

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Wärme

Winkelmann, Adolph August

1896

Wärmeleitung

Wärmeleitung.

I. Allgemeines.

Sobald zwei Stellen *A* und *B* eines Körpers aus irgend welchen Ursachen verschiedene Temperaturen haben, findet ein Uebergang von Wärmemengen zwischen ihnen statt. Die Wärme hat von selbst das Bestreben, vorhandene Temperaturdifferenzen auszugleichen, d. h. aus den wärmeren Theilen eines Körpers geht von selbst eine gewisse Wärmemenge fort zu den kälteren Theilen hin, wodurch die Temperatur der wärmeren Theile erniedrigt, die der kälteren Theile erhöht wird, bis sie einander gleich geworden sind. Man kann die Verschiedenheit der Temperaturen an den beiden Stellen nur dadurch aufrecht erhalten, dass man dem wärmeren Theil in jedem Moment ebensoviel Wärme wieder zuführt, als er durch diesen Wärmeübergang verliert, und indem man dem kälteren Theil in jedem Moment genau dieselbe Wärmemenge entzieht, welche ihm durch den Uebergang von dem wärmeren Theil zugeführt wird. Dieser von selbst eintretende Process des Wärmeübergangs von wärmeren und kälteren Stellen eines Körpers kann nun auf dreifache Weise vermittelt werden. Es kann von einem wärmeren Molekül der Aether, der sich ja, wie man annehmen muss, zwischen allen Molekülen befindet, in gewisse intensivere Schwingungen versetzt werden und diese Aetherschwingungen können von den kälteren Molekülen, welche für sich weniger intensive Schwingungen aussenden, absorbiert werden. Diesen Vorgang nennt man Wärmestrahlung. Sie findet nicht nur zwischen den Molekülen eines Körpers, sondern auch zwischen verschiedenen Körpern statt, die durch beliebige, die Strahlen nicht absorbirende Mittel getrennt sind. Die Wärmestrahlung im Innern eines Körpers von Molekül zu Molekül nennt man innere Strahlung. Die zweite Möglichkeit des Wärmeübergangs findet statt bei allen Körpern, deren Theile gegen einander verschiebbar sind, also bei Flüssigkeiten und Gasen. Die wärmeren Theile einer solchen Flüssigkeit dehnen sich aus, werden daher specifisch leichter, während die kälteren specifisch schwerer sind. Diese letzteren bewegen sich daher unter dem Einfluss der Schwere senkrecht abwärts, drängen die leichteren Theile nach oben und es findet so eine direkte Berührung wärmerer und kälterer Theile statt, durch welche der Wärmeübergang vermittelt wird. Diesen Vorgang nennt man Wärmeströmung oder Convection. Endlich drittens findet der Process des Wärmeübergangs statt von Molekül zu Molekül bei Körpern aller Aggregatzustände. Die Moleküle eines Körpers sind nach den neuen Anschauungen, die seit CLAUDIUS'S Arbeit vom Jahre 1860 »Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen« allgemein adoptirt sind, nicht in Ruhe, sondern in beständiger theils schwingender, theils drehender, theils geradlinig oder krummlinig fortschreitender Bewegung, deren lebendige Kraft um so grösser ist, je höher die Temperatur der Moleküle ist. Die durchschnittliche lebendige Kraft eines Complexes von Molekülen bestimmt direkt ihre Temperatur. Bei dieser Molekularbewegung finden nun fortwährend im Innern der Körper Zusammenstösse der Moleküle statt und es wird also lebendige Kraft von dem einen Molekül dem anderen mitgetheilt. Diesen direkten Uebergang der Wärme von Molekül zu Molekül nennt man Wärmeleitung. Der eigentliche Process der Wärmeleitung ist also ein sehr complicirter, da er wesentlich abhängt von der Art der Molekularbewegung in den Körpern. Es ist bisher auch nur für einen Fall, nämlich für den idealen gasförmigen

Zustand gelungen, aus der Hypothese über die Molekularbewegungen in ihnen die Erscheinungen der Wärmeleitung qualitativ und quantitativ abzuleiten. (S. darüber in Kinetische Gastheorie¹⁾). Man kann aber, ohne diese molekular-theoretischen Betrachtungen anzustellen, die Gesetze der Wärmeleitung rein aus der Erfahrung entnehmen und dieses ist zuerst von FOURIER²⁾ in seiner »Théorie analytique de la chaleur« 1822 geschehen.

II. Theorie der Wärmeleitung.

Die Grundfrage der Theorie der Wärmeleitung ist folgende: Wenn zwei benachbarte Stellen eines Körpers die Temperaturen ϑ und ϑ' haben, wobei ϑ grösser als ϑ' sein möge, wenn ferner der Abstand dieser Stellen p ist, wie gross ist dann die Wärmemenge, welche in dem Zeitelement dt von der wärmeren Stelle zur kälteren in der Richtung p übergeht? Die empirische Antwort auf diese Frage lautet: die gesuchte Wärmemenge dQ ist genau proportional der Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta'$ und der Zeit dt und hängt ausserdem noch in gewisser Weise ab von p , so dass die Grundgleichung lautet

$$dQ = (\vartheta - \vartheta') \varphi(p) dt,$$

wo $\varphi(p)$ eine Function des Abstandes ist, die mit wachsendem p rasch abnimmt, da zwei, weit von einander getrennte Moleküle keine Wärme durch Leitung austauschen. Dass die übergehende Wärmemenge der Temperaturdifferenz genau proportional ist, ist eine Erfahrungsthatsache, insofern, als die Folgerungen aus dieser Behauptung alle mit der Erfahrung stimmen.

Ueber den Werth der Function $\varphi(p)$, d. h. über die Abhängigkeit der übergehenden Wärmemenge von der Entfernung der beiden ungleich temperirten Stellen, kann man in einem bestimmten Falle einfach entscheiden. Wir denken uns nämlich einen Körper in Form einer Platte, die von zwei unendlich ausgedehnten Ebenen A und B begrenzt sei. Der Abstand der beiden Ebenen, also die Dicke der Platte sei e . Es werde nun die eine der beiden Ebenen z. B. fortwährend auf der Temperatur ϑ gehalten, indem man sie etwa mit einer Wärmequelle verbindet, welche stets diese Temperatur hat. Wenn beispielshalber ϑ die Temperatur 100° sein soll, so kann man die Ebene A mit siedend gehaltenem Wasser in Berührung bringen. Ebenso sei die Ebene B permanent auf der Temperatur ϑ' gehalten. Wenn etwa ϑ' gleich 0° sein soll, so kann man dieses bewirken, indem man B mit schmelzendem Eis in Berührung bringt. Die beiden Grenzebenen werden also auf künstlichem Wege auf constanter Temperatur erhalten, indem jede Wärmemenge, die durch Wärmeleitung der Ebene A entzogen wird, ersetzt wird durch eine gleiche, aus dem Reservoir (dem siedenden Wasser) kommende, und indem ebenso jede Wärmemenge, die B zugeführt wird, ihm entzogen wird, da sie zur Schmelzung von Eis benutzt wird. Die beiden Grenzebenen sind also stetig und dauernd auf festen Temperaturen und es fragt sich, welche Temperaturen herrschen in irgend einem Punkte im Innern der Platte. Man kann zuerst leicht einsehen, dass an jeder Stelle im Innern der Platte eine Temperatur sich herstellen muss, welche im Laufe der Zeit sich gar nicht ändert. Einen solchen Zustand, in welchem irgend welche physikalische Grössen sich mit der Zeit nicht ändern, also von der Zeit unabhängig sind, nennt man einen stationären Zu-

¹⁾ G. JÄGER hat versucht, eine kinetische Theorie der Wärmeleitung in Flüssigkeiten anzustellen (Wien. Ber. 102 IIa, pag. 883. 1893).

²⁾ FOURIER, Théorie analytique de la chaleur 1822. Deutsche Ausgabe von WEINSTEIN, Berlin 1884.

stand. Dass ein solcher Zustand in unserem Falle eintreten muss, lässt sich leicht zeigen. Denn es sei an einem Punkt P die Temperatur des stationären Zustandes gleich x . So lange diese Temperatur noch nicht erreicht ist, wird dem Punkte mehr Wärme zugeführt, als entzogen, seine Temperatur muss also steigen. Sie kann aber nicht höher steigen wie bis x . Denn würde sie grösser, so würde nun mehr Wärme von dem Punkte fortgehen, als hinzukommt, die Temperatur würde also wieder fallen. Daraus folgt, dass die Temperaturvertheilung in allen Punkten stationär sein muss. Nun ist die Temperatur in dieser Platte stationär, wenn alle Punkte einer jeden Ebene, die den Grenzebenen parallel ist, dieselbe Temperatur haben, und wenn die Temperaturen dieser einzelnen Ebenen proportional ihrer Entfernung von A abnehmen. Das heisst, wenn z der Abstand einer solchen Ebene von A ist, so ist die Temperatur v dieser Ebene

$$v = \vartheta - bz,$$

worin b eine Constante ist. Diese lässt sich aber bestimmen. Denn in der Ebene B , für welche ja $z = e$ ist, soll $v = \vartheta'$ sein, es ist also

$$\vartheta' = \vartheta - be,$$

$$\text{also } b = \frac{\vartheta - \vartheta'}{e}, \text{ und daher } v = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} z.$$

Es lässt sich zeigen, dass bei dieser Temperaturvertheilung jede Stelle des Körpers ebenso viel Wärme zugeführt erhält, als sie abgibt, d. h. dass der Zustand stationär ist. Wir nehmen zwei Moleküle m und m' , welche zu beiden Seiten dieser beliebigen Ebene liegen. Das eine habe die Coordinaten abc , das andere $a' b' c'$. Ihre Temperaturen v_c und $v_{c'}$, sind nach der vorausgesetzten Temperaturvertheilung

$$v_c = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} c, \quad v_{c'} = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} c'.$$

Ihre Temperaturdifferenz ist also

$$v_c - v_{c'} = \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} (c - c').$$

Ferner nehmen wir irgend zwei andere Moleküle n und n' , welche zu einander genau so liegen, also auch genau denselben Abstand haben. Ihre Coordinaten seien $a, b, c + \zeta$ und $a', b', c' + \zeta$. Ihre Temperaturen sind dann

$$v_{c+\zeta} = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} (c + \zeta) \quad v_{c'+\zeta} = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} (c' + \zeta).$$

Ihre Temperaturdifferenz ist also

$$v_{c+\zeta} - v_{c'+\zeta} = \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} (c - c'),$$

d. h. genau so gross, wie die der Moleküle m und m' . Daraus folgt, dass diese beiden Molekülpaare einander stets gleich viel Wärme zusenden, da sie gleichen Abstand und gleiche Temperaturdifferenz haben. Denselben Schluss kann man aber auf je zwei Moleküle anwenden und daraus folgt, dass die vorausgesetzte Temperaturvertheilung dem stationären Zustand entspricht¹⁾. Es ist also bei dieser Platte

$$v = \vartheta + \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} z.$$

Die Wärmemenge nun, welche durch einen Parallelschnitt zwischen zwei solchen Punkten, wie m und m' in der Zeit dt pro Flächenelement df übergeht,

¹⁾ Diese Betrachtung rührt von FOURIER selbst her.

ist proportional der Zeit dt , der Grösse der Fläche df , der Temperaturdifferenz der Moleküle zu beiden Seiten der Platte und hängt ausserdem ab von p , dem Abstand zweier Moleküle. Sie ist nämlich:

$$dQ = df dt (v - v') \varphi(p),$$

also
$$dQ = - df dt \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} p \cdot \varphi(p).$$

Das Produkt $p \cdot \varphi(p)$ hängt nur ab von der Substanz des Körpers, ist also eine dem Körper eigenthümliche Constante, und wir finden, wenn wir diese mit κ bezeichnen,

$$dQ = - \kappa df \frac{\vartheta' - \vartheta}{e} dt.$$

Nun ist $\frac{\vartheta' - \vartheta}{e}$ aber $= \frac{dv}{dz}$, wobei $\frac{dv}{dz}$ zweckmässig als das Temperaturgefälle in unserer Platte bezeichnet wird, und es ergibt sich so für die Wärmemenge dQ , welche in der Zeit dt durch die Fläche df jedes Parallelschnittes geht, der Ausdruck:

$$dQ = - \kappa \frac{dv}{dz} dt df.$$

Die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durchgehende Wärmemenge nennt man die Intensität des Wärmestromes. Sie ist:

$$F = - \kappa \frac{dv}{dz}.$$

Die Constante κ heisst die innere Leitungsfähigkeit oder die Wärmeleitungsconstanten der Substanz.

Aus dieser Betrachtung in dem einfachsten Falle lässt sich als begründete Annahme für den allgemeinsten Fall folgendes aufstellen. Wenn in einem Körper die Temperaturen von Punkt zu Punkt verschieden sind, so wird nach jeder von den drei Coordinatenrichtungen ein Temperaturgefälle vorhanden sein. Ist ϑ die variable Temperatur, also eine Function der Coordinaten xyz der Punkte des Körpers, so geben die Grössen $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ das Temperaturgefälle nach den drei Richtungen an, und wenn nun ausserdem der Körper ein beliebiger, also nicht isotroper ist, so wird die einfachste, aus dem betrachteten Specialfall durch Erweiterung entnommene Annahme sein, dass die pro Flächeneinheit und Zeiteinheit nach jeder der drei Richtungen übergehende Wärmemenge eine lineare Function dieser Componenten des Temperaturgefälles ist, d. h. wenn F_x , F_y , F_z die Intensitäten des ~~Wasserstromes~~ ^{Wärmestromes} nach den drei Axen sind, dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} - F_x &= a_{11} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ - F_y &= a_{21} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ - F_z &= a_{31} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die 9 Constanten $a_{11} \dots a_{33}$ sind dann die Wärmeleitungsconstanten des (im Allgemeinen anisotropen) Körpers nach verschiedenen Richtungen.

Für einen isotropen Körper, für welchen durch Vertauschung von x in y und z auch F_x in F_y und F_z übergehen muss und der Wärmestrom in einer Richtung nur von dem Temperaturgefälle in dieser Richtung abhängen kann, ergibt sich, dass die 3 Constanten a_{11} , a_{22} , a_{33} einander gleich, nämlich gleich k , die 6

anderen Constanten gleich Null sein müssen, so dass für einen isotropen Körper sich ergibt:

$$F_x = -\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad F_y = -\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad F_z = -\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Die Wärmeleitungsconstante κ ist dabei zu definiren als die Stärke des Wärmestromes nach irgend einer Richtung beim Temperaturgefälle 1 in dieser Richtung, oder als diejenige Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit geht, an der das Temperaturgefälle 1 herrscht.

Die Grösse κ muss im allgemeinen selbst von der Temperatur abhängen, da die Abstände zweier Moleküle von dieser abhängen. Nur in erster Näherung kann man κ als eine wirkliche Constante ansehen.

Wenn wir nun in einem ungleich temperirten, isotropen Körper ein kleines Parallelepipet betrachten, so muss durch jede von seinen 6 Flächen eine gewisse Wärmemenge, positiv oder negativ, hineinströmen in der Zeit dt und die ganze eingeströmte Wärmemenge muss die Temperatur des Parallelepipeds erhöhen. Die einströmende Wärmemenge ergibt sich, wenn $d\tau$ das Volumen des Parallelepipeds bezeichnet, nach einer mathematisch leicht erkennbaren Schlussweise (s. Hydrodynamik) zu

$$- dt d\tau \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).$$

Wenn nun ρ die Dichtigkeit der Substanz des Würfels, also $\rho d\tau$ seine Masse und c seine spezifische Wärme ist, so wird durch diese Wärmemenge eine Temperaturerhöhung $d\vartheta$ hervorgebracht, und es ist:

$$\rho c d\tau d\vartheta = - dt d\tau \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).$$

Durch Einsetzen der Werthe von F_x, F_y, F_z ergibt sich:

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{d\vartheta}{dt},$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta \vartheta.$$

Dieses ist die Grundgleichung der Theorie der Wärmeleitung in isotropen Körpern.

Da $\kappa = \frac{\rho c}{\Delta \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}$ ist, so sind die Dimensionen von κ

$$[\kappa] = \left[\frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T} \right] = \left[\frac{M}{LT} \right].$$

Im C. G. S. System ist also die Einheit der Wärmeleitfähigkeit:

$$\left(\frac{1 \text{ gr}}{1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ sec}} \right).$$

Zur Bestimmung der Temperatur eines Körpers müssen aber noch die Verhältnisse an seiner Grenze berücksichtigt werden. Wenn zwei verschiedene Körper aneinander grenzen und die Wärme durch beide hindurchgeht, so ist eine plausible Annahme, dass erstens an der Grenze kein Sprung der Temperatur stattfindet. Sind also ϑ und ϑ' , die (variablen) Temperaturen an der Grenze, so ist die erste Bedingung¹⁾:

$$\vartheta = \vartheta'.$$

¹⁾ Eine experimentelle Bestätigung dieser Gleichung gab WIEDEMANN, POGG. Ann. Bd. 95, pag. 307. 1855.

Die zweite nothwendige Annahme ist, dass an der Grenzfläche keine Anhäufung von Wärme stattfindet, d. h. dass ebenso viel Wärme in den zweiten Körper fortgeführt werde, als von dem ersten an die Grenzfläche herankommt. Sind also κ und κ' die Leitungsfähigkeiten der beiden Substanzen und N die Normale zur Grenzfläche, so ist die zweite Grenzbedingung¹⁾:

$$\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = \kappa' \frac{\partial \vartheta'}{\partial N}.$$

Eine dritte, von FOURIER eingeführte Grenzbedingung, die für die Berechnung ausführbarer Experimente wichtig, aber im Wesentlichen nicht sehr stichhaltig ist, ist folgende. Wenn ein Körper an Luft oder ein anderes Gas oder eine Flüssigkeit von anderer Temperatur grenzt, so wird in jedem Moment Wärme aus ihm in die Umgebung austreten, die Luft aber oder die Flüssigkeit wird durch Wärmeströmung in ihren einzelnen Theilen in lebhaftere Bewegung kommen, ihre Temperatur wird, da die erwärmten Theilchen sich von dem Körper entfernen und dadurch sich wieder abkühlen, in einiger Entfernung von dem warmen Körper einen Werth haben, der unabhängig ist von der Anwesenheit des warmen Körpers. Diese Temperatur nennt man die Temperatur der Umgebung und es hat zuerst FOURIER die Annahme aufgestellt, dass die Wärmemenge F_N , welche pro Zeit- und Flächeneinheit von einem Punkte der Oberfläche eines Körpers mit der (variablen) Temperatur ϑ senkrecht zur Fläche in die Umgebung von der Temperatur ϑ_0 hineinströmt, proportional ist der Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_0$, dass also für eine solche Grenze die Gleichung gilt:

$$\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h(\vartheta - \vartheta_0).$$

Die Constante h nennt man die äussere Wärmeleitungsfähigkeit der Substanz. Sie wird abhängen von der Natur der Substanz und von der Natur der Umgebung, ist also in keinem Fall allein eine der Substanz eigenthümliche Constante. Es wird bei ihr darauf ankommen, ob die Luft ruhig oder in Bewegung ist, ob in der Nähe des warmen Körpers spiegelnde oder rauhe, Wärme durchlassende oder absorbirende Körper vorhanden sind. Sie ist also jedenfalls keine in bestimmter Weise zu definirende Grösse. Ausserdem wird sie im Allgemeinen noch von der Temperatur abhängen.

Die Differentialgleichung mit ihren Grenzbedingungen gilt nun sowohl für feste, als für flüssige und gasförmige Körper. Bei Flüssigkeiten und Gasen ist aber ein Punkt zu beachten. Wenn die einzelnen Flüssigkeitstheile selbst in Bewegung sind, indem sie etwa die Geschwindigkeitscomponenten u v w besitzen, so giebt die Grösse $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Aenderung der Temperatur pro Zeiteinheit an für ein Flüssigkeitsmolekül, welches sich aber selbst verschiebt. Will man daher die Aenderung der Temperatur nicht an einem bestimmten Flüssigkeitstheilchen, sondern an einer bestimmten Stelle des Raumes xyz finden, der abwechselnd von verschiedenen Flüssigkeitstheilchen eingenommen ist, so muss man beachten, dass:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

d. h.
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

ist. Die Auflösung der Differentialgleichung:

¹⁾ LORBERG, WIED. ANN. 14, pag. 300. 1881.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta \vartheta$$

giebt dann ϑ als Function von $xyz t$, also als Function des Ortes in der Flüssigkeit und der Zeit.

Hat man zwei verschiedene Körper von gleicher Form und unter gleichen Oberflächenverhältnissen stehend, so wird die Temperatur bei beiden an den verschiedenen Stellen gleich sein und sich gleich mit der Zeit ändern, wenn für beide die Grössen $\frac{\kappa}{\rho c}$ und $\frac{\kappa'}{\rho' c'}$, gleich sind. Man nennt deswegen die Grösse $\frac{\kappa}{\rho c}$ die Temperaturleitungsfähigkeit der Substanz und bezeichnet sie gewöhnlich mit a^2 . Die Dimensionen von a^2 sind also $\left[\frac{L^2}{T} \right]$.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf bestimmte Probleme ergibt die Gesetze der Temperaturvertheilung in jedem Falle. Diese ist abhängig von den Werthen der Constanten κ und eventuell h und durch einen Vergleich der Beobachtung mit der Theorie lassen sich diese Constanten dann bestimmen. Die Methoden, welche bei dieser Bestimmung der Wärmeleitungsconstanten in Anwendung kommen, sind verschieden bei festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen.

III. Literatur über die mathematische Theorie der Wärmeleitung,

1) Lehrbücher.

FOURIER, Théorie analytique de la chaleur. 1822. (Deutsch von WEINSTEIN 1884).

RIEMANN, Partielle Differentialgleichungen.

KIRCHHOFF, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von PLANCK.

2) Abhandlungen.

DUHAMEL, Note sur les surfaces isothermes dans les corps solides, dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les seus. Liouville Journ. 4, pag. 63. 1832.

DUHAMEL, Sur la méthode générale relative au mouvement de la chaleur dans les corps solides plongés dans les milieux, dont la température varie avec le temps. Mém. sav. étrang. 4. 1833.

LAMÉ, Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres. Mém. sav. étrang. 4. 1833.

POISSON, Théorie mathématique de la chaleur. 1835, 1837.

LAMÉ, Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique. Liouville Journ. (1) 1, pag. 77. 1836.

LAMÉ, Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. Liouv. Journ. (1) 2, pag. 187. 1837; 4, pag. 100. 1839; 8, pag. 515. 1843.

LAMÉ, Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde. Lionville Journ. (1) 4, pag. 126, 351. 1839.

THOMSON, W., Note on a passage in Fouriers Heat. Cambr. Math. Journ. 3. 1841 (auch in Math. u. Phys. Papers ebenso wie die folgenden Aufsätze).

THOMSON, W., On the uniform motion of Heat in homogeneous solid bodies and its connection with the mathematical theory of electricity. Cambr. Math. Journ. 3. 1842; Phil. mag. (4) 7, pag. 502. 1854.

THOMSON, W., On the linear motion of heat. ibidem 3. 1842. 1843.

THOMSON, W., Note on orthogonal isothermal surfaces. ib. 3. 1843; 4. 1844.

THOMSON, W., On the equations of the motion of heat referred to curvilinear coordinates, ib. 4. 1843.

