universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Graphische Statik

Föppl, August

1912

Zweiter Abschnitt. Das Seilpolygon oder Seileck

urn:nbn:at:at-ubi:2-7787

Zweiter Abschnitt.

Das Seilpolygon oder Seileck.

§ 10. Zusammensetzung von Kräften in der Ebene mit Hilfe des Seileckes.

In Abb. 33[a] seien die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gegeben. Man findet ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, falls sie nicht parallel sind, am einfachsten durch Aufsuchen des Schnittpunktes A ihrer Richtungslinien, Konstruktion des Kräftedreieckes $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{R}$ in Abb. 33[b] und Ziehen einer Parallelen zu $\mathfrak{R}$ durch A. Schon wenn der Schnittpunkt A weit wegfällt, ist dieses Verfahren aber nicht mehr anwendbar. Man fügt dann zwei neue Kräfte $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ hinzu, vereinigt $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{S}_1$, dies mit $\mathfrak{P}_2$ zu $\mathfrak{S}_2$ und schließlich $\mathfrak{S}_2$ mit $\mathfrak{T}'$ zu $\mathfrak{R}$. Mit Hilfe des Kräfteplanes in Abb. 33[b] kann dies leicht ausgeführt werden.

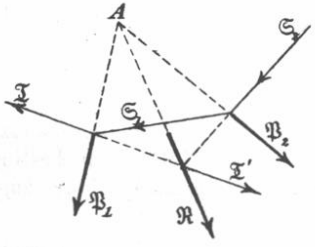

Abb. 33a.

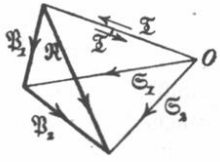

Abb. 33b.

Der Linienzug $\mathfrak{T}\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ in Abb. 33[a] wird ein Seilpolygon (oder Seileck, auch Seilzug) genannt, weil ein Seil von dieser Gestalt unter den Lasten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ im Gleichgewichte bleibt, wenn die beiden Enden mit Kräften von der Größe $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}_2$

angespannt werden. Die Spannung des mittleren Seilstückes ist gleich $\mathfrak{S}_1$. Für ein Seil hat freilich $\mathfrak{S}_1$ keinen eindeutig bestimmten Pfeil, da dieser am Knotenpunkte $\mathfrak{T}\mathfrak{P}_1\mathfrak{S}_1$ entgegengesetzt zu nehmen ist, wie am andern Knotenpunkte $\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{S}_2$. Ebenso wäre auch der Pfeil der von außen her am letzten Seilstücke anzubringenden Kraft $\mathfrak{S}_2$ entgegengesetzt dem in Abb. 33^b eingetragenen zu wählen. Gewöhnlich denkt man aber bei der Benutzung des Seileckes gar nicht an ein wirkliches Seil, das die Lasten $\mathfrak{P}$ aufzunehmen hätte, sondern man benutzt es nur zur Kräftezusammensetzung. Die anschauliche Bezeichnung behält man trotzdem bei; man muß nur beachten, daß den „Seilspannungen" $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ in diesem Falle eindeutig bestimmte Pfeile zukommen, nämlich jene, die aus dem Kräfteplane hervorgehen.

Abb. 33^a gibt an, wie die Kräfte, die man zusammensetzen soll, zueinander liegen. Man nennt daher diese Figur auch den „Lageplan" im Gegensatze zum „Kräfteplan" Abb. 33^b. Beide Pläne sind reziproke Figuren.

Man kann sich die eine Figur willkürlich hingezeichnet denken und nachträglich die andere so konstruieren, daß sie zu ihr paßt. Hat man Abb. 33^a beliebig angenommen, so kann man in Abb. 33^b eine Seite, etwa $\mathfrak{P}_1$, noch in beliebiger Größe (aber in der vorgeschriebenen Richtung) wählen, von den Endpunkten Parallelen zu $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{T}$ (oder $\mathfrak{T}'$) ziehen und dann Parallelen zu $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ anreihen. Die letzte Linie $\mathfrak{R}$ ergibt sich aber dann als Verbindungslinie der beiden bereits vorhandenen Endpunkte. Jedenfalls muß sie aber, wenn sie so gezogen wird, von selbst in die ihr durch die reziproke Figur vorgeschriebene Richtung fallen. Dasselbe trifft zu, wenn man zuerst Abb. 33^b willkürlich annimmt und dann Abb. 33^a dazu konstruiert: in jedem Falle ist die letzte Linie, die man zu ziehen hat, schon als Verbindungslinie von zwei Punkten bestimmt und zugleich muß sie der ihr in der reziproken Figur zugehörigen parallel gehen.

Diese Eigenschaft kann zunächst als eine willkommene Gelegenheit zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung betrachtet werden. Man bemerkt aber zugleich, daß sie eine rein geometrische Eigenschaft beider Figuren darstellt, da sie auch noch gültig bleibt, wenn man ganz von der mechanischen Bedeutung, die wir den Figuren gaben, absieht. Der Beweis beruht zwar auf dieser Deutung; die dadurch herausgefundene geometrische Gesetzmäßigkeit

ist aber von ihr unabhängig. Wir können sie in dem Satze aussprechen: Laufen in zwei vollständigen Vierecken fünf Seiten (oder Diagonalen) paarweise parallel, so trifft dies auch für das letzte Paar zu.

Der Schnittpunkt A in Abb. 33[a] kann auch ins Unendliche rücken, d. h. die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ können parallel sein, ohne daß dadurch an dem besprochenen Verfahren, noch an dem daraus soeben abgeleiteten Satze etwas geändert würde. Drei Eckpunkte und drei Seiten des Kräfteplanes in Abb. 33[b] fallen dann in eine Gerade. — Außerdem sieht man auch leicht ein, daß mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ in derselben Weise zusammengesetzt werden können, wie hier die beiden. Das Seilpolygon erhält dann nur entsprechend mehr Seiten und im Kräfteplane gehen alle dazu parallel gezogenen „Polstrahlen" durch denselben Punkt O wie jetzt schon $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$. Dieser Punkt O wird der Pol des Kräfteplanes genannt. In jedem Falle geht die Resultierende aller $\mathfrak{P}$ in Abb. 33[a] durch den Schnittpunkt der letzten Seilspannung mit der Richtungslinie von $\mathfrak{T}'$ oder, wie wir auch sagen können, durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygonseiten.

§ 11. Seilecke zu verschiedenen Polen.

Zu gegebenen Kräften $\mathfrak{P}$ kann man beliebig viele Seilecke zeichnen. Wir wollen uns irgend zwei gezogen und die ihnen entsprechenden Kräftepläne aufeinander gelegt denken, so daß sie die Seiten $\mathfrak{P}$ (und daher auch $\mathfrak{R}$) gemeinsam haben. Man kann dann sagen, daß sich beide Kräftepläne nur durch eine verschiedene Wahl des Poles O voneinander unterscheiden. Mit O ändern sich auch die Richtungen aller von ihm ausgehenden Polstrahlen. Wie nun auch die zu beiden Kräfteplänen gehörigen Seilpolygone im übrigen gezogen sein mögen: auf jeden Fall besteht zwischen ihnen eine beachtenswerte geometrische Beziehung. Die Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen (oder Seileckseiten) liegen nämlich auf einer Geraden und diese Gerade geht parallel zur Verbindungslinie beider Pole im Kräfteplane.

Der Satz gilt für zwei zu beliebig vielen Kräften $\mathfrak{P}$ konstruierte Seilecke. In der nachstehenden Abbildung sind zwar nur zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ angenommen, aber die nachfolgenden Betrachtungen gelten unverändert auch für den Fall, daß die Seilecke beliebig viele Kräfte $\mathfrak{P}$ miteinander verbinden. Der Lageplan in Abb. 34[a] gibt die beiden Seilpolygone $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{S}_1^*$, $\mathfrak{S}_2^*$ und Abb. 34[b] die zugehörigen Kräftepläne mit den Polen O und O^* an. Man suche zunächst die Schnittpunkte A von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ und B von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1^*$ in Abb. 34[a] auf und verbinde beide durch eine Gerade. Dann muß nach der Behauptung des Satzes auf dieser Geraden auch der Schnittpunkt C von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2^*$ liegen.

Um den Beweis zu führen, beachte man, daß die Anfangs-

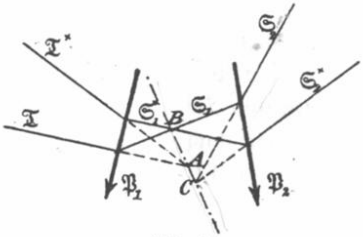

Abb. 34a.

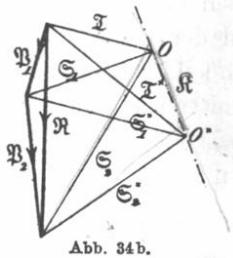

Abb. 34b.

spannung $\mathfrak{T}^*$ des einen Seilpolygons aus der Anfangsspannung $\mathfrak{T}$ des andern dadurch erhalten werden kann, daß man eine neue Kraft zufügt, die wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen. Nach Größe und Richtung findet man $\mathfrak{R}$ aus einem Kräftedreiecke, in dem $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ die andern beiden Seiten bilden. Im Kräfteplane Abb. 34b ist dieses Dreieck schon von vornherein vorhanden und die dritte Seite O^*O gibt daher die Kraft $\mathfrak{R}$ an. Im Lageplan muß $\mathfrak{R}$ durch den Schnittpunkt A von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ gehen.

Nun betrachte man irgend zwei andere entsprechende Seileckseiten, also etwa $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2^*$. Hiervon ist $\mathfrak{S}_2^*$ die Resultierende der links davon liegenden Kräfte $\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ oder auch von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$. Andererseits ist aber auch $\mathfrak{S}_2$ die Resultierende von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und wenn man beide Aussagen miteinander vergleicht, folgt, daß $\mathfrak{S}_2^*$ auch die Resultierende von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{R}$ ist.

Hiernach muß sich $\mathfrak{S}_2^*$ mit $\mathfrak{S}_2$ auf der Richtungslinie von $\mathfrak{R}$ schneiden. Wir sahen aber vorher, daß die Richtungslinie von $\mathfrak{R}$ eine durch den Punkt A parallel zu O^*O gezogene Gerade war. Auf dieser müssen sich daher auch $\mathfrak{S}_2^*$ mit $\mathfrak{S}_2$ und überhaupt je zwei einander entsprechende Seileckseiten schneiden, womit der Satz bewiesen ist.

Man macht von diesem Satze mit Vorteil Gebrauch, wenn man genötigt ist, zu gegebenen Lasten nacheinander mehrere Seilpolygone zu konstruieren. Dies kommt, wie man später sehen wird, namentlich bei der Konstruktion der Drucklinien von Gewölben vor. Man erspart dann, nachdem ein Seilpolygon gezeichnet ist, bei den übrigen das Ziehen der Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane, das mühsamer ist als das Ziehen von Verbindungslinien nach den Schnittpunkten der Seilstrahlen des ersten Seileckes mit der zu OO^* parallelen Linie.

§ 12. Zerlegung von Kräften nach parallelen Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ läßt sich in eindeutiger Weise nach zwei zu ihr parallelen Richtungslinien zerlegen, die mit ihr in derselben Ebene liegen. Man kann diese Aufgabe als einen Sonderfall der schon in § 2 behandelten Aufgabe ansehen, eine Kraft nach zwei Richtungslinien zu zerlegen, die sich mit ihr in einem Punkte schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen. Der gemeinsame Schnittpunkt ist hier nur ins Unendliche gerückt. Mit Hilfe eines Kräftedreieckes läßt sich die Aufgabe freilich nicht mehr lösen. Am einfachsten führt gewöhnlich die Anwendung des Momentensatzes zum Ziele. Man bedenke, daß die geometrische Summe beider Kräfte gleich der gegebenen sein muß und daß beide für einen auf der Richtungslinie der gegebenen liegenden Momentenpunkt gleich große und entgegengesetzt gerichtete Momente haben müssen. Liegen die vorgeschriebenen Richtungslinien zu verschiedenen Seiten der gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$, so sind beide gesuchten Kräfte gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und sie teilen sich in die Größe von $\mathfrak{P}$ im umgekehrten Verhältnisse ihrer Abstände von $\mathfrak{P}$. Im andern Falle ist die $\mathfrak{P}$ zunächst liegende Kraft mit ihr gleichgerichtet und größer als $\mathfrak{P}$, die andere entgegengesetzt gerichtet und gleich

dem Unterschiede der vorigen. Dabei verhalten sich auch hier die Größen beider Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von $\mathfrak{P}$. Aus der Verbindung beider Bedingungen folgt sofort die Lösung der Aufgabe. — Sollen die gesuchten Kräfte mit der gegebenen im Gleichgewichte stehen, so kehren sich natürlich ihre Pfeile gegenüber den vorher angegebenen um.

Wenn es sich nur um die Zerlegung einer einzigen Kraft nach gegebenen parallelen Richtungslinien handelt, wird man kaum von dem soeben besprochenen Verfahren abgehen. In andern Fällen kann aber die Lösung mit Hilfe des Seilpolygons, die ich jetzt, und zwar zunächst für die Zerlegung einer einzigen Kraft geben werde, mit Vorteil benutzt werden. In Abb. 35[a] sei $\mathfrak{P}$ die Kraft, die nach den Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden soll. Man ziehe die Richtungslinien 3, 4, 5 sonst beliebig, aber so, daß die Ecken des von ihnen gebildeten Dreieckes auf den gegebenen Geraden liegen. Dann sehe man den Linienzug 3, 4, 5 als ein Seilpolygon an, mit dessen Hilfe sich die längs 1 und 2 wirkenden gesuchten Kräfte wieder zu ihrer Resultierenden $\mathfrak{P}$ vereinigen ließen. Zu diesem Seilpolygone läßt sich der Kräfteplan in Abb. 35[b] ohne weiteres zeichnen, indem man $\mathfrak{P}$ im Maßstabe abträgt und durch Ziehen der Parallelen zu 3 und 5 den Pol O aufsucht. Eine Parallele von O zu 4 schneidet dann auf $\mathfrak{P}$ die beiden gesuchten Kräfte 1 und 2 ab. Der Beweis folgt daraus, daß in der Tat zwei Kräfte von dieser Größe längs 1 und 2 mit Hilfe des Seilpolygons zur Resultierenden $\mathfrak{P}$ vereinigt werden können.

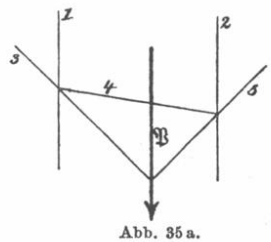

Abb. 35a.

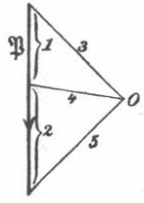

Abb. 35b.

Liegen 1 und 2 auf derselben Seite von $\mathfrak{P}$, so ändert sich die Figur so ab, wie es in Abb. 36[a] und 36[b] angegeben ist; das Verfahren bleibt aber sonst dasselbe. Die Kraft 2 ist gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und 1 entgegengesetzt gerichtet. Sollen die

Kräfte 1 und 2 mit $\mathfrak{P}$ Gleichgewicht halten, so sind ihre Pfeile umgekehrt zu nehmen.

Für einen Balken, der an zwei Stellen unterstützt ist und eine Einzellast $\mathfrak{P}$ trägt, kann man nach diesem Verfahren die Auflagerkräfte ermitteln. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Auflagerung des Balkens so erfolgt, daß unter senkrechten Lasten auch nur senkrecht gerichtete Auflagerkräfte übertragen werden können. Trägt der Balken eine beliebige Zahl senkrecht gerichteter Lasten, so kann man diese erst zu einer Resultierenden vereinigen und diese nach den beiden Auflagervertikalen zerlegen. Die Zusammensetzung zur Resultierenden bewirkt man ebenfalls mit Hilfe des Seilpolygons, wie dies bereits näher auseinandergesetzt wurde.

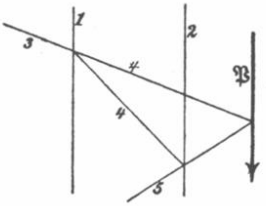

Abb. 36a.

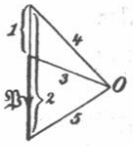

Abb. 36b.

In Abb. 37^a und 37^b ist dies ausgeführt. Man trägt in Abb. 37^b die Lasten 1, 2, 3, 4 auf einer Lastlinie mit aufeinanderfolgenden Pfeilen im Maßstabe auf, wählt einen beliebigen Pol O und zieht die Polstrahlen. Zu diesen werden in Abb. 37^a die Seilstrahlen parallel gezogen. Der Schnittpunkt E der äußersten Seilstrahlen liefert einen Punkt der Resultierenden $\mathfrak{R}$. Diese wird dann so wie in Abb. 35 in die Auflagerkräfte A und B zerlegt. Den Linien 3 und 5 in Abb. 35 entsprechen hier bereits die äußersten Seilstrahlen; man braucht daher nur noch die Verbindungslinie CD der Schnittpunkte der äußersten Seilstrahlen mit den Auflagervertikalen zu ziehen, um die mit 4 in Abb. 35 bezeichnete Linie zu erhalten. Eine Parallele zu dieser im Kräfteplane vom Pole O aus schneidet daher, wie schon

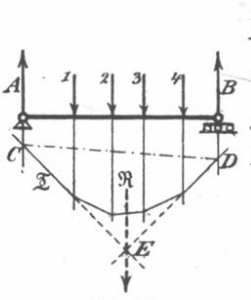

Abb. 37a.

