Verbandes zu sichern. In diesem Falle wird, wie schon früher nachgewiesen wurde, durch einen Stab nur ein Freiheitsgrad der Relativbewegung vernichtet und man braucht dann mindestens sechs Stäbe, um eine steife Verbindung zwischen beiden Körpern herzustellen. Diese Zahl reicht auch, wenn Ausnahmefälle vermieden werden, zur Erreichung des Zweckes schon vollkommen aus.

Ergänzt wird diese, auf die Bewegungslehre des starren Körpers gestützte Überlegung durch die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen. Wenn nämlich die Stäbe imstande sein sollen, beide Körper wirksam gegeneinander abzustützen, müssen die Spannungen, die sie zwischen beiden übertragen, ausreichen, um gegenüber allen Lasten, die an einem von ihnen beliebig angebracht werden können, Gleichgewicht herzustellen. Von diesen Spannungen sind die Richtungslinien, die mit den Stabmittellinien zusammenfallen, gegeben. Man muß daher jede beliebig an einem der beiden Körper angebrachte Last nach den Stabrichtungslinien so zerlegen können, daß die Stabspannungen in Verbindung mit der gewählten Last an dem betreffenden starren Körper ein Gleichgewichtssystem bilden.

Wir sahen aber, daß sechs Richtungslinien gegeben sein müssen, wenn die Zerlegung eindeutig ausführbar sein soll. In Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnisse folgt demnach auch aus der auf die Kräftezerlegung gestützten Betrachtung, daß sechs Stäbe zur Herstellung einer ausreichenden Abstützung zwischen beiden Körpern erforderlich sind. Zugleich können wir uns auch hinsichtlich der Ausnahmefälle, die bei der Anordnung der Stäbe vermieden werden müssen, auf die darüber im vorigen Paragraphen angestellten Auseinandersetzungen beziehen.

Sehr häufig ist einer der Körper, die durch die sechs Stäbe miteinander verbunden werden sollen, die feste Erde. Der zweite soll dann durch die Verbindungsstäbe vollständig festgehalten werden, so daß er gar keine Bewegungen gegen den irdischen Raum mehr auszuführen vermag. Man denke etwa an eine Tischplatte, die möglichst unverschieblich aufgestellt werden soll, wozu sechs Stäbe erforderlich sind, die jeder Belastung gegenüber nur auf Zug oder Druck Widerstand zu leisten brauchen.

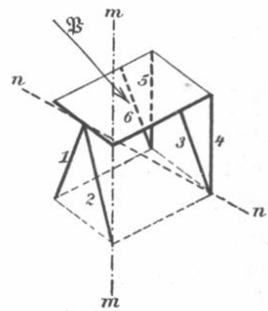

Abb. 74.

Ein Beispiel hierfür wird durch Abb. 74 in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Von den sechs Stäben laufen, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, je zwei in einem Punkte zusammen, hier die Stäbe 1 und 2 in einem Punkte der Tischplatte, und 3 und 4 sowie 5 und 6 in je einem Punkte des Fußbodens. An der Tischplatte möge irgendeine beliebig gerichtete Last $\mathfrak{P}$ angreifen; man soll die dadurch in den sechs Beinen hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.

Man sucht zunächst eine Momentenachse auf, die durch mindestens vier Stäbe, etwa durch 1, 2, 3, 4 geht. Eine solche erhalten wir durch Aufsuchen der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 3, 4. Das ist die in der Abbildung mit $mm$ bezeichnete Gerade; sie steht hier lotrecht, weil beide Ebenen 1, 2 und 3, 4 lotrecht vorausgesetzt waren. Zugleich erlangt man hier noch von selbst den weiteren Vorteil, daß *mm* auch noch die Richtungslinie 5 schneidet. Sie ist nämlich parallel zu ihr, da Stab 5 lotrecht steht, und dies entspricht einem Schnitte, denn daß dieser erst im Unendlichen erfolgt, bleibt für unseren Zweck gleichgültig.

Die Spannung des Stabes 6 kann demnach sofort aus einer einzigen, für die Achse *mm* aufgestellten Momentengleichung berechnet werden. Hierbei erinnern wir uns, daß man die Momente in bezug auf Achsen am einfachsten erhält, wenn man die Kräfte auf eine zur Achse senkrecht stehende Ebene projiziert und die Momente in dieser Ebene von den Kräfteprojektionen in bezug auf den Punkt nimmt, in dem die Achse die Projektionsebene trifft. Das wäre also hier die Grundrißebene. In einem praktisch vorliegenden Falle wird man ohnehin schon eine Grundrißzeichnung des Tisches und der an ihm angreifenden Lasten besitzen. Die axonometrische Zeichnung dient nur als Übersichtszeichnung, die nicht im Maßstabe aufgetragen zu werden braucht, sondern bloß freihändig entworfen wird. — Für den Fußpunkt des Stabes 2 schreibt man also im Grundrisse die Bedingung an, daß das Moment der Projektion von $\mathfrak{P}$ gleich dem Momente der Projektion der Stabspannung 6 sein muß. Daraus findet man sofort die Projektion der Stabspannung 6 und hieraus auch, da die Richtungslinie des Stabes bekannt ist, (unter Zuhilfenahme des Aufrisses), die Stabspannung 6 selbst. Man sieht auch leicht schon aus der axonometrischen Zeichnung, daß Stab 6 durch die angegebene Last $\mathfrak{P}$ in Druckspannung versetzt wird.

Hätte sich *mm* nicht zufällig auch mit der Richtungslinie des Stabes 5 geschnitten, so wären in der Momentengleichung zwei unbekannte Stabspannungen vorgekommen. In diesem Falle hätte man noch die zweite Gerade aufsuchen müssen, die durch die Stäbe 1, 2, 3, 4 gelegt werden kann. Dies ist die Gerade *nn*, die den oberen Endpunkt von 1 und 2 mit dem unteren Endpunkte von 3 und 4 verbindet. Dann wird das Verfahren freilich umständlicher, da man nun $\mathfrak{P}$, 5 und 6 auf eine zu *nn* senkrechte Ebene zu projizieren und in dieser (nach Umklappen) die Momentengleichung aufzustellen hat. — Wir wollen indessen jetzt bei dem einfacheren Beispiele bleiben.

Geradeso wie 6 kann man natürlich auch die Stabspannung 3 ermitteln, indem man die Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 5, 6 als Momentenachse wählt. Auch dies erfordert nur das Anschreiben einer einfachen Momentengleichung im Grundrisse.

Hierauf gehe man zur Ermittelung der Stabspannungen 1 und 2 über. In diesem Falle vermag man keine Momentenachse zu ziehen, die außer den vier übrigen Stäben auch noch einen von jenen beiden schnitte. Man muß daher zwei Momentengleichungen anschreiben und sie nach den Unbekannten 1 und 2 auflösen. Diese Lösung gestaltet sich indessen hier ganz einfach.