THOMSON, W., Note on some points in the theory of heat, ib. 4. 1844.

HEAVEN, On the permanent state of heat in a thin uniform wire of any form acted on by two sources of heat of equal intensity at its extremities. Phil. mag. (3) 29. 1846.

AMSLER, Zur Theorie der Anziehung und der Wärme. CRELLE, Journ. 42, pag. 316. 1851.

- AMSLER, Ueber die Gesetze der Wärmeleitung im Innern fester Körper unter Berücksichtigung der durch ungleichförmige Erwärmung erzeugten Spannung. CRELLE, Journ. 42, pag. 327. 1851.
- BERTRAND, Théorème relatif à la conduction d'équilibre calorifique dans un corps homogène. Compt. rend. 42, pag. 347. 1856.
- DUHAMEL, Mémoire sur le mouvement de la chaleur dans un système quelconque des points. Compt. rend. 43. 1856.
- NEUMANN, C., Ueber den stationären Temperaturzustand eines Körpers, welche von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. CRELLE, Journ. 67. 1862.
- STEFAN, Ueber die Fortpflanzung der Wärme. Wien. Ber. 47, pag. 1. 1863.
- LAURENT, Mémoire sur la théorie des imaginaires, sur l'équilibre der températures et sur l'équilibre de l'élasticité. Journ. de l'école polytechn. 23. 1863.
- NEUMANN, C., Theorie der Electricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ring. Halle 1864.
- WERNICKE, Disquisitiones de systematibus curvarum isothermarum. Diss. Inaug. Berlin 1863.
- MORIN, Sur une Méthode de transformation des figures employés dans la théorie de la chaleur. Compt. rend. 61. 1865.
- PICARD, Solution géométrique d'un problème d'analyse qu. se présente dans la question des lignes isothermes permanents. Ann. de l'école normale 3. 1866.
- BOUSSINESQ, Note sur un nouvel ellipsoïde qui joue un grand rôle dans la théorie de la chaleur. Compt. rend. 65. 1867.
- CHRISTOFFEL, Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. BRIOSCHI, Ann. d. Math. (2) 1. 1867.
- BOUSSINESQ, Sur les spirales que decourt la chaleur en se répandant à partir d'un point interieur dans un milieu homogène dissymétrique. Compt. rend. 66. 1868.
- MATTHIEU, Sur le mouvement de la température dans les corps compris entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques. Compt. rend. 68. 1869.
- VON DER MÜHL, Ueber den stationären Temperaturzustand. CLEBSCH, Ann. 2. 1870.
- MEYER, G. F., Notiz über zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale. CLEBSCH, Ann. 3. 1871.
- WEBER, H., Ueber ein Problem der Wärmetheorie. Züricher Vierteljahrsschrift 16 (2), 1871.
- WEBER, H., Ueber den Temperaturzustand eines von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers. SCHLÖMILCH, Zeitschr. 17. 1872.
- GÖDECKER, Die Vertheilung der Wärme in der Kugel. Nach dem Vortrage von RIEMANN. Programm. Gynasium Lüneburg 1873.
- TAIT, On orthogonal isothermal surfaces. Trans. Edinb. Soc. 27. 1874.
- CHARET, Transmission de la chaleur. Mondes (2). 1877.
- PEIRCE, Ueber die Bestimmung des Vertheilungsgesetzes der Temperatur im Innern fester Körper. Proc. Amer. Soc. 4. 1877.
- BAER, Ueber die Bewegung der Wärme in einer homogenen Kugel. Programm des Collège franc. Berlin 1878.
- NIVEN, Ueber die Wärmeleitung in Rotationsellipsoiden. Phil. Trans. 171, pag. 117. 1879.
- LANGER, Ueber die Wärmebewegung in einer homogenen Kugel. Diss. Jena 1876.
- THOMSON, W., Problems relating to underground temperatures. Phil. mag. (5) 5, pag. 370. 1878.
- MEYER, H., Ueber die von geraden Linien und von Kegelschnitten gebildeten Isothermen. Diss. Göttingen 1879.
- KNAKE, Lineare Wärmebewegung in einem von zwei parallelen Wänden begrenzten Körper, dessen Grenzen mit einem Gase in Berührung stehen. Diss. Halle 1879.
- ESCARY, Sur les fonctions introduites par LAMÉ dans la théorie analytique de la chaleur à l'occasion des ellipsoïdes de revolution. Compt. rend. 88, pag. 1027. 1879.
- WALTE, Problem des stationären Temperaturzustandes für einen Rotationskörper, dessen Meridian eine gewisse Curve 4. Ordnung ist. Diss. Leipzig 1880.
- BOUSSINESQ, Sur les problèmes des températures stationnaires etc. LIOUVILLE, Journ. (3) 6, pag. 177. 1880.

LORBERG, Ueber Wärmeleitung in einem System von Cylindern etc. WIED. Ann. 14, pag. 291, 426. 1881.

HERGESELL, Erörterungen zur FOURIER-POISSON'schen Wärmeleitungstheorie. WIED. Ann. 15, pag. 19. 1882.

MELCHIOR, Untersuchung über den veränderlichen Temperaturzustand eines Cylinders etc. Programm. Realgym. Fulda 1884—85.

FUDISZAWA, Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende Reihe. Diss. Strassburg 1881.

HARNACK, Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern. SCHLÖMILCH, Zeitschr. 32, pag. 41. 1867.

BELTRAMI, Einige Probleme der Wärmeleitung. Mem. Acc. di Bologna (4) 8, pag. 291. 1887.

POINCARÉ, H., Ueber die analytische Theorie der Wärme. Compt. rend. 101, pag. 967. 1888.

HOBSON, E. W., Synthetische Lösung einer Aufgabe über die Theorie der Wärmeleitung. Lond. Math. Soc. Proc. 9, pag. 279. 1889.

WOODWARD, Ueber die Diffusion der Wärme in einem homogenen rechteckigen Maasse mit besonderer Rücksicht auf Stäbe, welche zu Längenmessungen dienen. Ann. of Math. (4), pag. 101. 1888.

APPELROTH, Lösung einer Aufgabe über die Erwärmung der Körper. Journ. de russ. phys. chem. Ges. (3) 21, pag. 31. 1889.

BOUSSINESQ, Berechnung der successiven Temperaturen in einem homogenen, athermanen unendlichen Medium, durch welches eine Wärmequelle hindurchgeht. Compt. rend. 110, pag. 1242. 1890.

APPEL, Ueber die Theorie der Wärme. Compt. rend. 110, pag. 1061. 1890.

CHWOLSON, Ueber einen Fall von variabler Temperaturvertheilung in einem Stabe. EXNER, Rep. 26, pag. 150. 1890.

LINDE, Methode zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens einer Kugel und Wärmevergänge in derselben. EXN. Rep. 27, pag. 391. 1891.

G. H. BRYAN, Bemerkungen zu einem Problem der linearen Wärmeleitung. Proc. Camb. Phil. Soc. 7, pag. 246. 1891.

G. H. BRYAN, Eine Anwendung der Methode der Bilder auf die Wärmeleitung. Proc. Lond. Math. Soc. 22, pag. 424. 1891.

IV. Bestimmung der Wärmeleitung von Metallen.

Die ersten Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitung von FOURIER¹⁾ und PÉCLET²⁾, welche noch sehr ungenaue Resultate gaben, bestanden in Folgendem. Es wurde eine Platte, von parallelen Ebenen begrenzt, auf der oberen Seite mit Wasser von θ° , auf der unteren mit Wasser von der höheren Temperatur T° in Berührung gebracht. Dann musste durch die Platte die Wärme hindurchgehen und es musste das obere Wasser allmählich wärmer werden. Seine Temperaturerhöhung und die Zeit, in der sie eintritt, wurde gemessen. Damit dieses Wasser nur durch die Platte Wärme zugeführt erhalte, befand es sich in dem inneren Gefäss eines doppelmantligen Cylinders, dessen Hohlraum mit Wolle angefüllt war, um keine Wärme von aussen in das Gefäss einzulassen. Schon bei diesen ersten Versuchen machte sich ein Uebelstand geltend, auf den bei allen Versuchen über Wärmeleitung sorgfältig Rücksicht genommen werden muss. Es bilden sich nämlich, auch wenn das Wasser in den beiden Gefässen sorgfältig durchgerührt wird, doch an den Grenzflächen der Platte festhaftende, stagnirende Wasserschichten, welche nun eine andere Tempe-

¹⁾ FOURIER, POGG. Ann. Bd. 13. 1828.

²⁾ PÉCLET, POGG. Ann. 55. 1842.

ratur haben als das Wasser in der unmittelbaren Nähe, und daher ist die Temperaturdifferenz der beiden Grenzebenen der Platte eine andere, als sie aus den Beobachtungen der Wassertemperatur folgt. Diese Grenzschichten müssen durch besondere Vorrichtungen entfernt werden. Man lässt sie gewöhnlich continuirlich durch Lappen, Pinsel oder Bürsten abwischen, die von einem ständig bewegten Rade oder dergl. an den Grenzflächen fortwährend hin- und hergeführt werden. Bei dieser PÉCLET'schen Anordnung lässt sich weder die theoretische Berechnung streng durchführen, denn die Vorgänge an den Seitenwänden der Platte sind unbestimmt — noch können die Versuche wegen des Strahlungsverlustes der Wasserflächen genaue Resultate geben. In der That fand PÉCLET für die Wärmeleitung des Bleis nur etwa den dritten Theil von dem später sich ergebenden richtigen Werthe.

A) Stäbe.

Sicherer zu beobachten und theoretisch zu behandeln ist die Wärmevertheilung in einem dünnen Stabe von beliebigem Querschnitt, der einerseits von einer Wärmequelle Wärme empfängt und der andererseits die Wärme an die Luft ausstrahlt. Dabei kann man nun 1) den stationären, 2) den variablen Zustand untersuchen, und man kann, nach Ermittlung der äusseren Wärmeleitungsfähigkeit, die innere entweder absolut bestimmen, oder für verschiedene Substanzen relativ finden. Auf alle diese verschiedenen Weisen ist die Methode angewendet worden. Wir denken uns einen Stab, der so dünn sei, dass wir die Temperatur in jedem Querschnitt als constant ansehen können. Die x -Coordinate sei in der Längsaxe des Stabes. Es wird von jedem Punkt der Oberfläche die Wärmemenge $h\vartheta$ ausgestrahlt, wenn wir die Temperatur der Umgebung gleich Null setzen, und es ist $\frac{\partial\vartheta}{\partial N} = \frac{h}{x}\vartheta$. Unsere Differentialgleichung multipliciren wir mit einem Flächenelement $dy dz$ des Querschnitts S und integriren sie, um die Mitteltemperatur zu erhalten. Es ist dann

$$\iint_S \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \right) dy dz + \iint_S \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} dy dz = \frac{\rho c}{x} \iint_S \frac{\partial\vartheta}{\partial t} dy dz.$$

Nach dem GREEN'schen Satz giebt das erste Integral, wenn dl ein Element des Umfanges ist $-\int dl \frac{\partial\vartheta}{\partial N} = -\frac{h}{x} \int dl \vartheta$, und wenn ϑ' die Mitteltemperatur des Umfanges, U die Grösse der Peripherie ist, so ist das erste Integral $= -\frac{h}{x} \vartheta' U$. Wenn ferner S die Grösse des Querschnitts und ϑ'' die Mitteltemperatur im Querschnitt ist, so ist

$$\iint_S \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} dy dz = S \frac{\partial^2\vartheta''}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \iint_S \frac{\partial\vartheta}{\partial t} dy dz = S \frac{\partial\vartheta''}{\partial t},$$

also ergiebt sich

$$\frac{\partial\vartheta''}{\partial t} = \frac{x}{\rho c} \frac{\partial^2\vartheta''}{\partial x^2} - \frac{h}{\rho c} \frac{U}{S} \vartheta'.$$

Nun soll der Querschnitt so klein sein, dass $\vartheta'' = \vartheta' = \vartheta$ ist, dann ist

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{x}{\rho c} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} - \frac{h}{\rho c} \frac{U}{S} \vartheta.$$

a) Stationärer Zustand. Methode von DESPRETZ.

Das ist die zu lösende Differentialgleichung. Für den Fall des stationären Zustandes ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, also

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{h}{x} \frac{U}{S} \vartheta.$$

Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist

$$\vartheta = A e^{-\sqrt{\frac{h}{x} \frac{U}{S}} x} + B e^{+\sqrt{\frac{h}{x} \frac{U}{S}} x}.$$

Wenn der Stab so lang ist, dass sein von der Wärmequelle entferntes Ende die Temperatur 0 hat (theoretisch $x = \infty$), so ist $B = 0$ und es bleibt

$$\vartheta = A e^{-\sqrt{\frac{h}{x} \frac{U}{S}} x}.$$

Daraus folgt zuerst, dass von dem erwärmten Ende an die Temperaturen in einem solchen Stab in geometrischer Progression abnehmen müssen mit wachsender Entfernung. Dieser Satz wurde von BIOT¹⁾ experimentell geprüft, indem er eine Metallstange an dem einen Ende erwärmte und in Abständen von 20, 30, 40, 50 u. s. w. *cm* in kleine, mit Quecksilber gefüllte Löcher der Stange Quecksilberthermometer brachte, mit denen er die Temperaturen an diesen Stellen maass. Aus zwei von den gemessenen Temperaturen liess sich

A und $\sqrt{\frac{h}{x} \frac{U}{S}}$ berechnen, und aus diesen dann die entsprechenden ϑ für andere x . Die Beobachtung bestätigte die Theorie.

Wenn man zwei Stäbe gleichen Querschnitts und Umfangs von solcher Länge hat, dass ihre entfernten Enden die Zimmertemperatur behalten, und wenn man beiden gleiche äussere Leitungsfähigkeit h giebt, indem man sie mit demselben Ueberzug (Firnis, Lack, Russ oder auch Silber und dergl.) versieht, so werden, wenn man sie von derselben Wärmequelle erwärmen lässt, ihre Temperaturen an denjenigen Stellen x und x' gleich sein, für welche

$$\sqrt{\frac{h}{x} \frac{U}{S}} x = \sqrt{\frac{h}{x'} \frac{U}{S}} x',$$

also

$$\frac{x}{x'} = \sqrt{\frac{x}{x'}} \text{ ist.}$$

Man braucht also nur zwei solche Stellen gleicher Temperatur aufzusuchen, um die Verhältnisse der Leitungsfähigkeiten zu erhalten.

Dies hat INGENHOUS²⁾ gethan, indem er eine Reihe verschiedener Stäbe mit Wachs überzog und sie zusammen in die Wand eines Kastens steckte, der mit siedendem Wasser gefüllt gehalten wurde. Das Wachs schmolz bei den verschiedenen Metallen (bei derselben Temperatur) um so weiter fort, je besser das Metall leitete. Die Versuche gaben natürlich nur qualitative Resultate, sind aber auch heute noch für die Demonstration, mit kleinen Abänderungen, sehr instruktiv.

Wirkliche relative Bestimmungen über die Leitungsfähigkeit machte zuerst DESPRETZ³⁾ nach dieser Methode. Er wendete quadratische Stäbe an, die er alle mit demselben Firnis überzog. Zur Berechnung wendete er die vollständige

1) BIOT, *Traité de phys.* Bd. 4.

2) INGENHOUS, *Gren. Journ. d. Physik*, Bd. I.

3) DESPRETZ, *POGG. Ann.* Bd. 12; dann *Compt. rend.* 35, pag. 540. 1842.

Formel (1) an. Sind die Temperaturen in 3 Punkten x , $x + l$, $x + 2l$, resp.

ϑ , ϑ_1 , ϑ_2 , und wird $\sqrt{\frac{h}{x}} \frac{U}{S} = f$ gesetzt, so ist

$$\vartheta + \vartheta_2 = (Ae^{-fx}e^{-fl} + Be^{+fx}e^{+fl})(e^{+fl} + e^{-fl}),$$

$$\vartheta_1 = Ae^{-fx}e^{-fl} + Be^{+fx}e^{+fl},$$

also

$$\frac{\vartheta + \vartheta_2}{\vartheta_1} = e^{fl} + e^{-fl}.$$

Beobachtet man also die Temperaturen ϑ , ϑ_1 , ϑ_2 an je 3 gleich weit von einander abstehenden Stellen und nennt $\frac{\vartheta + \vartheta_2}{\vartheta_1}$ (eine beobachtbare Grösse) $2r$, so ist

$$e^{2fl} + 1 = 2r e^{fl},$$

$$e^{fl} = r + \sqrt{r^2 - 1}, \quad \text{mithin } fl = \log \text{nat} (r + \sqrt{r^2 - 1}).$$

Für einen zweiten Stab, in welchem das beobachtete Temperaturverhältniss bei gleichem l durch r' ausgedrückt sei ist

$$e^{f'l} = r' + \sqrt{r'^2 - 1}, \quad \text{mithin } f'l = \log \text{nat} (r' + \sqrt{r'^2 - 1}),$$

also

$$\frac{f}{f'} = \frac{\log \text{nat} (r + \sqrt{r^2 - 1})}{\log \text{nat} (r' + \sqrt{r'^2 - 1})}$$

und da U , S , h einander gleich gemacht sind, ist

$$\frac{f}{f'} = \sqrt{\frac{x}{x'}}.$$

So findet man das Verhältniss der Leitungsfähigkeiten. DESPRETZ hat auf diese Weise Gold, Silber, Eisen, Platin, Kupfer, Zink, Zinn, Blei, ausserdem Marmor, Porzellan, Sandstein, Tannenholz untersucht. Seine Methode ist principiell einwurfsfrei, falls die Stäbe dünn genug sind, um die obigen theoretischen Vereinfachungen zu rechtfertigen. Bei seinen Versuchen war das nicht der Fall, die Stäbe waren zu dick. Ferner brachten die Thermometer eine Abweichung des wirklichen Falles von dem theoretischen hervor. Weiter ist es fraglich, ob ein gleicher Ueberzug der Oberfläche auch ein gleiches h gewährleistet. Endlich ist die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur nicht berücksichtigt.

Nach derselben Methode machte HELMERSEN¹⁾ Versuche über eine Reihe schlecht leitender Körper, nämlich von Felsarten, Quarz, Glimmerschiefer, Granit, Marmor, Aphanitporphyr, Serpentin, Sandstein, grauen Kalkstein. Die Wärmeleitungsfähigkeiten ordnen sich nach dieser Anführung, so dass Quarz am besten, grauer Kalkstein am schlechtesten leitet.

Eine Verbesserung brachte zuerst LANGBERG²⁾ an dieser Methode an, indem er statt der Thermometer die inzwischen entdeckten Thermolemente zur Temperaturmessung anwendete. Er untersuchte so Stangen von Kupfer, Zinn, Blei und Stahl, wobei sich jedoch gegen seine Versuche ebenfalls Einwände erheben liessen, nämlich ob der Contact zwischen Thermolement und Stange ausreichend war, ob die Angaben der Thermolemente den Temperaturen proportional waren u. s. w.

Diese Versuche wurden dann mit Thermoementen in sehr exakter Weise von WIEDEMANN und FRANZ³⁾ weitergeführt. Alle Stangen wurden, um gleiches h

1) HELMERSEN, POGG. Ann. Bd. 88. 1852.

2) LANGBERG, POGG. Ann. 66. I. 1845.

3) WIEDEMANN und FRANZ, POGG. Ann. Bd. 89, pag. 497. 1853.

zu erzielen, mit einer dünnen Silberschicht überzogen und diese polirt. Die Stangen wurden innerhalb einer Glasglocke aufgespannt und zum Theil in der Luft, zum Theil im luftleeren Raum untersucht. Das Thermolement war möglichst klein, wurde möglichst fest und gleichmässig angedrückt und blieb nur sehr kurze Zeit an der Stange. Die relativen Leitungsfähigkeiten ergaben sich etwas abweichend, je nachdem im luftleeren oder luftgefüllten Raume beobachtet wurde. Als sicherste Resultate geben die Verfasser folgende Werthe für die auf Silber = 100 bezogenen Leitungsfähigkeiten, denen die Leitungsfähigkeiten für Electricität beigeschrieben sind:

	Leitungsfähigkeit für Wärme	Leitungsfähigkeit für Electricität nach LENZ
Silber	100	100
Kupfer	73·6	73·3
Gold	53·2	58·5
Messing	23·1	21·5
Zink ¹⁾	19·0	22·6
Zinn	14·5	13·6
Eisen	11·6	—
Stahl	11·9	10·7
Blei	8·1	10·3
Platin	8·4	—
Neusilber	6·3	—
Rose's Metall	2·8	—
Wismuth	1·8	1·9

LANGBERG hatte gezeigt, dass die Wärmeleitungsfähigkeit mit wachsender Temperatur abnehme. Nach den Versuchen von WIEDEMANN und FRANZ ist dasselbe Resultat wahrscheinlich, doch noch nicht quantitativ festzustellen.

Aus einem Vergleich der Leitungsfähigkeit für Wärme und der für Electricität ergab sich den Autoren der Schluss:

Die Metalle haben für Wärme und Electricität nahezu gleiche Leitungsfähigkeit.

In einer späteren Arbeit²⁾, die durch Untersuchungen von CALVERT und JOHNSON³⁾ veranlasst wurde, untersuchte WIEDEMANN auf dieselbe Weise einige Legirungen und erhielt folgende Resultate, wobei die Zahlen auch wieder auf Ag = 100 bezogen sind.

	Wärmeleitung	Electricitätsleitung
8 Thle. Cu + 1 Thle. Zn	27·3	25·5
6·5 „ „ + 1 „ „	29·9	30·9
4·7 „ „ + 1 „ „	31·1	29·2
2·1 „ „ + 1 „ „ (Messing)	25·8	25·4
3 „ Sn + 1 „ Bi	10·1	9·0
1 „ „ + 1 „ „	5·6	4·3
1 „ „ + 3 „ „	2·7	2·0

¹⁾ G. WIEDEMANN, POGG. Ann., Bd. 95, pag. 338. 1855.

²⁾ G. WIEDEMANN, POGG. Ann. Bd. 108, pag. 393. 1859.

³⁾ CALVERT und JOHNSON, Phil. Trans. 148, pag. 349. 1858; 149. 1859.

Ein Theil der Versuche von WIEDEMANN und FRANZ wurde nach der DESPRETZ'schen Methode auch von GUILLAND¹⁾ mit ähnlichen Resultaten wiederholt.

ETTINGSHAUSEN und NERNST²⁾ bestimmten nach der Methode von DESPRETZ die Wärmeleitung von Wismuth und einigen Legirungen desselben mit Zinn und fanden auch das Gesetz von WIEDEMANN und FRANZ bestätigt. Es ergab sich nämlich

Bi	κ	$\frac{\kappa}{k}$
99.05 Bi + 0.95 Sn	0.017	3500
	0.008	3200
93.82 Bi + 6.14 Sn	0.012	3100

Die Frage nach der Proportionalität von elektrischem und Wärmeleitungsvermögen hat F. KOHLRAUSCH³⁾ an einem interessanten Beispiel bejahend zu beantworten vermocht. Weicher Stahl hat nämlich ein viel besseres, 2–3fach so grosses elektrisches Leitungsvermögen als harter Stahl, und KOHLRAUSCH stellte sich die Frage, ob auch das Wärmeleitungsvermögen in derselben Weise variiert. Zu dem Zweck untersuchte er nach der DESPRETZ'schen Methode mit Thermoelementen zwei Stäbe von 30 cm Länge aus weichem und glashartem Stahl. Es ergab sich

	Wärmeleitung κ
harter Stahl . . .	0.062 $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
weicher „ . . .	0.111 $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$

Das elektrische Leitungsvermögen war dabei ($Hg = 1$)

	k
harter Stahl . . .	3.3
weicher „ . . .	5.5

so dass sich ergibt

	$\frac{\kappa}{k}$
harter Stahl . . .	0.019
weicher „ . . .	0.020.

b) Methode von FORBES.