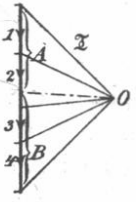

Abb. 37b.

früher gezeigt wurde, auf der Lastlinie die Auflagerkräfte A und B ab. — Zugleich erkennt man, daß zur wirklichen Ausführung der Konstruktion die Ermittlung der Richtungslinie von $\mathfrak{R}$ in Abb. 37[a] ganz entbehrlich ist. Sie wurde nur zur Zurückführung der hier behandelten Aufgabe auf die frühere, also zum Beweise, aber nicht zur Aufsuchung von CD und zur Ermittlung von A und B im Kräfteplane gebraucht. Bei der Anwendung des Verfahrens läßt man daher die Linie $\mathfrak{R}$, die deshalb auch nur gestrichelt angegeben wurde, ganz fort.

Man kann dieses Verfahren auch noch auf andere Art begründen, ohne auf die in Abb. 35 ausgeführte Kräftezerlegung zurückzugreifen. Dazu bedenke man, daß die Lasten 1, 2 usf. mit den beiden Auflagerkräften jedenfalls ein Gleichgewichtssystem bilden. Fügt man nun zu Kräften, die im Gleichgewichte stehen, eine neue Kraft $\mathfrak{T}$ willkürlich zu, vereinigt diese mit der ersten zu einer Resultierenden $\mathfrak{S}_1$, diese mit der folgenden zu $\mathfrak{S}_2$ usf., so muß, wenn alle gegebenen Kräfte zusammengesetzt sind, die letzte Resultierende wieder mit $\mathfrak{T}$ nach Lage, Richtung und Größe übereinstimmen. Denn wenn alle Kräfte, die mit $\mathfrak{T}$ zusammengesetzt waren, im Gleichgewichte miteinander stehen, muß ihre Vereinigung mit $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{T}$ selbst wieder zurückführen. Mit andern Worten heißt dies, daß das zu einem Gleichgewichtssysteme von Kräften konstruierte Seileck ein geschlossenes Polygon bilden muß.

Wenden wir diese Überlegung auf Abb. 37 an, so finden wir, daß dort die durch die Wahl des Poles O näher bestimmte Kraft $\mathfrak{T}$ der Reihe nach mit den Lasten 1, 2 . . . vereinigt war. Ziehen wir nun noch die Auflagerkräfte A und B in das Seilpolygon herein, so muß die letzte Resultierende wieder $\mathfrak{T}$ ergeben. Die Resultierende aus der vorher letzten Seilspannung mit dem Auflagerdrucke B muß aber durch den Schnittpunkt D gehen, und damit sich diese Resultierende mit A wieder zu $\mathfrak{T}$ vereinigen kann, muß sie auch durch den Schnittpunkt C gehen. Die Richtungslinie dieser Resultierenden ist daher durch die Verbindungslinie CD bestimmt, d. h. CD ist die letzte Seite

des zu dem Gleichgewichtssysteme gehörigen geschlossenen Seileckes. Man bezeichnet daher diese Linie auch als die Schlußseite.

Die Beschreibung des ganzen Verfahrens läßt sich hiernach in die einfache Vorschrift zusammenfassen: Man vereinige alle Lasten durch ein Seileck, trage die durch die Schnittpunkte der äußersten Seileckseiten mit den Auflagerkraftrichtungen gehende Schlußlinie ein und ziehe zu dieser vom Pole des Kräfteplanes aus eine Parallele; diese schneidet dann auf der Lastlinie die beiden Auflagerkräfte ab.

§ 13. Die Seilkurven.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind nur so lange anwendbar, als es sich um die Zusammensetzung einer endlichen Anzahl von Einzelkräften handelt. Es kommt aber auch häufig vor, daß z. B. ein Balken eine stetig verteilte Belastung trägt. Man spricht dann von der Belastungsintensität oder der Belastungsdichte an einer bestimmten Stelle. Ist die Belastung an dieser Stelle auf eine gewisse Strecke hin gleichförmig verteilt, so versteht man unter der Belastungsdichte jene Belastung, die auf die Längeneinheit kommt, d. h. also jenen Wert, der durch Multiplikation mit der Länge der Strecke die zugehörige Belastung liefert. Bei ungleichförmiger Verteilung ist jener Wert darunter zu verstehen, der durch Multiplikation mit einem Längenelemente des Balkens die Belastung dieses Längenelementes angibt. Es ist dies zugleich die auf die Längeneinheit bezogene durchschnittliche Belastung des Längenelementes.

Trägt man in einer Zeichnung des Balkens über jedem Punkte der Mittellinie die Belastungsdichte in einem beliebig gewählten Maßstabe ab, so erhält man durch Verbinden der Endpunkte die Belastungslinie, die mit der Mittellinie selbst und den beiden Endvertikalen die Belastungsfläche einschließt. Diese bildet die einfachste graphische Darstellung der Lastverteilung.

Eine stetig verteilte Belastung kann auch als ein Verband von unendlich kleinen Lasten aufgefaßt werden, die in unendlich kleinen Abständen aufeinanderfolgen. Wegen der unendlich großen Anzahl dieser Einzellasten geht das zugehörige Seileck in ein Polygon mit unendlich vielen Seiten über, von denen sich je zwei aufeinanderfolgende wegen der unendlich kleinen Last, die zwischen ihnen liegt, nur unendlich wenig in der Richtung voneinander unterscheiden. Man erhält daher an Stelle des Seilpolygons eine stetige Seilkurve.

Eine Kurve kann, abgesehen von besonderen Fällen, wie beim Kreise, zu dessen Konstruktion man sich des Zirkels bedienen kann, nur durch Aufsuchen einer genügenden Zahl von Punkten oder Tangenten gezeichnet werden, zwischen die man die Kurve freihändig oder mit Hilfe eines Kurvenlineals einträgt. So genau, als es hiernach zeichnerisch überhaupt ausführbar ist, läßt sich auch die zu einer gegebenen Belastungsfläche gehörige Seilkurve ermitteln.

Zur Begründung des Verfahrens nehme ich zunächst an, die in Abb. 38[a] angegebene Seilkurve sei bereits bekannt. Man teile hierauf die durch Schraffierung hervorgehobene Belastungsfläche in eine Anzahl senkrechter Streifen ein, die in der Abbildung mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet sind. Verlängert man die Grenzlinien der Streifen nach abwärts, so wird auch die Seilkurve dadurch in eine Anzahl Abschnitte eingeteilt, von denen jeder als eine besondere Seilkurve angesehen werden kann, die zu dem darüber liegenden Abschnitte der Belastungsfläche gehört. Man denke sich ferner alle Lasten, die zu einem solchen Abschnitte gehören zu einer Resultierenden vereinigt. Diese muß dann durch den Schwerpunkt des Streifens gehen. Zugleich findet man aber einen Punkt dieser Resultierenden im Schnittpunkte der äußersten Seilspannungen des betreffenden Abschnittes der Seilkurve. Die Richtungen dieser äußersten Seilspannungen werden durch die Endtangenten des Seilkurvenabschnittes angegeben. Denkt man sich also in den Punkten A, B, C usf. Tangenten an die Seilkurve gelegt, so fallen deren Schnittpunkte F, G usf. auf die Schwerlinien 1, 2 usf. der Belastungsstreifen.

Bei dieser Betrachtung war angenommen worden, daß die Seilkurve bereits gegeben sei, und es wurde gezeigt, wie man mit ihrer Hilfe das Tangentenpolygon $AFBG$ usf. finden könnte. Man kann aber auch umgekehrt verfahren. Das Tangentenpolygon bildet nämlich zugleich ein Seileck für die Einzellasten 1, 2 usf. und es kann daher mit Hilfe des Kräfteplanes in Abb. 38[b] sofort konstruiert werden, ohne daß die Seilkurve vorher schon bekannt zu sein brauchte. Dazu ist nur nötig, daß man die Schwerlinien der Belastungsstreifen und ihre Inhalte angeben kann. Wenn die Zahl der Streifen, in die man die Belastungsfläche einteilte, nicht zu klein ist, kann man sie mit so großer Genauigkeit, als sie in einer Zeichnung überhaupt erreichbar ist, als Trapeze ansehen und dementsprechend Schwerpunkt und Inhalt ermitteln. Für einen geübten Zeichner genügt es oft vollständig, den Abstand des Schwerpunktes von der Streifenmitte einfach einzuschätzen. Um die Inhalte möglichst einfach zu finden, nimmt man die Streifen am besten alle von gleicher Breite. Die Inhalte sind dann den mittleren Höhen der Trapeze proportional. Da es nun gar nicht auf den Maßstab des Kräfteplanes ankommt, könnte man diese mittleren Höhen ohne weiteres als Maß für die Streifengewichte in den Kräfteplan eintragen. Damit dieser nicht eine unbequeme Größe erlangt, zieht man indessen vor, von allen Höhen nur einen bestimmten Bruchteil im Kräfteplane aufzutragen. Der Pol des Kräfteplanes kann wieder beliebig gewählt werden, da man zu einer stetig verteilten Belastung ebensogut beliebig viele Seilkurven konstruieren kann, wie beim Zusammensetzen von Einzellasten beliebig viele Seilecke.

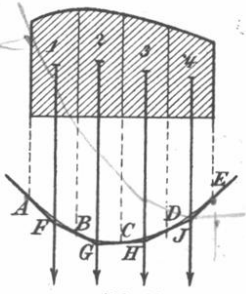

Abb. 38a.

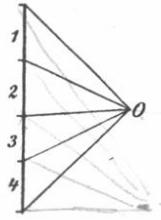

Abb. 38b.

Nachdem das Seileck auf diese Weise konstruiert ist, verlängert man die Streifengrenzen bis zu den Schnittpunkten

A, B usf. mit den Seileckseiten. Man weiß dann, daß diese Punkte der gesuchten Seilkurve angehören und kennt zugleich die Tangentenrichtungen an diesen Punkten. Es bedarf gar keiner besonders großen Anzahl von Punkten und Tangenten, um die Seilkurve so genau, als man es für praktische Zwecke nur irgend wünschen kann, freihändig oder mit Hilfe des Kurvenlineals dazwischen einzulegen.

§ 14. Differentialgleichung der Seilkurve.

In Abb. 39[a] ist oben eine beliebige Belastungsfläche, unten eine zugehörige Seilkurve gezeichnet. Im Abstande x vom linken Ende der Belastungsfläche sei die Belastungsdichte mit q, die von irgendeiner Horizontalen aus senkrecht nach abwärts gerechnete Ordinate der Seilkurve mit y bezeichnet. Außerdem ist an dieser Stelle eine Tangente an die Seilkurve gelegt, deren Winkel mit der Horizontalen gleich φ sei. Dieser Tangente entspricht eine gewisse Seilspannung, deren Größe in Abb. 39[b] durch einen parallel dazu gezogenen Polstrahl dargestellt wird. Sie läßt sich in eine senkrechte Komponente V und eine horizontale Komponente H zerlegen, die im Kräfteplane ersichtlich gemacht sind. Der Winkel φ kommt im Kräfteplane ebenfalls vor und man hat $\operatorname{tg}\varphi = \frac{V}{H}$.

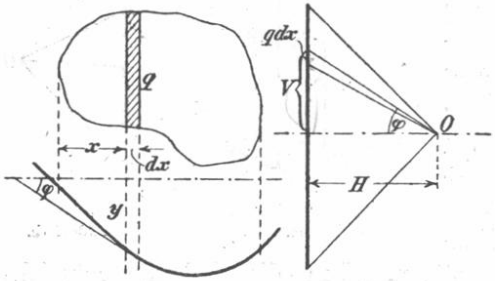

Abb. 39a. Abb. 39b.

Nun gehe man um dx weiter. Man erhält einen neuen Punkt der Seilkurve und eine ihm zugehörige Tangente, die in Abb. 39[a] nicht besonders angegeben ist, weil sie sich mit der vorigen nahezu decken würde. Dagegen ist im Kräfteplane die zugehörige Parallele eingetragen.

Beachtet man, daß nach den Lehren der analytischen Geometrie tg φ im Differentialquotienten von y ausgedrückt werden kann, so läßt sich die vorige Gleichung auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$$

schreiben und für die Änderung von tg φ beim Weitergehen um dx erhält man daher

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{V}{H}\right).$$

Nun ändert sich H überhaupt nicht, während V sich, wie aus dem Kräfteplane entnommen werden kann, um das Gewicht des Belastungsstreifens qdx vermindert. Man hat daher

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -qdx$$

oder nach Division mit dx

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q. \tag{2}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Seilkurve. Wenn q analytisch als Funktion von x gegeben ist, findet man daraus die endliche Gleichung der Seilkurve durch zweimalige Integration. Hierbei treten zwei willkürliche Integrationskonstanten auf. Da auch der Horizontalzug H des Seilpolygons willkürlich gewählt werden kann, enthält die allgemeine Gleichung der Seilkurve drei willkürliche Konstanten. Dies entspricht dem Umstande, daß zu einer gegebenen Belastungsfläche beliebig viele Seilkurven gezeichnet werden können. Um eine unter ihnen näher zu kennzeichnen, müssen noch besondere Bedingungen hinzutreten, die zur Ermittelung der Integrationskonstanten und des Horizontalzuges H ausreichen.

Für den besonders häufig vorkommenden Fall einer gleichförmigen Lastverteilung soll die Rechnung sofort weiter durchgeführt werden. Wenn q konstant ist, erhält man aus Gl. (2) durch zweimalige Integration

$$\left.\begin{aligned} H\frac{dy}{dx} &= -qx + C_1. \\ Hy &= -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wenn die Integrations-Konstanten mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Die Seilkurve bildet demnach eine Parabel.

Seile, Ketten oder dünne Drähte, deren Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann und die eine der horizontalen Richtung nach wenigstens annähernd gleichförmig verteilte Belastung zu tragen haben, kommen bei Ketten- oder Kabelbrücken, bei Telegraphenleitungen und bei Drahtseilbahnen vor. Ein Telegraphendraht z. B., der zwischen zwei weit voneinander entfernten Stützen ausgespannt ist, hat seine Eigenlast, zuzüglich einer im Winter bei Rauchfrost oder Schneefall ihm anhaftenden Eislast zu tragen, die als der ganzen Länge nach gleichförmig verteilt angenommen werden kann. Freilich ist die Eigenlast streng genommen der Bogenlänge und nicht der Abszisse x proportional. Wenn der Draht, wie es gewöhnlich zutrifft, ziemlich flach gespannt ist, ist der Unterschied aber geringfügig und er kommt um so weniger in Betracht, als die Schneebelastung, die unter Umständen erheblich mehr ausmachen kann als das Eigengewicht, eher proportional mit x als mit der Bogenlänge angenommen werden kann. Der Biegungswiderstand des Drahtes kommt in solchen Fällen gar nicht in Betracht; der Draht kann vielmehr bei den großen Krümmungshalbmessern, um die es sich dabei handelt, als ein vollkommen biegsames Seil angesehen werden.

In Abb. 40, die sich auf einen solchen Fall bezieht, sind A und B die beiden Stützen, zwischen denen der Draht ausgespannt ist. Dabei ist angenommen, daß beide gleich hoch liegen. Der Ursprung des Koordinatensystems ist auf die linke Stütze A und die X-Achse in die Verbindungslinie AB gelegt. An beiden Stützen gilt die Grenzbedingung, daß y zu Null werden muß. Hieraus folgen die Werte der Integrationskonstanten C_1 und C_2 in Gl. (3); C_2 muß zu Null werden und C_1 folgt aus

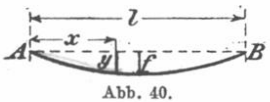

Abb. 40.

$$0 = -\frac{ql^2}{2} + C_1 l \text{ zu } C_1 = \frac{ql}{2}.$$

Die Parabelgleichung geht damit über in

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \tag{4}$$

Den Pfeil f der Seilkurve in der Mitte findet man hieraus zu

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \tag{5}$$

wobei in der letzten Form unter Q die Gesamtbelastung ql des Seiles oder Drahtes zu verstehen ist. Umgekehrt hat man auch

$$H = \frac{Ql}{8f} \tag{6}$$

und damit ist der Horizontalzug der Seilkurve bekannt für den Fall, daß die Durchhängung f des Seiles gegeben ist.

So wird die Aufgabe gewöhnlich gestellt. Es kann aber auch vorkommen, daß zur Ermittelung von H nicht f, sondern die Länge des Seiles, das zwischen den Punkten A und B aufgehängt werden soll, gegeben ist. Dafür ist die Aufstellung einer Gleichung zwischen f und der Bogenlänge der Parabel erforderlich, also die Lösung einer rein geometrischen Aufgabe. Von dieser kann hier abgesehen werden; dagegen soll eine Näherungsformel, von der man bei flachen Parabelbögen mit Vorteil Gebrauch machen kann, abgeleitet werden.

