

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Elektricität und Magnetismus

Winkelman, Adolph August

1893

Potentialtheorie

Potentialtheorie.

Die Lehre vom Potential hat sich seit Ende des vorigen Jahrhunderts entwickelt, insbesondere durch die Untersuchungen von LAGRANGE¹⁾, LAPLACE²⁾, GAUSS³⁾, GREEN⁴⁾ u. A.

Bei der Untersuchung der Kräfte, welche nach dem reciproken Quadrat der Entfernung wirken, also insbesondere bei der NEWTON'schen Attraktion, ferner bei den elektrostatischen und magnetischen Kräften ergab sich, dass diese Kräfte und ihre Componenten sich einfach darstellen lassen durch eine Grösse, die man eben das Potential dieser Kräfte nennt.

I. Definition des Potentials.

Sind m und μ zwei Massentheilchen, die in der Entfernung r von einander sich befinden, so ist nach NEWTON die anziehende Kraft, die von m aus an μ angreift, gleich derjenigen, die von μ aus an m angreift und diese beiden Kräfte haben die Grösse

$$K = k \frac{m\mu}{r^2},$$

worin k eine Constante ist.

Sind andererseits m und μ zwei magnetische Massenpunkte, d. h. die Magnetismismengen, welche man in zwei magnetischen Massentheilchen sich concentrirt denkt, so ist die magnetische Kraft zwischen ihnen nach COULOMB

$$P = \frac{m\mu}{r^2},$$

und diese Kraft ist eine abstossende, wenn P positiv und eine anziehende, wenn P negativ ist. Die Einheiten der Magnetismismengen sind so gewählt zu denken, dass für $m = \mu = 1$ und $r = 1$ auch $P = 1$ wird.

Sind m und μ zwei elektrische Punkte, d. h. die Elektricitätsmengen, welche man sich in zwei elektrischen Massentheilchen concentrirt denkt, so gilt für die Kraft zwischen ihnen dasselbe (COULOMB'sche) Gesetz

$$P = \frac{m\mu}{r^2}.$$

¹⁾ LAGRANGE, Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps, qui s'attirent en raison inverse des carrés des distances. Nouveaux Mémoires de l'Académie d. Scienc. de Berlin 1777.

²⁾ LAPLACE, Théorie des attractions des sphéroides etc. 1782.

³⁾ GAUSS, Allgemeine Lehrsätze über die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte. GAUSS Werke, Bd. V. Abgedruckt in OSTWALD's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 2.

⁴⁾ GREEN, An Essay on the application of math. analysis to the theories of electricity 1828.

Auch hier ist P eine Abstossungskraft, wenn es positiv ist. Wir können, um Uebereinstimmung in der Bezeichnung hervorzubringen, den Faktor k für die NEWTON'sche Attraktionskraft gleich $-f$ setzen, wo f eine positive Constante ist und die NEWTON'sche Kraft dann stets negativ rechnen, indem das positive Zeichen eine Abstossungskraft anzeigt. Dann ist in jedem Falle

$$K = f \frac{m\mu}{r^2}$$

und K ist eine Abstossungskraft, wenn f positiv ist, und f ist gleich 1 bei magnetischen und elektrischen Massen, gleich $-k$ bei ponderablen Massen.

Die Kraft K wirkt in jedem Falle in der Richtung r der Verbindungslinie. Wenn ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz eingeführt wird, in welchem der Punkt μ die Coordinaten xyz , der Punkt m die Coordinaten abc habe, so ist (Fig. 1).

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

und die Kraft K , die von m aus am Punkt μ angreift, sucht die Coordinaten von μ zu vergrössern und hat die Componenten in Richtung der drei Axen

$$X = K \cos(r, x)$$

$$Y = K \cos(r, y)$$

$$Z = K \cos(r, z),$$

wo (r, x) , (r, y) , (r, z) die Winkel bedeuten, welche die Linie r mit den 3 Coordinatenachsen bildet.

Da $\cos(r, x) = \frac{x-a}{r}$, $\cos(r, y) = \frac{y-b}{r}$, $\cos(r, z) = \frac{z-c}{r}$ ist, so ist

$$X = f \frac{m\mu}{r^2} \frac{x-a}{r}; \quad Y = f \frac{m\mu}{r^2} \frac{y-b}{r}; \quad Z = f \frac{m\mu}{r^2} \frac{z-c}{r}.$$

Nun ist aber

$$\frac{x-a}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right); \quad \frac{y-b}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right); \quad \frac{z-c}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right),$$

also ist

$$X = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{fm}{r} \right)$$

$$Y = -\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{fm}{r} \right)$$

$$Z = -\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{fm}{r} \right).$$

Die drei Componenten der Kraft, die am Punkt μ (xyz) angreift, sind also die negativen Differentialquotienten einer Function nach den drei Coordinaten dieses Punktes. Entsprechend sind die Componenten der Kraft, die am Punkte m angreift

$$A = -X = -m \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{f\mu}{r} \right)$$

$$B = -Y = -m \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{f\mu}{r} \right)$$

$$C = -Z = -m \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{f\mu}{r} \right).$$

Die Funktion, deren negative Differentialquotienten die Kraftcomponenten sind, bezogen auf die Einheit der Masse des angegriffenen Punktes, nennt man das Potential der Kraft. Zuweilen unterscheidet man zwischen Potentialfunktion und Potential und nennt Potential diejenige Funktion, deren negative Differentialquotienten die Kraftcomponenten an irgend einem angegriffenen Punkt angeben, während man unter Potentialfunktion das Potential versteht, wenn der angegriffene Punkt die Masse (oder Magnetismusmenge oder Elektrizitätsmenge) 1 hat. Also

$$U = \frac{fm}{r}$$

ist das Potential der Kraft, die vom Punkte m ausgeht und am Punkt μ angreift und es ist

$$X = -\mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad Y = -\mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad Z = -\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich sofort erweitern. Sind nämlich eine Reihe getrennter anziehender Punkte vorhanden mit den Massen $m_1 m_2 m_3$ und den Coordinaten $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ u. s. w. und wirken diese alle nach dem angeführten Gesetz auf einen Punkt μ mit den Coordinaten xyz , so sind erstens die Entfernungen der einzelnen Punkte von μ

$$r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2}$$

$$\dots \dots \dots$$

und es ist entsprechend dem früheren

$$X = -\mu \frac{\partial}{\partial x} f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right)$$

$$Y = -\mu \frac{\partial}{\partial y} f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right)$$

$$Z = -\mu \frac{\partial}{\partial z} f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right).$$

Sind also n solche anziehende Punkte vorhanden und setzt man

$$U = f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right) = \sum_{i=1}^{i=n} f \frac{m_i}{r_i},$$

so ist

$$X = -\mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad Y = -\mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad Z = -\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Die Grösse U , welche von den als fest angenommenen Coordinaten $a_i b_i c_i$ und den variablen Coordinaten xyz abhängt, nennt man wieder das Potential der Kräfte, welche am Punkte μ angreifen.

Man sieht ohne Weiteres, dass die Kraftcomponente nach irgend welcher Richtung s dargestellt wird durch

$$S = -\mu \frac{\partial U}{\partial s}.$$

So lange der Punkt μ nicht mit einem der Punkte m_i zusammenfällt, sind alle r_i von Null verschieden und daher hat U einen endlichen Werth. Fällt aber der Punkt μ mit einem der Punkte m_i z. B. mit m_g zusammen, d. h. sucht man das Potential des Systemes auf einen Punkt des Systemes selbst, so wird $r_g = 0$ und daher das Glied $\frac{m_g}{r_g}$ in dem Ausdruck des Potentials unendlich gross,

falls m_g nicht selbst unendlich klein von derselben oder höheren Ordnung ist, als r_g .

