Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Wärme

Winkelmann, Adolph August

1896

Ausdehnung der festen Körper

urn:nbn:at:at-ubi:2-7843

Ausdehnung der festen Körper.

I. Einleitung.

Die festen Körper dehnen sich bei eintretender Temperaturerhöhung entweder nach allen Richtungen gleichmässig aus, oder nach verschiedenen Richtungen verschieden. Wir behandeln zunächst die Körper, welche die zuerst genannte Eigenschaft besitzen; bei diesen genügt es, die Ausdehnung nach einer einzigen Richtung zu bestimmen.

Habe ein Stab bei der Temperatur 0° die Länge l_0, bei t^0 die Länge l_t und sei der Zuwachs, den die Länge l_t bei der Temperaturerhöhung um dt erfährt, gleich

$$d(l_t)$$

so lässt sich eine Grösse α bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{d(l_t)}{l_o} = \alpha \cdot dt \tag{1}$$

genügt. Man nennt α den wahren linearen Ausdehnungscoëfficienten bei der Temperatur t.

Integrirt man die Gleichung (1) zwischen den Grenzen t bis T, so hat man

$$\frac{l_T - l_t}{l_o} = \int_t^T \alpha \cdot dt = \beta_{t,T}(T - t),$$

und daraus

$$\beta_{t,T} = \frac{l_T - l_t}{(T - t) l_o}. \tag{2}$$

$\beta_{t,T}$ bezeichnet man als den mittleren linearen Ausdehnungscoëfficienten zwischen den Temperaturen t und T. Derselbe giebt den Quotienten an, welcher aus der Verlängerung, die der Stab bei der Temperaturerhöhung von $t°$ auf $T°$ erfährt, und der Temperaturdifferenz $(T - t)$ gebildet ist, diesen Quotienten bezogen auf die Länge l_0 des Stabes bei 0° als Einheit.

Ist die Grösse α bekannt, so ist hiermit die Länge l_t des Stabes bei der Temperatur t^0 als Function der Temperatur durch die Gleichung

$$l_t = l_o\left(1 + \int_0^t \alpha \cdot dt\right)$$

bestimmt.

Statt der letzten Gleichung erhält man durch Einführung des mittleren Ausdehnungscoëfficienten $\beta_{o,t}$

$$l_t = l_o(1 + \beta_{o,t} \cdot t).$$

Beobachtet man daher für die verschiedenen Temperaturen $t_1, t_2, t_2 \ldots t_n$ die zugehörigen Längen $l_{t_1}, l_{t_2}, l_{t_3} \ldots . l_{tn}$, so erhält man aus diesen die Werthe

$$\beta_{o,t_1}; \quad \beta_{o,t_2}; \quad \beta_{o,t_3} \ldots . \beta_{o,tn}$$

und kann den mittleren Ausdehnungscoëfficienten $\beta_{o,t}$ als Function der Temperatur durch eine Gleichung von der Form

$$\beta_{o,t} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 + \ldots$$

darstellen. Der wahre Ausdehnungscoëfficient α_t bei der Temperatur t ergiebt sich daher aus der Gleichung

$$\int_0^t \alpha_t \cdot dt = \beta_{o,t} \cdot t$$

$$\alpha_t = a + 2bt + 3ct^2 \ldots .$$

Um den mittleren Ausdehnungscoëfficienten $\beta_{t,T}$ zwischen den Temperaturen t und T durch die gleichen Coëfficienten $a, b, c \ldots$ auszudrücken, hat man die Gleichung

$$\beta_{t,T} = \frac{1}{(T-t)} \cdot \int_t^T \alpha_t \cdot dt,$$

daher

$$\beta_{t,T} = \frac{1}{T-t} [a(T-t) + b(T^2 - t^2) + c(T^3 - t^3) + \ldots].$$

Sind die mittleren Ausdehnungscoëfficienten

$$\beta_{o,t_1}; \quad \beta_{o,t_2}; \quad \ldots \quad \beta_{o,t_n}$$

einander gleich, so ist

$$b = c = \ldots = 0$$

und daher

$$\alpha_t = \beta_{o,t} = \beta_{t,T} = a.$$

In diesem Falle ist der wahre Ausdehnungscoëfficient mit dem mittleren identisch.

Aus dem linearen Ausdehnungscoëfficienten ergiebt sich unmittelbar auch die Ausdehnung nach zwei und drei Dimensionen. Wird die Breite des Körpers bei $0°$ mit b_o, die Höhe mit h_o bezeichnet, so ist nach der früheren Darstellung

$$b_t = b_o(1 + \beta_{o,t} \cdot t)$$

ebenso

$$h_t = h_o(1 + \beta_{o,t} \cdot t),$$

daher

$$l_t \cdot b_t = l_o \cdot b_o(1 + \beta_{o,t} \cdot t)^2$$
$$l_t \cdot b_t \cdot h_t = l_o \cdot b_o \cdot h_o(1 + \beta_{o,t} \cdot t)^3.$$

Da $\beta_{o,t}$ immer, wie die Versuche lehren, klein ist, so kann man $(\beta_{o,t})^2$ und $(\beta_{o,t})^3$ gegenüber $\beta_{o,t}$ vernachlässigen und erhält:

$$l_t \cdot b_t = l_o \cdot b_o(1 + 2 \cdot \beta_{o,t})$$
$$l_t \cdot b_t \cdot h_t = l_o \cdot b_o \cdot h_o(1 + 3 \cdot \beta_{o,t} \cdot t).$$

Führt man statt der Grösse $l_o \cdot b_o \cdot h_o$ das Volumen des Körpers bei $0°$, nämlich V_o ein, so ist das Volumen V_t bei der Temperatur t

$$V_t = V_o(1 + 3 \cdot \beta_{o,t} \cdot t).$$

Man bezeichnet die Grösse $3 \cdot \beta_{o,t}$ als den mittleren **cubischen** Ausdehnungscoëfficienten zwischen den Temperaturen $0°$ und $t°$.

II. Beobachtungen.

1) Die ersten genaueren Versuche zur Bestimmung der linearen Ausdehnungscoëfficienten fester Körper rühren von LAVOISIER und LA PLACE[1]) aus dem Jahre 1782 her. Die zu untersuchenden Stäbe wurden in eine Wanne gelegt und an einer Seite mit Quadersteinen fest verbunden. Das andere Ende der Stäbe wirkte auf einen Hebel, welcher durch seine Bewegung ein Fernrohr um eine horizontale Axe, die senkrecht zur Fernrohraxe stand, drehte. Das Fernrohr war auf einen vertical aufgestellten Maassstab gerichtet, so dass die Drehung, die das Fernrohr erfuhr, sich aus den Zahlen des Maassstabes, die am Fadenkreuz abgelesen wurden, ableiten liess.

Um die Temperatur des Stabes zu variiren, wurde, nachdem zunächst die Länge des Stabes bei $0°$ durch eine Mischung von Eis und Wasser bestimmt

---

[1]) LAVOISIER und LA PLACE, Bot. Traité de Physique, T. I, pag. 151. Paris 1816. — SCHWEIGGER's Journ. XXV. 355. 1819.

war, aus einem Kessel siedendes Wasser in die Wanne geführt. Die Temperatur der Wanne wurde hierdurch zwar nicht auf die Temperatur des siedenden Wassers gebracht; es fehlten hieran aber nur 3—4°, wie durch mehrere in der Wanne befindliche Thermometer bestimmt wurde. Durch Zusatz von kälterem Wasser konnte dann die Temperatur beliebig geändert werden.

LAVOISIER und LA PLACE glaubten aus ihren Versuchen folgern zu können, dass bis 100° die Ausdehnung der von ihnen untersuchten Körper den Graden des Quecksilberthermometers proportional sei (ein Resultat, welches, wie Versuche späterer Forscher zeigten, nicht richtig ist) und dass ferner ein Körper, der von 0° an erwärmt und dann wieder bis 0° abgekühlt wird, genau die Länge wieder besitzt, die er vor der Erwärmung bei 0° hatte. Nur für den gehärteten Stahl fanden LAVOISIER und LA PLACE hiervon eine Ausnahme, denn es zeigte sich, dass der Ausdehnungscoëfficient desselben mit wachsender Temperatur abnahm. Der nicht gehärtete Stahl hat einen kleineren Ausdehnungscoëfficienten als der gehärtete, und daher erklärten LAVOISIER und LA PLACE die Abnahme des Ausdehnungscoëfficienten für den gehärteten Stahl dadurch, dass mit der Erwärmung eine Enthärtung des Stahls eintrete, so dass sich der Ausdehnungscoëfficient desselben mit wachsender Temperatur jenem des ungehärteten Stahls annähere.

Linearer Ausdehnungscoëfficient nach LAVOISIER und LA PLACE zwischen 0 und $100° = \beta_{0,100}$.

Körper	$\beta_{0,100}$	Körper	$\beta_{0,100}$
Spiegelglas von Saint-Gobain	0·00000891	Gehärteter Stahl bei 37·5° angelassen	0·00001369
Röhre von bleifreiem Glase	876	Gehärteter Stahl bei 37·5° angelassen	1386
„ „ „ „	898	Gehärteter Stahl bei 81·25° angelassen	1239
„ „ „ „	917	Blei	2848
Englisches Flintglas . .	812	Zinn von Mallaca . . .	1938
Französisches Flintglas .	872	Zinn von Fallmonth . .	2173
Kupfer	0·00001722	Kapellensilber	1910
„	1712	Pariser Silber	1909
Messing	1867	Feines Gold	1466
„	1890	Gold nicht geglüht . . .	1552
Weiches Schmiedeeisen .	1220	Gold geglüht	1514
Eisendraht	1235		
Ungehärteter Stahl . . .	1079		

2) Aenderung des Ausdehnungscoëfficienten mit der Temperatur.

Indem wir einige ältere Beobachtungen übergehen[1]), wenden wir uns den Beobachtungen HÄLLSTRÖM's[2]) zu, der für Glas und Eisen zuerst eine Aenderung des Ausdehnungscoëfficienten mit wachsender Temperatur innerhalb des Intervalls 0—100° bestimmte. Die Länge eines Glasstabes bei $t°$ ist nach diesen Versuchen

$$l_t = l_o(1 + 0{\cdot}0000052 \cdot t + 0{\cdot}000000032 t^2).$$

Berechnet man nach dieser Gleichung den mittleren Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 100°, so findet man

$$\beta_{0,100} = 0{\cdot}0000084.$$

[1]) Eine Zusammenstellung derselben findet man in GEHLER's physikalischem Wörterbuch, Artikel: »Ausdehnung«.

[2]) HALLSTRÖM, GILB. Ann. 36, pag. 60. 1810.

Dies Resultat stimmt mit den früheren Versuchen nahe überein.

Für Eisen fand HÄLLSTRÖM

$$l_t = l_o(1 + 0{\cdot}000\,009\,94\,t + 0{\cdot}000\,000\,024\,t^2 + 0{\cdot}000\,000\,000\,2 \cdot t^3).$$

Der mittlere Ausdehnungscoëfficient des Eisens zwischen 0 und 100° wird hiernach

$$\beta_{0,100} = 0{\cdot}0000143,$$

ein Werth, der nicht unbeträchtlich grösser ist, als der früher von LAVOISIER und LA PLACE gefundene.

Genauere Untersuchungen über die Aenderung des Ausdehnungscoëfficienten rühren von DULONG und PETIT[1]) her; sie waren die ersten, die die Ausdehnung über 100° hinaus verfolgten und zur Messung der Temperatur ein Luftthermometer benutzten. Die Messungsmethode war eine indirekte. Zunächst wurde die Ausdehnung des Quecksilbers bestimmt und zwar nach einem Princip, das die Kenntniss der Ausdehnung eines festen Körpers nicht voraussetzt[2]). Nachdem die Ausdehnung des Quecksilbers bekannt war, liess sich die cubische Ausdehnung des Glases in folgender Weise ableiten.

Wird ein Glasgefäss mit Quecksilber gefüllt, so wird bei der Erwärmung desselben eine gewisse Menge Quecksilber ausfliessen.

Der mittlere Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers zwischen 0 und 100° werde mit $\gamma_{0\cdot100}$, der cubische Ausdehnungscoëfficient des Glases in dem gleichen Temperaturintervall mit $3 \cdot \beta_{0,100}$ bezeichnet.

Es sei das Volumen des Gefässes bei 0° gleich V_0,
„ „ „ „ „ „ „ 100° „ V_{100},
„ „ das Gewicht des Quecksilbers im Gefässe bei 0° $= P$,
„ „ „ „ „ „ „ „ „ 100° $= p$,
„ „ das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° $= s_0$,
„ „ „ „ „ „ „ „ 100° $= s_{100}$.

Dann ist

$$V_{100} = V_0(1 + 3\beta_{0,100} \cdot 100)$$

$$V_0 = \frac{P}{s_0}; \quad V_{100} = \frac{p}{s_{100}}$$

$$s_0 = s_{100}(1 + \gamma_{0,100} \cdot 100).$$

Daraus folgt

$$3\beta_{0,100} = \frac{p\,(1 + \gamma_{0,100}) - P}{100 \cdot P}.$$

DULONG und PETIT bestimmten den mittleren cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Glases zwischen 0 und 100°, 0 und 200° und 0 und 300°, wobei, wie erwähnt, die Temperaturen nach dem Luftthermometer gemessen wurden.

Mittlerer cubischer Ausdehnungscoëfficient des Glases

zwischen 0° und 100°		$3\beta_{0,100} = 0{\cdot}0000258$
„ 0° „ 200°		$3\beta_{0,200} = 0{\cdot}0000275$
„ 0° „ 300°		$3\beta_{0,300} = 0{\cdot}0000304.$

Stellt man diese Werthe durch eine Function der Temperatur dar, so erhält man mit Anwendung von zwei Constanten den Ausdruck

$$3\beta_{o,t} = 0{\cdot}0000251 + 10^{-11} \cdot 6 \cdot t^2.$$

---

[1]) DULONG und PETIT, Ann. de chim. et de phys. VII, pag. 113 (1818); SCHWEIGGER's Journ. XXV, pag. 304; GILB. Ann. 58, pag. 254.

[2]) Vergl. Ausdehnung der Flüssigkeiten.

Nach dieser Gleichung wird

$$3\beta_{0,100} = 0{\cdot}0000257$$
$$3\beta_{0,200} = 0{\cdot}0000275$$
$$3\beta_{0,300} = 0{\cdot}0000305$$

Werthe, die fast identisch mit den beobachteten sind.

Um die Ausdehnung der Metalle zu bestimmen, wurde eine Glasröhre, deren Ausdehnungscoëfficient bekannt war, an dem einen Ende zugeschmolzen und dann, nachdem das zu untersuchende Metall in Form eines Stabes in der Glasröhre befestigt war, das andere Ende capillar ausgezogen. Die Röhre wurde mit Quecksilber gefüllt und dann gerade so verfahren, wie bei der Bestimmung des Ausdehnungscoëfficienten des Glasgefässes. Das bei der höheren Temperatur austretende Quecksilber giebt die Summe der Ausdehnungen des Quecksilbers und des Metalls, vermindert um die Ausdehnung des Glases.

Ferner wurde in folgender Weise die Ausdehnung zweier Metalle verglichen. Zwei gleiche Streifen von Platin und Kupfer wurden an einander gelegt und durch starke Schrauben an ihrem einen Ende fest mit einander verbunden. Die Streifen wurden in ein Oelbad gelegt und die Differenz ihrer Längen durch einen Maassstab mit Nonius, der noch 0·01 *mm* abzulesen gestattete, bei verschiedenen Temperaturen gemessen.

Die Werthe von Dulong und Petit waren folgende:

Mittlerer cubischer Ausdehnungscoëfficient für

	Eisen	Kupfer	Platin
zwischen 0° und 100°	0·0000355	0·0000543	0·0000265
„ 0° „ 300°	0·0000441	0·0000565	0·0000275

Berechnet man den mittleren Ausdehnungscoëfficienten aus diesen Werthen nach der Formel

$$\beta_{o,t} = a + b \cdot t,$$

so erhält man für die wahren cubischen Ausdehnungscoëfficienten bei 0° resp. 300°

	Eisen	Kupfer	Platin
$3\alpha_0$	0·0000312	0·0000532	0·0000260
$3\alpha_{300}$	0·0000570	0·0000598	0·0000290.