Versteht man unter ds die Länge eines Bogenelementes, so hat man

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Bei einem flachen Bogen ist $\frac{dy}{dx}$ überall ein kleiner Bruch. Vernachlässigt man das Quadrat davon ganz gegen die Einheit, so kann in erster Annäherung $ds = dx$ und die ganze Bogenlänge gleich der Entfernung l der beiden Stützen gesetzt werden. Diese Annäherung genügt aber bei manchen Aufgaben nicht, nämlich immer dann nicht, wenn es sich gerade um den Unterschied der Bogenlänge b von l handelt. Man erhält dann eine bis auf kleine Größen höherer Ordnung genaue Annäherung, wenn man die Wurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und sich auf die Beibehaltung der beiden ersten Glieder beschränkt. Man setze also

$$ds = dx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Führt man hier den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus der Parabelgleichung ein und integriert von 0 bis l, so erhält man

$$b = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{H^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\right] dx.$$

Die Integration kann leicht bewerkstelligt werden und liefert

$$b = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2}. \tag{7}$$

Schließlich kann auch noch der Wert von H aus Gl. (5) oder Gl. (6) eingesetzt werden, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$b = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}. \tag{8}$$

Von diesen Näherungsformeln kann man z. B. mit Vorteil Gebrauch machen, um den Einfluß, den eine Temperaturänderung des Drahtes auf f und damit auch auf H ausübt, zu berechnen. Hierbei kann es (bei sehr flachen Bögen) auch nötig werden, die elastische Verlängerung des Drahtes unter dem Einflusse des Horizontalzuges H in Berücksichtigung zu ziehen. Alle Aufgaben dieser Art können mit Hilfe der Formeln (5), (6) und (7), nötigenfalls unter Heranziehung des Elastizitätsgesetzes, leicht gelöst werden.

§ 15. Die Kettenlinie.

Wenn ein Seil, das nur sein Eigengewicht zu tragen hat, stärker durchhängt, als bisher vorausgesetzt war, genügt die vorige Annäherung nicht mehr. Man muß dann von vornherein Rücksicht darauf nehmen, daß die Belastung jedes Seilelementes nicht dem zugehörigen Abszissenelemente, sondern dem Bogendifferentiale proportional ist. Die einer solchen Belastung entsprechende Seilkurve wird als eine Kettenlinie bezeichnet.

Man kann die Theorie der Kettenlinie zwar unmittelbar an die vorher schon abgeleitete Differentialgleichung der Seilkurve anknüpfen; da sich aber die Rechnungen bei einer etwas andern und für diesen Fall zweckmäßigeren Wahl des Koordinatensystems einfacher gestalten, soll von den vorausgehenden Entwicklungen kein Gebrauch gemacht werden.

In Abb. 41[a] ist eine Kettenlinie gezeichnet. Die Y-Achse des Koordinatensystems fällt mit der Symmetrieachse zusammen, während die horizontale X-Achse um einen später noch näher anzugebenden Abstand a unterhalb des Scheitels der Kurve liegen soll. Die Ordinaten y werden hier im Gegensatze zu der bei der Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung der Seilkurven getroffenen Festsetzung nach oben

hin positiv gerechnet. Im Punkte xy der Kettenlinie ist eine Tangente gezogen, die den Winkel φ mit der X-Achse bilden möge. Parallel zu ihr ist im Kräfteplane, Abb. 41[b], ein Polstrahl gezogen, der die Seilspannung im Punkte xy angibt. Außerdem ist auch noch ein zweiter Polstrahl gezogen, der zu einem dem vorigen unendlich nahe benachbarten Punkte gehören soll. Zwischen beiden Punkten liegt das Bogendifferential ds der Kettenlinie, dessen Gewicht gleich γds gesetzt werden kann, wenn man unter γ das Gewicht der Längeneinheit des Seiles versteht. Man hat wieder, wie bei der ähnlichen Entwicklung des vorigen Paragraphen

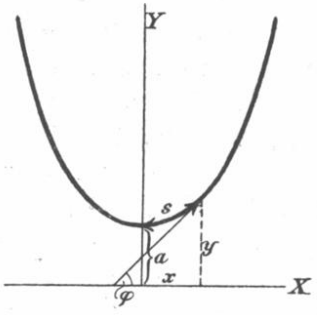

Abb. 41a.

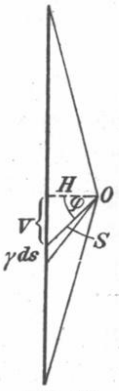

Abb. 41b.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V}{H} \quad \text{oder auch} \quad H\frac{dy}{dx} = V$$

und wenn wir zum nächsten Punkte übergehen,

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = dV = \gamma ds$$

oder in Form einer Differentialgleichung geschrieben

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma\frac{ds}{dx}. \tag{9}$$

Da H und γ konstant sind, kann die Gleichung sofort einmal integriert werden. Man erhält

$$H\frac{dy}{dx} = \gamma s + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Bedingung, daß im Scheitel $\frac{dy}{dx}$ gleich Null ist. Zählen wir also die Bogenlänge s bis zum Punkte xy vom Scheitel aus, so muß $C = 0$ sein und die Gleichung geht über in

$$H\frac{dy}{dx} = \gamma s. \tag{10}$$

Diese Gleichung lehrt uns bereits eine merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie kennen: sie zeigt, daß die Tangente des Neigungswinkels φ proportional der Bogenlänge s wächst.

Um zur endlichen Gleichung der Kettenlinie zu gelangen, müssen wir aber zu Gl. (9) zurückkehren und darin ds durch dx und dy mit Hilfe des Pythagoräischen Satzes ausdrücken. Die Gleichung geht dann über in

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (11)$$

Die Variable y selbst kommt in dieser Gleichung nicht vor. Bezeichnen wir den ersten Differentialquotienten von y nach x vorübergehend mit p, so läßt sie sich in der Form

$$H\frac{dp}{dx} = \gamma\sqrt{1+p^2}$$

anschreiben, die in bezug auf die Variable p von der ersten Ordnung ist. Um die Gleichung zu integrieren, ordnen wir sie wie folgt:

$$H\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \gamma dx,$$

und von da können wir unmittelbar zur Stammgleichung gelangen, indem wir beiderseits integrieren. Dabei ist die Integralformel

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$$

zu beachten, von deren Richtigkeit man sich leicht durch Ausführung der Differentiation an dem Logarithmus überzeugt. Die vorhergehende Gleichung liefert daher

$$H\lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \gamma x + C_1.$$

Auch die hierbei auftretende Integrations-Konstante C_1 ist wegen der Grenzbedingung $p=0$ für $x=0$ gleich Null zu setzen. Geht man ferner vom Logarithmus zum Numerus über, so erhält man

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\gamma x}{H}}.$$

Diese Gleichung lösen wir nach p auf; sie ist, wie man dabei findet, nur scheinbar vom zweiten Grade, in Wirklichkeit vielmehr vom ersten Grade in bezug auf p und die Lösung lautet

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right). \tag{12}$$

Die auf der rechten Seite stehende Funktion von $\frac{\gamma x}{H}$ kommt öfters vor und man hat ihr wegen der Verwandtschaft, in der sie zu den goniometrischen Funktionen steht, die Bezeichnung des hyperbolischen Sinus gegeben. Gebraucht man dafür die Bezeichnung sinh und erinnert man sich zugleich der Bedeutung von p, so läßt sich die Gleichung auch in der kürzeren Form

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{\gamma x}{H} \tag{13}$$

anschreiben. Setzt man diesen Wert von $\frac{dy}{dx}$ in Gl. (10) ein, so findet man auch die Bogenlänge s als Funktion von x, nämlich

$$s = \frac{H}{\gamma}\sinh\frac{\gamma x}{H}. \tag{14}$$

Um auch y zu erhalten, müssen wir Gl. (13) noch einmal integrieren. Wer mit den Hyperbel-Funktionen ein wenig bekannt ist, weiß schon, daß das Integral von sinh den hyperbolischen Kosinus liefert. Im andern Falle braucht man aber nur auf Gl. (12) zurückzugehen und die leicht auszuführende Integration an den Exponential-Funktionen vorzunehmen. Man erhält dann

$$y = \frac{H}{\gamma}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right) + C_2. \tag{15}$$

Der Faktor von $\frac{H}{\gamma}$ bildet jene Funktion, die man den hyperbolischen Kosinus nennt. Die neu aufgetretene Integrations-Konstante C_2 ist aus der Bedingung zu ermitteln, daß $y = a$ wird für $x = 0$. Wir wollen nun den Abstand a, dessen Größe bisher unbestimmt gelassen wurde, so wählen, daß auch die Integrations-Konstante C_2 verschwindet, damit wir zu möglichst einfachen Formeln gelangen. Für $x = 0$ geht Gl. (15) über in

$$a = \frac{H}{\gamma} + C_2$$

und C_2 verschwindet daher, wenn wir

$$a = \frac{H}{\gamma} \tag{16}$$

wählen. Hiermit nimmt die Gleichung der Kettenlinie die einfache Form

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \tag{17}$$

an. Der Wert von a läßt, wie aus Gl. (16) hervorgeht, wenn man sie in der Form $H = a\gamma$ schreibt, eine anschauliche Deutung zu. Es ist nämlich jene Seillänge, deren Gewicht gleich dem Horizontalzuge der Kettenlinie ist.

Auch für die Seilspannung S an irgendeinem Punkte xy der Kettenlinie kann man einen einfachen Ausdruck aufstellen. Zunächst hat man, wie aus Abb. 41[b] hervorgeht,

$$V = H \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad S = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = H\sqrt{1 + p^2},$$

wenn die vorher schon gebrauchte Abkürzung p für $\frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{tg} \varphi$ wieder benutzt wird. Setzt man p aus Gl. (12) ein, so erhält man

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right) = \cosh \frac{\gamma x}{H}.$$

Setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein und drückt zugleich H nach Gl. (16) in a aus, so findet man

$$S = a\gamma \cosh \frac{x}{a}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (17) geht dies über in

$$S = \gamma y. \tag{18}$$

Die Seilspannung ist daher an jeder Stelle der Ordinate y proportional und die Gleichung $H = a\gamma$ ist nur als ein besonderer Fall von Gl. (18) anzusehen, da der Horizontalzug H zugleich die Spannung im Scheitel der Kettenlinie angibt.

Für die Hyperbelfunktionen hat man Tafeln ausgerechnet, die ganz ähnlich eingerichtet sind wie die Tafeln der goniometrischen Funktionen. Sie sind zwar nicht so häufig verbreitet, wie die ge-

wöhnlichen Sinustafeln, aber doch in manchen Logarithmentafeln und in vielen anderen Tabellenwerken wenigstens in auszugsweiser Form zu finden. Auch das bekannte Werk „Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch" enthält solche Tafeln. Mit deren Hilfe gestalten sich die Zahlenrechnungen über Kettenlinien auf Grund der vorausgehenden Formeln in manchen Fällen fast noch einfacher, als wenn man — bei flachen Kurven — Parabeln an Stelle der Kettenlinien annimmt.

§ 16. Die Momentenfläche.

In Abb. 42[a] sind die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ ... durch ein Seilpolygon $\mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1$ ... verbunden, wozu der Kräfteplan Abb. 42[b] gehört. Man lege irgendwo einen Schnitt $\sigma\sigma$ durch das Seilpolygon, der dieses im Punkte C trifft. Es handle sich darum, das statische Moment aller links vom Punkte C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ in bezug auf diesen Punkt als Momentenpunkt festzustellen.

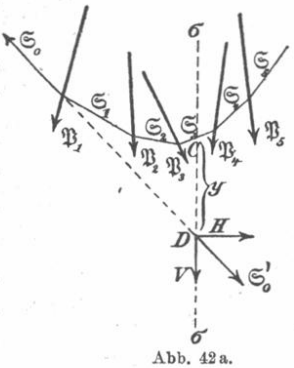

Abb. 42 a.

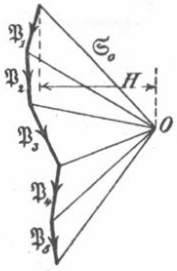

Abb. 42 b.

An diesem Momente wird nichts geändert, wenn wir auch die Kräfte $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_0'$, die sich gegenseitig aufheben, mit einrechnen. Nun war aber $\mathfrak{S}_0$ mit allen links vom Schnitte liegenden Kräften $\mathfrak{P}$ zur Resultierenden $\mathfrak{S}_3$ vereinigt, die durch den Momentenpunkt C geht und deren Moment daher verschwindet. Das Moment der links von C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}$ ist daher dem Momente von $\mathfrak{S}_0'$ gleich. Zerlegen wir noch $\mathfrak{S}_0'$ im Punkte D, in dem es von dem in senkrechter Richtung geführten Schnitte $\sigma\sigma$ getroffen wird, in eine horizontale Komponente H und eine vertikale Komponente V, so verschwindet das Moment von V und das gesuchte Moment M der links von C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}$ kann daher

$$M = Hy \tag{19}$$

gesetzt werden, wenn unter y der Abschnitt CD auf der durch

den Punkt C in lotrechter Richtung geführten Linie zwischen den Richtungen der Seilstrahlen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_0'$ verstanden wird.

Von dieser Anwendung des Seileckes zur Ermittelung der statischen Momente gegebener Kräfte wird namentlich Gebrauch gemacht, wenn die Kräfte $\mathfrak{P}$ alle parallel zueinander gerichtet sind. Geht dann der Schnitt $\sigma\sigma$ ebenfalls parallel zu ihnen, so ist es gleichgültig, welchen Punkt der Richtungslinie von $\sigma\sigma$ man als Momentenpunkt wählt. Man spricht daher in diesem Falle oft nur von dem Momente M aller links von einem Schnitte liegenden Kräfte, ohne einen bestimmten Momentenpunkt zu bezeichnen, auf den sich das Moment beziehen soll. Da ferner H für alle Schnitte $\sigma\sigma$ denselben Wert hat, so ist M überall der Strecke y proportional. Die zwischen dem Seilecke und dem Seilstrahle $\mathfrak{S}_0'$ liegende Fläche wird aus diesem Grunde als die Momentenfläche bezeichnet.

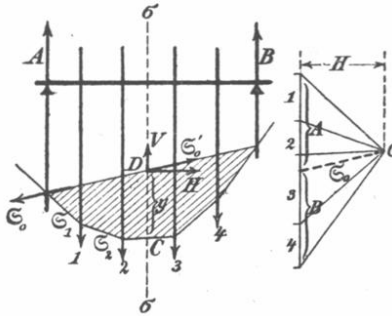

Abb. 43a. Abb. 43b.

Die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen wird durch Abb. 43 dargestellt. In Abb. 43[a] ist ein Balken gezeichnet, der auf zwei Stützen aufruht und die Lasten 1, 2 ... trägt. Diese und die zugehörigen Auflagerkräfte sind durch das geschlossene Seileck, das darunter gezeichnet ist, miteinander verbunden. Wie man die Auflagerkräfte A und B im Kräfteplane Abb. 43[b] findet, ist schon von früher her bekannt.

Das statische Moment aller links von irgendeinem Schnitte $\sigma\sigma$ liegenden Kräfte, mit Einschluß des Auflagerdruckes A, ist von Wichtigkeit, weil von ihm die Biegungsbeanspruchung des Balkens in diesem Querschnitte abhängt. Es wird als das Biegungsmoment bezeichnet. Damit der Auflagerdruck A von vornherein in das Seilpolygon mit eingeschlossen ist, betrachten wir die Schlußlinie als den ersten Seilstrahl $\mathfrak{S}_0$, der dann mit A zu $\mathfrak{S}_1$ zusammengesetzt ist. Den Momentenpunkt C

wählen wir wiederum auf dem Schnitte der Linie $\sigma\sigma$ mit dem Seilpolygone. Wie vorher kann dann das Biegungsmoment gleich dem Momente von $\mathfrak{S}_0'$ oder gleich Hy gesetzt werden, wenn die Buchstaben dieselbe Bedeutung behalten, wie im vorigen Falle. Die Momentenfläche ist die von dem geschlossenen Seilecke umgrenzte Fläche; sie ist in der Abbildung schraffiert. Das Biegungsmoment ist für jeden Querschnitt dem in die Momentenfläche hineinfallenden lotrechten Abschnitte y proportional. Man kann daher z. B. sofort erkennen, an welcher Stelle das Biegungsmoment bei der gegebenen Laststellung seinen größten Wert annimmt, indem man mit dem Zirkel in der Hand den größten Abschnitt y aufsucht. Gerade darauf, daß man nicht nur für einen bestimmten Querschnitt, sondern sofort für alle Querschnitte die zugehörigen Biegungsmomente findet, beruht der Vorteil des graphischen Verfahrens gegenüber der Aufsuchung des Biegungsmomentes durch Rechnung, die freilich an sich auch gar keine Schwierigkeiten macht.

