

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Elektricität und Magnetismus

Winkelmann, Adolph August

Breslau, 1895

Magnetische Induction

Vermittelung des im Zodiakallicht sichtbaren Mediums, zugesandt. Diese Electricität bildet, etwa in Folge ungleicher täglicher Drehungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Schichten im Innern und an der Oberfläche der Erde, sowie durch diese Drehung selbst, elektrische Ströme. Diese wiederum magnetisiren aus entsprechenden Gründen die weichen Eisenmassen im Innern der Erde und erzeugen auf diese Weise den Erdmagnetismus, wobei jedenfalls auch der permanente Magnetismus mitwirkt, den ein Theil dieser Eisenmassen im Laufe der Zeit erhalten hat. Die Thätigkeit der Sonne ist nun aber quantitativem Wechsel unterworfen, und auch die relativen Erdbewegungen treten bald schwächer, bald stärker auf (Erdbeben, grosse Fluthen, Stürme u. s. w.); die Folge hiervon sind zeitweilige Erscheinungen besonders ausgeprägten Charakters, die Erdströme im Erdinnern, die Polarlichter (und zum Theil auch die Gewitter) in der Erdhülle; diese ihrerseits wiederum, sowie die erstgenannten Ursachen direkt rufen die magnetischen Störungen hervor. In wie weit hierbei, sowie bei den allmählichen Aenderungen der magnetischen Elemente, die in der Sonne oder die im Erdinnern liegende Ursache von stärkerem und ursprünglicherem Einflusse ist, lässt sich gegenwärtig nicht entscheiden.

F. AUERBACH.

Magnetische Induction.

Einleitung. Die beiden fundamentalen Erscheinungen im Gebiete des Magnetismus sind die Bewegung, also die Aenderung des Ortes unter dem Einflusse magnetischer Kräfte (Anziehung und Abstossung, Ablenkung und Schwingung einer Magnetnadel u. s. w.) und die Aenderung des magnetischen Zustandes, speciell das Magnetischwerden unter dem Einflusse magnetischer Kräfte; jene Wirkung kann man als ponderomotorische, diese als magnetomotorische oder magnetisirende Wirkung bezeichnen; man nennt die bezüglichen Erscheinungen gegenwärtig allgemein magnetische Induction (s. o. pag. 48). Die Gesetze der magnetischen Bewegung sind bereits im Art. »Magnetismus« angegeben worden, der Theorie der magnetischen Induction ist der vorliegende Artikel gewidmet.

Allgemeine Bedeutung der Untersuchung. Die Theorie der magnetischen Induction würde sehr einfach sein, wenn der Magnetismus, welcher in jedem Theile des inducirbaren Körpers entsteht, nur von äusseren inducirenden Kräften herrührte. Thatsächlich kommt aber noch eine andere Kraft hinzu, welche von den übrigen, ebenfalls magnetisch gewordenen Theilen des inducirten Körpers herrührt und sich aus entsprechend vielen einzelnen Kräften zusammensetzt. Ein Theil dieser einzelnen Kräfte wird die äusseren Kräfte unterstützen, ein anderer Theil ihnen entgegenwirken, und der Antheil der unterstützenden und der entgegenwirkenden Kräfte wird ganz wesentlich von der Gestalt des Körpers abhängen. Die Folge wird die sein, dass die Stärke des magnetischen Zustandes nicht nur von der Stärke der äusseren Kräfte, vom Material des inducirten Körpers und von der Zahl seiner Theilchen, also von seinem Volumen, abhängen wird, sondern auch von seiner Gestalt, dass also der Coëfficient (oder wenn es mehrere sind, die Coëfficienten), welcher den Magnetismus mit der äusseren Kraft verknüpft, nur die beschränkte Bedeutung eines Magnetisirungs-

coëfficienten des betreffenden Körpers (z. B. einer Eisenkugel) haben würde. Will man dem Vorgange auf den Grund gehen, so wird man den Einfluss der Gestalt eliminiren und die Wirkung, also das entstehende magnetische Moment, mit der Ursache, also der Kraft, durch einen Coëfficienten verknüpfen müssen, welcher von der Gestalt des Körpers unabhängig, also abgesehen von seiner Proportionalität mit dem Volumen nur noch vom Material desselben abhängig ist. Diesen Coëfficienten wird man als Magnetisirungs-Coëfficienten des betreffenden Stoffes (z. B. des Eisens) zu bezeichnen berechtigt sein.

Uebersicht. Um das angedeutete Problem fürs erste in einfacher Weise mathematisch formuliren und behandeln zu können, hat man zwei Annahmen machen müssen, welche nur in gewissen Fällen und auch dann nur näherungsweise erfüllt sind. Erstens setzt man voraus, dass der Magnetismus des inducirten Körpers nur von den augenblicklich wirkenden Kräften abhängt, während er im Allgemeinen auch durch die vorhergegangenen Einwirkungen mitbestimmt wird (remanenter Magnetismus) und nur in gewissen Fällen, nämlich beim ganz weichen Eisen und bei kleinen magnetisirenden Kräften diese Nachwirkung verschwindend klein ist. Zweitens wird der Magnetismus, den der Körper erlangt, mit der Kraft proportional gesetzt, also der Magnetisirungscoëfficient als Constante betrachtet, eine Annahme, welche nach neueren Untersuchungen ebenfalls selbst nicht annähernd richtig ist.

Der Erste, welcher die Theorie auf dieser vereinfachten Grundlage entwickelte, POISSON¹⁾, ging dabei von einer Reihe bestimmter Vorstellungen über die Constitution magnetisirbarer Körper aus, welche zum Theil willkürlich, zum Theil aber sogar unwahrscheinlich sind; es ist das Verdienst neuerer Forscher und zwar insbesondere von Lord KELVIN (Sir W. THOMSON²⁾), F. NEUMANN³⁾, KIRCHHOFF⁴⁾, STEFAN⁵⁾ und BELTRAMI⁶⁾ gezeigt zu haben, dass und in welcher Weise man die Theorie ganz unabhängig von jenen Vorstellungen darlegen kann. Abweichend und z. Thl. von anderen Gesichtspunkten ausgehend sind ferner die Darstellungen der Theorie von C. NEUMANN⁷⁾, BEER⁸⁾, LEONH. WEBER⁹⁾, RIECKE¹⁰⁾ (Methode der successiven Annäherung), DUHEM¹¹⁾ (auf Grund des thermodynamischen Potentials), DU BOIS¹²⁾ u. A. Auch die Verallgemeinerung der Theorie für inducirbare Körper von heterogenem Charakter verdankt man im Wesentlichen THOMSON, wovon jedoch erst im folgenden Artikel die Rede sein wird.

1) POISSON, Mém. de l'Acad. 5, pag. 248 u. 488. 1824; 6, pag. 441. 1827. — Ann. Chim. Phys. 25, pag. 113; 28, pag. 1.

2) W. THOMSON, Phil. Mag. (4) 1, pag. 177. 1851. — Ges. Abh. üb. El. u. Magn., pag. 449. — Ausserdem gelegentlich an vielen andern Stellen.

3) F. NEUMANN, CRELLE's Journ. 37, pag. 44. 1848. — Vorl. üb. d. Th. d. Magn. Leipz. 1881.

4) KIRCHHOFF, CRELLE's Journ. 48, pag. 348. 1854. — POGG. Ann. Erg.-Bd. 5, pag. 1. 1870. — Ges. Abh., pag. 193 u. 223.

5) STEFAN, Wien. Ber. (2) 69, Febr. 1874.

6) BELTRAMI, Mem. di Bologna (4) 5. 1884; (5) 1, pag. 409. 1891.

7) C. NEUMANN. Unters. üb. d. log. u. NEWTON'sche Potential. Leipz. 1877.

8) BEER, Einl. in die Elektrostatik u. s. w. Braunsch. 1865, pag. 146 ff.

9) LEONH. WEBER, Z. Th. d. magn. Induction. Kiel 1877.

10) RIECKE, WIED. Ann. 13, pag. 465. 1881.

11) DUHEM, De l'aimantation par influence. Paris 1888. — Leçons sur l'electr. et le magn. Bd. 2. Paris 1891.

12) H. E. J. G. DU BOIS, WIED. Ann. 46, pag. 485. 1892.

Von einzelnen Körperformen ist natürlich die Kugel diejenige, für welche das Problem sich am einfachsten gestaltet. Für das Rotationsellipsoid ist es von F. NEUMANN, für das dreiaxige von LIPSCHITZ¹⁾, für den unbegrenzten Cylinder von KIRCHHOFF allgemein gelöst worden. Der begrenzte Cylinder bietet Schwierigkeiten dar, die bis jetzt noch nicht völlig überwunden sind, was sehr bedauerlich ist, da gerade diese Körperform naturgemäss sich für die experimentelle Behandlung am besten eignet und in der That am häufigsten benutzt worden ist. Von anderen Körperformen bietet nur der Ring besonderes Interesse dar. Dagegen kommt zu der Aufgabe, das ganze Moment zu ermitteln, die weitere hinzu, die Momente der einzelnen Theile darzustellen, und hier berühren sich die vorliegenden Untersuchungen mit denen über die Vertheilung des Magnetismus in Magneten, worüber schon im Art. »Magnetismus« einiges angeführt worden ist.

Die Versuche, die beiden Grundannahmen der Theorie durch allgemeinere zu ersetzen, welche den Thatsachen besser entsprechen, sind bisher nur von beschränktem Erfolge gewesen. So gab zuerst W. WEBER der Nichtproportionalität zwischen Kraft und Magnetismus einen mathematischen Ausdruck, den KIRCHHOFF und von anderen Ausgangspunkten aus DUHEM später durch eine ganz allgemeine Functionalbeziehung ersetzte; MAXWELL andererseits berücksichtigte zuerst die Mitwirkung des permanenten Magnetismus, einen endgültigen Werth können aber die betreffenden Formeln nicht beanspruchen.

Die Theorie kann hier nur in aller Kürze wiedergegeben und mit den Beobachtungen verglichen werden. Ausführliche Darstellungen derselben oder einzelner Theile findet man z. B. bei LAMONT²⁾, MAXWELL³⁾, F. NEUMANN⁴⁾, KIRCHHOFF⁵⁾, MASCART und JOUBERT⁶⁾, sowie in einem kürzlich erschienenen, auch die technische Wichtigkeit der Frage auf Grund der neuesten Versuche und Anschauungen beleuchtenden Buche von EWING⁷⁾.

Allgemeine Theorie.

Formulirung des Problems. Die Componenten der äusseren Kraft seien X, Y, Z , oder durch ihr Potential V ausgedrückt

$$-\frac{\partial V}{\partial a} \quad -\frac{\partial V}{\partial b} \quad -\frac{\partial V}{\partial c},$$

wo a, b, c die Coordinaten im Innern des inducirten Körpers sind. Die Componenten der von den übrigen Theilen auf einen kleinen Theil desselben ausgeübten Kraft seien L, M, N oder, wenn Q das betreffende Potential ist,

$$-\frac{\partial Q}{\partial a} \quad -\frac{\partial Q}{\partial b} \quad -\frac{\partial Q}{\partial c}.$$

Sieht man nun von dem permanenten Magnetismus ab und setzt für einen isotropen Körper (von dem zunächst die Rede ist) die Componenten A, B, C des in der Volumeneinheit erzeugten magnetischen Momentes mit den Com-

¹⁾ LIPSCHITZ, In.-Diss. Berl. 1853. — CRELLE's Journ. 58, pag. I. 1859. — Vergl. auch die vorbereitenden Arbeiten von F. NEUMANN, BEER, PLÜCKER u. A.

²⁾ LAMONT, Handbuch des Magnetismus, Leipz. 1867.

³⁾ MAXWELL, Lehrb. d. El. u. Magn. Berl. 1883, Bd. 2.

⁴⁾ F. NEUMANN, Vorlesungen (s. o.).

⁵⁾ KIRCHHOFF, Vorl. üb. El. u. Magn., Leipz. 1891, pag. 147 ff.

⁶⁾ MASCART u. JOUBERT, Lehrb. d. El. u. d. Magn. Berl. 1886.

⁷⁾ EWING, Magnetische Induction u. s. w. Berlin 1892.

ponenten der Gesamtkraft proportional, so hat man, wenn p der Proportionalitätsfaktor ist, die Gleichungen

$$A = -p \frac{\partial(V+Q)}{\partial a}, \quad B = -p \frac{\partial(V+Q)}{\partial b}, \quad C = -p \frac{\partial(V+Q)}{\partial c}. \quad (1)$$

Unter Q kann man auch das Potential des ganzen inducirten Körpers auf einen seiner Punkte verstehen, da das Potential eines kleinen, diesen Punkt umschliessenden Elementes von lauter Dimensionen gleicher Grössenordnung, z. B. einer Kugel, unendlich klein ist, wie man leicht findet, wenn man Polarcoordinaten einführt, und wie auch schon früher gezeigt worden ist. In der obigen Gleichung kommen nun aber die Differentialquotienten von Q vor, und für diese gilt das Gesagte nicht, die unendlich kleine Kugel übt viel mehr eine endliche Kraft in ihrem Innern aus. Nimmt man an, dass die Magnetisirung dieser kleinen Kugel gleichförmig sei, was man bei ihrer Kleinheit in der That annehmen darf, so kann man (vergl. Art. »Magnetismus«, pag. 43) das magnetische Potential aus dem Gravitationspotential P ableiten und findet, wenn man den Radius der Kugel R , den Abstand des Punktes abc von ihrem Mittelpunkte r und dessen Coordinaten $a_0 b_0 c_0$ nennt:

$$P = \frac{2}{3} \pi (3R^2 - r^2) = \frac{2}{3} \pi [3R^2 - (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 + (c - c_0)^2], \quad (2)$$

hieraus durch Differentiation nach a, b, c und Multiplication mit α, β, γ

$$Q_0 = \frac{4}{3} \pi [A(a - a_0) + B(b - b_0) + C(c - c_0)] \quad (3)$$

und schliesslich als Componenten der von der kleinen Kugel herrührenden Kraft

$$\frac{\partial Q_0}{\partial a} = \frac{4}{3} \pi A \quad \frac{\partial Q_0}{\partial b} = \frac{4}{3} \pi B \quad \frac{\partial Q_0}{\partial c} = \frac{4}{3} \pi C, \quad (4)$$

also auch bei unbegrenzter Grössenabnahme der gedachten Kugel endliche Werthe, die mit ABC proportional sind und mit diesen als constant betrachtet werden können. Die erzeugten Momente erhalten nun folgende Form:

$$A = p \left[\frac{4\pi}{3} A - \frac{\partial(V+Q)}{\partial a} \right] \quad B = p \left[\frac{4\pi}{3} B - \frac{\partial(V+Q)}{\partial b} \right] \quad (5)$$

$$C = p \left[\frac{4\pi}{3} C - \frac{\partial(V+Q)}{\partial c} \right],$$

oder, wenn das Gesamtpotential

$$V + Q = \varphi \quad (6)$$

und

$$\frac{p}{1 - \frac{4\pi}{3} p} = x \quad (7)$$

gesetzt wird:

$$A = -x \frac{\partial \varphi}{\partial a} \quad B = -x \frac{\partial \varphi}{\partial b} \quad C = -x \frac{\partial \varphi}{\partial c} \quad (8)$$

und die Resultante J von ABC :

$$J = x \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)^2}. \quad (8a)$$

Man nennt J die Intensität der Magnetisirung, ABC ihre Componenten; dividirt man durch das spezifische Gewicht des Stoffes, so erhält man das in der Gewichtseinheit inducirte Moment, den sogen. spezifischen Magnetismus. Das Potential Q hat nach früherem (pag. 38, Gleichung 33) ursprünglich den Werth

$$Q = \int d\tau \left(A \frac{\partial 1}{\partial x} + B \frac{\partial 1}{\partial y} + C \frac{\partial 1}{\partial z} \right), \quad (9)$$

lässt sich aber auf die Form

$$Q = \int \frac{J \cos \vartheta}{r} ds - \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) d\tau$$

bringen, wo ds ein Flächenelement und ϑ der Winkel zwischen seiner inneren Normale und der Richtung von J ist, d. h. Q setzt sich aus einem Oberflächen- und einem Raumpotential zusammen. Nun folgt aber aus den Gleichungen (8), wenn n die innere Normale von ds ist:

$$J \cos \vartheta = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\kappa \Delta \varphi; \quad (10)$$

die dem Raumpotential zugehörige Dichte ist also $\kappa \Delta \varphi$, und folglich nach der Potentialtheorie (vergl. Bd. 3, 1. Abthl., pag. 11)

$$\Delta Q = -4\pi\kappa \Delta \varphi. \quad (11)$$

Aus der Gleichung (6) folgt aber

$$\Delta \varphi = \Delta Q \quad (12)$$

(weil $\Delta V = 0$ ist), und die Gleichungen (11) und (12) sind nur dann mit einander verträglich, wenn entweder $-4\pi\kappa = 1$ ist oder wenn gleichzeitig $\Delta \varphi$ und ΔQ verschwindet. Die erstere Eventualität tritt aber nie ein, da κ erfahrungsgemäss entweder positiv oder, wenn negativ, sehr klein ist; es folgt also

$$\Delta \varphi = 0, \quad (13)$$

und folglich

$$Q = \kappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (14)$$

Es ist also Q als ein reines Oberflächenpotential darstellbar; mit anderen Worten, es ist die innere Dichte des Magnetismus

$$\rho = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0, \quad (15)$$

der Körper ist also (pag. 42) solenoidal magnetisirt. Dass er auch lamellar magnetisirt ist, sieht man ein, wenn man

$$\kappa \varphi = \Phi$$

setzt, wo dann Φ das Magnetisirungspotential (pag. 42) ist; es wird dann nämlich

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \quad B = - \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \quad C = - \frac{\partial \Phi}{\partial c}, \quad (17)$$

und das sind nach früherem die für die lamellare Magnetisirung charakteristischen Gleichungen. Es ist aber darauf hinzuweisen, dass bei beiden Schlüssen die Natur von κ als einer im ganzen Körper constanten Grösse benutzt worden ist; sie werden also hinfällig, wenn κ als Function der äusseren Kraft betrachtet wird, ausser in speciellen Fällen, in denen eben die Gesamtkraft, also auch die Intensität der Magnetisirung eine durch den ganzen Körper constante wird (s. w. u.).

Durch die Gleichungen (6) und (14) ist das Problem formulirt, und es lässt sich nach der Methode des indirekten Beweises leicht einsehen, dass die gesuchte Grösse, also Q oder φ , eindeutig bestimmt ist. Bequem ist aber diese Formulierung nicht, weil sie ein Integral enthält, und man thut daher besser, die Gleichung (14) durch diejenige für die Oberfläche des Körpers gültige Differentialgleichung auszudrücken, welche nach der Potentialtheorie die charakteristische

Grenzbedingung eines Oberflächenpotentials ist. Auf diese Weise erhält man eine der folgenden Gleichungen, die mit einander äquivalent sind, und von denen bald die eine, bald die andere sich besser zur Benutzung eignet:

$$\frac{\partial Q}{\partial n_i} + \frac{\partial Q}{\partial n_a} = -4\pi\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}, \quad (18)$$

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial Q}{\partial n_i} + \frac{\partial Q}{\partial n_a} = -4\pi\kappa \frac{\partial V}{\partial n_i}, \quad (18a)$$

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = 0. \quad (18b)$$

Die erste dieser Gleichungen wird direkt erhalten, die zweite ist besonders geeignet, die Analogie des Problems mit dem der Elektrostatik, aber auch den Unterschied zu zeigen, insofern dort die Oberflächen-Bedingung $Q + V = \text{const}$ gilt, an deren Stelle eben hier diese Gleichung tritt (über einen Specialfall, in welchem dieser Unterschied sich in Uebereinstimmung verwandelt, s. w. u.), die dritte Gleichung endlich, bei deren Ableitung die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = 0 \quad (18c)$$

benutzt wurde, zeigt in sehr anschaulicher Weise die Analogie mit den constanten elektrischen Strömen, indem sie, unter $1 + 4\pi\kappa$ das Verhältniss der Leitungsfähigkeiten verstanden, mit der Grenzbedingung elektrischer Ströme identisch ist. In der That lässt die schon im vorigen Artikel gegebene Fig. 124 in gleicher Weise zwei Deutungen zu, man kann einmal, wie dort geschah, den Körper als einen Eisenstab, die Linien als Kraftlinien, man kann aber auch den Stab als einen Kupferstab in einem schwach leitenden Medium, die Linien als elektrische Strom-Linien betrachten.

Susceptibilität und Permeabilität. Wie man sieht, spielt in unserer Theorie eine gewisse Constante eine grosse Rolle, eine Constante, als welche man entweder κ selbst oder aber die Combination $1 + 4\pi\kappa$ (denn diese Verbindung hat eine besonders wichtige Bedeutung) bezeichnen kann. Man nennt jene die Magnetisirungsconstante (resp. wenn man auf ihre thatsächliche Abhängigkeit von der magnetisirenden Kraft Rücksicht nimmt, Magnetisirungsfunction) oder die magnetische Susceptibilität, diese die magnetische Leitungsfähigkeit, magnetische Inductionscapacität, Aufnahmefähigkeit für magnetische Kraftlinien, Permeabilität. Die ersten beiden Ausdrücke für $1 + 4\pi\kappa$ rühren von FARADAY her und sind nach dem soeben von der Analogie der magnetischen Kraftlinien und der elektrischen Stromlinien Gesagten resp. nach der Analogie mit der Dielektricität [Bd. 3 (I), pag. 24 u. 68] ohne weiteres verständlich, der letzte Ausdruck ist von LORD KELVIN vorgeschlagen worden und hat sich ziemlich allgemein eingebürgert. Man bezeichnet die Permeabilität gewöhnlich mit μ und hat also die beiden Gleichungen

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa, \quad \kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}. \quad (19)$$

Um die Bedeutung dieser Constanten in einfacher Weise zu erkennen, braucht man nur auf die obigen Gleichungen zurückzugehen und die Resultante R der Gesamtkraft einzuführen, aus Gleichung (8a) erhält man alsdann

$$J = \kappa R, \quad (20)$$

also

$$\kappa = \frac{J}{R}, \quad (20a)$$

in Worten: die Susceptibilität ist das Verhältniss der Intensität der Magnetisirung zu der Gesamtkraft, welche sie hervorgerufen hat. Man kann, der Gleichung (20) entsprechend, α auch den Coëfficienten des inducirten Magnetismus nennen.

Eine ähnliche Gleichung kann man nun auch für μ aufstellen und zwar vermöge einer Operation, deren Sinn man begreift, wenn man erwägt, dass in der Kraft R zwar sowohl die äussere Kraft, als auch die von dem inducirten Körper selbst ausgehende Kraft enthalten ist, letztere aber mit Ausschluss eines kleinen Raumes an derjenigen Stelle des Körpers, auf den sich J bezieht. Es wird also noch ein Glied hinzukommen, welches mit J selbst proportional, ausserdem aber von der Gestalt jenes kleinen Raumes abhängen wird. Am grössten (s. w. u.) ist der Faktor für eine selbst gegen ihre Fläche dünne, auf der Magnetisirungsrichtung senkrechte Scheibe, nämlich gleich 4π . Bildet man demgemäss

$$U = R + 4\pi J, \quad (21)$$

so wird nach Gleichung (19) und (20)

$$U = \mu R, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{U}{R}, \quad (22)$$

und ferner

$$U = \frac{\mu}{\alpha} J. \quad (22a)$$

Nach dem Vorgange englischer Physiker nennt man U die »magnetische Induction«, entsprechend alsdann μ den Coëfficienten der magnetischen Induction (nicht zu verwechseln mit dem Coëfficienten des inducirten Magnetismus α , s. o.). Diese ganze Ableitung und Nomenclatur ist, wie man sieht und wie auch ihre Urheber zugeben, sehr gekünstelt und ziemlich unpassend, ihre einzige Rechtfertigung liegt eben darin, dass U und R durch die Zahl der Kraftlinien innerhalb und ausserhalb des inducirten Körpers, und μ durch deren Verhältniss anschaulich dargestellt wird, sowie in der Analogie mit den Verhältnissen bei der Wärmeleitung, der elektrischen Stromleitung und der dielektrischen Erregung, in welchem letzterem Falle die »dielektrische Capacität« oder »Dielektricitätsconstante«, die unserem μ analoge Grösse ist (vergl. Bd. III, 1, pag. 72). Uebrigens ist zu bemerken, dass die Grössen R, J, U Richtungsgrössen sind und die Gleichung (21) somit im Princip nur im Vectorsinne richtig ist; in allen praktisch wichtigen, isotrope Körper betreffenden Fällen haben jene Grössen aber die gleiche oder entgegengesetzte Richtung, sodass die Gleichung (21) alsdann auch im gemein algebraischen Sinne richtig ist.