Aus der Veränderlichkeit des Ausdehnungscoëfficienten der angeführten Metalle und des Glases mit der Temperatur ergiebt sich unmittelbar, dass eine Temperaturbestimmung aus der Ausdehnung dieser Körper, berechnet unter der Voraussetzung, dass die Temperatur um $t°$ gestiegen ist, wenn das Volumen sich um die Grösse

$$\frac{V_{100} - V_0}{V_0} \cdot \frac{t}{100}$$

vermehrt hat, verschiedene Werthe ergeben muss, je nach der Wahl des Körpers, der zur Temperaturbestimmung dient.

Für Eisen ist nach den oben mitgetheilten Zahlen

$$\frac{V_{100} - V_0}{V_0} = 0{\cdot}00355.$$

Für die Temperatur von 300°, nach dem Luftthermometer gemessen, ist die Volumvermehrung von 0° aus, bezogen auf das Volumen von 0° als Einheit, gleich

$$0{\cdot}0000441 \cdot 300 = 0{\cdot}01323.$$

Die Temperatur x, die hiernach aus der Ausdehnung des Eisens sich berechnet, wenn das Luftthermometer 300° angiebt, ist durch die Gleichung

$$0{\cdot}00355 \cdot \frac{x}{100} = 0{\cdot}01323$$

bestimmt. Daher

$$x = 372{\cdot}6.$$

Berechnet man in derselben Weise die Temperatur, die die anderen Körper angeben würden, so erhält man folgende Werthe. Zugleich sind auch die Temperaturen mitgetheilt, die sich aus der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers im Glase ergeben, d. h. die Angaben des Quecksilberthermometers, wenn das Glas und das Quecksilber die von DULONG und PETIT bestimmten Ausdehnungscoëfficienten besitzen.

Temperatur.

Luftthermometer	Quecksilberthermometer	Eisenthermometer	Kupferthermometer	Platinthermometer	Glasthermometer
0	0	0	0	0	0
100	100	100	100	100	100
300	307·6	372·6	328·8	311·6	352·9

3) Versuche von MATTHIESEN und KOPP.

Eine ähnliche Methode, wie von DULONG und PETIT, wurde von MATTHIESEN[1]) angewandt. Zunächst bestimmte er die Ausdehnung zweier Glasstäbe mit Hilfe einer feinen Mikrometerschraube. Der lineare Ausdehnungscoëfficient ergab sich in dem Intervall von 0—100° als constant. Die Temperaturen waren nach einem Normal-Quecksilberthermometer bestimmt, von dem nicht ersichtlich ist, ob eine Vergleichung mit dem Luftthermometer stattgefunden hat. Die Glasstäbe waren besonders zu den Versuchen verfertigt und bestanden aus 3 Gewichtstheilen Quarzsand, 2 Blei und 1 Alkali. Die Länge l_t ist durch die Gleichung

$$l_t = l_o(1 + 0{\cdot}00000279\,t)$$

bestimmt. MATTHIESEN machte bei diesen Versuchen die Beobachtung, dass die Glasstäbe bei der auf eine Erwärmung folgenden Abkühlung nicht gleich ihre normale Länge wieder annahmen. Der aus der ersten Bestimmung sich ergebende Ausdehnungscoëfficient war um etwa 3 $\frac{0}{0}$ grösser, als jener der folgenden Bestimmungen; der oben mitgetheilte Werth bezieht sich auf die letzteren.

Mit Hilfe des bekannten Ausdehnungscoëfficienten des Glases bestimmte MATTHIESEN zunächst die Ausdehnung des Wassers, indem er den Gewichtsverlust beobachtete, welchen Glasstücke in Wasser von verschiedener Temperatur erlitten.

Um den Ausdehnungscoëfficienten der Metalle zu erhalten, wurde der Gewichtsverlust bestimmt, den gleiche Metallstücke in Wasser von verschiedene Temperatur erlitten. Ist V_o das Volumen des Metalls bei 0° und ist $3\beta_{o,\,t}$ der mittlere cubische Ausdehnungscoëfficient des Metalls zwischen 0 und t°, so ist bei t° das Volumen desselben, also auch das Volumen des verdrängten Wassers

$$V_o(1 + 3\beta_{o,\,} \cdot t).$$

Das Gewicht dieses Wassers sei P_t, das specifische Gewicht des Wassers bei t° sei s_t, so hat man

$$V_o(1 + 3\beta_{o,t} \cdot t) = \frac{P_t}{s_t}.$$

[1]) MATTHIESEN, Phil. Trans. I, pag. 231. 1866; Phil. Mag. 4. 31, pag. 149; 32, pag. 472; POGG. Ann. 128, pag. 512; 130, pag. 50.

Wird diese Bestimmung bei mehr als zwei Temperaturen ausgeführt, so erhält man den mittleren Ausdehnungscoëfficienten als Function der Temperatur.

Die Beobachtungen MATTHIESEN's beziehen sich fast durchgängig auf drei Temperaturen, und zwar nahezu auf 10°, 55° und 95°.

Stellt man das Volumen bei t° durch die Gleichung

$$V_t = V_o(1 + a \cdot t + b \cdot t^2)$$

dar, so erhielt MATTHIESEN folgende Werthe für die Constanten a und b; zugleich ist in der folgenden Tabelle der mittlere cubische Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und 100° angegeben, wie er sich aus der Formel ergiebt.

Ausdehnung fester Körper nach MATTHIESEN.

	a	b	$3\beta_{0,100}$
Cadmium	0·00008078	0·0000001400	0·00009478
Zink	8222	0700	8928
Blei	8177	0222	8399
Zinn	6100	0789	6889
Silber	5426	0405	5831
Kupfer	4443	0555	4998
Gold	4075	0336	4411
Wismuth	3582	0446	3948
Palladium	3032	0280	3312
Antimon	2770	0397	3167
Platin	2554	0104	2618

Es wurde ferner von MATTHIESEN eine grössere Anzahl von Legirungen der oben angegebenen Metalle untersucht. Hierbei zeigte sich, dass das Volumen einer Legirung in dem Intervall von 0 – 100° nahezu gleich dem Mittel der Volumina ist, welches die legirten Metalle bei der gleichen Temperatur einnehmen. Besteht also das Volumen V einer Legirung bei 0° aus dem Volumen V' des einen Metalls und dem Volumen V'' eines anderen, und ist der mittlere cubische Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und t° des ersten Metalls gleich $3\beta'_{o,t}$, des zweiten gleich $3\beta''_{o,t}$, so ist der cubische Ausdehnungscoëfficient der Legirung

$$3\beta_{o,t} = \frac{V' \cdot 3\beta'_{o,t} + V'' \cdot 3\beta''_{o,t}}{V' + V''}.$$

Ebenfalls nach einer indirekten Methode hat KOPP die Ausdehnung fester Körper untersucht[1]). Eine kleine Glasflasche mit eingeriebenem Stöpsel wurde mit Wasser gefüllt, in einem Wasserbade verschiedenen Temperaturen ausgesetzt und für jede Temperatur das Gewicht des Wassers ermittelt. Dann wurde der zu untersuchende Körper in die Flasche gelegt und letztere ebenso wie früher verschiedenen Temperaturen mit nachfolgenden Gewichtsbestimmungen ausgesetzt. Hieraus ergiebt sich das specifische Gewicht des Körpers bei den angewandten Temperaturen, und daraus unmittelbar der cubische Ausdehnungscoëfficient. Die Bestimmung wurde bei der vorhandenen Zimmertemperatur und bei etwa 50° oder der Temperatur des siedenden Wassers ausgeführt; die Abhängigkeit des Ausdehnungscoëfficienten von der Temperatur ist nicht ermittelt.

[1]) KOPP, LIEB. Ann. 81, pag. 1. 1852; Phil. Mag. (4) III, pag. 268; Ann. de chim. et phys. (3) 54, pag. 338.

Tabelle von Kopp.

	Mittlerer cubischer Ausdehnungscoëfficient		Mittlerer cubischer Ausdehnungscoëfficient		Mittlerer cubischer Ausdehnungscoëfficient
Kupfer . . .	0·000051	Eisenkies . .	0·000034	Cölestin . . .	0·000061
Blei	089	Rutil	032	Quarz	042
Zinn	069	Zinnstein . .	016		039
Eisen . . .	037	Eisenglanz . .	040	Ortoklas . . .	026
Zink	089	Magneteisen .	029		017
Cadmium . .	094	Flussspath . .	062	Weiches Natron-	
Wismuth . .	040	Arragonit . .	065	glas	026
Antimon . .	033	Kalkspath . .	018	Weiches engl.	
Schwefel . .	183	Bitterspath . .	035	Natronglas . .	024
Bleiglanz . .	068	Eisenspath . .	035	Schwer schmelz-	
Zinkblende . .	036	Schwerspath .	058	bares Kaliglas .	021

Die Ausdehnung des Eises wurde zuerst durch Placidus Heinrich[1]) untersucht. Er fand, dass sich das Eis mit abnehmender Temperatur zusammenzieht, und zwar ist nach diesen Versuchen die Länge bei $-t^\circ$

$$l_{-t} = l_o(1 - 0{\cdot}0000245 \cdot t).$$

Spätere Versuche haben gezeigt, dass dieser Werth des Ausdehnungscoëfficienten viel zu klein ist. Schumacher, Pohrt und Moritz[2]) haben die Längenausdehnung des Eises gemessen, indem sie den Abstand zweier Stahlbolzen, die in dem Eise eingefroren waren, bei verschiedenen Temperaturen bestimmten. Es ergab sich bis zur Temperatur $-22°$.

$$l_{-t} = l_o(1 - 0{\cdot}0000518 \cdot t).$$

Der Werth des Ausdehnungscoëfficienten ist hier doppelt so gross, als der von Placidus Heinrich gefundene.

Mit dem grösseren Werthe in Uebereinstimmung ist das Resultat, welches Plücker und Geissler[3]) für die cubische Ausdehnung des Eises fanden. In dem Gefäss eines Quecksilberthermometers befand sich eine mit Wasser gefüllte Glaskugel, welche eine feine Oeffnung hatte, um Quecksilber ein- und austreten zu lassen und so die Ausdehnung des Wassers zu messen. Der Apparat wurde in Alkohol, der von Kältemischungen umgeben war, eingetaucht. Beim Gefrieren des Wassers wurde die Glaskugel zwar gesprengt, es behinderte dies aber nicht die Untersuchung. Aus der Kenntniss der Ausdehnung des Quecksilbers und des Glases liess sich nach dem Gang des Thermometers die Zusammenziehung des Eises bei abnehmender Temperatur berechnen. Plücker und Geissler fanden für den cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Eises 0·0001585, sodass die lineare Ausdehnung sich durch die Formel

$$l_{(-t)} = l_o(1 - 0{\cdot}0000528 \cdot t)$$

berechnen lässt.

4) Methode und Versuche von Fizeau.

Eine sehr genaue Methode zur Bestimmung der Ausdehnung ist von Fizeau[4]) angewandt; dieselbe beruht auf der Aenderung einer Interferenzerscheinung, die die Newton'schen Ringe hervorbringt.

---

1) Placidus Heinrich, Gillert Ann. 24, pag. 228. 1807.

2) Schumacher, Pohrt, Moritz, Mémoires de l'Academie de St. Pétersbourg IV, pag. 297. 1850.

3) Plücker und Geissler, Pogg. Ann. 86, pag. 238. 1852.

4) Fizeau, Ann. de chim. et de phys. IV sér. Bd. 2, pag. 143. 1864; 8, pag. 335. 1866; Pogg. Ann. 123, pag. 515. 1864; 128, pag. 571. 1866.

Die zu untersuchende Substanz, welche etwa 10 *mm* lang ist und zwei polirte Endflächen besitzt, von denen die eine schwach gekrümmt ist, ruht auf dem Tisch eines Dreifusses, dessen Füsse aus drei Schrauben bestehen, die den Tisch nahe am Umfange durchsetzen und in stumpfen Spitzen nach oben und unten endigen. Auf den oberen Spitzen ruht eine ebene Glasplatte, deren Abstand von der oberen schwach gekrümmten Fläche der Substanz durch die Schrauben regulirt wird. Beleuchtet man dieses System mit monochromatischem Licht, z. B. einer Natronflamme, so zeigen sich in Folge der Interferenz, welche die an der unteren Fläche der Glasplatte und der oberen Fläche der Substanz reflektirten Strahlen mit einander bilden, die NEWTON'schen hellen und dunklen Ringe. Der Gangunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden dunklen Ringen beträgt die halbe Wellenlänge der angewandten Lichtart, für Natronlicht ist diese $\frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}0002944$ *mm*. Tritt eine gegenseitige Verschiebung der Flächen ein, an denen die Interferenz auftritt, so folgt das System der Interferenzcurven dieser Verschiebung. Wird z. B. der Abstand der beiden Flächen an einer Stelle, an der Dunkelheit herrscht, um $\frac{\lambda}{4}$ des benutzten Lichtes geändert, so wird jetzt diese Stelle hell erscheinen. Hat man daher auf der Glasplatte eine Marke angebracht, so werden an dieser Marke, wenn der Abstand von Substanz und Glasplatte sich continuirlich ändert, die dunklen und hellen Ringe langsam vorbeiwandern, und man weiss, dass für jeden Doppelring (hellen und dunklen Ring), welcher vorbeigewandert ist, die Entfernung von Glasplatte und Substanz sich um 0·0002944 geändert hat. Da man aber noch den zehnten Theil des Abstandes zweier dunkler Ringe von einander bestimmen kann, so ist es möglich, noch eine Entfernungsänderung von 0·00002944 *mm* zu messen.

Der erwähnte Dreifuss mit Substanz und Glasplatte wird in einen Raum von constanter Temperatur gebracht und die Lage der NEWTON'schen Ringe bestimmt; hierzu dienten bei FIZEAU 10, bei BENOIT[1]) 25 Fixpunkte, die auf der Glasplatte angebracht waren. Erfährt dann der Apparat eine Temperaturerhöhung, so wird die Dicke der Luftschicht zwischen der Substanz und der Glasplatte sich ändern und damit eine Verschiebung der Ringe eintreten. Durch die Ausdehnung der Schrauben des Metalldreifusses wird die Dicke der Luftschicht vergrössert, durch die Ausdehnung der Substanz wird diese Dicke verkleinert. Dehnt sich die Substanz stärker als das Metall aus, so wird mit wachsender Temperatur die Dicke der Luftschicht geringer und die NEWTONschen Ringe werden dann, wenn die obere Fläche der Substanz schwach convex ist, nach aussen wandern. Man erhält also durch die Beobachtung die Differenz der Ausdehnung der Metallschrauben und der Substanz.

Hat man beobachtet, dass f dunkle Ringe an der Marke vorbeigewandert sind, so ist $f \cdot \frac{\lambda}{2}$ die scheinbare Ausdehnung der Substanz für das Temperaturintervall von 0 bis τ°. Ist daher

l die Länge der Substanz bei 0°,
e „ Dicke „ Luftschicht „ 0°,
E „ wirksame Schraubenlänge bei 0°, also $E = e + l$,
α der lineare Ausdehnungscoëfficient der Substanz,
β „ „ „ „ Schrauben,

[1]) BENOIT, Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et des Mésures. I. 1881. In dieser Arbeit ist eine genaue Beschreibung der FIZEAU'schen Methode mitgetheilt.

so ist die Länge der Substanz bei $\tau^\circ = l(1 + \alpha \cdot \tau)$
„ „ „ Schrauben „ „ $= E(1 + \beta\tau)$
„ Dicke „ Luftschicht „ „ $= E(1 + \beta\tau) - l(1 + \alpha\tau)$.

Die Aenderung, welche die Dicke der Luftschicht durch die Temperaturerhöhung von 0 auf τ° erfahren hat, ist daher

$$f \cdot \frac{\lambda}{2} = E \cdot \beta\tau - l \cdot \alpha \cdot \tau.$$

Um den Ausdehnungscoëfficienten β der Schrauben zu bestimmen, nimmt man die Substanz von dem Tische des Dreifusses fort und bringt die Interferenz durch die Reflexion an der unteren Seite der Glasplatte und der polirten oberen Seite des Tischchens hervor und beobachtet bei einer bestimmten Temperaturdifferenz die Verschiebung der dunklen Ringe.