Der stationäre Zustand in einem Stabe wurde noch in anderer interessanter Weise von FORBES⁴⁾ zur Bestimmung der Wärmeleitung in absolutem Maass benutzt, wobei er von der direkten Bestimmung von h unabhängig wurde. Ist in einem langen Stab, der an dem einen Ende erwärmt wird, am andern die Zimmertemperatur (0°) hat, der stationäre Zustand eingetreten, so ist:

$$\vartheta = Ae^{-\sqrt{\frac{hU}{\kappa S}}x}.$$

Durch jeden Querschnitt fliesst dann pro Zeiteinheit eine Wärmemenge

$$-\kappa S \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \kappa S \sqrt{\frac{hU}{\kappa S}} Ae^{-\sqrt{\frac{hU}{\kappa S}}x}.$$

Durch Beobachtung der Temperaturen an verschiedenen Stellen des Stabes findet man in der früheren Weise die Grösse A und $\sqrt{\frac{hU}{\kappa S}} = f$, die als be-

¹⁾ GUILLAND, Ann. de chim. et phys., Serie 3, Bd. 48. 1856.

²⁾ ETTINGSHAUSEN und NERNST, WIED. Ann. 33, pag. 487. 1888.

³⁾ F. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 33, pag. 678. 1888.

⁴⁾ FORBES, Athenäum, pag. 1010. 1842; Edinburg Trans. 23, pag. 133. 1862; Bd. 24. 1865.

kannt angenommen werden. Von einem beliebigen Querschnitt x aus geht nun jede zugeführte Wärmemenge durch Ausstrahlung in die Luft über. Ist also v die Erkaltungsgeschwindigkeit an irgend einem Punkt des Körpers von bestimmter Temperatur (v eine Function von ϑ), so ist:

$$\kappa S f A e^{-f x} = \rho c S \int_x^l v dx,$$

wenn l die Länge des Stabes ist. Die Erkaltungsgeschwindigkeit v ist folgendermaassen defnirt. Wenn ein Körper von der Temperatur ϑ in einem Raum sich abkühlt, dessen Temperatur 0 ist, so ist die Wärmemenge, die in dem Zeitelement dt durch die Oberfläche O tritt, proportional der augenblicklichen Temperatur, d. h. sie ist $\varepsilon O \vartheta dt$, wo ε das Emissionsvermögen ist. Durch diese austretende Wärmemenge nimmt die Temperatur des Körpers (von der Masse M und der specifischen Wärme c) ab um $d\vartheta$, d. h. es ist:

$$M c d\vartheta = \varepsilon O \vartheta dt,$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\varepsilon O}{M c} dt.$$

Daher ist die Grösse $\frac{\log \vartheta' - \log \vartheta}{t' - t} = \frac{\varepsilon O}{M c}$, wo ϑ' , ϑ und t' , t entsprechende Temperaturen und Zeiten sind, constant. Man nennt $\frac{\log \vartheta' - \log \vartheta}{t' - t}$ die Erkaltungsgeschwindigkeit v des Körpers.

Kennt man nun v für jede Temperatur, d. h. für jeden Punkt des Stabes vom Querschnitt x bis l , so kann man $\int_x^l v dx$ berechnen — zum mindesten graphisch oder numerisch — und wenn dieses Integral den Werth J hat, so findet man $\kappa = \frac{q c J}{f A e^{-f x}}$.

Man findet also κ , ohne Voraussetzungen über die Grösse von h machen zu müssen. Die Erkaltungsgeschwindigkeiten v für verschiedene Temperaturen bestimmte FORBES so, dass er einen Stab von derselben (?) Oberflächenbeschaffenheit wie den untersuchten auf bekannte höhere Temperatur brachte und erkalten liess. So liess sich v und damit J und endlich κ finden. Ist κ unabhängig von der Temperatur, so muss man denselben Werth finden, welchen Querschnitt man auch als Ausgangspunkt nimmt. Hängt aber κ von der Temperatur ab, so muss für verschiedene Querschnitte je ein anderer Werth von κ resultiren. Als Wärmequelle für das eine Ende des Stabes nahm FORBES Bäder von Blei oder Bäder aus einer Mischung von Blei, Zinn und Wismuth und konnte so Temperaturgrenzen von $275^\circ - 0^\circ$ erhalten. Er hat nur Schmiedeeisen untersucht und giebt als Resultat an, dass die Wärmeleitungsfähigkeit mit steigender Temperatur abnehme von 12.42 (bei 0°) — 7.44 (bei 275°). Zugleich konnte er die Wärmeleitungsfähigkeit in absolutem Maass bestimmen.

Bezieht man alle Grössen auf das C. G. S.-System, so ist die Wärmeleitungsfähigkeit des Schmiedeeisens nach FORBES

$$\begin{array}{l|l} \text{bei } 0^\circ \quad \kappa_0 = 0.207 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right) & \text{bei } 200^\circ \quad \kappa_{200} = 0.1357 \\ \text{bei } 100^\circ \quad \kappa_{100} = 0.156 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right) & \text{bei } 275^\circ \quad \kappa_{275} = 0.1240 \end{array}$$

Die Versuchsmethode und die Resultate von FORBES wurden von einem englischen Comité unter dem Vorsitz von TAIT geprüft¹⁾. TAIT²⁾ selbst und nach

¹⁾ TAIT, Rep. Brit. Ass. 1869.

²⁾ TAIT, Trans. Roy. Soc. Edinb. 1880, pag. 717; Phil. mag. (5) 12, pag. 147. 18 81.

ihm MITCHELL¹⁾ stellten nach derselben Methode sehr ausführliche Versuche an, mit Stäben von 5 Fuss (engl.) Länge unter sorgfältiger Berücksichtigung aller Fehlerquellen. Sie fanden zunächst, dass die Wärmeleitung bei allen untersuchten Metallen mit steigender Temperatur wächst, umgekehrt wie es FORBES gefunden hatte. Ihre Zahlen sind in schlecht definirtem Maass gegeben. Sie benutzen nämlich als Einheiten englischen Fuss, Minuten, Centigrade und diejenige Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung von 1 Cubikfuss der Substanz um 1° erforderlich ist. Die direkt von ihnen erhaltenen Zahlen sind folgende:

	0°	100°	200°	300°
Eisen	0·0119	0·01274	0·01358	0·01442
Kupfer (Crown) . .	0·0776	0·0792	0·0808	0·0824
Kupfer (c)	0·0520	0·0554	0·0588	0·0622
Neusilber	0·0068	0·0082	0·0096	0·0120
Blei	0·0152	0·0160		

Unter Crownkupfer ist Kupfer von der besten, unter c Kupfer solches von der schlechtesten elektrischen Leitungsfähigkeit verstanden.

Das Verhältniss der elektrischen zur thermischen Leitungsfähigkeit ergibt sich für die ersten 4 Substanzen folgendermaassen, wenn man für Kupfer c beide gleich 1 setzt.

	Wärme	Elektricität
Kupfer (c)	1	1
Eisen	0·23	0·264
Kupfer (Crown) . .	1·5	1·729
Neusilber	0·13	0·117

Um aus den obigen Zahlen absolute C. G. S.-Werthe für α zu erhalten, muss man sie mit $\frac{f^2 c \rho}{60}$ multipliciren, worin $f = 30·479$ (Anzahl cm pro englischen Fuss) und c die spezifische Wärme, ρ die Dichte der Substanz ist, also mit $15·4828 c \cdot \rho$.

Nun ist die spezifische Wärme (s. LANDOLT und BÖRNSTEIN Tabellen) von

	0°	100°	200°	300°
Eisen	0·1050	0·1151	0·1249	0·1376
Kupfer	0·08988	0·09422	0·09634	0·09846
Blei	0·02993	0·03108		
Neusilber	—	0·09464	—	—

Daraus ergeben sich also folgende Werthe für α in *cm gr sec*.

	0°	100°	200°	300°
Eisen	0·1509	0·1771	0·1831	0·2396
Kupfer (Crown) . .	0·93960	1·0043	1·0485	1·0928
Kupfer (c)	0·62960	0·7031	0·7631	0·8247
Blei	0·07859	0·08760		
Neusilber	0·08469	0·1021	0·1291	0·1495

$\left(\frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}} \right)$

Während diese Werthe von α etwas unsicher sind, da c und ρ in dieser Abhängigkeit von der Temperatur nicht genau bekannt sind, ergeben sich die

¹⁾ MITCHELL, Trans. Roy. Soc. Edinb. 1837, pag. 535.

Werthe von $a^2 \left(= \frac{x}{\rho c} \right)$ direkt, indem man die beobachteten Zahlen mit 15·4828 multiplicirt.

MITCHELL¹⁾ hat noch weitere Versuche nach derselben Methode angestellt über die Wärmeleitung des Manganstahls (Stahl mit 9·89 $\frac{1}{2}$ Mangan) und über die Wärmeleitung des Aluminiums²⁾. In denselben Einheiten wie oben ergab sich für:

	0°	100°	200°
Manganstahl . . .	0·00219	0·00272	0·00325

Da die spezifische Wärme des Manganstahles bestimmt wurde zu 0·124 bei 0°, 0·141 bei 100°, 0·159 bei 200°, so ist für:

	0°	100°	200°
Manganstahl . $\alpha =$	0·03280	0·04632	0·06240

Ebenso fand er für Aluminium bei gewöhnlicher Temperatur den Werth 0·072, woraus sich, wenn man für Aluminium $c = 0·2135$ $\rho = 2·6$ setzt, ergibt $\alpha = 0·6188$.

E. HALL³⁾ untersuchte nach der FORBES'schen Methode Gusseisen und Nickel und fand für Gusseisen Werthe zwischen 0·098 und 0·116, für eisenhaltigen Nickel $\alpha = 0·106$ (bei 116°), für Geschützisen $\alpha = 0·104$ bei 113°.

R. W. STEWART⁴⁾ fand nach einer nicht näher angegebenen Methode:

für Eisen $\alpha = 0·172 (1 - 0·0011 t)$
 „ Kupfer $\alpha = 1·10 (1 - 0·00053 t)$.

c) Variabler Zustand. Methoden von F. NEUMANN und ANGSTRÖM.

Während bei den beschriebenen Methoden der stationäre Zustand eines Stabes beobachtet wird, unterzog F. NEUMANN⁵⁾ den variablen Zustand der Untersuchung. Der Stab wurde zuerst an einem Ende erwärmt und nachdem der stationäre Zustand eingetreten war, die Wärmequelle fortgenommen, und nun der Temperaturabfall im Verlauf der Zeit an bestimmten Punkten gemessen.

Die Differentialgleichung ist die frühere

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho c} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{h}{\rho c} \frac{U}{S} \vartheta.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\vartheta = \sum e^{-\beta_i t} (A_i \cos \alpha_i t + B_i \sin \alpha_i t) X_i,$$

wobei X_i eine Function von x allein ist, die der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = m^2 X \quad (m = const).$$

Durch Ermittlung der Temperaturen an den beiden Enden des Stabes (mittelst Thermoelementen) ϑ_0 und ϑ_l in ihrer Abhängigkeit von der Zeit findet man, nach Auflösung transcenderter Gleichungen, worüber die Originalarbeit

1) MITCHELL, Trans. Roy. Soc. Edinb. 35, pag. 947. 1890.
 2) MITCHELL, Edinb. Proc. 17, pag. 300. 1889-90.
 3) HALL, Proc. Ann. Ac. of Arts and Sciences 1893, pag. 262.
 4) STEWART, Proc. Roy. Acad. Journ. 53, pag. 151. 1893.
 5) F. NEUMANN, Ann. de chim. et phys. (3) 66. 1862.

einzusehen ist¹⁾, dass man durch $\vartheta_o + \vartheta_l$ und $\vartheta_o - \vartheta_l$ sowohl α wie h finden kann. In dieser Weise fand NEUMANN folgende Werthe von α (etwa für 50° gültig):

Eisen	0.1638	
Kupfer	1.1080	
Messing	0.3020	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Zink	0.3071	
Neusilber	0.1094	

Das Verhältniss der Wärmeleitungsfähigkeit α zur elektrischen Leitungs-fähigkeit k findet NEUMANN für:

Eisen	Kupfer	Messing	Zink	Neusilber
18.6	17.6	19.8	17.1	19.9.

Angenäherte Proportionalität findet also statt.

Aehnlich wie bei Stäben lässt sich auch bei Ringen und bei Kugeln der variable Zustand theoretisch behandeln.

Bei Ringen hat H. F. WEBER²⁾ derartige Messungen angestellt, die aber nicht ausführlich publicirt sind.

Die nächste, sich an die NEUMANN'sche anschliessende Methode wurde von ANGSTRÖM³⁾ gegeben. Er nahm Stäbe, die er an dem einen Ende erst eine gemessene Zeit hindurch erwärmte, dann eine ebenso lange Zeit hindurch abkühlte, und nachdem das verschiedene Mal geschehen war, den Verlauf der Temperaturen an zwei Stellen mittelst Thermometern beobachtete. Daraus lässt sich ebenfalls α bestimmen. So fand ANGSTRÖM für:

$$\begin{aligned} \text{eisenhaltiges Kupfer } a^2 &= 1.163 (1 - 0.001519t) \\ \text{Eisen } a^2 &= 0.2409 (1 - 0.002874t) \end{aligned} \quad \left(\frac{cm^2}{sec}\right)$$

Indem man für ρc ihre Werthe in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur einsetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{für Kupfer } \alpha &= 0.9394 (1 - 0.001065t) \\ \text{Eisen } \alpha &= 0.1842 (1 - 0.001562t) \end{aligned} \quad \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$$

Auf dieselbe Weise bestimmte ANGSTRÖM für Quecksilber (welches er in eine Röhre füllte) den Werth bei 50°.

$$\text{Quecksilber } \alpha = 0.0177.$$

Die ANGSTRÖM'sche Methode lässt sich vortheilhafter benutzen, wenn man beide Enden des Stabes periodisch erwärmt und abkühlt. Man giebt, wie H. WEBER⁴⁾ es that, dem einen Ende die Temperatur ϑ_2 , dem andern die Temperatur ϑ_1 . Nach einer bestimmten Zeit giebt man dem ersten Ende ϑ_1 , dem zweiten ϑ_2 u. s. f. Man vertauscht die Temperaturen periodisch und beobachtet den Temperaturverlauf in der Mitte des Stabes. WEBER brachte dort ein Thermoelement zur Temperaturmessung an. Man erhält auf diese Weise sowohl α , wie h , die äussere Wärmeleitungsfähigkeit. Es ergab sich:

$$\begin{aligned} \text{für Eisen } \alpha &= 0.1485 \text{ bei } 39.23^\circ \\ \text{Neusilber } \alpha &= 0.08108 \text{ bei } 31.25^\circ. \end{aligned}$$

Vergleichende Versuche nach der Methode von ANGSTRÖM und nach der

¹⁾ S., auch KIRCHHOFF, Vorl. über Wärme, pag. 37.

²⁾ H. F. WEBER, Berl. Monatsb. 1880, pag. 459.

³⁾ ANGSTRÖM, Pogg. Ann. Bd. 114. 1861; Bd. 118. 1862; Bd. 123. 1864; s. DUMAS, Pogg. Ann. 129, pag. 272 u. 393. 1866; TAIT, Proc. Edinb. Soc. 8. 1874.

⁴⁾ H. WEBER, POGG. ANN. Bd. 146. 1872.

Methode von NEUMANN mit dem Ring hat HÄGSTRÖM¹⁾ angestellt, wobei er Thermoelemente als Messapparate benutzte. Er fand so für:

Schwedisches Kupfer $\alpha = 0.954 (1 - 0.00064 t)$

Englisches Kupfer (0.15% Phosphor enthaltend) $\alpha = 0.392 (1 + 0.000343 t)$.

d) Versuche von LORENZ.

Endlich hat im Jahre 1881 L. LORENZ²⁾ in Kopenhagen das Wärmeleitungsvermögen von Metallen untersucht, indem er ebenfalls den Temperaturverlauf in Stangen beobachtete. Und zwar bediente er sich zweier Methoden. Die eine (von ihm als zweite benutzt) war die oben angeführte Methode von FORBES, die Beobachtung des stationären Temperaturzustandes in einer einseitig erwärmten Stange, verbunden mit der Beobachtung der Erhaltungsgeschwindigkeit. In Bezug auf die letztere benutzte er jedoch nicht die angeführte Annahme, dass die pro Flächen- und Zeiteinheit nach aussen gestrahlte Wärmemenge = $h\vartheta$ ist, oder wenn man h selbst als von der Temperatur (in engen Grenzen linear) abhängig annimmt, gleich $h\vartheta(1 + \beta\vartheta)$ ist, sondern er leitete aus theoretischen Ueberlegungen über die Erhaltung, welche ja wesentlich auf Wärmeströmung beruht, die Formel

her (s. w. unten; E), dass die Aenderung der Temperatur mit der Zeit, $\frac{d\vartheta}{dt}$, gesetzt werden kann

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -h\vartheta(1 + \eta\vartheta^{\frac{1}{2}}),$$

woraus:

$$t = \frac{4}{h} \log \frac{\vartheta^{-\frac{1}{2}} + \eta}{\vartheta_0^{-\frac{1}{2}} + \eta}$$

sich ergibt. h und η sind zwei Constanten. Versuche bestätigten die Form dieser Lösung, die sich für schwache Erwärmungen sogar auf eine Gleichung mit einer Constante l reducirt von der Form:

$$t = \frac{4}{l} (\vartheta^{-\frac{1}{2}} - \vartheta_0^{-\frac{1}{2}}).$$

Die Temperaturen an den einzelnen Punkten der Stange wurden durch Thermoelemente gemessen. Die Stangen selbst wurden, um ihnen gleiche Oberfläche zu geben, vernickelt. Die Resultate der Versuche dienen zur Bestätigung der nach einer anderen Methode mit denselben Stangen durchgeführten Bestimmungen. Eine Stange wird von dem einen Ende her erwärmt (durch Berührung mit einer heissen Stange) und es werden die Temperaturen an einer Reihe gleich weit von einander abstehenden Punkten bei dieser Erwärmung gemessen. Diese Punkte waren je 2 cm von einander entfernt, und ihre Temperaturen wurden durch Thermoelemente ermittelt. Dann hört man mit der Erwärmung auf, wodurch die Temperaturen der einzelnen Punkte wieder zurückgehen und misst wieder den zeitlichen Temperaturverlauf. Sind dann $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$ die Temperaturen an den einzelnen um $l (= 2 \text{ cm})$ von einander abstehenden Punkten und nennt man die Summen $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ (also vom zweiten bis zum vorletzten Punkte) während der Erwärmung Σ , während der Abkühlung Σ' , den zeitlichen Verlauf des Werthes dieser Summen (den man beobachtet) $\frac{d\Sigma}{dt}$ und $\frac{d\Sigma'}{dt}$, nennt man ferner die Grösse $u_0 - u_1 + u_{n-1} - u_{(n-1)l}$

¹⁾ HÄGSTRÖM, Ofvers. k. Vet. Ak. Forh. 1891. No. 2, pag. 45; No. 5, pag. 289; No. 6, pag. 381.

²⁾ L. LORENZ, WIRD. Ann. 13, pag. 422. 1881.

(d. h. die Summen der Differenzen der ersten beiden und letzten beiden Punkte) bei der Erwärmung Δ , bei der Abkühlung Δ' , so lässt sich leicht zeigen, dass:

$$\frac{x}{\rho c} = \frac{l^2}{\Delta - \Delta'}, \left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt} \right)$$

ist. Man braucht also nur Δ , Δ' , $\frac{d\Sigma}{dt}$ und $\frac{d\Sigma'}{dt}$ zu messen, und h fällt dabei ganz fort. Mittelst dieser beiden Methoden fand LORENZ folgende Werthe für x und zwar sowohl bei 0° (x_0) als bei 100° (x_{100}).

Wärmeleitung					
Name	x_0	x_{100}	Name	x_0	x_{100}
Kupfer . . .	0.7198	0.7226	Eisen	0.1665	0.1627
Magnesium . . .	0.3760	0.3760	Zinn	0.1528	0.1432
Aluminium . . .	0.3445	0.3619	Blei	0.0836	0.0764
Messing (roth) . .	0.2460	0.2827	Neusilber	0.0700	0.0887
Cadmium	0.2200	0.2045	Antimon	0.0442	0.0396
Messing (gelb) . .	0.2041	0.2540	Wismuth	0.0177	0.0174

Die Zahlen sind alle absolut $\left(\frac{gr}{cm \ sec} \right)$. Man sieht daraus, dass die Wärmeleitfähigkeit mit steigender Temperatur

zunimmt bei Kupfer, Aluminium, Messing, Neusilber,
 abnimmt bei Cadmium, Eisen, Zinn, Blei, Antimon, Wismuth,
 constant bleibt bei Magnesium.

LORENZ untersuchte auch das elektrische Leistungsvermögen k seiner Stäbe und fand für das Verhältniss $\frac{x_0}{k_0}$ die Werthe

$\frac{x_0}{k_0} =$	Cu	Mg	Al	Messing (r)	Cd	Messing (g)
	1574	1537	1529	1562	1527	1617
	Fe	Sn	Pb	Neusilber	Sb	Bi
	1605	1635	1627	1858	1011	1900.

Bis auf die drei letzten Metalle ist also $\frac{x_0}{k_0}$ nahezu constant — das WIEDEMANN-FRANZ'sche Gesetz.

Dies sind die wesentlichen Methoden, welche auf der Temperaturvertheilung oder dem Temperaturverlauf in Stäben beruhen.

B. Wärmeleitung in Platten, Kugeln und Würfeln.

Den Durchgang der Wärme durch Platten benutzte zuerst PÉCLET zur Bestimmung von x für Metalle, jedoch ohne grosse Genauigkeit. Für schlecht leitende Metalle wendete KRONAUER¹⁾ diese Methode in der Form an, wie sie H. F. WEBER bei Flüssigkeiten benutzt hatte, und fand folgende Werthe

	x	a^2	Temperatur
Blei	0.0741	0.2205	2.6
Wismuth	0.0106	0.037	2.8 (C. G. S.)
WOOD's Metall	0.0304	0.0863	1.2

Die SENARMONT'sche Methode, welche in dem Abschnitt »Wärmeleitung der Krystalle« angeführt werden wird, hat JANNETAZ²⁾ auch für Metalle angewendet,

¹⁾ KRONAUER, Vierteljahrsschrift d. naturw. Ges. z. Zürich 25, pag. 257. 1880.