Unter Umständen kann man die charakteristischen Gleichungen für α und μ , statt mittelst der Kräfte, auch mit Hilfe der Potentiale V, Q, φ bilden und findet dann in der schon Bd. III, 1, pag. 71 und 72 entwickelten Weise

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\varphi}, \quad \mu = \frac{V}{\varphi} \quad (23)$$

Gleichungen, welche insofern lehrreich sind, als sie über die Vorzeichen und Grössenverhältnisse der drei Grössen V, Q, φ Aufschluss geben. Da nämlich bei den eigentlich magnetischen Stoffen, wie dem Eisen, α eine positive Grösse ist, so folgt, dass Q das entgegengesetzte Zeichen wie φ , also, da nach der zweiten Gleichung φ und V dasselbe Vorzeichen haben, Q auch das entgegengesetzte Zeichen wie V hat, d. h. das inducirte Potential ist dem gegebenen äusseren Potential dem Vorzeichen nach entgegengesetzt; und ferner, was hieraus, aber mit Rücksicht auf $\mu > 1$ auch aus der zweiten Gleichung direkt folgt: φ ist

stets kleiner als V , das Gesamtpotential stets kleiner als das äussere für sich, eben weil es durch das Potential der Induction geschwächt wird. Die Nichtbeachtung dieser Verhältnisse bildet gewöhnlich eine der wesentlichen Schwierigkeiten, denen der Anfänger in der Theorie der magnetischen Induction begegnet. Bei Stoffen mit negativem κ (diamagnetischen Stoffen) sind natürlich die entgegengesetzten Schlüsse zu ziehen, hier wird zwar die ganze Magnetisirung negativ, dieser negative Werth wird aber durch die negative Mitwirkung des Inductionspotentials nicht geschwächt, sondern verstärkt¹⁾.

Gestaltscoefficient. Auch in einer Differenzform kann man die Gleichungen aufstellen und dadurch zu einer Schlussformel gelangen, welche den Einfluss von Material und Körperform in gleich einfacher und übersichtlicher Weise zur Darstellung bringt. Die wirklich herrschende Kraft R ist nämlich kleiner als die ursprünglich gegebene äussere Kraft R_0 (Resultante von X, Y, Z , deren Potential V ist) und zwar um einen Betrag, der jedenfalls mit J proportional ist und ausserdem einen von der Form des inducirten Körpers abhängigen Faktor ϵ enthält, der im Allgemeinen von Ort zu Ort variiren, unter Umständen aber im Raume constant sein wird; man hat also

$$R = R_0 - \epsilon J, \quad (24)$$

und folglich

$$J = \kappa R = \kappa R_0 - \epsilon \kappa J,$$

also ausgerechnet

$$J = \frac{\kappa}{1 + \epsilon \kappa} R_0, \quad (25)$$

womit die Intensität der Magnetisirung durch die äussere Kraft ausgedrückt ist²⁾. Sie hängt, wie man sieht, von zwei Grössen κ und ϵ ab, deren eine durch den Stoff, deren andere durch die Form des Körpers bedingt ist und von einigen Autoren (z. B. DU BOIS) Entmagnetisirungsfaktor genannt wird. Jene ist nach unserer vorläufigen Hypothese eine Constante, diese wird es für bestimmte Körperformen, und es wird dann, wie Gleichung (25) zeigt, J dieselbe Function des Raumes wie R_0 , also z. B. constant, wenn R_0 constant ist, d. h. solche Körper haben die Eigenschaft, durch eine gleichförmige äussere Kraft gleichförmig magnetisirt zu werden. Wie wichtig solche Körperformen für die Untersuchung sind, sieht man ein, wenn man bedenkt, dass dann mit R_0 auch R im ganzen Körper constant ist und dass folglich unsere Theorie für jeden einzelnen Fall, d. h. für einen bestimmt gegebenen Werth von R_0 auch gültig bleibt, wenn man die Grundhypothese fallen lässt und, der Wirklichkeit entsprechend, annimmt, dass κ für verschiedene R verschiedene Werthe hat — solche verschiedene Werthe von R kommen ja in Körpern der gedachten Form, wenn nur R_0 einen bestimmten Werth hat, gar nicht vor. Wenn man also einen solchen Körper nach einander verschiedenen Kräften R_0 aussetzt und dabei verschiedene κ findet, so ist doch jedes dieser κ der dem betreffenden R_0 entsprechende wahre Werth, was bei einem Körper anderer Form nicht der Fall sein würde.

¹⁾ RIECKE u. FROMME haben früher die Benutzung der Grösse p (pag. 142) anstatt κ vorgeschlagen, sind hiermit jedoch, da die Gründe nicht stichhaltig waren, nicht durchgedrungen. Vgl. RIECKE, Gött. Nachr. 1872, No. 26.

²⁾ In Bezug auf die Grössen R und R_0 herrscht in den Büchern leider eine sehr schwankende und deshalb verwirrende Nomenclatur; es wird nämlich bald R_0 , bald R als »magnetisirende Kraft« bezeichnet, und im Gegensatze hierzu zuweilen von der »magnetischen Kraft« gesprochen. Im Folgenden wird, wo Zweifel entstehen können, immer R als Gesamtkraft, R_0 als äussere Kraft oder Feldstärke bezeichnet werden.

Es lässt sich leicht zeigen, welche Körperformen die in Rede stehende Eigenschaft haben. Dass der unendliche Kreiscylinder und der geschlossene Ring solche Formen sind, wenn die Kraft axial gerichtet ist, sieht man auch ohne Rechnung ein, da hier alle Axenpunkte gleichberechtigt sind, die Grösse ϵ also nicht nur constant, sondern sogar Null sein muss; man kann dies auch aus der Erwägung schliessen, dass die Pole, wie wir wissen, die Repräsentanten der Wirkung eines Magnetkörpers sind, dass aber diese Pole beim unendlichen Cylinder in unendlicher Entfernung liegen, beim Ringe aber überhaupt nicht existiren. Ein einfacher Ansatz zeigt aber, dass es noch weitere solche Körper giebt. Ist nämlich R_0 , also auch XYZ im Raume constant, so ist V eine lineare Function der Coordinaten abc . Soll diese gleichförmige Kraft gleichförmige Magnetisirung hervorrufen, so muss wegen der Gleichungen (8) auch φ linear in abc sein. Die Gleichung (6) wird sich alsdann durch ein ebenfalls lineares Q befriedigen lassen. Bei gleichförmiger Magnetisirung ist aber nach Früherem und nach Gleichung (9) Q aus den ersten Differentialquotienten des NEWTON'schen Potentials zusammengesetzt; letzteres muss also eine Function zweiten Grades der Coordinaten sein. Das ist nun bekanntlich bei den von Oberflächen zweiten Grades begrenzten Körpern (Kugel, Ellipsoid, Cylinder) der Fall. Diese Körper werden also ebenfalls durch gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisirt.

Bei Körpern dieser Art hängt es von dem Werthe der Constanten ϵ ab, ob sie für die Magnetisirung günstige oder ungünstige Bedingungen darbieten, und es lässt sich schon aus der rohen Betrachtung auf pag. 50 das allgemeine Gesetz dieses Einflusses erschliessen: je gestreckter die Körperform in der Richtung der Magnetisirung im Vergleich zu den anderen Richtungen ist, desto günstiger, je platter, desto ungünstiger sind die Verhältnisse; am gestrecktesten ist der unendliche Cylinder und der geschlossene Ring, hier ist $\epsilon = 0$, also

$$J = \kappa R_0, \quad (26)$$

am plattesten ist eine dünne Scheibe, die in der Dickenrichtung magnetisirt wird, hier ist $\epsilon = 4\pi$, also gleich dem bereits oben erwähnten grösstmöglichen Werth. Mit der Eigenschaft guter Magnetisirbarkeit vereinigen die gestreckten Formen zugleich einen anderen Vortheil, nämlich den, dass sie sich zur experimentellen Ermittlung von κ am meisten eignen, weil hier nach (26) κ einen proportionalen Einfluss auf J ausübt, während nach (25) bei gedrunenen Formen das κ des Nenners den Einfluss des κ im Zähler mehr oder weniger aufhebt.

Aehnlichkeitssatz von THOMSON. Während die Grösse ϵ zur Vergleichung des Verhaltens verschieden gestalteter Körper dient, bezieht sich auf das Verhalten ähnlicher Körper der folgende unmittelbar einleuchtende Satz von THOMSON¹⁾. Einander ähnliche Körper gleichen Stoffes, die auf ähnliche Weise mit Drahtwindungen umwickelt sind, deren Längen den Quadraten der Körperdimensionen proportional sind, erhalten bei gleicher Stärke des magnetisirenden Stromes magnetische Momente, die sich wie ihre Volumina verhalten, und üben auf ähnlich gelegene äussere Punkte die gleiche Kraft aus.

Wenn nach H. MEYER²⁾ der Satz nur für Eisen, nicht aber für Stahl gültig ist, so hat dies jedenfalls in secundären Umständen seinen Grund.

Einfluss des Werthes von κ . Wie bei verschiedenen Werthen von ϵ , so gestalten sich auch bei verschiedenen Werthen von κ die Verhältnisse sehr

¹⁾ Trans. R. Soc. 1856 (1) pag. 287.

²⁾ H. MEYER, WIED. ANN. 18, pag. 233. 1883.

verschieden. Zunächst, je nachdem κ positiv oder negativ ist, je nachdem es sich also um paramagnetische oder diamagnetische Körper handelt. Die in dieser Hinsicht an die Gleichung (25) zu knüpfenden Betrachtungen brauchen nicht wiederholt zu werden, da sie sich mit früheren decken. Wenn κ sehr gross oder sehr klein ist, vereinfachen sich die Formeln wesentlich, und gerade diese Grenzfälle sind insofern wichtig, als der erstere bei den weicheren Eisensorten, wenigstens für mittelstarke Magnetisierungen, der andere bei der grossen Mehrzahl aller Stoffe erfüllt ist.

Für sehr kleines κ wird in Gleichung (14) Q unendlich klein, also nach Gleichung (6) annähernd $\varphi = V$; und das kann man entweder ohne weiteres benutzen, sodass

$$A = -\kappa \frac{\partial V}{\partial x} \text{ u. s. w.,} \quad J = \kappa R_0$$

wird; bei sehr kleinem κ ist also J für alle Körperformen durch dieselbe Gleichung bestimmt, wie nach (26) bei beliebigem κ für die unendlich gestreckten Körperformen. Oder man behält, wenn man erst unendlich kleine Grössen dritter Ordnung vernachlässigen will, zwar Q bei, ersetzt aber in seinem Ausdrucke (14) φ durch V , so dass man erhält:

$$Q = \kappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \varphi = V + \kappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (27)$$

während die Gleichungen (8), (8a) und (25) hier unverändert bleiben.

Für sehr grosses κ andererseits wird nach Gleichung (20) J gross gegen R , in Folge dessen nach Gleichung (24) R nur ein kleiner Bruchtheil der ursprünglichen äusseren Kraft R_0 , und nach Gleichung (25) trotz des unendlich grossen κ für eine endliche äussere Kraft R_0 die Intensität der Magnetisirung ebenfalls nur endlich, nämlich

$$J = \frac{1}{\varepsilon} R_0. \quad (28)$$

Es ist also dann J von dem Werthe von κ ganz unabhängig, mit anderen Worten: für grössere und grössere Werthe der Susceptibilität wird zwar die Magnetisirung ebenfalls immer stärker, aber allmählich in immer geringerem Maasse, und schliesslich hat eine weitere Zunahme von κ keinen merklichen Einfluss mehr; ausgenommen ist nur der Fall, in welchem ε sehr klein oder Null ist, was nach den obigen Bemerkungen bei sehr gestreckten Körperformen eintritt. Ob z. B. die Susceptibilität des Materials 30 oder 300 sei — Werthe, die sich wie 1:10 verhalten — ist bei einem Körper von der Form eines sehr langen Stabes sehr wesentlich, indem die Stärke seiner Magnetisirung in beiden Fällen sich ebenfalls etwa wie 1:10 verhält, bei einem kugelförmigen oder überhaupt gedrungenen Körper ist es so gut wie gleichgültig.

Aehnliche Betrachtungen wie für J an die Gleichung (25) kann man nun für die »magnetische Induction« U an eine entsprechende Gleichung knüpfen, es wird aber genügen, diese Gleichung hinzuschreiben, wobei man sich, wie dort des κ , so hier der Grösse μ bedienen wird. Als allgemeine Gleichung zwischen U und R_0 findet man dann:

$$U = \frac{\mu}{1 + \frac{\varepsilon}{4\pi}(\mu - 1)} R_0; \quad (29)$$

für schwach magnetisierbare Stoffe, also nahezu $\mu = 1$, wird [Analogon der Gleichung (26)]

$$U = \mu R_0, \quad (30)$$

für stark magnetisierbare Stoffe andererseits, also sehr grosse μ , wird [Analogon der Gleichung (28)]

$$U = \frac{4\pi}{\epsilon} R_0, \quad (31)$$

d. h. ein stark magnetisierbarer Körper verdichtet die Kraftlinien auf das $4\pi/\epsilon$ -fache, wo ϵ von der Gestalt des Körpers abhängt; im ungünstigsten Falle, d. h. bei ganz platten Körpern ($\epsilon = 4\pi$) ist hiernach die Verdichtung gleich eins, d. h. es findet gar keine Verdichtung statt, jeder anderen Körperform entspricht eine bestimmte Verdichtungszahl $4\pi/\epsilon$, nur bei unendlich gestreckten Körpern muss sie trotz sehr grossen Werthes von μ aus der allgemeinen Formel (29) berechnet werden. Ebenso zeigt diese allgemeine Formel, dass bei Stoffen mit $\mu < 1$ (diamagnetische Stoffe) nicht Verdichtung, sondern Verdünnung der Kraftlinien eintritt. Es sei noch bemerkt, dass sich der Abstand benachbarter Kraftlinien innerhalb und ausserhalb des inducirten Körpers hiernach wie $\sqrt{4\pi/\epsilon}$: 1 verhält.

Endlich ist es noch von Interesse, den Einfluss der Grössenordnung von χ auf die Oberflächengleichungen (18) zu untersuchen. Für sehr kleines χ wird

$$\frac{\partial Q}{\partial n_i} + \frac{\partial Q}{\partial n_a} = 0,$$

was nichts Neues darbietet, für sehr grosses χ andererseits wird

$$\frac{\partial Q}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = 0,$$

also, wenn Q_0 und V_0 die Oberflächenwerthe sind:

$$Q_0 + V_0 = \text{const.}$$

Der auf pag. 144 erwähnte Unterschied zwischen den Verhältnissen bei der elektrostatischen Vertheilung und der magnetischen Induction fällt also in diesem Specialfalle weg, beide Aufgaben werden hier identisch, nur dass die magnetische wegen der Bedingung: algebraische Summe aller Magnetismen gleich Null, specielleren Charakters ist. Die wichtigsten Sätze der Elektrostatik lassen sich dann auf unser Gebiet herübernehmen, insbesondere einige Sätze über Hohlkörper, die ihrer auch praktischen Wichtigkeit halber kurz angeführt werden mögen; sie gelten für beliebige Gestalt des Hohlkörpers, aber nur für endliche Dicke seiner Wandungen. Ein solcher Hohlkörper wirkt auf äussere Pole genau so, als ob er voll wäre. Wird er durch äussere Pole magnetisirt, so hebt er deren Wirkung auf Pole, die in seiner Höhlung liegen, gerade auf, schützt diese also vor äusserer Beeinflussung (magnetische Schirmwirkung, vergl. pag. 53, sowie hinsichtlich ihrer Anwendung auf Galvanometer Bd. III, 1, pag. 222). Ist der Hohlkörper durch innere Pole magnetisirt, so hebt er deren Wirkung auf äussere Pole gerade auf. Endlich ist die Wirkung des Hohlkörpers auf innere Pole unabhängig von seiner äusseren Oberfläche.

Anwendung der Theorie auf einzelne Körperformen.

Magnetisirung einer Kugel. Für die Kugel lässt sich das Problem der magnetischen Induction mit Hilfe der Kugelfunctionen lösen. Der Kugelradius sei 1, die Entwicklung des Oberflächenwerthes \bar{V} des gegebenen äusseren Potentials V nach Kugelfunctionen sei

$$\bar{V} = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$$

also für innere Punkte, wenn ρ der Abstand vom Mittelpunkte ist:

$$V_i = V_0 + \rho V_1 + \rho^2 V_2 + \dots$$

Der Differentialquotient nach innen hat daher für die Oberfläche den Werth

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = -V_1 - 2V_2 - \dots$$

Bildet man nun für das unbekanntes Inductionspotential Q formell dieselben Entwickelungen, aber nicht bloss für das Innere, sondern auch für das Aeusserere

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Q_0 + Q_2 + \dots \\ Q_i &= Q + \rho Q_1 + \rho^2 Q_2 \dots \\ Q_a &= \frac{Q_0}{\rho} + \frac{Q_1}{\rho^2} + \frac{Q_2}{\rho^3} + \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial n_i} &= -Q_1 - 2Q_2 - \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial n_a} &= -Q_0 - 2Q_1 - 3Q_2 - \dots, \end{aligned}$$

so kann man die Gleichung (18a) bilden und erhält dann durch Gleichsetzung der Glieder gleicher Ordnung:

$$\begin{aligned} Q_0 = 0, \quad Q_1 &= -\frac{V_1}{1 + \frac{4\pi x}{3}}, \quad Q_2 = -\frac{V_2}{1 + \frac{4\pi x}{5}}, \\ \text{allgemein: } Q_n &= -\frac{V_n}{1 + \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{4\pi x}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Damit ist das Problem gelöst, da man nun auch ABC und J hinschreiben kann. Für eine von zwei concentrischen Kugelschalen begrenzte Schale erfolgt die Lösung in analoger Weise, und zwar auch dann, wenn die magnetisirenden Pole theils im äusseren Raume, theils in der Höhlung liegen; nur muss man dann V und Q im Innern des inducirten Körpers nach auf- und absteigenden, Q im äusseren Raume nach absteigenden, in der Höhlung nach aufsteigenden Potenzen von ρ entwickeln.

Wirkt auf die Kugel eine im Raume constante magnetisirende Kraft, so ist

$$V = -Xa - Yb - Zc$$

eine Kugelfunction erster Ordnung, dasselbe gilt dann auch von Q , und folglich erhält man:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{V}{1 + \frac{4\pi x}{3}}, \\ \varphi = V + Q &= \frac{V}{1 + \frac{4\pi}{3} x}. \end{aligned}$$

$$A = \frac{x}{1 + \frac{4\pi}{3} x} X, \quad B = \frac{x}{1 + \frac{4\pi}{3} x} Y, \quad C = \frac{x}{1 + \frac{4\pi}{3} x} Z, \quad J = \frac{x}{1 + \frac{4\pi}{3} x} R_0, \quad (33)$$

wofür man nach (7) auch kürzer

$$A = pX, \quad B = pY, \quad C = pZ, \quad J = pR \quad (33a)$$

schreiben kann; der Coëfficient p ist für die Kugel in der That nichts anderes als das Verhältniss der Magnetisirung zur äusseren Kraft. Die Kugel wird also durch die gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisirt, der Gestaltscoëfficient ϵ ist für sie $4\pi/3$, und bei grosser Susceptibilität des Materials wird nach (31) die »magnetische Induction«

$$U = 3R_0,$$

d. h. die Kraftlinien werden auf das dreifache verdichtet, oder anders ausgedrückt, der Abstand der Kraftlinien innerhalb und ausserhalb der Kugel verhält sich wie $\sqrt{3}:1$. Die Formel (33) lässt erkennen, wie schwach eine Kugel selbst aus einem stark magnetischen Stoffe sich magnetisiren lässt; setzt man z. B. für Eisen $\kappa = 30$, so würde die Intensität der Magnetisirung ohne Rücksicht auf die entmagnetisirende Kraft der Kugel $30R_0$ betragen, durch diese Gegenkraft aber wird sie auf etwa $\frac{1}{125}$ dieses Werthes herabgedrückt.

Ellipsoid. Auch das Ellipsoid wird nach dem früher Gesagten durch eine gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisirt. Dabei treten dann die von dem NEWTON'schen Potential des Ellipsoids her bekannten Constanten

$$\begin{aligned} L &= 2\pi a_0 b_0 c_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_0^2 + \lambda) \sqrt{(a_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)(c_0^2 + \lambda)}}, \\ M &= 2\pi a_0 b_0 c_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_0^2 + \lambda) \sqrt{(a_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)(c_0^2 + \lambda)}}, \\ N &= 2\pi a_0 b_0 c_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_0^2 + \lambda) \sqrt{(a_0^2 + \lambda)(b_0^2 + \lambda)(c_0^2 + \lambda)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

auf, und es werden die Componenten der Magnetisirungsintensität

$$A = \frac{\kappa}{1 + L\kappa} X, \quad B = \frac{\kappa}{1 + M\kappa} Y, \quad C = \frac{\kappa}{1 + N\kappa} Z. \quad (35)$$

An die Stelle des Faktors $4\pi/3$ sind also hier die Constanten LMN getreten, d. h. für jede Componente eine andere Grösse, und es hat folglich die Gleichung (25) hier im Allgemeinen keine einfach algebraische Bedeutung; mit anderen Worten, eine magnetisirende Kraft von bestimmter Richtung ruft in dem Ellipsoid einen Magnetismus hervor, dessen Axe im Allgemeinen eine andere Richtung hat. Uebereinstimmend werden beide Richtungen nur dann, wenn die magnetisirende Kraft die Richtung einer der Axen des Ellipsoids hat, z. B. die der $z(c_0)$ -Axe, alsdann wird

$$J = \frac{\kappa}{1 + N\kappa} R_0, \quad (36)$$

d. h. das jetzige N ist mit dem früheren ϵ identisch. Der Werth von N ist aus den Tafeln für die elliptischen Integrale zu entnehmen.