Eine der beiden Momentenachsen, die durch die Stabrichtungslinien 3, 4, 5, 6 geht, ist die Verbindungslinie der Fußpunkte dieser vier Stäbe. Diese Achse liegt in der Grundrißebene und projiziert sich in einem rechtwinklig zur Achse gezeichneten Aufrisse als Punkt. In diesem Aufrisse decken sich ferner die Projektionen von 1 und 2. Man findet daher aus einer einfachen Momentengleichung im Aufrisse sofort die Summe der Vertikalkomponenten von 1 und 2.

Die andere durch die Linien 3, 4, 5, 6 gehende Momentenachse ist die unendlich ferne Schnittlinie der beiden durch 3 und 4 und durch 5 und 6 gelegten parallelen Ebenen. *Immer wenn man auf eine Momentengleichung für eine unendlich ferne Achse geführt wird, hat man zu beachten, daß eine solche gleichwertig mit einer Komponentengleichung ist, die für die wirkliche Ausrechnung an ihre Stelle tritt.* Die Lage einer unendlich fernen Achse wird nämlich als Schnitt eines Büschels paralleler Ebenen definiert. Ferner kommt es bei dem Momente in bezug auf eine Achse nur auf jene Komponente der Kraft an, die im Angriffspunkte der Kraft rechtwinklig zu der von der Achse aus durch den Angriffspunkt gelegten Ebene steht. Alle diese Komponenten gehen aber bei unendlich ferner Lage der Achse in derselben

Richtung und da ferner alle Hebelarme, weil sie sich nur um endliche Beträge voneinander unterscheiden, als gleich groß anzusehen sind, so vereinfacht sich die Momentengleichung in der Tat zu der Bedingung, daß die algebraische Summe der in der Richtung senkrecht zu jenem Ebenenbüschel genommenen Komponenten aller Kräfte gleich Null sein muß.

In unserem Falle erhalten wir also eine Gleichung, die ausdrückt, daß die algebraische Summe aus den Horizontalkomponenten von 1 und 2 und der parallel zur Verbindungslinie der Fußpunkte von 1 und 2 genommenen Komponente von $\mathfrak{P}$ gleich Null sein muß. Diese Gleichung in Verbindung mit der vorher schon gefundenen Momentengleichung gestattet sofort die Auflösung nach den beiden unbekannten Stabspannungen 1 und 2.

Nachdem man von einigen Stäben die Spannungen bereits ermittelt hat, kann man die der noch übrigen (also hier die von 4 und 5) viel einfacher berechnen. Man braucht nämlich jetzt nicht mehr zu vermeiden, daß in einer neu aufzustellenden Momentengleichung zugleich die Momente der andern Stabspannungen auftreten, weil man von diesen die Werte schon kennt. Projiziert man also etwa den Tisch auf die durch die Richtungen von 4 und 5 gelegte Ebene, so kommen in dieser nur zwei unbekannte Kräfteprojektionen vor und indem man etwa den Momentenpunkt auf die Richtung von 4 legt, erhält man aus der Momentengleichung sofort die darin allein noch unbekannte Spannung des Stabes 5.

## Aufgaben.

*21. Aufgabe. Auf einer in zwei Punkten A und B unterstützten Welle (Abb. 75) sind zwei Arme aufgesteckt, von denen einer horizontal, der andere vertikal gerichtet ist. Am horizontalen Arme wirkt die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ und am vertikalen Arme die horizontale Kraft $\mathfrak{Q}$. Man soll das aus beiden Kräften gebildete Kraftkreuz durch ein anderes ersetzen, von dem eine Kraft durch A geht, während die zweite in der durch B senk-*

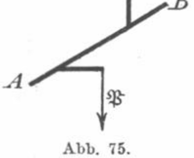

Abb. 75.

*recht zur Welle gezogenen Ebene liegt. Unter welchen Umständen wird ferner die Wellenmittellinie $AB$ zu einer Nullinie?*

*Lösung.* In Abb. 76 ist die Welle in drei Rissen gezeichnet; der dritte Riß, in dem sich $AB$ als Punkt projiziert, liegt in der durch $B$ senkrecht zur Welle gezogenen Ebene, die wir weiterhin

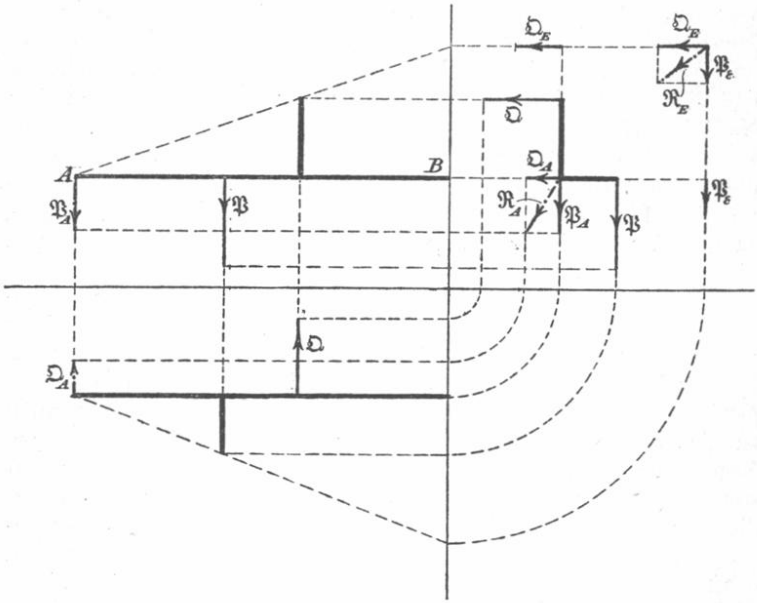


Abb. 76.

als die Ebene $\varepsilon$ bezeichnen wollen. Zunächst wird von $A$ aus durch die Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ eine Ebene gelegt und deren Spur in der Ebene $\varepsilon$ aufgesucht. Da $\mathfrak{P}$ parallel zu $\varepsilon$ ist, haben wir es in zwei parallele Komponenten $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{P}_\varepsilon$ zu zerlegen, von denen $\mathfrak{P}_\varepsilon$ in die soeben erwähnte Spur fällt. Hiervon ist $\mathfrak{P}_A$ die größere Komponente, da $\mathfrak{P}$ näher bei $A$ als bei $\varepsilon$ liegt; $\mathfrak{P}_\varepsilon$ verhält sich zum ganzen $\mathfrak{P}$ wie der Abschnitt der Welle von $A$ bis zu dem Arme, an dem $\mathfrak{P}$ angreift, zur ganzen Welle.