²⁾ JANNETAZ, Compt. rend. 99, pag. 1019. 1884.

um relative Werthe von α zu erhalten. Er bedeckte nämlich 2 Platten isotroper Körper von den Dicken e und e' mit einem leicht schmelzbaren Körper und steckte einen heissen Stab hindurch. Sind x und x' die in gleichen Zeiten durch Abschmelzung erzeugten Kreisradien, so ist

$$\frac{\alpha e}{\alpha' e'} = \frac{x^2}{x'^2}.$$

Während bei diesen Methoden die seitliche Ausstrahlung der Platten wegen ihrer geringen Höhe keinen erheblichen Fehler hervorbringt, würde diese Ausstrahlung bei längeren Cylindern besondere Berücksichtigung erfordern. Dies hat BERGET¹⁾ dadurch vermieden, dass er, wie es THOMSON beim Schutzringelektrometer that, den eigentlichen Cylinder mit einem Schutzcylinder aus derselben Substanz umgab, oder mit anderen Worten, die Temperaturen nur im Kern eines weiten Cylinders bestimmte. Den Cylinder setzte er mit seiner Basis auf Eis, während er auf die obere Grundfläche einen Quecksilbercylinder brachte, dessen obere Fläche durch heisses Wasser erwärmt wurde. Durch Thermoelemente wurde der Temperaturverlauf im Quecksilber und in dem Cylinder bestimmt. Sind $\frac{dz}{d\vartheta}$ und $\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)_1$ die Werthe des Temperaturgefälles an der Grenzfläche von Hg und der Substanz, so verhalten sich

$$\alpha : \alpha_1 = \frac{dz}{d\vartheta} : \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)_1.$$

Kennt man also α für Quecksilber, so kennt man α_1 für andere Substanzen. Für Hg hatte BERGET selbst den Werth für α bestimmt (s. u.) und fand so für

Rothes Kupfer	$\alpha = 1.0405$
Messing	$\alpha = 0.2625$ (C. G. S.)
Eisen	$\alpha = 0.1586$.

Nach derselben Methode maass BERGET²⁾ dann noch für eine Reihe von anderen Metallen die Wärmeleitungsconstante α und bestimmte für dieselben Cylinder nach der Methode der THOMSONBRÜCKE auch die elektrische Leitungsfähigkeit k . Beide Grössen sind im C. G. S-System in folgender Tabelle enthalten und zugleich das Verhältniss $\frac{\alpha}{k}$.

Metalle	α	k	$\frac{\alpha}{k}$
Kupfer	1.0405	$65.13 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{+3}$
Zink	0.303	$18.00 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{+3}$
Messing	0.2625	$16.47 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{+3}$
Eisen	0.1587	$9.41 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{+3}$
Zinn	0.1510	$8.33 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{+3}$
Blei	0.0810	$5.06 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{+3}$
Antimon	0.042	$2.47 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{+3}$
Quecksilber	0.0201	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{+3}$

$\frac{\alpha}{k}$ erweist sich also im Wesentlichen constant und auch Eisen macht keine Ausnahme.

¹⁾ BERGET, Compt. rend. 106, pag. 287. 1888.

²⁾ BERGET, Journ. de Phys. (2) 9, pag. 135. 1890.

Beobachtungen an einer Kupferkugel, die nach aussen ausstrahlt und in deren Mitte ein Thermolement sich befindet, stellte DONALD M'FARLANE¹⁾ an. Doch ist diese Methode besser für schlechte Leiter anwendbar.

Versuche mit Würfeln wurden von KIRCHHOFF und HANSEMANN²⁾ angestellt. Sie formten Würfel von 14 cm Seitenlänge aus Metallen und bohrten in dieselben von einer Fläche bis zur Mitte eine Anzahl Löcher, in welche sie Thermolemente brachten. Die Vorderfläche des Würfels wurde durch eine Brause von einem bestimmten Moment an mit Wasser von bestimmter Temperatur bespritzt und der Verlauf der Temperatur an den durch die Endpunkte der Löcher gegebenen Stellen der Würfel beobachtet. Daraus ergab sich nach umständlichen Rechnungen, die Temperaturleitungsfähigkeit a^2 mit ihrer Abhängigkeit von der Temperatur

Puddelstahl I	$a^2 = 0.1694 - 0.00034 (\vartheta - 15)$	
Bessemerstahl	$a^2 = 0.1148 - 0.00019 (\vartheta - 15)$	
Puddelstahl II	$a^2 = 0.1637 - 0.00027 (\vartheta - 15)$	$\left(\frac{cm}{sec}\right)$
Blei	$a^2 = 0.2399 - 0.00064 (\vartheta - 15)$	
Zinn	$a^2 = 0.3860 - 0.105 (\vartheta - 15)$	
Zink	$a^2 = 0.4049 \pm 0.00$	
Kupfer (phosphorhaltig) $a^2 = 0.5059 + 0.029 (\vartheta - 15)$.		

Uebereinstimmend mit LORENZ finden sie bei Kupfer eine Zunahme von a^2 mit der Temperatur, bei den übrigen Stoffen Abnahme.

Mittelst der gemessenen Werthe der specifischen Wärme und Dichtigkeit wurde aus a^2 noch κ berechnet für die Temperatur 15°. Es ergab sich in $\left(\frac{gr}{cm\ sec}\right)$.

	Eisen I	Eisen II	Eisen III	Blei	Zinn	Zink	Kupfer
$\kappa_{15} =$	0.1418	0.0964	0.1375	0.0793	0.1446	0.2545	0.4152.

Im Wesentlichen zeigt sich also vorzügliche Uebereinstimmung mit den Zahlen von LORENZ.

Das Verhältniss der Wärme- zur elektrischen Leitungsfähigkeit ergab sich für

Blei	Zinn	Zink	Kupfer	Eisen I	Eisen II	Eisen III
1.74	1.64	1.72	1.73	2.08	2.37	2.09

Bis auf das Eisen ist also das WIEDEMANN-FRANZ'sche Gesetz bestätigt. Ob die Ausnahmestellung des Eisens mit seinen magnetischen Eigenschaften zusammenhängt, lassen die Verfasser unentschieden.

C. Wärmeleitung des Quecksilbers.

Die Wärmeleitungsfähigkeit des Quecksilbers wurde zuerst von ANGSTRÖM³⁾ nach seiner Methode der periodischen Erwärmung und Abkühlung bestimmt, indem er das Quecksilber in ein Glasrohr von 37.6 mm Durchmesser füllte. Er erhielt als Werth für κ bei 50° (umgerechnet in C. G. S. Einheiten)

$$\kappa_{50} = 0.0177.$$

Da die elektrische Leitungsfähigkeit des Quecksilbers mit wachsender Temperatur abnimmt, so suchte HERWIG⁴⁾ die Frage zu entscheiden, ob dasselbe auch für die Wärmeleitungsfähigkeit gilt. Er fand jedoch, dass diese zwischen

1) DONALD M'FARLANE, Phil. mag. (4) 43. 1872.

2) KIRCHHOFF und HANSEMANN, WIED. Ann. 9, pag. I. 1880; 13, pag. 401. 1888.

3) ANGSTRÖM, POGG. Ann. 123, pag. 638. 1864.

4) HERWIG, POGG. Ann. 151, pag. 191. 1874.

40° und 160° absolut constant bleibt. Indess ist nach späteren Ueberlegungen von ihm¹⁾ dieses Resultat nicht sicher.

Die nächste Bestimmung rührt von H. F. WEBER²⁾ her, der seine in dem Abschnitt »Wärmeleitung der Flüssigkeiten« beschriebene Methode darauf anwendete. Er erhielt, wenn ϑ die Temperatur in Celsiusgraden ist,

$$x = 0.01479 + 0.000083\vartheta,$$

woraus für 50° $x = 0.01823$ statt 0.0177 folgen werden.

Eine interessante Methode hat BERGET³⁾ angewendet, die durch Fig. 553 charakterisirt ist. Er maass nämlich in dem mittleren Theil einer Quecksilbermasse an 2 Stellen, nachdem der stationäre Zustand eingetreten war, die Temperaturen und bestimmte zugleich die dabei durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit hindurchgehende Wärmemenge mittelst des BUNSEN'SCHEN Eiscalorimeters. Aus der Formel

$$Q = \frac{x(\vartheta - \vartheta') + F}{e},$$

wo F der Querschnitt, l der Abstand der beiden Schichten ist, an denen die Temperaturen gemessen werden, ergab sich ohne Weiteres x .

Er fand so zwischen 0 und 100°

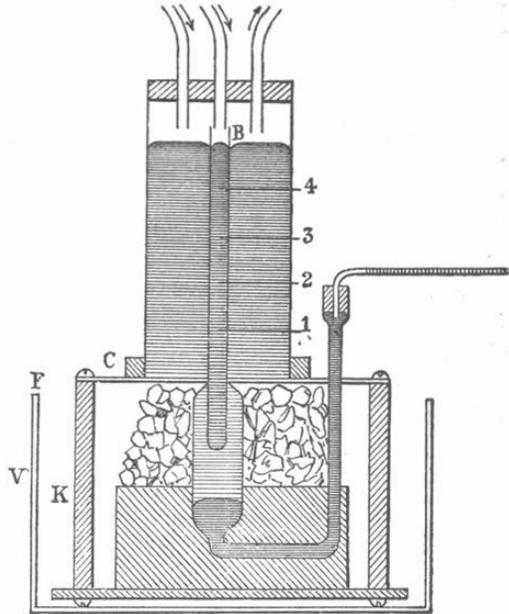
$$x = 0.02015,$$

und für den Temperaturcoefficienten ergab sich ein negativer Werth, nämlich

$$\alpha = -0.001267 \text{ zwischen } 0 \text{ und } 100^\circ$$

$$\alpha = -0.00045 \text{ zwischen } 0 \text{ und } 300^\circ$$

wie er dem WIEDEMANN-FRANZ'SCHEN Gesetz entspricht. Die Differenz zwischen diesem Resultat und dem von H. F. WEBER ist noch aufzuklären.



(Ph. 553.)

D. Einfluss der Magnetisirung auf die Wärmeleitung des Eisens und Wismuths.

Die Frage, ob die Magnetisirung die Wärmeleitung des Eisens verändert, ist vielfach experimentell behandelt worden. MAGGI⁴⁾ glaubte aus seinen Versuchen nach der SENARMONT'SCHEN Methode (s. weiter unten) zu entnehmen, dass das Eisen, wenn magnetisirt, nach verschiedenen Richtungen verschiedene Wärmeleitung zeige. Dies Resultat wurde von HOLMGREN⁵⁾ als auf einem experimentellen Fehler beruhend nachgewiesen; er zeigte, dass die Magnetisirung keinen Einfluss habe, dasselbe hatte vorher schon MATTEUCCI⁶⁾ gezeigt. Später bewiesen NACCARI

1) HERWIG, WIED. Ann. 10, pag. 662. 1880.

2) H. F. WEBER, WIED. Ann. 10, pag. 103. 1880.

3) BERGET, Journ. de phys. 7, pag. 2. 1888.

4) MAGGI, Arch. de sciences phys. et nat. 14, pag. 132. 1850.

5) HOLMGREN, Ofversigt of Forhandlingar Königl. Svetensb. Akad. 1862; POGG. Ann. 121. 1864.

6) MATTEUCCI, Mondes VI. 1864.

und BELLATI¹⁾ dasselbe mittelst zweier Methoden noch einmal, nämlich zunächst nach der SENARMONT'schen Methode, dann mittelst Thermoelementen. TOMLINSON²⁾ dagegen, der nach der DESPRETZ'schen Methode arbeitete, fand wieder eine Aenderung der Wärmeleitung von Eisen und Stahl durch Magnetisirung, was nachträglich wieder von TROWBRIDGE und PENROSE³⁾ bestritten wurde. Endlich führte im Jahre 1886 BATTELLI⁴⁾ eine sorgfältige Untersuchung aus, aus welcher sich ergab, dass longitudinale Magnetisirung die Wärmeleitung wachsen lässt um $0.2\frac{0}{0}$, transversale sie abnehmen lässt um ca. $0.04\frac{0}{0}$, wenn das magnetische Feld etwa 1400 C. G. S.-Einheiten hat.

Dagegen ist für Wismuth, welches bekanntlich den Hall-Effekt und den thermomagnetischen Effekt am stärksten giebt, eine Aenderung des thermischen Leitungsvermögens nachgewiesen, wenn dasselbe in ein starkes magnetisches Feld gebracht wird. Bekanntlich nimmt die elektrische Leitungsfähigkeit des Wismuths im magnetischen Felde ab, und nach dem Gesetz von WIEDEMANN und FRANZ war daher auch eine Abnahme des Wärmeleitungsvermögens zu erwarten. Eine solche haben zu gleicher Zeit RIGHI⁵⁾ und LEDUC⁶⁾ constatirt. NERNST⁷⁾, der diese Frage auch untersuchte, konnte eine Aenderung nicht finden, aber A. v. ETTINGSHAUSEN⁸⁾ fand bei reinem Wismuth thatsächlich eine Aenderung von κ , die jedoch kleiner war als die entsprechende Aenderung des elektrischen Leitungsvermögens. Sie betrug nur $2-3\frac{0}{0}$ in einem starken magnetischen Feld (ca. 9000 C. G. S.)

E. Ueber die äussere Wärmeleitung.

Die erste Hypothese von FOURIER, dass die von einem Körper an die Luft abgegebene Wärmemenge pro Zeit- und Flächeneinheit gleich:

$$h(\vartheta - \vartheta_0)$$

gesetzt werden könne, wäre an sich plausibel. Jedoch hängt die Grösse h offenbar von der Beschaffenheit der Luft in der Nähe des strahlenden Körpers ab, ob sie ruhig oder bewegt, feucht oder trocken ist, ferner auch wesentlich davon, ob sie einen geringen Zwischenraum bis zum nächsten Körper ausfüllt, oder einen grossen, endlich auch von der Temperatur. Den letzten Einfluss suchte LODGE⁹⁾ dadurch zu eliminiren, dass er das DULONG-PETIT'sche Ausstrahlungsgesetz (s. o. pag. 242) annahm, ohne wesentlichen Erfolg. LEES¹⁰⁾ glaubte bei den Versuchen von FORBES und MITCHELL (s. o.) besser statt $h(\vartheta - \vartheta_0)$ anzunehmen $h(\vartheta - \vartheta_0)^n$, wo $n = 1.26$ wäre. Andere Autoren¹¹⁾ versuchten $h = h_0(1 + \alpha\vartheta)$ zu setzen. LORENZ¹²⁾ endlich gab, wie schon oben erwähnt, eine ganz andere Darstellung für diesen Wärmeverlust durch äussere Leitung, da der

1) NACCARI und BELLATI, Nuroo Cimento (3) I. 1877.

2) TOMLINSON, Proc. Roy. Soc. 27, pag. 109. 1878.

3) TROWBRIDGE und PENROSE, Phil. mag. (5) 16, pag. 377. 1883.

4) BATTELLI, Atti R. Acc. di Torino 21. 1886.

5) RIGHI, Atti. Acc. Lincei (4) 3, 1 sem., pag. 481. 1887.

6) LEDUC, Journ. de Phys. 27. 1887.

7) NERNST, WIED. Ann. 31, pag. 760. 1887.

8) ETTINGSHAUSEN, WIED. Ann. 33, pag. 129. 1888.

9) LODGE, Phil. mag. (5) 7, pag. 198. 8, pag. 510. 1879.

10) LEES, Phil. mag. (5) 28, pag. 429. 1889.

11) H. F. WEBER, WIED. Ann. 10, pag. 103. 1880; CHWOLSON, Mém. de l'Ac. de St. Petersburg (7) 37, No. 12. 1890.

12) LORENZ, WIED. Ann. 13, pag. 582. 1881.

Ansatz $hu(1 + \beta u)$, wo $u = \vartheta - \vartheta_0$ nur von einem Werthe u_0 bis etwa $\frac{1}{4}u_0$ sich brauchbar erwies. Die Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit kommt offenbar darauf hinaus, die Strömungen, die in einer Luftschicht durch Temperaturdifferenzen entstehen, mathematisch zu verfolgen. In diesem Sinne hatte OBERBECK¹⁾ das Problem behandelt, ohne jedoch zu leicht brauchbaren Resultaten zu gelangen.

LORENZ behandelt die Aufgabe auf folgende Weise. Es sei eine Platte von der Höhe H und unendlich grosser Breite vertikal aufgehängt. In der Luft, entstehen dadurch Strömungen. Wenn die Platte constante Temperatur hat und die Luft kälter ist und man die horizontalen Strömungen vernachlässigt, so ist der Druck p der Luft nur Function der vertikalen Erhebung z . Es sei w die vertikale Geschwindigkeit der Luft, η der Reibungscoëfficient, ρ' die Dichtigkeit der Luft, $g = 9.81$. Dann ist die Bewegungsgleichung der Luft:

$$\rho' \left(\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dz} w \right) = -\rho' g - \frac{dp}{dz} + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

Ferner sei T die absolute Temperatur der Luft in weiter Entfernung, $T + \vartheta$ die im Punkt x, z . Es sei c die spec. Wärme (bei constantem Druck), k die Wärmeleitung der Luft, dann ist:

$$\rho' c \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\vartheta}{dz} w \right) = k \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right).$$

In sehr grosser Entfernung von der Platte möge die Dichtigkeit der Luft ρ sein, so ist:

$$\rho T = \rho'(T + \vartheta) \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} + \rho g = 0,$$

also ist:

$$\frac{dp}{dz} + \rho' g = (\rho' - \rho)g = -\frac{\vartheta}{T + \vartheta} \rho g.$$

Bei stationärem Zustand ist also:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} w &= g \frac{\vartheta}{T} + \frac{\eta}{\rho} \frac{T + \vartheta}{T} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{d\vartheta}{dz} w &= \frac{k}{\rho c} \frac{T + \vartheta}{T} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich in folgende vereinfachen:

$$\begin{aligned} 0 &= g \frac{\vartheta}{T} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \vartheta w &= \frac{k}{\rho c} \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} \end{aligned}$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } x + \infty.$$

Ist L die Wärmemenge, welche von jedem cm^2 der Platte pro Secunde an die Luft abgegeben wird, so ergibt sich:

$$L = N \sqrt[4]{\frac{c g k^3}{\eta H T}} \sqrt{\rho} \cdot \vartheta_0^{\frac{3}{4}},$$

$$N = - \left[\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'} \right]_{x'=0}.$$

¹⁾ OBERBECK, WIED. Ann. 7, pag. 271. 1876.

Setzt man die Zahlenwerthe für N, c, g, k, η, T ein, so wird:

$$L = 0.000096 H^{-\frac{1}{2}} \vartheta_0^{\frac{3}{2}}.$$

Die Erkaltung eines Körpers, der nach dem STEFAN'schen Gesetz strahlt und zugleich an die Luft Wärme abgibt, geschieht daher nach folgender Differentialgleichung:

$$-\frac{dT}{dt} = \frac{q\sigma}{mc} (T^4 - T_0^4) + \frac{q\lambda}{mc} (T - T_0)^{\frac{3}{2}}$$

worin T und T_0 die absoluten Temperaturen des Körpers und der Umgebung, m die Masse, c die spezifische Wärme, q die Oberfläche, σ und λ Constanten sind. Ist $T - T_0 = \vartheta$ klein, so wird daraus:

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = h\vartheta(1 + \eta\vartheta^{\frac{1}{2}}).$$

Daraus folgt:

$$t = \frac{4}{h} \log \frac{\vartheta^{-\frac{1}{2}} + \eta}{\vartheta_0^{-\frac{1}{2}} + \eta}.$$

Diese Formel hat LORENZ durch eine Reihe von Versuchen geprüft und bestätigt gefunden. Ebenso hat TERESCHIN¹⁾ dieselbe brauchbar gefunden.

F. Tabelle der Wärmeleitungsfähigkeit von Metallen.

Relative Werthe sind auf absolute umgerechnet, indem für Blei der Mittelwerth aus den Zahlen von KIRCHHOFF und HANSEMANN ($\alpha_{15} = 0.0793$) und LORENZ ($\alpha_{15} = 0.0825$) genommen wurde, nämlich $\alpha_{15} = 0.0809$. Der Temperaturcoëfficient γ in der Formel $\alpha = \alpha_0(1 + \gamma\vartheta)$ ist hinzugesetzt.

Metall	Temp.	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	Beobachter
Aluminium	0°	0.3435	0.000184	LORENZ
„	ca. 15°	0.6188		MITCHELL
Antimon	0°	0.0442	- 0.000046	LORENZ
„	ca. 15°	0.042		BERGET
Blei	0°	0.0836	- 0.000072	LORENZ
„	15°	0.0793		KIRCHHOFF u. HANSEMANN
„	7°	0.0719		H. F. WEBER
„	ca. 15°	0.081		BERGET
„	0°	0.07959		MITCHELL
„	2.6°	0.0741		KRONAUER
Cadmium	0°	0.2200	- 0.000155	LORENZ
„	0°	0.2213		H. F. WEBER
Eisen	0°	0.1665	- 0.000038	LORENZ
„	0°	0.1988	- 0.000517	ANGSTRÖM
„	über 0°	0.1587		BERGET
„	ca. 15°	0.1648		NEUMANN
„	ca. 15°	0.1133		WIEDEMANN u. FRANZ
„	0°	0.1509		MITCHELL
„	0°	0.172	- 0.0011	STEWART
Schmiedeeisen	0°	0.2070	- 0.0006838	FORBES
„	39°	0.1485	[+0.000001776 ϑ^2]	H. F. WEBER

¹⁾ TERESCHIN, J. d. russ. phys. chem. Ges. 1892.

Metall	Temp.	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	Beobachter
Gold	ca. 15°	0·5065		WIEDEMANN u. FRANZ
Kupfer	0°	0·7198	+ 0·00028	LORENZ
„ (käuflich)	0°	0·8190		H. F. WEBER
„ „	0°	0·9823	— 0·001492	ANGSTRÖM
„ (phosphorhaltig)	15°	0·4152		KIRCHHOFF u. HANSEMANN
„	ca. 15°	0·7007		WIEDEMANN u. FRANZ
„ (bestes)	0°	0·93960		MITCHELL
„ (schlechtestes)	0°	0·62960		„
„ (schwedisches)	0°	1·11	— 0·00053	STEWART
„ (englisches)	0°	0·954	— 0·00064	HÄGSTRÖM
„ (0·15 $\frac{g}{g}$ P enthaltend)	0°	0·392	+ 0·000343	„
Magnesium	0°	0·3760	+ 0·0	LORENZ
Nickel (eisenhaltig)	116°	0·106		HALL
Platin	ca. 15°	0·0799		WIEDEMANN u. FRANZ
Quecksilber	0°	0·01479	+ 0·000083	H. F. WEBER
„	50°	0·0177	— 0·00045 bis 300°	ANGSTRÖM
„	0°	0·02015	— 0·0001276 bis 100°	BERGET
Silber	0°	1·0960		H. F. WEBER
Stahl hart	ca. 15°	0·062		F. KOHLRAUSCH
„ weich	„	0·111		„
„ „	„	0·1104		WIEDEMANN u. FRANZ
Puddelstahl	15°	0·1375—0·1418		KIRCHHOFF u. HANSEMANN
Bessemerstahl	15°	0·0946		„
Manganstahl	0°	0·03280		MITCHELL
Wismuth	0°	0·0171	— 0·000013	LORENZ
„	7°	0·0108		H. F. WEBER
„	ca. 15°	0·0171		WIEDEMANN u. FRANZ
„	ca. 15°	0·017		ETTINGSHAUSEN u. NERNST
„	2·8°	0·0106		KRONAUER
Zink	15°	0·2524		KIRCHHOFF u. HANSEMANN
„	0°	0·3056		H. F. WEBER
„	ca. 15°	0·3071		NEUMANN
„	ca. 15°	0·2675		WIEDEMANN u. FRANZ
„	ca. 15°	0·303		BERGET
Zinn	0°	0·1528	— 0·000150	LORENZ
„	15°	0·1446		KIRCHHOFF u. HANSEMANN
„	0°	0·1446		H. F. WEBER
„	ca. 15°	0·1447		WIEDEMANN
„	ca. 15°	0·151		BERGET

Legierungen.