Hat man es, was in der Praxis fast stets der Fall ist, mit einem Rotationsellipsoid zu thun, so wird $a_0 = b_0$, also $L = M$, und man kann Alles durch die Excentricität e der Meridianellipse ausdrücken, nämlich einerseits für das abgeplattete Rotationsellipsoid¹⁾:

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - e^2}}, \\ N = \epsilon &= 4\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \operatorname{arc} \sin e \right), \end{aligned} \quad (37)$$

andererseits für das verlängerte Rotationsellipsoid

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 &= c_0 \sqrt{1 - e^2}, \\ N = \epsilon &= 4\pi \frac{1 - e^2}{e^2} \left(\frac{1}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} - 1 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Wird die Abplattung stärker und stärker, so nähert sich N dem Werthe

$$N = 4\pi, \quad (38a)$$

¹⁾ In Folge missverständener engl. Schreibweise ist die Formel für N vielfach falsch wiedergegeben worden.

den es für eine dünne Scheibe erreicht, ein Werth, der schon mehrfach benützt wurde und der grösstmögliche überhaupt ist. Wird andererseits die Streckung des Ellipsoids grösser und grösser, so kann man zunächst mit der Näherungsformel

$$N = 4\pi \frac{a_0^2}{c_0^2} \left(\log \frac{2c_0}{a_0} - 1 \right) \quad (39)$$

rechnen, und schliesslich, also für den unbegrenzten Kreiscylinder wird, wie sich durch Entwicklung des \log ergibt,

$$N = 0. \quad (39a)$$

Die folgende kleine Tabelle lässt erkennen, in welcher Weise der schwächende Gestaltscoëfficient N beim Rotationsellipsoid abnimmt, wenn das Verhältniss $c_0 : a_0$ der Rotationsaxe zur anderen Axe mehr und mehr zunimmt; der ausser N noch beigefügte Werth $4\pi/N$, also $4\pi/\varepsilon$ lässt nach Gleichung (31) erkennen, in welchem Verhältniss in den verschiedenen Ellipsoiden die Kraftlinien verdichtet werden, falls die Susceptibilität gross ist; ε hat natürlich in den sechs untersten Reihen die entgegengesetzte Bedeutung wie in den vier obersten.

e	$c_0 : a_0$	N	$\frac{4\pi}{N}$
1	0	12.59	1.00
0.866	0.5	6.60	1.90
0.661	0.75	5.16	2.43
0.436	0.9	4.77	2.63
0	1	4.19	3.00
0.866	2	2.18	5.78
0.968	4	0.95	13.3
0.995	10	0.25	50
0.999	50	0.018	691
fast 1	200	0.0016	8000
fast 1	500	0.0003	41700

Die vier obersten Reihen beziehen sich auf abgeplattete Ellipsoide, die fünfte auf die Kugel, die sechs letzten auf gestreckte Ellipsoide. Es mögen noch die Formeln für die Magnetisirung von Rotationsellipsoiden durch gleichförmige Kräfte senkrecht zur Figuraxe, also, was hierfür offenbar genügt, die Werthe von L oder M angeführt werden. Sie lauten für ein abgeplattetes Ellipsoid

$$L = M = 2\pi \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2} \right), \quad (40)$$

also für starke Abplattung $\pi^2(c/a)$ und für eine ganz platte Scheibe Null, so dass geradezu $J = \kappa R_0$ wird; andererseits für das gestreckte Ellipsoid

$$L = M = 2\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} \log \frac{1+e}{1-e} \right), \quad (40a)$$

und für unendliche Streckung, also für einen unbegrenzten Cylinder oder für die centralen Theile eines sehr langen Cylinders mit abgerundeten Enden

$$L = M = \varepsilon = 2\pi \quad (40b)$$

Bei einem solchen Cylinder ist also, wenn er quer gegen seine Axe magnetisirt wird, die entmagnetisirende Kraft sehr beträchtlich, aber doch nur halb so gross, wie in dem anderen extremen Falle einer ganz dünnen Scheibe, die senkrecht gegen ihre Fläche magnetisirt wird.

Bisher war von der Einwirkung einer gleichförmigen magnetisirenden Kraft, wie es z. B. der Erdmagnetismus ist oder wie sie zwischen zwei breiten entgegen-

gesetzten Polflächen oder im Innern einer langen Spirale wirksam ist, die Rede. Für das Rotationsellipsoid hat aber F. NEUMANN das Problem auch für den allgemeinen Fall ungleichförmiger Kraft, d. h. beliebig im Endlichen vertheilter wirkender Pole gelöst. Die Methode ist der oben für die Kugel angegebenen ganz analog, nur werden statt der Polarcoordinaten elliptische Coordinaten eingeführt, d. h. es wird, wenn die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{r_0^2 - \lambda^2} = 1$$

ist,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \delta \cos \psi, & y &= r \sin \delta \sin \psi, \\ z &= \sqrt{r^2 - \lambda^2} \cos \delta \end{aligned}$$

gesetzt, und es lassen sich dann ähnliche Reihen wie bei der Kugel entwickeln. Die magnetischen Momente des ganzen Ellipsoids lassen sich aber, ausser durch diese Rechnung, auch direkt angeben, und zwar für ein beliebiges Ellipsoid. Eine Methode hierfür hat F. NEUMANN selbst, eine andere KIRCHHOFF mitgetheilt, die letztere stützt sich auf den Satz, dass eine beliebige Eisenmasse, durch einen Pol P_1 magnetisirt, auf einen Pol P_2 dasselbe Potential hat, wie, durch P_2 magnetisirt, auf P_1 . Verlegt man den einen dieser Pole in die Unendlichkeit, den anderen in die Endlichkeit, so kann man das allgemeine Problem auf das frühere specielle zurückführen und erhält, wenn Ω das NEWTON'sche Potential des Ellipsoids ist, für die magnetischen Momente $\alpha\beta\gamma$ des ganzen Ellipsoids die Formeln

$$\alpha = \frac{x}{1 + Lx} \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad \beta = \frac{x}{1 + Mx} \frac{\partial \Omega}{\partial b}, \quad \gamma = \frac{x}{1 + Nx} \frac{\partial \Omega}{\partial c}. \quad (41)$$

Cylinder. Das Problem der Magnetisirung eines Cylinders ist, wenn dieser unbegrenzt ist, in dem allgemeineren Problem des Ellipsoids enthalten. In der That haben wir für gleichförmige magnetisirende Kraft schon gefunden, dass für axiale Richtung dieser Kraft $\varepsilon = 0$, bei Quermagnetisirung $\varepsilon = 2\pi$ ist, für schiefe Magnetisirung wird der Werth zwischen diesen beiden Grenzen liegen. In analoger Weise würde man aus den NEUMANN'schen Formeln für die Magnetisirung eines Rotationsellipsoids durch beliebige Kräfte die Magnetisirung eines unbegrenzten Kreiscylinders durch beliebige Kräfte ableiten können, wenn nicht gerade in diesem Falle die NEUMANN'schen Reihenentwickelungen ihre Anwendbarkeit verlören. KIRCHHOFF¹⁾ hat daher dieses Problem auf einem anderen Wege in Angriff genommen und gelöst. Er ersetzt nach dem bekannten Satze von GAUSS die wirkenden äusseren Massen durch solche, die auf der Mantelfläche des Cylinders verbreitet sind; ihr Potential V erfüllt dann nicht mehr die bei der Umformung der Oberflächengleichung (18a) in (18b) benutzte Gleichung (18c), da deren rechte Seite nun nicht mehr Null, sondern 4π mal der Dichte der Oberflächenvertheilung ist, und folglich ist die Gleichung (18c) durch die neue

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} + (1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = 0$$

zu ersetzen. Gleichzeitig aber muss $\Delta V = 0$, d. h. in Cylindercoordinaten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0$$

sein. Mit Hilfe der KUMMER'schen Integrale und semiconvergenter Reihen wird nun eine Lösung der letzten Gleichung ermittelt, welche gleichzeitig für die Ober-

¹⁾ KIRCHHOFF, CRELLE's J. 48, pag. 348. 1853; Ges. Abh., pag. 193.

fläche dem gegebenen V gleich wird, und hieraus dann mit Hilfe der ersten Gleichung φ gefunden.

Für einen begrenzten Cylinder existirt eine strenge Theorie nicht, GREEN¹⁾ hat aber eine bei einigermaassen grosser Susceptibilität mit grosser Annäherung gültige Formel abgeleitet, welche die Dichte λ des freien Magnetismus an einer um x von der Mitte des Stabes entfernten Stelle darstellt und auf welche schon pag. 32 hingewiesen wurde; vollständiger als sie dort angegeben wurde, lautet sie

$$\lambda = \pi x X \rho \frac{e^{\frac{\rho x}{\rho}} - e^{-\frac{\rho x}{\rho}}}{e^{\frac{\rho l}{\rho}} + e^{-\frac{\rho l}{\rho}}}, \quad (42)$$

wo X die Kraft, $2l$ die Länge, 2ρ der Durchmesser des Cylinders und ρ eine mit x durch die Gleichung

$$0.231863 - 2 \log \rho + 2\rho = \frac{1}{\pi x \rho^2}$$

verknüpfte Zahl ist und z. B. folgende Werthe hat:

$x = \infty$	336.4	62	48.4	20.2	6.3	0.143	0.0002
$\rho = 0$	0.01	0.02	0.03	0.05	0.1	1	10

Ring. Besonderes Interesse in theoretischer und experimenteller Hinsicht bietet der Fall dar, in welchem der zu inducirende Körper Ringform besitzt, d. h. durch Rotation eines ebenen Flächenstückes um eine ausserhalb liegende, aber seiner erweiterten Ebene angehörige Axe entstanden gedacht werden kann; und zwar der Fall, wo die Richtung der magnetisirenden Kraft auf den gedachten Querschnittflächen überall senkrecht steht, ihre Grösse aber überall dieselbe ist. Ein solcher Ring wird zwar magnetisirt, und zwar wird die durch die Mittelpunkte seiner Querschnitte gebildete Linie zur Axe der Magnetisirung; da diese Axe aber eine in sich zurücklaufende Linie ist, erhält der Ring keine Pole, und er übt folglich auch keine Wirkung nach aussen hin aus. Man kann also schon ohne Rechnung schliessen, dass das Potential Q der magnetisirenden Kraft hier Null sein und sich so die Theorie besonders einfach gestalten wird. Diese Theorie hat KIRCHHOFF²⁾ entwickelt, und zwar unter der bestimmten Annahme, dass die magnetisirende Wirkung von einem elektrischen Strome ausgeht, dessen Windungen den Ring gleichförmig umschlingen. Streng gleichförmig ist diese Kraft freilich nicht, da sie nach den Gesetzen des Elektromagnetismus von der Zahl der auf die Längeneinheit der Mittellinie entfallenden Windungen abhängt, die Windungen sich aber an der Innenseite dichter anhäufen als an der Aussen-seite; bei einem im Verhältniss zu seiner Grösse dünnen Ringe wird diese Differenz jedoch unerheblich sein. Das Charakteristische des vorliegenden Falles besteht darin, dass das Potential V der magnetisirenden Kraft eine vielwerthige Function der Coordinaten ist, und zwar in der Weise, dass, wenn man cylindrische Coordinaten $\rho \vartheta z$ einführt, $\partial V / \partial \rho$ und $\partial V / \partial z$ trotzdem stets Null, $\partial V / \partial \vartheta$ hingegen — unter n die Windungszahl, unter i die Stromstärke verstanden — 0 oder $2ni$ ist, je nachdem der Punkt $(\rho \vartheta z)$ innerhalb oder ausserhalb des Ringes liegt, den die Stromwindungen bilden. Es wird somit ausserhalb $V=0$, innerhalb $V=2ni\vartheta$, und bei diesem Werthe von V genügt man den Grundgleichungen des Inductionsproblems, indem man $Q=0$, also $\varphi = V$ setzt, wo-

¹⁾ GREEN, An essay on the appl. etc. Nottingham 1828, CRELLE's J. 47, pag. 238. — Vergl. auch BEER, Einl. i. d. Elektrostatik u. s. w.

²⁾ KIRCHHOFF, POGG. Ann. Ergzbd. 5, pag. 1. 1870; Ges. Abh., pag. 223.

durch die schon oben ausgesprochene Vermuthung ihre Bestätigung erfährt. Gleichzeitig ergibt sich als Axe der Magnetisirung die Mittellinie des Ringes und als ihre Intensität

$$J = \frac{2\pi xi}{\rho}. \quad (43)$$

Auch der Fall einer ungleichförmigen Magnetisirung eines Ringes, nämlich durch eine einzelne, irgend einen Ringquerschnitt umschliessende Stromwindung oder durch eine kurze, nur ein Stück des Ringes umgebende Stromspule ist theoretisch untersucht worden, und zwar durch BOLTZMANN¹⁾; es muss jedoch an diesem Hinweise genügen.

In neuester Zeit ist im Hinblick auf die elektrischen Maschinen der auch theoretisch interessante Fall eines geschlitzten Ringes von Wichtigkeit geworden. Es sei daher auf die theoretische Behandlung dieses Falles durch DU BOIS²⁾ hingewiesen, dessen Rechnungen durch H. LEHMANN³⁾ dann auch experimentell bestätigt worden sind (vergl. auch w. u.).

Zwei Kugeln. CHWOLSON⁴⁾ hat die magnetische Induction in zwei Kugeln durch Kräfte, die symmetrisch zu ihrer Centrallinie liegen, berechnet, wobei sich ergibt, welchen vergrössernden Einfluss die eine Kugel auf das Moment der andern ausübt. Es muss aber an diesem Hinweise genügen.

Methode der successiven Annäherung. Ein von dem bisher skizzirten verschiedenes Verfahren, das Problem der magnetischen Induction in einem beliebigen Körper zu lösen, haben BEER, LEONH. WEBER und RIECKE entwickelt; auch die von C. NEUMANN gegebene Darstellung der Theorie kann in ähnlichem Sinne aufgefasst werden⁵⁾. Es ist ein auf der successiven Annäherung oder auf dem Princip der Superposition beruhendes Verfahren und besteht in Folgendem. Man bestimmt zunächst diejenige magnetische Vertheilung, welche die äusseren Kräfte für sich in dem Körper hervorrufen und denkt sie sich durch die äquivalente Oberflächenbelegung, die »Belegung erster Ordnung« ersetzt; dann bestimmt man die von dieser Belegung erzeugte Magnetisirung und die ihr äquivalente Oberflächenbelegung zweiter Ordnung; so fährt man fort und erhält schliesslich durch Superposition aller Vertheilungen die wahre Magnetisirung des Körpers. Natürlich ist der Nachweis erforderlich, dass die Reihen, die bei diesem Prozesse gebildet werden, convergiren. Die Methoden von BEER und WEBER einerseits, von RIECKE andererseits unterscheiden sich dadurch, dass bei der Ausrechnung der einzelnen Inductionen dort die gewöhnlichen Coordinaten zu Grunde gelegt werden und die Formeln sich deshalb im Einzelnen eng an die der gewöhnlichen Theorie anschliessen, dass dagegen hier der Körper in Elemente von besonderer Gestalt zerlegt wird, woraus sich ein sehr anschaulicher Process ergibt und die gedachten äquivalenten Oberflächenbelegungen ganz unmittelbar hergestellt werden können. Von einem Oberflächenelement des Körpers wird eine der äusseren Kraft \mathcal{R}_0 entsprechende Krafttröhre durch den Körper gelegt und aus ihr durch zwei Niveauflächen ein Raumelement $d\tau$ herausgeschnitten. RIECKE entwickelt nun zwei verschiedene Methoden, die sich durch die Gestalt dieses Körperelementes unterscheiden; bei der ersten wird es sehr gestreckt gewählt, bei der zweiten sehr platt, bei der ersten wird folglich

1) BOLTZMANN, Anz. d. Wien. Ak. 1878, pag. 203.

2) H. E. J. G. DU BOIS, WIED. Ann. 46, pag. 486. 1892.

3) H. LEHMANN, WIED. Ann. 48, pag. 406. 1893.

4) CHWOLSON, Zeitschr. für Math. und Phys. 24, pag. 40. 1878.

5) Die Literatur s. ob. pag. 140.

nach der allgemeinen Theorie das in dem Element durch den ersten Inductionsakt inducirte Moment gleich $-\kappa R_0 d\tau$, bei der zweiten wird an die Stelle von κ der Faktor $-\kappa/(1+4\pi\kappa)$ treten, entsprechend dann bei den folgenden Gliedern; die zweite hat der ersten gegenüber den Vorzug, dass die Reihe stets convergirt, während dies bei der ersten nur für gewisse Körperformen der Fall ist. Als Beispiele giebt RIECKE die Induction in einem Ellipsoid, sowie die in einem begrenzten Cylinder; für den letzteren Fall werden zwar nur die beiden ersten Glieder berechnet, damit aber das Problem immerhin ein Stück weiter geführt.

THOMSON'sches Problem. Es möge hier noch eine verwandte, von THOMSON herrührende Untersuchung erwähnt werden, die sich auf den in einer Platte inducirten Magnetismus bezieht. Hiernach kann man die Wirkung, die auf einen vor der Platte befindlichen Punkt durch die Platte und den sie erregenden, hinter ihr gedachten Magneten ausgeübt wird, ersetzen durch die Wirkung einer Reihe von Magneten, die mit dem gegebenen anfängt und sich nach hinten derart fortsetzt, dass die Abstände der doppelten Plattendicke gleich sind, die magnetischen Intensitäten aber, wenn die des gegebenen Pols 1 ist, in geometrischer Progression mit dem von κ abhängigen Faktor m^2 (von THOMSON inductive Capacität der Platte genannt) abnehmen und mit $1-m^2$ beginnen; für eine unendlich dünne Platte fallen alle »Bilder«, wie man die folgenden Magnete nennen kann, mit dem gegebenen Magneten zusammen, ihre Gesamtintensität ist 1, und man muss folglich schliessen, dass die Platte gar keinen Einfluss hat.

Variabilität von κ . Wie man die allgemeine Theorie zu ändern hat, wenn κ nicht constant, sondern eine Function der magnetisirenden Kraft ist, hat KIRCHHOFF¹⁾ gezeigt. Leider kann die so modificirte Theorie bei der complicirten Natur jener Function nur schwer verwendet werden, thatsächlich scheint sie noch nicht benutzt worden zu sein, und es möge daher bei diesem Hinweise sein Bewenden haben; man vergleiche jedoch oben pag. 146 und 147.

Thermodynamische Theorie. DUHEM²⁾ hat die Theorie, um sie in den Rahmen der allgemeinen physikalischen Erscheinungen einzuordnen, auf der Grundlage der Thermodynamik entwickelt. Das thermodynamische Potential, das er ableitet, besteht aus drei Gliedern, nämlich der freien Energie im unmagnetischen Zustande, dem magnetischen Potential und einem von J und der Beschaffenheit der Körper abhängigen Integrale. Da das thermodynamische Potential für das Gleichgewicht ein Minimum oder Maximum sein muss, braucht man es nur zu differenziren, um die Gleichungen der magnetischen Induction zu erhalten, und zwar, wie bei KIRCHHOFF, ohne die beschränkende Voraussetzung constanter Susceptibilität. Nochmalige Differentiation lässt dann den stabilen oder labilen Charakter des Gleichgewichts erkennen. Es wird auf diese werthvolle Theorie noch wiederholt zurückgekommen werden (vergl. den folgenden Artikel).

Molekulartheorie.

Scheidungshypothese. POISSON ist zwar der Urheber der Theorie der magnetischen Induction, er hat sie aber nicht mit dem in der obigen Darlegung benutzten Minimum von Voraussetzungen entwickelt, sondern er ist dabei von bestimmten Vorstellungen über die molekulare Natur des Magnetismus aus-

¹⁾ KIRCHHOFF, CRELLE, Journ. 48. 1853; Ges. Abh. pag. 217.

²⁾ DUHEM, Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la thermodynamique. Paris 1888.

gegangen, und zwar von der schon früher (pag. 30) erwähnten Scheidungshypothese. Hiernach besteht ein Körper aus Theilchen, deren jedes gleichviel positiven wie negativen Magnetismus und unendliche magnetische Leitungsfähigkeit besitzt, während die Leitungsfähigkeit des Mediums, in das die Theilchen eingebettet sind, Null ist. Die Magnetisirung besteht nun darin, dass die im unmagnetischen Zustande durcheinandergemischten entgegengesetzten Magnetismen innerhalb des Theilchens geschieden werden. Wie stark dabei der Körper magnetisirt wird, wird von der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Theilchen k (POISSON'sche Constante) abhängen, und zwar wird die magnetische Leitungsfähigkeit des Gesamtkörpers μ , wie man leicht findet, zunächst allgemein, wenn μ_1 und μ_2 die Zahlen für Zwischenmedium und Theilchen sind,

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)},$$

also, da POISSON $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \infty$ setzt,

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}, \quad k = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Entsprechend dieser Beziehung zwischen den Coëfficienten k und μ wird die zwischen k und der Susceptibilität α

$$\alpha = \frac{3k}{4\pi(1 - k)}, \quad k = \frac{4\pi\alpha}{4\pi\alpha + 3}.$$

Da nun für Eisen α eine ziemlich grosse Zahl ist, so wird nahezu $k = 1$, d. h. man muss sich so ziemlich den ganzen Raum mit Molekeln erfüllt denken; für kugelförmige Theilchen, wie sie POISSON sich denkt, ist dies geometrisch unmöglich, aber auch für andere ist es sehr unwahrscheinlich¹⁾. Ueberhaupt führt die Annahme, dass die Grösse k die für den Magnetismus verschiedener Stoffe charakteristische Grösse sein solle, zu wenig befriedigenden Consequenzen²⁾. Nach den obigen Gleichungen müsste ferner, da k eine Constante ist, auch α resp. μ constant sein, was, wie schon mehrfach erwähnt wurde, durchaus nicht der Fall ist. Endlich ist auf eine Reihe instruktiver, von BEETZ angestellter Versuche hinzuweisen, die sich auf im Magnetfelde elektrolytisch niedergeschlagenes Eisen beziehen und mit der Scheidungshypothese kaum vereinbar sind.

Drehungshypothese; magnetische Sättigung. Die erörterten Nachteile der Scheidungshypothese sind gleichzeitig Vorzüge der besonders von W. WEBER³⁾ (vergl. pag. 31) ausgebildeten Drehungshypothese, nach welcher die Theilchen schon im unmagnetischen Zustande des Körpers Magnete, jedoch mit den verschiedensten Axenrichtungen sind, bei der Magnetisirung aber gleichgerichtet werden. Diese Gleichrichtung würde im Widerspruch mit der Erfahrung schon bei Einwirkung der kleinsten Kraft eine vollständige sein, wenn man nicht annähme, dass ihr ein Widerstand entgegentritt, und es ist auch sofort einzusehen, dass ein solcher Widerstand in Gestalt der von den umgebenden Theilchen ausgeübten Kräfte, die unserem Theilchen ja auch seine natürliche Lage vorgeschrieben haben, vorhanden ist. Auf die Ausführung dieses

¹⁾ Mehrfach hat man deshalb die POISSON'sche Hypothese zu modificiren versucht, und es sei hier z. B. auf die Entwicklung von BETTI verwiesen, welche für Eisen etwa $k = \frac{1}{3}$ liefert.

²⁾ Man vergleiche z. B. die interessanten Ausführungen von G. ADLER, WIED. Ann. 44, pag. 173.

³⁾ W. WEBER, Elektrodyn. Maassbestimmungen. Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. I, pag. 485. 1852. — Werke 3, pag. 475.

