

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelman, Adolph

1894

Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier Medien

Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier Medien.

Die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, denen der Lichtvector, dessen Componenten u , v , w seien, zu genügen hat, bestimmen vollständig die Amplituden- und Phasenänderungen, welche bei der Reflexion und Brechung des Lichtes beim Uebergang über die Grenze zweier Medien eintreten. — Wie oben gezeigt wurde, hat man eine gewisse Auswahl zwischen verschiedenen Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, welche alle zu denselben Resultaten für die Erscheinungen in fortschreitenden Wellen führen. Aus gewissen Bequemlichkeitsrücksichten sollen die Betrachtungen des Folgenden an den sogen. NEUMANN'schen Lichtvector, d. h. an die magnetische Kraft der elektromagnetischen Theorie, anknüpfen.

Die für diesen Lichtvector gültigen Formeln (14), (15), (16) der pag. 669 u. 670 lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} \right), & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$2G = a_{11} \xi^2 + a_{22} \eta^2 + a_{33} \zeta^2 + 2a_{23} \eta \zeta + 2a_{31} \zeta \xi + 2a_{12} \xi \eta.$$

Ist die xy -Ebene die Grenze zwischen den Medien 1 und 2, so ist

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right)_2 \quad \text{für } z = 0. \quad (2)$$

Dabei ist gesetzt [nach (13) pag. 669]

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der allgemeinste Ansatz für ebene Wellen ist durch das Formelsystem gegeben:

$$\begin{aligned} u &= \Re [M e^{i\rho}], & v &= \Re [N e^{i\rho}], & w &= \Re [\Pi e^{i\rho}]. \\ \rho &= \frac{1}{\tau} (t - \mu x - \nu y - \pi z), \end{aligned} \quad (3)$$

worin M , N , Π , μ , ν , π complexe Grössen bedeuten, und das vorgesetzte \Re andeuten soll, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll. Durch den obigen Ansatz ist bei reellen μ , ν , π eine ohne Schwächung sich fortpflanzende elliptische Wellenbewegung charakterisirt. Sind μ , ν , π complex, so bedeutet diess, dass die Amplituden der Lichtbewegung sich nach einer geometrischen Reihe ändern, falls die vom Licht durchlaufenen Strecken arithwachsen. Im Folgenden sollen diese beiden verschiedenen Arten von Wellenbewegungen kurz unterschieden werden als »Wellen mit constanter und Wellen mit variabler Amplitude«.

Da sämmtliche Gleichungen, denen u , v , w zu genügen haben, linear sind, so kann man auch u , v , w den complexen Grössen selber gleich setzen, wenn man nur am Schluss der Rechnung wieder zu den reellen Grössen übergeht, um die physikalische Bedeutung zu wahren.

Es ist zu bemerken, dass in jedem Medium die u , v , w aus mehreren nach den Formeln (3) gebauten Gliedern zusammengesetzt sind, da aus einer einfallenden Welle mehrere reflektirte und gebrochene entstehen können, wie schon früher pag. 703 abgeleitet ist. Die dort abgeleiteten Resultate, welche auf geometrischem Wege gewonnen waren, ergaben sich nun auch hier in einfacher Weise analytisch aus den Grenzbedingungen.

Legt man die y -Axe senkrecht zur Einfallsebene, so werden u, v, w von y unabhängig, d. h. in den Formeln (3) ist $v = 0$ zu setzen. Aus $u_1 = u_2$ für $z = 0$ folgt nun sogleich, dass für sämtliche Wellen die μ den gleichen Werth besitzen müssen: dies ist das früher (pag. 703) abgeleitete Sinusgesetz. Die Anzahl der möglichen Wellen ergibt sich, wenn man aus den Hauptgleichungen (1) die Amplituden M, N, Π eliminiert.