Man nehme z. B. an, daß es sich darum handele, für jeden Querschnitt eines Brückenträgers das größte Biegungsmoment festzustellen, das in ihm während der Überfahrt eines Eisenbahnzuges von gegebener Zusammensetzung auftritt. Man hat es dann mit einem Systeme fest miteinander verbundener Lasten zu tun, dessen Stellung zur Brücke alle möglichen Lagen annehmen kann. Man vereinigt zunächst die Lasten durch irgendein Seileck. Dann denkt man sich das Lastensystem in Ruhe und den Brückenträger dagegen verschoben, wobei man eine hinreichende Anzahl aufeinanderfolgender Stellungen herausgreift. Die jeweilige Stellung des Brückenträgers relativ zum Eisenbahnzuge wird schon durch zwei in lotrechter Richtung gezogene Linien, die durch die Stützpunkte gehen und deren Abstand daher gleich der Spannweite des Balkens ist, hinreichend gekennzeichnet. Man trägt die zugehörige Schlußlinie ein und hat damit sofort die Momentenfläche für die betreffende Stellung gefunden. Jeder andern Stellung entspricht eine andere Momentenfläche, zu deren Ermittelung wiederum schon das Einzeichnen einer neuen Schlußlinie genügt. Man könnte nun mit Hilfe des Zirkels für jeden Querschnitt den größten Wert von y in allen diesen in derselben Zeichnung vereinigten Momentenflächen aufsuchen. Übersichtlicher wird es aber, wenn man in einer zweiten Figur den Balken in unveränderlicher Stellung zeichnet und alle Momentenflächen, auf dieselbe Schlußlinie bezogen, nämlich

von der Balkenachse selbst aus, übereinander abträgt. Man hat dann nur nötig, eine Umhüllungslinie freihändig einzutragen, die alle diese Momentenflächen umschließt. Dadurch erhält man die Maximal-Momentenfläche, deren Ordinaten für jeden Querschnitt das größte in ihm während des Passierens des Eisenbahnzuges auftretende Biegungsmoment angeben. Man kann auch durch Rechnung nachweisen, daß der Umriß der Maximal-Momentenfläche durch Parabelbögen gebildet wird, die sich polygonartig aneinander schließen.

§ 17. Besondere Fälle für die Konstruktion der Momentenfläche.

Bei größeren Brückenkonstruktionen wird die bewegliche Last nicht unmittelbar von den Hauptträgern selbst aufgenommen. Dazu dient vielmehr eine „Fahrbahnkonstruktion", die sich ihrerseits auf die Hauptträger stützt. Die Stützpunkte sind gewöhnlich in gleichen Abständen voneinander angeordnet. Als Lasten an den Hauptträgern sind hier nicht die unmittelbar gegebenen Lasten, sondern die von der Zwischen- oder Fahrbahnkonstruktion darauf übertragenen Auflagerkräfte anzusehen. Die diesem Falle der „mittelbaren Belastung" entsprechende Momentenfläche kann indessen aus dem Seilecke der gegebenen Lasten stets leicht gefunden werden.

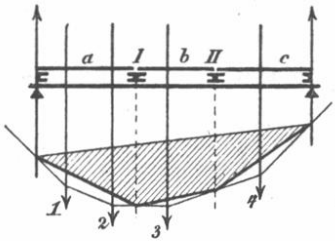

Abb. 44a.

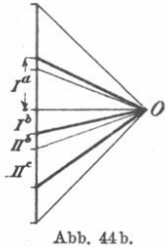

Abb. 44b.

In Abb. 44[a] ist ein auf zwei Stützen ruhender Balken gezeichnet, dessen ganze Länge durch die Zwischenträger *a*, *b*, *c* in drei Teile geteilt ist. Auf die Zwischenträger wirken die Lasten 1, 2, 3 . . . und der Balken ist nur an den Auflagerstellen I und II durch die dort übertragenen Auflagerdrücke der Fahrbahnkonstruktion belastet. Man soll die dazu gehörige Momentenfläche konstruieren.

Zu diesem Zwecke zeichnet man zunächst mit Hilfe des Kräfteplanes Abb. 44^b ein Seilpolygon, das die gegebenen Lasten verbindet und trägt die Schlußlinie ein. Man hätte damit schon die Momentenfläche, wenn die Lasten direkt und nicht indirekt, durch Vermittelung der Fahrbahnkonstruktion, an dem Balken angriffen. Hierauf zieht man lotrechte Linien durch die Knotenpunkte I, II, wodurch das Seilpolygon in ebensoviele Abschnitte getrennt wird, als Zwischenträger *a*, *b*, *c* vorhanden sind. Jeder dieser Seilpolygonabschnitte kann als ein dem betreffenden Zwischenträger und den von ihm unmittelbar aufgenommenen Lasten entsprechendes, besonderes Seilpolygon aufgefaßt werden. Man trage auch die zu diesen Abschnitten gehörigen, in Abb. 44^a durch starke Striche hervorgehobenen Schlußlinien ein. Parallelen dazu in Abb. 44^b, die ebenfalls durch starke Striche gekennzeichnet sind, schneiden auf der Lastlinie die Auflagerkräfte ab, die von der Zwischenkonstruktion auf den Hauptträger übertragen werden. Mit I^a ist in der Abbildung der Auflagerdruck bezeichnet, der vom Zwischenträger *a* auf den Stützpunkt I übertragen wird und I^b gibt den auf denselben Stützpunkt vom Zwischenträger *b* her gelangenden Druck an.

Die vom Hauptträger selbst aufgenommenen Lasten bestehen hiernach am Punkte I aus $I^a + I^b$ und am Punkte II aus $II^b + II^c$. Zu diesen Lasten wäre von neuem ein Seilpolygon zu konstruieren. Man sieht aber, daß dieses schon fertig vorliegt, ohne daß man noch weitere Linien zu ziehen braucht. Denn die stark ausgezogenen Polstrahlen im Kräfteplane, die wir vorher als Schlußlinien der kleinen Seilpolygonabschnitte aufzufassen hatten, bilden sofort schon den Kräfteplan, der zu den Lasten $I^a + I^b$ und $II^b + II^c$ gehört, und ihm entspricht im Lageplane auch der Zug der stark ausgezogenen Linien als Seilpolygon. Die Schlußlinie ist dieselbe wie beim Seilpolygone für die unmittelbar gegebenen Lasten 1, 2 ... Hiernach stellt die in der Abbildung durch Schraffierung hervorgehobene Fläche zwischen dieser Schlußlinie und dem durch starke Striche angegebenen Seilpolygone die gesuchte Momentenfläche des Hauptträgers dar. Die weiß gelassenen Flächen zwischen

beiden Seilpolygonen bilden die Momentenflächen für die Zwischenträger *a*, *b*, *c*. Man erkennt hieraus auch, in welcher Weise sich das gesamte Moment der links von irgendeinem Schnitte liegenden äußeren Kräfte an der ganzen Konstruktion auf ein durch die Biegungsfestigkeit des Hauptträgers aufzunehmendes Moment und auf ein anderes verteilt, das von dem durch den gleichen Schnitt getroffenen Zwischenträger aufzunehmen ist.

Zugleich bemerkt man, daß das Eintragen der Parallelen zu den Schlußlinien der einzelnen Seilpolygonabschnitte in den Kräfteplan nur für den Zweck des Beweises nötig war. Nachdem dieser einmal geführt ist, braucht man die Parallelen bei den Anwendungen gar nicht mehr zu ziehen. Es genügt dazu, nach Konstruktion des Seilpolygons, das die unmittelbar gegebenen Lasten verbindet, von den Knotenpunkten, in denen zwei Zwischenträger zusammenstoßen, Senkrechte zu ziehen und deren Schnittpunkte mit den Seileckseiten durch Linien zu verbinden. Das auf diese Weise gewonnene, dem Seilecke eingeschriebene Polygon schließt dann in Verbindung mit der Schlußlinie des ganzen Seileckes die Momentenfläche für den Hauptträger ein.

Ist z. B. eine gleichförmig verteilte stetige Belastung auf der Fahrbahn gegeben, so geht das dieser zugehörige Seileck, wie aus den Untersuchungen in § 14 folgt, in eine Parabel über, und die Momentenfläche für den Hauptträger wird durch das in der angegebenen Weise der Parabel eingeschriebene Polygon gebildet.

In Abb. 44[a] waren nur drei Zwischenträger angenommen. Trotzdem wich auch hier schon die Momentenfläche für die indirekte Belastung nur wenig von jener ab, die der unmittelbaren Belastung des Hauptträgers durch die gegebenen Lasten entsprochen hätte. Die Abweichung wird um so geringer, je größer die Zahl der Zwischenträger oder je größer die Zahl der Knotenpunkte I, II ... ist, an denen der Hauptträger die Fahrbahnkonstruktion stützt. Da nun diese Zahl in der Regel ziemlich groß ist (gewöhnlich mindestens 8 oder 10), kommt der Unterschied zwischen beiden Momentenflächen meistens gar nicht in Betracht und man behandelt daher den Fall gewöhnlich so, als wenn die Lasten unmittelbar am Hauptträger angriffen. — Wenn einer der Zwischenträger gar keine Last trägt, fällt übrigens der zugehörige Seilpolygonabschnitt

von selbst schon gerade mit dem Umrisse der Momentenfläche für den Hauptträger zusammen.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 45[a] dargestellt. Ein Träger reicht über zwei Öffnungen, ist aber, um die statische Unbestimmtheit, die sonst hereinkäme, zu vermeiden, bei D in zwei Teile getrennt, die durch ein Gelenk miteinander zusammenhängen. Hiernach wird die rechts liegende Öffnung durch einen Balken überdeckt, der bis D in die linke Öffnung hinein vorkragt und auf den sich bei D ein nur von A bis D reichender, kürzerer Balken stützt. Träger-Kombinationen dieser Art werden im neueren Brückenbaue häufig angewendet; man bezeichnet sie als Kragträger oder nach dem Konstrukteur, der sie zuerst in sorgfältiger Ausbildung und in größerem Maßstabe zur Anwendung brachte, als Gerbersche Träger. Der Vorteil, der mit dieser Anordnung verbunden ist, wird sich aus der weiteren Betrachtung alsbald ergeben.

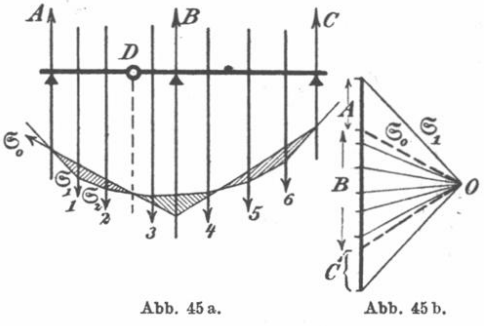

Abb. 45a. Abb. 45b.

Um die Momentenfläche zu konstruieren, verbindet man zunächst die Lasten 1, 2 . . . durch ein Seilpolygon. Dieses wird durch eine vom Gelenke D aus gezogene Senkrechte in zwei Abschnitte geteilt und der linke Abschnitt davon bezieht sich sofort auf den die Spannweite von A bis D selbständig überbrückenden Balken. Trägt man für diesen Abschnitt die Schlußlinie ein, so hat man ohne weiteres die zu dem linken Balken gehörige Momentenfläche, die durch eine Schraffierung hervorgehoben ist.

Man denke sich ferner auch die Auflagerkräfte A, B, C in das Seilpolygon mit einbezogen. Da sie mit den gegebenen Lasten im Gleichgewichte stehen, muß das Seilpolygon zu einem

geschlossenen werden. Der Auflagerdruck, den der linke Balken auf den rechten im Gelenke D überträgt, kommt hierbei nicht in Betracht, weil ihm nach dem Wechselwirkungsgesetze ein gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Druck vom rechten auf den linken Balken gegenübersteht und beide als innere Kräfte ohne Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften sind, sobald man die Kräfte an dem ganzen Trägerverbande ins Auge faßt. Das Gelenk D hat nun zur Folge, daß das Biegungsmoment an dieser Stelle zu Null werden muß, und beim Eintragen der Schlußlinie für den linken Abschnitt des Seileckes ist von dieser Bedingung bereits Gebrauch gemacht.

Die Schlußlinie des linken Seileckabschnittes betrachten wir, wie schon im Falle der Abb. 43, als die erste Seilspannung, die mit dem Auflagerdrucke A zu $\mathfrak{S}_1$ zusammengesetzt ist. Für jeden Querschnitt in der ersten Öffnung, wenn er auch rechts vom Gelenke D liegt, können dann alle Kräfte links vom Schnitte durch die davon getroffene Seilspannung und die Gegenkraft $\mathfrak{S}_0'$ von $\mathfrak{S}_0$ ersetzt werden. An der Mittelstütze greift der nach oben gerichtete Auflagerdruck B an. Da B in dem zuerst konstruierten Seilecke nicht vorkam, denken wir uns B mit $\mathfrak{S}_0'$ zu einer Resultierenden vereinigt, von der wir zunächst nur wissen, daß sie durch den Schnittpunkt beider Richtungslinien gehen muß. Dann können auch in der rechten Öffnung für jeden Querschnitt alle links davon liegenden äußeren Kräfte durch diese Resultierende und die von dem Schnitte getroffene Seilspannung ersetzt werden. Denkt man sich ferner die letzte Seilspannung mit dem Auflagerdrucke C zu einer Resultierenden vereinigt, die jedenfalls durch den Schnittpunkt der beiden Richtungslinien gehen muß, so sind nachher alle Kräfte an der ganzen Konstruktion auf diese Resultierende und auf die vorher besprochene Resultierende aus B und $\mathfrak{S}_0'$ zurückgeführt. Da aber alle Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden, müssen sich auch die beiden Resultierenden im Gleichgewichte halten, d. h. ihre Richtungslinien müssen zusammenfallen. Man findet daher diese Richtungslinie durch Verbindung

der beiden Punkte, die wir von ihr bereits kennen. Nach Eintragen der Verbindungslinie ist das Seilpolygon geschlossen und die Momentenfläche wird durch die zwischen den Schlußlinien und dem Seilpolygone eingeschlossenen, durch Schraffierung hervorgehobenen Flächen gebildet. Dabei ist zu beachten, daß die mittlere Fläche, deren Schraffierungsstriche von links nach rechts fallen, negativen Momenten entspricht. Alle links liegenden Kräfte ergeben nämlich für einen an dieser Stelle geführten Schnitt ein Moment, das dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt ist, und der Balken wird von diesem Momente so gebogen, daß er seine Hohlseite nach unten hin kehrt, während die Hohlseite bei positiven Momenten, die in der Abbildung durch von rechts nach links fallende Schraffierungsstriche gekennzeichnet sind, nach oben hin gerichtet ist.

Auch hier ist die Überlegung, die zur Lösung führt, weitläufiger als die wirkliche Ausführung der Konstruktion. Bei dieser braucht man nur darauf zu achten, daß zu jeder Öffnung des Kragträgers eine besondere Schlußlinie gehört, daß diese Schlußlinien auf den Richtungslinien der Auflagerkräfte aneinander stoßen und daß sie auf den durch die Gelenke gezogenen Vertikalen und den Vertikalen durch die beiden äußersten Stützpunkte die Seileckseiten schneiden. Diese Bedingungen genügen in allen Fällen dieser Art, um alle Schlußlinien einzutragen. Die zwischen ihnen und dem Seilpolygone eingeschlossenen Flächen bilden die Momentenflächen. Um die Vorzeichen festzusetzen, braucht man uur zu beachten, daß solche Trägerteile, die eine Spannweite für sich überdecken, ohne über die Stützen vorzukragen (wie hier der zwischen A und D liegende), nur positive Biegungsmomente aufzunehmen haben und daß bei jeder Überschneidung einer Schlußlinie mit dem Seilpolygone ein Wechsel im Momentenvorzeichen eintritt.

Würde jede der beiden Öffnungen in Abb. 45[a] durch einen Träger für sich überdeckt, der ohne Zusammenhang mit dem andern wäre, wobei natürlich das Gelenk in D wegfallen müßte, so hätte man für jede Öffnung ohne Rücksicht auf die andere die Momentenfläche so wie in Abb. 43 zu konstruieren. Für die linke Öffnung würde man also z. B. die Schnittpunkte der Richtungslinien von A und B mit den Seileckseiten zu verbinden haben, um die Schlußlinie und hiermit die Momentenfläche für diese Öffnung zu erhalten. Denkt man sich diese Linie in die Abbildung eingetragen, so erkennt man sofort, daß die Momentenfläche dann viel größer aus-

fällt, als vorher. Von der Größe der Momente hängt aber die Biegungsbeanspruchung des Balkens ab. Der Kragträger wird demnach durch die gegebenen Lasten weniger stark beansprucht, als wenn jede Öffnung für sich überdeckt wäre und in diesem Umstande ist der Vorteil begründet, der sich durch die Gerbersche Anordnung erzielen läßt.

§ 18. Die graphische Ermittelung von Trägheitsmomenten.