Ebenso wird auch $\mathfrak{Q}$ in die zwei Komponenten $\mathfrak{Q}_\varepsilon$ und $\mathfrak{Q}_A$ zerlegt, von denen die erste in die Spur der von $A$ aus durch $\mathfrak{Q}$ gezogenen Ebene fällt. Alle diese Komponenten liegen entweder in der Ebene $\varepsilon$ selbst oder sie projizieren sich auf diese Ebene in wahrer Größe. In diesem Risse kann daher auch die Zusammensetzung von $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{Q}_A$ zu $\mathfrak{R}_A$ und von $\mathfrak{P}_\varepsilon$ und $\mathfrak{Q}_\varepsilon$ zu $R_\varepsilon$ ohne weiteres vorgenommen werden. Hiermit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Die Wellenmittellinie $AB$ schneidet von dem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A \mathfrak{R}_\varepsilon$ auf jeden Fall eine Kraft, nämlich $\mathfrak{R}_A$. Soll sie eine Nullinie sein, so muß sie zugleich auch die andere Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ schneiden. In diesem Falle kann man $\mathfrak{R}_\varepsilon$ nach dem zweiten Stützpunkte $B$ verlegen. Ein an den Stützpunkten $A$ und $B$ angreifendes Kraftkreuz kann aber die Welle nicht in Umdrehung versetzen; es bringt nur Auflagerkräfte in den Lagern hervor. Man erkennt hieraus, daß $AB$ nur für den Fall des Gleichgewichtes der Welle zu einer Nullinie wird. Dies hätte man auch schon daraus schließen können, daß nach der Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen um die Wellenmittellinie die Summe der Momente aller äußeren Kräfte für diese Linie als Momentenachse zu Null werden muß, wobei noch zu beachten ist, daß die Auflagerkräfte zu dieser Momentensumme nichts beitragen.

*Anmerkung.* Man erkennt hieraus auch, wie man die Auflagerkräfte für eine Welle ermittelt, die an beliebig aufgesteckten Rädern oder Armen irgendwelche Lasten aufnimmt, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie sich an der Welle Gleichgewicht gegen Drehung halten. Man verlege jede Kraft parallel zu sich selbst in der senkrecht zur Wellenmittellinie gezogenen Ebene nach der Mittellinie. Alle bei dieser Parallelverlegung auftretenden Kräftepaare halten sich wegen der vorher genannten Bedingung im Gleichgewichte und brauchen daher nicht weiter beachtet zu werden. Dann kann man von jeder einzelnen der nach der Mittellinie verlegten Lasten die Auflagerkräfte auf gewöhnliche Weise ermitteln. Nachträglich findet man den gesamten Auflagerdruck an jeder Stütze durch geometrische Summierung aus den einzeln bestimmten und hierbei auch der Richtung nach gekennzeichneten Auflagerkräften.

*22. Aufgabe. An dem in Abb. 77 in drei Rissen dargestellten zylindrischen Körper wirken die Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$. Man soll diese auf eine Einzelkraft $\mathfrak{R}$, die durch den Mittelpunkt des Zylinders geht, und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückführen.*

*Lösung.* $\mathfrak{R}$ erhält man einfach durch Parallelverlegung der Kräfte $\mathfrak{P}$ nach dem Mittelpunkte $A$ des Zylinders, wo sie graphisch summiert werden können. Die Seiten des hierfür zu bildenden Kraftecks sind in der Abbildung in allen drei Rissen durch punktierte Linien angegeben; nur die Seite $\mathfrak{R}$ selbst ist durch einen starken Strich hervorgehoben.

Um das Moment $\mathfrak{M}$ zu finden, ermittelt man in jedem Risse die Flächeninhalte der durch Schraffierung hervorgehobenen Momentendreiecke. Die algebraische Summe dieser Flächeninhalte gibt die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf die zu der betreffenden Zeichenebene senkrecht stehende Achse an. $\mathfrak{M}$ selbst findet man als geometrische Summe der drei Komponenten $M_x$, $M_y$, $M_z$.

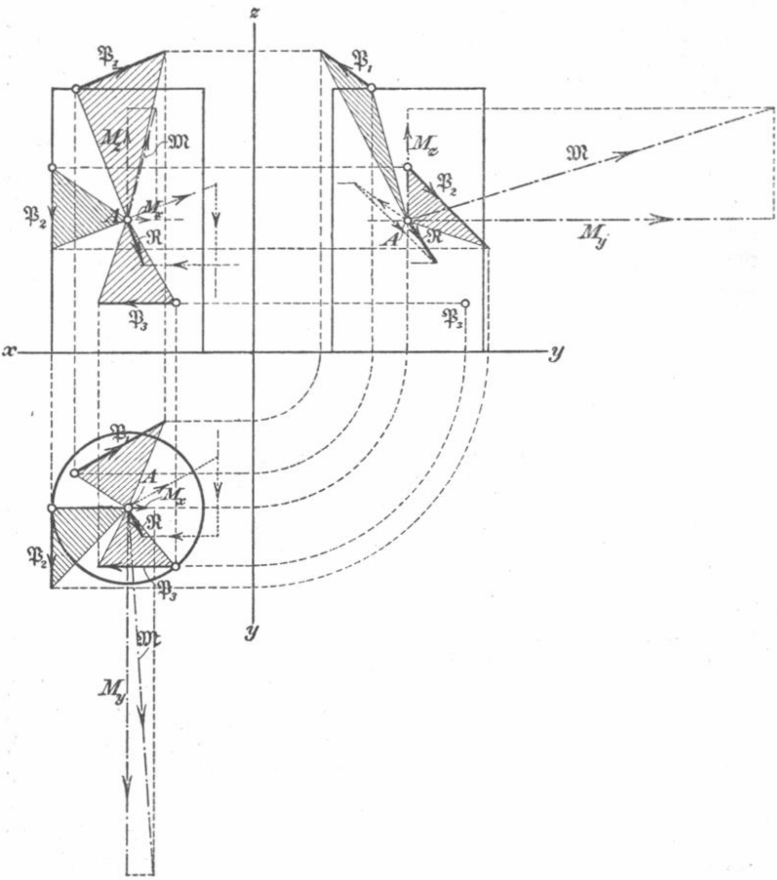


Abb. 77.

Die Abbildung ist im Maßstabe gezeichnet und zwar ist angenommen worden, daß alle Längen im Verhältnisse 1 : 40 gegen die natürliche Größe des Körpers verkleinert seien. Als Kräftemaßstab soll 1 mm = 20 kg gelten. Natürlich muß man, um die Größe einer Kraft hiernach aus der Zeichnung entnehmen zu können, zuerst die wahre Länge der ihr entsprechenden Strecke bestimmen, von der unmittelbar nur die Projektionen gegeben sind. Dies kann aber nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie leicht ausgeführt werden.