Gedankens geht jedoch WEBER nicht ein, er nimmt einfach an, dass dem Theilchen eine Richtkraft D innewohnt, die es, der äusseren Kraft X entgegen, in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen sucht. Nennt man α den ursprünglichen, ϑ den schliesslichen Winkel der Molekelaxe gegen die X -Richtung, so liefert die Gleichsetzung der von den beiden Kräften ausgeübten Drehungsmomente die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{D \sin \alpha}{X + D \cos \alpha}.$$

Ist ferner m das magnetische Moment der Molekel und sind deren in der Volumeneinheit n vorhanden, so würde die bei völliger Gleichrichtung eintretende, also maximale Intensität der Magnetisirung $J_{\max} = mn$ sein, bei unvollständiger Gleichrichtung dagegen wird allgemein:

$$J = \int_0^{\pi} \frac{mn}{2} \cos \vartheta \sin \alpha \, d\alpha = - \int \frac{mn}{4} \frac{R^2 + X^2 - D^2}{X^2 D} dR,$$

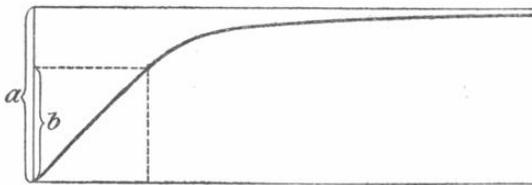
wo R die Resultante von D und X ist, und die Grenzen der Integration für $X < D$ und für $X > D$ verschieden sind, da man in jenem Falle offenbar von $D - X$ bis $D + X$, in diesem von $X - D$ bis $X + D$ zu integrieren hat. Da nun unbestimmt

$$J = - \frac{mn}{12} \frac{R}{X^2 D} (R^2 + 3X^2 - D^2) + \text{const}$$

ist, so erhält man folgende zusammengehörige Werthe von X und J :

$X =$	0	$< D$	D	$> D$	∞
$J =$	0	$\frac{2}{3} \frac{mn}{D} X$	$\frac{2}{3} mn$	$mn \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right)$	mn

Die entsprechende Curve (Fig. 160) ist also zwar stetig, zerfällt aber in zwei Theile von verschiedenem Charakter; der erste Theil ist geradlinig ansteigend,



(P. 160.)

der zweite nach unten concav, d. h. allmählich immer weniger ansteigend und sich schliesslich einem Grenzwert a nähernd. Dieser Grenzwert a entspricht der magnetischen Sättigung, der geradlinige Theil reicht bis zu einem Ordinatenwerthe b , der $\frac{2}{3}$ des Sättigungswerthes ausmacht. Die Sättigung spielt namentlich auch in der Technik eine wichtige Rolle; will man mit gegebenen Mitteln einen möglichst starken Effekt erzielen, so muss man sie zu erreichen suchen; will man jedoch ökonomisch arbeiten, worauf es viel häufiger ankommt, so muss man in angemessener Entfernung von der Sättigung arbeiten, oder, wie man mit erweiterter Bedeutung des Ausdruckes Sättigung sagt, mit mässiger Sättigung; nach der WEBER'schen, in der Praxis freilich zu modificirenden Formel würde der höchste für ökonomischen Betrieb geeignete Sättigungswerth $\frac{2}{3}$ sein.

Berücksichtigung der Coërcitivkraft; remanenter Magnetismus. Die WEBER'sche Theorie wird bereits der einen von den beiden Differenzen (wenigstens in grossen Zügen) gerecht, welche zwischen den Annahmen der POISSON'schen Theorie und der Wirklichkeit bestehen, nämlich dem Umstande, dass die Magnetisirung zwar anfangs der magnetisirenden Kraft proportional ist, später aber langsamer wächst und den Sättigungswerth erreicht. Dagegen bleibt

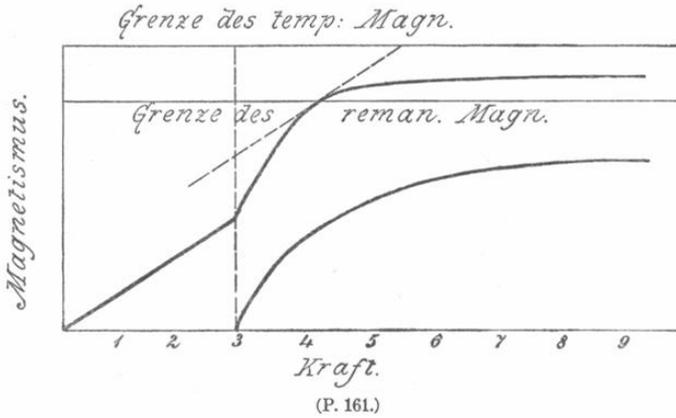
noch die Differenz bestehen, dass nach Aufhören jener Kraft der Magnetismus nach der Theorie vollständig, in Wahrheit aber nur theilweise verschwindet, während ein anderer Theil, der remanente Magnetismus (vergl. pag. 51) bestehen bleibt; eine Erscheinung, mit der, wie man schon von vornherein vermuthen kann, eine zweite im Zusammenhange steht, wonach die Curve des temporären Magnetismus auch durch die WEBER'sche Formel noch nicht richtig dargestellt wird, indem sie nämlich ausser dem ersten, proportional und dem letzten, langsamer steigenden Stück noch ein mittleres, rascher steigendes aufweist. Beiden Forderungen wird die MAXWELL'sche Theorie gerecht¹⁾. Nimmt man nämlich an, dass eine Molekel bei Ablenkungen β (d. h. $\alpha - \theta$), die kleiner als ein gewisser Werth β_0 sind, nach Aufhören der ablenkenden Kraft in die ursprüngliche Lage zurückkehrt, bei grösseren Ablenkungen dagegen nach dem Aufhören der Kraft nur um β_0 zurückgeht, dagegen die Ablenkung $\beta - \beta_0$ vermöge der Coercitivkraft (pag. 51) behält, und wenn man $D \sin \beta_0 = L$ setzt, so erhält man folgende Tafel der zusammengehörigen Werthe der magnetisirenden Kraft X , des temporären Magnetismus J und des remanenten J' .

X	J	J'
0	0	0
$< L$	$\frac{2}{3} mn \frac{X}{D}$	0
L	$\frac{2}{3} mn \frac{L}{D}$	0
$> L, < D$	$\frac{2}{3} mn \frac{X}{D} + mn \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2 - L^2}{D^2 - L^2}}\right)$	$mn \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)$
$> L, = D$	$\frac{2}{3} mn + \frac{1}{3} mn \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$mn \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2$
$> L, > D$	$mn \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right) + mn \left[\frac{D^2}{6X^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right) + \frac{X}{3D} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{L}{6X} \left(\frac{L}{X} \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} + \frac{L}{D} \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right)\right]$	$\frac{mn}{4} \left[1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)}\right]^2$
∞	mn	$\frac{mn}{4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2$

In Fig. 161 sind die Curven der temporären und der remanenten Magnetisirung, sowie die Asymptoten, denen sich beide Curven nähern, dargestellt, und zwar für $mn = J_{max} = 1000$, $L = 3$, $D = 5$. Die Curve des temporären Magnetismus hat zwei ausgezeichnete Punkte; in dem einen, bei $X = L$, hat die Curve ein scharfes Knie, das sich in der Wirklichkeit nicht wiederfindet, und das man, wie die Erfahrung fordert, in eine sanfte Einbuchtung verwandeln kann, wenn man annimmt, dass β_0 , also auch L für verschiedene Molekeln verschiedene Werthe hat, wobei sich dann gleichzeitig der plötzliche Anstieg der Curve

¹⁾ MAXWELL, Lehrb. d. El. u. d. Mag. 2, pag. 99.

des remanenten Magnetismus in einen sanfteren verwandelt; der zweite kritische Punkt der temporären Curve ist der, in welchem die Tangente an die Curve dem ersten, geradlinigen Curvenstück parallel verläuft, jenseits dieses Punktes wächst die Magnetisirung langsamer als der Proportionalität entsprechen würde.



Die Ordinate dieses Punktes ist hier nicht, wie bei WEBER, $\frac{2}{3}$ der Sättigungsordinate, sondern grösser; ihr Werth hängt ebenso wie der für das Knie von dem Grössenverhältniss von L und D ab. Das letztere gilt auch hinsichtlich des Bruchtheils,

den das Maximum des remanenten Magnetismus von dem Maximum des temporären ausmacht; nur ergibt sich das Paradoxon, dass jenes mindestens ein Viertel von diesem ausmachen muss, was bekanntlich nicht richtig ist.

Ganz neuerdings hat FÖPPL¹⁾ auf Grund der Anschauung der Kraftlinienströmung und ohne besondere Hypothesen zu Hilfe zu nehmen, den Unterschied zwischen den magnetisch weichen und harten Körpern, d. h. zwischen denen ohne und mit Coercitivkraft, mathematisch formulirt, und zwar durch die Gleichungen

$$\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z} = A_1, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial x} = A_2, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = A_3,$$

wo $U_1 U_2 U_3$ die Componenten der magnetischen Induction und $A_1 A_2 A_3$ die Componenten einer Grösse sind, die für die magnetische Härte charakteristisch und für absolut weiche Körper Null ist. Um zu quantitativen Ergebnissen zu gelangen, müsste man über diese Grösse besondere Annahmen machen; qualitativ aber ergeben sich die Erscheinungen des remanenten Magnetismus aus der obigen Theorie ohne weiteres, und es zeigt sich dabei u. a., dass der remanente Magnetismus von der Oberfläche in das Innere eines Magneten nicht absondern zunimmt, ein Ergebniss, das mit den bekannten JAMIN'schen Aetzversuchen²⁾ nur scheinbar in Widerspruch steht.

Weiterentwicklung der Molekulartheorie. Von verschiedenen Forschern ist in der neuesten Zeit die Molekulartheorie des Magnetismus weiter ausgebildet worden. Auf die Theorie von CHWOLSON³⁾ kann hier nur hingewiesen werden. Viel des Interessanten bietet die Theorie von RIGHI⁴⁾, die sich an die WEBER'sche anschliesst und durch zahlreiche Versuchsreihen gestützt wird.

¹⁾ FÖPPL, WIED. Ann. 48, pag. 252. 1893.

²⁾ JAMIN hat in den Compt. rend. (von Bd. 77 an) eine Vorstellung über das Eindringen des Magnetismus in das Eisen entwickelt und auf zahlreiche Weisen, z. B. durch Wegätzen der Oberflächenschicht, zu stützen versucht, welche viel des Interessanten bietet, sich aber doch nicht zu behaupten vermocht hat.

³⁾ CHWOLSON, POGG. Ann. Ergzb. 7, pag. 53 u. 535. 1876.

⁴⁾ RIGHI, Mem. di Bologna (4) 1, pag. 433. 1880.

Eigenartig und in mancher Hinsicht erfolgreich ist die Hypothese von STEFAN¹⁾ und W. SIEMENS²⁾, dass jede Eisenmolekel aus zwei entgegengesetzt gepaarten Elementarmagneten besteht, die zusammen frei drehbar sind, durch äussere Kräfte aber auch auseinander gedreht werden können. Bis in viele Einzelheiten ausgebildet sind ferner die Theorien von LAMONT³⁾, G. WIEDEMANN⁴⁾ und EWING⁵⁾, die (wie übrigens auch schon die von CHWOLSON) auf dem von WEBER nicht weiter verfolgten Gedanken (pag. 157) beruhen, die Beeinflussung jedes Elementarmagneten durch alle benachbarten zu ermitteln, wobei dann zugleich manche willkürliche Annahmen über Richtkraft, Reibungswiderstand u. s. w. wegfallen. Man untersucht nach EWING zunächst eine Gruppe von zwei, dann eine solche von vier Molekeln und geht schliesslich zu einem Gebilde regelmässig im Raume angeordneter Molekeln über. Diese Theorie, die von ihrem Urheber mit Hilfe zahlreicher drehbarer Magnetnadeln auch experimentell geprüft worden ist⁶⁾, macht die wesentlichsten Erscheinungen mindestens qualitativ verständlich. Es kann jedoch auf diese und andere Theorien hier nicht näher eingegangen werden.

AMPÈRE'sche Theorie der Molekularströme. Endlich sei schon hier wenigstens erwähnt, dass man, wie AMPÈRE gezeigt hat, die Molekularmagnete durch elektrische Ströme, welche die Molekeln umkreisen, ersetzen kann, auf die sich dann die Drehungshypothese ebenfalls anwenden lässt. Diese Ströme kreisen nämlich im unmagnetischen Zustande des Körpers, in welchem sie auch schon vorhanden sind, in Bahnen von allen beliebigen Richtungen, und der Akt des Magnetisirens besteht in der mehr oder weniger vollständigen Gleichrichtung dieser Ströme. Die meisten Betrachtungen der WEBER'schen, MAXWELL'schen und anderer Theorien lassen sich von den Molekularmagneten ohne weiteres auf die Molekularströme übertragen. Hierauf wird beim Elektromagnetismus zurückgekommen werden.

Experimentelle Untersuchungen.

Die auf dem Gebiete der magnetischen Induction angestellten überaus zahlreichen und mannigfaltigen experimentellen Untersuchungen haben theils den Zweck, die Theorie zu prüfen, theils den weiteren, die ziffermässigen Werthe der in ihr vorkommenden Grössen zu ermitteln. Um diese Aufgaben lösen zu können, müssen diejenigen Gesichtspunkte beachtet werden, die sich aus den obigen Ausführungen unmittelbar ergeben; insbesondere müssen solche Körperformen gewählt werden, auf welche sich die Theorie anwenden lässt. Dies gilt nicht von den zahllosen Untersuchungen über den Magnetismus mehr oder weniger kurzer und verschiedentlich geformter Stäbe, Untersuchungen, die durch die praktische Wichtigkeit, zum Theil aber auch durch die vermeintliche, inzwischen durch die Theorie nicht bestätigte Einfachheit dieser Körperform hervorgerufen wurden; diese Arbeiten, die mit unserer Theorie in keinem direkten Zusammenhange stehen, deren Bedeutung also eine rein praktische ist, sollen später in Kürze behandelt werden. Geeignet sind hingegen lange, dünne Stäbe, Ellipsoide und ringartig geschlossene Formen. Handelt es sich insbesondere darum, die Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Formen zu untersuchen, so

1) STEFAN, Wien. Ber. 69 (2), pag. 165. 1874.

2) W. SIEMENS, Ber. Berl. Ac. 1881 u. 1884; Wiss. Abh., pag. 334 u. 380.

3) LAMONT, Handb. d. Magn., Lpz. 1867, pag. 181.

4) G. WIEDEMANN, d. Lehre v. d. Elektrizität, Bd. 3 u. 4 (3. Aufl.).

5) EWING, Magn. Induction, pag. 277 ff. u. a. a. O.

6) EWING, Phil. mag. (5) 30, pag. 205. 1890.

wird man dafür sorgen müssen, dass bei den gewählten Dimensionsverhältnissen die Form, also im Wesentlichen der oben eingeführte Gestaltscoefficient ϵ auch wirklich einen erheblichen Einfluss ausübe, was z. B. bei langen Stäben und sehr gestreckten Ellipsoiden nicht der Fall sein wird, wohl aber bei Kugeln und gedrungenen Ellipsoiden; es sei in dieser Hinsicht auf eine Untersuchung von RIECKE¹⁾ verwiesen, in welcher die Bedingungen, unter denen sich die Theorie in wirklich empfindlicher Weise prüfen lässt, nach der angedeuteten Richtung erörtert werden. Genau umgekehrt wird die Wahl ausfallen müssen, wenn es sich, unter Zugrundelegung der bis zu einem gewissen Punkte als richtig zugegebenen Theorie, um die Bestimmung ihrer charakteristischen Grössen, also insbesondere von κ und μ handelt; diese Grössen haben mit der Körperform direkt nichts zu thun, hier ist das Material das in erster Linie entscheidende, und man muss hier solche Dimensionsverhältnisse wählen, bei denen dieser Einfluss beträchtlich ist. Man muss aber gleichzeitig solche Formen wählen, bei denen man die Bedingungen kennt, unter denen sie gleichförmig magnetisirt werden, bei denen man also z. B. weiss, dass sie durch eine gleichförmige äussere Kraft gleichförmig magnetisirt werden. — Diese zweite Forderung ist unerlässlich, weil nur für solche Formen die Versuche auch dann Werth behalten, wenn sie, im Gegensatz zur Theorie, ergeben, dass κ resp. μ keine Constante, sondern eine Function der wirkenden Kraft ist. Hiernach sind für den gedachten Zweck gestreckte Ellipsoide und Ringe am günstigsten.

Auf die Versuche zur Prüfung der Theorie braucht hier nicht näher eingegangen zu werden; soweit sie die Theorie bestätigen, bieten sie wenig Interesse dar; die Widersprüche aber bestehen im Wesentlichen eben in der Nichtconstanz von κ resp. μ , sowie in den Erscheinungen der Remanenz des Magnetismus, beides Punkte, die sich bei der Betrachtung der zur Messung von κ bestimmten Versuche ohnedies darbieten werden.

Messungsmethoden.

Die wichtigsten, zur Messung der Magnetisirung von Körpern in Anwendung gebrachten Methoden sind folgende:

1) Die magnetometrische Methode. Man lässt den Körper auf die Nadel eines Magnetometers wirken und vergleicht diese Wirkung mit der vom Erdmagnetismus oder einer anderen bekannten Kraft auf die Nadel ausgeübten Wirkung. Im Artikel »Magnetische Messungen« ist diese Methode bereits dargestellt worden; während es sich aber dort um das magnetische Moment des Körpers handelte, soll hier J (und daraus dann κ u. s. w.) ermittelt werden, und zwar nicht, wie dort für Stäbe, sondern für andere Körperformen; die Formeln werden also im Allgemeinen andere. Da Ringe nach aussen nicht wirken, wird es sich bei dieser Methode meist um Ellipsoide handeln, und man wird der Einfachheit halber Rotationsellipsoide nehmen. Sind a und c die Halbachsen in der äquatorialen und polaren Richtung, so ist das Volumen $\frac{4}{3}\pi a^2 c$, durch diesen Betrag muss man also — bei gleichförmiger Magnetisirung — das ganze Moment M dividiren, um J zu erhalten. Ferner sei H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und r die einigermaassen grosse Entfernung des Körpers von der Nadel, genauer gesagt und unter Annahme der zweiten Hauptlage, die Entfernung jedes der beiden Pole (pag. 48) von der Nadelmitte

¹⁾ RIECKE, WIED. Ann. 13, pag. 485. 1881.

(jeder Pol ist vom Mittelpunkte des Ellipsoids um $\frac{2}{3}c$ entfernt); endlich ϑ die Ablenkung der Nadel; dann ist

$$J = \frac{3r^3 H \tan \vartheta}{4\pi a^2 c}.$$

Man kann in manchen Fällen, nämlich bei sehr gestreckten Körpern, wie es lange Stäbe mit ellipsoïdisch abgerundeten Enden sind, mit Vortheil eine andere Lage des Körpers benutzen, die zu der sogen. unipolaren Methode führt; man stellt den Körper vertikal auf und bringt einen seiner Pole in die horizontale Nadelebene; es ist dann, wenn r die Entfernung dieses, r' die des anderen Poles von der Nadel ist:

$$J = \frac{r^2 H \tan \vartheta}{\pi a^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r'} \right)^3 \right]} = \frac{r^2}{\pi a^2} H \tan \vartheta,$$

letzteres angenähert, wenn r' gegen r vernachlässigt werden kann. Um sodann κ zu finden, muss man auch die magnetisirende Kraft R kennen, zu welchem Zwecke es am einfachsten ist, auf die Differenzgleichung (24) zurückzugreifen. Die darin vorkommende äussere Kraft R_0 geht meist von einer stromdurchflossenen, den Eisenkörper umgebenden Drahtspule aus und wird durch das Produkt der Stromstärke in die Zahl der auf 1 cm Axenlänge entfallenden Drahtwindungen gemessen (s. Art. Elektromagnetismus); die Wirkung der Spule selbst auf das Magnetometer muss natürlich in Abzug gebracht werden. ϵ lässt sich für ein Rotationsellipsoid von bekannter Excentricität aus der Formel (38) berechnen resp. aus der Tabelle auf pag. 152 ($N = \epsilon$) entnehmen, J endlich ist bereits bekannt. Nunmehr ergibt sich aus Gleichung (20a) der Werth der Susceptibilität κ , aus (21) die »magnetische Induction« U und aus (22) die Permeabilität μ . Hinsichtlich der zweckmässigen Einrichtung der Versuche und weiterer Einzelheiten sei auf die Lehrbücher von EWING (pag. 38 ff.) und von MASCART und JOUBERT (II, pag. 577 ff.) verwiesen, und zwar auch für die übrigen Methoden.

2) Methode der Inductionsströme oder ballistische Methode. Der Körper wird, ausser mit der zur Magnetisirung dienenden Spule, überall oder an einer Stelle noch mit einer zweiten, zum Unterschied als secundäre bezeichneten Spule umgeben, letztere ist mit einem Galvanometer mit langsam schwingender Nadel verbunden. Zieht man den Körper heraus oder steckt man ihn herein, oder schliesst oder öffnet oder commutirt man den Strom in der magnetisirenden Spule, oder ändert man auch nur die Lage des Körpers oder die Stärke des magnetisirenden Stromes, kurzum bei jeder Aenderung des magnetischen Zustandes des Körpers tritt (s. Art. »Elektrische Induction«) in der secundären Spule ein Inductionsstrom und im Galvanometer ein Nadelausschlag auf, die dem Magnetismus oder seiner Aenderung proportional sind. Erforderlich ist dabei die Beobachtung einiger Vorsichtsmaassregeln, besonders die Verhinderung des z. B. beim plötzlichen Schliessen oder Oeffnen des Stromes in der Spule sowohl wie im Eisen entstehenden Inductionsströme; man thut also gut, alle Strom- und Ortsänderungen allmählich vorzunehmen. Um statt des proportionalen ein absolutes Maass zu erhalten, muss man sich Kenntniss von dem Ausschlage verschaffen, den eine bekannte magnetische Kraft erzeugt, z. B. der Erdmagnetismus. Zu diesem Zwecke schaltet man in den Kreis der secundären Spule einen Erdinductor ein und dreht ihn rasch um eine z. B. vertikale Axe (vergl. Art. Magnetische Messungen, pag. 90). Sind die Ausschläge bei dem Hauptversuch und bei der Drehung des Erdinductors δ und δ_0 , die Windungszahlen der secundären Spule und des Erdinductors n und n_0 , H die Compo-

nente des Erdmagnetismus, welche benutzt wurde, und F die Windungsfläche des Erdinductors, so hat man zunächst

$$Q = \frac{2n_0FH\delta}{n\delta_0},$$

wo Q die »magnetische Induction« für den ganzen Querschnitt, jedoch für 1 *cm* der Länge des Körpers, bedeutet; um hieraus die »magnetische Induction« U pro *ccm* zu finden, braucht man, wenn die secundäre Spule dicht auf dem Körper sitzt, nur mit dessen Querschnitt q zu dividiren, anderenfalls muss man an Q , ehe man durch q dividirt, eine Correction anbringen, die aber meist klein ist. Aus U ergibt sich dann μ und, rückwärts berechnet, J und x .

Statt des Erdmagnetismus kann man auch einen elektrischen Strom zum Vergleichsobjekt wählen und hat alsdann

$$Q = 4\pi i n' q' \cdot \frac{\delta}{\delta'},$$

wo i der Strom in einer Spule ist, dessen plötzliche Schliessung oder Oeffnung den Ausschlag δ' erzeugt, q' der Querschnitt und n' die Windungszahl pro *qcm* für diese Spule ist. Die Methode hat vor der erdmagnetischen erstens den Vortheil, dass sie die Kenntniss des augenblicklichen und lokalen Werthes des Erdmagnetismus erspart. Zweitens aber ist sie einfacher und macht einen eigenen Versuch überhaupt unnöthig, wenn man als Spule, die den Vergleichsstrom erhalten soll, die Magnetisirungsspule nach Entfernung des Eisenkörpers benutzt; den betreffenden Versuch muss man dann nämlich ohnehin anstellen, um die Wirkung des zur Magnetisirung erforderlichen Stromschlusses abziehen zu können. Im Uebrigen sei auf das im Art. »Magnetische Messungen«, pag. 95 Gesagte verwiesen. Nur sei noch bemerkt, dass die Methode auf Ringe nicht anwendbar ist, weil sich hier der Eisenkörper nicht abziehen lässt; man ist also hier auf die Vergleichung mit dem Erdmagnetismus angewiesen.