Das Seilpolygon kann auch dazu verwendet werden, das Trägheitsmoment einer Querschnittsfläche für irgendeine in deren Ebene enthaltene Achse (und zwar gewöhnlich für eine Schwerlinie als Achse) zu ermitteln. Zur Begründung des Verfahrens diene Abb. 46. Die Belastungsfläche ist hier genau der in Abb. 38 (S. 69) nachgebildet und die Seilkurve, deren Konstruktion dort erläutert wurde, ist hier ebenfalls von dort übernommen. Nur die Einteilung in die Belastungsstreifen und das den Einzellasten entsprechende, aus Tangenten der Seilkurve bestehende Seilpolygon ist in der neuen Figur weggelassen, weil diese Linien zwar zur Konstruktion der Seilkurve nötig sind, nachher aber nicht mehr gebraucht und daher fortgelöscht werden können. Verlängert man die äußersten Seileckseiten, also die Endtangenten der Seilkurve, bis sie sich schneiden, so geht durch diesen Punkt die Resultierende der das Seil belastenden Gewichte, d. h. die Linie SS ist die Schwerlinie der Belastungsfläche.

Man betrachte ferner einen unendlich schmal zu denkenden Streifen dF der Belastungsfläche im Abstande y von SS. Verlängert man die Grenzlinien des Streifens bis zur Seilkurve und zieht an beiden Punkten der Seilkurve Tangenten, so schließen diese mit SS das in der Abbildung schwarz hervorgehobene, schmale Dreieck ein. Die auf SS liegende Grundlinie des Dreieckes sei mit dg bezeichnet. Der gegenüberliegende Eckpunkt, also der Schnittpunkt beider Tangenten liegt auf der Schwerlinie des Streifens dF. Die zu dg gehörige Höhe des Dreieckes ist daher gleich y und der Inhalt des Dreieckes gleich $\frac{1}{2} dg \cdot y$.

Im Kräfteplane Abb. 46[b] kann man durch Ziehen von Parallelen zu den beiden Tangenten ein ebenfalls schwarz hervorgehobenes Dreieck abgrenzen, das dem in Abb. 46 ähnlich ist, weil die Seiten parallel zueinander gehen. Man hat daher die Proportion

$$\frac{dF}{H} = \frac{dg}{y} \quad \text{oder} \quad H\,dg = y\,dF.$$

Um auf die Momente zweiten Grades zu kommen, multipliziere man die Gleichung mit y. Damit erhält man

$$y^2 dF = H y dg \quad \text{und daher} \quad \int y^2 dF = H \int y dg.$$

Die Summierung auf der rechten Seite kann aber unmittelbar ausgeführt werden. Denn das Integral gibt das Doppelte aus der Summe aller jener Dreiecke an, von denen vorher eines besprochen wurde. Diese Dreiecke folgen alle stetig aufeinander und füllen den zwischen der Seilkurve, der Anfangstangente und der Linie SS liegenden Raum aus. Dabei ist übrigens gar nicht einmal nötig, daß SS die Schwerlinie sei; auch für irgendeine andere, parallel zu SS gezogene Linie $\sigma\sigma$ bleibt die Betrachtung anwendbar, und die zwischen ihr, der Kurve und der Anfangstangente abgegrenzte Fläche gibt nach Multiplikation mit $2H$ das Moment zweiten Grades für $\sigma\sigma$ von dem links davon liegenden Teile der Belastungsfläche an.

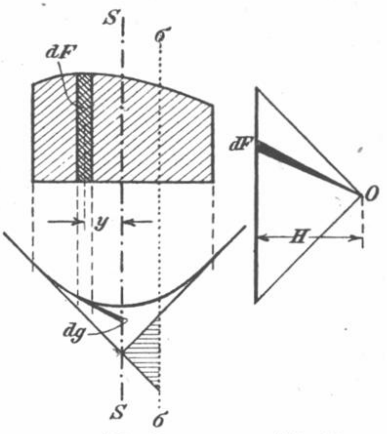

Abb. 46 a. Abb. 46 b.

Um das Moment für die ganze Belastungsfläche zu erhalten, braucht man nur das Moment für die rechte Hälfte hinzuzufügen. Für dieses gilt dieselbe Betrachtung; es kann auch gleich dem Produkte aus $2H$ und dem zwischen der Seilkurve, der Endtangente und der Linie SS oder $\sigma\sigma$ liegenden Flächenstücke gesetzt werden. Dabei ist zu beachten, daß jedes Flächenelement

der Belastungsfläche nur positive Beiträge zum Trägheitsmomente liefern kann; die von links und rechts her stammenden Beiträge sind daher ohne Vorzeichenunterschied zusammenzuzählen.

Ein Blick auf Abb. 46[a] lehrt, daß das Trägheitsmoment unter allen parallel zueinander gezogenen Achsen für die Schwerlinie SS am kleinsten ausfällt. Es ist nämlich gleich dem Produkte aus $2H$ und der zwischen der Seilkurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossenen Fläche. Für eine Achse $\sigma\sigma$ vergrößert sich dagegen diese Fläche um das zwischen $\sigma\sigma$ und den beiden Endtangenten abgeschnittene Dreieck, das in Abb. 46[a] durch eine horizontale Schraffierung ausgezeichnet ist.

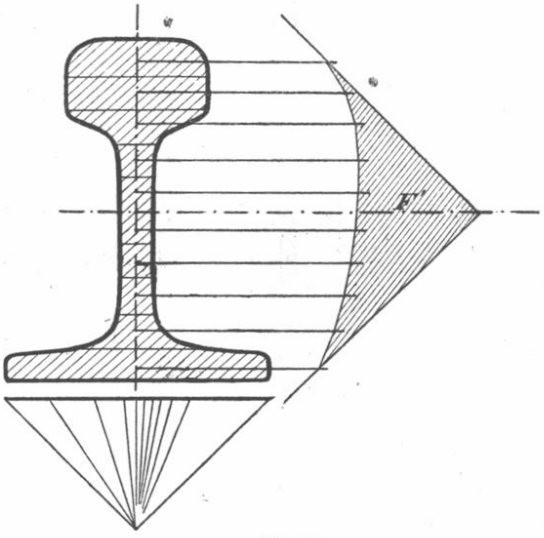

Abb. 47.

Der Horizontalzug H der Seilkurve hat die Bedeutung eines Flächeninhaltes. Als Lasten dienten nämlich die Flächeninhalte der Belastungsstreifen und mit diesen muß H von gleicher Art sein. Am besten wählt man H im Kräfteplane so, daß es die Hälfte der Belastungsfläche F darstellt. Dies wird sofort erreicht, wenn man die beiden äußersten Polstrahlen in Richtungen von 45° zieht. Dann bildet nämlich H die Höhe eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse die Summe aller dF, also F selbst angibt. Bezeichnet man ferner die zwischen der Seilkurve und ihren beiden Endtangenten liegende Fläche mit F' und das Trägheitsmoment für die Schwerlinie SS mit Θ, so hat man, unter der Voraus-

setzung, daß H in der eben angegebenen Weise gewählt wurde,

$$\Theta = F \cdot F'. \tag{20}$$

Die Inhalte der Flächen F und F' ermittelt man am besten mit Hilfe eines Planimeters.

In Abb. 47 ist das Verfahren auf ein Schienenprofil angewendet. — Um die Zentralellipse oder den Querschnittskern einer Querschnittsfläche zu erhalten, muß man dasselbe Verfahren für die andere Hauptachse wiederholen.

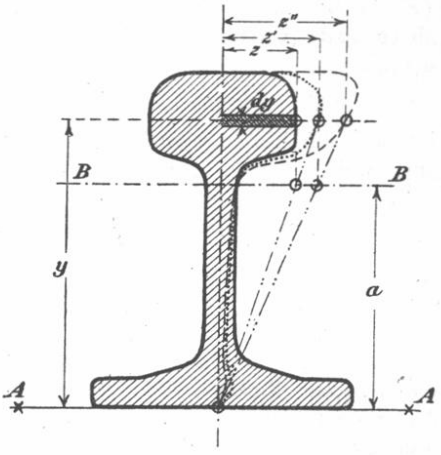

Abb. 48.

Außer dem bisher besprochenen Verfahren, das von Mohr herrührt, ist noch eine andere graphische Methode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten zu erwähnen, die von Nehls angegeben ist. Freilich hat diese mit dem Seilpolygone nichts zu schaffen; sie soll aber an dieser Stelle ebenfalls besprochen werden. Die Nehlssche Methode beruht auf einer einfachen Umformung des für das Trägheitsmoment aufgestellten Summenausdruckes, nämlich

$$\Theta = \int y^2 dF = a^2 \int \left(\frac{y}{a}\right)^2 dF,$$

wobei a irgendeine beliebig zu wählende Strecke bedeutet. Man formt jeden Flächenstreifen dF so um, daß er in $\left(\frac{y}{a}\right)^2 dF$ übergeht, und erhält dann Θ als Produkt aus der Summe dieser umgeformten Flächenstreifen und aus a^2.

Gewöhnlich wird bei der Anwendung des Verfahrens der Schwerpunkt der Querschnittsfläche noch nicht bekannt sein. Man zieht dann irgendwo eine Parallele AA zur Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird und bestimmt sowohl das statische Moment als das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für diese Parallele als Achse. Bei einem Schienenprofile, das in Abb. 48

wiederum als Beispiel gewählt wurde, kann man etwa die Basislinie dazu benutzen. Dann zieht man in einem Abstande a, der beliebig angenommen werden kann, eine Parallele BB zu AA. Den Querschnitt denkt man sich in Streifen eingeteilt, die parallel zu AA und BB gehen. Ein solcher Streifen, der in der Abbildung durch Querschraffierung hervorgehoben ist, möge die Breite (oder auch die halbe Breite bei einem symmetrischen Profile) z, die Höhe dy und den Abstand y von AA haben. Dann kann $dF = z\,dy$ und der Beitrag von dF zum statischen Momente S gleich $yz\,dy$ gesetzt werden. Nun konstruiere man eine Strecke z' so, daß

$$z' = z\frac{y}{a}$$

ist, was durch Ziehen der aus der Abbildung ersichtlichen Linien ohne weiteres geschehen kann. Dann ist

$$S = \int y\,dF = \int yz\,dy = a\int z'\,dy = aF',$$

wenn jetzt unter F' die Fläche verstanden wird, die von der durch die Endpunkte der z' geführten Kurve umschlossen wird. Diese Kurve kann nach Ermittelung einer genügenden Zahl ihrer Punkte nach dem angegebenen Verfahren eingetragen und die von ihr umschlossene Fläche mit Hilfe eines Planimeters ermittelt werden. Andererseits ist aber, wenn s den Schwerpunktsabstand von AA bedeutet, auch

$$S = sF \quad \text{und daher} \quad s = a\frac{F'}{F}. \tag{21}$$

Hierbei ist unter F der Inhalt der Querschnittsfläche zu verstehen. Der Schwerpunkt ist hiermit bekannt und damit auch die Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird. Anstatt die Konstruktion für diese Schwerlinie unmittelbar weiter zu führen, tut man aber besser daran, auch das Trägheitsmoment zunächst für die Achse AA zu ermitteln. Es sei zum Unterschiede von dem für die Schwerlinie gültigen mit Θ' bezeichnet.

Zu jedem z' konstruiert man nun auf dieselbe Weise wie vorher ein z'', so daß

$$z'' = z'\frac{y}{a}, \quad \text{also} \quad z'' = z\frac{y^2}{a^2}$$

ist. Nachdem dies für eine genügende Zahl von Punkten ausgeführt ist, erhält man durch deren Verbindung eine zweite Kurve, die in der Abbildung durch eine gestrichelte Linie angegeben ist, während die vorige punktiert ausgezogen war. Die von dieser neuen Kurve umschlossene Fläche, die ebenfalls mit Hilfe des Planimeters aus-

zumessen ist, sei mit F'' bezeichnet. Man hat nun

$$\Theta' = \int y^2 dF = \int y^2 z\, dy = a^2 \int z''\, dy = a^2 F''. \qquad (22)$$

Hiermit ist also in der Tat Θ' bekannt. Um daraus Θ zu finden, beachte man, daß

$$\Theta' = \Theta + s^2 F \quad \text{und daher} \quad \Theta = a^2 \left(F'' - \frac{F'^2}{F}\right) \qquad (23)$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

§ 19. Die elastische Linie als Seilkurve.

Ein Balken, der auf Biegung beansprucht wird, erfährt eine elastische Formänderung, durch die seine vorher geradlinige Längs-Achse in eine Kurve übergeht, die man als die elastische Linie des Balkens bezeichnet. Wie Mohr gezeigt hat, kann die Gestalt der elastischen Linie durch Konstruktion von zwei Seilecken gefunden werden.

Rechnet man die Abszissen x im Sinne der Stabachse und bezeichnet man die Ordinate der elastischen Linie für den Querschnitt x mit y, so gilt nach Gl. (78) des dritten Bandes, auf den ich mich hier beziehen muß, um Wiederholungen zu vermeiden, die Differentialgleichung

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -M. \qquad (24)$$

Hierin ist M das Biegungsmoment für den Querschnitt x, während E den Elastizitätsmodul und Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet.

Vergleicht man mit Gl. (24) die in § 14 abgeleitete Differentialgleichung einer zu einer Belastungsfläche von der Intensität q an der Abszisse x gehörigen Seilkurve (Gl. (2), S. 71

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q,$$

so erkennt man, daß beide leicht zur Übereinstimmung miteinander gebracht werden können. Falls Θ konstant ist, braucht man nur q überall proportional mit M anzunehmen und zugleich durch geeignete Wahl von H dafür zu sorgen, daß

$$\frac{M}{E\Theta} = \frac{q}{H} \qquad (25)$$

$M = H_I u \quad q = u.$

$\frac{H_I u}{E\Theta} = \frac{u}{H_{II}}$,

ist. Dann stimmen beide Gleichungen völlig miteinander überein und daraus folgt, daß die elastische Linie zugleich eine jener Seilkurven ist, die man zu einer Belastungsfläche konstruieren kann, deren Ordinate an jeder Stelle proportional mit M ist. Um unter allen, die möglich sind, gerade jene herauszusuchen, die sich mit der elastischen Linie deckt, muß man noch die Grenzbedingungen beachten, die der elastischen Linie durch die Art der Auflagerung des Balkens vorgeschrieben sind.

Eine Fläche, deren Ordinaten proportional mit M sind, ist uns schon aus § 16 bekannt. Achten wir zunächst nur auf einen Balken, der beiderseits frei (d. h. ohne Einspannung) aufliegt, so erhält man durch Konstruktion eines Seilpolygons, das wir hier als das „erste" Seilpolygon bezeichnen wollen und dessen Horizontalzug gleich H_{I} sein mag, sowie nach Eintragung der Schlußlinie die „Momentenfläche", also eine Fläche, deren Abschnitte auf lotrechten Linien mit H_{I} multipliziert an jeder Stelle das zugehörige Biegungsmoment M liefern. Jene Abschnitte waren in § 16 mit y bezeichnet; da der Buchstabe hier in anderer Bedeutung gebraucht wird, mögen sie jetzt mit u bezeichnet werden. Man hat dann

$$M = H_{\mathrm{I}} u. \tag{26}$$

Ist der Balken in anderer Art aufgelagert, z. B. wie bei den in § 17 besprochenen Gerberschen Trägern, so wird sich ebenfalls eine Momentenfläche konstruieren lassen, von der vorstehende Gleichung gilt.

Diese Momentenfläche sehe man nun als Belastungsfläche für ein „zweites" Seileck an, dessen Belastungsrichtung mit jener des ersten übereinstimmt und dessen Horizontalzug jetzt H_{II} heißen soll. Um der vorher genannten Bedingung zu genügen, setzen wir M aus Gl. (26) in Gl. (25) ein, beachten, daß q nun durch u und H durch H_{II} zu ersetzen sind und lösen die Gleichung nach H_{II} auf. Wir finden dann

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{E\Theta}{H_{\mathrm{I}}}. \tag{27}$$

Die Dimension von H_{II} geht aus der Gleichung ebenfalls hervor; sie ist

$$[H_{II}] = \frac{\frac{kg}{cm^2} \cdot cm^4}{kg} = cm^2.$$

H_{II} ist daher eine Fläche und dies muß auch so sein, weil auch die Lasten, die mit H_{II} vereinigt werden sollen, durch Flächen, nämlich durch den Inhalt der Momentenfläche gebildet werden.

Die Aufgabe, die elastische Linie zu konstruieren, kommt demnach darauf hinaus, zu einer gegebenen Belastungsfläche eine Seilkurve zu konstruieren, deren Horizontalzug durch Gl. (27) angegeben ist und die zugleich die Grenzbedingungen an den Auflagern erfüllt. In dieser Form wäre aber die Lösung der Aufgabe aus verschiedenen Gründen unbequem und man ändert sie daher noch ein wenig ab. Man kann nämlich leicht darauf verzichten, die wahre Gestalt der elastischen Linie auf der Zeichnung zu erhalten — um so mehr als sich diese nur sehr undeutlich von der vorher geraden Stabachse abheben würde —, wenn man nur anzugeben vermag, wie groß die Ordinate y an jeder Stelle ist.