Metall	Temp.	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	Beobachter
Messing	0°	0·2041	+ 0·000499	LORENZ
„ (gelb)	0°	0·2460	+ 0·000366	„
„ (roth)	ca. 15°	0·3020		NEUMANN
„ (käuflich)	0°	0·1500		H. F. WEBER
„ „	über 0°	0·2615		BERGET

Metall	Temp.	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	Beobachter
Neusilber	0°	0·0700	\pm 0·000187	LORENZ
„	31°	0·08108		H. WEBER
„	ca. 15°	0·1094		NEUMANN
„	ca. 15°	0·0599		WIEDEMANN u. FRANZ
„	0°	0·08469		MITCHELL
ROSE's Metall	ca. 15°	0·03808		WIEDEMANN
WOOD's Metall	ca. 15°	0·02770		„
„	7°	0·0319		H. F. WEBER
„	1·2°	0·0304		KRONAUER
Leg. 99·05 Bi + 0·95 Sn	ca. 15°	0·088		ETTINGSHAUSEN u. NERNST
„ 93·86 Bi + 6·14 Sn	ca. 15°	0·012		„

V. Wärmeleitung schlecht leitender fester Körper.

A. Platten.

Durch Beobachtung des Wärmedurchgangs in Platten hatten zuerst PÉCLET und mit derselben Methode HERSCHEL¹⁾ für einige Felsarten, dann TYNDALL, die Wärmeleitungsfähigkeit wenigstens relativ zu bestimmen gesucht. TYNDALL²⁾ schnitt Würfel aus Hölzern, drückte mittelst einer Thierblase ein Quecksilbergefäß an eine Seite derselben heran und erwärmte dieses Quecksilber, indem er durch ein Drahtgitter in ihm einen Strom sendete. Auf der gegenüberliegenden Seite des Würfels wurde die Temperatur durch ein Thermolement gemessen. So fand er, dass bei Hölzern α parallel den Fasern am grössten, parallel den Ringen am kleinsten ist, senkrecht zu ihnen einen mittleren Werth hat. Dieses Resultat lässt sich noch einfacher nach der SÉNARMONT'schen Methode finden, die bei der Wärmeleitung der Krystalle besprochen werden wird.

Nach derselben Methode wie TYNDALL bestimmte C. LANG³⁾ die Wärmeleitung einiger Baumaterialien.

FORBES⁴⁾ liess nach Angaben von W. THOMSON durch Platten (von schlechten Leitern) die Kälte von einer Kältemischung gehen und brachte durch sie Wasser, welches oberhalb der untersuchten Platten war, zum Gefrieren und bestimmte damit α für eine grosse Menge schlecht leitender Körper. Auf dieselbe Weise fand ANDREWS⁵⁾, dass Eis um 122 $\frac{0}{100}$ schlechter leitet als Schnee. Die PÉCLET'sche Methode mit einigen Verbesserungen wandten ferner HERSCHEL und LEBOUR⁶⁾, dann HOPKINS⁷⁾ an, der für eine Anzahl von Gesteinen und für Wallrath und Wachs die Wärmeleitung bestimmte, und endlich LESS⁸⁾, der relative Werthe für α ebenfalls für Gesteine und Hölzer bestimmte.

1) Die ähnlich angestellten Versuche von BEETZ (POGG. Ann. Jubelband, pag. 23. 1878) über die Leitungsfähigkeit des Glases sind nur roh und es sind die Einheiten, auf welche sich seine Zahlen beziehen, nicht angegeben.

2) TYNDALL, Phil. Mag. (4) 5, pag. 138; 6, pag. 121. 1853.

3) C. LANG, Die Wärmeleitung einiger Baumaterialien. 1874.

4) FORBES, Proc. Edinb. Soc. 1874.

5) ANDREWS, Proc. Roy Soc. 40, pag. 544. 1881.

6) HERSCHEL u. LEBOUR, Rep. Brit. Ass. 1874 (2), 1876, pag. 19; 1877 (2), 1878, pag. 133; 1879, pag. 158.

7) HOPKINS, Phil. Trans. 1857, pag. 805.

8) LESS, POGG. Ann. Erg. 8, pag. 517. 1878.

Eine Verbesserung der Methode von PÉCLET nach Angaben von VOIGT in Göttingen beschreibt VENSKE¹⁾; doch sind Resultate dieser Anordnung noch nicht publicirt.

Wenig genau ist die Modifikation, die THOULET²⁾ angegeben und LAGARDE³⁾ theoretisch behandelt hat, bei der die Platten auf erhitztes Eisen gelegt werden, oben auf dieselben Wachstropfen gebracht werden und die Zeit bis zum Schmelzen derselben beobachtet wird.

Sehr gute Resultate dagegen giebt die »Leitungssäule« von CHRISTIANSEN⁴⁾, die unter »Wärmeleitung der Flüssigkeiten« beschrieben werden wird. CHRISTIANSEN bestimmte so das relative Wärmeleitungsvermögen (gegen Luft) für

Spiegelglas zu 38·8

Marmor zu 120.

Setzt man die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft = 0·00005, so wird für

Spiegelglas κ = 0·0019

Marmor κ = 0·006.

Eine Methode, die namentlich für Substanzen, von denen man nur kleine Stücke zur Verfügung hat, vortheilhaft ist, ist von LODGE⁵⁾ angegeben. Man kann sie die »Methode des getheilten Stabes« nennen. Sie besteht darin, dass man einen Metallstab in zwei Hälften theilt, das eine Ende erwärmt, das andere abkühlt, und den Temperaturzustand an verschiedenen Stellen beider Hälften misst, wenn 1) die beiden Hälften direkt an einander liegen, 2) wenn eine schlecht leitende Platte dazwischen geschoben wird. Diese Methode wurde von LESS⁶⁾ für eine grosse Reihe von Substanzen angewandt, sowohl für Krystalle, wie für andere schlechte Leiter. Seine Resultate sind folgende in C. G. S. Einheiten

	κ		κ
Crownglas	0·00243	Guttapercha	0·00046
Flintglas	0·00201	Papier	0·00031
Steinsalz	0·0138	Asbestpapier	0·00057
weisser Marmor	0·0071	Mahagoniholz (\perp Faser) . .	0·00047
Schiefer	0·0047	Nussholz (\perp Faser)	0·00036
Schellack	0·00060	Kork	0·00013
Paraffin	0·00061	Seide	0·00022
Para-Kautschuck	0·00038	Baumwolle	0·00055
Schwefel	0·00045	Flanell	0·00023
Ebonit	0·00040		

Statt in Form von Platten verwendete GRASSI⁷⁾ schlechtleitende Substanzen in Form von Bechern, die er innen mit Quecksilber füllte und aussen mit Quecksilber umgab. Das äussere Quecksilber wurde durch Wasserkühlung auf constanter Temperatur erhalten, das innere durch eine von einem elektrischen Strom durchflossene Spirale erwärmt. Die äussere Wärmeleitung beeinflusst die Resultate höchstens auf 0·6%. Die von ihm erhaltenen Werthe sind folgende:

1) VENSKE, Gött. Nachr. 1891, pag. 121.

2) THOULET, Compt. rend. 94, pag. 1047. 1882.

3) LAGARDE, Compt. rend. 94, pag. 1048. 1882.

4) CHRISTIANSEN, WIED. Ann. 14, pag. 23. 1881.

5) LODGE, Phil. Mag. (5) 5, pag. 110. 1878.

6) LESS, Phil. Trans. 183 A, pag. 481. 1892.

7) GRASSI, Atti Ist. Napoli (4) 5. 1892.

Stoff	ρ	α	Stoff	ρ	α
Pappelholz	0.545	0.00249	Terracotta II	1.770	0.00686
Nussholz	0.666	0.00279	Vesulava	2.262	0.01358
Eichenholz	0.861	0.00409	Kalktuff v. Malta	1.986	0.01523
Tuff v. S. Rocco	1.098	0.00450	Sandstein	2.502	0.03072
Gypspaste	0.98	0.00550	Marmor (Carrara)	2.750	0.0352
Terracotta I	1.770	0.00665	Kalk v. S. Maria	2.734	0.0363

Ueber eine Reihe Jenaer Gläser hat PAALHORN¹⁾ Versuche angestellt, deren Methode aber bisher nicht angegeben ist. Seine Resultate sind in der weiter unten stehenden Tabelle mit angeführt.

Die Wärmeleitung des Eises wurde auch von MITCHELL²⁾ bestimmt. Er setzte in einen Eisblock zwei Thermolemente 1.3 cm unter einander und setzte die Oberfläche der Blöcke abwechselnd der freien Luft von 0° oder einer Kältemischung aus. Der Eisblock befand sich in einem verzinnnten Gefäss. Es ergab sich so $\alpha = 0.005 \left(\frac{grm}{cm \cdot sec} \right)$. Ueber Schnee machte HJELTSTRÖM³⁾ ähnliche Versuche, wobei er aber den Temperaturverlauf im Innern einer Schneedecke beobachtete, welche durch die periodische Bestrahlung von der Sonne an der Oberfläche periodisch erwärmt wurde. Er fand so für

$$\text{Schnee } \alpha = 0.000507,$$

also etwa nur den zehnten Theil von dem α für Eis.

B. Stäbe.

DESPRETZ⁴⁾ untersuchte nach seiner oben (pag. 275) angegebenen Methode ausser Metallen auch weissen Marmor, lithographischen Sandstein, Feuerstein, Tannenholz und HELMERSEN⁵⁾ nach derselben Methode Quarz, Glimmerschiefer, Granit, weissen Marmor, Aphanitporphyr, Serpentin, grauen Kalkstein.

Von A. v. LITLROW⁶⁾ wurde dieselbe Methode angewendet, um die relative Leitungsfähigkeit von Bodenarten, trocken und feucht, zu bestimmen. Vom besten Leiter zum schlechtesten geordnet ist die Reihenfolge⁷⁾

Wasser	Kalksand
Grober Diluvialmilchsand	Luftreicher Mergel
Feiner Diluvialmilchsand	Feinster Dolomitsand
Grober Quarzsand	Lufttrockener Mergel
Feiner Tertiärsand	Sandmoor
Melmlehm	Quarzstaub
Anelehm	Grober Dolomitsand
Glimmersand	Porcellanerde
Melmmergel	Eisenmoor

¹⁾ PAALHORN, citirt in WINKELMANN u. SCHOTT, WIED. Ann. 51, pag. 738. 1894.

²⁾ MITCHELL, Proc. R. Soc. Edinb. 1885. 86, pag. 592.

³⁾ HJELTSTRÖM, Oefv. Acad. Stockholm 46, pag. 669. 1889.

⁴⁾ DESPRETZ, Compt. rend. 35, pag. 540. 1852.

⁵⁾ HELMERSEN, POGG. Ann. 88, pag. 461. 1853.

⁶⁾ LITLROW, Wien. Ber. (2) 71, pag. 1875.

⁷⁾ S. a. über Bodenarten HABERLAND, Ber. für Agrikulturchem. 6, pag. 338. 1877.

— POTT, Landw. Vers. 20, pag. 273. 1877. — WAGNER, Forsch. aus dem Gebiet der Agrikulturphysik 6, pag. 1. 1883.

Nach der Methode von ANGSTRÖM bestimmten SMITH und KNOTT¹⁾ die Wärmeleitung von Kautschuck und Gummi elasticum und fanden für

Guttapercha	40° C.	$\frac{\kappa}{\rho c} = 0.000479$	
	46° C.	$\frac{\kappa}{\rho c} = 0.000494$	$\left(\frac{cm^2}{sec}\right)$
Gummi elasticum	23°	$\frac{\kappa}{\rho c} = 0.00176$	
	30°	$\frac{\kappa}{\rho c} = 0.00108.$	

C. Kugeln, Würfel, Cylinder.

F. NEUMANN²⁾ hat für einige schlecht leitende feste Körper Messungen angestellt, indem er Kugeln aus ihnen an der Oberfläche und im Mittelpunkt mit Thermoelementen versah und den zeitlichen Verlauf der Temperaturen bei der Abkühlung mass. So ergaben sich folgende Werthe für κ resp. für $a^2 = \frac{\kappa}{\rho c}$.

	κ	a^2	
Steinkohle	0.000297	0.00116	$\left(\kappa \text{ in } \frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Schwefel		0.00143	
Eis	0.00568	0.01145	$\left(a^2 \text{ in } \frac{cm^2}{sec}\right)$
Sandstein		0.01357	
Granit		0.01094	

Mit dem Apparat von STEFAN, der in dem Abschnitt Wärmeleitung der Gase beschrieben wird, und der aus zwei in einander gesteckten Cylindern besteht, von denen der innere hohl ist und als Luftthermometer dient, hat SCHUHMEISTER³⁾ die Wärmeleitung von Baumwolle, Schafwolle und Seide bestimmt.

Eine andere Methode wurde von STEFAN⁴⁾ für feste, schlechtleitende Körper benutzt. Es wurde ein Hohlwürfel (resp. eine Hohlkugel) aus der Substanz gearbeitet. Von dem Hohlraum, der mit Luft gefüllt war, führte eine enge Glasröhre nach aussen, und diese tauchte in ein Gefäss mit Quecksilber oder eine andere Flüssigkeit. Die Luft in dem Hohlraum diente selbst als thermometrische Substanz. Der ganze Würfel wurde zuerst auf Zimmertemperatur gehalten, dann rasch in Eis gepackt und die Zunahme der Temperatur im Innern mit der Zeit durch das Aufsteigen des Flüssigkeitsfadens im Luftthermometer gemessen. So fand STEFAN für Hartgummi den Werth $\kappa = 0.000260 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$, für $a^2 = \frac{\kappa}{\rho c}$ den Werth $0.000928 \frac{cm^2}{sec}$. Bei einem anderen Versuch wurde in den Hohlraum des Würfels Wasser gefüllt und dessen Temperaturabnahme mit einem Thermometer gemessen.

R. WEBER⁵⁾ brachte in die Mitte von Kugeln ein Thermoelement und beobachtete die Abkühlung der Kugel. Diese Methode ist theoretisch am einfachsten und genauesten, wenn man dafür sorgt, dass an der Oberfläche keine stagniren-

1) SMITH u. KNOTT, Proc. Edinb. Soc. 8, pag. 123. 1874 bis 75.

2) F. NEUMANN, Ann. chim. phys. (3), pag. 66. 1862.

3) SCHUHMEISTER, Wien. Ber. (2) 76, pag. 283. 1877.

4) STEFAN, Wien. Ber. 74 II, pag. 438. 1876.

5) R. WEBER, Züricher Vierteljahrsschrift 23, pag. 209. 1878.

den Schichten sich bilden. WEBER fand für die äussere Wärmeleitung h und für die innere α folgende Werthe:

$$\begin{aligned} \text{Gneiss} \quad \alpha &= 5.7786 \cdot 10^{-4} - 0.0162 \cdot 10^{-4} \theta \\ &h = 3.029 \cdot 10^{-4} + 0.00575 \cdot 10^{-4} \theta \\ \text{Paraffin} \quad \alpha &= 2.294 \cdot 10^{-4} + 0.1455 \cdot 10^{-4} \theta \\ &h = 1.697 \cdot 10^{-4} + 0.0475 \cdot 10^{-4} \theta. \end{aligned}$$

Ebenso benutzte YAMAGAWA¹⁾ eine Kugel, um die Wärmeleitungsfähigkeit des Marmors zu bestimmen. In die Mitte der Kugel brachte er ein Thermolement aus Eisen-Nickel und brachte die Oberfläche abwechselnd eine gemessene Zeit hindurch auf 100° und auf 0°. Er fand so für Marmor

$$\alpha = 0.00728.$$

Der Werth weicht sehr ab von denen mancher anderer Beobachter. Es fanden für Marmor:

FORBES	0.00115
PÉCLET	0.0075
DESPRETZ	0.0097
HERSCHEL	0.0047 bis 0.0056.

Ein bestimmter Marmor, den DESPRETZ untersucht hat (Dichte 2.77), gab ihm auch 0.0077.

Diese Methode hatten schon vorher AYRTON und PERRY²⁾ für eine Reihe von Gesteinen angewendet.

STADLER³⁾ formte aus einer Reihe von Gesteinen Würfel, erwärmte diese zuerst und kühlte sie dann an der ganzen Oberfläche ab. Durch ein Kupfer-Neusilberelement bestimmte er den Temperaturverlauf in einem bestimmten Punkte des Würfels. Seine Resultate sind folgende, wobei α in $\frac{gr}{cm \cdot sec} \cdot a^2 = \frac{\alpha}{\rho c}$ in $\frac{cm^2}{sec}$ ausgedrückt sind:

Name	ρ	c	α	a^2
Thoniger Kalk I (Jura)	2.590	0.2077	0.00666	0.01238
„ „ II „ (weniger Thon)	2.702	0.2060	0.00808	0.01450
Kalkstein (Jura)	2.658	0.2051	0.00877	0.01600
Marmor (Carrara)	2.699	0.2066	0.00817	0.01465
Granit I (Schwarzwald)	2.660	0.1040	0.00757	0.01461
„ II (Bareno)	2.596	0.1941	0.00975	0.02670
„ III (Schwarzwald)	2.660	0.1963	0.00807	0.01545
Gneiss (Osogna Tessin)	2.685	0.1947	0.00817	0.01563
Syenit	2.510	0.1986	0.00442	0.00887
Porphyr	2.620	0.1966	0.00835	0.01622
Basalt (Mittelrhein)	2.970	0.1988	0.00673	0.01149
Serpentin	2.680	0.2439	0.00839	0.01284
Trachyt (Siebengebirge)	2.550	0.2089	0.00460	0.00863
Andesit	2.780	0.1993	0.00685	0.01237
Nagelfluh Conglomerat I (St. Gallen)	2.034	0.2071	0.00592	0.01409
„ „ II	2.730	0.2107	0.00900	0.01564
Melasse Sandstein I (dicht)	2.570	0.2056	0.00814	0.01540
„ „ II (weniger dicht)	2.060	0.2010	0.00304	0.00733

1) YAMAGAWA, Journ. of the Ac. of Science Imper. University of Japan 2, pag. 263. 1888.

2) AYRTON u. PERRY, Phil. mag. (5) 5, pag. 241. 1878.

3) STADLER, Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens. Inaug.-Diss. Bern. 1879.

Eine abweichende Methode, um die Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender fester Körper zu bestimmen, hat H. MEYER¹⁾ angegeben und benutzt. Der Körper wird in die Form eines Würfels oder einer Kugel gebracht, auf höhere Temperatur erhitzt und dann in ein Calorimeter gebracht. Aus der Temperaturzunahme des Calorimeters in gemessenen Zeiten kann man die Mitteltemperatur des Körpers in bestimmten Momenten berechnen und diese hängt in bestimmter Weise von dem Wärmeleitungsvermögen ab. Auf diese Weise fand H. MEYER für

	ρ	c	κ	
Spiegelglas	2·631	0·186	0·00180	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Crownglas	2·550	0·161	0·00163	
Flintglas	3·632	0·117	0·00143	

D. Tabelle der Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender fester Körper.

a) Steine.

Name	Temp.	κ	Beobachter
Marmor, schwarz	unter 0°	0·00177	FORBES
„		0·006	CHRISTIANSEN
Marmor, weiss	unter 0°	0·00115	FORBES
„ (Carrara)		0·0071	LEES
„		0·0352	GRASSI
„		0·00728	YAGMAGAWA
„		0·01465	STADLER
Feldspat	ca. 30°	0·0058	AYRTON u. PERRY
„		0·0055	„
Syenit		0·0044	STADLER
Basalt		0·0067	STADLER
Feuerstein		0·0024	HERSCHEL
Tuff von Caen		0·0049	HERSCHEL
„ v. S. Rocco		0·00450	GRASSI
Tuffstein porös		0·0060	HERSCHEL
Kalktuff		0·01523	GRASSI
Magnesia		0·0040	HERSCHEL
Sandstein		0·03072	GRASSI
Gneiss	0°	0·0005770	R. WEBER
„		0·0081	STADLER
Porphyr		0·0083	STADLER
Granit	100°	0·0004159	R. WEBER
„		0·0076—0·0097	STADLER
Schiefer	unter 0°	0·00081	FORBES
„		0·0047	LEES
Lava		0·000833	FORBES
„		0·01358	GRASSI
Cement		0·0001625	FORBES
Kreide		0·0022	HERSCHEL
Bimstein		0·0006	HERSCHEL
Terracotta		0·0066—0·0068	GRASSI
Stuck		0·0013	HERSCHEL

¹⁾ H. MEYER, WIED. ANN. 34, pag. 596, 1888.

Relative Werthe (von LESS).

Für den bestleitenden Marmor aus den Pyrenäen ist $\alpha = 100$ gesetzt.

Marmor (aus den Pyrenäen)	100	Nephelein-Basalt (Mitterteich)	69·0
Granit albithaltig (Sachsen)	80·4	Serpentin (Erzgebirge)	67·6
Carrarischer Marmor	76·9	Gneiss (Tharandt)	67·3
Marmor (aus Italien)	76·3	Tafelschiefer (Carlsbaden)	53·7
Basalt (von Idar bei Oberstein)	72·6	Sandstein (Postelwitz)	48·7
Sandstein (sehr feinkörnig)	72·1	Thonschiefer (Schwarzathal)	46·91
Granit (Thüringen)	71·3	Sandstein mit Kaolin (Heppenheim)	42·0
Sandstein (Strehlen)	70·1	Gemeiner Thon	27·5
Gneiss, roth (Tharandt)	69·6		

b) Hölzer und Kohle.

Name	Temp.	α	Beobachter
Pappelholz		0·00249	GRASSI
Kiefern Faser	unter 0°	0·00030	FORBES
Kiefern \perp Faser		0·000088	FORBES
Eichenholz		0·00409	GRASSI
Mahagoni		0·00047	LEES
Nussholz		0·00036	LEES
"		0·00279	GRASSI
Kork	unter 0°	0·000717	FORBES
"		0·00013	LEES
Steinkohle		0·000297	NEUMANN
"	unter 0°	0·0000405	FORBES

Relativzahlen nach LESS [Marmor = 100 gesetzt (etwa $\alpha = 0·0018$)].

Ahornholz Faser 19·2	Eichenholz Faser 16·1
" \perp Faser, \perp Jahresringen 8·6	" \perp Faser, \perp Jahresringen 7·5
" \perp " " 8·5	" \perp " " 8·6
Buchsbaumholz Faser 13·5	
" \perp Faser, Jahresringen 9·6	

c) Kautschuk und dergl.