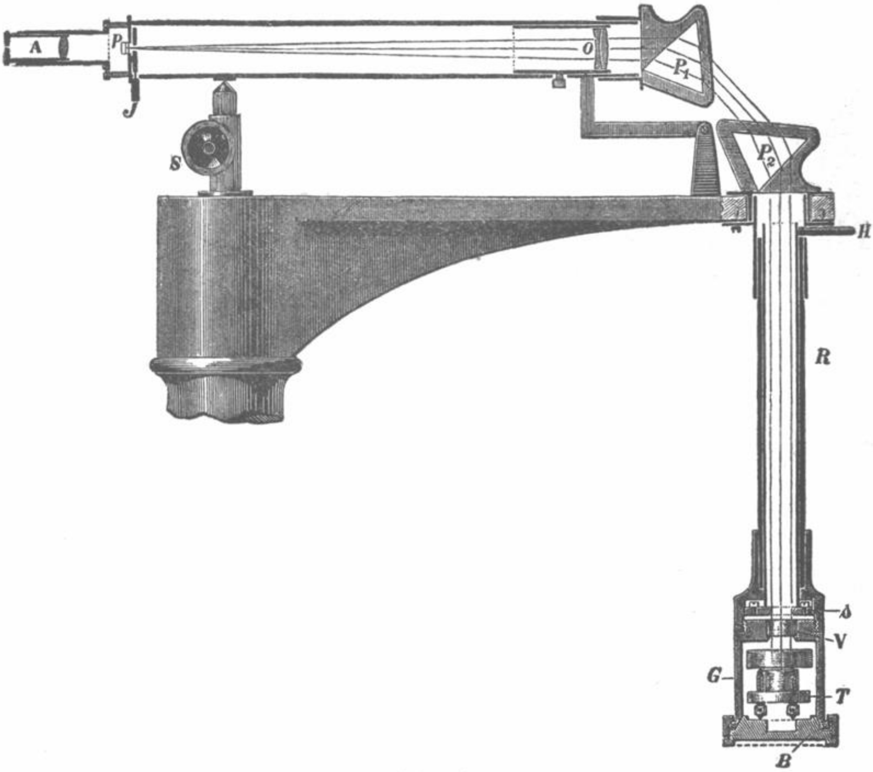
5) Verbesserung der Fizeau'schen Methode durch Abbe.

Die Versuchsmethode von Fizeau hat durch Abbe[1]) eine Abänderung erfahren, welche mehrere Vortheile gegenüber der Fizeau'schen Methode besitzt. Es ist bei der Fizeau'schen Methode nothwendig, die Zahl der vorbeiwandernden Ringe zu zählen. Da die Dauer der Temperaturerhöhung mehrere Stunden in Anspruch nehmen kann, ist dies mühsam; nach der Abbe'schen Methode wird die ganze Zahl der vorbeigewanderten Interferenzstreifen berechnet und nur die Bruchtheile werden beobachtet. Es genügt hierzu am Anfange und am Ende der Beobachtung, wenn keine Temperaturänderung mehr eintritt, die Stellung der Interferenzstreifen gegenüber einer Marke zu bestimmen. Die Bestimmung dieser Stellung geschieht mikrometrisch und liefert so eine grössere Genauigkeit. Ferner benutzt Abbe spectroskopisch zerlegtes Licht, welches gegenüber dem Flammenlicht den Vorzug grösserer Monochromasie besitzt, und endlich wendet Abbe nicht die Newton'schen Ringe, sondern geradlinige äquidistante Interferenzlinien an, gegenüber denen sich die Stellung einer Marke sehr genau bestimmen lässt. Zur Erzeugung dieser Interferenzen wird die zu untersuchende Substanz, die etwa 10 *mm* Länge besitzt, an einem Ende eben abgeschliffen und auf das Tischchen so gelegt, dass die ebene Endfläche nach oben kommt. Auf die drei Schraubenspitzen des Dreifusses wird eine schwach keilförmige Glasplatte gelegt, die auf ihrer unteren Seite ein kleines Silberscheibchen als Marke trägt. Die Luftschicht zwischen der oberen Fläche der Substanz und der unteren Fläche der Glasplatte wird so regulirt, dass sie schwach keilförmig ist; hierdurch entstehen parallele äquidistante Interferenzstreifen, deren Lage gegenüber dem Silberschichtchen bestimmbar ist. Da die Glasplatte selbst keilförmig ist, wird das an der oberen Fläche dieser Platte reflektirte Licht seitlich abgelenkt und dadurch unschädlich.

In den Fig. 501 und 502 ist die Einrichtung des Apparates von Abbe, speciell der Strahlengang, skizzirt. Das Fernrohr mit dem Objectiv O ist um eine horizontale Axe drehbar und kann durch die Schraube S gehoben und gesenkt werden. Das Fernrohr dient nicht nur zur Beobachtung, sondern auch zur Beleuchtung des Interferenzapparates. Deshalb ist in der vorderen Brennebene des Fernrohrobjectivs O ein total reflektirendes Prisma p angebracht, welches von der seitlich befestigten Geissler'schen Röhre, Fig. 502, Licht empfängt.

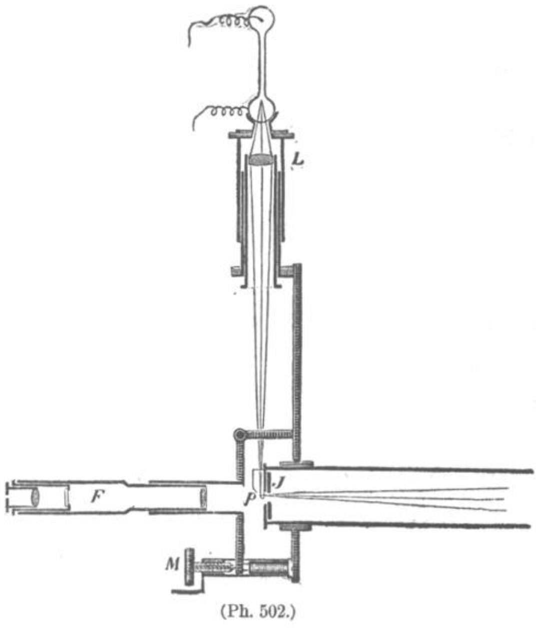
[1]) Weidmann, Wied. Ann. 38, pag. 453. 1889. — Pulfrich, Zeitschr. f. Instrk. 1893. Diese Abhandlung giebt die definitive Anordnung des Apparates und eine detaillirte Beschreibung der Abbe'schen Methode.

Durch die Beleuchtungslinie L wird ein reelles Bild des kleinen Querschnittes der GEISSLER'sche Röhre mit longitudinaler Durchsicht auf das Reflexionsprisma p



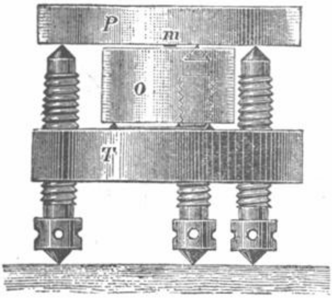
(Ph. 501.)

entworfen. Nachdem die Lichtstrahlen von p in das Fernrohr hineinreflektirt sind, werden sie durch das Objectiv O parallel gemacht und passiren dann zwei Flintglasprismen P_1 und P_2 mit horizontalen brechenden Kanten. Durch diese Prismen werden die Strahlen mittlerer Brechbarkeit um 90° nach unten abgelenkt. Da die Ablenkung für rothe Strahlen geringer, für blaue Strahlen grösser als 90° ist, kann man durch Heben oder Senken des Fernrohrs mittelst der Schraube S bewirken, dass die verschieden gefärbten homogenen Strahlenbündel das Prisma P_2 in vertikaler Richtung verlassen. Diese Strahlen durchsetzen dann eine Porcellanröhre R und gelangen in ein Messinggehäuse G, in welchem sich das schon beschriebene Tisch-



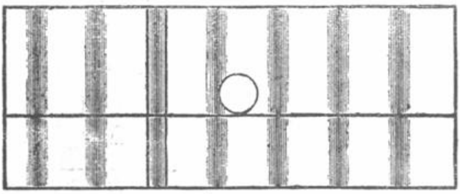
(Ph. 502.)

chen T mit Körper und Glasplatte zur Hervorbringung der Interferenzstreifen befindet. Dieses Tischchen mit Körper und Glasplatte ist in Fig. 503 besonders abgebildet; m stellt das oben erwähnte Silberscheibchen dar. Die von dem Interferenzapparat normal reflektirten Strahlen kehren auf dem bereits zurückgelegten Wege in das Fernrohr zurück und zeigen in der Focalebene des Objectivs O die angegebene Interferenzerscheinung.



(Ph. 503.)

Diese Interferenzerscheinung besteht aus äquidistanten hellen und dunklen Streifen, die bei richtiger Einstellung von oben nach unten verlaufen. Ein helles, rundes Scheibchen, durch die Reflexion von dem erwähnten, an der Glasplatte des Interferenzapparates befindlichen Silberscheibchen hervorgebracht, sieht man zwischen den Interferenzstreifen (Fig. 504). Die Lage dieses Scheibchens gegenüber den Streifen wird durch eine Mikrometervorrichtung gemessen. Diese besteht aus dem kleinen Fernrohr F (Fig. 502) mit Doppelfäden zur Einstellung und einer Messschraube M, die eine Trommel mit 100 Thln. trägt. Durch die Schraube M kann das Fernrohr F um eine vertikale Axe gedreht werden. Dreht man die Schraube M, so wandert der Doppelfaden in horizontaler Richtung über die Interferenzstreifen und das Scheibchen. Aus den Ablesungen an der Trommeltheilung erhält man bei den verschiedenen Einstellungen sowohl die Streifenbreite als auch den Abstand des Silberscheibchens von dem nächst gelegenen Interferenzstreifen, diesen Abstand ausgedrückt in Bruchtheilen der Streifenbreite.


(Ph. 504.)

Ohne noch näher auf die Einrichtung des Apparates einzugehen, möge nur noch gezeigt werden, wie sich aus der Beobachtung der Lage des Scheibchens bei zwei verschiedenen Wellenlängen die Zahl der für eine bestimmte Temperaturänderung an der Marke vorbeigewanderten Streifen berechnen lässt.

Allgemein ist die Dicke der keilförmigen Luftschicht an einer Stelle, wo ein dunkler Interferenzstreifen sich befindet, gleich $m \cdot \frac{\lambda}{2}$, wo m eine ganze Zahl bedeutet; der benachbarte Streifen entspricht demnach einer Dicke von $(m \pm 1)\frac{\lambda}{2}$ Für die Mitte eines hellen Streifens ist daher die Dicke der Luftschicht $(m \pm \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$.

Bestimmt man daher die Stellung des Silberscheibchens als Abstand desselben von der Mitte des zunächst angrenzenden hellen Streifens nach der Seite der grösseren Dicke der Luftschicht hin, so ist die Dicke der Luftschicht unterhalb der Mitte des Scheibchens gleich

$$d = \left(m + \frac{1}{2} + a\right)\frac{\lambda}{2},$$

wo a in Bruchtheilen des Abstandes zweier hellen Streifen ausgedrückt ist.

Angenommen, man habe bei den Temperaturen t und T diese Bestimmungen für die beiden Wellenlängen λ_1 und λ_2 ausgeführt, so hat man

$$\text{für } t;\quad d = \left(m_1 + \frac{1}{2} + a_1\right)\frac{\lambda_1}{2} = \left(m_2 + \frac{1}{2} + a_2\right)\frac{\lambda_2}{2},$$

$$\text{für } T;\quad D = \left(M_1 + \frac{1}{2} + A_1\right)\frac{\lambda_1}{2} = \left(M_2 + \frac{1}{2} + A_2\right)\frac{\lambda_2}{2}.$$

Daher

$$\Delta = D - d = (M_1 - m_1 + A_1 - a_1)\frac{\lambda_1}{2} = (M_2 - m_2 + A_2 - a_2)\frac{\lambda_2}{2}$$

oder wenn

$$\begin{matrix} M_1 - m_1 = n_1; & M_2 - m_2 = n_2; & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \mu \\ A_1 - a_1 = \alpha_1; & A_2 - a_2 = \alpha_2; & \end{matrix}$$

gesetzt wird

$$\Delta = (n_1 + \alpha_1)\frac{\lambda_1}{2} = (n_2 + \alpha_2)\frac{\lambda_2}{2}.$$

Die letzte Gleichung liefert

$$n_1 \cdot \mu - n_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \mu = c.$$

Da α_2 und α_1 echte Brüche sind, so ist auch c ein echter Bruch, wenn μ ein solcher ist. Die letzte Gleichung ist als diophantische zu behandeln und es sind die ganzzahligen Werthe von n_1 und n_2 zu bestimmen, welche derselben genügen; hierbei ist zu beachten, dass in Folge von kleinen Beobachtungsfehlern der Grössen $a_1, a_2 \ldots$ der Werth von c nur bis auf $\pm 0{\cdot}04$ genau bestimmt ist[1]).

Als Beispiel mögen die Beobachtungen am Quarz dienen, welcher senkrecht zur Axe geschnitten war und nahezu 10 *mm* dick war; es wurde Natriumlicht $\lambda_1 = 0{\cdot}0005892$ *mm*, und Lithiumlicht $\lambda_2 = 0{\cdot}0006702$ *mm* benutzt. Die Resultate waren:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 & a_1 = 0{\cdot}25 & a_2 = 0{\cdot}36 \\ T = 99{\cdot}97 & A_1 = 0{\cdot}76 & A_2 = 0{\cdot}69 \end{matrix}\right\} \text{ daher } \alpha_1 = 0{\cdot}51; \quad \alpha_2 = 0{\cdot}33; \quad \mu = 0{\cdot}8787.$$

Hiermit wird

$$n_1 \mu - n_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \mu = 0{\cdot}33 - 0{\cdot}51 \times 0{\cdot}88 = -0{\cdot}12.$$

Für n_1 ergeben sich die Werthe

$$1, 9, 17, 26, 34 \ldots$$

Welcher dieser Werthe n_1 gültig ist, ergiebt sich aus der Kenntniss der ungefähren Ausdehnung der Substanz. Der Ausdehnungscoëfficient der Quarzes $\perp$ zur Axe ist rund $8 \cdot 10^{-6}$, der Ausdehnungscoëfficient des Stahles ist $10{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$. Die Differenz beider Ausdehnungen ist die berechnete Grösse. Nimmt man für beide Substanzen eine Länge von 10 *mm* bei 0°, so ist die Längendifferenz bei 100° gleich $10 \cdot (10{\cdot}8 - 8)\,10^{-6} \cdot 100 = 2{\cdot}8 \cdot 10^{-3}$. Dieser Werth ist kleiner als $10 \cdot \frac{\lambda_1}{2} = 2{\cdot}946 \cdot 10^{-3}$ und gröser als $\frac{\lambda_1}{2} = 0{\cdot}2946 \cdot 10^{-3}$; folglich ist $n_1 = 9$.

Damit erhält man

$$n_2 = n_1 \cdot \mu - c = 7{\cdot}91 + 0{\cdot}12 = 8$$

$$\Delta = (n_1 + \alpha_1)\frac{\lambda_1}{2} = 9{\cdot}51\,\frac{\lambda_1}{2} = 9{\cdot}51 \cdot \mu \cdot \frac{\lambda_2}{2} = 8{\cdot}36\,\frac{\lambda_2}{2}.$$

Es wurde für Δ beobachtet

$$\Delta = 9{\cdot}51 \cdot \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{und} \quad 8{\cdot}33\,\frac{\lambda_2}{2}.$$

Man hat daher im Mittel

$$\Delta = f \cdot \frac{\lambda_1}{2} = 9{\cdot}50 \cdot \frac{\lambda_1}{2}.$$

Sobald $f\frac{\lambda}{2}$ bekannt ist, erhält man aus der früher angegebenen Gleichung

$$f \cdot \frac{\lambda}{2} = E \cdot \beta \cdot \tau - l \cdot \alpha \cdot \tau$$

---

1) Vergl. WEIDMANN, WIED. Ann. 38, pag. 474. 1889. Die Fehlerbestimmung gilt für die Beobachtungen WEIDMANN's und für das oben angegebene Beispiel.

die gesuchte Grösse α, den linearen Ausdehnungscoëfficienten der untersuchten Substanz[1]).

In der folgenden Tabelle sind die Werthe mitgetheilt, welche FIZEAU[2]) erhalten hat. Die erste Reihe giebt den wahren, linearen Ausdehnungscoëfficienten bei 40° an, die zweite die Aenderung desselben für 1° Temperaturerhöhung, die dritte den mittleren Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 100°, multiplicirt mit 100.

Wird der wahre Ausdehnungscoëfficient durch

$$\alpha = a + 2b \cdot t$$

dargestellt, so liefert

die erste Reihe α_{40},

" zweite " $\frac{d\alpha}{dt} = 2b$,

" dritte " $(a + b \cdot 100) \cdot 100$.

Ausdehnung fester Körper nach FIZEAU.