Zunächst ändert man daher die Grenzbedingungen ab. Anstatt darauf zu bestehen, daß die elastische Linie durch die Auflagerpunkte gehen müsse, konstruiert man beim frei aufliegenden Balken irgendeine Seilkurve, die im übrigen den Bedingungen genügt, und trägt in sie eine Schlußlinie ein, so als wenn sie selbst wieder zur Konstruktion einer neuen Momentenfläche benutzt werden sollte. Mißt man nun die Abschnitte zwischen der Schlußlinie und der Seilkurve, die auf lotrechten Linien gebildet werden, so geben diese die gesuchten Ordinaten y der elastischen Linie an. Man kann dies auf verschiedene Art nachweisen, am einfachsten, wenn man bedenkt, daß das Produkt $H_{II}y$, wie auch die Seilkurve im übrigen konstruiert sein mag, immer denselben Wert behalten muß, da es das Biegungsmoment darstellt, das in einem Balken hervorgerufen würde, der die durch die erste Momentenfläche angegebene Belastung wirklich zu tragen hätte.

Auf einer ganz ähnlichen Erwägung beruht auch die zweite Änderung, zu der man sich aus Rücksicht auf die bessere Ausführung der Zeichnung veranlaßt sieht. Rechnet man nämlich

H_{II} nach Gl. (27) aus, so erhält man in praktisch vorliegenden Fällen eine Fläche, die ganz bedeutend größer ist, als der Inhalt der Momentenfläche. Wählt man nun den Maßstab im Kräfteplane so, daß H_{II} die Grenzen des verfügbaren Raumes nicht überschreitet, so fallen die Lasten, die durch die Momentenfläche dargestellt werden, zu klein aus, als daß sie noch genau genug aufgetragen werden könnten. Dies kann auch nicht überraschen; denn man weiß ja in der Tat, daß sich der Balken unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen verhältnismäßig nur sehr wenig durchbiegt. Die elastische Linie ist daher eine sehr flache Seilkurve, deren Horizontalzug sehr groß gegenüber ihren Lasten sein muß. Wollte man darauf bestehen, die Ordinaten y der elastischen Linie in der richtigen verhältnismäßigen Größe zu konstruieren, so würden sie daher in der Zeichnung so klein ausfallen, daß man sie mit dem Zirkel kaum noch abstechen könnte.

Man umgeht diese Schwierigkeit, indem man das zweite Seileck gar nicht mit dem Hotizontalzuge H_{II}, sondern mit einem erheblich kleineren H'_{II} konstruiert, der etwa $1/n$ von H_{II} betragen mag. Dies hat zur Folge, daß dann alle y in n-facher Größe, etwa als y', erscheinen. Man bedenke nämlich, daß auf jeden Fall

$$H_{II} y = H'_{II} y'$$

sein muß, da, wie vorher schon bemerkt, jedes dieser Produkte die Bedeutung eines Biegungsmomentes für einen Balken hat, der die durch die erste Momentenfläche angegebenen Lasten wirklich zu tragen hätte.

Am besten richtet man es gewöhnlich so ein, daß die y' die wahren Werte der y in natürlicher Größe darstellen, während alle übrigen Längen, also namentlich die Spannweite des Balkens in stark verkleinertem Maßstabe aufzutragen sind. Hat man also die Zeichnung ursprünglich in $1/n$ der natürlichen Größe angefertigt, so setze man an Stelle von H_{II} in Gl. (27)

$$H'_{II} = \frac{1}{n} \frac{E\Theta}{H_I} \tag{28}$$

und man findet dann die elastische Linie in verzerrter Gestalt,

so daß ihre Abszissen im Maßstabe 1 : n, die Ordinaten y aber in wahrer Größe auszumessen sind.

In Abb. 49 ist die Konstruktion für einen bestimmten Fall im Maßstabe durchgeführt. Ein I-Träger von 30 cm Höhe, dessen Trägheitsmoment nach den Profiltabellen 9888 cm^4 beträgt, überdeckt eine Spannweite von 11 m, über

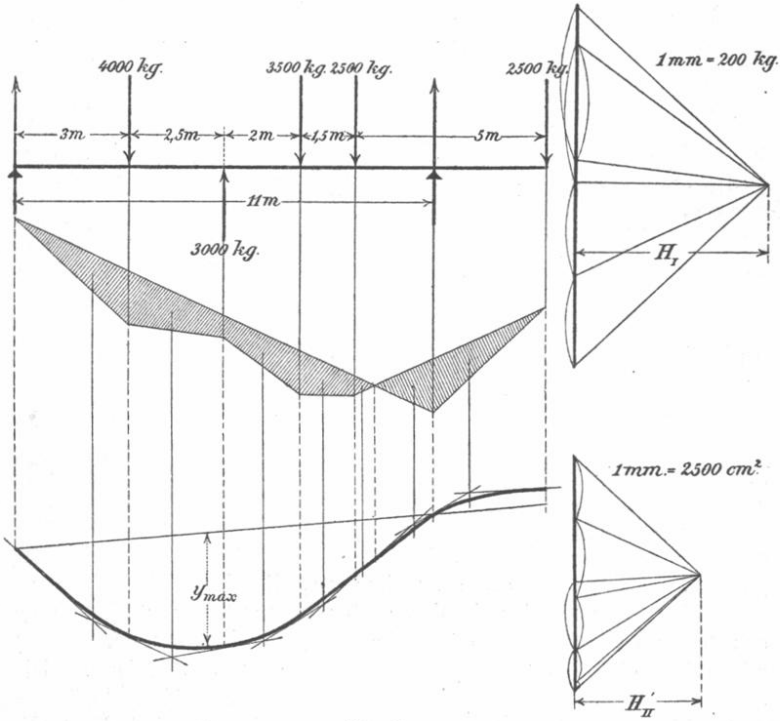

Abb. 49.

die er nach rechts hin noch um 3 m vorkragt, und nimmt die in die Zeichnung eingetragenen Lasten auf, von denen eine senkrecht nach oben gerichtet ist. Unmittelbar unterhalb der Ansichtszeichnung des Trägers ist mit Hilfe eines Seileckes, dessen Horizontalzug H_I zu 5000 kg gewählt ist, die Momentenfläche konstruiert. Der rechte Teil stellt negative Momente dar,

und die ihm entsprechenden Lasten sind daher mit nach oben gerichtetem Pfeile in das zweite Seileck aufzunehmen.

Wenn der Elastizitätsmodul $E = 2\,100\,000$ atm angenommen wird, erhält man für H_{II} nach Gl. (27)

$$H_{II} = \frac{2\,100\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9888 \text{ cm}^4}{5000 \text{ kg}} = 4\,150\,000 \text{ cm}^2.$$

Beim Ausmessen der Belastungsflächen des zweiten Seilpolygons ist zu beachten, daß die Spannweite des Trägers im Maßstabe 1 : 200 aufgetragen ist. Hiernach bedeutet 1 qmm der Momentenfläche in der Zeichnung in Wirklichkeit das 40 000 fache oder 400 cm². Eine zweckmäßige Größe des zweiten Kräfteplanes erhält man bei der Wahl des Maßstabes 1 mm = 2500 cm². Hiernach würde freilich H_{II} gleich 1660 mm aufzutragen sein. Hiervon nehmen wir aber nur $\frac{1}{100}$, setzen also

$$H_{II} = 16{,}6 \text{ mm}$$

im Kräfteplane. Die Ordinaten der elastischen Linie erscheinen dann in hundertfacher Verzerrung oder, da der Maßstab der Längen 1 : 200 ist, in der Hälfte der natürlichen Größe. Hätte man H_{II} nur halb so groß gewählt, so hätte man die Durchbiegungen in natürlicher Größe gefunden.

Für die Konstruktion des zweiten Seileckes wurde die Momentenfläche in Dreiecke und Trapeze zerlegt. In den Schwerpunkten waren Einzellasten anzubringen, die den Flächeninhalten proportional sind. Durch deren Zusammensetzung erhielt man das Tangentenpolygon, in das nachträglich die Seilkurve selbst mit Hilfe eines Kurvenlineals eingetragen werden konnte. Die Schlußlinie geht durch die Schnittpunkte der beiden Auflagervertikalen mit dem Seilpolygone und von ihr aus sind die Ordinaten der elastischen Linie auf lotrechten Linien abzumessen. Mit dem Zirkel findet man leicht die Stelle der größten Durchbiegung y_{max} des Trägers heraus. In dem Beispiele ergibt sich diese auf der Zeichnung zu 15 mm; wegen des vorher besprochenen Maßstabes bedeutet dies aber in Wirklichkeit eine Durchbiegung von 30 mm. — Der nach rechts vom rechten Auflager aus vorkragende Teil des Trägers hebt sich, wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, nach oben hin auf und ist mit der Hohlseite nach unten hin gekrümmt, wie es den negativen Biegungsmomenten ent-

spricht. Auf der durch den Schnittpunkt des ersten Seilpolygons mit seiner Schlußlinie gezogenen Vertikalen liegt der Wendepunkt der elastischen Linie.

Bisher war angenommen, daß das Trägheitsmoment Θ konstant sei. Die Konstruktion wird aber nicht wesentlich geändert, wenn Θ in beliebiger, aber gegebener Weise veränderlich ist. Man muß dann nur, um die Übereinstimmung der Differentialgleichung für die elastische Linie mit der Gleichung der Seilkurve herzustellen, dafür sorgen, daß nun q nicht mehr mit M, sondern mit $\frac{M}{\Theta}$ überall proportional ist. Man wähle irgendeinen Querschnitt des Trägers, etwa den in der Mitte aus, um dessen Trägheitsmoment Θ_m mit dem Trägheitsmomente Θ an irgendeiner andern Stelle zu vergleichen. Dann forme man die Momentenfläche so um, daß ihre Ordinaten u überall durch

$$u \frac{\Theta_m}{\Theta}$$

ersetzt werden. Da Θ überall gegeben sein sollte, ist dies leicht auszuführen. Die so umgeformte Fläche ist dann als Belastungsfläche des zweiten Seilpolygons anzunehmen, dessen Horizontalzug H_{II} nun an Stelle von Gl. (27)

$$H_{II} = \frac{E\Theta_m}{H_I}$$

zu wählen ist.

Unter manchen Umständen kann auch noch ein anderes Verfahren am Platze sein, das in Abb. 50 zur Ausführung gebracht wurde. Ist das Trägheitsmoment des Trägers nämlich absatzweise konstant, so kann man die elastische Linie zu jedem Abschnitte von gleichem Trägheitsmomente genau wie in Abb. 49 konstruieren. Zu jedem andern Abschnitte gehört ein anderer Ast der elastischen Linie, der zwar ebenfalls als Seilkurve, aber unter Anwendung eines andern Horizontalzuges konstruiert werden kann. Die elastische Linie setzt sich dann aus der Aneinanderreihung aller dieser Seilkurvenstücke zusammen, die sich ohne Knick aneinanderschließen und die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllen müssen. Man beginnt mit der Konstruktion etwa am linken Ende, indem man den Pol O_1 im Kräfteplane beliebig wählt. An der Übergangsstelle zum nächsten Aste muß der Seilstrahl eine gemeinsame Tangente an beide Äste bilden. Im Kräfteplane verlängert (oder verkürzt) man daher den zugehörigen Polstrahl so lange, bis der Polabstand gleich dem für den zweiten Ast nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge H_{II} geworden ist. Den hierdurch bestimmten Punkt wählt man als Pol O_2 für die Konstruktion des zweiten

Astes. Auch für jeden folgenden Ast wird auf diese Art ein neuer Pol gewählt; also so, daß je zwei aufeinander folgende Pole auf dem Polstrahle liegen, der zu dem Seilstrahle an der Übergangsstelle parallel ist und so, daß der Abstand des Poles von der Lastlinie für jeden Abschnitt des Trägers gleich dem nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge wird. Zuletzt trägt man die Schluß-

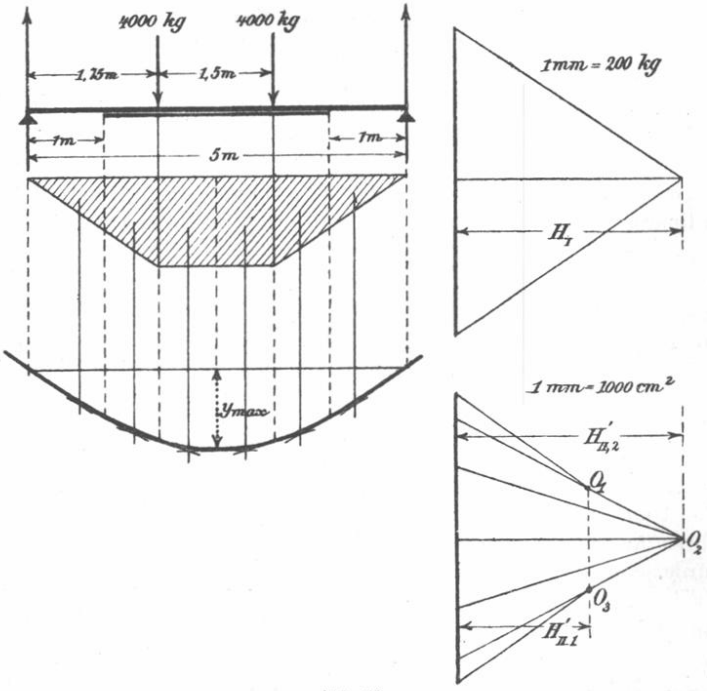

Abb. 50.

linie so ein, daß die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllt sind; von ihr aus sind dann die Ordinaten der elastischen Linie abzumessen.

In dem Beispiele der Abb. 50 sind die Längen im Maßstabe 1 : 100 aufgetragen. In dem durch einen Doppelstrich hervorgehobenen mittleren Teile des Trägers ist das Trägheitsmoment zu 17 350 cm^4, an den beiden Enden zu 10 000 cm^4 angenommen. Der Horizontalzug H_I, mit dem die Momentenfläche konstruiert ist, beträgt 6000 kg. Für den Horizontalzug des ersten Astes der elastischen Linie erhält man nach Gl. (27) 3 500 000 cm^2. Hier-

von ist aber nur der 200. Teil als $H'_{II,1}$ genommen. Ebenso findet man

$$H'_{II,2} = \frac{1}{200} \cdot \frac{2\,100\,0000 \cdot 17\,350}{6000} = 30\,362 \text{ cm}^2,$$

die durch 30,4 mm im Kräfteplane des zweiten Seilpolygons dargestellt werden; als Elastizitätsmodul ist dabei wieder $E = 2\,100\,000$ atm angenommen. Die elastische Linie erscheint in 200facher Verzerrung. Da aber zugleich alle Längen 100fach verkleinert sind, werden die Ordinaten der elastischen Linie in doppelter Größe aus der Zeichnung genommen. Die größte Durchbiegung y_{max} findet hier in der Mitte statt; die Zeichnung liefert dafür 11 mm, in Wirklichkeit beträgt daher der Biegungspfeil 5.5 mm.

Schließlich muß noch auf einige andere Fälle hingewiesen werden, die gelegentlich vorkommen können. Geht nämlich zunächst die Belastungsebene nicht durch eine Querschnittshauptachse des Trägers (vgl. hierzu die einschlägigen Lehren des dritten Bandes), so zerlegt man die Biegungsmomente in zwei rechtwinklige Komponenten, so daß die Ebene jeder Komponente durch eine Querschnittshauptachse geht, führt dann für beide Komponenten die vorher beschriebene Konstruktion durch und findet nachträglich Größe und Richtung der gesamten Durchbiegung als geometrische Summe der Durchbiegungen in jenen beiden Hauptrichtungen.

Derselbe Weg führt auch zum Ziele, wenn die am Balken angreifenden Lasten überhaupt nicht in einer Ebene enthalten sind. Bei Maschinenwellen kommt es z. B. vor, daß sie durch mehrere Kräfte auf Biegung beansprucht werden, die zwar alle recktwinklig zur Wellenachse stehen, aber nicht parallel zueinander sind (einige etwa lotrecht, andere wagrecht). Die elastische Linie wird dann eine doppelt gekrümmte Kurve. Man findet ihre Projektionen, indem man zuerst nur die lotrechten Komponenten aller Lasten berücksichtigt, hiernach die Momentenfläche und das zweite Seilpolygon konstruiert, womit man die Durchbiegungskomponenten im lotrechten Sinne findet, und dann die Untersuchung für die wagrechten Lastkomponenten wiederholt. Hierbei ist ein kreisförmiger Stabquerschnitt vorausgesetzt oder wenigstens ein Querschnitt, von dem jede Schwerpunktsachse zugleich eine Hauptachse ist. Aber auch im andern Falle entsteht keine Schwierigkeit; man zerlegt dann alle Lasten anstatt in lotrechte und wagrechte in solche Komponenten, die in die Richtungen der Querschnittshauptachsen fallen.

§ 20. Ermittelung von Flächeninhalten mit Hilfe des Seileckes.

Flächeninhalte ermittelt man am besten mit Hilfe eines Planimeters oder, wenn ein solches nicht zu Gebote steht, durch Zerlegen der Figur in einfachere Teile, deren Inhalte auf Grund geometrischer Sätze sofort berechnet werden können. So gelangt man z. B. auf jeden Fall zu einem hinreichend genauen Resultate, indem man die Figur in schmale Streifen zerlegt, die sich als Trapeze ansehen lassen, den Inhalt für jeden Streifen berechnet und alle addiert oder anstatt dessen durch Anwendung der Simpsonschen Regel.