Wenn man nun von der Abstraktion der materiellen Punkte übergeht zu wirklichen Kraft ausübenden Körpern, so ist bei diesen ja die Dichtigkeit der Masse stets endlich, d. h. in einem unendlich kleinen Volumen des Körpers ist auch bloß eine unendlich kleine Masse enthalten. Es sei abc ein beliebiger Punkt eines Körpers K , und es sei an diesem Punkte ein unendlich kleines Parallelepiped construirt mit den Seiten da, db, dc , so ist dessen Volumen $da db dc$, und wenn ρ die Dichtigkeit des Körpers ist, so ist die Masse dm in diesem Volumenelement

$$dm = \rho da db dc.$$

Dabei kann die Dichtigkeit ρ in jedem Punkte des Körpers einen andern Werth haben, oder sie kann auch constant sein. In letzterem Falle nennt man den Körper homogen. Ist nun wieder μ der Punkt, auf den der Körper mit Kräften wirkt, die eben berechnet werden sollen, so ist die Entfernung des obigen Volumenelementes von diesem Punkte

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

und es ist das Potential dieser Volumenelemente an der Stelle xyz

$$dU = \frac{dm}{r} = \rho \frac{da db dc}{r}.$$

Indem wir diesen Ausdruck für alle Punkte abc des Körpers bilden, d. h. über den ganzen Körper integrieren, erhalten wir das Potential des ganzen Körpers

$$U = \iiint_K \frac{\rho da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Für die Integration ist xyz constant, bloß abc variabel. Hat man integrirt, so erhält man für U eine Funktion von xyz , welche noch abhängt von der Form und Dichtigkeitsvertheilung des Körpers.

Einfacher geschrieben lautet der obige Ausdruck, wenn man unter $d\tau$ ein Volumenelement des Körpers K und unter r dessen Abstand von dem angegriffenen Punkt versteht

$$U = \int_K \frac{\rho d\tau}{r}.$$

Die Kraftcomponenten am Punkte $\mu(xyz)$ sind wieder

$$X = -\mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad Y = -\mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad Z = -\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Das Potential bleibt endlich, auch wenn man einen Punkt des Körpers selbst als den angegriffenen betrachtet. Denn es wird zwar dann in der Summe, die das Potential darstellt, ein r gleich Null, nämlich dasjenige, das von dem angegriffenen Punkt selbst herrührt, aber da die Masse in diesem Punkt unendlich klein ist und zwar von der dritten Ordnung ($\rho da db dc$), so bleibt $\frac{\rho da db dc}{r}$ selbst gleich Null. Auch die Kraftcomponenten XYZ bleiben endlich, selbst für einen Punkt μ im Innern des Körpers. Denn es ist z. B.

$$X = -\mu \int \rho d\tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = +\mu \int \frac{\rho d\tau}{r^2} \frac{(x-a)}{r}.$$

Da nun $\frac{x-a}{r}$ den Cosinus des Winkels (r, x) vorstellt, also endlich ist und

$\frac{\rho d\tau}{r^2}$ gleich 0 bleibt auch für $r = 0$, weil $d\tau$ unendlich klein von der dritten Ordnung ist, so bleibt auch XYZ endlich, d. h. die Kraft, mit der ein solcher mit Masse erfüllter Körper auf einen seiner eigenen Punkte einwirkt, ist endlich.

Das Potential war bisher eingeführt nur für die NEWTON'sche oder COULOMB'sche Kraft: $\frac{f m \mu}{r^2}$ und definirt als diejenige Grösse, deren negativer Differentialquotient nach irgend einer Richtung gleich der Kraftcomponente nach dieser Richtung ist. Wir können diese Definition erweitern und sagen: Jede Kraft hat ein Potential, wenn sich ihre Componenten nach 3 Coordinatenrichtungen darstellen lassen als die Differentialquotienten einer Funktion nach diesen Richtungen. Also immer wenn — für die Einheit der Masse der angegriffenen Punkte —

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

ist, hat die Kraft ein Potential, auch wenn die Kraft nicht die NEWTON'sche oder COULOMB'sche ist. Man kann daraus ersehen, dass stets, wenn eine Kraft zwischen zwei Punkten nur abhängt von der Entfernung zwischen ihnen und in der Richtung der Verbindungslinie wirkt — aber sonst eine ganz beliebige Funktion der Entfernung ist — dass dann die Kraft ein Potential hat. Denn es sei die Kraft, $K = \varphi(r)$, wo

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

und φ eine ganz beliebige Funktion ist. Dann ist

$$X = \varphi(r) \frac{x-a}{r}, \quad Y = \varphi(r) \frac{y-b}{r}, \quad Z = \varphi(r) \frac{z-c}{r},$$

also

$$X = \varphi(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = \varphi(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = \varphi(r) \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Setzt man nun $U = -\int \varphi(r) dr$, so ist

$$\frac{dU}{dr} = -\varphi(r),$$

also

$$X = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}$$

also

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Das Potential dieser Kraft ist also $U = -\int \varphi(r) dr$. Solche Kräfte, die in der Verbindungslinie zwischen zwei Punkten wirken und deren Grösse nur von der Entfernung abhängen, nennt man Centralkräfte. Centralkräfte aller Art haben also ein Potential.

Das oben definirte Potential, welches für die allgemeine Attraktion und die magnetischen und elektrischen Kräfte gilt, nennt man speciell das NEWTON'sche Potential.

Man kann für das Potential noch eine andere Definition geben. Wenn eine Kraft K einen Punkt verschiebt um die Strecke ds , welche mit der Richtung der Kraft den Winkel ϵ bildet, so ist die Elementararbeit δA , welche die Kraft leistet, definirt durch

$$\delta A = K ds \cos \epsilon.$$

Wenn nun die Winkel, welche K mit drei Axen der xyz bildet, mit $\alpha\beta\gamma$, diejenigen, welche ds mit den 3 Axen bildet, mit lmn bezeichnet werden, so ist

$$\cos \epsilon = \cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos m + \cos \gamma \cos n.$$

Ferner ist aber $K \cos \alpha = X$, $K \cos \beta = Y$, $K \cos \gamma = Z$ und $ds \cos l = dx$, $ds \cos m = dy$, $ds \cos n = dz$, also auch

$$\delta A = X dx + Y dy + Z dz.$$

Haben nun die Kräfte ein Potential U , so ist

$$\delta A = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - dU$$

also die Elementararbeit der Kraft (auf unendlich kleinem Wege) ist gleich der Abnahme des Potentials.

Führen wir unsern Punkt von irgend einer Stelle 1 nach einer Stelle 2, um endliche Strecken fort, so ist die Arbeit, die die Kraft dabei leistet

$$A = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2.$$

Diese Arbeit hängt also nur von den Endpunkten 1 und 2 der Verschiebung, gar nicht von dem Wege zwischen 1 und 2 ab.

Die Arbeit, welche man gegen die Kraft leisten muss, um den Punkt von 1 nach 2 zu bringen ist

$$W = U_2 - U_1.$$

Wenn wir nun als 1 einen festen Punkt Z , als Ausgangspunkt, annehmen, in dem das Potential constant $= C$ ist und für 2 irgend einen beliebigen Punkt xyz nehmen, so wird

$$W + C = U.$$

Diese Gleichung besagt: Das Potential U an irgend einer Stelle xyz ist bis auf eine Constante gleich der Arbeit, welche man gegen die Kräfte des Systemes leisten muss, um den Angriffspunkt von einem fest gewählten Ausgangspunkt bis an die betrachtete Stelle zu bringen, oder es ist gleich der Arbeit, welche die Kräfte des Systemes leisten, um den Angriffspunkt von der betrachteten Stelle aus bis zu einem fest gewählten Punkt Z zu bringen.

Ist an der Ausgangsstelle das Potential Null, so giebt diese Arbeit direkt das Potential.

Für die NEWTON'sche und COULOMB'sche Kraft wählt man als Ausgangspunkt zweckmässig einen unendlich entfernten Punkt, weil für diesen alle $r = \infty$, also $C = 0$ wird.

Handelt es sich um die Erdschwere, welche vertikal abwärts wirkt, so ist, wenn die z -Axe vertikal nach oben geht

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g.$$

Das Potential also $U = gz$.

Als Ausgangspunkt wird man hier einen Punkt an der Erdoberfläche nehmen, für welchen $z = 0$ also $U = 0$ ist, es ist also das Potential der Erdschwere in einer Höhe z über dem Erdboden gleich der Arbeit, welche man gegen die Schwere leisten muss, um die Einheit der Masse vom Erdboden bis zur Höhe z zu bringen.