Aus beiden Maßstäben folgt auch der Maßstab, nach dem die Flächen der Momentendreiecke auszumessen sind. Von der Grundlinie, die die Kraft darstellt, hat jeder Millimeter die Bedeutung von 20 kg und von dem Hebelarme stellt jeder Millimeter in Wirklichkeit 40 mm oder 0,04 m vor. Beachtet man noch, daß der Dreiecksinhalt nur das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe angibt, so folgt, daß jeder Quadratmillimeter des Dreiecksinhaltes ein Moment von 2 · 20 · 0,04 oder 1,6 mkg angibt. Anstatt dessen kann man auch für jedes Dreieck sofort den doppelten Inhalt berechnen (indem man die Division mit 2 wegläßt) und hat dann hierfür 1 qmm = 0,8 mkg zu setzen. Die Ausmessung der doppelten Dreiecksflächen lieferte

$$M_x = 78{,}8 - 97{,}5 = -\,18{,}7 \text{ qmm} = -\,15{,}0 \text{ mkg}$$

$$M_y = 241 + 107 - 105 = +\,243 \text{ qmm} = +\,194{,}4 \text{ mkg}$$

$$M_z = 102{,}5 + 77 - 105 = +\,74{,}5 \text{ qmm} = +\,59{,}6 \text{ mkg.}$$

Als Maßstab für das Auftragen der Momentenvektoren wurde 1 mm = 4 mkg gewählt. Dabei mußte $M_x$ des negativen Vorzeichens wegen im Sinne der negativen $X$-Achse aufgetragen werden. Für die Größe des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ erhält man schließlich (nach Ermittelung der wahren Länge) 204 mkg und für die Größe der Resultierenden $\mathfrak{R}$ 148 kg.

*23. Aufgabe. Eine Welle (etwa die Schwungradwelle einer Dampfmaschine) ist in zwei Lagern A und B (Abb. 78) unterstützt und trägt Lasten (Gewicht, Riemenzug u. dgl.) die in drei verschiedenen Ebenen, I (vertikal), II (horizontal) und III (unter 30° gegen II geneigt) enthalten sind. Man soll das resultierende Biegungsmoment für verschiedene Querschnitte ermitteln.*

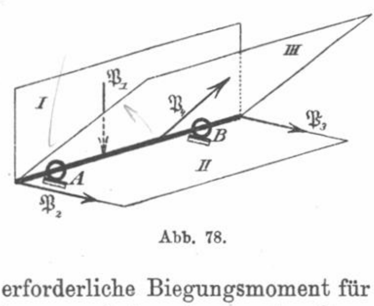


Abb. 78.

*Lösung.* Um das zur Berechnung auf Biegungsfestigkeit erforderliche Biegungsmoment für einen irgendwie belasteten Stab in bezug auf einen bestimmten Querschnitt zu erhalten, denkt man sich alle Lasten auf der einen Seite, gewöhnlich links vom Querschnitte, zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden Resultierenden und einem resultierenden Momente zusammengefaßt. Steht der Momentenvektor des resultierenden Momentes senkrecht zur Stabachse, so gibt er unmittelbar das Biegungsmoment für den Querschnitt an. Im andern Falle wird das Biegungsmomeut durch die zur Stabachse senkrecht stehende Komponente des Momentenvektors angegeben, während die in die Richtung der Stabachse fallende Komponente das zu einer Beanspruchung auf Verdrehen führende Torsionsmoment angibt.

Wenn die Lasten, wie in Abb. 78, die Stabachse sämtlich schneiden, kommen überhaupt keine Torsionsmomente vor. Es mag indessen bemerkt werden, daß eine der Kräfte ursprünglich auch an einer auf der Welle aufgekeilten Kurbel oder sonstwie exzentrisch angegriffen haben kann; dann ist sie aber in der durch ihren Angriffspunkt senkrecht zur Welle gezogenen Ebene parallel nach der Wellenachse zu verlegen und in Abb. 78 ist angenommen, daß diese Verlegung bereits ausgeführt sei. Für das Biegungsmoment ist es nämlich ganz gleichgültig, ob die Last an einem Kurbelzapfen oder an dem ihm entsprechenden Punkte der Wellenachse angreift, da die Parallelverlegung nach der Achse nur zu einem Torsionsmomente und nicht zu einer senkrecht zur Wellenachse stehenden Komponente des Momentenvektors führt.

Am einfachsten löst man die Aufgabe derart, daß man zunächst in jeder der drei Lastebenen die darin auftretenden Lasten, Auflagerkräfte und Biegungsmomente für sich untersucht und dann die zugehörigen Momentenvektoren geometrisch summiert. In jeder Lastebene kann man mit Hilfe eines Seilpolygons, dessen Horizontalzug man in allen Fällen gleich groß wählt, die Momentenfläche auftragen, wie es in Abb. 79 (S. 162) geschehen ist. Die Momentenflächen sind schraffiert und mit den Nummern I, II, III der Lastebenen bezeichnet, zu denen sie gehören.

Oben in Abb. 79 ist eine Gesamtansicht der Welle mit Einzeichnung der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ $\mathfrak{P}_4$ gegeben, von denen sich freilich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ als Punkte projizieren. Daneben steht eine Seitenansicht, in der sich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ decken. Noch etwas weiter rechts sind in der Seitenansicht die Richtungen und Pfeile der Momentenvektoren $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}$ angegeben, die zu den Biegungsmomenten in den Lastebenen I, II, III gehören.

Gerade diese Festsetzung der Pfeile erfordert eine sorgfältige Überlegung, zu der man sich am besten der axonometrischen Übersichtsfigur in Abb. 78 behufs Erleichterung der Vorstellung bedient. Dabei denke man daran, daß es sich um das Biegungsmoment für einen Querschnitt zwischen den Lagern $A$ und $B$ handeln soll und daß man von den Kräften an jenem Teile der Welle bis zu dem betrachteten Querschnitte hin, der zum Lager A gehört, die Momente zu nehmen hat. In der Lastebene I wirkt die Kraft $\mathfrak{P}_1$ nach abwärts; der zugehörige Auflagerdruck in $A$ geht nach oben und das Moment