Substanzen	Linearer Ausdehnungscoëfficient bei 40° α_{40}	Aenderung für 1° $\frac{d\alpha}{dt} = 2b$	Mittlerer linearer Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und 100° multiplicirt mit 100. $100 \cdot \beta_{0 \cdot 100} = (a + b \cdot 100) 100$
Diamant	0·00000118	$1{\cdot}44 \cdot 10^{-9}$	0·000132
Gaskohle	00540	1·10	0551
Graphit von Bantongol	00786	1·01	0796
Anthracit von Pennsylvanien	02078	− 8·15	1996
Steinkohle von Charleroy	02782	2·95	2811
Paraffin von Rangoon, bei 56° schmelzend	27854	99·26	
Silicium, geschmolzen	00763	1·69	0780
Selen, "	03680	11·15	3792
Tellur, "	01675	5·75	1732
Arsen, sublimirt	00559	4·32	0602
Osmium, halb geschmolzen	00657	2·18	0679
Ruthenium, halb geschmolzen . . .	00963	2·81	0991
Palladium, geschmiedet, angelassen . .	01176	1·32	1189
Rhodium, halb geschmolzen	00850	0·81	0858
Iridium, geschmolzen	00700	0·79	0708
Platin, geschmolzen	00899	0·78	0907

1) Es ist an der Grösse f noch eine Correction anzubringen, weil die Luft bei verschiedenen Beobachtungstemperaturen verschiedene Brechungsexponenten besitzt. Mit wachsender Temperatur nimmt der Brechungsindex der Luft ab, in Folge dessen wächst die Wellenlänge. Wenn deshalb durch eine Temperatursteigerung eine Annäherung der beiden Flächen, die den Abstand e hatten, eintritt, so wird diese Annäherung durch die Wirkung der Aenderung des Brechungsindex der Luft noch vermehrt erscheinen, da die Verminderung des Brechungsexponenten immer wie eine Verkleinerung des Abstandes wirkt. Bezeichnet man mit e den Abstand der beiden Flächen, welche die Interferenz bewirken, mit n den Brechungsindex der Luft bei der niedrigeren, mit n' bei der höheren Temperatur, so ist, wenn F die Zahl der Interferenzstreifen bezeichnet, die vorbeigewandert wären, wenn die Luftschicht keine Temperaturänderung erlitten hätte,

$$F = f \mp \frac{2e}{\lambda}(n - n').$$

Das negative Vorzeichen gilt, wenn e mit wachsender Temperatur abnimmt.

2) FIZEAU, Compt. rend. 68, pag. 1125; POGG. Ann. 138, pag. 26. 1869.

Substanzen	Linearer Ausdehnungscoëfficient bei 40° α_{40}	Aenderung für 1° $\frac{d\alpha}{dt} = 2b$	Mittlerer linearer Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und 100° multiplicirt mit 100. $100 \cdot \beta_{0 \cdot 100} = (a + b \cdot 100) 100$
Platin-Iridium [1]	0·00000884	$0·76 \cdot 10^{-9}$	0·000892
Gold, geschmolzen	01443	0·83	1451
Silber, geschmolzen	01921	1·47	1936
Kupfer { gediegenes	01690	1·83	1708
Kupfer { künstliches	01678	2·05	1698
Messing [2]	01859	1·96	1879
Bronce [3]	01782	2·04	1802
Nickel [4]	01279	0·71	1286
Kobalt [4]	01236	0·80	1244
Eisen, weich	01210	1·85	1228
Eisen [4]	01188	2·05	1208
Meteoreisen	01095	1·75	1113
Gussstahl, französisch gehärtet . . .	01322	3·99	1362
Gussstahl, französich angelassen . . .	01101	1·24	1113
Gussstahl, englisch angelassen . . .	01095	1·52	1110
Gusseisen, graues	01061	1·37	1075
Zinn, von Mallacca [5].	02234	3·51	2269
Indium, geschmolzen	04170	42·38	4594
Blei, geschmolzen	02914	2·39	2948
Thallium, geschmolzen	03021	11·41	3135
Zink, destillirtes [5]	02918	— 1·27	2905
Cadmium, destillirtes [5]	03069	3·26	3102
Aluminium, geschmolzen	02313	3·29	2336
Magnesium, geschmolzen	02694	6·84	2762

W. VOIGT[6] hat den Ausdehnungscoëfficienten einer Reihe von Metallen in der Nähe von 30° bestimmt und auch für die meisten Metalle die Abhängigkeit von der Temperatur. Es wurde bei diesen Versuchen besonderes Gewicht auf die Reinheit der Metalle gelegt. Die Resultate sind durch die Formel

$$\alpha_t = [a + b(t - 30)]\, 10^{-6}$$

dargestellt, bei der α_t den linearen Ausdehnungscoëfficienten bei der Temperatur t darstellt. Es wurde erhalten

Metall	a	b	Bemerkungen [7]
Alluminium .	23·06	0·61	Zusammensetzung ist 97·53 Al; 1·33 Fe; 101 Si; 0·17 C.
Bronce . . .	17·75	0·0503	enthielt 88 Kupfer, 12 Zinn.
Cadmium . .	24·7		Die Abhängigkeit von der Temperatur ist nicht bestimmt; dasselbe gilt von den späteren angegebenen Metallen, Zink und Zinn.

[1] Iridium = 0·1, Platin = 0·9.

[2] Kupfer = 71·5; Zink 27·7; Zinn 0·3; Blei 0·5.

[3] Kupfer 86·3; Zink 4·0; Zinn 9·7.

[4] Durch Wasserstoff reducirt und comprimirt.

[5] Comprimirtes Pulver.

[6] W. VOIGT, WIED. Ann. 49, pag. 702. 1893.

[7] Die Bemerkungen sind entnommen aus VOIGT's Abhandlung, WIED. Ann. 48, pag. 675. 1893. Von dem gleichen Material, von dem die oben angegebenen Ausdehnungscoëfficienten ermittelt sind, hat VOIGT mehrere sonstige physikalische Eigenschaften bestimmt, z. B. Elasticitätscoëfficienten, specifische Wärme etc.

Metall	*a*	*b*	Bemerkungen
Eisen . . .	11·58	0·048	
Gold . . .	14·14	0·0239	
Kupfer . . .	17·09	0·0404	
Magnesium . .	26·05	0·064	
Nickel . . .	13·15	0·0413	
Silber . . .	19·25	0·043	
Stahl . . .	11·47	0·0519	
Wismuth . .	13·67	0·052	
Zink	25·1		Das Material ist gewöhnliches Zink; chemisch reines Zink war unbrauchbar, weil porös und brüchig.
Zinn	22·2		

CHATELLIER[1]) hat die Ausdehnung der Metalle bis zu hohen Temperaturen nach einer photographischen Methode verfolgt. Im Folgenden ist eine Zusammenstellung der Resultate gegeben; die Tabelle erhält den mittleren linearen Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 40° (nach FIZEAU) und zwischen 0 und ϑ°, ferner die Temperatur ϑ.

Metall	$\alpha_{0,40}$	$\alpha_{0,\vartheta}$	ϑ	Metall	$\alpha_{0,40}$	$\alpha_{0,\vartheta}$	ϑ
	0·0000	0·0000			0·0000	0·0000	
Weiches Eisen . .	120	145	1000°	Bronce mit 30 % „ .	—	295	700°
Harter Stahl . . .	110	140	„	„ „ 10 % Al .	—	230	900°
Graues Gusseisen .	106	175	„	Aluminium . . .	231	315	600°
Stahl mit 14 % Mn .	—	245	„	Silber	192	205	900°
Kupfer	170	200	„	77 % Ag, 23 % Cu .	—	180	800°
Messing	186	225	700°	Nickel	127	182	1000°
Bronce mit 10 % Sn .	—	220	900°	Platin	090	113	„
„ „ 20 % „ .	—	270	800°	Platin mit Iridium .	088	105	„

Es wächst, wie aus der Tabelle hervorgeht, der Ausdehnungscoëfficient bei allen Metallen mit wachsender Temperatur.

6) Einfluss der Spannung auf den Ausdehnungscoëfficienten.

DAHLANDER[2]) hat den Ausdehnungscoëfficienten von Metalldrähten bei verschiedenen Spannungen zu bestimmen gesucht und gezeigt, dass die Ausdehnungscoëfficienten mit wachsender Spannung wachsen. Die Versuche, welche sich auf die Metalle Kupfer, Messing, Neusilber, Eisen und Stahl bezogen, wurden mit einem ähnlichen Apparate, wie jenem von LA PLACE benutzten, ausgeführt. Die Ausdehnung bewirkte die Drehung eines festen Stabes; diese wurde mittelst der POGGENDORFF'schen Spiegelablesung, welche für diesen Zweck zuerst von J. MÜLLER[3]) benutzt war, bestimmt.

Für Messing und Neusilber wurden folgende Werthe erhalten.

Messingdraht 0·705 *mm* Durchmesser		Neusilberdraht 0·614 *mm* Durchmesser	
Spannung in Kilogramm	Mittlerer linearer Ausdehnungscoëfficient zwischen 15 u. 100°	Spannung in Kilogramm	Mittlerer linearer Ausdehnungscoëfficient zwischen 15 u. 1000°
0·732	0·000018579	1·250	0·000017011
1·420	18646	3·750	17311
1·917	18836	5·000	17395
2·396	18889	6·250	17452
2·875	18986	7·500	17913
3·833	19107		
4·732	19144		
6·250	19255		

1) CHATELLIER, Compt. rend. 108, pag. 1096. 1889. Beibl. 13, pag. 644. 1889.

2) DAHLANDER, POGG. Ann. 145, pag. 147. 1872.

3) J. MÜLLER, POGG. Ann. 140, pag. 672. 1868.

Der Ausdehnungscoëfficient wächst nach diesen Versuchen bei einer Spannung von 7 *kg* um 4 bis 5%. DAHLANDER zeigt nun, dass dieser Zuwachs im Wesentlichen durch die Aenderung des Elasticitätscoëfficienten mit der Temperatur bedingt wird.

Wird der Ausdehnungscoëfficient des Drahtes ohne Belastung mit α bezeichnet, so ist, wenn l die Länge des Drahtes bei der Temperatur t, l' die Länge desselben bei der Temperatur t' ist,

$$l' = l\,\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Wird der Draht bei der Temperatur t' durch das Gewicht P gespannt, so ist die Verlängerung f', welche der Draht erfährt,

$$f' = \frac{1}{E_{t'}} \cdot \frac{P \cdot l'}{a} = \frac{1}{E_{t'}} \cdot \frac{P \cdot l}{a} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t},$$

wo E_t' den Elasticitätscoëfficienten bei der Temperatur t' und a den Querschnitt des Drahtes bezeichnet. Die Länge des Stabes bei der Temperatur t' ist daher

$$L = l' + f' = l\left(1 + \frac{1}{E_{t'}} \cdot \frac{P}{a}\right) \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}. \tag{1}$$

Wird der Draht von der Länge l bei der Temperatur t durch das Gewicht P gespannt, so ist die eintretende Verlängerung f

$$f = \frac{1}{E_t} \cdot \frac{P \cdot l}{a}.$$

Durch die Temperaturerhöhung von t auf t' wird jetzt die Länge $(l+f)$ in L' vergrössert, welche durch den Ausdehnungscoëfficienten α' bestimmt ist.

$$L' = (l+f)\,\frac{1+\alpha' t'}{1+\alpha' t} = l\left(1 + \frac{1}{E_t} \cdot \frac{P}{a}\right) \frac{1+\alpha' t'}{1+\alpha' t}. \tag{2}$$

Es ist hierbei auf die kleine Aenderung, die der Querschnitt a durch die Erwärmung erfährt, keine Rücksicht genommen. Der Ausdehnungscoëfficient α' bezieht sich dann auf die thermische Ausdehnung bei der Spannung P. Wenn man annehmen darf, dass $L = L'$ ist, d. h. dass es gleichgültig ist, ob während der Ausdehnung oder erst nach der Ausdehnung in demselben Temperatur-Intervall die Spannung P wirksam ist, so erhält man aus den Gleichungen 1) und 2) eine Beziehung der Ausdehnungscoëfficienten α und α'.

Es ergiebt sich

$$\left(1 + \frac{1}{E_t}\,\frac{P}{a}\right)[1 + \alpha'(t'-t)] = \left(1 + \frac{1}{E_{t'}}\,\frac{P}{a}\right)[1 + \alpha(t'-t)]$$

und daraus, indem man höhere Potenzen von $\alpha(t'-t)$ und von $\frac{1}{E_t} \cdot \frac{P}{a}$ unberücksichtigt lässt

$$\alpha' - \alpha = \frac{P}{a(t'-t)} \cdot \left(\frac{1}{E_{t'}} - \frac{1}{E_t}\right).$$

DAHLANDER hat nun die Differenz der Ausdehnungscoëfficienten für verschiedene Belastungen nach der Gleichung

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P_2 - P_1}{a(t'-t)}\left(\frac{1}{E_{t'}} - \frac{1}{E_t}\right) \tag{3}$$

berechnet, indem er für die Aenderung der Elasticitätscoëfficienten die Resultate benutzte, welche von KOHLRAUSCH und LOOMIS[1]) erhalten waren.

Die Vergleichung ergab hinreichend gut übereinstimmende Werthe, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

---

[1]) KOHLRAUSCH und LOOMIS, POGG. Ann. 141, pag. 481. 1871.

Messingdraht 0·705 *mm* Durchmesser		
$P_2 - P_1$	$\alpha_2 - \alpha_1$ nach den Versuchen	$\alpha_2 - \alpha_1$ berechnet nach Gleichung (3)
0·618	0·000000067	0·000000130
1·185	257	223
1·664	310	314
2·143	407	404
3·101	528	584

Kupferdraht 0·706 *mm* Durchmesser		
$P_2 - P_1$	$\alpha_2 - \alpha_1$ nach den Versuchen	$\alpha_2 - \alpha_1$ berechnet nach Gleichung (3)
0·517	0·000000102	0·000000081
1·767	300	216
Eisendraht 0·878 *mm* Durchmesser		
1·250	0·000000054	0·000000073
2·500	172	146

7) Ausdehnung verschiedener Gläser.

REGNAULT[1]) hat eine Reihe von Gläsern verschiedener chemischer Zusammensetzung in Bezug auf ihre Ausdehnung untersucht und folgende Resultate gefunden:

No.	SiO_2	$Al_2O_3 + Fl_2O_3$	CaO	K_2O	Na_2O	PbO	Cub. Ausdehnungs-coëff.×100		Bemerkungen
1	54·16	0·52	0·36	9·23	0·90	34·62	0·002144	Krystallglas (Choisy le Roy)	aus einer Röhre von 14 *mm* innerem Durchmesser
2	53·83	0·97	0·78	7·98	2·54	34·08	2442		aus einem Capillarrohr in sphärischer Form geblasen
3	54·39	0·95	0·69	7·80	2·40	33·70	2328		aus einem Capillarrohr in cylindrischer Form geblasen
4	53·33	0·48	0·40	9·16	0·95	35·38	2270		a. ein. klein. Ballon v. 50 *mm* äusser. Durchm. u. 3 bis 4 *mm* Wandstärke
5	70·48	0·93	8·75	2·14	17·20		2713	Ordinäres (weisses) Glas	aus einem Rohre von 12 bis 14 *mm* Durchm. u. 3 bis 4 *mm* Wandstärke
6	69·75	1·92	8·59	2·60	16·30		2686		ähnlich wie No. 5, aber doppelte Wandstärke
7	70·95	4·06	5·74	5·67	10·41	3·16	2431		aus einem kleinen Ballon mit angeschmolzener Capillare
8	72·56	1·95	7·26	2·97	14·86		2619		aus einer Capillarröhre in Kugelform geblasen
9	72·31	1·41	5·88	4·18	15·29		2758		Wie No. 8; die Kugel ist häufig im Feuer gewesen
10	68·18	3·53	14·07	2·00	12·00		2324	Grünes Glas	Aus einer schwer schmelzbaren Röhre
11	71·37	0·33	9·36	17·23	1·79		2492	schwed. Glas	Aus einer sehr schwer schmelzbaren Röhre

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass die Ausdehnungscoëfficienten verschieden zusammengesetzter Gläser bedeutende Unterschiede (von 0·02144 bis 0·002758) zeigen können. Ferner ergiebt sich, dass das gleiche Glas je nach der Form, in der es verwandt wird, gleichfalls Unterschiede im Ausdehnungscoëfficienten aufweist. In den obigen Gläsern No. 1—4 sind die Unterschiede der chemischen Zusammensetzung nur gering; trotzdem kommen in den Ausdehnungscoëfficienten Unterschiede von über 10 % vor.