II. Eigenschaften des NEWTON'schen Raumpotentials.

Das Potential eines Systemes von kraftäussernden Punkten hat an jeder Stelle des Raumes also einen bestimmten Werth, U ist eine Funktion von xyz . Alle diejenigen Punkte, an welchen U denselben Werth hat, liegen auf einer Fläche, deren Gleichung eben ist

$$U(xyz) = \text{const.}$$

Jede solche Fläche nennt man eine Fläche gleichen Potentials oder Niveaufläche. Wenn man die ganze Kraft K , die an irgend einem Punkte angreift, zerlegt in Componenten nach den drei Richtungen, von denen die eine die

Normale N der Niveauläche ist, die durch den Punkt xyz geht, die beiden andern s_1 und s_2 also in der Niveauläche liegen, so sind diese Kraftcomponenten resp. gleich

$$-\frac{\partial U}{\partial N}, \quad -\frac{\partial U}{\partial s_1}, \quad -\frac{\partial U}{\partial s_2}.$$

In der Niveauläche ist aber U constant, also $\frac{\partial U}{\partial s_1} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial s_2} = 0$, folglich ist

$$-\frac{\partial U}{\partial N} = K.$$

Die Kraft, die an einem Punkte angreift, hat die Richtung der Normalen der Niveauläche, die durch diesen Punkt geht und ihre Grösse ist $-\frac{\partial U}{\partial N}$.

Denkt man sich lauter Linien gezogen, welche die ganze Schaar von Niveaulächen senkrecht schneiden, so giebt die Richtung dieser Linien also in jedem Punkte die Richtung der wirkenden Kraft an. Man nennt deswegen diese Linien die Kraftlinien des Systems.

Diese Sätze gelten allgemein für jedes Potential, nicht blos für das der NEWTON'schen Kräfte.

Wir berechnen wegen des Folgenden das Potential einer mit Masse homogen erfüllten Kugel vom Radius R auf einen Punkt $P(xyz)$, wobei wir zu unterscheiden haben, ob dieser Punkt ein äusserer P_a oder ein innerer P_i ist. In jedem Falle ist

$$U = \rho \int \frac{d\tau}{r},$$

wo ρ die constante Dichtigkeit ist, und die Integration auszudehnen ist über alle Punkte der Kugel. Führen wir Polarcoordinaten ein (Fig. 2), indem wir die Linie OP_a als Axe des Systems annehmen und bezeichnen wir den variablen Radius Vektor OA mit σ , mit φ die geographische Länge und mit ϑ das Complement der geographischen Breite, d. h. den Winkel P_aOA , endlich die Entfernung des angegriffenen Punktes P_a vom Mittelpunkt der Kugel mit E , so ist

$$d\tau = \sigma^2 d\sigma \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$r^2 = E^2 + \sigma^2 - 2E\sigma \cos \vartheta$$

und

$$U = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2 d\sigma \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{E^2 + \sigma^2 - 2E\sigma \cos \vartheta}} = 2\pi \rho \int_0^R \int_0^\pi \frac{\sigma^2 d\sigma \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{E^2 + \sigma^2 - 2E\sigma \cos \vartheta}}.$$

Nun ist, wenn man sich auf eine Kugelschale vom Radius σ und der Dicke $d\sigma$ beschränkt nur ϑ variabel mit r , also

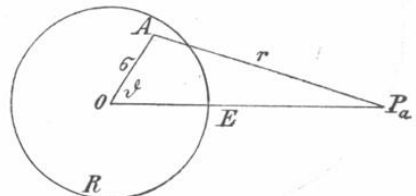
$$r dr = + E\sigma \sin \vartheta d\vartheta,$$

und es ist bei einem Punkte ganz ausserhalb der Kugel für $\vartheta = 0$ $r = E - \sigma$, für $\vartheta = \pi$ $r = E + \sigma$, also

$$U_a = \frac{2\pi \rho}{E} \int_{E-\sigma}^{E+\sigma} \int_\sigma^R \frac{\sigma^2 d\sigma}{r} \frac{r dr}{\sigma} = \frac{4\pi \rho}{E} \int_\sigma^R \sigma^2 d\sigma = \frac{4\pi \rho R^3}{3E}.$$

Da $\frac{4\pi}{3} \rho R^3$ gleich der Masse M der Kugel ist, so ist

$$U = \frac{M}{E} = \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



(P. 2.)

Wäre der Körper eine Hohlkugel von den Radien R_2 und R_1 ($R_2 > R_1$), so wäre

$$U = \frac{4\pi\rho}{E} \int_{R_1}^{R_2} \sigma^2 d\sigma = \frac{4\pi\rho}{3} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{E} = \frac{M}{E}.$$

Wenn aber der Punkt P_h in dem Hohlraum der Hohlkugel liegt (Fig. 3), so ist für $\vartheta = 0$, $r = \sigma - E$, für $\vartheta = \pi$, $r = \sigma + E$, also

$$U_h = \frac{2\pi\rho}{E} \int_{R_1}^{R_2} \int_{\sigma-E}^{\sigma+E} \frac{\sigma^2 d\sigma}{r} \frac{r dr}{r} = 4\pi\rho \int_0^R \sigma d\sigma = 2\pi\rho (R_2^2 - R_1^2).$$

Das Potential aller Punkte des Hohlraums ist also das gleiche.

Für einen Punkt P_i im Innern der Masse einer Vollkugel mit der Entfernung E vom Kugelmittelpunkt, finden wir das Potential, indem wir die Kugel in 2 Theile zerlegen dadurch, dass wir mit dem Radius E eine Kugel um den Mittelpunkt o legen. Dann liegt P_i für die innere Kugel (vom Radius E) ausserhalb, das Potential dieser Kugel ist also

$$U_1 = \frac{4\pi\rho}{3} \frac{E^3}{E} = \frac{4\pi\rho}{3} E^2.$$

Für die übrig bleibende Hohlkugel von den Radien R und E ($R > E$) ist der Punkt P_i ein Punkt im Hohlraum, also ist das Potential dieses Theils

$$U_2 = 2\pi\rho (R^2 - E^2),$$

das gesammte Potential U_i ist daher

$$U_i = U_1 + U_2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2\pi\rho}{3} E^3.$$

Gehen wir zurück zu dem Potential eines Körpers K mit variabler Dichtigkeit ρ , also

$$U = \int_K \frac{\rho d\tau}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

so können wir für dieses Potential leicht eine Differentialgleichung bilden. Untersuchen wir nämlich die zweiten Differentialquotienten von U nach xyz erst für einen angegriffenen Punkt, der ausserhalb des Körpers liegt. Es ist dann r niemals Null und wir haben

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int \frac{\rho d\tau}{r^2} \frac{(x-a)}{r},$$

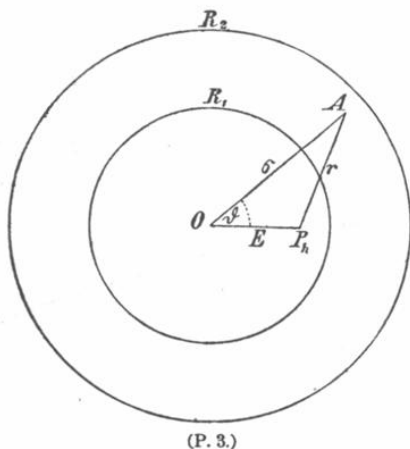
also

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \int \frac{\rho d\tau}{r^3} + 3 \int \frac{\rho d\tau}{r^4} \frac{(x-a)^2}{r},$$

ebenso

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \int \frac{\rho d\tau}{r^3} + 3 \int \frac{\rho d\tau}{r^4} \frac{(y-b)^2}{r}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \int \frac{\rho d\tau}{r^3} + 3 \int \frac{\rho d\tau}{r^4} \frac{(z-c)^2}{r}.$$



Durch Addition ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

oder abgekürzt geschrieben $\Delta U = 0$.

Das ist die Differentialgleichung des NEWTON'schen Potentials für einen ausserhalb der wirkenden Masse liegenden Punkt. Man nennt sie die LAPLACE'sche Gleichung. Für einen innerhalb der Masse liegenden Punkt wird $r = 0$ und man muss desshalb untersuchen, ob nicht die Grössen $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ u. s. w. andere Werthe bekommen.