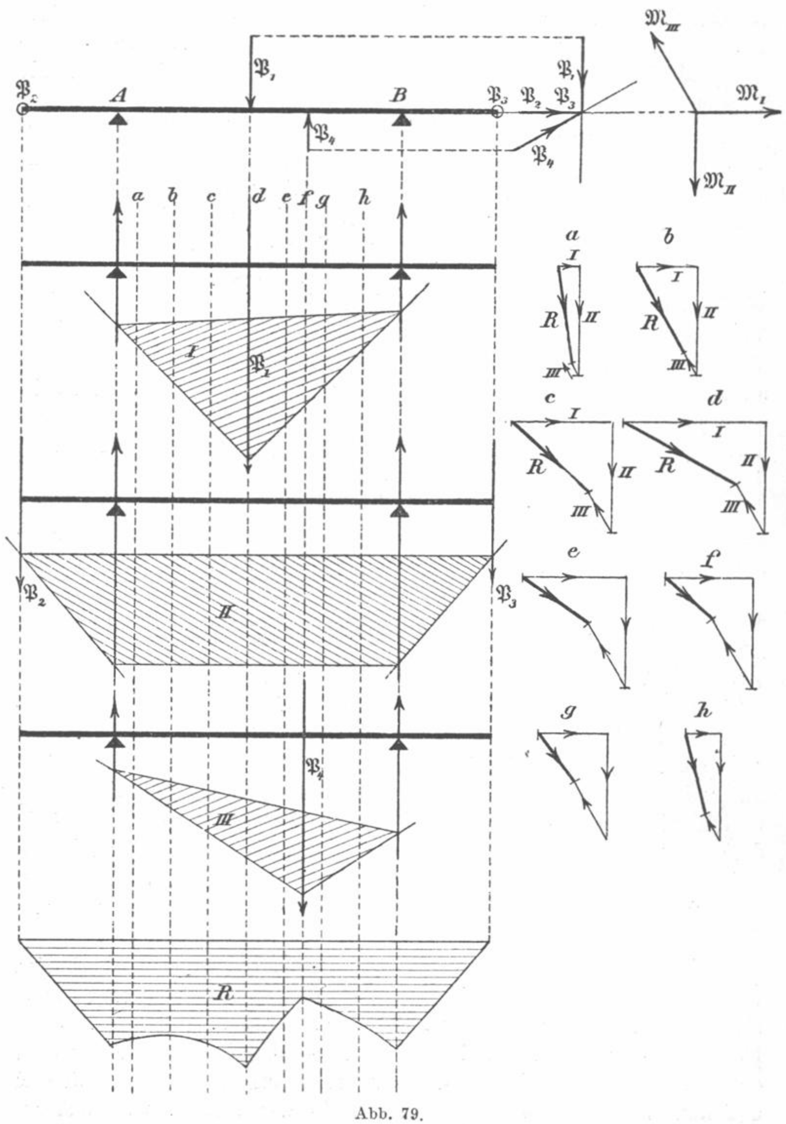

Abb. 79.

des Auflagerdruckes dreht im Uhrzeigersinne für einen vorn stehenden Beschauer. Nach dieser Seite ist daher $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ rechtwinklig zur Ebene I abzutragen, wie es in der rechten oberen Ecke von Abb. 79 geschehen ist. — In der Lastebene II treten die beiden Lasten $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ außerhalb der Stützpunkte auf; die zugehörigen Auflagerkräfte haben den entgegengesetzten Pfeil und wenn die Belastung symmetrisch ist ($\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$ und beide gleich gelegen), so sind auch die Auflagerkräfte gleich und ebenso groß wie eine der Lasten. Für einen zwischen $A$ und $B$ gelegenen Querschnitt hat man dann an dem nach $A$ hin liegenden Teile der Welle ein Kräftepaar, das von oben her gesehen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Der Pfeil von $\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}$ ist daher nach abwärts einzutragen, wie es auch auf der bereits erwähnten kleinen Übersichtsfigur geschehen ist. Auf dieselbe Weise findet man, daß der Pfeil von $\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}$ nach links oben zeigen muß.

Diese Bemerkungen bezogen sich auf die Richtungen der Momentenvektoren, während die Größen für die verschiedenen, in der Abbildung mit $a$, $b$, $c$ . . . . bezeichneten Querschnitte sofort aus den Momentenflächen I, II, III entnommen werden können. Da nämlich der Horizontalzug bei allen drei Seilpolygonen gleich groß gewählt wurde (die zu den Seilpolygonen gehörigen Kräftepläne wurden in der Abbildung fortgelassen), geben die auf den Vertikalen $a$, $b$ usf. durch die Momentenflächen gebildeten Abschnitte unmittelbar ein Maß für die Größen der Biegungsmomente und daher auch für die zugehörigen Momentenvektoren ab.

Nach diesen Vorbereitungen kann man zur graphischen Summierung der Momentenvektoren schreiten. Die hierzu dienenden Polygone sind auf der rechten Seite der Abbildung untergebracht und einzeln mit den Buchstaben $a$ bis $h$ der Querschnitte bezeichnet, zu denen sie gehören. An Stelle von $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ ist in den Polygonen kürzer I geschrieben usf. Die Pfeile von I, II, III konnten unmittelbar aus der dafür vorher gegebenen Übersichtsfigur, die Größen mit dem Zirkel aus den Momentenflächen I, II, III übertragen werden. Die vierte Seite des Viereckes gibt jedesmal den resultierenden Momentenvektor an; in den Figuren ist $R$ dazu geschrieben. Mit $R$ kennt man zugleich das Biegungsmoment, das ermittelt werden sollte.

Hierbei ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß die resultierenden Momentenvektoren für die einzelnen Querschnitte nicht nur in den Größen, sondern auch der Richtung nach voneinander abweichen. Denkt man sich jeden Momentenvektor im zugehörigen Punkte der Stabachse angeheftet, so bildet ihre Aufeinanderfolge eine windschiefe Fläche.

Auf die Richtungen der Momentenvektoren und auch auf die Richtung, nach der die Durchbiegung der Welle an einer bestimmten

Stelle erfolgt, braucht man aber gewöhnlich nicht weiter zu achten. Bei kreisförmigem Querschnitte ist es für die Beanspruchung des Materials schon an sich gleichgültig, in welcher Richtung die Biegung erfolgt und überdies dreht sich die Welle, während die Kraftebenen festliegen, so daß jeder Momentenvektor ohnehin der Reihe nach alle Richtungen relativ zum Querschnitte einnimmt.

Kümmert man sich hiernach nur um die absolute Größe der Biegungsmomente, so kann man diese für alle untersuchten Querschnitte in einer besonderen Figur übersichtlich zusammenstellen, indem man von jedem Punkte der Wellenachse aus eine Ordinate zieht, die gleich der Seite $R$ im zugehörigen Momentenvektorenpolygone gemacht wird. Am unteren Ende der Abbildung ist die dadurch erhaltene Momentenfläche durch Schraffierung hervorgehoben und mit dem Buchstaben $R$ bezeichnet. Für jeden Querschnitt der Welle findet man daraus das zugehörige Biegungsmoment durch Multiplikation der Ordinate der Momentenfläche mit dem vorher für alle Seilpolygone übereinstimmend gewählten Horizontalzuge.