Setzt man

$$\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = \cos \varphi. \quad (4)$$

wobei also φ , falls es reell ist, d. h. μ und π reell sind, den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der z -Axe einschliesst, d. h. den Einfallswinkel, so erhält man¹⁾ durch jene Elimination, falls man den allen Wellensystemen gemeinsamen Werth von μ mit $1/h$ bezeichnet, die Gleichung:

$$[a_{11} - 2a_{13} \tan \varphi + (a_{33} - h^2) \tan^2 \varphi][a_{22} + (a_{22} - h^2) \tan^2 \varphi] - (a_{12} - a_{23} \tan \varphi)^2 (1 + \tan^2 \varphi) = 0. \quad (5)$$

Da die Gleichung (5) biquadratisch in $\tan \varphi$ ist, so sind daher bei gegebenem μ in jedem Medium vier Wellensysteme möglich. Wir haben folglich zu setzen

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} + u_1^{(4)}, \quad (6)$$

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + u_2^{(4)}. \quad (7)$$

Von diesen vier Wellensystemen jedes Mediums sind zwei zur Grenze hinschreitende und zwei von ihr fortschreitende.

Aus den Hauptgleichungen folgen, wie wir früher (pag. 689) sahen, ebenfalls Gleichungen für die Amplitudenverhältnisse $M:N:\Pi$. Da wegen der Transversalität der Wellen

$$M\mu + \Pi\pi = 0 \quad (8)$$

ist, so ist das Verhältniss $M:\Pi$ schon bestimmt. Um auch $M:N$ zu erhalten, bringt man zweckmässig die Amplituden in die Form:

$$M = -A \cos \vartheta \cos \varphi, \quad N = A \sin \vartheta, \quad \Pi = A \cos \vartheta \sin \varphi. \quad (9)$$

Jene beiden aus den Hauptgleichungen folgende Relationen gehen dann in eine einzige Gleichung für ϑ über²⁾, welche lautet:

$$\tan \vartheta = \frac{h^2 \sin^2 \varphi - a_{22}}{a_{12} \cos \varphi - a_{23} \sin \varphi}. \quad (10)$$

Die in den Formeln (5) und (10) erhaltenen Resultate lassen sich unabhängig von der besonderen Gestalt der Grenzbedingungen ableiten, da sie aus den Hauptgleichungen folgen. Speciell kann man auch das Resultat der Formel (5) rein geometrisch aus dem HUYGENS'schen Princip ableiten, wie früher (pag. 703) geschehen ist. Anders ist es bei der Berechnung der Amplituden A , indem für diese die Gestalt der Grenzbedingungen maassgebend ist. Es ist zu bemerken, dass eine complexe Amplitude sowohl die Intensität der Lichtbewegung, als auch die Gestalt und Lage der Schwingungsellipse beschreibt, die Berechnung der Amplituden A ergibt daher nicht nur die durch Reflexion und Brechung hervorgerufenen Intensitätsänderungen, sondern auch die Phasenänderungen der Lichtbewegung.

Bezeichnet man die zu den einzelnen Wellen gehörigen Werthe von φ, ϑ und A durch obere Indices 1 . . 4, dagegen die Zugehörigkeit zu den beiden Medien durch untere Indices 1, 2, so folgt aus den Grenzbedingungen

$$u_1 = u_2, \quad v_1 + v_2, \quad w_1 = w_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2,$$

¹⁾ cf. G. KIRCHHOFF, Berl. Ber. 1876.

²⁾ cf. KIRCHHOFF, l. c.

welche, wie leicht ersichtlich, wegen der dritten der Hauptgleichungen (1) mit der ursprünglichen Form (2) der Grenzbedingungen äquivalent sind:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \cos \varphi_1^{(n)} \cos \vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \cos \varphi_2^{(n)} \cos \vartheta_2^{(n)}, \\
 \sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \sin \vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} \bar{A}_2^{(n)} \sin \vartheta_2^{(n)}, \\
 \sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \sin \varphi_1^{(n)} \cos \vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin \varphi_2^{(n)} \cos \vartheta_2^{(n)}, \\
 \sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_1^{(n)}}{\sin \varphi_1^{(n)}} [\sin \vartheta_1^{(n)} (a_{11}^I \cos \varphi_1^{(n)} - a_{13}^I \sin \varphi_1^{(n)}) + a_{12}^I \cos \vartheta_1^{(n)}] &= \\
 \sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_2^{(n)}}{\sin \varphi_2^{(n)}} [\sin \vartheta_2^{(n)} (a_{11}^{II} \cos \varphi_2^{(n)} - a_{13}^{II} \sin \varphi_2^{(n)}) + a_{12}^{II} \cos \vartheta_2^{(n)}]. &
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die Constanten $a_{h,k}^I$ beziehen sich auf das Medium 1, die $a_{h,k}^{II}$ auf das Medium 2. Diese Constanten hängen ab von der Lage des Coordinatensystems gegen die optischen Symmetrieachsen der Medien. Bezeichnet man dieselben in einem derselben durch s_1, s_2, s_3 und bilden die Coordinatenachsen mit diesen Axen Richtungscosinus, welche durch die Tabelle schematisch gegeben werden:

	$s_1,$	$s_2,$	s_3
x	ρ_1	ρ_2	ρ_3
y	q_1	q_2	q_3
z	r_1	r_2	r_3

so folgt aus der Form von G

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a\rho_1^2 + b\rho_2^2 + c\rho_3^2, \\
 a_{22} &= aq_1^2 + bq_2^2 + cq_3^2, \\
 a_{33} &= ar_1^2 + br_2^2 + cr_3^2, \\
 a_{23} &= a_{32} = aq_1r_1 + bq_2r_2 + cq_3r_3, \\
 a_{31} &= a_{13} = ar_1\rho_1 + br_2\rho_2 + cr_3\rho_3, \\
 a_{12} &= a_{21} = a\rho_1q_1 + b\rho_2q_2 + c\rho_3q_3,
 \end{aligned}$$

wobei die a, b, c drei dem Medium charakteristische Constanten sind, nämlich die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten (cf. oben pag. 687).

Um auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, muss man gewisse drei von den A gleich Null setzen, und zwar will man aus einer einzigen im Medium 1 einfallenden Welle die in 1 reflectirte und in 2 gebrochene Lichtbewegung finden, so muss man das eine A_1 , welches auch noch einfallendem Licht, und ferner die beiden A_2 , welche im Medium 2 nach der Grenze hin einfallendem Licht entsprechen, Null setzen, während das andere A_1 , welches in 1 einfallendem Licht entspricht, als gegeben anzusehen ist. Die Formeln (11) gestatten dann, die vier übrigen A zu berechnen, so dass alle Grössen, welche die reflectirte und gebrochene Lichtbewegung charakterisiren, bestimmbar sind.

Die weitere Durchführung der aufgestellten Formeln ist nun verschieden, je nachdem φ und ϑ reelle oder complexe Grössen sind, d. h. je nachdem wir es nur mit Wellen constanter Amplitude oder auch mit solchen variabler Amplitude zu thun haben.

Es möge zunächst nur der erstere Fall betrachtet werden. Für ihn ist, im Gegensatz zu dem letzteren, charakteristisch, dass nur ein Theil des ein-

fallenden Lichtes an der Grenze reflektirt wird. — Ausserdem entsteht in diesem Falle aus einfallendem, linear polarisirtem Licht durch Reflexion und Brechung wiederum nur linear polarisirtes Licht, da die Gleichungen (11) durch reelle A befriedigt werden können.

I. Partielle Reflexion.

a) Beide Medien sind krystallinisch.

Dieser allgemeine Fall kann praktisch realisirt werden bei der Reflexion des Lichtes an einer Krystallzwillingsfläche. Hierauf bezügliche Rechnungen sind von F. NEUMANN¹⁾, GRAILICH²⁾ und RAYLEIGH³⁾ gegeben. GRAILICH hat auch einige Versuche⁴⁾ an Kalkspathzwillingen angestellt, welche qualitativ die theoretischen Resultate bestätigten.

Die optischen Eigenthümlichkeiten des chloresauren Kalis sind ferner durch STOKES⁵⁾ und RAYLEIGH⁶⁾ durch Reflexion an eingelagerten Zwillingslamellen erklärt.

Der Beobachtung bei weitem bequemer zugänglich sind diejenigen Fälle, in welchen das Medium, in dem das Licht einfällt, isotrop ist. Diese Fälle sollen nun näher betrachtet werden.

b) Ein Medium ist isotrop.