Nach späteren Untersuchungen von SCHOTT[2]) ist es wahrscheinlich, dass die zuletzt angegebene Differenz in verschiedenen Spannungszuständen der untersuchten Gläser begründet ist; wenigstens ergab die gleiche Glassorte für ein gespanntes Glas auch bei gleicher Form einen grösseren Ausdehnungscoëfficienten als für ein ungespanntes Glas. So wurde bei einem gewöhnlichen Silicat-

[1]) REGNAULT, Mémoires de l'Acad. Bd. 21, pag. 205.

[2]) SCHOTT, Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses 4. Apr. 1892.

Crown-Glas[1]) für den cubischen Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 100° gefunden

ungespanntes	Glas	0·000 02748
stark gespanntes[2])	„	2895.

Der Unterschied beträgt hier über 5%.

Ferner zeigte ein cylindrisches massives gespanntes Glasstück an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Ausdehnungscoëfficienten; der Ausdehnungscoëfficient war in der Axe des Stückes am kleinsten und wuchs, je mehr man sich dem Rande näherte.

Aus den mitgetheilten Beobachtungen REGNAULT's lässt sich noch nicht der Einfluss der einzelnen Bestandtheile des Glases auf die Grösse des Ausdehnungscoëfficienten erkennen; es wurde desshalb von SCHOTT eine grössere Anzahl von Gläsern in dieser Richtung untersucht. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle mitgetheilt.

Ausdehnungscoëfficienten verschieden zusammengesetzter Gläser.

No.	PbO	SiO_2	K_2O	Na_2O	Al_2O_3	B_2O_3	ZnO	BaO	Li_2O	P_2O_5	CaO	As_2O_5	MgO	Cub. Ausdehnungscoëfficient beobachtet	Cub. Ausdehnungscoëfficient berechnet
1						41	59							0·0000110	0·0000110
2		51·3			4·5	14	5	25				0·2		137	149
3	25	32·8	3	1	7	31						0·2		157	175
4	32				12	56								161	162
5					30	64			6					168	168
6		72		11	5	12								177	194
7				8	18·0	69·1		4·7				0·2		202	191
8	46·4	45·2	7·5	0·2	0·5							0·2		236	244
9	33	54·3	8	3		1·5						0·2		238	241
10		48·8	7·5	1·0		3	10·3	29				0·4		238	220
11		68.3	9·5	10		10	2					0·2		239	240
12	69	28·4	2·5									0·1		241	251
13		67·5		14	2·5	2	7				7			241	254
14		69·1	16	4		2·5					8	0·4		265	272
15					8	3		28		59·5		1·5		261	246
16	10	51·7	9·5	1·5			7	20				0·3		270	240
17	13·1	68·2		16·5			2					0·2		271	263
18		68·1	16	5		3·5	7					0·4		275	254
19			12		10	3				70·5		0·5	4	279	295
20	80	20												280	256
21		73·2		18·5							8	0·3		290	284
22		65·5	15	5		2·5	2	9·6				0·4		289	263
23		64·3	20	3		1·5					11	0·2		292	307
24		71·7	13	10	2						3	0·3		300	294
25	25	54·8	11·5	6	2·5							0·2		305	289
26		69·7	25								5	0·3		305	294
27		64·3	15	9	2·5						9	0·2		314	327
28	6	57·8	14	10	4		8					0·2		324	319
29	34	43·0	11	8	4									328	330
03		57	13	13	12		5							337	335

[1]) Die Zusammensetzung dieses Glases ist unter No. 18 der folgenden Tabelle angegeben.

[2]) Das Glas war in freier Luft als cylindrischer Stab abgekühlt und zeigte in Folge dessen starke Spannung.

Um eine genauere Kenntniss über den Einfluss der verschiedenen Bestandtheile zu erhalten, wurden die Ausdehnungscoëfficienten nach der Formel

$$\alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \ldots$$

berechnet[1]); hier bedeuten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die Gewichtsmengen der einzelnen Bestandtheile, die in dem Glase vorhanden sind; die Werthe $x_1, x_2 \ldots$ wurden aus den Beobachtungen berechnet. Man erhielt:

	$x \cdot 10^{-7}$		$x \cdot 10^{-7}$		$x \cdot 10^{-7}$
Na_2O . .	10·0	BaO . . .	3·0	P_2O_5 . .	2·0
K_2O . .	8·5	PbO . . .	3·0	ZnO . . .	1·8
CaO . .	5·0	As_2O_5 . .	2·0	SiO_2 . .	0·8
Al_2O_3 . .	5·0	Li_2O . .	2·0	B_2O_3 . .	0·1
				MgO . .	0·1

Die mit diesen Werthen berechneten Resultate sind in der letzten Vertikalreihe der obigen Tabelle angegeben. Aus den Werthen für x ergiebt sich, dass die Alkalien Na_2O und K_2O grosse Ausdehnungscoëfficienten bewirken, dagegen B_2O_3 einen kleinen Ausdehnungscoëfficienten des Glases herbeiführt. Da der Werth von x für B_2O_3 beträchtlich kleiner als für P_2O_5 und SiO_2 ist, so haben Boratgläser im Allgemeinen einen kleineren Ausdehnungscoëfficienten als Phosphat- und Silicat-Gläser.

8) Ausdehnung des Kautschuks.

Ein abnormes Verhalten zeigt der Kautschuk. Erwärmt man ein Stück eines gedehnten Kautschukstabes oder -Rohres, so wird dasselbe nicht länger, sondern kürzer. Sehr deutlich lässt sich dies wahrnehmen, wenn man nach WEINHOLD[2]) einen langen Kautschukschlauch aufhängt, denselben auf mehr als die dreifache Länge durch Gewichte dehnt und dann einen kräftigen Dampfstrom durch den Schlauch hindurchgehen lässt. Der Schlauch zieht sich dann so stark zusammen, dass die spannenden Gewichte um eine sehr deutlich sichtbare Strecke gehoben werden.

Nachdem schon lange dies abnorme Verhalten des Kautschuks bekannt war[3]), ist in neuerer Zeit durch BJERKÉN[4]) gezeigt, dass auch schon bei kleinen Dehnungen ein negativer thermischer Ausdehnungscoëfficient auftritt. In der folgenden Tabelle bezeichnet L_0 die Länge des unbelasteten Kautschuks, L die Länge bei der Belastung von $P\,gr$.

Belastung in *gr* P	Länge des Kautschuks in *mm* L	$\frac{L - L_0}{L_0}$	Linearer thermischer Ausdehnungs-coëfficient
0	$33{\cdot}0 = L_0$		
50	36·0	0·1	— 0·00012
200	49·9	0·5	— 0·00032
350	77·3	1·3	— 0·00051

Der Ausdehnungscoëfficient ist, wie man sieht, schon negativ, wenn die Verlängerung in Folge der Belastung von 50 *gr* nur 0·1 der ursprünglichen Länge beträgt.

---

1) WINKELMANN u. SCHOTT, WIED. Ann. 51, pag. 736. 1894.

2) WEINHOLD, Physik. Demonstrationen, pag. 387. Leipzig 1887.

3) JOULE, Phil. Trans. 149, pag. 107. 1860.

4) BJERKÉN, WIED. Ann. 43, pag. 817. 1891.

Die Volumänderung des Kautschuks mit wachsender Temperatur ist eine normale; d. h. mit wachsender Temperatur wächst das Volumen, wie aus den Versuchen von LEBEDEFF[1]) hervorgeht.

Temperatur	Specifisches Gewicht des nicht gespannten Kautschuks	Temperatur	Specifisches Gewicht des gespannten Kautschuks
11°	0·94500	12·5°	0·94444
16·5°	0·94513	18·5°	0·94057
20°	0·93932	24·5°	0·93680
24·5°	0·93665	30°	0·93351
29·5°	0·93332	35°	0·93004

Trotzdem also beim gespannten Kautschuk der thermische lineare Ausdehnungscoëfficient negativ ist, ist doch der cubische Ausdehnungscoëfficient positiv. Daraus folgt, dass der gespannte Kautschuk sich in thermischer Hinsicht nach verschiedenen Richtungen verschieden verhält; in der Spannungsrichtung zieht sich der Kautschuk bei Erwärmung zusammen, senkrecht zur Spannungsrichtung dehnt er sich aus.

Geht man von der Gleichung aus, die DAHLANDER entwickelt hat, nämlich (pag. 61)

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P_2 - P_1}{a(t' - t)}\left(\frac{1}{E_{t'}} - \frac{1}{E_t}\right),$$

so ergiebt sich, dass, wenn $P_2 > P_1$ und ebenso $t' > t$ ist, die rechte Seite der Gleichung nur dann positiv ist, wenn der Elasticitätscoëfficient E_t grösser ist als der Coëfficient $E_{t'}$; d. h. wenn der Elasticitätscoëfficient mit wachsender Temperatur abnimmt, wird $\alpha_2 > \alpha_1$, oder der thermische Ausdehnungscoëfficient wächst mit wachsendem Druck. Sind aber die beiden Ausdehnungscoëfficienten wie beim Kautschuk negativ, und ist der absolute Werth von α_2 grösser als der von α_1, so wird $\alpha_2 - \alpha_1$ negativ und die obige Gleichung kann nur bestehen, wenn $E_t' > E_t$ ist, wenn also der Elasticitätscoëfficient mit wachsender Temperatur zunimmt.

Diese Zunahme des Elasticitätscoëfficienten des Kautschuks mit wachsender Temperatur glaubt SCHMULEWITSCH[2]) nachgewiesen zu haben. Er untersuchte die Tonhöhe, die ein gespannter Kautschukstrang bei verschiedenen Temperaturen in Folge von Transversalschwingungen gab, und fand, dass die Tonhöhe mit wachsender Temperatur steigt. Würde keine sonstige Aenderung eintreten, so müsste man allerdings aus diesen Versuchen folgern, dass mit wachsender Temperatur die Elasticität zunimmt. Indessen ändert sich mit wachsender Temperatur die Spannung des Kautschukstranges, und zwar nimmt, da der gespannte Kautschuk in Folge der Temperatursteigerung sich zu verkürzen strebt, die Spannung zu, wenn keine Verkürzung eintreten kann; die Spannungszunahme bedingt aber eine Vergrösserung der Schwingungszahl, so dass, wie schon RUSSNER[3]) hervorgehoben hat, die Versuche von SCHMULEWITSCH nicht beweisend sind.

Auch die Versuche von GRAETZ[4]), der durch Torsionsschwingungen eine Zunahme des Elasticitätscoëfficienten mit wachsender Temperatur zu finden glaubte, geben keine Entscheidung. Denn da der gedehnte Kautschuk in der Längs-

1) LEBEDEFF, Beibl. 6, pag. 201. 1882.

2) SCHMULEWITSCH, POGG. Ann. 144, pag. 280. 1871.

3) RUSSNER, CARL's Rep. 18, pag. 206. 1882; WIED. Ann. 43, pag. 533. 1891.

4) GRAETZ, WIED. Ann. 43, pag. 354. 1891.

und Querrichtung nicht die gleiche Elasticität besitzt, wie aus Beobachtungen von KUNDT[1]) hervorgeht, der nachwies, dass gespannter Kautschuk Dichroismus zeigt, so lässt sich aus Torsionsschwingungen kein Schluss auf die Elasticität in der Zugrichtung ziehen. Denn die Torsionsschwingungen werden nicht allein durch die Elasticität der Längs-, sondern auch durch die der Querrichtung bedingt, und es ist unbekannt, ob und in welcher Weise sich das Verhältniss der Längendilatation zur Quercontraction beim Kautschuk mit der Temperatur ändert.

EXNER[2]) maass die Schallgeschwindigkeit im Kautschuk bei verschiedenen Temperaturen. Eine Kautschukschnur wurde durch einen Faden gespannt; die Spannung wurde durch Abbrennen des Fadens plötzlich aufgehoben und mit Hilfe eines HIPP'schen Chronoskopes die Zeit gemessen, welche die Contractionswelle brauchte, um bis an das andere Ende der Schnur zu gelangen. Mit zunehmender Temperatur zeigte sich eine Abnahme der Schallgeschwindigkeit und daraus wurde auf eine Abnahme des Elasticitätscoëfficienten geschlossen. Diese Versuche von EXNER geben also das entgegengesetzte Resultat, wie die Versuche von SCHMULEWITSCH und von GRAETZ. Aber auch sie sind nicht entscheidend, weil man nicht weiss, in welcher Weise sich das Verhältniss der specifischen Wärmen des Kautschuks mit wachsender Temperatur verhält.

Eine Entscheidung über die Aenderung des Elasticitätscoëfficienten beim Zuge mit wachsender Temperatur ist von RUSSNER[3]) gegeben. RUSSNER hat die Verlängerung desselben Kautschukstranges durch die gleichen Gewichte bei verschiedener Temperatur gemessen. Da der Kautschuk bei der Belastung eine starke Nachwirkung zeigt, wurde die Verlängerung eine Minute nach der Belastung gemessen und dann von 5 zu 5 Minuten diese Messung wiederholt. Im Folgenden sind einige Beobachtungen wiedergegeben, wobei man sich darauf beschränkt hat, die Verlängerung nach der 1. und 20. Minute anzugeben.

Reiner, roher Kautschuk Länge 980 *mm*; Querschnitt 1·412 *qcm*				Schwarzer vulcanisirter Kautschuk Länge 1005 *mm*; Querschnitt 0·677 *qcm*			
Belastung in *gr*	Zeit in Min.	Temp. 19° Verlänger. in *mm*	Temp. 45° Verlänger. in *mm*	Belastung in *gr*	Zeit in Min.	Temp. 21° Verlänger. in *mm*	Temp. 60·5° Verlänger. in *mm*
20	1	1·97	2·90	10	1	2·35	2·77
	20	2·80	5·25		20	3·10	3·53
40	1	4·85	8·30	20	1	5·57	6·32
	20	6·10	11·07		20	6 50	7·25
60	1	8·11	14·20	30	1	8·36	10·13
	20	9·60	17·50		20	10·02	11·20
80	1	11·60	20·55	40	1	12·60	14·13
	20	13·22	24·05		20	13·70	15·30

Aus diesen Zahlen geht deutlich hervor, dass die Verlängerung durch die gleiche Belastung mit wachsender Temperatur ganz bedeutend wächst, und daraus folgt, dass der Elasticitätscoëfficient mit wachsender Temperatur abnimmt.

Die Gleichung von DAHLANDER (pag. 65) kann also für Kautschuk nicht bestehen. Die Voraussetzung, unter der dieselbe abgeleitet ist, trifft für Kautschuk nicht zu; denn es ist für die schliessliche Länge, die der Kautschuk annimmt, nicht gleichgültig, ob er zuerst erwärmt und dann gespannt wird, oder

[1]) KUNDT, POGG. Ann. 141, pag. 125. 1874.

[2]) EXNER, Wiener Ber. 69 II, pag. 102. 1874.

[3]) RUSSNER, l. c.

ob er zuerst gespannt und dann erwärmt wird. Angenommen, der Kautschuk habe bei 0° ohne Belastung die Länge l, durch eine Erwärmung von 0 auf 1° erfahre er die Verlängerung λ, und durch eine Spannung mit dem Gewichte 1 bei der Temperatur 1° die weitere Verlängerung δ_1; seine Gesammtlänge ist dann

$$l + \lambda + \delta_1 = L.$$

Wird dagegen bei der Temperatur 0° der Kautschuk durch das Gewicht 1 gespannt, so sei die Verlängerung δ_0, eine dann folgende Erwärmung auf 1° verkürzt den Kautschuk um λ' und seine Gesammtlänge ist

$$l + \delta_0 - \lambda' = L'.$$

Da $\delta_0 < \delta_1$, so ist auch $L' < L$.

Durch den Nachweis über die Abnahme des Elasticitätscoëfficienten ist auch die Erklärung hinfällig, die SCHMULEWITSCH von der abnormen Wärmeausdehnung des Kautschuks gegeben hat. Hiernach sollte sich der Kautschuk in Wirklichkeit mit wachsender Temperatur wie alle Körper ausdehnen, die gleichzeitige Zunahme des Elasticitätscoëfficienten sollte aber diese Ausdehnung verdecken und eine Zusammenziehung bewirken.