Hierzu mag noch bemerkt werden, daß die untere Grenzlinie der Momentenfläche $R$ teils durch gerade Linien, teils durch Hyperbelbögen gebildet wird. Rechnerisch läßt sich diese Behauptung, auf die aber im übrigen nicht viel ankommt, leicht beweisen.

*24. Aufgabe. Ein Stab $AB$ (Abb. 80) ist an beiden Enden gestützt und trägt zwei Lasten, von denen die eine, $P_1$ lotrecht gerichtet ist und 500 kg beträgt, während $P_2$ horizontal und gleich 600 kg ist. Man soll die Momentenfläche für das aus beiden Lasten resultierende Biegungsmoment konstruieren.*

*Lösung.* Die Lösung schließt sich genau an die der vorhergehenden Aufgabe an, von der sie sich nur durch die etwas einfachere Belastungsannahme unterscheidet. Zuerst konstruiert man in der Aufrißebene die zu $P_1$ gehörige dreieckige Momentenfläche I und in der Grundrißebene die zu $P_2$ gehörige Momentenfläche II. Für die Kräftepläne ist in beiden Fällen derselbe Horizontalzug zu nehmen, der zu $H = 300$ kg gewählt wurde. Der Aufriß ist als Ansicht von vorn, der Grundriß als Draufsicht von oben her zu betrachten. Da die durch die Momentenflächen I und II dargestellten Biegungsmomente nach den üblichen Vorzeichenfestsetzungen als positiv zu betrachten sind, entsprechen ihnen Momentenvektoren, die auf den Beschauer hin, also bei $\mathfrak{M}_1$ nach vorn, bei $\mathfrak{M}_2$ nach oben hin gehen. Diese Richtungen von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ sind in einer rechts stehenden Seitenansicht aufgetragen, worauf wie im vorigen Beispiele für die Querschnitte $a$, $b$, $c$ usf. die aus I und II entnommenen Momentenvektoren durch besondere Summationsdreiecke zusammengesetzt wurden. Die resultierenden Momentenvektoren sind hierauf unter Außerachtlassung der verschiedenen Richtungen der Größe nach zu der resultierenden Momentenfläche $R$ zusammengestellt.

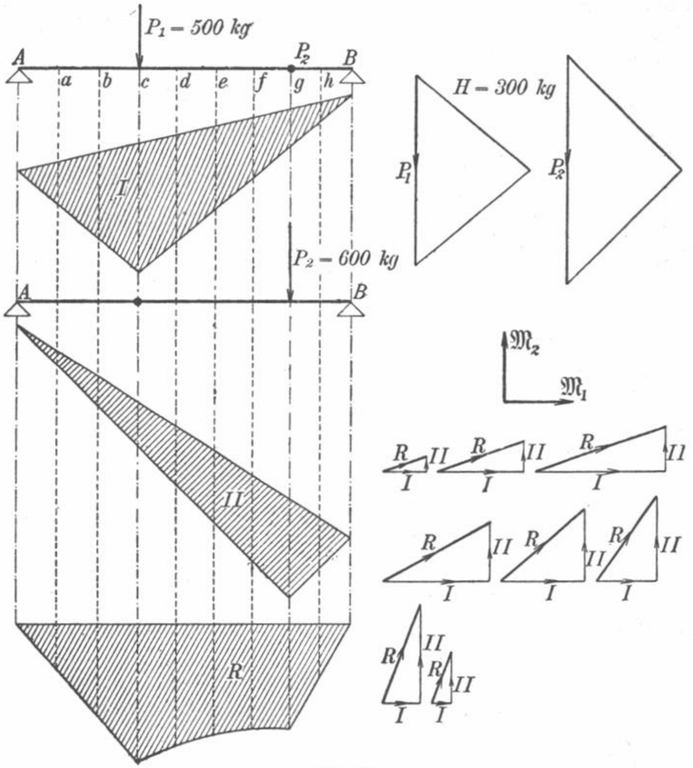


Abb. 80.

*25. Aufgabe. Längs einer Geraden AB sind Kräfte in stetiger und der Größe nach gleichförmiger Verteilung rechtwinklig zu AB angebracht, so daß die graphische Darstellung der Kraftverteilung (axonometrische Zeichnung in Abb. 81) einen Viertelumlauf einer Schraubenfläche ausmacht. Man soll die Kräfte zu einem Kraftkreuze zusammensetzen und die Zentralachse des von ihnen gebildeten Kräftesystemes aufsuchen.*

*Lösung.* Man kann jede Kraft in zwei recktwinklige Komponenten zerlegen, die in den Ebenen $BAC$ und $BAD$ enthalten sind. In jeder dieser Ebenen sind alle Komponenten parallel zueinander und sie lassen sich leicht zu einer Resultierenden vereinigen.

Beide Resultierende bilden ein Kraftkreuz, das den gegebenen Kräften gleichwertig ist.

Bezeichnet man, um die Rechnung durchzuführen, $AB$ mit $l$ und den Abstand eines zwischen $A$ und $B$ liegenden Punktes $E$ von $A$ mit $x$, so ist der Winkel $\varphi$, den die Richtung der Kraft in diesem Punkte mit der horizontalen Richtung $AC$ bildet,

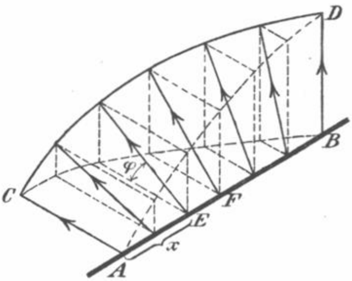

Abb. 81.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}.$$

Wenn die der Größe nach konstante Belastungsintensität mit $p$ bezeichnet wird, so daß also $p\,dx$ die am Längenelemente $dx$ angreifende Kraft angibt, erhält man für deren Vertikalprojektion

$$p\,dx \sin\varphi \quad \text{oder} \quad p\,dx \sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Die Summe der Vertikalkomponenten $V$ beträgt daher

$$V = p\int_0^l \sin\frac{\pi x}{2l}\,dx = p\,\frac{2l}{\pi}.$$

Der Abstand zwischen $A$ und $V$, der mit $v$ bezeichnet werden mag, ergibt sich aus der Momentengleichung

$$Vv = p\int_0^l x \sin\frac{\pi x}{2l}\,dx = p\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2$$

und hiernach

$$v = \frac{2l}{\pi}.$$

Die Resultierende der Horizontalkomponenten $H$ wird ebenso groß als $V$ und hat den Abstand $\frac{2l}{\pi}$ vom andern Endpunkte $B$. Hiermit ist das Kraftkreuz vollständig bekannt.