Name	Temp.	α	Beobachter
Ebonit, schwarz	49°	0·00037	HERSCHEL
"	unter 0°	0·00008	FORBES
"		0·00040	LEES
Hartgummi		0·000089	STEFAN
Vulk. Kautschuk	unter 0°	0·000089	FORBES
"		bis 0·0005	
"		0·00038	LEES
Kautschuk, roth	49°	0·00034	HERSCHEL
" weich, grau	49°	0·00044	—
" hart, "	49°	0·00055	—
Guttapercha		0·00046	LEES

d) Paraffine, Wachs und dergl.

Name	Temp.	α	Beobachter
Paraffin	unter 0°	0·000141	FORBES
„	0°	0·0002294	R. WEBER
„	100°	0·001684	„
„		0·00061	LEES
Horn	unter 0°	0·000087	FORBES
Wachs	„	0·000087	FORBES
Schellack		0·00060	LEES

e) Papier, Zeugstoffe.

Name	Temp.	α	Beobachter
Filz	unter 0°	0·000087	FORBES
Papier		0·00031	LEES
Asbestpapier		0·0006	LEES
Pappe	unter 0°	0·00045—33	FORBES
Baumwolle	„	0·000033—43	FORBES
„		0·00055	LEES
Flanell	unter 0°	0·0000355	FORBES
„		0·00023	LEES
Leinwand	unter 0°	0·0000298	FORBES
Seide		0·00022	LEES

f) Gläser.

Name	Temp.	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Beobachter
Spiegelglas	10—15°	0·00179	H. MEYER
„		0·0019	CHRISTIANSN
Crownglas	10—15°	0·00163	H. MEYER
„		0·0024	LEES
Flintzglas	10—15°	0·00143	H. MEYER
„		0·0020	LEES
gew. Glas	0°	0·0005	FORBES
„		0·0021	PECLET
Jenaer Gläser: ¹⁾			
Pb. Si		0·001083	PAALHORN
Si. K. Zn		0·001304	„
P. Ca. Al		0·001409	„
Pb. Si. K		0·001433	„
B. Al. Na		0·001445	„
B. Al. Zn. Pb		0·001470	„
Ba. Si. B		0·001610	„
Pb. B. Si. Al		0·001660	„
Si. K. Ba		0·001732	„
Si. Na. Pb		0·001861	„
Si. Na. Zn		0·001932	„
Si. B. Na		0·002267	„
Si. Na. Pb		0·001940	„
Si. Na. Al		0·001970	„
Si. K. Ca		0·001950	„

¹⁾ Die Hauptbestandtheile der Gläser sind zu ihrer Charakterisirung angegeben, nach ihrer relativen Menge angeordnet.

g) Eis, Schnee, Schwefel.

Name	Temp.	$\alpha \left(\frac{g^2}{cm \cdot sec} \right)$	Beobachter
Eis		0.00568	NEUMANN
„		0.005	MITCHELL
„		0.0022	FORBES
Schnee		0.000507	HJELTSTRÖM
Schwefel		0.00045	LEES

VI. Wärmeleitung der Krystalle.

A. SENARMONT'sche Methode.

Nach den einleitenden Entwicklungen ist bei Krystallen die Wärmeleitung nach verschiedenen Richtungen verschieden. Es treten im Allgemeinen 9 Constanten auf, von denen die Wärmeleitungsfähigkeit nach den verschiedenen Richtungen abhängt. Die allgemeine Behandlung dieser Gleichungen hat nach dem Vorgang von DUHAMEL¹⁾, STOKES²⁾ gelehrt. Von besonderem Interesse, weil experimentell realisierbar, ist der Fall, dass man die Wärmeleitung in einer sehr dünnen Krystallplatte untersucht. Ist ε die Dicke dieser Platte, sind a , b , c , drei Constanten, und sind x y die Coordinaten eines Punktes der Platte, so bekommt man die Differentialgleichung:

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + b \frac{4 \partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{2h}{\varepsilon} \vartheta + c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Diese Gleichung lässt sich durch Aenderung der Variablen auf die Form bringen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho_2^2} = \frac{2h}{\varepsilon} \vartheta + c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Darin sind die Grössen

$$\rho_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \rho_2 = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda_2}},$$

und ξ η sind die Coordinaten eines Punktes bezogen auf die Hauptachsen der Ellipse:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1,$$

deren Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ sind.

Die Lösung der obigen Gleichung ist:

$$\vartheta = f(t, \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2})$$

worin f eine zu bestimmende Function ist. Von Wichtigkeit ist die Frage, welche Punkte zu gleicher Zeit dieselbe Temperatur haben. Dies sind die Punkte, für welche

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = const,$$

also:

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2} = const$$

ist. Das ist die Gleichung einer Schaar ähnlicher Ellipsen.

¹⁾ DUHAMEL, J. de l'éc. Polytechn. 13, pag. 356. 1832; 19, pag. 155. 1848; Compt. rend. 25, pag. 842. 1842; 27, pag. 129. 1848.

²⁾ STOKES, Camb. and Dublin Math. Journ. (2) VI, pag. 215. 1851.

Die isothermen Linien auf einer solchen Krystallplatte sind also Ellipsen¹⁾.

Dieses Resultat zeigte sich nun durch die Erfahrung vollständig bestätigt. SÉNARMONT²⁾ gelang es auf einfache Weise die Richtigkeit dieser Ergebnisse auf einen Blick erkennbar zu machen. Er schnitt Krystalle in runde Platten und überzog sie mit einer dünnen Wachsschicht. Durch die Mitte steckte er ein silbernes Röhrchen und schickte durch dieses einen heissen Luftstrom. Das Wachs schmolz dann im Allgemeinen in Ellipsen fort. Bei isotropen Körpern z. B. Glas und bei regulären Krystallen ergaben sich Kreise. Es sei gleich erwähnt, dass man statt des Wachses andere Mittel angewendet hat, um die isothermen Figuren zu zeichnen. A. M. MAYER³⁾ bestrich die Platten mit Kupfer-Quecksilber-Doppeljodid, welches die Eigenschaft hat, unter 70° carmoisinroth zu sein, bei 70° aber chokoladenbraun zu werden. So konnte er durch die Färbung die Ellipsen erkennen und auch ihr Axenverhältniss messen. Später hat RÖNTGEN⁴⁾ ein noch einfacheres Verfahren angewendet. Die Platten werden stark behaucht und eine heisse Spitze auf sie aufgesetzt. Der Hauch verdunstet dann und zwar in Ellipsen. Man kann diese dann deutlich sichtbar und messbar machen, indem man sie mit Lycopodium bestreut und abklopft. Das Pulver bleibt dann nur auf den noch nicht abgedunsteten Stellen haften und bildet eine scharfe elliptische Grenze⁵⁾.

Nach dieser Methode wurden von SÉNARMONT selbst, von TYNDALL⁶⁾, V. v. LANG⁷⁾, JANNETAZ⁸⁾, PAPE⁹⁾, RÖNTGEN u. A. eine sehr grosse Reihe von Krystallen auf ihre Wärmeleitung untersucht und insbesondere der Zusammenhang zwischen krystallographischen, optischen und Wärmeleitungsaxen gesucht. Es zeigte sich, dass diese letzteren Axen stets mit den optischen zusammenfielen. Man kann durch Platten verschiedener Orientirung ein Ellipsoid construiren, welches die Hauptwärmeleitungsaxen als Axen enthält und die besprochenen Ellipsen

¹⁾ Weitere Literatur über die Theorie der Wärmeleitung in Krystallen ist folgende: BONNEL, *Compt. rend.* 27, pag. 49. 1848. — BERTRAND, *Compt. rend.* 27, pag. 557. 1848. — MINNIGERODE, über die Wärmeleitung in Krystallen *Diss. Göttingen* 1862. *N. Jahrb. f. Mineralogie* 1, pag. 1. 1886. — MORIN, *Compt. rend.* 66. 1868. — MOUTIER, *Bull. de la Soc. philomath.* (7) 8, pag. 134. 1884. — W. THOMSON, *Math. and Phys. Paper* 1, pag. 282. 1882. — BOUSSINESQ, *Compt. rend.* 65, pag. 104. 867; 66, pag. 194. 1868; *J. de math.* (2) 14, pag. 268. 1869. — Der Inhalt dieser Arbeiten ist zusammengestellt in LIBISCH, *Phys. Krystallographie* 1891. Die Frage, ob in die Differentialgleichungen nur 9 Coëfficienten eingehen, wie DUHAMEL und STOKES annahmen, oder ob noch weitere, sogenannte »Drehungscoëfficienten« einzuführen sind, wurde von SORET experimentell im ersten Sinne beantwortet (SORET, *Compt. rend.* 114, pag. 535. 1892).

²⁾ SÉNARMONT, *Ann. d. chim. et phys.* 21, pag. 457. 1847; *Ann. d. Chemie u. Pharmac.* Bd. 68. 1847; *POGG. Ann.* Bd. 73. 1891; 74, pag. 190; 75, pag. 50. 482. 1848; 76, pag. 119. 1849; 80, pag. 175. 1850.

³⁾ A. M. MAYER, *Phil. Mag.* (4), 44. 1872.

⁴⁾ RÖNTGEN, *POGG. Ann.* 151, 152. 1874; GROTH, *Zeitschr.* III. 1879.

⁵⁾ Eine kleine Abänderung der SÉNARMONT'schen Methode s. STACKL, *Zeitschr. f. Kryst. u. Min.* 20, pag. 216. 1892.

⁶⁾ TYNDALL, *Athenäum*, pag. 1157. 1855.

⁷⁾ V. v. LANG, *Wien. Ber.* Bd. 53 (2). 1866; *POGG. Ann.* 135, pag. 29. 1868.

⁸⁾ JANNETANZ, *Ann. de chim.* (4) Bd. 29. 1873; GROTH, *Zeitschr.* III, pag. 637. 1879. *Journ. de phys.* 5, pag. 247. 1876; *Bull. de sol. Géol. de France*, (3) 9, pag. 196. 1881; *Compt. rend.* 95, pag. 996. 1882; 114, pag. 1352. 1892; *Physik. Revue* II. 1892.

⁹⁾ PAPE, *WIED. Ann.* 1, pag. 126. 1877.

als Schnittfiguren ergibt. Bei den quadratischen und hexagonalen Krystallen ist dieses Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, wobei bald die Rotationsaxe die kleinste (thermisch positive Krystalle), bald die grösste ist (thermisch negative Krystalle). Die übrigen Krystallsysteme haben dreiaxige Wärmeleitungsellipsoide. TYNDALL fand, dass beim Gyps die Richtung der stärksten Wärmeleitung mit der der schwächsten magnetischen Induction zusammenfällt. V. v. LANG suchte jedoch vergeblich Beziehungen zwischen thermischen und magnetischen Eigenschaften zu finden.

Die Methode von SÉNARMONT lässt sich auch bei Hölzern, die in der Richtung der Fasern eine grössere Wärmeleitung haben als senkrecht dazu, ferner bei comprimierten Gläsern und überhaupt bei allen Substanzen anwenden, die in Plattenform zu bringen sind und die die Wärme nach verschiedenen Richtungen verschieden stark leiten. Auf diese Weise hat auch MAGGI magnetisches Eisen untersucht (s. o.).

B. Absolute Messungen.

Während die SÉNARMONT'sche Methode nur die Verhältnisse der Axen der Ellipse zu messen gestattet, sind absolute Bestimmungen nach dieser Methode nicht auszuführen. Die Verhältnisse der Ellipsenaxen sind gleich den Verhältnissen der Quadratwurzeln aus den Wärmeleitungsfähigkeiten.

Eine Methode, die absolute Werthe hätte ergeben können, wurde zuerst von PFAFF¹⁾ angewandt. Er schnitt aus Krystallen Würfel, deren Kanten der einen oder anderen krystallographischen Axe parallel waren, und bestimmte direkt die Wärmeleitung nach verschiedenen Richtungen, indem er, wie PECCLET (s. o.) Wärme durch die Würfel hindurchgehen liess und die Temperaturerhöhung maass.

Die ersten Messungen über die absoluten Werthe von α für Krystalle rühren von TUCHSCHMIDT²⁾ her, der nach der Methode, die H. F. WEBER für Flüssigkeiten angewendet hatte, die Wärmeleitung in Krystallen von Quarz, Kalkspath und Steinsalz bestimmte, indem er Platten so schnitt, dass der Wärmestrom in der Richtung der Axe (I), unter 45° gegen die Axe (II) und senkrecht zur Axe (III) durch den Krystall ging. So fand er:

	Quarz	Kalkspath	
I	$\alpha = 0.02627$	$\alpha = 0.00960$	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$.
II	$\alpha = 0.0212$	$\alpha = 0.00863$	
III	$\alpha = 0.01597$	$\alpha = 0.00787$	

Für Steinsalz fand er $\alpha = 0.01$.

Vergleiche der TUCHSCHMID'schen Beobachtungen mit der Theorie hat SORET³⁾ angestellt.

Weitere absolute Bestimmungen hat LEES⁴⁾ ausgeführt, nach der von LODGE⁵⁾ angegebenen »Methode des getheilten Stabes« (s. o.). Er fand folgende Werthe:

	α		α
Steinsalz	0.0133	Kalkspath Axe	0.0100
Quarz Axe	0.0299	„ \perp Axe	0.0084
„ \perp Axe	0.0158	Glimmer \perp Spaltungsfläche	0.0018

¹⁾ PFAFF, POGG. Ann. 113, pag. 80. 1860.

²⁾ TUCHSCHMID, das innere Wärmeleitungsvermögen von Quarz, Kalkspath und Steinsalz. Aarau 1883, s. Beibl. d. Ann. d. Physik 8, pag. 490. 1884.

³⁾ SORET, Compt. rend. 114, pag. 535. 1892.

⁴⁾ LEES, Phil. Trans. 183 A, pag. 481. 1892.

⁵⁾ LODGE, Phil. mag. (5) 5, pag. 110. 1878.

C. Wärmeleitung des Turmalins.

Theoretische Ueberlegungen über die pyroelektrischen Eigenschaften des Turmalins hatten S. P. THOMPSON und LODGE¹⁾ auf die Vermuthung geführt, dass Turmalin in der Richtung seiner Hauptaxe die Wärme verschieden gut leite, je nachdem sie in der einen oder anderen Richtung durch den Krystall hindurchgehe, dass also der Krystall eine unilaterale Wärmeleitung besitze. Versuche mittelst der SÉNARMONT'schen Methode, bei denen der Krystall parallel der Axe geschnitten war, schienen diese Vermuthung zu bestätigen, indem die in Richtung der Hauptaxe verlaufende Wärmeleitungsaxe nach der einen Richtung grössere Längen hatte, als nach der anderen. STENGER²⁾ hat indess diese Frage direkt untersucht, indem er eine Krystallplatte, senkrecht zur Axe geschnitten, mit der einen Fläche auf Eis brachte und den Verlauf des Temperaturabfalls an der anderen Fläche durch Thermolemente maass. Je nachdem nun der Wärmestrom in der einen oder in der anderen Richtung durch die Platte ging, sollte eine Aenderung dieses Verlaufs stattfinden. Das war aber nicht der Fall. Der Turmalin leitet also nicht unilaterial.

D. Tabellen über die Wärmeleitung von Krystallen.

Optisch einaxige Krystalle, deren grosse Axe der Wärmeleitungs-fähigkeit parallel zu ihrer Basis.

Es sei κ_{γ} die Wärmeleitungsfähigkeit in Richtung der Hauptaxe
 „ κ_{α} „ „ „ „ der Basis.

Name des Krystalls	Krystallsystem	$\sqrt{\frac{\kappa_{\alpha}}{\kappa_{\gamma}}}$
Graphit	rhomboëdrisch	ca. 2
Antimon	„	1.591
Wismuth	„	stark elliptisch
Wismuthtellurblende	„	„
Pyrit	„	1.07
Molybdänglanz	„	stark elliptisch
Silberglanz	„	1.11
Oligist	„	1.11
Ilmenit	„	ca. 1.11
Zinkspat	„	sehr elliptisch
Eudialyt	„	1.13
Pennin	„	1.16
Diallag	„	sehr elliptisch
Dolomit	„	1.05
Giobertit	„	1.05
Mesitin	„	1.06
Eisenspat	„	1.06
Smithsonit	„	sehr elliptisch
Parisit	„	1.12
Turmalin	„	1.15—1.17
Anatas	quadratisch	1.34
Apophyllit	„	sehr stark elliptisch
Matlochit	„	stark elliptisch

¹⁾ S. P. THOMPSON u. O. LODGE, Phil. mag. (5) 8, pag. 18. 1879.

²⁾ STENGER, WIED. Ann. 22, pag. 525. 1874.

Optisch einaxige Krystalle, deren grosse Axe der Wärmeleitungsfähigkeit parallel zur Hauptaxe ist.

Es sei κ_γ die Wärmeleitungsfähigkeit in Richtung der Hauptaxe.
 „ κ_α „ „ „ „ der Basis.

Name des Krystalls	Krystallsystem	$\sqrt{\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\gamma}}$
Tellur	hexagonal	0·81
Zinnober	rhomboëdrisch	0·85
Quarz	„	0·762
Phenakit	„	0·96
Chabasit	„	merklich elliptisch
Troostit	„	0·854
Pyromorphit	„	0·973
Kalkstein	„	0·915
Diopas	„	?
Korund	„	0·92
Smaragd	hexagonal	0·9
Nephelin	„	nicht elliptisch
Cassiterit	quadratisch	0·79
Rutil	„	0·8
Calomel	„	0·77
Zirkon	„	0·9
Paranthin	„	0·845
Idokras	„	0·95
Scheelit	„	0·95
Wulfenit	„	nicht elliptisch
Phosgenit	„	„

Krystalle ohne Axe der Isotropie.

Es sei α die Symmetrieaxe (100), β die Symmetrieaxe (010), γ die Symmetrieaxe (001). Dann ist:

Name des Krystalls	Krystallsystem	$\sqrt{\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\gamma}}$	$\sqrt{\frac{\kappa_\beta}{\kappa_\gamma}}$
Baryt	rhombisch	1·064	1·027
Cölestin	„	1·037	1·083
Anhydrid	„	0·971	0·943
Staurolith	„	0·971	0·901
Lievrit	„	1·155	1·005
Tremolit	monoklin	0·6	0·754
Hornblende	„	0·706	0·8
Epidot	„	0·634	1·088
Orthoklas	„	0·794	0·951
Gyps	„	0·8	0·65

VII. Wärmeleitung von Flüssigkeiten.

A. Methoden.

Bei der Untersuchung der Wärmeleitung von Flüssigkeiten ist die erste Aufgabe, die Strömungen innerhalb der Flüssigkeiten, durch welche Wärme transportirt wird, zu vermeiden. Ferner müssen ja im Allgemeinen die Flüssigkeiten

von Wänden aus Metall oder anderen Stoffen begrenzt sein, und so weit diese nicht zur Wärmezufuhr oder -abfuhr benutzt werden, also auf constanter Temperatur erhalten werden, geht durch sie auch die Wärmeleitung vor sich und modificirt den in der Flüssigkeit stattfindenden Vorgang. Endlich sind die Flüssigkeiten zum Theil diatherman (s. Strahlung), und es muss also der Effekt der Wärmeübertragung durch Strahlung abgezogen werden, um den durch Leitung hervorgebrachten allein zu ermitteln. Aus diesen Gründen ist die Bestimmung von absoluten oder relativen Zahlen für die Wärmeleitung von Flüssigkeiten eine schwere, und es liegen bisher nur wenig übereinstimmende Angaben vor.

Nach vorhergehenden rein qualitativen Versuchen von RUMFORD, Th. THOMSON, NICHOLSON, PICTET, MURRAY machte zuerst DESPRETZ¹⁾ quantitative Messungen. Er suchte nämlich α für Flüssigkeiten ebenso zu bestimmen, wie für Stäbe. Er brachte die Flüssigkeiten in cylinderförmige Gefässe von Holz, erwärmte sie von oben durch den Boden eines Kupferkessels, der mit warmem Wasser gefüllt war, und wartete den stationären Zustand ab. Durch die Cylinderwand waren horizontal Thermometer in die Flüssigkeit hineingesteckt, je im Abstand von 4.5 cm. Der Gang der Temperaturen von oben nach unten wurde gemessen und daraus, wie oben angegeben, das Verhältniss $\frac{\alpha}{h}$ ermittelt. Diese Methode, die man als Säulenmethode bezeichnen kann, die später von PAALZOW²⁾ auch zu einigen qualitativen Messungen benutzt wurde, kann direkt keine exakten Resultate geben, da das Holz die Wärme ebenfalls leitet und so ein mittlerer Zustand der Temperaturvertheilung entsteht, der nicht von dem α der Flüssigkeit allein abhängt³⁾.

GUTHRIE⁴⁾ gab dann eine Methode an, die im Princip der PECLET'schen für feste Körper entspricht, und die, richtig verwerthet, gute Resultate geben muss. Er selbst jedoch interpretirte seine Resultate falsch. Er construirte einen Apparat, Diathermometer genannt, um rasch die relative Leitungsfähigkeit von Flüssigkeiten zu bestimmen. Zwei Hohlkegel von Messing wurden so gestellt, dass die Spitze des einen nach oben, die des anderen nach unten zeigte, und zwischen den Grundflächen ein kleiner, messbarer Abstand war, in den die Flüssigkeiten ohne feste Randbegrenzung gebracht wurden. In den oberen Kegel wurde Wasser von bestimmter Temperatur gebracht, der untere Kegel diente als Luftthermometer, in dem in seine Spitze ein Uförmiges Glasrohr eingekittet war, das Wasser enthielt. In Folge des Durchganges der Wärme von oben nach unten fand eine Erwärmung der Luft im unteren Kegel statt, die Wasserkuppe wurde deprimirt und die Depression in gleichen Zeiten bei verschiedenen Flüssigkeiten gemessen. Die Zahlen jedoch, die GUTHRIE ableitet, haben keinen Werth für die Bestimmung von α , nicht einmal als Relativzahlen für verschiedene Flüssigkeiten, da er die Theorie der Versuche falsch in Anwendung brachte. Die Flüssigkeit ist bei GUTHRIE in Form einer dünnen Lamelle eingeführt, man kann daher diese Methode, die später verbessert wurde, als Lamellenmethode bezeichnen.

¹⁾ DESPRETZ, POGG. Ann. Bd. 46, pag. 340. 1839; Compt. rend. 7, pag. 933. 1838; Ann. chim. phys. 61, pag. 206. 1839.

²⁾ PAALZOW, POGG. Ann. 134, pag. 618. 1868.

³⁾ DESPRETZ (POGG. Ann. 142, pag. 626. 1872), glaubte auch nach seiner Methode zeigen zu können, dass an der Grundfläche von zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten (Wasser und Nitrobenzol) ein Temperatursprung stattfindet. (Die Versuche, 1861 angestellt, sind posthum veröffentlicht.)

⁴⁾ GUTHRIE, Phil. Trans. 159, pag. 637. 1869.