Berücksichtigt man, dass der Kautschuk, sobald er gedehnt ist, sich nach verschiedenen Richtungen verschieden verhält, dass er dann nicht mehr zu den isotropen Körpern gehört, so verliert er seine Ausnahmestellung, wie RUSSNER hervorgehoben hat; denn von den Krystallen ist bekannt, dass sie in verschiedenen Richtungen sich im Allgemeinen verschieden ausdehnen und dass auch in einzelnen Fällen eine Contraction in einer Richtung durch Temperaturerhöhung herbeigeführt wird.

9) Beziehungen zum Atomvolumen.

H. F. WIEBE[1]) hat eine Beziehung aufgestellt zwischen dem Atomvolumen und dem Ausdehnungscoëfficienten der festen Elemente. WIEBE betrachtet den Quotienten aus dem specifischen Gewichte s (bezogen auf Wasser = 1) und aus dem Atomgewicht A als den Raum, der der Masse eines Atomes zukommt. Der Quotient $\alpha : \frac{d}{A}$ stellt dann die Ausdehnung des Atoms, d. h. den auf das Atomvolumen bezogenen Ausdehnungscoëfficienten des Elementes dar. In der folgenden Tabelle sind die entsprechenden Grössen angegeben; der Ausdehnungscoëfficient ist der lineare.

Element	Spec. Gew. s	Atom-gew. A	Ausdehn.-coëfficient $\alpha \cdot 10^8$	$\frac{\alpha \cdot A}{s} \cdot 10^6$	Element	Spec. Gew. s	Atom-gew. A	Ausdehn.-coëfficient $\alpha \cdot 10^8$	$\frac{\alpha \cdot A}{s} \cdot 10_6$
Al . .	2·56	27·3	2313	247	Ag . .	10·5	107·66	1912	197
Si . . .	2·49	28·0	763	88	Cd . .	8·65	111·6	3069	396
S . . .	2·04	31·98	6413	1005	In . .	7·42	113·4	4170	637
Fe . .	7·8	55·9	1188	85	Sn . .	7·19	117·8	2234	361
Co . .	8·5	58·6	1236	85	Sb . .	6·7	122·0	1152	210
Ni . .	8·8	58·6	1279	85	Te . .	6·25	128·0	1675	343
Cu . .	8·8	63·3	1684	121	Os . .	21·4	198·6	657	61
Zn . .	7·15	64·9	2918	265	Ir . .	21·13	196·7	700	65
As . .	5·67	74·9	559	64	Pt . .	21·15	196·7	899	84
Se . .	4·6	78	3680	624	An . .	19·3	196·2	1443	147
Rn . .	11·3	103·5	963	88	Tl . .	11·86	203·6	3021	519
Rh . .	12·1	104·1	850	73	Pb . .	11·83	206·4	2924	510
Pd . .	11·5	106·2	1176	109	Bi . .	9·82	210·0	1346	288

[1]) H. F. WIEBE, Ber. der chem. Ges. XI, pag. 610. 1878; Beibl. 2, pag. 592. 1878.

Die Werthe von $\frac{\alpha \cdot A}{s}$ zeigen oft einfache Verhältnisse, wenn man die Elemente einer natürlichen Gruppe betrachtet; z. B. *As* : *Sb* : *Bi* = 1 : 3 : 4, ferner *Zn* : *Cd* = 2 : 3.

Ferner hat WIEBE Beziehungen der Ausdehnungscoëfficienten zum Schmelz- und Siedepunkt aufzustellen versucht, auf die wir nicht näher eingehen[1]).

III. Ausdehnung der Krystalle.

1) Versuche von MITSCHERLICH. MITSCHERLICH[2]) zeigte zuerst, dass die Krystalle, die dem regulären System nicht angehören, sich nach verschiedenen Richtungen verschieden ausdehnen. Er hatte »schöne Kalkspathkrystalle bei einer Temperaturverschiedenheit von 3° gemessen und einen gleichbleibenden Unterschied in den Winkeln von 30 Secunden erhalten.« Wenn der Winkel, den zwei Flächen eines Krystalles mit einander bilden, durch eine Temperaturänderung des Krystalls sich ändert, so folgt daraus, dass die Ausdehnung des Krystalles nicht nach allen Richtungen gleichmässig erfolgt ist. Um die Erscheinung genauer zu verfolgen, brachte MITSCHERLICH an seinem Goniometer eine Vorrichtung an, auf der der Krystall befestigt und in erwärmtes Quecksilber so eingetaucht wurde, dass nur die Fläche des Krystalls, die das Bild eines Gegenstandes reflektiren soll, hervorragt. Auf diese Weise erhielt MITSCHERLICH das Resultat, dass der innere Flächenwinkel an einer Kante des Kalkspathrhomboëders, der bei 10° C. 105° 3′ 59·5″ betrug, durch eine Erwärmung von 0 auf 100° C. um 8·34′ kleiner wurde. Bezeichnet man für die Temperaturerhöhung von 0—100° die Ausdehnung in der Richtung der Hauptaxe mit $1 + 100\,\alpha_1$, die Ausdehnung in der Richtung senkrecht zur Hauptaxe mit $1 + 100\,\alpha_2$, so ergiebt die obige Winkeländerung

$$\frac{1 + 100\,\alpha_1}{1 + 100\,\alpha_2} = 1{\cdot}00342$$

oder, wenn man von höheren Potenzen absieht

$$100\,(\alpha_1 - \alpha_2) = 0{\cdot}00342. \qquad (1)$$

Um die Grössen α_1 und α_2 zu erhalten, bestimmte MITSCHERLICH in Verbindung mit DULONG die cubische Ausdehnung des Kalkspaths und fand für den cubischen Ausdehnungscoëfficienten

$$100\gamma = 0{\cdot}00196. \qquad (2)$$

Denkt man sich einen Würfel von Kalkspath mit der Seite *a*, bei 0°, so geschnitten, dass die Hauptaxe senkrecht zu zwei Würfelflächen steht, so ist das Volumen[3]) des Würfels bei 100°

$$a^3(1 + 100\gamma) = a^3(1 + 100\alpha_1)(1 + 100\alpha_2)^2,$$

und indem man wieder von höheren Potenzen absieht,

$$100\gamma = 100\alpha_1 + 2 \cdot 100 \cdot \alpha_2 = 0{\cdot}00196. \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) ergiebt sich:

$$100\alpha_1 = 0{\cdot}002930$$
$$100\alpha_2 = -\,0{\cdot}000487.$$

---

[1]) H. F. WIEBE, Ber. der chem. Ges. XII, pag. 788, und 1761. 1879; Beibl. 3. pag. 483. 1879; 4, pag. 270. 1880.

[2]) MITSCHERLCH, POGG. Ann. 1, pag. 125. 1824; 10, pag. 137. 1827; 41, pag. 213 und 448. 1837.

[3]) Es ist vorausgesetzt, was durch spätere Versuche bewiesen wird, dass die Ausdehnung senkrecht zur Hauptaxe nach allen Richtungen die gleiche ist.

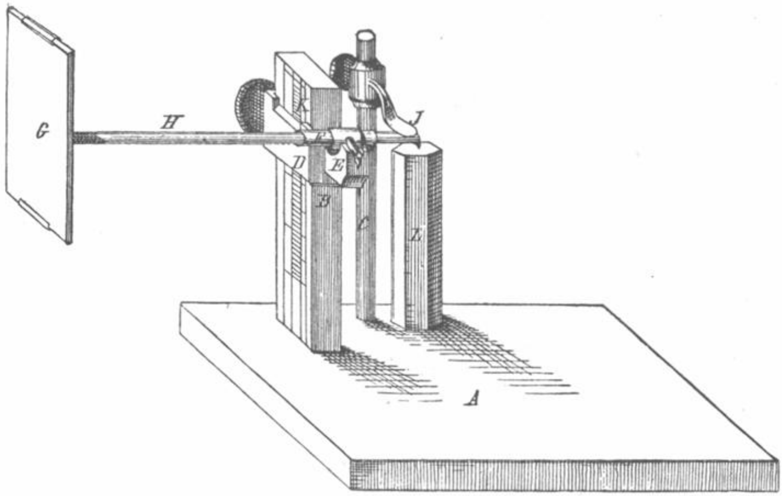
Aus diesen Zahlen geht hervor, dass der Kalkspath bei der Erwärmung in der Richtung seiner Hauptaxe sich ausdehnt, in der Richtung senkrecht zur Hauptaxe sich aber zusammenzieht. Dieses merkwürdige Resultat suchte MITSCHERLICH auf anderen Wegen direkt zu prüfen; er fand dasselbe bestätigt.

MITSCHERLICH dehnte seine Untersuchungen auf verschiedene Krystalle aus und gelangte hierdurch zu folgenden allgemeinen Sätzen:

1) Die Krystalle des regulären Systems dehnen sich nach allen Richtungen gleichmässig aus.

2) Die optisch einaxigen Krystalle, die zum quadratischen und hexagonalen System gehören, dehnen sich in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe anders, als in der Richtung der Nebenaxen aus, die auf der Hauptaxe senkrecht stehen; senkrecht zur Hauptaxe ist die Ausdehnung nach allen Richtungen die gleiche.

3) Die optisch zweiaxigen Krystalle dehnen sich nach den Richtungen der drei ungleichen krystallographischen Axen verschieden aus.



(Ph. 505.)

2) Versuche von PFAFF. PFAFF[1]) hat eine ausgedehnte Untersuchung der Krystalle durchgeführt, indem er die Ausdehnung der Krystalle nach verschiedenen Richtungen direkt bestimmte. Der Apparat, dessen sich PFAFF bediente, ist in Fig. 505 abgebildet. Auf einer ebenen eisernen Platte A stehen zwei eiserne Säulen B und C, welche von zwei mit Stellschrauben versehenen Hülsen umgeben sind. Die Hülse D hat einen Fortsatz in E, durch die ein Glasstab H unterstützt wird. Dieser Glasstab trägt an seinem einen Ende den Spiegel G, an dem anderen wird er durch die Feder J auf den Körper L gedrückt, dessen Ausdehnung untersucht werden soll. Da der Glasstab auf E um eine horizontale Axe drehbar ist, so wird eine Ausdehnung des Körpers L den Glasstab H aus der horizontalen Lage in eine geneigte überführen. Die Grösse dieses Neigungswinkels wird mittelst Fernrohr und Scala nach der POGGENDORFF'schen Spiegelmethode gemessen; aus dem Winkel kann man dann, wenn die Dimensionen des Apparates bekannt sind, die Ausdehnung von L berechnen. Der Krystall L und die Säule B wurden durch Schnee und Eis auf 0° und dann durch siedendes Wasser auf 100° gebracht. Die beobachtete Verschiebung giebt die Differenz

[1]) PFAFF, POGG. Ann 104, pag. 171 (1858); 107, pag. 148 (1859).

der Ausdehnung von L und B. Für den linearen Ausdehnungscoëfficienten des Eisens setzte PFAFF als Mittel aus früheren Beobachtungen 0·0000124.

Die Untersuchungen PFAFF's erstrecken sich auf fünf verschiedene Krystallsysteme; die Resultate, bei denen die Hauptaxe mit c bezeichnet ist, geben den linearen Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 100°.

1) Reguläres System. Die Ausdehnung ist nach allen Richtungen gleich.

Granat . . .	0·000008478	Schwefelkies .	0·000010084
Flussspath . .	19504	Bleiglanz . . .	18594
Magneteisen . .	9540	Analcim . . .	9261

2) Quadratisches System.

Die Ausdehnung senkrecht zur Hauptaxe ist unabhängig von der Richtung:

Zinnstein	nach	*a* . . .	0·000004526	Zirkon	nach	*a*	0·000011054
„	„	*c* . . .	4860	„	„	*c*	6264
Vesuvian	„	*a* . . .	9628				
„	„	*c* . . .	7872				

3) Hexagonales System.

Die Ausdehnung senkrecht zur Hauptaxe ist unabhängig von der Richtung:

Beryll	nach	*a* —	0·000000131	Kalkspath	nach	*a* —	0·000003105
„	„	*c* +	0·000001722	„	„	*c* +	0·000026261
Korund	„	*a*	6551	Spatheisenstein	„	*a*	5388
„	„	*c*	6875	„	„	*c*	16133
Turmalin	„	*a*	7732	Apatit	„	*a*	10006
„	„	*c*	9369	„	„	*c*	11254
Quarz	„	*a*	15147				
„	„	*c*	8073				

4) Rhombisches System.

Topas	nach	*a*	0·000008325	Schwerspath	nach	*a*	0·000014311
„	„	*b*	8362	„	„	*b*	22519
„	„	*c*	4723	„	„	*c*	14904
Arragonit	„	*a*	10781	Cölestin	„	*a*	19205
„	„	*b*	15903	„	„	*b*	18513
„	„	*c*	31358	„	„	*c*	14903

5) Monoklines System.

Adular	nach	*a* +	0·000015687	Diopsid	nach	*a*	0·000008125
„	„	*b* —	659	„	„	*b*	16963
„	„	*c* +	2914	„	„	*c* —	1707
Hornblende	„	*a*	8119	Gyps	„	*a*	15589
„	„	*b*	843	„	„	*b*	36278
„	„	*c*	9530	„	„	*c*	2272

PFAFF zieht aus diesen Angaben folgende Schlüsse:

a) Die Krystalle dehnen sich durch die Wärme meist sehr stark aus. Einzelne übertreffen die am meisten sich ausdehnenden Metalle, von denen keines eine so starke lineare Ausdehnung, wie z. B. der Gyps, zeigt.

b) Eine Contraction (negatives Vorzeichen bei den obigen Zahlen) findet nur selten statt und erreicht nie die Grösse der Ausdehnung nach anderen Richtungen. Es tritt desshalb durch die Erwärmung immer eine Volumvergrösserung ein.

c) Die Ausdehnung der Krystalle mit ungleichen Axen ist nach diesen Axen ebenfalls ungleich.

d) Die Grösse der Ausdehnung steht in keinem Verhältniss zur Grösse der Axen eines Krystalles. So ist z. B. beim Schwerspath krystallographisch $a < b < c$, thermisch dagegen $a < c < b$; beim Topas ist krystallographisch $a < c < b$, thermisch $c < a < b$.

e) Isomorphe Körper dehnen sich nicht gleich aus.

f) Das thermische und optische Verhalten der Krystalle steht nicht immer in einer bestimmten Beziehung zu einander. Für die Krystalle des hexagonalen Systems zeigt sich ein constantes Verhältniss in thermischer und optischer Beziehung insofern, als optisch negative Krystalle sich in der Richtung der Hauptaxe stärker ausdehnen als in der Richtung der Nebenaxen, und optisch positive Krystalle das Umgekehrte zeigen. Für das quadratische System gilt aber diese Beziehung nicht. Deshalb bleibt die Frage auch offen, ob alle Krystalle des hexagonalen Systems die erwähnte Eigenschaft besitzen, oder ob das von PFAFF beobachtete Resultat ein zufälliges ist, dem kein allgemeines Gesetz zu Grunde liegt.

3) Versuche von FIZEAU. Die ausgedehntesten Untersuchungen über die Ausdehnung der Krystalle sind von FIZEAU nach der früher angegebenen Methode angestellt. FIZEAU schloss aus den bekannten Erscheinungen über die Fortpflanzung des Lichtes, der Wärme etc. in den Krystallen, dass auch in Bezug auf die Ausdehnung die Krystalle bestimmte Gesetze befolgen müssten.

»Die Modifikationen der physikalischen Eigenschaften je nach den verschiedenen Richtungen befolgen indess eine gewisse Ordnung in Bezug auf die Lage der Krystallflächen und die allgemeine Symmetrie der Krystalle; und diese Ordnung tritt besonders hervor, wenn man gewisse feste Richtungen, die FRESNEL bei der Theorie der Doppelbrechung angewendet hat, in Betracht zieht. Ich meine die drei rechtwinkligen Richtungen, die man Elasticitätsaxen nennt und um welche sich nicht allein alle optischen Erscheinungen der Doppelbrechung ein- und zweiaxiger Krystalle in vollkommener Ordnung gruppiren, sondern auch die hauptsächlichsten Symmetriegesetze der verschiedenen Krystallsysteme, die Beobachtungen über die tönenden Schwingungen krystallisirter Platten, die Entdeckungen SENARMONT's über die Fortpflanzung der Wärme in Krystallen und endlich die Beobachtungen FRESNEL's und MITSCHERLICH's über die ungleiche Ausdehnung mehrerer krystallisirter Körper. Messungen der Ausdehnung an einer grossen Anzahl krystallisirter Körper, die ich weiterhin in dieser Arbeit beibringen werde, stimmen mit diesen an sich schon sehr sicheren Betrachtungen überein, um festzustellen, dass die hauptsächlichsten Phänomene der Ausdehnung der Krystalle von der Lage der Elasticitätsaxen abhängen in demselben Grade, wie die übrigen physikalischen Eigenschaften. Demgemäss muss man annehmen, dass es in einem krystallisirten Körper drei unter sich rechtwinklige Richtungen giebt, nach welchen sich drei Haupt-Ausdehnungen äussern; die eine dieser Richtungen repräsentirt die grösste Linear-Ausdehnung der Substanz, die zweite die kleinste und die dritte eine mittlere. Die combinirten Effekte dieser drei Ausdehnungen sind es, welche zu den mannigfachen Ausdehnungen in anderen Richtungen Anlass geben[1]).«

Es ist zu bemerken, dass bei den Krystallen, die nach verschiedenen Richtungen eine ungleiche Ausdehnung zeigen, für alle Punkte eine seitliche

[1]) FIZEAU, POGG. Ann. 128, pag. 565. 1866; Compt. rend. 62, pag. 1101.