Aus diesem Grunde ist eine Anwendung des Seileckes zur Berechnung von Flächeninhalten, die von Culmann angegeben worden ist, nur von geringer Bedeutung. Man macht indessen immerhin zuweilen davon Gebrauch und sie soll daher hier nicht ganz übergangen werden.

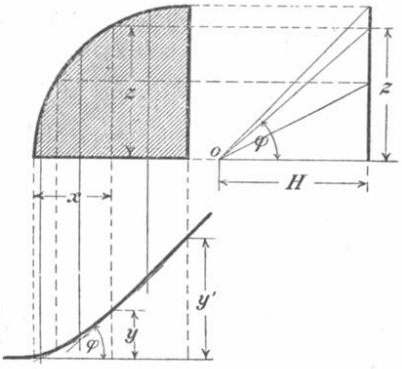

Abb. 51.

Das Verfahren ist durch Abb. 51, in der es auf die Ermittelung des Inhaltes eines Kreisquadranten angewendet wurde, erläutert. In Wirklichkeit würde man es natürlich bei so einfachen Fällen nicht gebrauchen; man wird aber sehen, daß es in derselben Form auch zum Ziele führt, wenn der Kreisbogen durch irgendeine andere Kurve ersetzt wird.

Man teilt den Umfang der Grenzkurve (also hier den Kreisbogen) in eine Anzahl von gleichen oder auch ungleichen Teilen. Eigentlich sollte diese Anzahl unendlich groß sein; in der Abbildung sind aber nur drei Teile genommen, und wenn dies auch etwas wenig ist, so genügt es doch fast schon zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit. In der Mitte jedes Bogenelementes bringt man eine in lotrechter Richtung gehende Kraft an, die der Projektion des Elementes auf die lotrechte Richtung proportional ist. Diese Kräfte setzt man mit Hilfe eines Seilpolygons zusammen. Der zugehörige Kräfteplan kann nebenan leicht aufgetragen werden, indem man durch die Teilpunkte auf der Kurve Horizontalen zieht, die auf der lotrechten Lastlinie die Lasten in der gewünschten

Größe ohne weiteres abschneiden. Den Pol O wählt man auf der X-Achse; der Horizontalzug H kann beliebig angenommen werden. Nachdem hierauf das Seilpolygon zu den Lasten unterhalb konstruiert ist, kann man auch noch die Seilkurve freihändig eintragen, da man weiß, daß diese die Polygonseiten auf den durch die Teilpunkte der Begrenzungskurve der gegebenen Fläche gezogenen Lotrechten berührt. Man kann nun leicht beweisen, daß die Ordinate y der Seilkurve, von der horizontalen ersten Seilspannung aus gemessen, mit dem Horizontalzuge H multipliziert den bis zur zugehörigen Abszisse x reichenden Teil der gegebenen Fläche angibt.

Zu diesem Zwecke denke man sich im Punkte xy der Seilkurve eine Tangente konstruiert, die den Winkel φ mit der Horizontalen bilden möge. Diesen Winkel bildet auch der zur Tangente parallel gezogene Polstrahl im Kräfteplane mit der Horizontalen. Bezeichnet man die Ordinate der Grenzkurve der gegebenen Fläche mit z, so hat man für tg φ die beiden Werte

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{z}{H}.$$

Hieraus folgt

$$H\,dy = z\,dx$$

und daher nach Summierung von 0 bis x

$$Hy = \int_0^x z\,dx. \tag{30}$$

Das Integral gibt aber in der Tat den bis zur Abszisse x reichenden Teil des Flächeninhaltes an und der Satz ist damit bewiesen. Für den Inhalt des ganzen Quadranten hat man natürlich das Produkt aus der letzten Ordinate y' und dem Horizontalzuge H zu nehmen.

Aufgaben.

11. Aufgabe. Ein Träger ist am einen Ende fest, am andern Ende auf einem in schiefer Richtung gehenden Rollenlager aufgelagert; man soll die durch gegebene Lasten hervorgebrachten Auflagerkräfte ermitteln (vgl. Abb. 52).

Lösung. Denkt man sich die gegebenen Lasten zu einer Resultierenden vereinigt, so muß diese mit den beiden Auflagerkräften im Gleichgewichte stehen. Von dem Auflagerdrucke am beweglichen Auflager kennt man von vornherein die Richtung, da diese senkrecht zur Auflagerbahn stehen muß. Verlängert man diese Richtungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie der Resultierenden aller Lasten, so muß durch den Schnittpunkt

auch die Richtungslinie des am festen Auflager übertragenen Auflagerdruckes gehen. Die Größen beider Auflagerkräfte ergeben sich nach Feststellung der Richtungen einfach durch Zeichnen eines Kräftedreieckes, in dem die Resultierende der Lasten die dritte Seite bildet.

Anstatt dessen kann man aber auch die Auflagerkräfte unmittelbar mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmen. Durch dieses verbindet man zunächst die Lasten; durch Einbeziehen der beiden Auflagerkräfte muß es nachher zu einem geschlossenen werden. Hat man die Schlußlinie, so findet man die Auflagerkräfte aus dem Kräfteplane. Insofern gleicht das Verfahren vollständig dem in § 12 beschriebenen. Nur das Eintragen der Schlußlinie erfordert hier noch eine besondere Überlegung. Da nämlich die Richtung

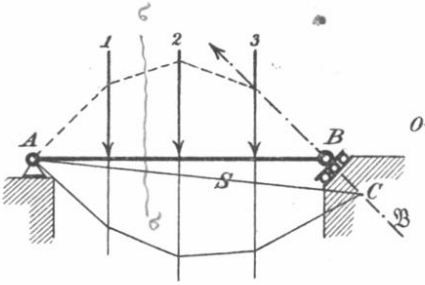

Abb. 52a.

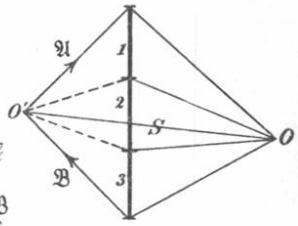

Abb. 52b.

des Auflagerdruckes am festen Auflager zunächst unbekannt ist, muß man die erste Seileckseite durch den festen Auflagerpunkt hindurch legen, damit man den Schnittpunkt der ersten Seilspannung mit dem Auflagerdrucke angeben kann.

In Abb. 52 ist dies durchgeführt. Zunächst wurden die Lasten 1, 2, 3 im Kräfteplane (52^{b}) aufgetragen und der Pol O beliebig gewählt. Das Seileck wird dann in Abb. 52^{a} vom festen Auflagerpunkte A aus gezeichnet. Die letzte Seileckseite trifft die durch den Auflagerpunkt B zur Richtung der Auflagerbahn gezogene Senkrechte $\mathfrak{B}$ in einem Punkte C, der mit A verbunden die Schlußlinie S des Seilpolygons liefert. Dann trägt man S in den Kräfteplan (parallel zur Schlußlinie) ein und beachtet, daß die letzte Seilspannung mit dem Auflagerdrucke $\mathfrak{B}$ eine in die Richtung der Schlußlinie fallende Resultierende ergeben muß. Man zieht daher die Parallele zu $\mathfrak{B}$, die S im Punkte O' trifft. Auch $\mathfrak{A}$ ergibt sich dann sofort.

Man kann nachträglich auch den Punkt O' als Pol eines neuen Seilpolygons wählen, das mit gestrichelten Linien in Abb. 52^{a} eingetragen ist. Bei diesem Seilpolygone wird die Anfangsspannung

durch den Auflagerdruck gebildet. Man braucht hier keine Kraft willkürlich beizufügen, um das Seilpolygon zu konstruieren, sondern kann die in Wirklichkeit schon vorhandenen benutzen. Legt man nachher einen Schnitt durch den Träger, so werden alle Kräfte links vom Schnitte durch eine einzige, nämlich durch die vom Schnitte mitgetroffene Seilspannung ersetzt. Ein Seilpolygon von dieser Art wird auch als eine Drucklinie bezeichnet.

Ein Seil könnte die zum Pole O' gehörige Gestalt des Seileckes unter dem Einflusse der gegebenen Lasten freilich nicht aufrecht erhalten, weil in den Seilstrecken Druckspannungen vor-

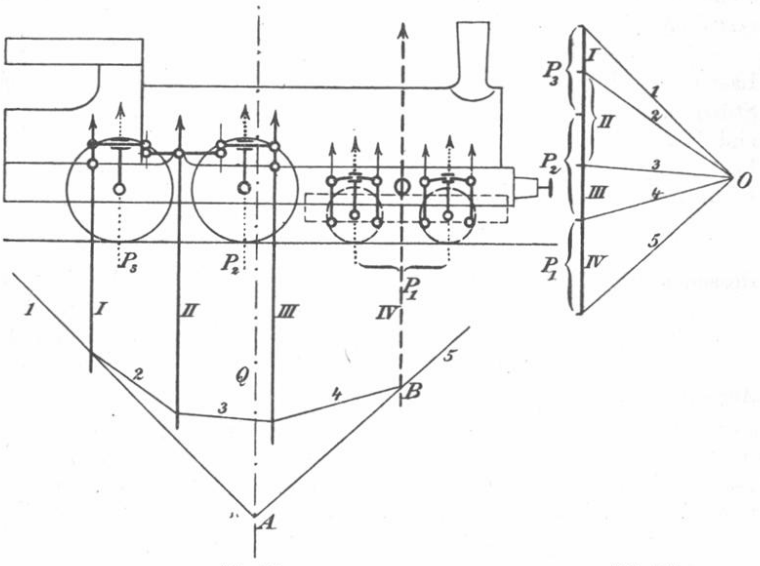

Abb. 53 a. Abb. 53 b.

kämen, die das Seil nicht aufzunehmen vermag. Man kann sich aber das Seil durch Stangen ersetzt denken, die an den Lastangriffspunkten gelenkförmig miteinander verbunden sind. Manche nennen daher das Seilpolygon in diesem Falle ein Gelenkpolygon; ich werde aber an der Bezeichnung Seilpolygon oder Seileck auch in solchen Fällen festhalten.

Schließlich bemerke ich noch, daß man ganz ähnlich wie hier auch dann zu verfahren hat, wenn der Träger zwar als gewöhnlicher Balkenträger mit einem horizontal verschieblichen Rollenlager aufgelagert ist, dabei aber schief gerichtete Lasten trägt, wie z. B. ein Dachbinder, der durch Winddruck belastet ist. Auch dann

ist das Seilpolygon mit der Anfangsseite durch den festen Auflagerpunkt zu führen, damit man von hier aus die Schlußlinie eintragen kann.

12. Aufgabe. Das Gewicht Q einer Lokomotive (ohne Einrechnung der Radsätze) soll auf 4 Achsen so verteilt werden, daß das zu den beiden vordersten Achsen gehörige Drehgestell den Anteil P_1 davon aufzunehmen hat, während auf die beiden hinteren Achsen die Anteile P_2 und P_3 entfallen. Die Federaufhängung ist aus Abb. 53 (S. 105) zu entnehmen. Der Schwerpunkt der Lokomotive und die Stellung der beiden hinteren Achsen sind gegeben. Man soll die Lage der vorderen Achsen so bestimmen, daß die verlangte Lastenverteilung eintritt.

Lösung. Im Kräfteplane Abb. 53[b] trage man zunächst die Lasten P_3, P_2, P_1 ab, beachte dann, daß der Druck auf dem Stützpunkte I aus der Hälfte von P_3 besteht und ähnlich bei II und III. Dann wähle man einen Pol O und konstruiere zu den Lasten I, II, III das Seileck mit den Seilstrahlen 1, 2, 3, 4. Die Richtung der Last IV oder P_1 ist dann so in die Zeichnung der Lokomotive einzutragen, daß der Schnittpunkt A der äußersten Seileckseiten 1 und 5 auf die gegebene Richtungslinie der Resultierenden Q fällt. Dieser Punkt A ist aber durch 1 und Q bereits bekannt, und eine Parallele durch ihn zum Polstrahle 5 im Kräfteplane liefert den Schnittpunkt B der Seilstrahlen 4 und 5, durch den die Last IV gehen muß. Hiermit ist die Lage der vorderen Achsen bekannt.

13. Aufgabe. Ein Telegraphendraht (von ungefähr 4 mm Stärke) wiegt 100 gr für den laufenden Meter. Er soll über einer Spannweite von 100 m ausgespannt werden, aber so, daß die durch das Eigengewicht hervorgebrachte Anspannung nicht mehr als 80 kg ausmacht; um wieviel muß man ihn in der Mitte durchhängen lassen?

Lösung. Man setze $l = 100$ m, $Q = 10$ kg, $H = 80$ kg in Gl. (5) ein, so erhält man $f = 1{,}56$ m.

14. Aufgabe. Um wieviel ändern sich H und f im vorhergehenden Falle infolge einer Temperaturerniedrigung um 20^0 C, wenn der Ausdehnungskoeffizient zu $\frac{1}{80\,000}$ und der Elastizitätsmodul zu 2 200 000 atm angenommen werden?

Lösung. Wir berechnen zunächst die Bogenlänge b für den Pfeil $f = 1{,}56$ m nach Gl. (8)

$$b = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} = 100{,}065 \text{ m}.$$

Diese Drahtlänge wird durch die Abkühlung um 20^0 um $\frac{1}{4000}$,

also um 25 mm verkürzt. Gleichzeitig wird sie aber durch die elastische Ausdehnung, die mit der Erhöhung des Horizontalzuges H verbunden ist, wieder etwas verlängert. Eine Spannung von 1 kg verlängert den Draht nach dem Elastizitätsgesetze um

$$\triangle l = \frac{Pl}{EF} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 100000 \text{ mm}}{2200000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 0{,}1256 \text{ cm}^2} = 0{,}36 \text{ mm}.$$

Bezeichnen wir den Horizontalzug, der sich nachher einstellt, mit x, so wird durch die Erhöhung um $(x - 80)$ kg eine Verlängerung des Drahtes um $0{,}36\ (x - 80)$ mm herbeigeführt, und im ganzen wird aus b

$$b' = 100065 - 25 + 0{,}36\ (x - 80) = (100011 + 0{,}36x) \text{ mm}.$$

Anderseits ist aber nach Gl. (7)

$$b = l + \frac{Q^2 l}{24 H^2}$$

oder nach Einsetzen der hier zutreffenden Werte

$$b' = 100000 \left(1 + \frac{10^2}{24 x^2}\right) \text{ mm}.$$

Setzt man beide Werte von b' einander gleich, so erhält man für x die kubische Gleichung

$$11 + 0{,}36\, x = \frac{10^7}{24 x^2}.$$

Am einfachsten erhält man deren Lösung durch Probieren und findet genau genug

$$x = 95{,}8 \text{ kg}.$$

Der zugehörige Biegungspfeil f' folgt aus Gl. (5) zu

$$f' = \frac{10 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m}}{8 \cdot 95{,}8 \text{ kg}} = 1{,}30 \text{ m}$$

und die Bogenlänge b' wird

$$b' = 100045{,}5 \text{ mm}.$$

15. Aufgabe. Ein Drahtseil, von dem ein laufender Meter 2 kg wiegt, überspannt eine horizontale Entfernung von 40 m. Es hängt in der Mitte um 2 m durch; wie lang ist das Seil und wie stark ist es gespannt?

Lösung. Man sucht zunächst die Konstante a in der Gleichung der Kettenlinie

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

(Gl. 17, S. 78) oder den sogenannten Parameter der Kettenlinie

auf. Man weiß, daß für $x = 20$ m, $y = a + 2$ m ist; a folgt daher aus der Lösung der transzendenten Gleichung

$$a + 2 = a \cosh \frac{20}{a},$$

die mit Hilfe der Tafeln der Hyperbelfunktionen aufgelöst werden kann. Um zunächst einen Näherungswert für a zu erhalten, betrachte man die Seilkurve als eine Parabel, setze $Q = 80$ kg und berechne nach Gl. (6)

$$H = \frac{80 \text{ kg} \cdot 40 \text{ m}}{16 \text{ m}} = 200 \text{ kg}.$$

Nach Gl. (16) würde dies einem Werte $a = 100$ m entsprechen. Wir können daher

$$a = 100 + \delta$$

setzen, worin δ einen Wert bezeichnet, der jedenfalls klein gegen 100 ist. Anstatt nun die Gleichung

$$\cosh \frac{20}{a} = 1 + \frac{2}{a}$$

unmittelbar durch Probieren aufzulösen, was bei Verwendung der gewöhnlich zur Verfügung stehenden vierstelligen Tafeln nicht genau genug möglich wäre, beachte man, daß

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

ist, wovon man sich auf Grund der für die Hyperbelfunktionen gültigen Exponentialausdrücke leicht überzeugt, und daß daher

$$\begin{aligned} \cosh \frac{20}{a} &= \cosh \frac{20}{100} + \sinh \frac{20}{100} \cdot \frac{d}{da}\left(\frac{20}{a}\right) \cdot \delta \\ &= \cosh 0{,}2 - \sinh 0{,}2 \cdot 0{,}0020 \cdot \delta \end{aligned}$$

gesetzt werden kann.