Besonders wichtig ist die Inductionsmethode für Ringe, weil hier die magnetometrische Methode nicht anwendbar ist. Dabei ist sie nicht auf eigentliche Ringe beschränkt, sondern kann auch auf geradlinige Stäbe ausgedehnt werden, und zwar mittelst der von J. HOPKINSON¹⁾ angegebenen Einrichtung des »Schlussjoches«. Die Enden des Stabes stecken hierbei in einem Rahmen von kräftigen Dimensionen und hoher Permeabilität, also am besten aus weichem, ausgeglühtem Schmiedeeisen. Durch dieses Joch werden die von den Stabenden ausgehenden Kraftlinien so gut wie vollständig aufgenommen und damit die entmagnetisirende Gegenwirkung dieser Enden aufgehoben, so dass man ihn als unendlich lang betrachten und die dann gültigen einfachen Formeln anwenden kann; vorausgesetzt ist dabei, dass ihn die Magnetisirungsspule in seiner ganzen freien Länge bedeckt. Eine Modifikation dieser Einrichtung besteht darin, dass man zwei aus dem zu untersuchenden Material hergestellte Stäbe parallel legt, beiderseits durch kräftige Anker schliesst und in die sie umgebenden Magnetisirungsspulen gleiche aber entgegengesetzte Ströme schickt.

3) Isthmus-Methode. STEFAN³⁾ hat gezeigt, dass man die Kraft, welche zwischen den zugekehrten Polen eines  förmigen RUHKORFF'schen Elektromagneten (vergl. pag. 54) herrscht, beträchtlich steigern kann, wenn man statt

1) HOPKINSON, Trans. R. Soc. 1885, pag. 455.

3) STEFAN, WIED. Ann. 38, pag. 440. 1889. Siehe daselbst auch den Einfluss von Durchbohrungen. — Versuche hierüber haben u. A. CZERMAK u. HAUSMANINGER angestellt. Wien. Ber. 98 (2), pag. 1142—56. 1889.

ebener Endflächen gestutzte Kegel benutzt, und zwar am besten von einem Leitlinienwinkel von $54^{\circ}44'$ ($\text{arc tang } \sqrt{2}$); diese Kegel wirken, wie man leicht ein-
sieht, wie Linsen in der Optik. Im Mittelpunkte des Feldes wird nämlich, wenn a der Abstand, r der Radius der Endflächen ist, im ersten Falle

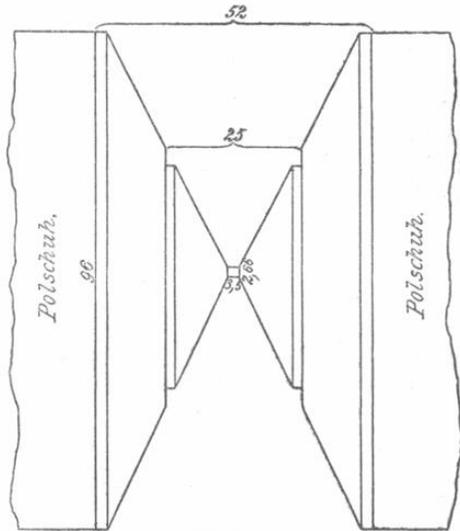
$$R = 4\pi\mu \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right),$$

also höchstens $4\pi\mu$, im zweiten dagegen

$$R = 4\pi\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log \frac{r}{a\sqrt{2}} \right),$$

also mit abnehmendem a/r beliebig gross, und z. B. für $a=r/20$ schon $1.442 \cdot 4\pi\mu$.

Hierauf beruht die von EWING und LOW in die Praxis eingeführte Isthmus-Methode¹⁾. Um dabei den doppelten Zweck zu erreichen, dass in der Mitte des Feldes die Magnetisirung sehr kräftig und doch auch möglichst gleichförmig ausfalle, setzt man an die breiten Polflächen conische Stücke an und verbindet ihre möglichst kleinen Endquerstücke durch das zu untersuchende Stäbchen; oder noch besser, man giebt dem zu untersuchenden Körper selbst die Form einer Spule, d. h. eines Doppelkegels mit möglichst schlankem und kurzem Mittelstück. In Fig. 162 ist ein solches von EWING construirtes System in $\frac{2}{3}$ der natürlichen Grösse und mit Angabe der wahren Dimensionen in *mm* dargestellt. Die Einzelheiten und die Anpassung an die ballistische Methode findet man in EWING's Buch.



(P. 162.)

4) Zugkraft-Methode. Diese Methode kann man als eine wissenschaftlichere Gestaltung der altbekannten Tragkraft-Methoden bezeichnen. Die Schwierigkeit besteht darin, die Beziehung zwischen J resp. U und Z (Zugkraft) zu ermitteln, deren Form von den Umständen abhängen wird. Am einfachsten ist der Fall eines ringförmig geschlossenen Eisenkörpers im gleichförmigen Felde; denkt man sich diesen Ring in zwei Theile zerschnitten und die Schnittflächen sich berührend, so kann man jene Beziehung am einfachsten in der Form

$$Z = \frac{U^2}{8\pi}$$

darstellen. Die Methode hat eine Reihe von hier nicht näher zu erörternden Bedenken; am besten scheinen diese in dem neuesten derartigen Apparate, der sogenannten magnetischen Waage von DU BOIS²⁾ beseitigt zu sein, die sich für rasche Bestimmungen von annähernder Genauigkeit sehr eignen dürfte. Der Probekörper mit den Backen, zwischen die er geklemmt ist, bildet hier den einen, ein darüber schwebendes Ankerjoch den anderen Theil des Ringes;

¹⁾ EWING u. LOW, Trans. R. Soc. 1889 (A), pag. 221.

²⁾ DU BOIS, El. Zeitschr. 1892, pag. 579. — Vergl. ferner auch das Buch von EWING (deutsche Ausg.), pag. 332.

letzterer dient zugleich als Wagebalken mit ungleichen Hebelarmen, die Zugkraft wird durch Laufgewichte compensirt, und an der quadratisch getheilten Scala kann man die Magnetisirung ablesen.

Für die auf gerade Drähte wirkende Zugkraft hat u. A. ADLER¹⁾ Formeln angegeben und mit den experimentellen Bestimmungen QUINCKE's in ziemlicher Uebereinstimmung gefunden (vergl. hierüber auch weiter unten im Capitel »Beziehungen des Magnetismus zur Elasticität«).

5) Optische Methode. Sie beruht auf der KERR'schen Erscheinung (s. w. u.), wonach die Polarisationssebene des Lichtes bei der Reflexion von einem Magneten um einen mit der Intensität der Magnetisirung proportionalen Winkel, also um $D = KJ$ gedreht wird; DU BOIS²⁾ bestimmte den Werth von K und begründete darauf die optische Methode zur Messung von J . Auch diese Methode leistet besonders für hohe Feldstärken vortreffliche Dienste.

Ergebnisse der Messungen.

Die nach den obigen Methoden ausgeführten Messungen haben eine so grosse Menge von Ergebnissen geliefert, dass hier nur das Wichtigste angeführt werden kann. Die Ergebnisse bestehen theils in Zahlenwerthen für die Grössen J und U , κ und μ , theils in der Darstellung dieser Grössen als Functionen der wirksamen Kraft oder als Functionen von einander, theils in besonderen Erscheinungen und Beziehungen, die der Verlauf dieser Functionen je nach den äusseren Umständen darbietet; dabei tritt eine weitere Mannigfaltigkeit dadurch ein, dass zu den temporären Werthen von J und U noch deren remanente Werthe J' und U' hinzukommen, die ihrerseits wieder zu jenen und zu den »verschwindenden« Werthen, d. h. den Differenzen $J - J'$ und $U - U'$ in interessanten Beziehungen stehen.

Verschiedene Functionsdarstellungen. Das unmittelbare Beobachtungsmaterial besteht in Tabellen, deren erste Spalte die äussere Kraft R_0 enthält, während auf die übrigen Spalten sich die zugehörigen Werthe der wirklichen Kraft R , der Intensität J , der Induction U , der Susceptibilität κ , der Permeabilität μ , der Remanenz- und Verschwindungswerthe von J und U und event. noch anderer Grössen, vertheilen. Anschaulicher als diese Tabellen sind aber die aus ihnen construirten graphischen Darstellungen, die denn auch in der Wissenschaft wie in der Praxis vorwiegend benutzt werden. Es fragt sich nur, was man dabei als Abscisse und was als Ordinate wählen solle, und diese Wahl ist von verschiedenen Forschern, z. B. von W. WEBER, MAXWELL, ROWLAND u. s. w. in verschiedenem Sinne getroffen worden. Das folgende Tableau giebt hiervon eine Uebersicht:

	Abscisse	Ordinate		Abscisse	Ordinate
I. R_0	{	1) R		II. R	{
		2) J			6) J
		3) U			7) U
		4) κ			8) κ
		5) μ			9) μ
				III. J	10) κ
				IV. U	11) μ

Die Darstellung I. ist die nächstliegende, II. ist aber dem inneren Zusammenhange entsprechender (in vielen Fällen, z. B. bei Ringen und langen Stäben fallen offenbar die Darstellungen I. und II. zusammen), in noch höherem Maasse vielleicht ist das bei III. und IV. der Fall. Rechnet man nun noch die Curven

¹⁾ G. ADLER, Wien. Ber. 100, pag. 897. 1891.

²⁾ DU BOIS, Phil. Mag. (5) 29, pag. 263 u. 293. 1890.

für J' und U' , sowie für $J - J'$ und $U - U'$ hinzu, so sieht man, welche Mannigfaltigkeit sich hier ergibt.

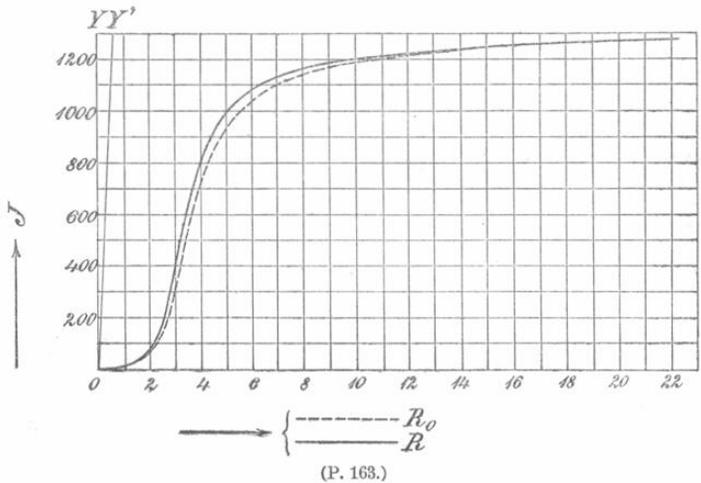
Beispiele für die wichtigsten Fälle.

1) Langer, weicher Eisendraht. Die Länge betrug 30·5 cm, die Dicke 0·077 cm, jene also das 400fache dieser, und folglich die Correctionsgrösse ϵ (Gleichung 24), durch die man R erhält, nach der Tabelle auf pag. 152 0·00045; der Draht wurde vor dem Versuche ausgeglüht und langsam gekühlt; benutzt wurde die magnetometrische Unipolar-Methode, die magnetisierende Kraft wurde langsam von Null an gesteigert¹⁾.

R_0	R	\mathcal{F}	U	α	μ	R_0	R	\mathcal{F}	U	α	μ
0	0	0	0	—	—	5·63	5·17	1009	12680	195	2450
0·32	0·32	3	40	9	120	6·69	6·20	1086	13640	175	2200
0·85	0·84	13	170	15	200	8·46	7·94	1155	14510	145	1830
1·38	1·37	33	420	24	310	10·23	9·79	1192	14980	122	1530
2·18	2·14	93	1170	43	550	12·11	11·57	1212	15230	105	1320
2·80	2·67	295	3710	110	1390	15·61	15·06	1238	15570	82	1030
3·50	3·24	581	7300	179	2250	20·32	19·76	1255	15780	64	800
4·21	3·89	793	9970	204	2560	22·27	21·70	1262	15870	58	730
4·92	4·50	926	11640	206	2590						

Wie man sieht, wachsen J und U erst langsam, dann schneller und schliesslich wieder immer langsamer, entsprechend ist der Verlauf der gestrichelten Curve

in Fig. 163, die J als Function von R_0 darstellt, die Curve für U würde vom Maassstab abgesehen fast genau dieselbe sein, da für, gegenüber R_0 , grosse J -Werthe, wie sie hier auftreten, nach Gleichung (21) U das 4π -fache von J ist. Wichtiger ist es, J auch als Function der wahren Kraft



(P. 163.)

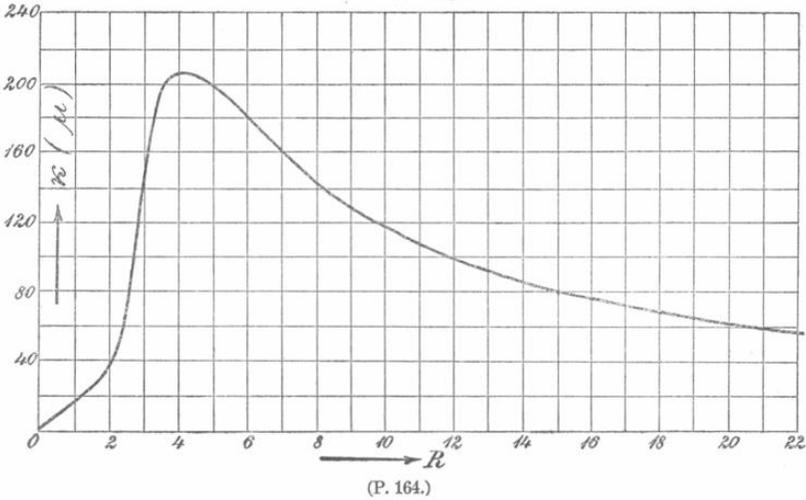
R darzustellen, und Lord RAYLEIGH²⁾ hat gezeigt, dass man diese neue Darstellung aus der alten durch eine einfache Scherungsconstruction erhält; zieht man nämlich durch den Anfangspunkt eine gerade Linie Y' , welche die Ordinate $J = 1000$ bei der Abscisse 0·45 schneidet und denkt man an die Beziehung $R = R_0 - 0·00045 J$, so sieht man ein, dass die alte Curve bei Rechnung der Abscissen von der neuen Y' -Axe die neue Beziehung darstellt; will man von der alten Y -Axe rechnen, so muss man also jeden Punkt der Curve um das 0·00045 fache seiner Ordinate nach links rücken und erhält so die ausgezogene Curve, die in diesem Falle nur wenig, in anderen aber sehr stark von der

¹⁾ Das Beispiel entstammt dem Buche von EWING, pag. 52 u. 55. Ähnliche Tabellen für lange Drähte haben zahlreiche andere Physiker mitgetheilt.

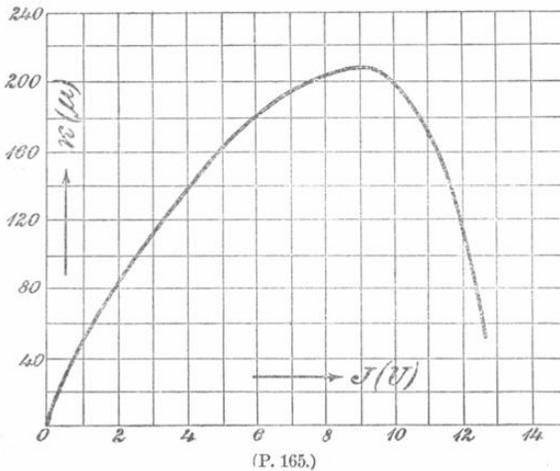
²⁾ Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 22, pag. 175. 1886.

gestrichelten abweicht. Die Abnahme der Steigung im letzten Curventheil ist wohl zuerst von JOULE, ihre Zunahme im ersten Curventheil von LENZ, G. WIEDEMANN, DUB u. A. erkannt worden.

In einfacher und demonstrativer Weise kann man die anfangs schnellere und schliesslich langsamere Zunahme des Magnetismus in Vervollständigung



einer Angabe von KOESEN¹⁾ nachweisen, indem man den Strom ausser der magnetisirenden, den Eisenkörper enthaltenden Spirale noch die Rolle einer Busssole durchlaufen lässt und Spirale mit Kern so aufstellt, dass bei geringer



Stromstärke die Bussolen- nadel auf Null steht; bei wachsender Stromstärke wird dann die Nadel abgelenkt, bei weiter wachsender kehrt sie auf Null zurück und bei grossen Stromstärken geht sie auf die entgegengesetzte Seite.

Stellt man zweitens α (oder, was bis auf den Maassstab dasselbe ist, μ) als Function von R dar, so erhält man Fig. 164, also eine Curve, die Anfangs sanft,

dann nach einem ziemlich scharfen Knie steil ansteigt, ein Maximum erreicht dann abfällt und sich allmählich immer langsamer der Abscissenaxe nähert.

Noch anders ist der Verlauf der Curve in Fig. 165, welche α als Function von J (event. auch μ als Function von U) darstellt; sie steigt steil an, wird allmählich sanfter, erreicht ein Maximum und fällt dann sehr steil ab, so dass man versucht ist, sie bis zur Abscissenaxe fortzusetzen; da aber unmöglich α geradezu Null werden kann, so muss man vermuthen, dass die Curve für grössere J ähnlich wie die Curve in Fig. 164 umbiegt, die concave Seite nach oben kehrt

¹⁾ KOESEN, POGG. Ann. 85, pag. 159. 1852.

und nur asymptotisch der Axe sich nähert — eine zuerst von FROMME¹⁾ ausgesprochene Vermuthung, die durch Versuche in starken Feldern bestätigt worden ist.

2) Ring aus ausgeglühtem Schmiedeeisen. Es wurde die ballistische Methode angewandt, der Eisenquerschnitt betrug 0.0483 *qcm*, der Durchmesser des Ringes 10 *cm*, die Magnetisirungsspule hatte 474, die secundäre Spule 167 Windungen, verglichen wurde mit dem Erdmagnetismus; R_0 und R sind hier identisch.

R	\mathcal{F}	U	α	μ	R	\mathcal{F}	U	α	μ
0.13	2	26	15	200	4.01	509	6400	127	1600
0.40	7	84	17	210	5.86	791	9940	135	1700
1.31	25	320	19	245	7.20	899	11300	125	1570
1.89	56	705	30	370	9.14	989	12440	108	1360
2.78	203	2560	73	920					

Der Verlauf der Curven ist ganz ähnlich wie bei dem vorigen Beispiel. Versuche an Ringen sind insbesondere von STOLETOW²⁾, ROWLAND³⁾, BAUR⁴⁾, EWING⁵⁾, v. HOFE⁶⁾, H. LEHMANN⁷⁾ ausgeführt worden. Dabei hat v. HOFE den Einfluss der Form des Ringquerschnittes studirt (Quadrat, flaches Rechteck, hohes Rechteck) und, zumal die Differenz des äusseren und inneren Ringradius recht gross, die Abweichung von den Voraussetzungen der KIRCHHOFF'schen Theorie (pag. 154) also beträchtlich war, naturgemäss Verschiedenheiten in den Werthen von α gefunden — Verschiedenheiten, die jedoch ziemlich geringfügig sind. Ferner haben OBERBECK⁸⁾ und später v. ETTINGSHAUSEN⁹⁾ Ringe ungleichmässig, d. h. durch eine nur einen Theil desselben bedeckende Spirale magnetisirt. Jener fand dabei zwischen den Werthen der Magnetisirung der verschiedenen Stellen des Ringes nur sehr kleine Differenzen (wenige Procent), dieser beträchtlich grössere (Verhältniss der Extreme bei kleinen Kräften 15, bei grösseren bis 2 abnehmend), sodass hier ein noch aufzuklärender Widerspruch bestehen bleibt; letzterer prüfte auch die BOLTZMANN'sche Theorie (s. ob.) und fand wenigstens qualitative Uebereinstimmung. Auch auf Arbeiten von HAMMERL¹⁰⁾ ist hier hinzuweisen.

3) Versuche mit Ellipsoiden. Es sei in dieser Hinsicht lediglich auf die Versuche von v. QUINTUS ICIUS¹¹⁾, FROMME¹²⁾, RIECKE¹³⁾, HOLZ¹⁴⁾, RÖSSLER¹⁵⁾ u. A. verwiesen.

1) FROMME, Gött. Nachr. 1875, pag. 500.

2) STOLETOW, POGG. Ann. 146, pag. 442. 1872.

3) ROWLAND, Phil. Mag. (4), 46, pag. 140. 1878.

4) BAUR, WIED. Ann. 11, pag. 394. 1880.

5) EWING, a. a. O.

6) v. HOFE, WIED. Ann. 37, pag. 482. 1889.

7) H. LEHMANN, WIED. Ann. 38, pag. 406. 1893. (Versuche mit dem geschlossenen und dem geschlitzten Ringe, vergl. über letzteren ob. pag. 155 u. w. u. pag. 181).

8) OBERBECK, Ueb. d. Fortpflanzung d. magn. Induction im weichen Eisen. Halle 1878.

9) v. ETTINGSHAUSEN, WIED. Ann. 8, pag. 554. 1879.

10) HAMMERL, El. Zeitschr. 1885, pag. 378 u. 474.

11) v. QUINTUS ICIUS, POGG. Ann. 121, pag. 125. 1864. Vergl. auch STOLETOW, POGG. Ann. 146, pag. 439. 1872.

12) FROMME, POGG. Ann. 155, pag. 305. 1875; Ergzbd. 7, pag. 390. 1876. — Für die Kugel vergl. FROMME, D. Magnetisirungsfuction e. Kugel aus weichem Eisen. Cassel 1874; POGG. Ann. 152, pag. 627. 1874.

13) RIECKE, POGG. Ann. 141, pag. 453. 1870; 149, pag. 433. 1873.

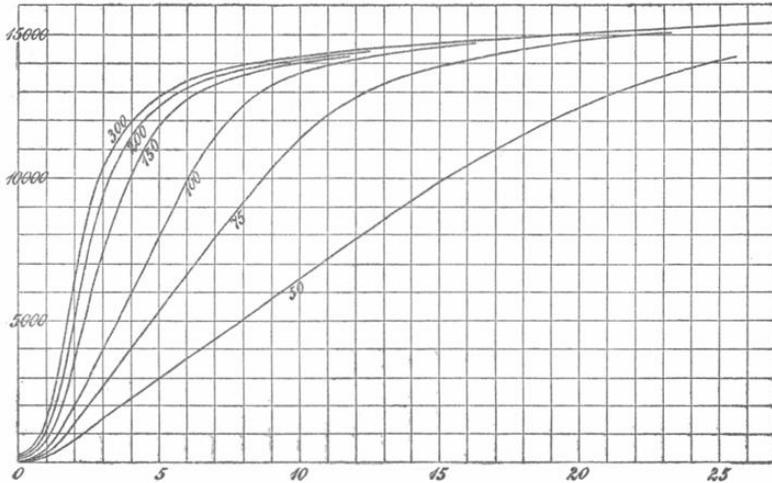
14) L. A. HOLZ, POGG. Ann. Ergzbd. 8, pag. 353. 1876.

15) RÖSSLER, Unt. ü. d. Magn. durch sehr kleine u. durch sehr grosse Kräfte, In.-Diss. Zür. 1892.

4) Auch auf die in mancher Hinsicht interessanten Versuche an Röhren kann hier nur hingewiesen werden¹⁾.

5) An elliptischen (und zum Vergleiche auch an rechteckigen) Platten hat C. LA ROCHE²⁾ Messungen angestellt und interessante Beziehungen zu den Kräften und Dimensionen gefunden; der Gedanke, die scharfkantigen Platten auch nur annähernd mit Ellipsoiden zu identificiren und die Theorie auf sie anzuwenden, muss jedoch als verfehlt bezeichnet werden.