Es sei A die Stelle des Körpers K , für welche ΔU bestimmt werden soll. Man kann den Körper in 2 Theile. K_1 und K_2 sich getheilt denken, indem man um A mit einem beliebig grossen oder kleinem Radius R eine Kugel beschreibt. K_1 sei der Theil des Körpers ausserhalb der Kugel, K_2 die Kugel, U_1 und U_2 die Potentiale, die von K_1 und K_2 herrühren. Es ist dann U_1 und seine Differentialquotienten stets endlich, weil A endlich von allen Punkten entfernt ist. Nur in U_2 könnten Unstetigkeiten vorkommen. Es ist auch

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

und $\Delta U_1 = 0$, weil A für K_1 ein äusserer Punkt ist, also bleibt

$$\Delta U = \Delta U_2.$$

Nun ist U_2 das Potential einer Kugel auf einen inneren Punkt, nämlich auf ihren Mittelpunkt und es ist also, wenn wir die Kugel so klein annehmen, dass wir die Dichtigkeit in ihr als constant ansehen können:

$$U_2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2\pi\rho}{3} E^2,$$

also

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{4\pi\rho}{3} x, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{4\pi\rho}{3} y, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{4\pi\rho}{3} z,$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{3},$$

also

$$\Delta U_2 = -4\pi\rho.$$

Daher haben wir für einen Punkt innerhalb der wirkenden Masse

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

Diese Gleichung nennt man die POISSON'sche Gleichung. Wenn man also für jeden Punkt des Raumes das Potential U kennt als Function von $x y z$, ohne zu wissen, wie die Massen vertheilt sind, von denen es herrührt, so findet man durch Bildung der Operation Δ umgekehrt die Dichtigkeit an jedem Punkte des Raumes. Da, wo keine wirkenden Massen sind, ist $\Delta U = 0$, also auch die Dichtigkeit $= 0$, da, wo wirkende Massen vorhanden sind, ist $\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta U$.

Diese Beziehung gilt aber nicht für jedes beliebige Potential, sondern nur für das NEWTON'sche Potential, d. h. für Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken.

Aus der Differentialgleichung $\Delta U = -4\pi\rho$ lässt sich umgekehrt, indem man sie integrirt, das Potential für jeden Punkt finden. Dabei ist nur zu bemerken, dass U selbst gleich 0 wird für $r = \infty$ und diese Bedingung ist jeder Lösung der Gleichung $\Delta U = -4\pi\rho$ aufzulegen. Ferner aber ist für einen unendlich entfernten Punkt zwar $U_\infty = 0$, aber

$$U_\infty r_\infty = \int \rho dt = M,$$

wo M die Masse des Körpers, von dem die Kräfte ausgehen, ist. Diese Gleichung dient oft zur Bestimmung von Integrationsconstanten.

Dass man aus der Gleichung $\Delta U = -4\pi\rho$ die Werthe des Potentials selbst finden kann, soll für das Beispiel einer homogenen Kugel gezeigt werden. Bei dieser kann das Potential an jedem Punkt ausserhalb oder innerhalb nur von dem Radiusvektor E abhängen, der vom Mittelpunkt der Kugel aus gezogen ist, die Niveauflächen müssen Kugelflächen sein. Es hängt also U nicht von xyz , sondern nur von $E = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ab. Daher ist

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dE^2} + \frac{2}{E} \frac{dU}{dE} = \frac{1}{E^2} \frac{d}{dE} \left(E^2 \frac{dU}{dE} \right)$$

Für einen äusseren Punkt ist also

$$\Delta U = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d}{dE} \left(E^2 \frac{dU}{dE} \right) = 0,$$

also

$$E^2 \frac{dU}{dE} = C, \quad U = -\frac{C}{E} + D,$$

worin C und D Integrationsconstanten sind. Da $U_\infty E_\infty = M$ sein muss, so folgt $D = 0$, $-C = M$, also

$$U = \frac{M}{E},$$

wie oben abgeleitet.

Für einen inneren Punkt ist

$$\frac{d}{dE} \left(E^2 \frac{dU}{dE} \right) = -4\pi\rho E^2, \quad \text{also} \quad E^2 \frac{dU}{dE} = C - \frac{4\pi\rho}{3} E^3.$$

Wendet man diesen Ausdruck für $E = 0$ an, so ergibt sich $C = 0$, also

$$\frac{dU}{dE} = -\frac{4\pi\rho}{3} E,$$

mithin

$$U = D - \frac{2\pi\rho}{3} E^2.$$

D ist eine Constante, die in unserer früheren Betrachtung gleich $2\pi\rho R^2$ gefunden wurde.

In derselben Weise lassen sich durch Umformung des Ausdrucks ΔU in Cylinder-, Kugel-, elliptische Coordinaten u. s. w. die Werthe des Potentials für homogene und inhomogene Kugeln, Cylinder, Ellipsoide finden.

Es möge nur das Potential eines homogenen Ellipsoids angeführt, nicht abgeleitet werden. Das Ellipsoid habe die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dann ist

$$U = N - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$

worin die Grössen N, A, B, C für einen äusseren und einen inneren Punkt je durch bestimmte Integrale definit sind. Es ist nämlich für einen inneren Punkt

$$\begin{aligned} N_i &= \pi a b c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \\ A_i &= \pi a b c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \\ B_i &= \pi a b c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \\ C_i &= \pi a b c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}. \end{aligned}$$

Für einen äusseren Punkt werden N, A, B, C durch dieselben Integrale dargestellt, nur ist die untere Grenze nicht 0, sondern eine Grösse u und diese ist bestimmt als die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1.$$

Sobald die Dichtigkeit ρ eines Körpers gegeben ist, kann man durch Ausführung der Integration, die entweder in geschlossener Form oder durch Entwicklung in Reihen möglich ist, das Potential an jeder Stelle finden. Der Weg der Forschung war aber ein umgekehrter. Man hat Lösungen der Gleichung $\Delta U = 0$ gesucht, die für unendlich entfernte Punkte $U = 0$ ergaben, hat dann diejenigen Stellen aufgesucht, in denen ΔU Ausnahmswerthe bekam, also nicht gleich 0 war, und indem man diese Ausnahmswerthe gleich $-4\pi\rho$ setzte, hatte man umgekehrt das Potential eines Systemes gefunden, das an diesen Ausnahmstellen die so bestimmte Dichtigkeit ρ hatte.

Bei Attraktionsproblemen kommen nur allein Massen vor, die in Körpern enthalten sind, also auch nur Potentiale, wie die bisher betrachteten, die von Körpern ausgehen. Man nennt sie auch Raumpotentiale. Solche haben wir untersucht. Auch ist bei Attraktionsproblemen die Dichtigkeit ρ eine unveränderliche Grösse und gewöhnlich bekannt. Dasselbe ist der Fall bei den Potentialen von permanent magnetischen Körpern und bei elektrischen Isolatoren, bei denen die Dichtigkeit der Elektrizität oder des Magnetismus als bekannt anzunehmen sind. Andere Verhältnisse aber treten ein bei den Problemen der Elektrostatik in leitenden Körpern und des Magnetismus in inducirbaren Körpern.

III. Potentialtheorie in der Elektrostatik (Oberflächenpotential).

Für die Anziehungskräfte zwischen Elektrizitätsmengen gilt das oben angeführte COULOMB'sche Gesetz. Es haben also diese Kräfte an jeder Stelle ein Potential U und es sind die Componenten die Kräfte, die auf eine Elektrizitätsmenge 1 wirken:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Zugleich ist an jeder Stelle, wo keine wirkende Elektrizitätsmenge ist $\Delta U = 0$, an jeder Stelle, wo eine solche vorhanden ist $\Delta U = -4\pi\rho$. Darin bedeutet ρ die Volumendichtigkeit der Elektrizität, d. h. die Elektrizitätsmenge, die in einem Volumelement enthalten ist, dividirt durch die Grösse dieses Elements. Soll die Elektrizität im Gleichgewicht in einem Körper sein — der Fall, den die Elektrostatik allein untersucht — so müssen die Componenten aller wirkenden Kräfte zusammen gleich Null sein. In Isolatoren wirken auf die Elektrizitätsmengen ausser den elektrischen Kräften noch solche, die von den Körpermolekülen ausgehen. In Leitern aber sind die Elektrizitätsmengen nicht von den Körpermolekülen beeinflusst, sie folgen also nur den elektrischen Kräften. Im Fall des Gleichgewichts der Elektrizität muss also in einem Leiter sein.

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

also $U = \text{const.}$

In jedem Leiter muss im Falle des Gleichgewichts an allen seinen Punkten das elektrische Potential denselben Werth haben.

Daraus folgt aber, da für einen inneren Punkt des (geladenen) Leiters $\Delta U = -4\pi\rho$ ist, dass $\rho = 0$ ist.