Die ersten absoluten Zahlen für α von Flüssigkeiten gab LUNDQUIST¹⁾, welcher die Säulenmethode anwendete, aber bei ihr die oben angeführte ANGSTRÖM'sche Methode der periodischen Erwärmung und Abkühlung anwendete, wobei er die Flüssigkeiten in Glaszylinder einschloss. Er fand so — die Temperaturen waren durch Thermometer gemessen — für die Temperatur 40°:

Name der Substanz	Dichte	α
Wasser		0·001555
ZnSO ₄ -Lösung I	($\rho = 1\cdot237$)	0 001643
„ II	($\rho = 1\cdot252$)	0·001582
„ III	($\rho = 1\cdot382$)	0·001582
ClNa-Lösung	($\rho = 1\cdot178$)	0·001492 $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
H ₂ SO ₄ -Lösung I	($\rho = 1\cdot123$)	0·001500
„ II	($\rho = 1\cdot207$)	0·001447
„ III	($\rho = 1\cdot372$)	0·001257

WINKELMANN²⁾ benutzte 5 Jahre später eine neue Methode für diese Untersuchungen. Er füllte die Flüssigkeit in den Hohlraum zwischen zwei concentrischen Messingcylindern, von denen der innere als Luftthermometer diente. Von ihm aus führte eine Glasröhre, an der der Deckel des äusseren Cylinders ange kittet war, nach aussen und tauchte nach zweimaliger Umbiegung in ein Quecksilbergefäss. Der ganze Apparat wurde in Eis getaucht und die allmählich durch die Flüssigkeit von innen nach aussen gehende Wärme zeigte sich an der Temperaturenniedrigung der Luft im innern Cylinder an, durch deren Abkühlung das Quecksilber in der Glasröhre allmählich in die Höhe stieg. Der zeitliche Verlauf dieser Abkühlung wurde gemessen. Damit die äussere Oberfläche stets die Temperatur 0° habe, ohne stagnirende Schichten (s. o.), wurde sie permanent durch einen Rührapparat abgebürstet. Trotzdem der Raum zwischen den Cylindern eng war (zwischen 0·205 und 0·4952 *cm*) mussten dabei doch Strömungen auftreten³⁾. In Folge dessen ergaben sich die Werthe von α für die verschiedenen Cylinder verschieden. Den wahren Werthen am nächsten kommen die aus den Versuchen mit dem kleinsten Zwischenraum abgeleiteten Werthe, und sie ergaben für die Temperatur von etwa 15°

Wasser	α 0·001040
Cl·K-Lösung (20%)	0·001115
ClN-Lösung (33 $\frac{1}{3}$ %)	0·001085 $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Alkohol	0·000491
Schwefelkohlenstoff	0·000595
Glycerin	0·000674.

Dieselbe Methode wendete BEETZ⁴⁾ später an, um nur die relativen Werthe von α zu bestimmen. Sein Apparat bestand aus 2 in einander befestigten Glaszylindern mit 2 *mm* Zwischenraum, in welchem die Flüssigkeiten sich befanden. In den inneren Cylinder war Quecksilber gebracht, dessen Temperaturveränderung durch ein Thermometer gemessen wurde. Der ganze Apparat wurde in ein

¹⁾ LUNDQUIST, Upsala Universitets Arskrift, pag. I. 1869.

²⁾ WINKELMANN, POGG. Ann., Bd. 153, pag. 481. 1874.

³⁾ H. F. WEBER, WIED. Ann. 10, pag. 103. 1880; WINKELMANN, WIED. Ann. 10, pag. 668. 1880; WEBER, WIED. Ann. 11, pag. 345. 1880; OBERBECK, WIED. Ann. 7, pag. 271. 1879; 11, pag. 1039. 1880.

⁴⁾ BEETZ, WIED. Ann. 8, pag. 435. 1879.

Bad von constanter Temperatur gesenkt und nun die Zeiten bestimmt, in welchen das innere Quecksilber sich um je 2° abkühlte oder erwärmte. BETZ hat eine sehr grosse Menge von Flüssigkeiten untersucht, seine Resultate aber, wie H. F. WEBER zeigte, ungenügend berechnet, so dass aus ihnen keine Schlüsse zu ziehen sind.

Erst H. F. WEBER¹⁾ brachte in diese Fragen durch Versuche und Kritik einigermaassen sichere Resultate, indem er die Lamellenmethode sorgfältig ausarbeitete. Er füllte die Flüssigkeiten in den engen Zwischenraum zwischen zwei kreisförmigen Kupferplatten, die durch einige Glasstückchen getrennt waren. Die untere Kupferfläche wurde in einem bestimmten Moment mit schmelzendem Eis in Berührung gebracht und die allmähliche Abkühlung der oberen Kupferplatte durch ein eingelöthetes Thermolement gemessen. Der freie Rand der Flüssigkeiten und Kupferplatte strahlte Wärme gegen eine auf 0° abgekühlte Kappe aus. Nach Bestimmung von h konnte er so die Werthe von κ finden. Nach dieser Methode untersuchte er 50 Flüssigkeiten. Es ergab sich, dass die Wärmeleitfähigkeit mit wachsender Temperatur steigt (umgekehrt, wie bei Metallen). Seine Resultate sind am Schlusse zusammengestellt. Die Berechnung der Resultate ist von LORBERG²⁾ exakter durchgeführt worden, als es von WEBER selbst geschehen ist.

CHRISTIANSEN³⁾ hat die Lamellenmethode in der Weise modificirt, dass man mit ihr leicht das relative Leitungsvermögen verschiedener Körper, fester, flüssiger, gasförmiger bestimmen kann. Drei gleiche runde Kupferplatten von $13 \cdot 13$ cm Radius und $0 \cdot 9$ cm Dicke werden über einandergelegt und durch ganz kleine Glasstückchen von einander getrennt. In die cylindrische Seitenfläche jeder Platte sind Löcher zur Aufnahme von horizontalliegenden Thermometern gebohrt. Das Plattensystem (Leitungssäule) wird mit der untersten Platte III auf ein Messinggefäss gesetzt, das durch einen Strom kaltes Wasser abgekühlt wird. Auf die oberste Platte I wird ein anderes Gefäss gesetzt, durch das ein Strom warmen Wassers geleitet wird. Die beiden Zwischenräume werden durch diejenigen Substanzen ausgefüllt, deren relative Leitfähigkeit man messen will. Das System nimmt rasch den stationären Zustand an und es werden die Temperaturen ϑ_1 ϑ_2 ϑ_3 der drei Platten gemessen. Vernachlässigt man zuerst die äussere Wärmeleitung und bezeichnet man die Dicken der beiden Zwischenräume mit e_1 e_2 , die Leitfähigkeiten der beiden Substanzen mit κ_1 und κ_2 , mit S die Grundfläche jeder Platte, so ist

$$S \kappa_1 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{e_1} = S \kappa_2 \frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{e_2},$$

also

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{e_1}{e_2} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{\vartheta_1 - \vartheta_2}.$$

Die Korrekturen, die an dieser Gleichung angebracht werden müssen, sind in der Arbeit von CHRISTIANSEN und einer von WINKELMANN⁴⁾ ausführlich angegeben. CHRISTIANSEN fand so das relative Leitungsvermögen folgender Flüssigkeiten gegen Luft (für etwa 20°)

1) H. F. WEBER, WIED. Ann., Bd. 10, pag. 103. 1880. Berl. Akademieber. 1885.

2) LORBERG, WIED. Ann. 14, pag. 291. 1881.

3) CHRISTIANSEN, WIED. Ann. 14, pag. 23. 1881.

4) WINKELMANN, WIED. Ann. 29, pag. 68. 1886.

Wasser	21·09
Alkohol	7·82
Glycerin	12·64
Olivenöl	6·77
Citronenöl	6·77.

Eine ganz andere Methode, um α für verschiedene Flüssigkeiten absolut zu bestimmen, hat GRAETZ¹⁾ angegeben und benutzt. Die Flüssigkeiten flossen unter constantem Druck durch eine capillare Röhre aus Messing oder Platin, deren Mantel auf constanter Temperatur T_0 gehalten wurde (durch strömendes Wasser und Abbürsten). Die Eintrittstemperatur T_1 wurde durch ein Thermometer gemessen, die Austrittstemperatur U bei stationärem Zustand ebenfalls und zugleich das Gewicht der in bestimmter Zeit ausfliessenden Flüssigkeit oder auch die Zeit, in der bestimmte Volumina ausflossen, gemessen. Daraus bestimmte sich a^2 nach der Formel

$$a^2 = \frac{2W}{\mu^2 \pi l} \log \text{nat} \left(p \frac{T_1 - T_0}{U - T_0} \right).$$

Darin war W das pro Secunde ausfliessende Volumen der Flüssigkeit, l die Länge der Röhre μ und p waren Constanten, nämlich $\mu = 2\cdot7043$, $p = 0\cdot81747$

Es wurden untersucht Alkohol, Glycerin Terpentinöl, Aether, ClNa-Lösung. KClO₃-Lösung, Schwefelkohlenstoff, Petroleum. Für alle Substanzen ergab sich eine Zunahme von α mit steigender Temperatur zwischen $\frac{1}{2}$ und $1\frac{0}{10}$ pro Grad, was auch H. F. WEBER gefunden hatte. Die Zahlen sind in der Tabelle weiter unten angegeben.

Als allgemeines Resultat ergab sich zunächst aus den Versuchen von WEBER und GRAETZ, dass zwar α für die verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden ist, dass aber a^2 , die Temperaturleitungsfähigkeit, nur innerhalb enger Grenzen schwankt, nämlich für die angeführten Substanzen nur zwischen

$$0\cdot000843 \text{ und } 0\cdot00119 \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right).$$

Aus seinen Zahlen schloss WEBER weiter, dass a^2 für die verschiedenen Flüssigkeiten umgekehrt proportional ist dem mittleren Abstand zweier Flüssigkeitsmoleküle, worunter er die Grösse versteht $\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$ (m = Molekulargewicht, ρ = Dichte der Substanz).

In den folgenden Untersuchungen über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten wurden keine principiell neuen Methoden mehr benutzt, sondern die angegebenen nur in einigen Punkten verändert²⁾. Zunächst wendete CHREE³⁾ die Methode von DESPRETZ an, wobei er aber nicht Thermometer zur Temperaturmessung verwandte, sondern vielmehr 2·6 cm unter der Oberfläche der Flüssigkeit einen Platindrath ausspannte, aus dessen elektrischen Widerstandsänderungen er den Verlauf der Temperatur bestimmte. Sein Resultat für Wasser ist folgendes

$$\begin{aligned} \alpha &= 0\cdot00124 \text{ bei } 18^\circ \\ \alpha &= 0\cdot00136 \text{ bei } 19\cdot5^\circ. \end{aligned}$$

¹⁾ GRAETZ, WIED. Ann. 18, pag. 79. 1883; 25, pag. 337. 1885.

²⁾ Die Versuche von BOTTOMLEY (Proc. Roy. Soc. 28, pag. 462. 1879; 31, pag. 300. 1881; Phil. Trans. 1881 II, pag. 537) sind fehlerhaft.

³⁾ CHREE, Phil. mag. (5) 24, pag. 1. 1887; Proc. Roy. Soc. 42, pag. 300. 1887; 43, pag. 30. 1887.

HENNEBERG¹⁾ untersuchte nach der Methode von CHRISTIANSEN das Wärmeleitungsvermögen von Mischungen von Alkohol und Wasser, indem er die Werthe von α bezogen auf Luft von 0° als Einheit bestimmte. Bedeutet p die Zahl der Gewichtsprocente Alkohol in der Mischung und α' die relative Wärmeleitung, so sind seine Resultate folgende

$p = 0$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\alpha' = 21.97$	19.99	17.88	16.07	13.97	11.49	10.45	9.16	8.24	7.04	6.61.

Ebenso wendete G. JÄGER²⁾ die Methode von CHRISTIANSEN an, um α für Salzlösungen zu bestimmen, wobei er aber statt der Thermometer vielmehr Thermoelemente zur Temperaturmessung benutzte. Seine Resultate sind alle auf Wasser = 100 bezogen und zeigen, dass sämtliche Salzlösungen ein kleineres Wärmeleitungsvermögen haben als Wasser.

Auch P. DE HEEN³⁾, der eine Reihe von homologen Flüssigkeiten untersuchte, wendete die Methode von CHRISTIANSEN, etwas modificirt an, und bestimmte das relative Leitungsvermögen der Flüssigkeiten gegen Wasser.

WACHSMUTH⁴⁾ hat zunächst eine Untersuchung darüber angestellt, ob bei der Säulenmethode und bei der Lamellenmethode Strömungen der Flüssigkeit vermieden sind. Er fand, dass die Säulenmethode von solchen Strömungen nicht frei ist, wohl aber die Lamellenmethode in der Form, wie sie WEBER benutzt hat. Er untersuchte dann mit der WEBER'schen Methode bei verschiedenen Dicken der Lamelle die Wärmeleitung des Wassers und den Einfluss, den ein Zusatz von Gelatine auf dieselbe ausübt. Dieser Einfluss ist sehr gering, während auf die Zähigkeit ein solcher Zusatz sehr grossen Einfluss hat. Für Wasser bei 4.10 fand WACHSMUTH

$$\alpha = 0.001294 \frac{gr}{cm \cdot sec}.$$

Ausserdem bestimmte er noch die Wärmeleitung von 10 Oelen und Balsamen nach derselben Methode, deren Werthe in den weiter unten folgenden Tabellen angegeben sind.

B. Aenderung der Wärmeleitungsfähigkeit beim Uebergang vom flüssigen zum festen Zustand.

Ob die Wärmeleitungsfähigkeit beim Uebergang einer Substanz aus dem festen in den flüssigen Zustand sich sprungweise ändert, oder stetig, hat BARUS⁵⁾ am Thymol untersucht. Er wendete die Methode von H. F. WEBER, zweckmässig modificirt, an und bestimmte bei Temperaturen von 9° und 14° die Wärmeleitung des festen und bei Temperaturen zwischen 10° und 17.5° die des flüssigen Thymols. Er erhielt so für

$$\begin{array}{ll} \text{festes Thymol bei } 12^\circ & \alpha = 0.000359 \left(\frac{gr}{sec \cdot cm} \right) \\ \text{flüssiges Thymol bei } 13^\circ & \alpha = 0.000313 \left(\frac{gr}{sec \cdot cm} \right) \end{array}$$

Geht also Thymol bei ca. 13° aus dem flüssigen in den festen Zustand über, so wächst die Wärmeleitungsfähigkeit um 0.000046 Einheiten, d. h. bezogen auf die Wärmeleitungsfähigkeit im festen Zustand um 13%. Da die Dichte und

1) HENNEBERG, WIED. ANN. 36, pag. 146. 1882.

2) G. JÄGER, WIEN. BER. 99, pag. 245. 1890.

3) P. DE HEEN, BULL. ASS. BELG. (3) 18, pag. 192. 1889.

4) WACHSMUTH, WIED. ANN. 48, pag. 158. 1893.

5) BARUS, SILL. JOURN. (3) 44, pag. 1. 1892; Phys. Rev. 2, pag. 326. 1892.

spezifische Wärme des Thymols im festen und flüssigen Zustand vom Verfasser auch bestimmt sind, nämlich

für festes Thymol $c = 0.311 (1 + 0.00302 \theta)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{0.9631}{1 - (0.002456 + 2\theta)\theta'}$$

für flüssiges Thymol $c = 0.447 (1 + 0.00283 \theta)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1.00113}{1 - (0.0007600 + 2\theta)\theta'}$$

so lässt sich auch die Temperaturleitungsfähigkeit a^2 bestimmen. Sie ergibt sich

für festes Thymol bei 12° $a^2 = 0.001077$

für flüssiges Thymol bei 13° $a^2 = 0.000691$,

so dass a^2 beim Uebergang vom flüssigen zum festen Zustand um 36% zunimmt.

C. Tabellen über die Wärmeleitung von Flüssigkeiten.

I. Alkohole.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Methylalkohol	0.000495	9—15°	H. F. WEBER
„	0.000577	18°	CHREE
„	0.000590	19.5°	„
„	(27.34 für H ₂ O = 100)		DE HEEN
Aethylalkohol	0.000491	15°	WINKELMANN
„	0.000423	9—15°	H. F. WEBER
„	0.000504	17°	GRAETZ
„	(24.16	} für H ₂ O = 100	DE HEEN
„	(37.08		CHREE
„	(31.45		HENNEBERG
Propylalkohol	0.000373	9—15°	H. F. WEBER
Isobutylalkohol	0.000340	9—15°	H. F. WEBER
Isoamylalkohol	0.000327	9—15°	H. F. WEBER
„	(18.55 für H ₂ O = 100)		DE HEEN

II. Fettsäuren.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Ameisensäure	0.000648	9—15°	H. F. WEBER
Essigsäure	0.000472	„	„
Propionsäure	0.000390	„	„
N-Buttersäure	0.000360	„	„
Isobuttersäure	0.000340	„	„
N-Valeriansäure	0.000326	„	„
Isovaleriansäure	0.000311	„	„
Isocaprinsäure	0.000258	„	„

III. Ester.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Aethylformiat	0·000378	9—15°	H. F. WEBER
Propyl „	0·000357	9—15°	„
Methylacetat	0·000385	9—15°	H. F. WEBER
„	(22·06 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN
Aethylacetat	0·000348	9—15°	H. F. WEBER
„	(20·00 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN
Propylacetat	0·000327	9—15°	H. F. WEBER
Amylacetat	0·000301	9—15°	H. F. WEBER
„	(10·98 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN
Methylbutirat	0·000335	9—15°	H. F. WEBER
Aethyl „	0·000318	9—15°	H. F. WEBER
Methylvalerat	0·000315	9—15°	H. F. WEBER
„	(17·63 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN
Aethylvalerat	0·000303	9—15°	H. F. WEBER
„	(17·34 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN
Amylvalerat	(16·37 für H ₂ O = 100)	—	DE HEEN

IV. Chlorderivate der Fettkörper.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Propylchlorid	0·000283	9—15°	H. F. WEBER
Isobutylchlorid	0·000278	„	„
Amylchlorid	0·000283	„	„
Chloroform	0·000288	„	„
Chlorkohlenstoff	0·000252	„	„

V. Bromderivate der Fettkörper.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Aethylbromid	0·000247	9—15°	H. F. WEBER
Propylbromid	0·000257	„	„
Isobutylbromid	0·000278	„	„
Amylbromid	0·000237	„	„
Amylbromür	(13·75 für H ₂ O = 100)	„	DE HEEN

VI. Jodderivate der Fettkörper.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Aethyljodid	0·000221	9—15°	H. F. WEBER
Propyljodid	0·000220	„	„
Isobutyljodid	0·000208	„	„
Amyljodid	0·000203	„	„

VII. Aromatische Stoffe.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Benzol	0·000333	9—15°	H. F. WEBER
„	(19·08 für H ₂ O = 100)	„	DE HEEN
Aethylbenzol	(19·68 für H ₂ O = 100)	„	DE HEEN
Amylbenzol	(17·26 für H ₂ O = 100)	„	DE HEEN

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Chlorbenzol	0·000307	9—15°	H. F. WEBER
Brombenzol	0·000265	"	"
Toluol	0·000307	"	"
Xylol	(17·14 für H ₂ O = 100)	"	DE HEEN
Cymol	0·000272	9—15°	H. F. WEBER
"	(15·93 für H ₂ O = 100)	"	DE HEEN
Thymol	0·000313	13°	BARUS

VIII. Oele und Balsame.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Terpentinöl	0·000325	13°	GRÄTZ
"	0·000260	9—15°	H. F. WEBER
"	0·000315	18°	CHREE
Paraffinöl	0·000440	19°	"
Olivenöl	0·000329	9—15°	H. F. WEBER
"	0·000395	4°	WACHSMUTH
"	(32·10 für H ₂ O = 100)	"	CHREE
Citronenöl	0·000350	9—15°	H. F. WEBER
"	(32·10 für H ₂ O = 100)	"	CHREE
Senföl	0·000382	9—15°	H. F. WEBER
Nussöl	0·000352	4°	WACHSMUTH
Arachisöl	0·000378	"	"
Süßmandelöl I	0·000395	"	"
Sesamöl	0·000395	"	"
Mohnöl	0·000395	"	"
Süßmandelöl II	0·000405	"	"
Ricinusöl	0·000425	"	"
Copaivabalsam	0·000258	"	"
Canadabalsam	0·000258	"	"

IX. Andere Flüssigkeiten.

Name	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
Wasser	0·00136	9—15°	H. F. WEBER
"	0·00104	"	WINKELMANN
"	0·00155	40°	LUNDQUIST
"	0·00124	18°	CHREE
"	0·00157	30°	GRÄTZ
Glycerin	0·000620	13°	"
"	0·000670	9—15°	H. F. WEBER
"	0·000673	"	WINKELMANN
"	(59·93 für H ₂ O = 100)	"	CHREE
Schwefelkohlenstoff	0·000267	13°	GRÄTZ
"	0·000343	9—15°	H. F. WEBER
"	0·000595	"	WINKELMANN
"	0·000537	15·5°	CHREE
Petroleum	0·000353	13°	GRÄTZ
Benzin	0·000333	9—15°	H. F. WEBER
Anilin	0·000408	9—15°	"
Aether	0·000378	13°	GRÄTZ
"	0·000303	9—15°	H. F. WEBER
Aethylsulfid	0·000328	9—15°	"

X. Lösungen von Salzen und Säuren.

a) Chloride und Chlorate.

Name	Procent	Dichte	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
KCl	20		(92·0 für H ₂ O = 100)		JÄGER
„		1·187	0·001115		WINKELMANN
KClO ₃ . . .		1·026	0·001153	13°	GRÄTZ
NaCl		1·178	0·00149	44°	LUNDQUIST
„		1·1506	0·00112	13°	GRÄTZ
„		1·187	0·001085		WINKELMANN
„		1·178	0·00116	4°	H. F. WEBER
„	25		(93·2) für H ₂ O = 100)		JÄGER
„	12·5		(96·8)		„
BaCl ₂	21		(96·3 für H ₂ O = 100)		„
SrCl ₂	25		(94·6 für H ₂ O = 100)		„
CaCl ₂	30		(90·7) für H ₂ O = 100)		„
„	15		(95·4)		„
MgCl ₂	22		(89·0) für H ₂ O = 100)		„
„	11		(94·9)		„
ZnCl ₂	35		(83·7) für H ₂ O = 100)		„
„	17·5		(91·5)		„
HCl	38		(72·6)		„
„	25		(79·4) für H ₂ O = 100)		„
„	12·5		(87·0)		„

b) Sulfate.

Name	Procent	Dichte	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	Temp.	Beobachter
H ₂ SO ₄		1·128	0·0156	40	LUNDQUIST
„		1·207	0·0145	40	„
„		1·372	0·0126	40	„
„		1·05	0·0127		CHREE
„		1·18	0·0130		—
„		1·832	0·000765	9—15°	H. F. WEBER
K ₂ SO ₄	10		(99·3 für H ₂ O = 100)		JÄGER
Na ₂ SO ₄	10		(99·3 „)		„
MgSO ₄	22		(97·5 „)		„
CuSO ₄		1·160	0·00118		H. F. WEBER
„	18		0·00153		GRAETZ
„			(95·1 für H ₂ O = 100)		JÄGER
ZnSO ₄		1·237	0·00164	40	LUNDQUIST
„		1·252	0·00158	40	„
„		1·382	0·00158	40	„
„		1·134	0·00118		„
„		1·272	0·00116	9—15°	H. F. WEBER
„		1·362	0·00135		„
„	32		(91·5) für H ₂ O = 100)		JÄGER
„	16		(55·3)		„

c) Nitrate.