Verfährt man ebenso mit dem andern Gliede der Gleichung, so geht diese über in

$$\cosh 0{,}2 - 0{,}0020 \cdot \delta \cdot \sinh 0{,}2 - 1{,}02 + 0{,}0002 \cdot \delta = 0.$$

Aus den Tafeln entnimmt man, daß

$$\cosh 0{,}2 = 1{,}0201 \quad \text{und} \quad \sinh 0{,}2 = 0{,}2013$$

ist. Setzt man dies in die vorausgehende Gleichung ein und löst nach δ auf, so erhält man

$$\delta = 0{,}49 \quad \text{und daher} \quad a = 100{,}49 \text{ m}.$$

Freilich sind auch diese Zahlen wegen Verwendung von vierstelligen Tafeln nicht sehr genau; für die praktische Verwendung

reicht die Genauigkeit aber immerhin aus. Nachdem a bekannt ist, findet man leicht alle übrigen Größen. Der Horizontalzug H ist

$$H = a\gamma = 200{,}98 \text{ kg}.$$

Die größte Seilspannung tritt indessen an den Aufhängepunkten auf und ist nach Gl. (18)

$$S = 102{,}49 \cdot 2 = 204{,}98 \text{ kg}.$$

Die Länge des halben Seiles beträgt nach Gl. (14)

$$s = a \sinh \frac{x}{a} = 100{,}49 \sinh \frac{20}{100{,}49} = 20{,}128 \text{ m}.$$

Betrachtet man dagegen die Seilkurve als eine Parabel und berechnet den Bogen b nach der Näherungsformel Gl. (8), so erhält man

$$b = 40 + \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{40} = 40{,}267 \text{ m}$$

gegenüber 40,256 m bei der Kettenlinie. Der Unterschied beträgt nur 11 mm; wenn keine besondere Genauigkeit verlangt wird, genügt es daher im vorliegenden Falle noch, die Seilkurve als Parabel zu betrachten.

16. Aufgabe. An dem in der vorigen Aufgabe besprochenen Drahtseile soll nachträglich eine Last von 300 kg in der Mitte aufgehängt werden. Wie groß wird die Seilspannung und um wieviel hängt das Seil nachher in der Mitte durch, wenn von der elastischen Längenänderung, die das Seil infolge der höheren Spannung erfährt, abgesehen wird?

Erste Lösung. Die Seilkurve setzt sich aus zwei symmetrisch zueinander liegenden Ästen zusammen, von denen jeder einen Kettenlinienbogen bildet. Es genügt daher, einen von beiden zu betrachten. Dort, wo beide zusammenstoßen, bilden beide Endtangenten einen Winkel 2φ miteinander, wenn hier φ dieselbe Bedeutung hat, wie in § 15. Aus dem Kräftedreiecke, das für beide Seilspannungen und die Last $P = 300$ kg gezeichnet werden kann, folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2H} = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}.$$

In dieser Gleichung kommen als Unbekannte der Parameter a der Kettenlinie und die Abszisse x des zur Seilmitte gehörigen Kettenlinienanfanges vor. Rechnet man auch den Bogen s vom Scheitel der Kettenlinie bis zu diesem Bogenanfange, so läßt sich nach Gl. (14) die vorige Gleichung ersetzen durch

$$\frac{P}{2\gamma} = s \quad \text{oder} \quad s = 75 \text{ m}.$$

Fügt man hierzu die in der vorigen Aufgabe bereits berechnete halbe Seillänge, so ist der vom Scheitel bis zum Aufhängepunkte berechnete Bogen s'

$$s' = 95{,}128 \text{ m}.$$

Anderseits ist aber nach Gl. (14) für diese Stelle auch

$$s' = a \sinh \frac{x+20}{a}.$$

Wir haben demnach die beiden transzendenten Gleichungen

$$a \sinh \frac{x}{a} = 75 \quad \text{und} \quad a \sinh \frac{x+20}{a} = 95{,}128$$

nach den Unbekannten a und x aufzulösen. Um die Unbekannte x zu eliminieren, schreibe man die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \operatorname{arcsinh} \frac{75}{a} \quad \text{und} \quad \frac{x+20}{a} = \operatorname{arcsinh} \frac{95{,}128}{a}.$$

Man erhält dann für a die Gleichung

$$a \left(\operatorname{arcsinh} \frac{95{,}128}{a} - \operatorname{arcsinh} \frac{75}{a} \right) = 20.$$

Durch einfaches Probieren mit Hilfe der Tafeln für die Hyperbelfunktionen, aus denen natürlich auch deren Umkehrungen entnommen werden können, läßt sich die Gleichung nicht gut auflösen. Setzt man z. B. $a = 100$, so liefert die linke Seite 15,34, setzt man $a = 500$, so wird sie 19,90 und für $a = \infty$ geht sie erst in 20,128 über. Man weiß also zwar, daß a zwischen 500 und ∞ liegen muß; zu einer genaueren Bestimmung reichen aber wenigstens die gewöhnlich zur Verfügung stehenden vierstelligen Tafeln nicht aus.

Man hilft sich am besten durch eine Reihenentwickelung für arcsinh. Für kleine Werte von x ist nämlich die Reihe

$$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

sehr schnell konvergent und es genügt gewöhnlich, nur die beiden ersten Glieder beizubehalten. Führt man dies aus, so geht die vorige Gleichung über in

$$20{,}128 - \frac{1}{6}\left(\frac{95{,}128^3}{a^2} - \frac{75^3}{a^2} \right) = 20.$$

Diese läßt sich nach a sofort auflösen und liefert $a = 756{,}0$ m. Nachdem a bekannt ist, findet man leicht auch alle übrigen Größen, nach denen gefragt ist. Zunächst erhält man x aus

$$\sinh \frac{x}{756} = \frac{75}{756} \quad \text{zu} \quad x = 74{,}88 \text{ m}.$$

Die zu x gehörige Ordinate y ist

$$y = 756 \cosh \frac{74{,}88}{756} = 759{,}70 \text{ m}$$

und die zum Aufhängepunkte, d. h zur Abszisse $x + 20$ gehörige

$$y' = 756 \cosh \frac{94{,}88}{756} = 761{,}97 \text{ m}.$$

Der Unterschied von y' und y gibt die Durchhängung des Seiles in der Mitte an; diese beträgt daher jetzt 2,27 m, wobei freilich die letzte Stelle wegen Verwendung von vierstelligen Tafeln ganz unsicher ist.

Die größte Seilspannung ist nach Gl. (18)

$$S = \gamma y' = 2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} 761{,}97 \text{ m} = 1524 \text{ kg}.$$

Nachträglich kann man übrigens, wenn man will, auch noch den Einfluß der elastischen Dehnung des Seiles berücksichtigen, indem man die zu $S =$ rund 1500 kg gehörende elastische Dehnung berechnet und $s' = 95{,}128$ m in der vorhergehenden Rechnung entsprechend größer nimmt. Freilich ist dann die ganze Rechnung noch einmal mit dem neuen Werte von s' zu wiederholen.

Zweite (angenäherte) Lösung von Aufgabe 15. Man achte nicht auf die Krümmung des Seiles, sondern setze die Sehne gleich dem Bogen. Die Sehne ist zwar etwas kleiner als der Bogen; da sich das Seil außerdem aber auch etwas streckt, so ist der Fehler um so geringer anzuschlagen. In Aufgabe 14 war die Bogenlänge des halben Seiles zu 20,128 m gefunden. Sieht man dies nun als Sehne des Kettenlinienbogens an, so erhält man die Durchhängung f nach dem Pythagoräischen Satze

$$f = \sqrt{20{,}128^2 - 20^2} = 2{,}26 \text{ m},$$

also fast genau dasselbe wie vorher. Die Spannung ist im tiefsten Punkte

$$S = \frac{Pl}{4f} = 300 \cdot \frac{40}{9{,}04} = 1330 \text{ kg}.$$

Im höchsten Punkte würde sie sich um etwa $2 \cdot 2{,}26 = 4{,}52$ kg erhöhen. Das ist nun freilich zu niedrig. Das Eigengewicht der Seilstücke trägt, wie der Vergleich der Werte zeigt, verhältnismäßig viel zur Spannung des Seiles bei.

Man kann sich des Näherungsverfahrens auch nur zur Ermittelung von f bedienen und nachdem dies gefunden ist, mit den Kettenlinienbogen weiter rechnen.

17. Aufgabe. Die Belastungsfläche eines Balkenträgers ist ein rechtwinkliges Dreieck; ermittele die zugehörige Momentenfläche! (*S. Abb. 54.*)

Lösung. Es genügt schon, die ganze Spannweite in vier gleiche Teile zu teilen; will man genauer verfahren, so nimmt man sechs oder acht Teile, aber nicht leicht mehr, da eine Einteilung in noch mehr Teile der Genauigkeit der Zeichnung kaum noch förderlich wäre. Die Schwerpunkte der Trapeze, in die das Dreieck zerlegt wurde, liegen einerseits sämtlich auf der Schwerlinie des Dreieckes, anderseits liegt jeder auf einer Linie, die nach dem in Band I, § 27, S. 174 der 4. Auflage angegebenen Verfahren gefunden werden kann.

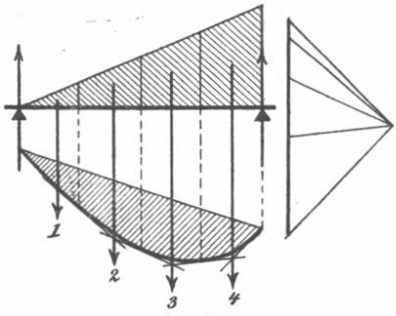

Abb. 54.

Nachdem dies geschehen ist, legt man Kräfte durch die Schwerpunkte, die den Flächen proportional sind. Im Kräfteplane werden sie durch die mittleren Höhen der Trapeze dargestellt. Dann wählt man einen Pol, zeichnet das zugehörige Seilpolygon und sucht die Berührungspunkte auf, die zwischen diesem und der eingeschriebenen Seilkurve bestehen. Nachher bleibt nur noch übrig, die Seilkurve mit Hilfe des Kurvenlineals oder aus freier Hand einzutragen.

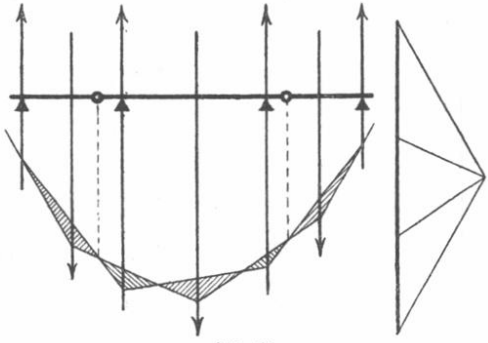
Abb. 55.

18. Aufgabe. Ein über drei Öffnungen reichender Gerberscher Kragträger trägt gegebene Lasten (*Abb. 55*)*; man soll die zugehörige Momentenfläche konstruieren.*

Lösung. Man vereinigt zuerst die gegebenen Lasten durch ein Seilpolygon und trägt in dieses ein System von Schlußlinien ein, die an den Auflagervertikalen aneinander grenzen und auf den Gelenkvertikalen das Seilpolygon durchschneiden. Zwischen diesen

Schlußlinien und dem Seileckzuge liegt die Momentenfläche, die in der Abbildung durch Schraffierung hervorgehoben ist und zwar so, daß auch den verschiedenen Vorzeichen der Momente dabei Rechnung getragen ist.

19. Aufgabe. Ein Wagen von 5 m Radstand und je 5 t Raddruck fährt über einen Balkenträger von 8 m Spannweite; ermittele graphisch die Maximalmomentenfläche (Abb. 56).

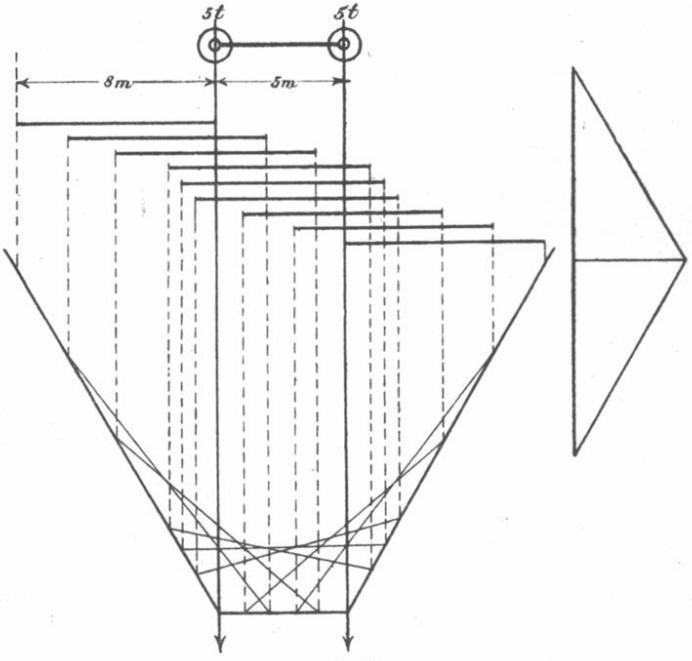

Abb. 56.

Lösung. Man setzt die zwei Einzellasten durch ein Seilpolygon zusammen, in das man eine Anzahl von Schlußlinien einträgt, die verschiedenen relativen Stellungen des Lastensystems zum Träger entsprechen. Die Momentenflächen sind entweder Dreiecke (wenn nur eine Last über dem Träger steht) oder Vierecke (wenn beide Lasten über dem Träger stehen). Auf ihre besondere Gestalt kommt es nicht an, sondern nur auf die Abschnitte, die sie auf lotrechten Transversalen bilden. Man trägt nachträglich alle diese Momentenflächen in Abb. 57 von einer gemeinsamen Grundlinie

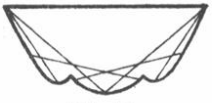

Abb. 57.

aus ab und sucht die Umhüllungslinie auf. Wie diese ungefähr ausfällt, ist aus der Abbildung zu entnehmen.

20. Aufgabe. Ein I-Balken vom Normalprofile 30, dessen Trägheitsmoment $\Theta = 9888$ cm^4 ist, überbrückt eine Spannweite von

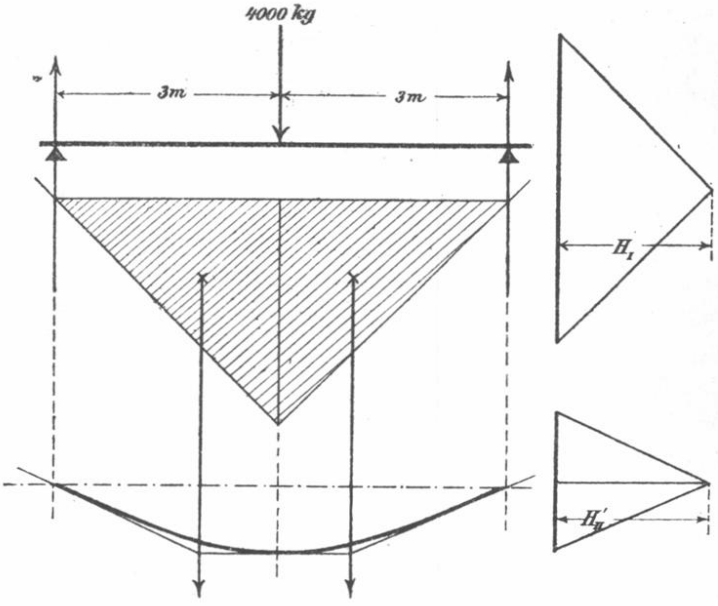

Abb. 58.

6 m und trägt in der Mitte eine Last von 4000 kg. Man konstruiere die elastische Linie des Balkens, so daß die Abszissen in $^1/_{100}$ der natürlichen Größe und die Ordinaten in natürlicher Größe erscheinen (Abb. 58).

Lösung. Als Horizontalzug für das erste Seilpolygon ist $H_1 = 2000$ kg gewählt. Die Momentenfläche wird ein Dreieck, das wir nur in zwei Teile zerlegen wollen, die in der Mitte aneinander stoßen. Jeder Teil hat in natürlicher Größe eine Fläche von $\frac{300 \cdot 300}{2}$ oder 45 000 cm^2. — Wird der Elastizitätsmodul zu 2 000 000 atm angenommen, so erhält man für den Horizontalzug des zweiten Seilpolygons nach Gl. (27).

$$H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I} = \frac{2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9888 \text{ cm}^4}{2000 \text{ kg}} = 9\,888\,000 \text{ cm}^2.$$

Der verlangten 100fachen Verzerrung wegen nehmen wir aber anstatt dessen nur den Horizontalzug

$$H'_{II} = 98\,880 \text{ cm}^2$$

an. Der Kräfteplan zum zweiten Seilpolygone konnte hiernach aufgetragen und das Seilpolygon selbst dazu konstruiert werden. Als Maßstab wurde 1 mm = 5000 cm^2 gewählt. — Allerdings hat man damit nur einen Punkt, nämlich jenen in der Mitte genau erhalten. Man findet, daß die Durchbiegung an dieser Stelle 0,91 cm beträgt. Oft genügt dies aber schon; im andern Falle steht natürlich nichts im Wege, die Momentenfläche in eine größere Zahl von Teilen einzuteilen, womit man auch eine entsprechend größere Zahl von Punkten der elastischen Linie erhält.