Im Innern eines Leiters kann also keine freie Elektrizität vorhanden sein.

Es kann sich daher, wie es auch die Erfahrung zeigt, die Elektrizität nur auf der Oberfläche des Leiters befinden, und wir sind vor die neue Aufgabe gestellt, das Potential eines elektrisirten Körpers zu bestimmen und seine Eigenschaften zu finden, bei dem die wirkende Masse, d. h. hier die Elektrizitätsmenge, sich nur auf der Oberfläche befindet. Ein solches Potential nennt man ein Oberflächenpotential. Nun sei ds ein Oberflächenelement des Leiters und de die Elektrizitätsmenge, die sich auf ihm befindet, dann definiert man $h = \frac{de}{ds}$ als die Dichtigkeit der Elektrizität an dieser Stelle der Oberfläche. Die Dichtigkeit wird im Allgemeinen von Punkt zu Punkt verschieden sein und es ist, wenn e die gesammte Elektrizitätsmenge auf dem Leiter bedeutet

$$\int_{\Omega} h ds = e,$$

das Integral ausgedehnt über die ganze Oberfläche Ω des Körpers.

Das Potential, das von der Elektrizitätsmenge de auf dem Element ds (dessen Coordinaten abc seien) ausgeübt wird auf einen Punkt P mit den Coordinaten xyz in der Entfernung $r [r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}]$ ist:

$$\frac{de}{r} = \frac{h ds}{r},$$

folglich das Potential des ganzen Leiters

$$V = \int_{\Omega} \frac{h ds}{r}.$$

Dies ist der Ausdruck für das Oberflächenpotential. Es sollen die Eigenschaften desselben ermittelt werden.

Nun kann man erstens leicht beweisen, dass V an einem Punkt A (Fig. 4) der belebten Fläche selbst endlich bleibt.

Denn alle Punkte der belegten Fläche haben von A endlichen Abstand, ^{das} von ihnen herrührende Potential ist also endlich, mit Ausnahme der Punkte, die ganz nahe rings um A herum liegen. Wir legen um A einen Kreis mit dem sehr kleinen Radius R und wollen das Potential dieser kleinen Kreisfläche auf A bestimmen. Es sei V_1 . Das Potential des übrigen Theils der Fläche sei V_2 ; dieses ist endlich für den Punkt A . Es ist dann $V = V_1 + V_2$.

Nun betrachten wir statt des Punktes A einen andern unendlich benachbarten A' , der auf der Normalen N im Punkte A nach links zu liege. Es sei N der Abstand AA' , dann ist, wenn σ der variable Abstand eines Punktes P der Kreisfläche von A ist, die Entfernung $PA' = r$,

$$r = \sqrt{N^2 + \sigma^2},$$

also wenn wir Polarcoordinaten σ und ϑ einführen:

$$V_1 = h \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma d\sigma d\vartheta}{\sqrt{N^2 + \sigma^2}} = 2\pi h \int_0^R \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{N^2 + \sigma^2}}$$

$$V_1 = 2\pi h [\sqrt{N^2 + \sigma^2}]_0^R = 2\pi h (\sqrt{N^2 + R^2} - \sqrt{N^2})$$

Für $N=0$ und $R=0$, also für den Punkt A wird also $V_1=0$, d. h. V hat am Punkte A den endlichen Werth V_2 . Dagegen ist die Kraft, die an jedem

Punkte A nach der einen und der anderen Richtung der Normale der Fläche wirkt, verschieden. Denn es ist ja

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V_1}{\partial N} + \frac{\partial V_2}{\partial N},$$

und es ist für $R=0$

$$\frac{\partial V}{\partial N} = 2\pi h \left(\frac{N}{\sqrt{R^2 + N^2}} - \frac{N}{\sqrt{N^2}} \right).$$

Lassen wir N gegen 0 convergiren, so lange R noch endlich ist, so ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial N} = -2\pi h \frac{N}{\sqrt{N^2}},$$

also ist für die eine Seite der Fläche N (N positiv)

$$\frac{\partial V}{\partial N} = -2\pi h,$$

für die andere Seite der Fläche (N negativ) ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial N} = +2\pi h.$$

Unterscheiden wir die beiden Richtungen der Normale mit N_i und N_a , rechnen also beide positiv von der Fläche aus, so ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial N_i} + \frac{\partial V_1}{\partial N_a} = -4\pi h.$$

Da $\frac{\partial V_2}{\partial N}$ für beide Richtungen denselben Werth hat, so ist also

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} = -4\pi h.$$

Kennt man also von einem System das Potential V , so kann man die Dichtigkeit h für jeden Punkt der Fläche finden. In der Elektrostatik muss bei elektrisirten Leitern das Potential im Innern constant sein, also $\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0$ sein, es bleibt dann also nur $\frac{\partial V}{\partial N_a} = -4\pi h$.

In jedem Punkte des Raumes muss hier $\Delta V = 0$ sein.

Als Beispiel nehmen wir eine elektrisirte Metallkugel an. Die Niveauflächen müssen bei dieser Kugeln sein, wenn keine äusseren influenzirenden Kräfte vorhanden sind. Die Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ für eine Kugel ist, wie wir sahen

$$V = \frac{M}{\sigma},$$

wo M die gesammte Elektricitätsmenge der Kugel ist.

An der Kugeloberfläche (vom Radius R) ist

$$V = \frac{M}{R} = C$$

und ebenso gross ist es im Innern der Kugel.

Die Normale N_a ist der Radiusvektor σ selbst, also ist

$$-4\pi h = \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=R} = -\frac{M}{R^2},$$

also

$$h = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

Die Dichtigkeit ist also hier constant, was von vornherein zu erwarten war. Bei anders gestalteten Körpern ist sie nicht constant.

Für die Untersuchung des Potentials ist ein allgemeiner Satz von grosser Wichtigkeit, welcher von GREEN abgeleitet und den man den GREEN'schen Satz nennt.

Bedeutet nämlich P und Q zwei beliebige Functionen, die in einem abgeschlossenen Theile S des Raumes selbst stetig sind und deren erste Differentialquotienten auch stetig sind, so ist nach GREEN

$$\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) d\tau + \int_S d\tau P \Delta Q = - \int_{\Omega} ds \frac{P \partial Q}{\partial N}$$

Darin bedeutet Ω die Oberfläche des Raumes S .

Da nun P und Q mit einander vertauscht werden können, so ergibt sich auch

$$\int_S d\tau (P \Delta Q - Q \Delta P) = - \int_{\Omega} ds \left(P \frac{\partial Q}{\partial N} - Q \frac{\partial P}{\partial N} \right).$$

Aus diesem Satz folgen durch Specialisirung eine grosse Reihe von Sätzen, welche bei den verschiedensten Problemen der Potentialtheorie in Anwendung kommen.

1) Ist $P = 1$, also $\Delta P = 0$, $\frac{\partial P}{\partial N} = 0$, so folgt

$$\int_S d\tau \Delta Q = - \int_{\Omega} ds \frac{\partial Q}{\partial N}$$

Ist in dem betrachteten Raume S keine freie Elektrizität vorhanden (sondern blos ausserhalb), so ist ΔQ für alle seine Punkte $= 0$ und daher auch

$$\int_{\Omega} ds \frac{\partial Q}{\partial N} = 0,$$

$\frac{\partial Q}{\partial N}$ ist aber die Componente der elektrischen Kraft nach der Normale der Fläche Ω . Die Grösse $ds \frac{\partial Q}{\partial N}$ nennt man das Element der Kraftströmung und die Gleichung sagt also aus, dass die gesammte Kraftströmung, die durch die Oberfläche in einen solchen Raum hineingeht, gleich der aus ihm herausgehenden sein muss.

Sind dagegen in dem betrachteten Raume elektrisirte Punkte (stetig oder diskret) vorhanden, so ist für jeden dieser Punkte $\Delta Q = -4\pi\rho$, also

$$\int_S d\tau \Delta Q = -4\pi \int_S \rho d\tau = -4\pi M,$$

wo M die gesammte Menge der Elektrizität in dem Raume S ist und es folgt daraus

$$\int_{\Omega} ds \frac{\partial Q}{\partial N} = 4\pi M.$$

Die gesammte Kraftströmung durch die Oberfläche (die Normale nach dem Innern gerechnet) ist $= 4\pi M$.