Verschiebung durch die Ausdehnung bewirkt wird; nur für die Punkte, die in den Richtungen der Hauptausdehnungen liegen, tritt eine solche Verschiebung nicht ein. Denkt man sich daher aus einem Krystall eine Kugel geschnitten, und parallel zu den Richtungen der Hauptausdehnungen durch den Mittelpunkt der Kugel ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, so werden die Punkte, welche auf den Axen liegen, auch bei der Ausdehnung auf denselben bleiben; wird aber von einem anderen Punkte der Oberfläche vor und nach der Ausdehnung eine Verbindungslinie nach dem Mittelpunkte der Kugel gezogen, so fallen diese beiden Linien nicht zusammen. Man kann daher bei den Krystallen nicht ohne eine bestimmte Einschränkung von einer Ausdehnung nach einer bestimmten aber beliebigen Richtung sprechen, da die Verbindungslinie zweier Punkte je nach der Temperatur des Krystalls in Bezug auf die Axen verschieden orientirt ist. Die zu machende Einschränkung besteht darin, dass die Richtung als die bestimmende anzusehen ist, welche vor der Ausdehnung thatsächlich vorhanden war.

Um die Ausdehnung nach einer bestimmten Richtung als Function der drei Hauptausdehnungen zu erhalten, genügt die Eigenschaft, dass die ebenen Begrenzungsflächen der Krystalle auch bei der Erwärmung eben bleiben[1]).

Seien parallel zu den Hauptausdehnungsrichtungen des Krystalls die drei Coordinatenaxen gelegt, so dass die Moleküle, die auf diesen Axen liegen, bei der Erwärmung stets auf derselben bleiben. Die Coordinaten irgend eines Moleküls, welches in einer Krystallfläche liegt, seien vor der Erwärmung bei 0°

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

und nach der Erwärmung bei 1°

$$x,\ y,\ z.$$

Wird ferner

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

und

$$\xi = \rho \cdot \cos\alpha_1; \quad \eta = \rho \cdot \cos\alpha_2; \quad \zeta = \rho \cdot \cos\alpha_3$$

gesetzt, so ist durch α_1, α_2, α_3 die Richtung bestimmt, nach der die Ausdehnung gemessen werden soll.

Setzt man ebenso

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

so ist durch

$$\frac{r - \rho}{\rho} = \varkappa$$

der Ausdehnungscoëfficient des Krystalles für die zugehörige Richtung (α_1, α_2, α_3) dargestellt, der bestimmt werden soll.

Bezeichnet man die Ausdehnungscoëfficienten nach den drei Axen mit μ_1, μ_2, μ_3. so ist

$$\frac{x - \xi}{\xi} = \mu_1; \quad \frac{y - \eta}{\eta} = \mu_2; \quad \frac{z - \zeta}{\zeta} = \mu_3$$

oder

$$x = (1 + \mu_1)\xi; \quad y = (1 + \mu_2)\eta; \quad z = (1 + \mu_2)\zeta.$$

Damit wird

$$\varkappa = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2}} - 1 = \sqrt{(1 + \mu_1)^2 \cos^2\alpha_1 + (1 + \mu_2)^2 \cos^2\alpha_2 + (1 + \mu_3)^2 \cos^2\alpha_3} - 1.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von μ, so erhält man

$$\varkappa = \mu_1 \cos^2\alpha_1 + \mu_2 \cos^2\alpha_2 + \mu_3 \cos^2\alpha_3 + P,$$

[1]) Die im Folgenden gegebene Darstellung verdanke ich grossentheils Herrn Prof. Dr. W. Stahl in Aachen (1894 in Berlin gestorben).

wo P nur höhere Potenzen von μ enthält; da diese gegen die erste Potenz zu vernachlässigen sind, so folgt:

$$\varkappa = \mu_1 \cos^2 \alpha_1 + \mu_2 \cos^2 \alpha_2 + \mu_3 \cos^2 \alpha_3 \tag{3}$$

Hierdurch ist der Ausdehnungscoëfficient nach der Richtung, welche durch die Winkel α_1, α_2, α_3 bestimmt ist, als Function der drei Hauptausdehnungscoëfficienten μ_1, μ_2, μ_3 abgeleitet.

Um die Verschiebung, die durch die Ausdehnung eintritt, zu erhalten, sind die Winkel β_1, β_2, β_3 zu bestimmen, welche die Linie r mit den Axen bildet.

Es ist

$$x = r \cdot \cos \beta_1; \quad y = r \cdot \cos \beta_2; \quad z = r \cdot \cos \beta_3.$$

Da

$$r = \sqrt{(1 + \mu_1)^2 \xi^2 + (1 + \mu_2)^2 \eta^2 + (1 + \mu_3)^2 \zeta^2}$$

ist, so hat man

$$\cos \beta_1 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{(1 + \mu_1)\xi}{\rho}}{\frac{r}{\rho}} = \frac{(1+\mu_1) \cos \alpha_1 \cdot \rho}{r}$$

$$= \frac{(1 + \mu_1)(\cos \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \mu_1)^2 \cos^2 \alpha_1 + (1 + \mu_2)^2 \cos^2 \alpha_2 + (1 + \mu_3)^2 \cos^2 \alpha_2}}$$

Entwickelt man ebenso, wie früher, nach Potenzen von μ, indem man nur die ersten Potenzen beibehält, so findet man

$$\cos \beta_1 = (1 + \mu_1) \cos \alpha_1 [1 - (\mu_1 \cos^2 \alpha_1 + \mu_2 \cos^2 \alpha_2 + \mu_3 \cos^2 \alpha_3)]$$

und daraus wieder unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von μ

$$\cos \beta_1 = \cos \alpha_1 [(1 + \mu_1) - (\mu_1 \cos^2 \alpha_1 + \mu_2 \cos^2 \alpha_2 + \mu_3 \cos^2 \alpha_3)].$$

Unter Berücksichtigung des Werthes von $\varkappa$ wird endlich

$$\cos \beta_1 = \cos \alpha_1 [1 + \mu_1 - \varkappa].$$

Ebenso

$$\cos \beta_2 = \cos \alpha_2 [1 + \mu_2 - \varkappa]$$
$$\cos \beta_2 = \cos \alpha_3 [1 + \mu_3 - \varkappa].$$

Durch die vorstehenden Gleichungen ist die Verschiebung bestimmt; dieselbe ist, weil $\mu - \varkappa$ nur wenig von Null verschieden ist, immer nur klein. Für die Axen liefern die letzten Gleichungen die Verschiebung Null, wie man leicht sieht; denn wird die Ausdehnung nach der x-Axe bestimmt, so ist

$$\cos \alpha_1 = 1; \quad \mu_1 = \varkappa,$$
$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0.$$

Daher

$$\cos \beta_1 = \cos \alpha_1 = 1,$$
$$\cos \beta_2 = \cos \beta_3 = 0.$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich leicht der cubische Ausdehnungscoëfficient, der mit χ bezeichnet werden möge. Der Cubus, der aus den Seiten ξ, η, ζ gebildet ist, hat das Volumen bei 0°

$$\xi \cdot \eta \cdot \zeta.$$

Nach der Erwärmung auf 1° ist das Volumen

$$x \cdot y \cdot z.$$

Der cubische Ausdehnungscoëfficient ist

$$\chi = \frac{x \cdot y \cdot z - \xi \cdot \eta \cdot \zeta}{\xi \cdot \eta \cdot \zeta} = (1 + \mu_1)(1 + \mu_2)(1 + \mu_3) - 1$$

bis auf Glieder höherer Ordnung wird daher

$$\chi = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3. \tag{4}$$

Der cubische Ausdehnungscoëfficient ist also gleich der Summe der drei linearen Hauptausdehnungscoëfficienten.

Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass der cubische Ausdehnungscoëfficient gleich der Summe dreier linearer Ausdehnungscoëfficienten ist, die nach drei zu einander senkrechten Richtungen bestimmt sind. Seien die Ausdehnungscoëfficienten nach drei zu einander senkrechten Richtungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$.

Die erste Richtung bilde mit den Axen die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
„ zweite „ „ „ „ „ „ „ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$
„ dritte „ „ „ „ „ „ „ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Man hat die drei Gleichungen:

$$\varkappa_1 = \mu_1 \cos^2\alpha_1 + \mu_2 \cos^2\alpha_2 + \mu_3 \cos^2\alpha_3,$$
$$\varkappa_2 = \mu_1 \cos^2\beta_1 + \mu_2 \cos^2\beta_2 + \mu_3 \cos^2\beta_3,$$
$$\varkappa_3 = \mu_1 \cos^2\gamma_1 + \mu_2 \cos^2\gamma_2 + \mu_3 \cos^2\gamma_3.$$

Durch Addition erhält man

$$\begin{aligned}\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \mu_1 (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) + \\ + \mu_2 (\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) + \\ + \mu_3 (\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) +\end{aligned}$$

Da die x-Axe mit den drei zu einander senkrechten Richtungen die Winkel α_1, β_1, γ_1 bildet, so ist

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

Man hat daher, da für die anderen Winkel das Gleiche in Bezug auf die y- resp. z-Axe gilt,

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \chi.$$

Zur Bestimmung des cubischen Ausdehnungscoëfficienten genügt es daher, den linearen Ausdehnungscoëfficienten nach den zu einander senkrechten Richtungen zu bestimmen.

Aus dem Vorhergehenden lässt sich eine Folgerung ziehen, die leicht einer experimentellen Prüfung unterworfen werden kann. Wird nämlich der Ausdehnungscoëfficient $\varkappa$ in einer Richtung untersucht, die mit den drei Axen gleich grosse Winkel bildet, so hat man in der Gleichung (3):

$$\varkappa = \mu_1 \cos^2\alpha_1 + \mu_2 \cos^2\alpha_2 + \mu_3 \cos^2\alpha_3,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

zu setzen und erhält

$$\varkappa = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\cos^2\alpha_1.$$

Da ferner

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

ist, so wird unter der gemachten Voraussetzung

$$3 \cdot \cos^2\alpha_1 = 1$$

oder

$$\cos^2\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \cos 54° \, 44'.$$

Daher wird

$$\varkappa = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\chi. \tag{5}$$

Wird die Ausdehnung des Krystalls in jener Richtung gemessen, welche mit den drei Axen den Winkel von 54° 44′ bildet, so ist diese Ausdehnung gleich dem dritten Theil der cubischen Ausdehnung. Die Grösse $\frac{1}{3}\chi$ nennt Fizeau den mittleren linearen Ausdehnungscoëfficienten des Krystalls.

Fizeau hat die im Vorstehenden dargelegte Theorie einer experimentellen Prüfung an zahlreichen Krystallen unterworfen und sie überall bestätigt gefunden.

1) Das reguläre System. Die Ausdehnung ist unabhängig von der Richtung. FIZEAU fand dies bestätigt; beim Flussspath ergab sich der Ausdehnungscoëfficient

senkrecht zur Octaëderfläche	$\mu = 0\cdot00001911$	
„ „ Würfelfläche	1910.	

Ferner Bleiglanz:

senkrecht zur Octaëderfläche	0·00002014
„ „ Würfelfläche	2014.

Schwefelkies:

senkrecht zur Würfelfläche	0·00000907
nach einer anderen Richtung	908.

Rothkupfererz:

senkrecht zur Rhombendodecaëderfläche	$\mu = 0\cdot00000093$
parallel „ „ „ „	93.

Die linearen Ausdehnungscoëfficienten einiger weiteren Krystalle des regulären Systems sind nach FIZEAU folgende:

Periclas	$\mu = 0\cdot00001043$	Chlorsilber	$\mu = 0\cdot00003294$
Chlorkalium	3803	Bromkalium	4201
Steinsalz	4039	Bromsilber	3469
Salmiak	6256	Jodkalium	4265

Eine merkwürdige Eigenschaft besitzen von den Krystallen des regulären Systems der Diamant und das Kupferoxydul[1]). Die Ausdehnung dieser Krystalle nimmt nämlich mit abnehmender Temperatur sehr stark ab, so dass es wahrscheinlich wird, dass sie bei einer bestimmten Temperatur ein Dichtigkeitsmaximum besitzen und bei weiterer Temperaturabnahme eine Ausdehnung zeigen. Die Ausdehnung des Diamant wurde von 18 bis 77° verfolgt und durch folgende Formel dargestellt:

$$l_t = l_0(1 + at + b \cdot t^2).$$

Es ist:

$$a = 0\cdot00000056243; \qquad b = 0\cdot0000000072385.$$

Um die Temperatur zu bestimmen, bei der das Dichtigkeitsmaximum eintritt, hat man zu ermitteln, wo der Ausdehnungscoëfficient gleich Null wird. Bildet man

$$\frac{dl_t}{dt} = l_0(a + 2b \cdot t),$$

so ergiebt sich, dass für

$$t = -\frac{a}{2b} = -38\cdot8°$$

der Ausdehnungscoëfficient verschwindet, also der Diamant ein Maximum der Dichte besitzt.

Für Kupferoxydul fand FIZEAU das Dichtigkeitsmaximum bei einer höheren Temperatur, wie die Formel für die Ausdehnung zeigt. Es war:

$$a = -0\cdot00000009452 \qquad b = 0\cdot000000011531.$$

Hiernach wird $\frac{dl_t}{dt}$ für $t = +4\cdot1°$ gleich Null, so dass das Kupferoxydul in der Nähe derselben Temperatur wie das Wasser sein Dichtigkeitsmaximum besitzt.

2) Das quadratische und hexagonale System. Für diese beiden Systeme sind zwei Hauptausdehnungen einander gleich, die dritte fällt mit der

[1]) FIZEAU, POGG. Ann. 126, pag. 611. Compt. rend. 60, pag. 1161 (1865).

krystallographischen Hauptaxe zusammen. Setzt man daher $\mu_2 = \mu_3$, so wird Gleichung (3):

$$\varkappa = \mu_1 \cdot cos^2 \alpha_1 + \mu_2 (cos^2 \alpha_2 + cos^2 \alpha_3)$$

und da

$$cos^2 \alpha_2 + cos^2 \alpha_3 = 1 - cos^2 \alpha_1 = sin^2 \alpha_1$$

ist, so wird

$$\varkappa = \mu_1 \cdot cos^2 \alpha_1 + \mu_2 \, sin^2 \alpha_1$$

Der mittlere lineare Ausgehnungscoëfficient wird

$$\frac{1}{3} \chi = (\mu_1 + 2\mu_2) \frac{1}{3}.$$

FIZEAU beobachtete zunächst den Ausdehnungscoëfficienten μ_1 in der Richtung der Hauptaxe, ferner den Coëfficienten μ_2 senkrecht zur Hauptaxe, und endlich den mittleren, linearen Coëfficienten in einer Richtung, die mit den Hauptaxen den Winkel 54° 44′ bildete. Dieser wurde mit dem nach der letzten Gleichung berechneten verglichen und eine sehr gute Uebereinstimmung erhalten, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Krystall	μ_1	μ_2	$\frac{1}{3}\chi$ beobachtet	$\frac{1}{3}\chi$ berechnet
Zirkon . .	0·00004430	0·00002330	0·00003040	0·00003030
Smaragd .	— 0106	137	0057	0056
Kalkspath	2621	— 540	507	514
Quarz . .	781	1419	1206	1206
Wismuth .	1621	1206		

Die Beobachtung geschah beim Wismuth ausserdem in einer Richtung, die einen Winkel von 56° 24′ mit der Hauptaxe bildete. Die Berechnung wurde nach oben entwickelter Formel

$$\varkappa = \mu_1 \, cos^2 \alpha_1 + \mu_2 \, sin^2 \alpha_1$$

durchgeführt und ergab

Beobachtet	0·000 013 38
Berechnet	133 4

Im Folgenden sind einige weitere Beobachtungen mitgetheilt; der cubische Ausdehnungscoëfficient χ ist nicht beobachtet, sondern aus den linearen Ausdehnungen berechnet.