Verlegt man ferner, um das Kräftesystem auf eine Resultierende und ein resultierendes Moment zurückzuführen, die Kräfte $H$ und $V$ nach dem in der Mitte zwischen $A$ und $B$ liegenden Punkte $F$, so geben sie dort eine Resultierende, die mit der horizontalen Richtung von $AC$ einen Winkel von $45^0$ einschließt und deren Größe gleich $V\sqrt{2}$ oder

$$p \frac{2l}{\pi} \sqrt{2}$$

ist. Das bei der Parallelverlegung von $V$ auftretende Moment hat die Größe

$$V\left(\frac{2l}{\pi} - \frac{l}{2}\right) \quad \text{oder} \quad pl^2 \frac{4-\pi}{\pi^2}$$

und der Momentenvektor ist gleich gerichtet und hat gleichen Pfeil mit $AC$. Ebenso groß und senkrecht nach oben gerichtet ist der Momentenvektor des bei der Parallelverlegung von $H$ nach $F$ auftretenden Kräftepaares. Der resultierende Momentenvektor schließt daher mit der horizontalen Ebene $BAC$ ebenfalls einen Winkel von $45^0$ ein und hat die Größe

$$pl^2 \frac{4-\pi}{\pi^2} \sqrt{2}.$$

Da die Resultierende und der Vektor des resultierenden Momentes auf die gleiche unter $45^0$ durch $F$ gezogene, zu $AB$ senkrechte Linie fallen, ist diese die Zentralachse des Kräftesystemes. $AB$ ist natürlich eine Nullinie.

*26. Aufgabe. Eine dreieckige Tischplatte wird, wie Abb. 82 im Grundrisse und Aufrisse zeigt, durch sechs Beine gehalten, von denen je zwei, die von derselben Ecke der Platte ausgehen, in einer senkrechten Ebene liegen. Auf die Tischplatte wirkt eine beliebig gegebene Kraft* $\mathfrak{P}$*; man soll die dadurch in den Beinen hervorgebrachten Stabspannungen berechnen.*

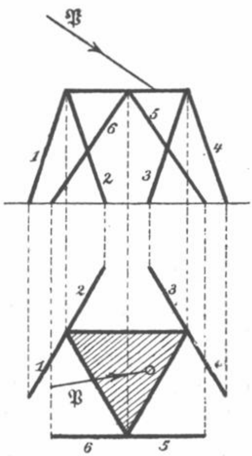

Abb. 82.

*Lösung.* Man denke sich jede der sieben Kräfte ($\mathfrak{P}$ und die sechs Stabkräfte) in eine Komponente zerlegt, die in der Ebene $\varepsilon$ der Tischplatte liegt, und in eine zweite, die rechtwinklig zu $\varepsilon$ steht. Als Punkt $A$ ist demnach hier der unendlich ferne Punkt einer zu $\varepsilon$ gezogenen Normalen gewählt. Wegen der hier vorliegenden besonderen Anordnung fallen sowohl die vertikalen als die in der Ebene $\varepsilon$ liegenden Komponenten von je zwei zusammengehörigen Beinen (1 und 2 oder 3 und 4 oder 5 und 6) auf dieselben Geraden. Man zerlege die $\varepsilon$-Komponente von $\mathfrak{P}$ (die gleich der Strecke $\mathfrak{P}$ im Grundrisse ist) in bekannter Weise nach den drei Richtungslinien 1, 2; 3, 4 und 5, 6 und ebenso die Vertikalkomponente von $\mathfrak{P}$ nach den durch die drei Ecken der Platte gezogenen Vertikalen. Die letzte Zerlegung wird am einfachsten nach der schon im ersten Bande (in § 23, S. 154 der 4. Auflage) gegebenen Anleitung ausgeführt.

Nachdem dies geschehen ist, kennt man sowohl die vertikale als die horizontale Komponente der Resultierenden von je zwei zusammengehörigen Stabspannungen. Man braucht daher nur noch beide Komponenten zu einer Resultierenden zu vereinigen und diese nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen (oder auch jede einzelne Komponente nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen und die Spannungen zu summieren).

27. *Aufgabe. Ein rechtflächig begrenzter Körper K (vgl. die axonometrische Ansicht in Abb. 83) wird durch 6 Stäbe gestützt, von denen 3 in einem Punkt A zusammenlaufen, während die 3 andern in einer lotrechten Ebene E liegen. Längs einer Kante von K wirkt eine horizontal gerichtete Last von 3000 kg. Man soll die durch sie hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.*

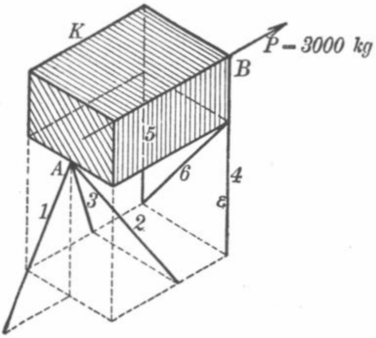

Abb. 83.

*Erste Lösung.* Man verlegt den Angriffspunkt von $P$ nach dem Punkt $B$, in dem die Richtungslinie von $P$ die Ebene $E$ schneidet, verbindet $B$ mit $A$ und zerlegt hierauf $P$ in die beiden Komponenten $P_A$ und $P_\varepsilon$. In Abb. 84[a] und 84[b] ist diese Zerlegung durch ein Kräfteparallelogramm ausgeführt. Hierauf wurde der Angriffspunkt von $P_A$ nach $A$ verlegt und im Aufriß ein Kräftedreieck daran gefügt, von dem eine Seite in Richtung von 1, die andere in der dort gemeinsamen Richtung von 2 und 3 gezogen ist. Durch Herabloten in den Grundriß findet man dort den Endpunkt der Seite 1 des Kräftevierecks, das nun noch durch Ziehen von Parallelen zu den Stabprojektionen 2 und 3 ergänzt werden kann. Der Schnittpunkt von 2 und 3 ist in den Aufriß zu übertragen. Von 2 und 3 sind hierauf noch die wahren Längen zu ermitteln. Die hierzu nötigen Linien sind in der Zeichnung weggelassen. Man erhält für die Stäbe 1, 2, 3 die Stabspannungen

$$+3870; \; -2920; \; +670 \text{ kg}.$$

Die Kraft $P_\varepsilon$ wird in der Seitenansicht Abb. 84[c] in wahrer Größe gefunden. Um diese Kraft nach den Richtungen der Stäbe 4, 5, 6 zu zerlegen, kann man sich des Culmannschen Verfahrens bedienen, indem man den Schnittpunkt von $P_\varepsilon$ mit 5 mit dem Schnittpunkte von 4 und 6 verbindet und hierauf den in Abb. 85 ersichtlichen Kräfteplan zeichnet. Man findet die Stabspannungen von 4, 5, 6 zu

$$+ 770; \ - 750; \ - 1870 \text{ kg}.$$

*Zweite Lösung.* Man kann die Aufgabe auch auf rechnerischem Wege nach dem Momentensatze lösen. Verlängert man im Aufrisse die beiden Linien, auf denen sich 2 und 3 sowie 4, 5 und 6 projizieren, bis zum Schnittpunkte, so ist dieser als Projektion einer