2) Falls P und Q Functionen sind, die in dem ganzen betrachteten Raume den Gleichungen $\Delta P = 0$ und $\Delta Q = 0$ genügen, so ist für die Oberfläche dieses Raumes

$$\int_{\Omega} \left(P \frac{\partial Q}{\partial N} - Q \frac{\partial P}{\partial N} ds \right) = 0. \quad (1)$$

Wir nehmen nun irgend einen festen Punkt abc in dem Raume S an und bezeichnen seiner Entfernung von einem beliebigen andern Punkt dieses Raumes oder seiner Oberfläche (xyz) mit r , dann ist

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Und nun nehmen wir für P den Werth $\frac{1}{r}$ an. Da an der Stelle abc der Werth von $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ von Null verschieden ist, so können wir die Gleichung 1 nur anwenden, wenn wir den Punkt abc aus dem Raume S ausschliessen. Das geschieht, indem wir um den Punkt abc eine Kugel K vom Radius R und der Oberfläche $\Re$ legen. Dann ist im Raume $S - K$ (wenn ein Element der Kugel- fläche mit $d\Re$ bezeichnet wird

$$\int_{\Re} \frac{d\Re}{r^2} Q + \int_{\Re} \frac{d\Re}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} = \int_{\Omega} ds Q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} - \int_{\Omega} \frac{ds}{r} \frac{\partial Q}{\partial N}.$$

Das zweite Integral links verschwindet, wenn R unendlich klein wird, das erste giebt, wenn Q_{abc} den Werth von Q im Punkt abc bedeutet,

$$4\pi Q_{abc},$$

so dass die Gleichung wird

$$Q_{abc} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} ds Q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{ds}{r} \frac{\partial Q}{\partial N}. \quad (2)$$

Daraus ergibt sich, dass man den Werth von Q in einem beliebigen Punkte abc des Raumes S berechnen kann, wenn man nur die Werthe von Q und $\frac{\partial Q}{\partial N}$ an der Oberfläche dieses Raumes kennt.

3) Eine häufig verwerthbare Folgerung aus dem GREEN'schen Satz ergibt sich, wenn man $P=Q$ setzt. Dann wird

$$\int_S d\tau \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] = - \int_{\Omega} P \frac{\partial P}{\partial N} ds.$$

Aus dieser Formel folgt allgemein, dass wenn für einen Theil der Oberfläche $P=0$, für den übrigen Theil der Oberfläche $\frac{\partial P}{\partial N}=0$ ist, dass dann P in dem ganzen Raume gleich Null sein muss.

Daraus folgt, dass in der Gleichung (2) zur Berechnung von Q_{abc} nicht die Werthe von Q und von $\frac{\partial Q}{\partial N}$ an allen Punkten der Fläche gegeben sein können. Denn diese sind nicht unabhängig von einander. Vielmehr genügt es, wenn für alle Punkte von Ω entweder Q oder $\frac{\partial Q}{\partial N}$ gegeben sind. Im letzteren Falle ist Q_{abc} nur bis auf eine additive Constante bestimmt.

Eine weitere Folgerung aus der Gleichung (2) ist folgende:

Es werde um den Punkt abc eine Kugel vom Radius R gelegt, welche ganz innerhalb des Raumes S liege und auf die Oberfläche $\Re$ dieser Kugel mögen die Oberflächenintegrale von (2) angewendet werden. Dann ist

$$Q_{abc} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Re} ds Q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \int_{\Re} ds \frac{\partial Q}{\partial N}.$$

Das letzte Integral ist gleich Null (nach Satz 1), im ersten ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} = \frac{1}{R^2},$$

also wird

$$Q_{abc} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Re} ds Q.$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen stellt aber den Mittelwerth von Q auf der Oberfläche der Kugel dar, so dass der Satz folgt:

Der Werth von Q im Mittelpunkt einer Kugel ist gleich dem arithmetischen Mittel der Werthe von Q an der Oberfläche dieser Kugel.

Daraus folgt, dass in dem ganzen Raum, in welchem $\Delta Q = 0$ ist, Q kein Maximum und kein Minimum haben kann, da es immer zwischen den Werthen von Q auf der Oberfläche einer beliebigen Kugel liegen muss.

Anwendungen dieser Sätze werden in der Elektrostatik gegeben werden.¹⁾

IV. Potential einer Doppelschicht.

In der Theorie des Elektromagnetismus, wie auch in anderen Gebieten der Physik, kommt eine Grösse vor, welche der Potentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, welche aber bei dem Durchgang durch eine bestimmte Fläche sich sprungweise ändert. Ein solches Potential wird von einer Doppelschicht ausgeübt. Eine solche Doppelschicht ist auf folgende Weise definiert:

Eine beliebige Fläche F sei in beliebiger Weise mit Masse belegt (elektrischer oder magnetischer Masse). Es sei ds ein Element dieser Fläche und N die eine Richtung seiner Normale. Wir denken uns auf den Normalen der einzelnen Flächenelemente kleine Stücke dN abgeschnitten, die stetig an Grösse variiren können und denken uns durch die Endpunkte dieser Normalen eine zweite Fläche F_1 gelegt, die der ersten also unendlich benachbart ist. Jedem Element ds von F entspricht dann ein Element ds_1 von F_1 . Und nun sei die Fläche F_1 so mit Masse belegt, dass auf jedem Element ds_1 gleich viel, aber entgegengesetzte Masse liege, wie auf dem entsprechenden Element ds von F . Es sei ρ die Dichtigkeit der Masse auf dem ersten, $-\rho$ die auf dem zweiten Element. Dann üben diese beiden Elemente (deren Coordinaten abc sein mögen) auf einen Punkt P (mit der Einheit der Masse) ein NEWTON'sches Potential aus und zwar das erste

$$V_1 = + \frac{\rho ds}{r},$$

das zweite

$$V_2 = - \rho ds \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} dN \right).$$

Das Gesamtpotential beider Elemente ist also

$$W = V_2 - V_1 = - \rho ds dN \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r}.$$

Die Grösse $-\rho dN$ bezeichnet man als die Dichtigkeit der Doppelschicht an dem Element ds . Wir setzen sie gleich ν , dann ist das Potential der ganzen Doppelschicht

$$W = \int \nu \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} ds.$$

Die Grösse $-\nu$ wird auch als das Moment der Doppelschicht bezeichnet.²⁾

¹⁾ Weitere allgemeine Folgerungen aus dem GREEN'schen Satze in Bezug auf die Bestimmung von Potentialwerthen findet man in CLAUSIUS »Die Potentialfunction und das Potential«. Leipzig 1879.

²⁾ Moment der Doppelschicht nennt sie v. HELMHOLTZ. Ges. Abh., pag. 489 u. 856. Dichtigkeit der Doppelschicht nennt sie KIRCHHOFF, Mechanik, pag. 180. Das Vorzeichen ist bei beiden Autoren entgegengesetzt.

Das Potential einer elektrischen Doppelschicht lässt sich in einfacher Weise geometrisch darstellen.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial N} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, N).$$

Darin ist (r, N) der Winkel, welchen die vom Punkte P nach ds gezogene Gerade mit der positiven Richtung von N bildet. Zieht man vom Punkte P aus eine Kugel mit dem Radius r , so ist $ds \cos(r, N)$ die Projection von ds auf diese Kugelfläche, welche Grösse wir mit $\pm d\omega$ bezeichnen. $d\omega$ ist positiv, wenn $\cos(r, N)$ positiv ist, und negativ, wenn $\cos(r, N)$ negativ ist.

Also ist

$$dW = \mp \frac{d\omega}{r^2}.$$

Legen wir nun um den Punkt P eine concentrische Kugel mit dem Radius 1, so wird von dem Kegel, dessen Leitstrahlen das Flächenstück $d\omega$ umfahren, aus dieser Einheitskugel ein Flächenstück von der Grösse dK herausgeschnitten, so dass

$$dK = \frac{d\omega}{r^2}$$

ist. Die Grösse dK ist dann die scheinbare Grösse des Flächenstücks ds , gesehen vom Punkte P aus. Und daher wird das Potential der Doppelschicht

$$W = \mp \int_F dK.$$

Das Potential einer elektrischen Doppelschicht ist an einem Punkte P (wenn v constant ist) gleich der scheinbaren Grösse der massebelegten Fläche (oder der Kegelecke am Punkte P), multiplicirt mit dem Moment der Doppelschicht, und wenn v nicht constant ist, gleich dem Integral über das Produkt von v und der scheinbaren Grösse jedes einzelnen Elementes von F .