Krystall	μ_1 parallel d. Axe	μ_2 senkr. zur Axe	χ cub. Ausdehnungscoëf.
Rutil . . .	0·00000919	0·00000714	0·00002374
Cassiterit . .	392	321	1034
Spartalit . .	316	539	1394
Korund . . .	619	533	1705
Eisenglanz . .	829	836	2501

Hier sind die Resultate zu erwähnen, welche FIZEAU[1]) mit Jodsilber erhielt. Dasselbe wurde zunächst in geschmolzenem Zustande zwischen — 10° und + 70° untersucht und zeigte hier mit wachsender Temperatur keine Ausdehnung, sondern eine Zusammenziehung. Der lineare Ausdehnungscoëfficient bei 40° war:

$$\alpha_{40} = - 0{\cdot}00000139.$$

Ferner ist die Aenderung des Ausdehnungscoëfficienten mit der Temperatur sehr bedeutend, indem mit wachsender Temperatur der absolute Werth des Aus-

[1]) FIZEAU, Compt. rend. 64, pag. 314 und 771. POGG. Ann. 132, pag. 292. 1867.

dehnungscoëfficienten stark wächst. Würde diese Aenderung des Ausdehnungscoëfficienten auch über die Temperaturgrenzen hinaus, die bei der Beobachtung benutzt wurden, sich vorfinden, so würde, wie FIZEAU bemerkt, sich ergeben, dass das Jodsilber bei -60° ein Maximum des Volumens, also ein Minimum der Dichtigkeit besitzt.

Ferner untersuchte FIZEAU Krystalle von Jodsilber, die zum hexagonalen System gehören und fand in der Richtung der Axe den Ausdehnungscoëfficienten bei 40°

$$\mu_1 = -0{\cdot}000003966,$$

und senkrecht zur Axe

$$\mu_2 = +0{\cdot}000000647.$$

Hieraus ergiebt sich der mittlere lineare Ausdehnungscoëfficient:

$$\tfrac{1}{3}\chi = \tfrac{1}{3}(\mu_1 + 2\mu_2) = -0{\cdot}000000891.$$

Da χ den cubischen Ausdehnungscoëfficienten darstellt, so beweist das letzte Resultat, dass das Jodsilber mit wachsender Temperatur sein Volumen verkleinert.

Zur Vergleichung sind im Folgenden die cubischen Ausdehnungscoëfficienten von Chlorsilber und Bromsilber angegeben, welche beide positiv sind.

$$\text{Chlorsilber } \chi = +0{\cdot}000032938$$
$$\text{Bromsilber } \chi = \qquad 34687.$$

Es nimmt also das Jodsilber in Bezug auf die thermische Ausdehnung eine Ausnahmestellung ein.

3) Das rhombische System. Dasselbe hat krystallographisch drei zu einander senkrechte, verschieden lange Axen. Der mittlere Ausdehnungscoëfficient wird nach dem früheren durch die Beobachtung der Ausdehnung in einer Richtung erhalten, die mit den drei Axen den Winkel 54° 44′ bildet. Der so beobachtete Ausdehnungscoëfficient ist gleich dem dritten Theil der aus den drei Hauptausdehnungscoëfficienten gebildeten Summe.

Der erste Coëfficient μ_1 wurde in der Richtung der Axe gemessen, die mit der Mittellinie des scharfen Winkels der optischen Axen zusammenfällt; der zweite Coëfficient μ_2 in der Richtung der Axe, die mit der Mittellinie des stumpfen Winkels der optischen Axen zusammenfällt; der dritte Coëfficient μ_3 in der Richtung, die zu den beiden angegebenen senkrecht steht. Die Beobachtungen beziehen sich auf Arragonit und Topas.

Aragonit.

$$\mu_1 = 0{\cdot}00003460 \qquad \mu_2 = \quad 1719 \qquad \mu_3 = \quad 1016$$

$$\tfrac{1}{3}\chi \begin{cases} \text{beobachtet} = 0{\cdot}00002031 \\ \text{berechnet} \qquad\quad 2065 \end{cases}$$

Topas.

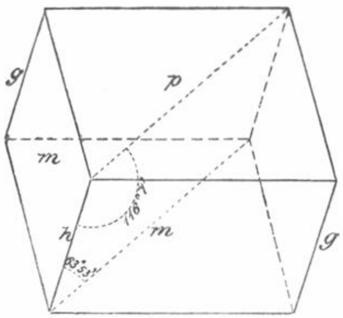
$$\mu_1 = 0{\cdot}00000592 \qquad \mu_2 = \quad 484 \qquad \mu_3 = \quad 414$$

$$\tfrac{1}{3}\chi \begin{cases} \text{beobachtet} = 0{\cdot}0000497 \\ \text{berechnet} \qquad\quad 497 \end{cases}$$

Wie man sieht, stimmen auch hier die beobachteten Werthe mit den berechneten fast vollständig überein.

4) Das monokline System. Da bei diesem System die krystallographischen Axen nicht zu einander senkrecht stehen, so fragte es sich zunächst, ob für dasselbe das gleiche Ausdehnungsgesetz wie für die übrigen Systeme gilt, ob sich also auch hier drei zu einander senkrechte Hauptausdehnungen finden lassen, die die Ausdehnung nach einer beliebigen Richtung zu berechnen ge-

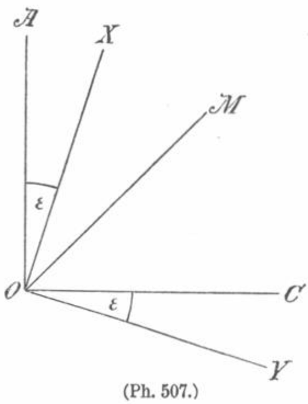
statten. Die Fig. 506 stellt die Grundform des Feldspathes dar. Die Ebene *p h* ist die Symmetrieebene des Krystalls. Die zur Symmetrieebene senkrechte Axe ist eine Axe optischer Elasticität. Es lag daher nahe, zu untersuchen, ob dieselbe auch eine Hauptausdehnungsaxe sei; ist dies der Fall, so liegen die beiden anderen Axen in der Symmetrieebene selbst. Zur Untersuchung benutzte FIZEAU einen Gypskrystall, weil derselbe parallel der Symmetrieebene eine vollkommene Spaltbarkeit besitzt. Es wurde die Ausdehnung in zwei Richtungen beobachtet, die links und rechts von der Symmetrieebene lagen, gegen dieselbe gleich geneigt waren und mit der Axe der Symmetrieebene in einer Ebene lagen. Wenn die Axe der Symmetrieebene eine Hauptausdehnungsaxe ist, so müssen die erwähnten beiden Richtungen die gleiche Ausdehnung zeigen, wo auch die beiden anderen Ausdehnungsaxen in der Symmetrieebene liegen. FIZEAU fand nun in der That zwei fast genau gleiche Werthe für die Ausdehnungscoëfficienten der beiden Richtungen, nämlich



(Ph. 506.)

$$0{\cdot}00001945 \quad \text{und} \quad 0{\cdot}00001938.$$

Nachdem auf diese Weise festgestellt war, dass eine Ausdehnungsaxe mit der Axe der Symmetrieebene zusammenfalle, bleibt noch die Bestimmung der beiden anderen Axen in der Symmetrieebene übrig. Zuerst versuchte FIZEAU, ob nicht eine Axe mit der optischen Mittellinie zusammenfalle. Die Beobachtungen ergaben indess, dass dies nicht der Fall sei und dass man deshalb keine weiteren Analogien von bekannten Erscheinungen zur Bestimmung der Axenlage benutzen könne.



(Ph. 507.)

Beobachtet man die Ausdehnung nach drei bestimmten Richtungen in der Symmetrieebene, so lässt sich aus diesen Beobachtungen, wie FIZEAU gezeigt hat, sowohl die Lage der beiden Axen, als auch die Grösse der beiden Ausdehnungscoëfficienten bestimmen.

Die drei Richtungen OA, OM, OC mögen in der Symmetrieebene liegen, so zwar, dass OA senkrecht zu OC und der Winkel $MOA = MOC = 45°$. Die Ausdehnungscoëfficienten nach diesen drei Richtungen seien resp. mit A, M, C bezeichnet. Die Hauptausdehnungsaxen der Symmetriebene seien OX und OY, die erstere bilde mit OA den Winkel ε; dann bildet die zweite mit OC den gleichen Winkel ε (Fig. 507). Die Ausdehnungscoëfficienten nach den Richtungen OX und OY seien μ_1 und μ_2.

In Folge der allgemeinen Gleichung

$$\varkappa = \mu_1 \cos^2\alpha_1 + \mu_2 \cos^2\alpha_2 + \mu_3 \cos^2\alpha_3$$

hat man zunächst

$$A = \mu_1 \cos^2\varepsilon + \mu_2 \cos^2(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) + \mu_3 \cos^2(\tfrac{1}{2}\pi)$$

oder

$$A = \mu_1 \cos^2\varepsilon + \mu_2 \sin^2\varepsilon.$$

Ebenso

$$C = \mu_1 \sin^2\varepsilon + \mu_2 \cos^2\varepsilon.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$A + C = \mu_1 + \mu_2,$$

$$A - C = (\mu_1 - \mu_2)\, cos^2 \varepsilon - siu^2 \varepsilon) = (\mu_1 - \mu_2)\, cos\, 2\varepsilon.$$

Ferner hat man für M

$$M = \mu_1\, cos^2\, (\tfrac{1}{4}\pi - \varepsilon) + \mu_2\, sin^2 (\tfrac{1}{4}\,\pi - \varepsilon) = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\, sin\, 2\varepsilon.$$

In Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung erhält man

$$tang\, 2\varepsilon = \frac{2(A - M)}{C - A} - 1. \tag{8}$$

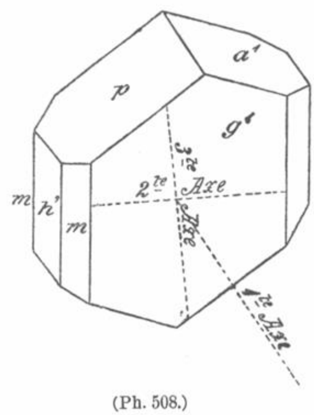
Nachdem hierdurch die Lage der Axen OX und OY bestimmt ist, findet man für die Ausdehnungscëfficienten

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left(A + C + \frac{A - C}{cos\, 2\varepsilon}\right). \tag{9}$$

$$\mu_2 = A + C - \mu_1.$$

Um nach der angegebenen Methode die Bestimmung zu erhalten, wurde aus einem Feldspath ein Würfel so geschnitten, dass eine Ebene mit der Symmetrieebene zusammenfiel und eine andere mit einer zu dieser senkrechten natürlichen Krystallfläche. In der Fig. 508 ist g' die Symmetrieebene und h' jene Ebene, mit der die zweite Würfelfläche zusammenfällt. Der Ausdehnungscoëfficient senkrecht zu g', also nach der ersten Hauptaxe, werde mit B bezeichnet, der Ausdehnungscoëfficient senkrecht zu h' mit A, und derjenige senkrecht zu den beiden übrigen mit C. Die Richtung für den Ausdehnungscoëfficienten M ist hierdurch bestimmt. Die von FIZEAU erhaltenen Werthe waren

$A = \quad 0{\cdot}0000187400; \quad B = -\, 0{\cdot}0000020039;$
$C = -\, 0{\cdot}0000011467; \quad M = \quad 0{\cdot}0000113924.$



(Ph. 508.)

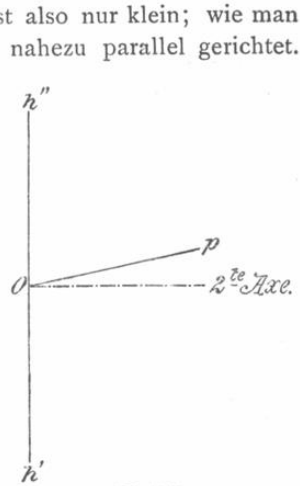
Bezeichnet man aus diesen Werthen nach Gleichung (8) ε, so erhält man

$$\varepsilon = -\, 7^\circ\, 19'.$$

Die Neigung der einen Axe gegen die Fläche h' ist also nur klein; wie man aus der Figur sieht, ist die dritte Axe der Fläche h' nahezu parallel gerichtet.

Die Gleichungen (9) ergeben die Ausdehnungscoëfficienten der beiden Axen in der Symmetrieebene, so dass man folgende drei Hauptausdehnungscoëfficienten erhält:

$B \;= -\, 0{\cdot}0000020039$ 1. Axe.
$\mu_2 = \quad 0{\cdot}0000190700$ 2. „
$\mu_1 = -\, 0{\cdot}0000014800$ 3. „



(Ph. 509.)

Die Werthe zeigen, dass nur nach einer Axe, der zweiten, bei der Erwärmung eine Ausdehnung stattfindet, dass dagegen in der Richtung der beiden anderen Axen eine Zusammenziehung stattfindet. Bezieht man die zweite Axe auf die Fläche p, welche mit h' den Winkel $116^\circ\, 7'$ bildet, so findet man, dass diese Axe mit p den Winkel von

$$90^\circ - 7^\circ\, 19' - 63^\circ\, 53' = 18^\circ\, 48'$$

bildet. In der nebenstehenden Fig. 509 ist die Lage der zweiten Axe dargestellt;

dieselbe liegt also innerhalb des stumpfen Winkels $poh' = 116°\ 7'$ und bildet mit p den Winkel 18° 48′.

Ebenso wie der Feldspath verhalten sich der Epidot und der Augit; auch hier liegt die zweite Axe innerhalb des stumpfen Winkels poh'. Beim Azurit und Gyps liegt hingegen die zweite Axe innerhalb des spitzen Winkels poh''; dabei ist hier der Winkel der zweiten Axe mit p durch ein negatives Vorzeichen bezeichnet. Die von FIZEAU erhaltenen Resultate waren:

Ausdehnungscoëfficienten	Epidot	Augit
der ersten Axe	0·0000091326	0·000013856
der zweiten Axe	33400	2730
der dritten Axe	108600	7910
Winkel der zweiten Axe mit p	34° 8′	53° 37′
Winkel poh' des Krystalles . .	115° 27′	106° 1′

Ausdehnungscoëfficienten	Azurit von Chessy	Gyps von Montmartre
der ersten Axe	0·000012589	0·000041634
der zweiten Axe	20810	1570
der dritten Axe	— 00980	29330
Winkel der zweiten Axe mit p.	−29° 3′	−15° 2′
Winkel poh' des Krystalles .	92° 21′	113′ 46′

A. WINKELMANN.

Ausdehnung der Flüssigkeiten.

I. Methoden.

Da die Flüssigkeiten keine selbständige Gestalt haben, kann nur die Volumenausdehnung bestimmt werden. Der Ausdehnungscoëfficient der Flüssigkeiten ist daher immer der cubische.

Die Methoden zur Bestimmung der Ausdehnung sind zweierlei Art. Erstens wird die scheinbare Ausdehnung in Gefässen beobachtet, deren cubischer Ausdehnungscoëfficient bekannt ist, und daraus die wahre Ausdehnung berechnet. Zweitens wird die Ausdehnung unabhängig von der Ausdehnung der Gefässe ermittelt, indem man den Satz zu Hilfe nimmt, dass in communicirenden Röhren zwei Flüssigkeitssäulen sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre Höhen sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten der Flüssigkeiten verhalten.

Nach der ersten Methode sind besonders von KOPP[1]) zahlreiche Beobachtungen durchgeführt; die von demselben angewandten Apparate werden Dilatometer genannt. Diese bestehen aus einer calibrirten Glasröhre, an welche ein kugelförmiges Gefäss angeschmolzen ist. Das Volumen des Gefässes bis zur Theilung und das Volumen der Röhre ist zunächst zu bestimmen.

Es sei das Volumen des Gefässes bis zur Theilung bei 0° gleich Φ_0,
„ „ „ „ zwischen zwei Theilstrichen „ „ „ φ_0,
„ „ der cubische Ausdehnungscoëfficient des Glases gleich $\varkappa$.

[1]) KOPP, LIEB. Ann. 94, pag. 257. 1855.