Curvensystem für Drähte verschiedener Länge. Der Einfluss der bei verschieden langen Körpern verschieden starken entmagnetisirenden Kraft lässt sich sehr anschaulich in folgender Weise darstellen. Es ist nämlich ein-



(P. 166.)

leuchtend, dass, wenn man J als Function von R darstellt, man für Körper, z. B. Drähte der verschiedensten Länge die nämliche Curve erhält (weil eben R bereits die mit Rücksicht auf die entmagnetisirende Kraft der Enden berechnete wahre magnetisirende Kraft ist), dass dagegen die Darstellung von J als Function von R_0 zu verschiedenen Curven führen muss, und zwar zu Curven, die sich der erstgedachten Curve mehr und mehr nähern, je länger der Draht ist (vergl. Fig. 163). In Fig. 166 ist nun ein System von $J:R_0$ Curven nach Versuchen von EWING wiedergegeben, sie entsprechen einem und demselben Draht, der durch Abschneiden allmählich die beigesetzten Längen in Vielfachen des Durchmessers erhielt; das Interessante dabei ist, dass, je stärker die Kraft ist, desto weniger die Gegenwirkung hervortritt, so dass also die Curven zwar derselben Grenze zustreben, aber sehr verschieden stark gewölbt sind, die für den längsten Draht am meisten, die für den kürzesten fast gar nicht.

Verhalten gegen schwache Kräfte. Die oben mitgetheilten Curven könnten den Eindruck erwecken, als ob mit abnehmender Kraft auch α immer weiter abnähme und schliesslich für $R = 0$ auch $\alpha = 0$ würde. Zahlreiche Untersuchungen, besonders von BAUR³⁾, Lord RAYLEIGH⁴⁾ u. A. haben jedoch das

¹⁾ Vergl. z. B. HERWIG, POGG. Ann. 156, pag. 437. 1875. — SIEMENS, Berl. Ber. 1881, Juni; Wiss. Abh., pag. 334.

²⁾ C. LA ROCHE, WIED. Ann. 35, pag. 168. 1888.

³⁾ BAUR, WIED. Ann. 11, pag. 399. 1880.

⁴⁾ Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 23, pag. 225. 1887.

Gegentheil erwiesen, d. h. es giebt einen Grenzwert von α für $R = 0$. Schon aus der obigen Tabelle für den Ring (pag. 169) geht hervor, dass dort dieser Grenzwert nicht weit unter 15 liegt; auf noch kleinere Kräfte bezieht sich die folgende, den Versuchen BAUR's entnommene Tabelle:

R	\mathcal{J}	α	R	\mathcal{J}	α
0.0158	0.263	16.5	0.1319	3.815	28.9
0.0308	0.547	17.6	0.230	9.156	39.8
0.0708	1.633	23.0	0.384	22.487	58.6

Hiernach ist α sehr gut als lineare Function von R darzustellen, und zwar wird

$$\alpha = 14.5 + 110 R$$

$$\mathcal{J} = 14.5 R + 110 R^2$$

Diese Formeln, nur mit anderen Constanten für andere Eisensorten, sind von anderen Beobachtern wiedergefunden worden, Lord RAYLEIGH z. B. erhielt für einen (wesentlich härteren) Draht

$$\alpha = 6.4 + 5.1 R$$

$$\mathcal{J} = 6.4 R + 5.1 R^2;$$

natürlich darf man sie nur bis zu einem gewissen, immer noch ziemlich kleinen Werthe von R (bei Lord RAYLEIGH z. B. bis zu $R = 1.2$) anwenden. Für ganz besonders kleine R wird nach diesen Formeln α constant, \mathcal{J} mit R proportional, und in der That hat Lord RAYLEIGH bei seinem Versuchsdrahte bis zu $R = 0.04$ keine merkliche Zunahme von α gefunden. Im Gegensatze hierzu schliesst RÖSSLER aus seinen Versuchen (a. a. O.), dass für noch so kleine Kräfte das Moment schon schneller als die Kraft wachse.

Verhalten gegen starke Kräfte. Von gleichem Interesse ist das andere Extrem, die Magnetisirung durch sehr hohe Kräfte, und es fragt sich, welche Werthe von \mathcal{J} und U überhaupt erreichbar sind. Für U wird dies eine lediglich äussere Frage sein, d. h. davon abhängen, wie starke Kräfte man herzustellen vermag, da nach Gleichung (21) U den Bestandtheil R enthält, also mit diesem unbegrenzt wächst; \mathcal{J} dagegen kann sehr wohl einen in den Vorgängen resp. in der Natur des Materials beruhenden Grenzwert haben, wenn nur in Gleichung (20) bei immer weiterer Steigerung von R die Grösse α in gleichem Verhältniss abnimmt. Versuche mit der Isthmismethode haben dies in der That ergeben, wie z. B. folgende Zahlen beweisen:

R	\mathcal{J}	U	α	μ
3630	1680	24700	0.46	6.80
6680	1670	27610	0.25	4.13
9500	1650	30200	0.17	3.18
10360	1630	30830	0.16	2.98
11180	1620	31560	0.15	2.82

Man sieht also, dass zwar U noch weiter wächst, \mathcal{J} hingegen constant geworden ist (die kleine Abnahme rührt davon her, dass bei der Isthmismethode nicht genau das wahre R gemessen wird); ferner dass α und μ , die für sehr kleine Kräfte etwa 15 resp. 200, für mittlere aber im günstigsten Falle 250 resp. 3000 betragen, für die hier vorliegenden colossalen Kräfte bis auf 0.15 resp. 3 heruntergegangen sind. Für das Maximum von \mathcal{J} kommt in Betracht, dass die betr. Curve (vergl. ob. pag. 168) zuletzt nach unten convex wird. Die

äussersten Werthe, die bisher von EWING und LOW¹⁾ erreicht worden sind, sind folgende:

R	\mathcal{F}	U	α	μ
24500	1660	45350	0.07	1.85

Der Werth von J ist nicht wesentlich höher als er schon bei älteren Untersuchungen, z. B. v. WALTENHOFEN's und FROMME's, erreicht worden war; auch RÖSSLER findet als Maximum von J etwa 1700. Es scheint hiernach, dass das grösste magnetische Moment, dessen die Volumeneinheit Eisen von der günstigsten Sorte fähig ist, rund durch die Zahl 1700 ausgedrückt wird, das grösste Moment der Gewichtseinheit also, der sogen. spezifische Magnetismus, durch die Zahl 230. Dieser Grenzwert wird nach RÖSSLER u. A. schon bei Kräften von 800—900 Einheiten im Wesentlichen erreicht. Die »magnetische Induction« andererseits ist bisher bis auf 45000 getrieben worden, würde sich aber mit noch gewaltigeren Elektromagneten jedenfalls noch weiter steigern lassen.

Remanenz. Wenn man bei einer Versuchsreihe, bei der man, wie oben, wachsende Kräfte auf einen Eisenkörper einwirken lässt, zwischen je zwei Versuchen die Kraft vollständig aufhebt, so kann man die schon früher (pag. 159) erwähnte Erscheinung der Remanenz oder des remanenten Magnetismus messend verfolgen und sich neben der Curve für J eine zweite für den remanenten Magnetismus J' verschaffen. Als Beispiel diene folgende, einen langen, weichen Eisendraht betreffende Tabelle²⁾:

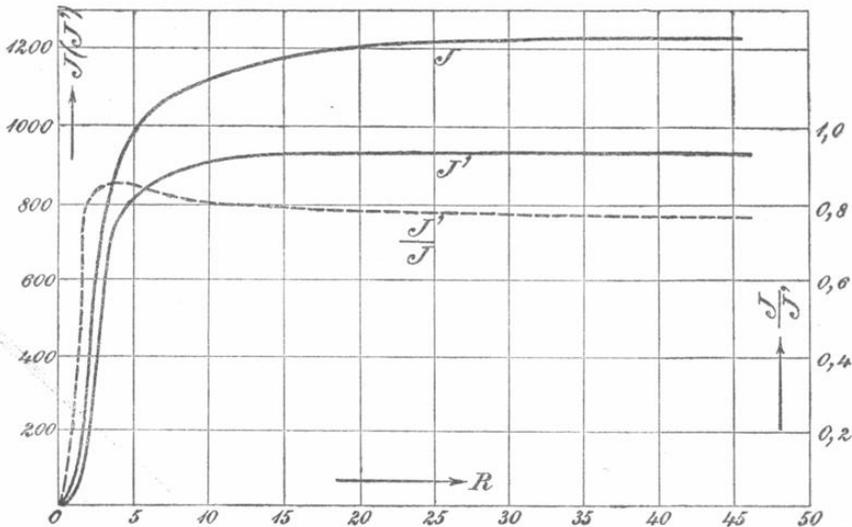
R	\mathcal{F}	\mathcal{F}'	$\mathcal{F}' : \mathcal{F}$	R	\mathcal{F}	\mathcal{F}'	$\mathcal{F}' : \mathcal{F}$
0.42	16	3.9	0.24	6.46	1050	864	0.82
0.70	33	9.9	0.30	8.64	1110	897	0.81
1.16	91	46	0.50	10.26	1130	910	0.80
1.44	195	133	0.68	11.91	1150	913	0.80
1.76	364	283	0.78	17.50	1190	929	0.79
2.14	507	418	0.82	23.61	1195	929	0.78
2.51	614	513	0.84	35.71	1230	933	0.76
2.88	702	598	0.85	45.51	1230	933	0.76
3.58	842	711	0.85				
5.02	984	832	0.84				

Wie man aus Fig. 167 ersieht, nimmt die Curve für J' einen ganz ähnlichen Verlauf wie die Curve für J , unterscheidet sich aber von der MAXWELL'schen theoretischen J' -Curve in ihrem ersten Theile sehr wesentlich, indem sie gleich vom Nullpunkte aus in die Höhe steigt, d. h. schon die kleinste magnetisierende Kraft hinterlässt remanenten Magnetismus — eine Thatsache, die freilich noch gegenwärtig von manchen Seiten bestritten wird und, da es sich hier um eine Frage der Empfindlichkeit des Messinstrumentes handelt, in ihrer äussersten Consequenz wohl auch controvers bleiben wird (s. w. u.). Man sieht übrigens ein, dass diese Controverse mit der oben (pag. 171) erwähnten Proportionalität oder Nichtproportionalität von J mit R für sehr kleine R innig zusammenhängt. Jedenfalls ist für kleine Kräfte J' sehr klein, wächst dann schneller, dann wieder langsamer, um sich schliesslich, und zwar, wie man sieht, rascher als J der Sättigung zu nähern; und zwar entsprechen den drei Theilen der J -Curve die

¹⁾ EWING u. LOW, Trans. R. Soc. 180, pag. 221. 1889, u. Magn. Ind., pag. 137, 143. In einer Reihe geht \mathcal{F} bis 1730 hinauf; diese Reihe erscheint aber wegen der Schwankungen der Werthe verdächtig.

²⁾ EWING, Magn. Induction, pag. 291.

nämlichen der J' -Curve. Wie hoch sich die Curve erhebt und wie gross das Maximum von J' ist, hängt zunächst in hohem Grade vom Material ab, und zwar in der Weise, dass für Stoffe mit kleinem J sich J' bis zu einem relativ grossen Bruchtheile von J erhebt, z. B. für glasharten Stahl, für Stoffe mit grossem dagegen, z. B. für weiches Schmiedeeisen, J' nur einen kleinen Bruchtheil von J ausmacht. Man kann dies Verhalten sehr anschaulich darstellen, indem man den echten Bruch J'/J bildet und graphisch darstellt, wie dies in der Figur geschehen ist. Hier erhebt sich dieser Bruch also bis zu $\frac{5}{8}$, und man sieht zugleich, dass er zwar mit R stark ansteigt, dann aber ein Maximum erreicht und schliesslich wieder



(P. 167.)

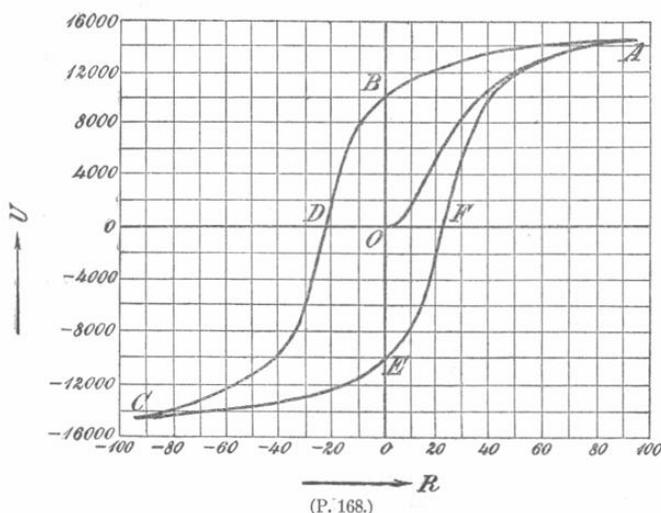
etwas abfällt, d. h. dass sich J' rascher als J seinem Maximum nähert. Das Maximum von J' scheint den Werth 1200 nirgends zu überschreiten.

Wie die Curve für J , so wird natürlich auch die für J' verschieden ausfallen, je nachdem man R_0 oder R als Abscisse wählt. Bei J' kommt aber noch ein anderer, und zwar sehr wesentlicher Umstand in Betracht, nämlich die entmagnetisirende Kraft des remanenten Magnetismus selbst. In Ringen und sehr langen Stäben findet eine solche Gegenwirkung nicht statt, wohl aber bei kurzen Stäben, Ellipsoiden und Kugeln, und sie kann alsdann so gross werden, dass sie den ganzen remanenten Magnetismus vernichtet. Hat man z. B. ein Ellipsoid mit dem Axenverhältniss 1:200, so ist die Gegenkraft (allgemein NJ') nach der Tabelle auf pag. 152 gleich $0.0016 J'$, also z. B. für $J' = 1000$ (was nicht selten vorkommt) gleich 1.6, dieser Gegenkraft kann leicht ein Magnetismus von etwa 50 entsprechen, und folglich wird J' von 1000 auf 950 herabgedrückt; bei einem Axenverhältniss von 1:50 wird es unter Umständen schon auf die Hälfte reducirt u. s. w. Lange Stäbe und Ringe werden also stets grösseres J' aufweisen als gedrungene Körper aus gleichem Stoff, und man muss sich stets darüber orientiren, in wie weit der Mangel oder die Geringfügigkeit der Remanenz nur scheinbar, d. h. der Gestalt des Körpers zuzuschreiben, und wie weit sie eine wirkliche Eigenthümlichkeit des Materials ist.

Auch der verschwindende Magnetismus, also die Grösse $J - J'$ giebt zu interessanten Betrachtungen und graphischen Darstellungen Anlass, worauf aber hier nicht eingegangen werden kann. Dasselbe gilt von den Differential-

quotienten dJ/dR , dJ'/dR und $d(J - J')/dR$, deren Betrachtung auf manche Verhältnisse ein neues Licht wirft.

Hysteresis. Die Remanenz beweist, dass der magnetische Zustand eines magnetisirenden Kräfte nicht unterworfenen Körpers von seiner Vorgeschichte abhängt, d. h. ob und welche Kräfte vorher auf ihn gewirkt haben. Es liegt nahe, von dieser speciellen zu der allgemeinen Einsicht überzugehen, dass ein unter dem Einfluss einer magnetisirenden Kraft stehender Körper einen Magnetismus annehmen wird, dessen Betrag nicht bloss von der augenblicklich wirkenden, sondern auch von den vorher wirksam gewesenen Kräften abhängt. Am einfachsten tritt diese »magnetische Nachwirkung« in die Erscheinung wenn man einen Eisenkörper einer Reihe wachsender und dann wieder fallender Kräfte aussetzt, man erhält alsdann für jede der Kräfte auf dem Rückwege einen anderen Werth für J als auf dem Hinwege und somit zwei verschiedene Curven für den ansteigenden und absteigenden Theil der Versuchsreihe, und zwar liegt



die absteigende Curve naturgemäss über der ansteigenden. Wie man einsieht, handelt es sich hier um eine magnetische Trägheit der Körpertheilchen, um ein Zurückbleiben der Aenderungen des Magnetismus hinter den Aenderungen der Kraft; man hat deshalb für diese auch für die elektrotechnische Praxis äusserst wichtig gewordene Erscheinung nach

dem Vorschlage von EWING den Namen Hysteresis eingeführt.

In Fig. 168 ist die Hysteresis graphisch dargestellt, wobei die Kraft R als Abscisse, die Induction U als Ordinate gewählt ist. Der erste Zweig OA der Curve entspricht ansteigenden Kräften, der zweite Zweig in seinem ersten Stück AB wiederum auf Null abnehmenden Kräften, so dass OB der Betrag des remanenten Magnetismus ist; lässt man nun die Kräfte weiter abnehmen, d. h. wendet man nunmehr entgegengesetzte, von Null ansteigende Kräfte an, so erhält man die Fortsetzung BC des absteigenden Curvenzweiges; und man sieht, dass bei diesem Verfahren der remanente Magnetismus OB ziemlich rasch, nämlich schon durch die Kraft $-OD$ vernichtet wird und dann weiterhin entgegengesetzte Magnetisirung erzeugt wird; anfänglich ist diese natürlich kleiner als die positive Magnetisirung durch gleich grosse positive Kräfte (z. B. $U = -5800$ für $R = -30$, während $U = +8400$ für $R = +30$ war), allmählich wird dies aber eingeholt, und für eine der positiven Maximalkraft gleiche negative Maximalkraft erreicht auch U einen dem früheren positiven Maximum gleichen negativen Werth; lässt man schliesslich wieder abnehmende negative Kräfte bis zur Null und dann weiter steigende positive wirken, so erhält man den Zweig $CEFA$, so dass sich die Curve schliesst; OE ist der negative remanente Magnetismus, OF die ihn zerstörende positive Kraft. Sieht man von dem ersten Zweige

OA ab, so behält man zwei Curvenzweige, einen ansteigenden und einen absteigenden übrig, die sich im Wesentlichen nur dadurch unterscheiden, dass sie um ein gewisses Abscissenstück DF gegen einander verschoben sind, oder, wie man auch sagen kann, dadurch, dass sie, gegen eine ähnliche, durch O gehende Curve nach entgegengesetzten Seiten um gleiche Abscissenstücke OF resp. OD verschoben sind. Derselbe Magnetismus ist also scheinbar bei dem einen Zweige die Folge einer zu kleinen, bei dem andern die einer zu grossen Kraft, und das ist verständlich, weil die Abscisse R nur die augenblicklich wirkende, nicht aber die nachwirkende Kraft berücksichtigt; bei Berücksichtigung derselben würde man eben statt beider Curven eine einzige, nämlich die vorhin gedachte, ihnen ähnliche durch O gehende erhalten. Umgekehrt könnte man aus der Curve rückwärts berechnen, mit welchem Betrage die nachwirkenden Kräfte sich zu der wirkenden addiren.

Je grössere spezifische Remanenz, also je grössere Coercitivkraft (pag. 51) das Material des Körpers hat, desto höher resp. tiefer liegen die Punkte B und E , desto weiter auseinander also auch die Punkte D und F ; die Strecken OD und OF liefern geradezu ein Maass für die Fähigkeit des Stoffes, Magnetismus zu bewahren, man bezeichnet sie daher nach HOPKINSON als Coercitivkraft, die man auf diese Weise zahlenmässig angeben kann.

Die Coercitivkraft und der in einem besonderen Falle auftretende remanente Magnetismus sind, was nochmals ausdrücklich zu betonen ist, zwei ganz verschiedene Dinge und in Folge der Mitwirkung eines dritten Momentes, der entmagnetisirenden Kraft, weit entfernt, im eindeutigen Verhältnisse von Ursache und Wirkung zu stehen; jene ist für ein Material charakteristisch, dieser aber auch von der Körpergestalt abhängig; jene ist eine negative Abscisse, dieser eine positive Ordinate. Denkt man sich z. B. in Fig. 166 zu den aufsteigenden Curven auch die absteigenden hinzu so würden diese die positive Ordinatenaxe in verschiedenen Punkten schneiden, entsprechend den verschiedenen Längen der Drähte; sie würden aber, noch weiter verlängert, die negative Abscissenaxe sämmtlich in demselben Punkte treffen, denn alle Drähte bestehen aus derselben Eisensorte. Allgemeiner ausgedrückt: *Ceteris paribus* tritt in einem Material von grosser Coercitivkraft viel, in solchem von kleiner wenig remanenter Magnetismus auf, man kann aber auch stark coerciblem Material eine Form geben, in welcher der remanente Magnetismus gering ausfällt (das Umgekehrte kommt nicht vor).

Kreisprocess; Arbeit beim Magnetisiren. Sieht man von dem ersten Curvenzweige OA ab, so stellen die beiden übrigen Zweige einen sogen. Kreisprocess dar, den man beliebig oft wiederholen kann, und bei dem man jedes Mal eine gewisse Menge von Magnetisirungsarbeit aufwenden muss. Es ist nun zuerst von WARBURG¹⁾ auf Grund der Einführung einfacher Polpaare und später durch allgemeinere Betrachtungen von EWING²⁾, HOPKINSON³⁾ u. A. gezeigt worden, dass die von den beiden Curven eingeschlossene Fläche ein Maass jenes Arbeitsaufwandes für die Volumeneinheit darstellt; da der magnetische Zustand am Ende des Kreisprocesses derselbe ist wie am Anfang, so handelt es sich im Sinne magnetischer Verwerthung um eine Arbeits- oder Energie-Vergeudung, die sich durch die Erwärmung des Eisenkörpers bemerklich macht und die man

¹⁾ WARBURG, WIED. Ann. 13, pag. 141. 1881. — Vergl. auch WARBURG u. HÖNIG, WIED. Ann. 20, pag. 814. 1883.

²⁾ EWING, Proc. R. Soc. 1882, pag. 39; Trans. R. Soc. 1885, pag. 549.

³⁾ HOPKINSON, Trans. R. Soc. 1885, pag. 446.

z. B. bei den elektrischen Maschinen möglichst beschränken muss. Der Betrag der Energievergeudung lässt sich durch die Formel

$$V = \frac{1}{4\pi} \int R dU$$

darstellen oder auch, da $dU = 4\pi dJ + dR$ und RdR ein vollständiges Differential, also sein Integral über eine geschlossene Strecke Null ist, durch die Formel

$$V = \int R dJ.$$

Wählt man also U als Abscisse, so muss man, um die Arbeitsvergeudung für die Volumeneinheit zu erhalten, die Fläche zwischen den Curven durch 4π dividiren; wählt man J als Abscisse, so stellt die Fläche ohne weiteres V dar. Dass die Energievergeudung absolut genommen desto grösser ist, je stärker die Induction U ist, versteht sich von selbst; aber man kann fragen, nach welchem Gesetze V mit U wächst. Diese Frage hat STEINMETZ¹⁾ auf Grund der EWING'schen und anderer Beobachtungszahlen durch die sehr gut stimmende Formel

$$V = 0.002 U^{1.6}$$

beantwortet, welche zeigt, dass V rascher als U wächst, dass also magnetische Kreisprocesse magnetisch desto ungünstiger arbeiten, je höher hinauf die Magnetisirung getrieben wird.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich ausser WARBURG neuerdings auch Lord RAYLEIGH²⁾, J. J. THOMSON, ADLER³⁾ u. A. mit der Berechnung des magnetischen Arbeitswerthes beschäftigt und mancherlei Folgerungen daran geknüpft haben.

In neuester Zeit hat sich die Literatur über Hysteresis, namentlich im Hinblick auf die Wirkungsweise der Dynamomaschinen, sehr stark entwickelt, und es ist besonders auf die Arbeiten von HOPKINSON, EWING, STEINMETZ und KAPP⁴⁾ hinzuweisen.