Aus dieser geometrischen Darstellung von W kann man leicht entnehmen, wie gross das Potential einer solchen Doppelschicht an der belegten Fläche selbst ist. Es wird sich zeigen, dass auf beiden Seiten der Fläche der Werth von W verschieden ist. Es liege also der Punkt P auf der einen Seite der Fläche (nach dem positiven N hin) unendlich nahe an ihr. Wir schneiden aus F einen kleinen Kreis vom Radius R rings um P (mit P als Mittelpunkt) heraus. Das Potential dieses Kreises sei W_1 , das der übrigen Fläche W_2 . Es ist dann

$$W = W_1 + W_2,$$

und W kann nur dann unendlich oder unstetig werden, wenn W_1 es wird.

Nun ist aber die scheinbare Grösse dieses Kreises von seinem Mittelpunkt aus gesehen, 2π und folglich ist W_1 , wenn P auf der positiven Seite von N liegt, gleich $-2\pi v$, und wenn P auf der negativen Seite liegt, gleich $+2\pi v$. Es nimmt also W_1 sprunghaft um $4\pi v$ zu, wenn P von der negativen zur positiven Seite der Fläche übergeht. Denselben Sprung erleidet auch das ganze Potential W .

Dagegen haben die Kraftcomponenten einer solchen Doppelschicht nicht an beiden Seiten derselben verschiedene Werthe. Es brauchte dazu nur bewiesen zu werden, dass $\frac{\partial W_1}{\partial N}$ stetig bleibt, dann versteht sich von $\frac{\partial W}{\partial N}$ das Gleiche von selbst.

Wir legen unsern Punkt P unendlich nahe an die Fläche F , im Abstand N von ihr. Es sei R der Radius des kleinen Kreises. Dann ist

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \nu \int \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} ds = \nu \int_0^{R^2\pi} \rho d\rho d\vartheta \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + N^2}} \right) \\
 &= -2\pi\nu \int_0^R \frac{\rho d\rho N}{(\sqrt{\rho^2 + N^2})^3} = +2\pi\nu \left[\frac{N}{\sqrt{N^2}} - \frac{N}{\sqrt{R^2 + N^2}} \right]_0^R.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst das vorhin abgeleitete Resultat, dass, je nachdem $\sqrt{N^2}$ positiv oder negativ genommen wird, $W_1 = \pm 2\pi\nu$ ist. Ferner ist

$$\frac{\partial W_1}{\partial N} = +2\pi\nu \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + N^2})^3} = +\frac{2\pi\nu}{R},$$

wenn man $N=0$ werden lässt. Es ergibt sich daraus, dass $\frac{\partial W}{\partial N}$ unabhängig von N ist, also auf beiden Seiten der Fläche denselben Werth hat, mithin stetig ist.

Solche Doppelschichtpotentiale kommen z. B. vor bei der Behandlung magnetischer Schalen nach der Poisson'schen¹⁾ Theorie des Magnetismus. Unter einer magnetischen Schale versteht man einen dünnen, schalenförmigen Körper, welcher an allen Stellen senkrecht zu seiner Begrenzungsfläche magnetisirt ist. Das Produkt aus der positiven Magnetismusmenge auf einem Element in die Dicke der Schale heisst die Stärke der magnetischen Schale an diesem Element.²⁾ Ist diese Stärke constant, so heisst die Schale einfach, variirt sie auf der Schale, so heisst sie complex.

Die zwei unendlich benachbarten Flächenelemente, die mit den Magnetismusmengen $+\mu$ und $-\mu$ belegt sind, üben an einem Punkt P eine Kraft aus, die sich aus dem Potential

$$\mu dN ds \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r}$$

ableitet. Die Grösse $\mu dN = \Phi$ ist die Stärke der Schale an diesem Element. Das Potential der ganzen Schale ist daher

$$W = \int_F \Phi \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} ds,$$

also das Potential einer Doppelschicht mit allen Eigenschaften derselben.

V. Die charakteristische Gleichung des Potentials in der Theorie des inducirten Magnetismus und der Dielektrika.

Die charakteristische Gleichung für das Oberflächenpotential,

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi h,$$

erfährt eine Aenderung, sobald man aus der Erfahrung die Thatsache hinzunimmt, dass die Substanz des Mediums, in welchem die Kräfte wirken, selbst einen Einfluss auf diese Kräfte hat. Das ist bei den magnetischen Kräften der Fall, sobald man auf die magnetische Induction Rücksicht nimmt und das ist bei den elektrostatischen Kräften der Fall, sobald man auf die dielektrische Polarisation Rücksicht nimmt. Dann ist an den beiden Seiten der Fläche, für welche die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi h,$$

¹⁾ POISSON, Mémoires de l'Académie 1811.

²⁾ MAXWELL Treatise on Electricity and Magnetism. Bd. II, No. 410.

sonst gilt, nicht mehr dasselbe Medium vorhanden, und die Gleichung muss daher eine Modifikation erfahren. Diese wird am deutlichsten erkennbar in der Poisson'schen Theorie der magnetischen Induction, die sich, Gleichung für Gleichung, auch auf die Theorie der dielektrischen Polarisation übertragen lässt. Es seien zwei magnetische Pole, d. h. zwei Magnetismushmengen m und μ in der Entfernung r gegeben. Ihr Potential ist

$$U = \frac{m\mu}{r}.$$

Der angegriffene Pol m habe die Coordinaten xyz , während der anziehende Pol μ einem kleinen magnetischen Körper angehöre und die Coordinaten abc habe. Das Potential des ganzen kleinen magnetischen Körpers (des magnetischen Moleküls) ist also

$$Q = m \Sigma \frac{\mu}{r}.$$

Das magnetische Molekül besteht aus einer Reihe von magnetischen Polen und zwar derart, dass ebenso viel $+$ wie $-$ Magnetismus in ihm enthalten ist, also $\Sigma \mu = 0$ ist. Bezeichnet ρ die Entfernung des Poles m vom Mittelpunkt des Moleküls, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} - a \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} - b \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} - c \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} + \dots$$

wobei man, da das Molekül sehr klein sein soll, bei den mit abc multiplicirten Gliedern stehen bleiben kann. Es ist daher

$$Q = m \left(\frac{1}{\rho} \Sigma \mu - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \Sigma \mu a - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \Sigma \mu b - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \Sigma \mu c \right)$$

Die Grössen $\Sigma \mu a = \alpha$, $\Sigma \mu b = \beta$, $\Sigma \mu c = \gamma$, nennt man die Componenten des magnetischen Moments des Moleküls. Das Molekül hat ein bestimmtes magnetisches Moment $M = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ in bestimmter Richtung, die gegeben ist durch die Gleichungen

$$\alpha = M \cos(M, x), \quad \beta = M \cos(M, y), \quad \gamma = M \cos(M, z).$$

Diese Richtung heisst die magnetische Axe des Moleküls.