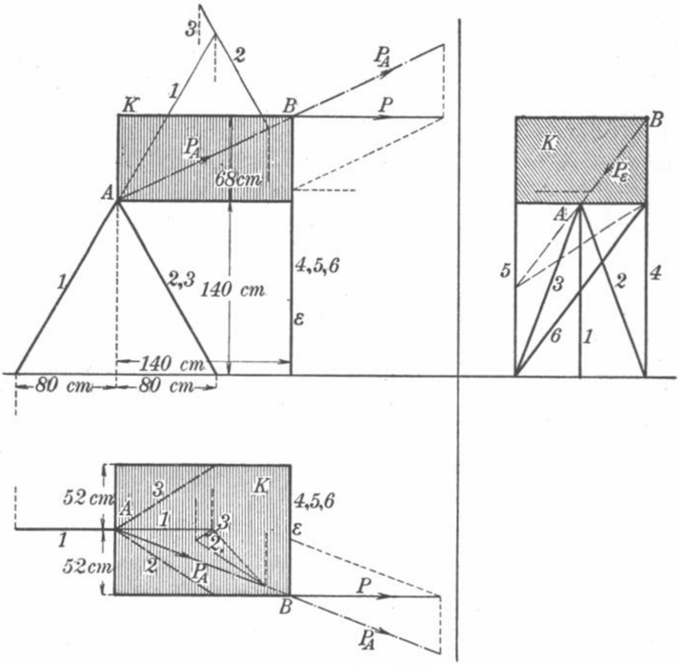


Abb. 84a, 84b und 84c.

rechtwinklig zum Aufrisse stehenden Momentenachse zu betrachten, die diese fünf Stabrichtungslinien schneidet. Aus der Momentengleichung, die für die Aufrißprojektion sofort angeschrieben werden kann, findet man daher die Stabspannung 1. Ferner schneidet eine Achse, die man durch $A$ in lotrechter Richtung ziehen kann, ebenfalls fünf Stabrichtungslinien, nämlich außer 1, 2, 3 auch noch 4 und 5 (im Unendlichen). Die zugehörige Momentengleichung läßt sich aus dem Grundrisse ohne weiteres ablesen und liefert Stab-

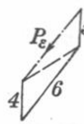


Abb. 85.

spannung 6. Ebenso läßt sich auch noch für eine Achse, die durch $A$ und den Schnittpunkt von 6 und 4 gezogen ist, nach geringer Vorbereitung (nämlich nach Projektion von $P$ auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene) eine Momentengleichung anschreiben, aus der sich Stabspannung 5 sofort ermitteln läßt. Nachdem man 1, 6 und 5 bereits kennt, kann man auch eine Momentengleichung für eine Achse benützen, die die Fußpunkte der Stäbe 2 und 4 verbindet, da in dieser Gleichung nur noch Stabspannung 3 als Unbekannte vorkommt. Da dann nur noch zwei Stabspannungen, nämlich 2 und 4, unbekannt geblieben sind, kann man die gegebene Last und die vier bereits ermittelten Stabspannungen graphisch aneinanderreihen und durch die Endpunkte des Linienzuges Parallelen zu 2 und 4 ziehen. Beide müssen sich schneiden, was zugleich als Kontrolle dient. Damit sind dann alle Stabspannungen gefunden.

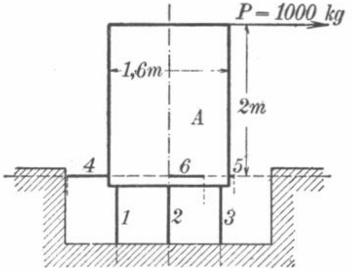


Abb. 86a.

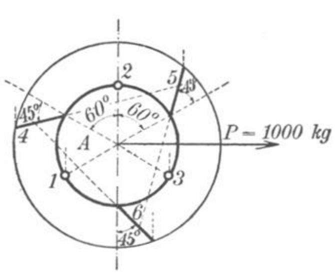


Abb. 86b.

*28. Aufgabe. Der in Abb. 86 gezeichnete Zylinder A ist durch 6 Stäbe gestützt, von denen 1, 2, 3 senkrecht stehen, während 4, 5, 6 in einer horizontalen Ebene enthalten sind. Am oberen Ende des Zylinders greift eine horizontal gerichtete Kraft P von 1000 kg an. Man soll die Stabspannungen berechnen; die dazu erforderlichen Maße sind aus der Abbildung zu entnehmen.*

*Lösung.* Da von den sechs Stäben drei in einer Ebene liegen und die drei andern durch einen (im Unendlichen liegenden) Punkt gehen, kann man durch je fünf Stäbe eine Achse legen, die alle fünf schneidet, so daß die Spannung des sechsten Stabes aus einer auf diese Achse bezogenen Momentengleichung sofort gefunden werden kann.

Verbindet man die Durchstoßpunkte der Linien 1 und 3 mit der Ebene durch 4, 5, 6, so erhält man eine Achse, die die genannten fünf Stäbe schneidet. Außerdem geht diese Achse aber auch parallel zu $P$ und daher muß das Moment der Stabspannung 2 ebenfalls Null sein. Daraus folgt, daß Stab 2 spannungslos bleibt.

Hierauf kann man, um 1 zu berechnen, irgendeine durch 3 in der Ebene 4, 5, 6 gehende Momentenachse benutzen, da es auf 2 nicht mehr ankommt. Man wählt dazu am bequemsten die zur Aufrißebene senkrechte Achse und findet nach Abmessen der Hebelarme

$$S_1 = \frac{1000 \cdot 2}{1{,}38} = + 1445 \text{ kg}.$$

Ebenso groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen muß die Spannung von 3 sein, weil bei allen anderen Kräften keine vertikalen Komponenten vorkommen und die Komponentensumme für jede Richtung Null liefern muß. Um 4 zu berechnen, sucht man den Schnittpunkt von 5 und 6 auf und schreibt die Momentengleichung für eine durch diesen Punkt gehende vertikale Achse an, aus der

$$S_4 = \frac{1000 \cdot 1{,}1}{1{,}7} = + 647 \text{ kg}$$

gefunden wird. Für 5 und 6 erhält man ebenso — 176 und — 471 kg Spannung. — Zur Probe kann man sich nachträglich noch davon überzeugen, ob sich aus den gefundenen Kräften und $P$ ein geschlossenes Polygon zeichnen läßt, wobei es nur auf die Grundrißprojektion ankommt.