Magnetische Nachwirkung. Die Hysteresis ist, wie gesagt, eine magnetische Nachwirkungserscheinung. Von verschiedenen und zum Theil allgemeineren Gesichtspunkten aus hat sich mit der magnetischen Nachwirkung eine Anzahl von Physikern beschäftigt, indem sie den Magnetismus und seine Bestandtheile bei steigenden und abnehmenden Kräften, bei Kräften von abwechselnd positivem und negativem Zeichen (»Hin- und Hermagnetisirung«), indem sie ferner den Einfluss der Geschwindigkeit und des Charakters der Kraftänderung (rasch, langsam, plötzlich, allmählich) untersuchten, indem sie des weiteren prüften, welche Aenderungen der Magnetismus während des Wirkens einer und derselben Kraft mit der Zeit erleidet (Nachwirkung zweiter Art), und indem sie sich schliesslich bemühten, aus allen diesen verwickelten Erscheinungen Schlüsse auf normale magnetische Verhältnisse, welche frei von Nachwirkungseinflüssen wären, zu ziehen. Es kann hier nur auf einige wenige von diesen Arbeiten und auch auf diese nur mit kurzen thatsächlichen Angaben eingegangen werden.

Sätze von G. WIEDEMANN⁵⁾ (zum Theil zuerst von ihm selbst, zum Theil schon vorher von JOULE, POGGENDORFF, ABRIA, RITCHIE, JACOBI, MARIANINI,

1) Vergl. z. B. STEINMETZ, The Electrician 26, pag. 261. 1891. Electrot. Zeitschr. 1891 bis 92, in verschiedenen Heften.

2) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 22, pag. 175. 1886.

3) G. ADLER, WIED. Ann. 46, pag. 503. 1892.

4) Man sehe in den letzten Jahrgängen von The Electrician, Electrot. Zeitschr. u. s. w.

5) G. WIEDEMANN, POGG. Ann. 100, pag. 235. 1857; 106, pag. 169. 1859; 117, pag. 195. 1862; WIED. Ann. 27, pag. 376. 1886; d. Lehre v. d. Elektr. Bd. 3 (3. Aufl.). Dasselbst auch d. weitere Literatur.

PLÜCKER u. A. gefunden). 1) Bei der ersten Magnetisirung eines Stabes wächst der TM (temporäre Magnetismus) anfangs wie die Kraft, dann rascher, zuletzt langsamer; die Periode des rascheren Wachsens ist bei langen Stäben ausgeprägter als bei kurzen, und das Maximum wird bei langen, dünnen Stäben schneller erreicht als bei kurzen, dicken. 2) Bei der ersten Magnetisirung ist der Verlauf des PM (permanenten Magnetismus) analog. 3) Ein entgegengesetzter Strom kann entgegengesetztes TM und doch noch ursprüngliches PM bewirken; die zur Vernichtung des PM erforderliche Kraft ist kleiner als die zur Erzeugung erforderlich gewesene. 4) Ein auf diese Weise entmagnetisirter Stab erhält durch nochmalige Anwendung der negativen Kraft (oder einer kleineren) kein negatives PM , wohl aber durch eine ebenso grosse positive Kraft ein positives PM ; der Stab ist also nur scheinbar unmagnetisch geworden und besitzt in Wahrheit eine Asymmetrie zu Gunsten der ersten Magnetisierungsrichtung. 5) Bei wiederholter Hin- und Hermagnetisirung durch dieselbe Kraft wächst das PM anfangs etwas, wird aber allmählich constant; eine grössere Kraft steigert aber das PM von Neuem. 6) Alle obigen Erscheinungen treten am meisten im harten Stahl hervor.

Formeln von BOUTY²⁾. Die Dauer der Kraft hat keinen Einfluss auf das PM , wohl aber ihre Wiederholung, und zwar ist nach x -maligem Magnetisiren $PM = A - B/x$ (z. B. $A = 57.78$, $B = 6.32$). Das Verhältniss $A/(A - B)$, d. h. des schliesslichen zum erstmaligen PM nimmt mit wachsender Kraft ab. Dagegen ist das Verhältniss R'/R , d. h. der Kraft, die ein bestimmtes PM nach einmaligem Wirken erzeugt, zu einer solchen, die es nach häufigem Wirken thut, ziemlich constant für verschiedene R , nämlich etwa 1.06. In manchen Fällen ist der obigen Formel für PM eine exponentielle vorzuziehen.

Untersuchungen von FROMME¹⁾. Die älteren von diesen Untersuchungen sind fast durchweg auf Stahl bezüglich. Sobald das PM für ein bestimmtes R erreicht ist, verhält sich der Körper für alle kleineren R , wie wenn er keine Coercitivkraft hätte. Das Verhältniss PM_1/PM_∞ ist für kleine Kräfte nahezu 1, nimmt dann bis zu einem Minimum ab und schliesslich wieder bis 1 zu Wiederholung einer Erstlingskraft liefert gewöhnlich abnehmende TM , dagegen Wiederholung einer auf eine etwas kleinere folgenden Kraft, zunehmende TM ; allgemein hängt die Zunahme oder Abnahme des TM durch Wiederholung einer Kraft von der Grösse und Wiederholung der vorhergegangenen kleineren Kraft ab. Andererseits nimmt PM bei Wiederholung stets zu, das verschwindende Moment VM stets ab, und zwar um Beträge, die sich mit der Differenz $R - R_0$ der wirkenden und der nachwirkenden Kraft der Null nähern. Eine Kraft r , die auf eine grössere R folgt, lässt PM unverändert; dagegen erzeugt ihre Wiederholung abnehmende TM , und das schliessliche TM_∞ ist von R unabhängig. Die Nachwirkung von R auf r lässt sich in der Form $N = c r^a (R - r)^b$ darstellen, wo b ein echter Bruch und a vielleicht nahezu 1 ist; für $r = 0$ und $r = R$ wird also $N = 0$, für einen gewissen Zwischenwerth wird es ein Maximum.

Neuerdings hat FROMME die analogen Versuche auch bei weichen Eisenstäben und besonders bei Drahtbündeln durchgeführt und gefunden, dass hier

1) Von den zahlreichen Arbeiten BOUTY's s. bes. Compt. rend. 80, pag. 650 u. 879; 81, pag. 88. Ann. Ec. norm. (2) 4, pag. 9 u. 49. 1875.

2) FROMME, POGG. Ann. Ergzbd. 7, pag. 390; WIED. Ann. 4, pag. 76; 5, pag. 345; 18, pag. 442; 43, pag. 181; 44, pag. 138; 45, pag. 798. 1875—1892. Auf den weiteren, sehr reichen Inhalt dieser Abhandlungen kann hier leider nicht eingegangen werden.

die Erscheinungen wesentlich andere werden; insbesondere ändert hier auch eine kleinere Kraft das PM , selbst wenn es sehr gross ist, ab, und zwar je nach dem Werthe der Kraft in erhöhendem oder verringerndem Sinne.

WALTENHOFEN'Sches Phänomen. Wie zuerst v. WALTENHOFEN¹⁾ beobachtete und später FROMME²⁾, AUERBACH³⁾, RIGHI⁴⁾, PEUCKERT⁵⁾ u. A. näher untersuchten, hat bei weichem Eisen die Art und Weise, wie man die Kraft zu wirken anfangen resp. aufhören lässt, einen oft nicht unwesentlichen Einfluss auf den PM resp. TM . Unterbricht man nämlich den magnetisirenden Strom plötzlich, so bleibt ein geringerer PM übrig, als wenn man ihn durch Einschalten von Widerständen allmählich auf Null reducirt oder den Eisenstab allmählich seiner Wirkung entzieht. In Fällen, in denen schon bei allmählicher Unterdrückung der Kraft ein nur kleiner PM auftritt, kann bei plötzlicher Stromunterbrechung sogar negativer Magnetismus, die sogen. »anomale Magnetisirung« eintreten. Diese merkwürdige Erscheinung könnte zwei verschiedene Ursachen haben, sie könnte nämlich entweder durch die beim plötzlichen Stromöffnen im Eisen erzeugten Inductionsströme bewirkt sein und würde alsdann ihr eigentliches Interesse verlieren; sie könnte aber auch molekularmagnetischer Natur sein und würde dann, wie man sofort einsieht, zu wichtigen Folgerungen Anlass geben. Jene Ansicht wird z. B. von G. WIEDEMANN⁶⁾, diese von v. WALTENHOFEN, FROMME⁷⁾, AUERBACH⁸⁾, EWING⁹⁾ vertreten und durch verschiedenartige Versuche und Erwägungen gestützt; hier sei nur zu Gunsten der letzteren Auffassung darauf hingewiesen, dass in dem verwandten Gebiete der Elasticität die analoge Erscheinung (z. B. die verschiedene Einstellung einer Federwaage nach behutsamer und nach plötzlicher Entlastung) ebenfalls vorkommt, und dass sie dort jedenfalls molekular-elastischer Natur ist.

Eine Verallgemeinerung des Phänomens ist von AUERBACH im Zusammenhang mit seinen gleich anzuführenden Untersuchungen in den Worten ausgesprochen worden: Bei plötzlicher Aenderung der magnetisirenden Kraft fällt der ihrem Endwerth entsprechende Magnetismus kleiner oder grösser aus als bei allmählicher Aenderung, je nachdem die Kraft verkleinert oder vergrössert wurde.

Untersuchungen von AUERBACH¹⁰⁾. Die allgemeinste Fragestellung lautet offenbar: Wie hängt der Magnetismus von der jetzt wirkenden Kraft R und den ihr vorangegangenen Kräften $R_1, R_2 \dots$ ab? In erster Annäherung ist hierauf zu antworten: Der Magnetismus M setzt sich zusammen aus einem der Kraft R entsprechenden Normalmagnetismus M_0 und einem Nachwirkungswerthe N , und für den letzteren maassgebend ist diejenige unter den vorangegangenen Kräften, auf die nur noch solche folgen, die der Grösse nach zwischen ihr und R liegen.

¹⁾ v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. 48 (2), pag. 564. 1863; POGG. Ann. 120, pag. 650.

²⁾ FROMME, WIED. Ann. 5, pag. 345. 1878; 13, pag. 326. 1881; 18, pag. 442. 1883; 44, pag. 138. 1891.

³⁾ AUERBACH, WIED. Ann. 14, pag. 308. 1881.

⁴⁾ RIGHI, Compt. rend. 90, pag. 688. 1880; Mem. di Bol. (4) 1. 1880.

⁵⁾ PEUCKERT, WIED. Ann. 32, pag. 291. 1887.

⁶⁾ G. WIEDEMANN, D. Lehre v. d. Elektr. (3), 4, pag. 279. 1885; WIED. Ann. 37 pag. 610. 1889.

⁷⁾ FROMME, zuletzt WIED. Ann. 33, pag. 236. 1888 und 44, pag. 138. 1891.

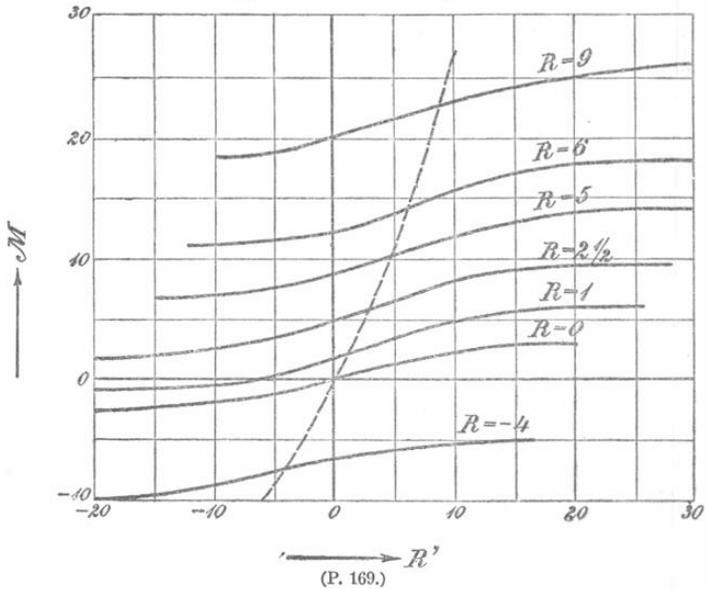
⁸⁾ AUERBACH, WIED. Ann. 14, pag. 308. 1881.

⁹⁾ EWING, Magm. Ind. (s. ob.).

¹⁰⁾ AUERBACH, WIED. Ann. 14, pag. 308. 1881. — Vergl. auch Encycl. Brit. 9. Ed. Art. »Magnetism«, wo ein Auszug aus der Arbeit gegeben ist.

In vielen Fällen ist diese Regel genau, in manchen aber erfährt sie Abweichungen und bedarf alsdann einer zweiten Annäherung. Der theoretisch und praktisch wichtigste dieser letzteren Fälle ist der, wo unter den vorangegangenen Kräften R selbst vorkommt, weil dann die Regel zweideutig wird. Es seien z. B. in der Reihe $R_{10}R R_5R$ alle Kräfte positiv und die Indices Andeutungen für ihre Grössenverhältnisse, dann bleibt zweifelhaft, ob das Endergebniss M_{10} oder M_5 sein werde; thatsächlich liegt es zwischen beiden Werthen, aber näher an M_{10} . Um M_5 zu erzielen, muss man vielmehr noch eine Kraft $R_0 < R$ einschieben und überdies die Glieder R_5R mehrmals wiederholen, sodass folgende Reihe entsteht: $R_{10}R R_0R_5R R_5R \dots$. Eine weitere Abweichung lässt sich folgendermassen aussprechen: von zwei vorangehenden Kräften, die auf verschiedenen

Seiten von R (der Grösse nach) liegen, ist die zweite ausschliesslich maassgebend, wenn sie weiter von R abliegt als die erste, andernfalls bestimmen beide Kräfte gemeinschaftlich die Nachwirkung, die erste allein ist nie maassgebend. Mit Rücksicht auf diese und andere Umstände kann man nunmehr daran gehen, für ein



gegebenes R den Magnetismus M als Function der maassgebenden vorangehenden Kraft R' zu ermitteln und diese Function als eine Curve darzustellen. In Fig. 169 sind diese »Nachwirkungs-Curven« für verschiedene Werthe von R wiedergegeben. Wie man sieht, sind sie, bis auf ihre geringere Erhebung, den Magnetisierungscurven selbst ganz ähnlich. Eine von ihnen, nämlich die für $R = 0$, ist die Curve des remanenten Magnetismus, ihr Inflexions- oder Symmetriepunkt liegt im Nullpunkt; dagegen sind die Inflexionspunkte der übrigen Curven nach rechts oder links verschoben, ihre Abscissen R' sind nämlich gleich den betreffenden R -Werthen. Hiernach erhält man den Satz: Die Nachwirkung hängt in derselben Weise von der Differenz der wirkenden und der nachwirkenden Kraft ab, wie die Hauptwirkung von der wirkenden Kraft. Verbindet man alle Inflexionspunkte, so erhält man (vergl. die unterbrochene Linie) die Curve des Normalmagnetismus als reine Function der wirkenden Kraft.

Im Anschluss an AUERBACH hat BACHMETJEFF¹⁾ den »normalen« und den remanenten Magnetismus gerader und ringförmiger Magnete untersucht.

Entmagnetisirung. Schliesslich ist aus dem Obigen noch eine wichtige Folgerung zu ziehen in Bezug auf die Zurückführung eines Eisenkörpers in den

¹⁾ BACHMETJEFF, Rep. der Phys. 27, pag. 147. 1891.

unmagnetischen Zustand. Eine einfache und zuverlässige Methode hierfür besteht bekanntlich in dem Ausglühen (s. w. u.). Aber es fragt sich, ob es nicht auch ein magnetisches Verfahren giebt. Dass die Anwendung einer Kraft, die an sich einen dem Bestehenden entgegengesetzten PM erzeugen würde, nicht im Stande ist, letzteren zu vernichten, und dass dies überhaupt durch Anwendung einer beliebigen Gegenkraft nicht möglich ist, ist nach dem Gesagten klar; bei geeigneter Wahl der Gegenkraft würde man nämlich zwar $PM=0$ erhalten, der Körper würde aber immer noch eine Asymmetrie gegen neue magnetische Einwirkungen aufweisen. Dagegen findet in den AUERBACH'schen Versuchen¹⁾ die folgende, von verschiedenen Seiten²⁾ mit Erfolg benutzte Entmagnetisierungsmethode ihre Begründung: man lasse der Reihe nach die Kräfte $--R, +(R-\epsilon), -(R-2\epsilon), +(R-3\epsilon) \dots$ bis zur Null herab wirken, wo R desto grösser zu wählen ist, je stärker magnetisch der zu entmagnetisirende Körper ist, aber lieber etwas zu gross als zu klein, und wo ϵ möglichst klein gewählt werden muss, um den Zweck möglichst vollständig zu erreichen. Dasselbe Verfahren kann mit entsprechender Modifikation auch dazu dienen, um, statt des Nullzustandes, einen bestimmten magnetischen Normalzustand herzustellen³⁾. Die Entmagnetisierungsmethode durch Stromwechsel ist hinsichtlich der erzeugten magnetischen Symmetrie dem Ausglühen nach EWING sogar noch überlegen, während Andere freilich das Gegentheil behaupten.

Magnetischer Kreis. Nach dem früheren hat ein Eisenstab die Eigenschaft, die Kraftlinien aus der schwächer magnetisirbaren Umgebung, z. B. aus der Luft, an sich zu ziehen, derart, dass die meisten Kraftlinien durch ihn und nur wenige durch die Luft hindurchgehen (vergl. Fig. 124). Er verhält sich also den magnetischen Kraftlinien gegenüber genau so wie ein von einem schlechten Leiter umgebener Leiter den elektrischen Kraft- resp. Stromlinien gegenüber, und es liegt nahe, diese Analogie auszubilden. Dieser Gedanke ist, auf Grund FARADAY'scher Andeutungen, in neuester Zeit von verschiedenen Seiten und meist im Hinblick auf die Wirkungsweise der Dynamomaschinen entwickelt worden, besonders von BOSANQUET⁴⁾, SIEMENS⁵⁾, HOPKINSON⁶⁾, KAPP, STEINMETZ, CARTER u. A.⁷⁾. Exakt durchführen lässt sich die Analogie für einen geschlossenen und gleichförmig von der Magnetisirungsspirale umgebenen Eisenring. Benutzt man hier die Formeln (22a) und (43) und ersetzt φ durch $l/2\pi$, wo l die Länge (der Umfang) des Ringes ist, so findet man

$$U = \frac{4\pi\mu ni}{l},$$

also durch Multiplikation mit dem Eisenquerschnitt q und bei veränderter Anordnung der Glieder die Gesamtzahl der im Eisen verlaufenden Kraftlinien

$$Z = \frac{4\pi ni}{\frac{l}{\mu q}} = \frac{M}{W}.$$

¹⁾ AUERBACH, WIED. Ann. 14, pag. 308. 1881; 16, pag. 554. 1882.

²⁾ z. B. schon von GAUGAIN in ähnlicher Weise: Compt. rend. 77, pag. 1074. 1873.

³⁾ Hierzu vergl. auch FROMME, WIED. Ann. 45, pag. 798. 1892, wo von den verschiedenen Zuständen des PM gehandelt wird.

⁴⁾ BOSANQUET, Phil. Mag. (5) 15, pag. 205, 257, 309. 1883.

⁵⁾ SIEMENS, Berl. Ber. 1884; WIED. Ann. 24, pag. 93. 1885; Wiss. Abh., pag. 380.

⁶⁾ HOPKINSON, Tr. R. Soc. 1886 I, pag. 331.

⁷⁾ Vergl. die 10 letzten Jahrgänge von The Electrician, El. Zeitschr. u. s. w.

Diese Gleichung stellt das Analogon des OHM'schen Gesetzes dar, und zwar ist M die magnetomotorische Kraft, W der aus lq und μ (magnetische Leitungsfähigkeit) ganz analog wie dort gebildete magnetische Widerstand, endlich Z die Intensität des magnetischen Stromes¹⁾. Ebenso kann man von der magnetischen Spannungsdifferenz zwischen irgend zwei Punkten des Schliessungskreises sprechen, bei Verzweigungen die KIRCHHOFF'schen Gesetze und zur Vergleichung magnetischer Widerstände die WHEATSTONE'sche Brücke anwenden u. s. w.²⁾. Es ist aber schon für geschlossene Kreise von unregelmässiger Form zu beachten, dass, während auch das OHM'sche Gesetz nur für lineare Gleichungen gilt, die magnetischen Leiter meist auch nicht annähernd linear sind, und sodann, dass der Antheil der Luft an der Kraftleitung zwar sehr klein, aber doch wesentlich beträchtlicher als bei der elektrischen Leitung ist und bei starker Sättigung des Eisens sogar ganz bedeutend wird (vergl. die kleinen μ -Werthe auf pag. 171 u. f.). Es hat dies zur Folge, dass an vielen Stellen, besonders bei Querschnittsänderungen, starken Krümmungen oder gar Ecken Kraftlinien aus dem Eisen in die Luft übertreten — eine Erscheinung, die man als magnetische Streuung bezeichnet; das Verhältniss der Zahl der Kraftlinien an der Erzeugungsstelle zu der an der Verwendungsstelle im Eisen wird vielfach Streuungscoëfficient genannt. In Folge dessen giebt es eigentlich auch für einen Leiter von überall gleichem Querschnitte im Allgemeinen, d. h. bei beliebiger Gestalt des Kreises, keinen Widerstand in dem obigen Sinne, man muss ihn vielmehr durch Integration von Schicht zu Schicht, d. h. durch die Formel

$$W = \frac{1}{q} \int \frac{dl}{\mu}$$

ermitteln, wo μ fortwährend variirt. Noch weit verwickelter werden die Verhältnisse in Folge des Umstandes, dass in der Praxis das Eisen meist nicht völlig geschlossen ist, der Kreis vielmehr durch eine Luftstrecke ergänzt wird; es treten dann Pole auf, die Streuung spielt nicht mehr eine secundäre, sondern eine primäre Rolle, und es können dann meist nur ungefähre Resultate gewonnen werden. In der Luftstrecke zwischen den Polen kann sich dann selbst wieder noch Eisen befinden (z. B. das Ankereisen der Dynamomaschinen), oder es kann die Schliessung durch ein eisernes Joch erfolgen (pag. 164). Endlich sei auf die wichtige Thatsache hingewiesen, dass auch eine einfache Schnittfläche, d. h. eine Luftstrecke von der Länge Null einen magnetischen Widerstand besitzt, dass also die Magnetisirbarkeit eines Ringes oder Stabes stark herabgedrückt wird, wenn er an einer Stelle zerschnitten wird; und selbst energisches Zusammenpressen bringt sie nicht auf die alte Höhe zurück³⁾.

Zusammenwirkung verschiedener Magnetisirungen. Wie schon auf pag. 55 f. angeführt worden ist, kann ein Körper in Folge Magnetisirung in verschiedenen Richtungen verschiedene Arten von Magnetismus annehmen, z. B. ein Stab longitudinalen, transversalen oder circularen Magnetismus. Es ist von theoretischem und praktischem Interesse, zu untersuchen, welche besonderen

¹⁾ Wie schwierig freilich der experimentelle Nachweis dieses Gesetzes ist, zeigen die Versuche von SIEMENS (a. a. O.).

²⁾ Vergl. u. a. EDISON, Proc. Amer. Assoc. 36. 1887. — HANAUER, El. Zeitschr. 1893, pag. 527.

³⁾ Das Nähere hierüber findet man in der elektrotechnischen Literatur. Ueber die Streuung bes. in geschlitzten Ringen vergl. ferner DU BOIS, WIED. Ann. 46, pag. 486. 1892. — H. LEHMANN, WIED. Ann. 48, pag. 406. 1893.