Name	Procent	Dichte	α	Temp.	Beobachter
KNO_3 . .	20		92.2 für $\text{H}_2\text{O} = 100$		JÄGER
„ . .	10		97.4 „		„
NaNO_3 . .	44		90.4 „		„
„ . .	22		94.1 „		„
$\text{Sr}(\text{NO}_2)_2$.	36		92.3 „		„
$\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$.	36		92.8 „		„

d) Carbonate.

Name	Procent	Dichte	α	Temp.	Beobachter
K_2CO_3 . .	10		97.4 für $\text{H}_2\text{O} = 100$		JÄGER
Na_2CO_3 . .	10		96.8 „		„

e) Hydrate.

Name	Procent	Dichte	α	Temp.	Beobachter
KOH . .	42		90.6 für $\text{H}_2\text{O} = 100$		JÄGER
„ . .	21		95.5 „		„

VIII. Wärmeleitung der Gase.

A. Methoden und Resultate.

Die Frage nach den Wärmeleitungsfähigkeiten der Gase hat ein besonderes Interesse dadurch bekommen, dass die kinetische Gastheorie (s. Gastheorie) über die Werthe dieser Constanten und über ihre Abhängigkeit von Druck und Temperatur des Gases gewisse Voraussagen macht. Da nach dieser Theorie die Moleküle sich geradlinig fortbewegen und nach jedem Zusammenstoß nur ihre Richtung ändern, aber weiter geradlinig fliegen, so müssen sich die Eigenschaften der Wärmefortleitung auch aus dieser Natur der Bewegung ergeben. Die Wärme, welche in einem Volumen eines Gases enthalten ist, ist gleich der lebendigen Kraft der darin vorhandenen Gasmoleküle. Diese lebendige Kraft setzt sich aber zusammen aus der fortschreitenden Bewegung (progressive Energie) und der Bewegung der Atome im Molekül (intermolekulare Energie). Die Wärmeleitung besteht nun in der Uebertragung der Energie von Schicht zu Schicht des Gases. Es lässt sich die Wärmeleitung ansehen als eine Diffusion, bei welcher wärmere und kältere Moleküle gegen einander diffundiren. Mit dieser Auffassung ergibt sich für die Wärmeleitungsconstante aus der CLAUSIUS'schen Theorie der Ausdruck¹⁾

$$\alpha = 1.530 \eta c_v,$$

worin η der Reibungscoefficient, c_v die spezifische Wärme bei constantem Volumen ist. Diese Gleichung sagt aus, dass die Wärmeleitung ebenso wie die Reibung 1) unabhängig vom Druck des Gases ist und 2) da c_v als constant anzusehen ist, ebenso wie die Reibung sich mit der Temperatur ändert. Für die Reibung verlangt nun (s. kinetische Gastheorie) die Theorie von CLAUSIUS, dass sie der Wurzel aus der absoluten Temperatur proportional ist. Es müsste also auch

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{1 + \alpha t}$$

sein, worin $\alpha = 0.003665$ ist. Die Beobachtungen über Reibung gaben jedoch

¹⁾ O. E. MEYER, Kin. Theorie der Gase, pag. 1888. 1877.

einen grösseren Temperaturcoefficienten. Da ferner η und ϵ_v für eine Reihe von Gasen bekannt sind, so lässt sich α für diese theoretisch berechnen und die experimentelle Bestimmung von α giebt dann zugleich eine Bestätigung oder Widerlegung der Gastheorie.

Experimentelle genaue Untersuchungen über die Wärmeleitungsconstanten der Gase sind erst seit dem Jahre 1872 angestellt worden¹⁾. STEFAN²⁾ construirte einen Apparat, der aus zwei ineinandergesteckten Kupfercylindern bestand, deren innerer als Luftthermometer diente, während in den Zwischenraum zwischen beiden das Gas eingefüllt wurde. Der ganze Apparat wurde in ein Bad getaucht und die Aenderung der Temperatur des Luftthermometers in ihrer Abhängigkeit von der Zeit beobachtet. Die sehr geringe Zwischenschicht, in der das Gas sich befindet, lässt Strömungen von grosser Stärke nicht auftreten. Dagegen, und das wurde von STEFAN nicht berücksichtigt, findet eine Wärmeabgabe auch statt durch direkte Strahlung der beiden Cylinder gegen einander. Dass α vom Drucke unabhängig ist, konnte STEFAN³⁾ beweisen, indem er den Apparat mit Luft einmal von 750 mm, das andere Mal von 428 mm Druck füllte. Er erhielt das erste Mal für α die Werthe 0·0000554; 0·0000552; 0·0000560; 0·0000554; das zweite Mal 0·0000552.

Die absoluten Zahlen für α , die STEFAN fand, sind jedoch wegen des Einflusses der Strahlung zu gross. Die relativen Werthe der Leitungsfähigkeit verschiedener Gase, bezogen auf Luft, lassen sich aus der oben angeführten Formel berechnen und ein Vergleich dieser theoretischen Zahlen mit den von STEFAN und auf ganz dieselbe Weise von PLANCK⁴⁾ erhaltenen Zahlen giebt folgende Tabelle.

	theoretisch	beobachtet	Beobachter
Wasserstoff	7·1	6·718	STEFAN
Kohlenoxyd	0·996	0·981	„
Sauerstoff	1·020	1·018	„
Kohlensäure	0·827	0·642	„
Grubengas	1·684	1·372	„
Aethylen	1·102	0·752	„
Stickstoff	0·998	0·992	PLANCK
Stickoxydul	0·864	0·665	„
Ammoniak	1·303	0·917	„

Es findet also nur bei einigen Gasen eine angenäherte Uebereinstimmung mit der Theorie statt, bei den meisten nicht⁵⁾.

Fast gleichzeitig mit STEFAN untersuchten KUNDT und WARBURG⁶⁾ diese Verhältnisse. Sie benutzten dazu ein kugelförmiges Glasgefäss, in welchem ein Thermometer sich befand, eingeschliffen oder eingeschmolzen in einen Stiel der Kugel. In die Kugel konnten die Gase gebracht werden. Sobald die äussere Hülle auf eine constante Temperatur (Eisbad) gebracht wurde, sank die Tempe-

1) Aeltere Versuche s. MAGNUS POGG. Ann. 112, pag. 160. 1860. MOHR, Chem. Ber. 4. 1871. CLAUDIUS ebendas. S. a. BUFF, POGG. Ann. 158, pag. 1876.

2) STEFAN, Wien. Ber. Bd. 65. 2. pag. 45. 1872.

3) STEFAN, Wien. Ber. Bd. 72. 2. 1875.

4) PLANCK, Wien. Ber. Bd. 72. 2, pag. 269. 1875. Wien Anz., pag. 123. 1876.

5) Die Dissertationen von MESSINGA, De Warmtegeleiding in Gasen. Groningen 1877, und JANNSEN, dsogl. Leyden 1878, sind dem Verf. nicht zugänglich, ebensowenig wie die Arbeit von THAN, Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit des Wasserstoffs HUNFALVY lit. Ber. I, pag. 378. 1877.

6) KUNDT und WARBURG, POGG. Ann. Bd. 156, pag. 177. 1875.

ratur, die das Thermometer anzeigte, und der zeitliche Verlauf dieser Aenderung wurde gemessen. Die Fortführung der Wärme fand hierbei statt durch Strömung, Strahlung und Leitung. Die Wärmeströmung wird, wie die Autoren theoretisch und experimentell zeigten, immer geringer, je geringer die Dichte des Gases wird, und von gewissen, für verschiedene Gase und verschiedene Apparate besonders zu bestimmenden Drucke an, wird sie unmerklich. Die direkte Strahlung des Thermometers wurde bestimmt, indem der ganze Apparat mit der grössten Sorgfalt so luftleer wie möglich gemacht wurde. Es wurde gezeigt, dass die Ueberführung der Wärme dann bis auf sehr wenige Procente nur noch durch Strahlung stattfand. Indem dann die Strahlung in Rechnung gezogen wird, konnte aus den Beobachtungen bei niedrigem Drucke die Grösse α bestimmt werden¹⁾.

So fanden die Verf. (nach einer Bestimmung der Constanten ihres Apparates)²⁾ in absoluten Werthen für

Luft	$\alpha_0 = 0.0000492$	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.
Wasserstoff	$\alpha_0 = 0.0003198$	
Kohlensäure	$\alpha_0 = 0.0000290$	

Mit dem STEFAN'schen Apparat hat ferner gleichzeitig mit KUNDT und WARBURG WINKELMANN³⁾ eine Reihe von Untersuchungen ausgeführt, in denen er sowohl die absoluten Werthe von α als auch die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur untersuchte. Die Strahlung eliminirte er dabei durch Differenzbeobachtungen mit verschiedenen Apparaten. Er fand so für die Temperatur 7°

Luft	$\alpha = 0.0000525$	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.
Wasserstoff	$\alpha = 0.0003324$	
Kohlenoxyd	$\alpha = 0.0000510$	
Stickstoff	$\alpha = 0.0000524$	
Sauerstoff	$\alpha = 0.000063$	
Kohlensäure	$\alpha = 0.000031$	
Stickoxyd	$\alpha = 0.0000460$	
Stickoxydul	$\alpha = 0.0000363$	
Sumpfgas	$\alpha = 0.0000647$	
Aethylen	$\alpha = 0.0000414$	

Die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur, die sich gleich derjenigen für die Reibung ergeben sollte, fand WINKELMANN⁴⁾ damals auch dieser ziemlich gleich, nämlich für Luft in der Formel

$$\alpha = \alpha_0 (1 + \gamma t),$$

den Faktor $\gamma = 0.00277$.

Bei Dämpfen ergaben sich noch viel grössere Werthe von γ , nämlich bei

Aethylen	$\gamma = 0.005751$
Stickoxydul	$\gamma = 0.004149$
Wasserdampf	$\gamma = 0.004388$
Alkoholdampf	$\gamma = 0.006147$
CS ₂ dampf	$\gamma = 0.005717$
Ammoniak	$\gamma = 0.005128$
Aetherdampf	$\gamma = 0.007012$
Kohlensäure	$\gamma = 0.004970$

¹⁾ Einen Apparat zur Demonstration der Wärmeleitung der Gase hat KUNDT angegeben, WIED. ANN. 2, pag. 384. 1877.

²⁾ GRAETZ, WIED. ANN. 14, pag. 232. 1881.

³⁾ WINKELMANN, POGG. ANN. Bd. 157, pag. 497; Bd. 159, pag. 177. 1876.

⁴⁾ WINKELMANN, POGG. ANN. Bd. 156, pag. 497. 1876.

Indess fand später GRÄTZ¹⁾, der nach der KUNDT und WARBURG'schen Methode α für 0° und 100° für Luft, Wasserstoff und Kohlensäure bestimmte, für γ viel kleinere Werthe, nämlich solche, welche nahezu einer Proportionalität von α mit der Wurzel und der absoluten Temperatur entsprechen. Es ergab sich nämlich für

Luft	$\alpha_0 = 0.00004838$	$\alpha_{100} = 0.00005734$	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$.
Wasserstoff . .	$\alpha_0 = 0.0003190$	$\alpha_{100} = 0.0003693$	
Kohlensäure . .	$\alpha_0 = 0.0000309$	$\alpha_{100} = 0.00003770$	
Daraus fand sich für			
Luft	$\gamma = 0.00183$		
Wasserstoff . .	$\gamma = 0.0016$		
Kohlensäure . .	$\gamma = 0.0022$		

Zu gleicher Zeit hatte CHRISTIANSEN²⁾ nach der oben angeführten Methode mittelst der Leitungssäule für Luft den Werth

$$\gamma = 0.00153$$

gefunden, den er später nochmals verificirte.

Wegen der Wichtigkeit dieses Resultates für die Gastheorie unternahm WINKELMANN eine nochmalige Bestimmung dieses Coëfficienten, sowohl nach der Methode von KUNDT und WARBURG³⁾, als nach der von CHRISTIANSEN⁴⁾. Er fand so für

Luft	$\gamma = 0.00208$	$\gamma = 0.00206$
Kohlensäure . .	$\gamma = 0.00380$	$\gamma = 0.00366$
Wasserstoff		$\gamma = 0.00206$

Während so die Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitung übereinstimmend von CHRISTIANSEN, GRAETZ, WINKELMANN bedeutend kleiner als die entsprechenden für die Reibung gefunden wurden, führte eine Untersuchung nach ganz anderer Methode SCHLEIERMACHER darauf, wieder viel grössere Werthe für diese Coëfficienten anzunehmen. SCHLEIERMACHER⁵⁾ benutzte dieselbe Methode, welche er zur Ermittlung der Strahlung angewendet hatte (s. o. pag. 252) und welche ihm dort Resultate geliefert hatte, die von denen anderer Beobachter erheblich abwichen. Ein Platindraht von etwa 320 mm Länge und 0.4 mm Durchmesser war innerhalb einer Glasröhre ausgespannt. In die Glasröhre konnten Gase von beliebigem Druck gefüllt werden. Der Draht wurde von einem Strom von bekannter Stärke durchflossen, während die Glaswand auf constanter Temperatur gehalten wurde. Wenn der stationäre Zustand eingetreten ist und Strömungen vermieden sind, so wird die in dem Draht erzeugte JOULE'sche Wärme durch Strahlung und Leitung sofort abgegeben. Die Temperatur des Drahtes lässt sich aus seinem Widerstand messen, die durch Strahlung abgegebene Wärme direkt bestimmen, indem man die Luft möglichst entfernt, und man erhält so die durch Leitung durch das Gas fortgeführte Wärme. Seine Beobachtungen ergaben ihm

¹⁾ GRAETZ, WIED. ANN. 14, pag. 232. 1881. -- s. a. WINKELMANN, WIED. ANN. 14, pag. 534. 1881. — GRAETZ, *ibid.*, pag. 511. 1881.

²⁾ CHRISTIANSEN, WIED. ANN. 14, pag. 23. 1881; 19, pag. 282. 1883. — s. a. WINKELMANN, WIED. ANN. 20, pag. 280. 1883.

³⁾ WINKELMANN, WIED. ANN. 19, pag. 649.

⁴⁾ WINKELMANN, WIED. ANN. 29, pag. 107. 1886.

⁵⁾ SCHLEIERMACHER, WIED. ANN. 34, pag. 623. 1888. Versuche nach derselben Methode, führte auch aus BOTTOMLEY Rep. Brit. Assoc. 1884, pag. 623. RIVIÈRE, ANN. DE L'ÉCOLE NORMALE. 133, I, pag. 281. 1884; — s. a. W. KOHLRAUSCH, WIED. ANN. 33, pag. 50. 1888.

als Mittel aus zwei Apparaten für die absoluten Werthe der Wärmeleitung folgende Zahlen:

	Luft	Wasserstoff	Kohlensäure
I. Bei 0°			
$\alpha_0 =$	0·0000562	0·000410	0·0000327
II. Bei 100°			
$\alpha_{100} =$	0·0000720	0·000723	0·0000506
Und daraus die Temperaturcoefficienten			
$\gamma =$	0·00281	0·00275	0·00548

Nach derselben Methode, nur mit einem Nickeldraht statt eines Platindrahtes, stellte später SCHLEIERMACHER¹⁾ auch Versuche über die Wärmeleitung des Quecksilberdampfes an, die deswegen von theoretischer Wichtigkeit sind, weil bei der Einatomigkeit dieses Dampfes alle Complicationen der Gastheorien, die aus den intramolekularen Bewegungen stehen, wegfallen. Er erhielt so

$$\alpha = 0\cdot00001846 \text{ bei } 203^\circ,$$

und den Temperaturcoefficienten (zwischen 182·5° und 215°)

$$\gamma = 0\cdot0074.$$

Gegen die Methode und die Versuche von SCHLEIERMACHER lassen sich indess erhebliche Einwände machen²⁾, so dass die grossen Werthe von γ , die SCHLEIERMACHER für Luft und Wasserstoff erhielt, gegenüber allen sonst erhaltenen Werthen nur zu einer erneuten Prüfung seiner Methode auffordern. Auch ist bei der Untersuchung des Quecksilberdampfes die Frage wegen der Absorption des Quecksilberdampfes für strahlende Wärme nicht berücksichtigt, was um so nothwendiger gewesen wäre, als der Antheil der Strahlung an der übergeführten Wärme bei diesen hohen Temperaturen ein sehr grosser ist.

Um die Frage nach den Temperaturcoefficienten für Luft und Wasserstoff nochmals zu untersuchen, hat EICHHORN³⁾ nach der Methode von WINKELMANN erneute Messungen angestellt. Sie ergaben ihm für

$$\text{Luft und Wasserstoff} \quad \gamma = 0\cdot002045$$

$$\text{Kohlensäure} \quad \gamma = 0\cdot003730$$

$$\text{Aethylen} \quad \gamma = 0\cdot004714.$$

Auch WINKELMANN⁴⁾ hat dieselbe Frage noch einmal in anderer Weise in Angriff genommen.

Bei Anwendung von Glasapparaten und sorgfältiger Beachtung aller Fehlerquellen fand er, indem er die Strahlung durch Differenzbeobachtungen elimirte, für die Temperaturcoefficienten folgende Werthe

$$\text{Luft} \quad \gamma = 0\cdot00190$$

$$\text{Wasserstoff} \quad \gamma = 0\cdot00175$$

$$\text{Kohlensäure} \quad \gamma = 0\cdot00401$$

Zu gleicher Zeit bestimmte WINKELMANN auch die absoluten Werthe der Wärmeleitung mit Metallapparaten, und zwar mit zwei ineinandergesteckten Metallcylindern, in etwas anderer Form, als sie ursprünglich STEFAN, dann er selbst angewandt hatte. Seine Versuche ergaben folgende Werthe

¹⁾ SCHLEIERMACHER, WIED. ANN. 36, pag. 346. 1889.

²⁾ S. EICHHORN, WIED. ANN. 40, pag. 697. 1890 — GRAETZ, WIED. ANN. 45, pag. 298. 1892.

³⁾ EICHHORN, WIED. ANN. 40, pag. 697. 1890

⁴⁾ WINKELMANN, WIED. ANN. 44, pag. 177. 429. 1891.

Luft	$\alpha = 0.0000555$	} bei $0^\circ \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$.
Wasserstoff	$\alpha = 0.0003829$	
Kohlensäure	$\alpha = 0.0000322$	

Wenn man die Theorie dieser Versuche vervollkommnet, wie es KUTTA¹⁾ gethan hat, findet man für Luft den Werth

$$\alpha = 0.0005715.$$

Noch vor der Berechnung von KUTTA machte WINKELMANN²⁾ ebensolche Bestimmungen, aber mit kugelförmigen Metallapparaten, und fand für Luft

$$\alpha = 0.00005684.$$

Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit denen von SCHLEIERMACHER ist nicht von erheblicher Bedeutung. Denn, wenn auch die Versuche bei 0° übereinstimmen (0.0000562 bei SCHLEIERMACHER, 0.00005684 bei WINKELMANN), so würden bei 100° sofort grosse Differenzen auftreten, indem SCHLEIERMACHER bei 100° fand $\alpha = 0.0000720$, während die WINKELMANN'schen Werthe für 100° ergeben würden $\alpha = 0.0000676$.

Sehr auffallend ist aber der grosse Unterschied der Zahlen von WINKELMANN einerseits gegen diejenigen von KUNDT und WARBURG und GRÄTZ andererseits. Der Unterschied der Methoden besteht in zwei Dingen; erstens sind bei WINKELMANN Metallapparate, bei KUNDT und WARBURG sowie bei GRÄTZ aber Glasapparate angewendet. Zweitens ist bei WINKELMANN die Strahlung durch Differenzbeobachtungen eliminirt, bei den anderen Beobachtern direkt bestimmt und subtrahirt. Es wird eine besondere Untersuchung nöthig sein, um zu sehen, durch welchen Umstand diese Abweichungen bedingt sind.

In jüngster Zeit hat HÖFKER³⁾ nach einer, dem Verf. nicht bekannten Methode die Wärmeleitung der Dämpfe von Aminbasen relativ gegen Luft bestimmt. Seine Resultate sind folgende

Luft	1	Luft	1
Methylamin	0.6638	Diäthylamin	0.5262
Dimethylamin	0.6661	Butylamin (sek.)	0.5215
Aethylamin	0.5843	Amylamin	0.4903
Trimethylamin	0.5705	Triäthylamin	0.4677
Propylamin	0.5259	Dipropylamin	0.4483

B. Tabelle der Wärmeleitungsfähigkeit der Gase.

Im Folgenden sind die bekannten Werthe für die Wärmeleitung der Gase mit den Temperaturcoefficienten zusammengestellt. $\alpha = \alpha_0 (1 + \gamma t)$.

	ϑ	$\alpha \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	
Luft	ca. 10°	0.0000558		STEFAN
„	0°	0.0000492		KUNDT u. WARBURG
„	0°	0.00005684	0.00190	WINKELMANN
„	0°	0.00004838	0.00183	GRAETZ
„	0°	0.0000562	0.00281	SCHLEIERMACHER

1) KUTTA, WIED. Ann. 54, pag. 104. 1895.

2) WINKELMANN, WIED. Ann. 48, pag. 190. 1893.

3) HÖFKER, Dissertat. Jena 1892. Beibl. 18, pag. 742. 1894.

	ϑ	$\kappa \left(\frac{gr}{cm \cdot sec} \right)$	γ	
Wasserstoff	7°	0·0003829	0·00175	WINKELMANN
„	0°	0·0003190	0·0016	GRAETZ
„	0°	0·0003198		KUNDT u. WAREURG
„	0°	0·000410	0·00275	SCHLEIERMACHER
Kohlensäure	0°	0·0000322	0·00401	WINKELMANN
„	0°	0·0000309	0·0022	GRAETZ
„	0°	0·0000290		KUNDT u. WARBURG
„	0°	0·0000327	0·00548	SCHLEIERMACHER
„			0·003732	EICHHORN
Sauerstoff	7°	0·0000563		WINKELMANN
Stickstoff	7°	0·0000524		„
Quecksilber	203°	0·00001846	0·0074	SCHLEIERMACHER
Stickoxydul	0°	0·0000350	0·00415	WINKELMANN
Stirkoxyd	7°	0·0000460		„
Kohlenoxyd	0°	0·0000499		„
Ammoniak	0°	0·000058	0·00513	„
Sumpfgas	7°	0·0000647		„
Aethylen	0°	0·0000395	0·00579	„
„			0·004714	EICHHORN
Wasserdampf			0·00439	WINKELMANN
Alkoholdampf			0·00615	„
Schwefelkohlenstoff			0·00572	„
Aetherdampf			0·00701	„
Methylamin		0·6638		} für Luft = 1 } HÖFKER
Dimethylamin		0·6661		
Aethylamin		0·5843		
Trimethylamin		0·5705		
Propylamin		0·5259		
Diäthylamin		0·5262		
Butylamin (sek.)		0·5215		
Amylamin		0·4203		
Triäthylamin		0·4677		
Dipropylamin		0·4483		GRAETZ.

Specifische Wärme.

Allgemeines und Methoden.

Bezeichnet man mit dQ die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 Gramm eines Körpers von ϑ° auf $(\vartheta + d\vartheta)^\circ$ zu erwärmen, so ist

$$\frac{dQ}{d\vartheta}$$

die specifische Wärme des Körpers bei ϑ° . Hierbei wird gewöhnlich jene Wärmemenge als Eins vorausgesetzt, welche 1 g Wasser von 0° auf 1° erwärmt¹⁾.

¹⁾ Vergl. indess später die specifische Wärme des Wassers.