Besteht das magnetische Molekül aus einer ganz kleinen Magnetnadel von der Länge l , an deren beiden Enden die Magnetismushmenge $+\mu$ und $-\mu$ vorhanden sind, so ist die Längsrichtung der Nadel die magnetische Axe und das magnetische Moment ist $M = \mu l$. Es wird nun das Potential eines magnetischen Moleküls auf den Pol xyz

$$Q = m \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \right)$$

Betrachten wir dieses Molekül jetzt als Theil eines ausgedehnten Körpers, von dem es ein Volumenelement $d\tau$ einnehme und beziehen wir das magnetische Moment auf die Volumeneinheit, d. h. setzen wir

$$\alpha = \lambda d\tau, \quad \beta = \mu d\tau, \quad \gamma = \nu d\tau,$$

so wird das Potential eines magnetischen Körpers K auf einen Pol xyz (mit der Magnetismushmenge 1)

$$Q = - \int_K \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) d\tau,$$

worin r die Entfernung des Volumenelements $d\tau$ von xyz ist. Ist der Körper gleichmässig magnetisirt, d. h. sind $\lambda\mu\nu$ constant, und führen wir das NEWTON'sche Potential des Körpers (mit der Dichtigkeit 1)

$$U = \int_K \frac{d\tau}{r}$$

ein, so wird

$$Q = - \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial U}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Eine magnetisirte Eisenkugel, z. B. vom Volumen J , hat $U = \frac{J}{\rho}$, wo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, also

$$Q = + \left(\lambda J \frac{x}{\rho^3} + \mu J \frac{y}{\rho^3} + \nu J \frac{z}{\rho^3} \right).$$

Da für eine Hohlkugel das NEWTON'sche Potential im Innern des Hohlraumes constant ist, so hat eine magnetisirte Hohlkugel an einem Punkte des Hohlraumes das Potential 0. Der obige Ausdruck für Q gilt sowohl für einen nicht in der magnetisirten Masse liegenden Punkt, als für einen inneren Punkt. Nun ist das Potential U einer Kugel (Radius R) mit der Dichtigkeit 1 auf einen inneren Punkt (in der Entfernung σ vom Centrum)

$$U = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3} \sigma^2,$$

also ist bei einer homogenen magnetisirten Kugel das magnetische Potential

$$Q = \frac{4\pi}{3} (\lambda x + \mu y + \nu z).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4\pi}{3} \lambda, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{4\pi}{3} \mu, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{4\pi}{3} \nu.$$

Aus diesem speciellen Fall kann man leicht auf den allgemeinen schliessen, dass man einen beliebigen, nicht gleichmässig magnetisirten Körper hat. Für irgend einen inneren Punkt i wird Q auch durch die obige Gleichung (1) ausgedrückt. Dagegen ergibt sich $\frac{\partial Q}{\partial x}$ dadurch, dass wir um i eine kleine Kugel schlagen, den übrigen Theil des Körpers mit K_2 bezeichnen, sein Potential mit Q_2 . Dann ist

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4\pi}{3} \lambda + \frac{\partial Q_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{4\pi}{3} \mu + \frac{\partial Q_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{4\pi}{3} \nu + \frac{\partial Q_2}{\partial z}.$$

wo $\lambda\mu\nu$ die magnetischen Momente am Punkt i selbst bedeuten.

Wirken nun magnetische Kräfte auf einen weichen Eisenkörper, so erzeugen sie erfahrungsgemäss in diesem selbst Magnetismus, sie induciren ihn magnetisch. Die an einem Punkt erzeugten magnetischen Momente $\alpha\beta\gamma$ sind zu bestimmen. Man nimmt nach POISSON¹⁾ in erster Linie an, dass das inducirte magnetische Moment an irgend einer Stelle dieselbe Richtung habe wie die gesammte magnetische Kraft, die an dieser Stelle angreift und ihr an Grösse proportional sei.

Es sei V das Potential gegebener magnetisirender Kräfte, die auf einen weichen Körper inducirend wirken. Die Kraft, die davon an einem Punkt xyz des Körpers wirkt, hat dann die Componenten

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ausserdem ist aber der Eisenkörper selbst magnetisch geworden und übt

¹⁾ POISSON, Sur la Théorie du magnétisme Mém. de l'Acad. franç. Bd. V. u. VI.

ein Potential Q aus. Die Kraft, die dadurch auf denselben Punkt xyz wirkt, hat die Componenten

$$-\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Es wirkt also im Ganzen an der Stelle xyz :

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right); \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right); \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right).$$

Der Annahme nach sollen $\lambda\mu\nu$ diesen Kräften proportional sein. Bezeichnet also κ eine Constante, die Magnetisirungsconstante, und setzt man $V+Q=\varphi$, so ist

$$\lambda = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Darin ist aber Q noch erst zu berechnen. Es ist allgemein

$$Q = - \int_K \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau,$$

worin r die Entfernung irgend eines Punktes des Körpers von dem angezogenen bedeutet, also jetzt, da $d\tau$ selbst die Coordinaten xyz hat

$$Q = - \kappa \int_K d\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit

$$V+Q=\varphi$$

ist Q zu berechnen, dann φ und endlich ergeben sich die gesuchten magnetischen Momente durch

$$\lambda = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die Grösse Q ist das Potential eines magnetisch inducirten Körpers. Diese Gleichungen lassen sich umformen.

Nach dem GREEN'schen Satze ist

$$\int d\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \int ds U \frac{\partial V}{\partial N} - \int d\tau U \Delta V.$$

Setzen wir $U = \frac{1}{r}$, $V = \varphi$, so wird also

$$Q = + \kappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \kappa \int \frac{d\tau}{r} \Delta \varphi.$$

Die beiden Integrale lassen sich auffassen als Potentiale, das erste von einer Oberflächenbelegung mit der Dichtigkeit $h = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial N}$, das zweite von einer raum-
 erfüllenden Masse mit der Dichtigkeit $\kappa \Delta \varphi$ am Element $d\tau$. Es ist daher

$$\Delta Q = -4\pi\kappa \Delta \varphi.$$

Da aber $Q + V = \varphi$, und da $\Delta V = 0$ ist, weil V ein Potential äusserer Massen ist, so $\Delta Q = \Delta \varphi$, also ist $\Delta Q = 0$, $\Delta \varphi = 0$ und es wird

$$Q = \kappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Nach dem allgemeinen Satz vom Oberflächenpotential ist daher

$$\frac{\partial Q}{\partial N_i} + \frac{\partial Q}{\partial N_a} = -4\pi\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

In $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ ist, wie aus dem GREEN'schen Satze folgt, N nach dem Innern des inducirten Körpers gerechnet. Also bleiben die Grundgleichungen der magnetischen Induktion, wenn man $\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a}$ addirt und bedenkt, dass $Q + V = \varphi$ ist, folgende:

1) $\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} + (1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = 0$ für die Oberfläche des inducierenden Körpers.

2) $\Delta \varphi = 0$ für alle Punkte des inducirten Körpers.

3) $\lambda = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\mu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\nu = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Die Aufgabe, aus diesen Gleichungen für einen gegebenen inducirbaren Körper die magnetischen Momente zu bestimmen, ist allgemein nur gelöst für die Kugel, für ein Rotationsellipsoid, für einen unbegrenzten Cylinder¹⁾ und bei einer bestimmten Art der magnetisirenden Kräfte V für einen Ring²⁾ und einen stromdurchflossenen Eisendraht.³⁾

Die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_a} + (1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = 0$$

ist die erweiterte Gleichung, von der oben die Rede war.

Für einen Isolator, der von elektrischen Kräften inducirt wird, gelten ganz dieselben Gleichungen. Die Constante $1 + 4\pi\kappa$ ist dann die Dielektricitätsconstante.

GRAETZ.

Elektrostatik.

I. Grunderfahrungsthatfachen.

Manche Körper kommen, wenn sie gerieben werden, in einen eigenthümlichen Zustand, in welchem sie gewisse Kräfte auszuüben im Stande sind, die sie sonst nicht zeigen. Eine mit Tuch oder Leder geriebene Glasstange, oder eine Stange aus Siegellack, Ebonit u. A. erlangen, wenn sie gerieben sind, die Eigenschaft, leichte Körperchen, wie Papierschnitzel, Markkugeln oder dergl. anzuziehen. Diesen durch Reibung erzeugten Zustand, den man durch die erwähnte Kraftäußerung erkennt, nennt man den elektrischen und sagt, es sei durch das Reiben auf dem Stab Elektrizität entwickelt, ohne jedoch mit diesem Worte etwa andeuten zu wollen, dass ein gewisser Stoff in dem Stabe entwickelt sei. Durch Berührung mit einem bereits elektrisirten Körper kann man andere Körper an den Stellen, an denen sie berührt werden, elektrisch machen. Berührt man also mit einem und demselben elektrisirten Stab, z. B. einem Glasstab, zwei an Fäden nebeneinander aufgehängte Markkugeln, so werden beide in gleicher Weise elektrisirt und es zeigt sich, dass diese beiden gleich elektrisirten Körper sich dauernd abstossen. Ebenso werden sie beide von dem Glasstab abgestossen. Dagegen werden sie von einer elektrisirten Siegellackstange angezogen. Sind sie umgekehrt durch Berührung mit der Siegellackstange elektrisirt worden,

¹⁾ F. NEUMANN, CRELLE's Journal, Bd. 37.

²⁾ KIRCHHOFF, Ges. Abhandl., pag. 193.

³⁾ KIRCHHOFF, Ges. Abhandl., pag. 223.