Erscheinungen etwa auftreten, wenn zwei verschiedene Magnetisirungen gleichzeitig hervorgerufen werden, oder wenn ein Körper, der schon Magnetismus der einen Art besitzt, noch auf eine der anderen Arten erregt wird. Hiermit haben sich u. A. VILLARI¹⁾, G. WIEDEMANN²⁾, SIEMENS³⁾, JANET⁴⁾, DECHARME, TOMLINSON, KNOTT, KÜLP⁵⁾ beschäftigt, die Quermagnetisirung wird wie die Längsmagnetisirung durch Spiralen erzeugt, nur dass die Windungen der Länge, statt der Quere nach verlaufen, die circulare gewöhnlich durch Hindurchsendung eines Stromes durch den Stab oder Draht selbst oder, wenn es eine Röhre ist, durch einen mit ihr coaxialen Draht. Im Allgemeinen hat sich dabei ergeben, dass sowohl der temporäre wie der remanente Magnetismus einer Art durch Magnetisirung einer anderen Art vermindert wird, was nach der Drehungshypothese verständlich ist; (bei dickeren Stäben kann er sich jedoch nach VILLARI und WIEDEMANN unter Umständen auch vergrößern). Am stärksten ist die Verminderung bei Röhrenmagneten, wie sie SIEMENS und nach seinem Vorgange W. H. SCHULTZE⁶⁾ benutzte; letzterer verfolgte die Erscheinung nach verschiedenen Richtungen hin. Auch der Verlauf der Magnetisirungscurve, der Betrag der Hysteresis u. s. w. sind an diesen Interferenzerscheinungen theilhaftig.

Zeitdauer der magnetischen Induction. Es handelt sich hier eigentlich um zwei verschiedene Fragen. Die erste lautet: Erfordert die magnetische Induction an einer bestimmten Stelle des Eisenkörpers Zeit resp. erreicht sie erst mit der Zeit ihren endgültigen Werth? Dieses Problem ist schon pag. 176 als Nachwirkung zweiter Art erwähnt worden, seine Behandlung ist wegen der vielen dabei möglichen, leicht ersichtlichen Fehlerquellen nicht leicht, es steht aber so viel gegenwärtig ausser Zweifel, dass die formulierte Frage unter Umständen zu bejahen ist; nur kann es in vielen Fällen zweifelhaft bleiben, ob die Verzögerung eine unmittelbar magnetische Erscheinung, oder aber durch mechanische oder thermische Vorgänge im Eisen bedingt sei. Es sind hier von neueren Arbeiten besonders die gelegentlichen Beobachtungen von AUERBACH⁶⁾ und die Arbeiten von Lord RAYLEIGH⁷⁾ und EWING⁸⁾ hervorzuheben, wobei der Kunstgriff angewendet wurde, die momentane Wirkung auf das Magnetometer zu compensiren, so dass die nachträgliche für sich zur Geltung kam. Im weichen Eisen ist die Trägheit deutlicher als im Stahl, in dicken Körpern deutlicher als in dünnen; endlich ist sie für schwache Kräfte relativ beträchtlicher als für stärkere. In ganz dünnen Drähten ist die Wirkung, wie schon vor längerer Zeit v. HELMHOLTZ⁹⁾ nachgewiesen hatte, momentan. Die Zeiten, während deren die Nachwirkung sich abspielt, messen meist nach einigen Secunden, gehen aber

1) VILLARI, POGG. Ann. 126, pag. 103. 1865. — Mem. Acc. Bol. (5) 2, pag. 443. 1892; (5) 3, pag. 153. 1893. — N. Cim. 33, pag. 152, 193, 268. 1893.

2) G. WIEDEMANN, POGG. Ann. 117, pag. 213. 1862; d. Lehre von der Elektr. (3) 3, pag. 456.

3) SIEMENS, Berl. Ber. 1881, Juni; Wiss. Abh., pag. 334.

4) JANET, Compt. rend. 108, pag. 398. 1889. — Es sei bei dieser Gelegenheit auch auf die Arbeiten dieses Physikers über Transversalmagnetismus hingewiesen: Sur l'aimantation transversale, Paris 1890; Compt. rend. 1887 u. 1888.

5) Wegen der übrigen Literatur vergl. Beibl. z. WIED. Ann. 1888—1893.

6) W. H. SCHULTZE, WIED. Ann. 24, pag. 643. 1885.

6) AUERBACH, WIED. Ann. 5, pag. 322. 1878.

7) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 23, pag. 225. 1887.

8) EWING, Proc. R. Soc. 1889, pag. 269; Magn. Ind., pag. 120 u. 308.

9) v. HELMHOLTZ, POGG. Ann. 83, pag. 535. 1851; Wiss. Abh. 1, pag. 458.

auch bis zu einer oder einigen Minuten hinauf. Der Betrag der Nachwirkung erreicht zuweilen einen erheblichen Bruchtheil der augenblicklichen Wirkung.

Zweitens gehört hierher die wichtige Frage, ob die Ausbreitung der magnetischen Induction über die einzelnen Theile des Eisenkörpers Zeit, oder genauer gesagt, messbare Zeit erfordert. SIEMENS¹⁾ hat diese Frage mit Hilfe seines Fallhammers geprüft, aber ein negatives Ergebniss erhalten. OBERBECK²⁾ wandte periodische Veränderungen des Moments an und fand, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an sich sehr gross ist, durch die entstehenden Inductionsströme aber mehr oder weniger verkleinert wird. TROUTON³⁾ und TROWBRIDGE⁴⁾ haben mit Eisenringen, Wechselströmen und Telephonen gearbeitet, und in der That Interferenzen, Phasenverschiedenheiten, Knoten und Bäuche beobachtet. Ueber die Deutung dieser Erscheinungen kann man aber immerhin sehr verschiedener Ansicht sein, und es werden daher erst weitere Untersuchungen Licht in die Verhältnisse bringen⁵⁾.

Empirische Magnetisirungsformeln.

Zum Schlusse ist es erforderlich, die Ergebnisse der wichtigsten unter denjenigen überaus zahlreichen Untersuchungen kurz zusammenzustellen, welche — in losem oder gar keinem Zusammenhange mit der Theorie — über die Abhängigkeit der Magnetisirung von den bestimmenden Faktoren angestellt worden sind, und die noch jetzt theils von historischem, theils von praktischem Interesse sind.

1) Abhängigkeit der Magnetisirung von der äusseren Kraft. Unter Magnetisirung ist meist das magnetische Moment, eventuell die Polstärke des Körpers, der gewöhnlich Stabform hat, verstanden; die äussere Kraft R_0 geht meist von einem Strome in einer den Körper umgebenden Spirale aus und ist dann bis auf einen Faktor durch das Produkt aus Stromstärke und Windungsdichte bestimmt, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen wird (s. Art. Elektromagnetismus); abc bedeuten im Folgenden Constanten.

LENZ und JACOBI⁶⁾ setzten einfach

$$M = a R_0,$$

was nur in dem mittleren Curvenstück annähernd richtig ist. MÜLLER, v. WALTENHOFEN, DUB, CAZIN, BREGUET⁷⁾ u. A. setzten

$$M = a \operatorname{arc\,tang} b R_0,$$

eine Formel, die die Annäherung an die Sättigung wiedergiebt, für geringere Kräfte jedoch, wie v. WALTENHOFEN gezeigt hat, der MÜLLER'schen Formel nachsteht. LAMONT⁸⁾ setzt

$$M = a (1 - e^{-b R_0}),$$

wo a offenbar das Maximum von M ist. RUTHS⁹⁾ stellt die Formel

1) SIEMENS, Wiss. Abh., pag. 350.

2) OBERBECK, WIED. Ann. 22, pag. 73. 1884.

3) TROUTON, Rep. Brit. Ass. Cardiff 1891.

4) TROWBRIDGE, Phil. Mag. (5) 33, pag. 374. 1892.

5) Vergl. zu diesem Gegenstande ferner mehrere Abhandlungen von PISATI, die sich auf die Vertheilung des Magnetismus über die Länge von Stäben beziehen und diese Vertheilung als eine Fortpflanzungserscheinung auffassen: Rend. Acc. Linc. 6, pag. 82, 168 u. 487. 1890. — N. Cim. 31, pag. 58. 1892. — Phys. Revue 2, pag. 346. 1892.

6) LENZ u. JACOBI, POGG. Ann. 47, pag. 225. 1839.

7) J. MÜLLER, POGG. Ann. 79, pag. 340. 1850. — v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. 52, pag. 87. 1865; WIED. Ann. 27, pag. 630. 1886; 32, pag. 133. 1887.

8) LAMONT, Hdb. d. Magnetismus, pag. 41.

9) V. RUTHS, Ueb. d. Magn. weicher Eisencylinder u. s. w. Dortmund. 1876.

$$J = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (bR_0)^2}} \right)$$

auf, wo J die Intensität der Magnetisirung, bezogen auf die Gewichtseinheit, also der sogen. spezifische Magnetismus (pag. 172) ist, a und b Constanten sind, deren letztere von 0.0145 bis 0.052 wächst, wenn das Verhältniss der Länge zur Dicke der Stäbe von 40 auf 150 wächst; man kann diese Formel daher mit der Fig. 166 in einigen Zusammenhang bringen.

Verschiedene Physiker und insbesondere FRÖLICH¹⁾ setzen

$$M = \frac{R_0}{a + bR_0}.$$

SOHNCKE²⁾ setzt

$$M = aR_0 e^{-bR_0},$$

eine Formel, durch welche offenbar diejenigen von MÜLLER und LAMONT miteinander verknüpft werden. Endlich ist noch die für die Berechnung von Dynamomaschinen wichtig gewordene Formel von KAPP³⁾

$$M = aR_0 \frac{\tan \frac{\pi}{2} \sigma}{\frac{\pi}{2} \sigma}$$

anzuführen, wo σ das Verhältniss der bei Wirkung der Kraft R_0 im Eisen verlaufenden Kraftlinienzahl zu ihrem Maximum ist; für gross R_0 ist die Formel unbrauchbar, dagegen giebt sie das anfänglich schnellere Wachsen von M wieder, was keine der obigen Formeln und sonst nur noch die MAXWELL'sche Theorie thut.

2) Abhängigkeit der Magnetisirung von den Dimensionen. Hier treten noch grössere Complicationen auf als vorhin, einmal, weil es nicht immer oder nur schwer möglich ist, eine der maassgebenden Grössen, z. B. Länge, Dicke, Dichte u. s. w. zu variiren, ohne dass sich in den sonstigen Verhältnissen etwas ändert — man vergleiche eine Arbeit von AUERBACH⁴⁾ — und zweitens weil, selbst wenn es gelingt, eine constante und in den zu vergleichenden Fällen gleich grosse Kraft wirken zu lassen, die Magnetisirung der Stäbe trotzdem meist auch nicht annähernd gleichförmig wird.

Für den Einfluss der Länge liefert die schon oben (pag. 154) angegebene GREEN'sche Formel durch Integration folgende Formel für das Gesamtmoment des Stabes

$$M = \pi \kappa \rho^2 R_0 \left(2l - 2 \frac{\rho}{\rho} \frac{e^{\frac{\rho}{\rho} l} - e^{-\frac{\rho}{\rho} l}}{e^{\frac{\rho}{\rho} l} + e^{-\frac{\rho}{\rho} l}} \right),$$

wo $2l$ die Länge des Stabes ist (wegen ρ und ρ s. ob.); eine Formel, die zwar ihrerseits für nicht sehr dünne Stäbe nur eine Annäherung giebt, aus deren Gestalt man aber andererseits sofort erkennt, dass die hier folgenden empirischen Proportionalitätsformeln ebenfalls nur beschränkte Gültigkeit besitzen werden. Aus den Versuchen von LENZ und JACOBI, DUB u. A. folgt, dass die Potenz der Länge, mit welcher M proportional ist, zwischen der 2. und $2\frac{1}{2}$., also für den Magnetismus J der Volumeneinheit zwischen der 1. und $1\frac{1}{2}$. Potenz liegt, so dass man, wenn $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ist,

$$M \propto l^{2+\alpha}, \quad J \propto l^{1+\alpha}$$

1) FRÖLICH, El. Zeitschr. 1881, pag. 141 u. 170; 1882, pag. 73.

2) SOHNCKE, El. Zeitschr. 1883, pag. 160.

3) KAPP, The Electr. 18, pag. 21. 1886.

4) AUERBACH, WIED. Ann. 11, pag. 353. 1880.

setzen kann. Im Mittel dürfte etwa $\alpha = 0.3$ sein. Analog folgt für den Einfluss der Dicke d aus den Versuchen von LENZ und JACOBI, MÜLLER, DUB, v. WALTENHOFEN, WIEDEMANN u. A., dass M einer zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegenden Potenz von d , also J einer zwischen -1 und $-1\frac{1}{2}$ liegenden Potenz von d proportional ist, so dass man, wenn wieder $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ist,

$$M \sim d^{1-\beta}, \quad J \sim d^{-(1+\beta)}$$

setzen kann. Da auch hier im Mittel etwa $\beta = 0.3$ ist, kann man $\alpha = \beta$ setzen und erhält durch Verknüpfung der für l und d gefundenen Formeln

$$M \sim ld^2 \left(\frac{l}{d}\right)^{1+\alpha} \quad J \sim \left(\frac{l}{d}\right)^{1+\alpha}$$

d. h. die Magnetisirung der Volumeneinheit hängt nur von dem Verhältniss der Länge zur Dicke, d. h. nur von der Gestalt ab. Das Ergebniss genügt also, wie man sofort einsieht, dem THOMSON'schen Aehnlichkeitssatze¹⁾.

Die bisherigen Angaben beziehen sich zunächst auf den temporären Magnetismus; für den permanenten gelten aber ganz ähnliche Sätze, so dass nicht besonders darauf eingegangen zu werden braucht. Auch auf die Vertheilung von M der Stablänge nach braucht nach den Angaben auf pag. 32 ff. nicht mehr zurückgekommen zu werden.

Dagegen ist noch auf die Idee von DU BOIS hinzuweisen, die empirischen Ergebnisse für cylindrische Stäbe dadurch mit der Theorie wenigstens in einen gewissen Zusammenhang zu bringen, dass man aus ersteren die Werthe des Entmagnetisierungsfaktors oder Gestaltfaktors (pag. 146 u. 151) ableitet, die man dann mit den entsprechenden Werthen für Rotations-Ellipsoide vergleichen kann. Unter Benutzung von Versuchen von EWING und TANAKADATÉ erhält DU BOIS für verschiedene Werthe v des Verhältnisses der Länge zur Dicke resp. der Polar- zur Aequatorialaxe folgende Werthe von N (resp. ϵ).

v	N		v	N	
	Cylinder	Rot.-Ellipsoid		Cylinder	Rot.-Ellipsoid
0	12.5664	12.5664	50	0.0126	0.0181
1	—	4.1888	100	0.0045	0.0054
5	—	0.7015	300	0.00050	0.00075
10	0.2160	0.2549	1000	0.00005	0.00008
20	0.0775	0.0848	∞	0	0
30	0.0393	0.0432			



Der Entmagnetisierungsfaktor ist also bei gleichem v für den Cylinder stets kleiner als für das Ellipsoid, und zwar bis zu 40%; oder anders ausgedrückt: ein Cylinder verhält sich wie ein um 10—20% längeres Ellipsoid. Wie man sieht, ist der Cylinder eine für die Magnetisirung günstigere Form als das Ellipsoid²⁾.

Polabstand. Bei dieser Gelegenheit seien die wichtigsten Polabstände, von denen schon mehrfach die Rede war, übersichtlich zusammengestellt; p ist der Polabstand, l die Länge oder grösste Ausdehnung des betreffenden Körpers:

¹⁾ LENZ u. JACOBI, POGG. Ann. 47, pag. 235. 1839; 61, pag. 255. 1844. — v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. 52, pag. 87. 1865. — DUB, POGG. Ann. 90, pag. 250. 1853; 94, pag. 580. 1855; 102, pag. 208. 1857; 120, pag. 557. 1863. — Der Elektromagnetismus, Berlin 1861. — MÜLLER, POGG. Ann. 79, pag. 337. 1850; 82, pag. 181. 1851; G. WIEDEMANN, POGG. Ann. 117, pag. 236. 1862. — D. Lehre v. d. Elektr. (3) 3, pag. 484 ff. — v. FEILITZSCH, POGG. Ann. 80, pag. 321. 1850. — RUTHS, a. a. O. — AUERBACH, WIED. Ann. 11, pag. 353. 1880. — v. WALTENHOFEN, WIED. Ann. 27, pag. 630. 1886; 32, pag. 133. 1887.

²⁾ DU BOIS, WIED. Ann. 46, pag. 495. 1892.

Sehr langer dünner Draht:	$p = l$
Langer dünner Stab:	$p = 0.9 l$
Gewöhnlicher Stab:	$p = 0.83 l$
Ellipsoid, Kugel, Scheibe (Magnetspiegel):	$p = 0.67 l$

Dies die Pole für Fernwirkung; die Abstände der »äquivalenten Pole« für Nahwirkung (pag. 48) sind:

Dünner Stab:	$p = 0.72 l$
Sehr gestrecktes Ellipsoid:	$p = 0.77 l$
Kugel:	$p = 0.$

Diese Zahlen haben aber nur beschränkte Gültigkeit (vergl. a. a. O.).

3) Von dem Einflusse des Materials, seiner Qualität und seiner Vertheilung (Stahl, Eisen, Guss-, Schmiedeeisen, Pulver u. s. w.) wird im nächsten Artikel die Rede sein.

4) Tragkraft und Anziehung der Magnete. — Die oben gemachte Bemerkung von der beschränkten Gültigkeit der Resultate gilt in ganz besonderem Maasse von den überaus zahlreichen Untersuchungen über die Tragkraft und die Anziehungskraft der Magnete. Die Form der Magnete, die Art der Berührung mit dem getragenen Anker, die magnetische Vertheilung in beiden Körpern u. s. w. kann eine so verschiedenartige sein, und die Zusammenwirkung dieser Faktoren ist fast stets eine so verwickelte, dass jenes Urtheil auch durchaus erklärlich erscheint. Dass man trotzdem in einfachen Fällen zuverlässige Schlüsse ziehen kann, ist oben bei der Zugkraftmethode und der DU BOIS'schen Waage gezeigt worden (pag. 165). Aus der übrigen Literatur sei folgendes Wenige herausgehoben. Theoretisch hat STEFAN¹⁾ einige Fälle behandelt. Für den Fall, dass Magnet und Anker zusammen eine Kugel vom Radius r bilden, die ebene Trennungsebene auf der Axe der Magnetisirungsrichtung senkrecht steht, und die vom Kugelcentrum nach Mittelpunkt und Rand der Trennungsebene gezogenen Linien den Winkel α bilden, fand er, indem er die Wirkung der Grenzschichten mit der Fernwirkung der übrigen magnetischen Massen combinirte:

$$T = \pi^2 r^2 \sin^4 \alpha \cdot J^2,$$

und wenn beide Körper Halbkugeln sind, $T = \pi^2 r^2 J^2$; hieraus kann man dann die Tragkraft für die Einheit der Grenzfläche und für die Volumen- (Gewichts-) Einheit ableiten. Die Tragkraft ist also mit dem Quadrat der Intensität der Magnetisirung proportional. Ein zweiter Fall ist der zweier Kugeln, den man mit dem vorigen vergleichen kann; für zwei gleich grosse Kugeln mit punktförmiger Berührung wird T das $\frac{2}{3}$ fache des Werthes für die Halbkugeln, für eine grosse und eine kleine Kugel sogar doppelt so gross wie für ein grosses und ein kleines Kugelsegment. Man ersieht daraus, dass die Fernwirkung ebenso wichtig wie die Grenz Wirkung ist und sie sogar zuweilen übertrifft. Drittens sollen Magnet und Anker die beiden Theile eines Ringes bilden, und zwar so, dass der Mittelfaden die Trennungsebenen q unter dem Winkel ε trifft; dann ist bei gewissen Voraussetzungen

$$T = 2 \pi q \sin \varepsilon \cdot J^2;$$

für zwei Halbkreise wird also

$$T = 2 \pi q J^2, \quad T_1 = 2 \pi J^2,$$

letzteres für die Flächeneinheit. Maassgebend ist also wieder das Quadrat der magnetischen Intensität. Da ferner (pag. 172) J höchstens den Werth 1700 hat, ergibt sich das Maximum der Tragkraft zu rund $12\frac{1}{2} K$ pro qcm . Hiermit

¹⁾ STEFAN, Wien. Ber. 81 (2), pag. 89. 1880.

stimmen experimentelle Resultate von ROWLAND¹⁾ und v. WALTENHOFEN²⁾ recht gut überein. Das Maximum von T für die Gewichtseinheit ist ebenfalls mehrfach, jedoch nicht übereinstimmend ermittelt worden; z. B. fand SIEMENS³⁾ das rund 400fache Gewicht.

Was dagegen die Beziehung zwischen T und J betrifft, so herrscht unter den Beobachtern, die überdies meist gar nicht J , sondern nur die Stärke des magnetisirenden Stromes ermittelt und angegeben haben, keine Uebereinstimmung. Während einige in Bestätigung der STEFAN'schen Formeln J^2 , finden andere, z. B. noch neuerdings SIEMENS⁴⁾, J selbst für T maassgebend, und letzterer findet dies auch mit seinen theoretischen Vorstellungen in Uebereinstimmung, noch andere, wie WASSMUTH⁵⁾, finden keines der beiden Gesetze giltig, sondern eine weit complicirtere Beziehung. Dabei leisten Systeme, welche durch die Anker geschlossen werden, naturgemäss mehr als andere. Auch mit der Berührungsfläche ist T nicht einfach proportional, am ehesten noch bei sehr kräftiger Magnetisirung, was erklärlich ist, da die von STEFAN angenommene, gleichförmige Vertheilung über die Fläche bei starker Magnetisirung annähernder als bei schwacher erreicht ist⁶⁾.

F. AUERBACH.

Magnetismus der verschiedenen Körper.

Uebersicht. Das Eisen ist im Hinblick auf die magnetischen Erscheinungen zwar weitaus der wichtigste aller Stoffe, der magnetischen Eigenschaft sind aber, wie sich im Laufe der Zeit herausgestellt hat, auch die anderen Stoffe mehr oder weniger fähig, und einige von ihnen stehen dem Eisen nur wenig oder gar nicht nach, während andererseits auch unter den verschiedenen Sorten des Eisens und insbesondere zwischen Eisen und Stahl grosse quantitative und qualitative Unterschiede bestehen. Diesen specifischen Eigenthümlichkeiten der Stoffe ist das vorliegende Kapitel gewidmet. Es lässt sich für dasselbe eine Gliederung in folgender Weise vornehmen. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass der Zustand, in den die Körper gelangen können, nicht schlechthin magnetisch genannt werden darf, sondern dass dabei ein akuter Gegensatz auftritt, indem sich manche Stoffe gerade umgekehrt wie die übrigen verhalten; man unterscheidet demgemäss zwischen paramagnetischen (oder kurz magnetischen) und diamagnetischen Stoffen. Ferner ist schon aus den Grundlagen des vorigen Artikels klar, dass die Erscheinungen, welche kräftig magnetisirbare und nur schwach magnetisirbare Stoffe darbieten, nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ verschieden ausfallen werden, indem alle secundären Erscheinungen, wie die innere Induction, die Nachwirkung, die Remanenz, bei jenen von entscheidender Wichtigkeit sind, bei diesen aber so gut wie gänzlich fehlen; man muss daher auch zwischen stark-

1) ROWLAND, Phil. Mag. (4) 46, pag. 140. 1873.

2) v. WALTENHOFEN, POGG. Ann. 142, pag. 252. 1871.

3) SIEMENS, WIED. Ann. 14, pag. 640. 1881; Wiss. Abh., pag. 334.

4) SIEMENS, WIED. Ann. 14, pag. 640. 1881; Wiss. Abh., pag. 334.

5) WASSMUTH, Wien. Ber. 85 (2), pag. 327. 1882.

6) Weitere Literatur: LENZ und JACOBI, DUB (Elektromagnetismus), TYNDALL, JOULE, DU MONCEL, RICHIE, FECHNER, POGGENDORFF, HAECKER u. A. m.