Das isotrope Medium sei das Medium 1. Für dieses ist daher zu setzen:

$$\begin{aligned} a_{11}^I &= a_{22}^I = a_{33}^I = a_1 \\ a_{23}^I &= a_{31}^I = a_{12}^I = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Gleichung (5) für $\tan \varphi_1$ liefert in Folge dessen die Wurzeln

$$\begin{aligned} \tan^2 \varphi_1 &= \frac{a_1}{h^2 - a_1}, \text{ d. h.} \\ \varphi_1^{(1)} &= \varphi, \quad \varphi_1^{(2)} = \varphi, \quad \varphi_1^{(3)} = \pi - \varphi, \quad \varphi_1^{(4)} = \pi - \varphi, \\ \mu^2 + \pi_1^2 &= \frac{1}{a_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

falls φ den Einfallswinkel der einfallenden Welle bedeutet. Die beiden ersten Wurzeln beziehen sich daher auf die einfallenden Wellen, die beiden letzten auf die reflektirten. — Die Gleichung (10) für $\tan \vartheta$ nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an; ϑ ist also unbestimmt. Wählt man

$$\vartheta_1^{(1)} = 0, \quad \vartheta_1^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_1^{(3)} = 0, \quad \vartheta_1^{(4)} = \frac{\pi}{2}, \quad (13')$$

so geht in den Wellen mit ungeradem oberen Index die Bewegung in der Einfallsebene vor sich, in den Wellen mit geradem oberen Index senkrecht zu derselben.

¹⁾ F. NEUMANN, Abhandl. Berl. Akad. 1835.

²⁾ GRAILICH, Wien. Ber. (II) 11, pag. 817 1853; 12, pag. 230. 1854; 15, pag. 311. 1855.

³⁾ Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 26, pag. 241. 1888. Die Formeln sind auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie entwickelt.

⁴⁾ GRAILICH, Wien. Ber. (II) 19, pag. 226. 1856.

⁵⁾ STOKES, Proc. Roy. Soc. of London. 25. Febr. 1885.

⁶⁾ Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 26, pag. 256. 1888.

⁷⁾ Ob man $\pi - \varphi$ oder $-\varphi$ für diese Wurzel nimmt, macht nur einen Unterschied hinsichtlich des Sinnes, in welchem man die reflektirten Amplituden positiv rechnet.

In Folge dieser Verfügungen werden die Gleichungen (11):

$$\begin{aligned}
 (A_1^{(1)} - A_1^{(3)}) \cos \varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \cos \varphi_2^{(n)} \cos \vartheta_2^{(n)}, \\
 A_1^{(2)} + A_1^{(4)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin \vartheta_2^{(n)}, \\
 (A_1^{(1)} + A_1^{(3)}) \sin \varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin \varphi_2^{(n)} \cos \vartheta_2^{(n)}, \\
 (A_1^{(2)} - A_1^{(4)}) \cotg \varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_2^{(n)}}{\sin \varphi_2^{(n)}} \left[\sin \vartheta_2^{(n)} \left(\frac{a_{11}^{II}}{a_1} \cos \varphi_2^{(n)} - \frac{a_{13}^{II}}{a_1} \sin \varphi_2^{(n)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \cos \vartheta_2^{(n)} \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Gleichungen werden am einfachsten, wenn im Medium 2 drei der $A = 0$ sind, d. h. nur ein gebrochener Strahl zu Stande kommt. Das vierte der A_2 kann unbeschadet der Allgemeinheit $= 1$ gesetzt werden. Durch die Gleichungen (14) sind dann die A_1 bestimmt, d. h. nur für gewisse Azimuthe der Polarisationssebene des einfallenden Lichtes (welche je durch das Verhältniss $A_1^{(1)} : A_1^{(2)}$ gegeben sind) kommt im zweiten Medium nur ein gebrochener Strahl zu Stande. Man nennt diese Azimuthe die uniradialen Azimuthe; sie wurden zuerst von MAC CULLAGH eingeführt (cf. oben pag. 654).

Es war eines von den A_2 gleich 1 gesetzt. Da dieses nur einer gebrochenen Welle entsprechen soll, so ist φ_2 also noch eine zweideutige Function von h , d. h. μ . Bezeichnet man die beiden Wurzeln von φ_2 mit χ_o resp. χ_e , und ebenso die beiden zugehörigen ϑ_2 mit ϑ_o resp. ϑ_e , so bestimmen sich die uniradialen Amplituden $A_o^{(n)}$ im ersten Medium, welche für den Fall gelten, dass nur diejenige Welle im zweiten Medium zu Stande kommt, deren zugehöriges φ_2 gleich χ_o ist, aus den Formeln:

$$\begin{aligned}
 [A_o^{(1)} - A_o^{(3)}] \cos \varphi &= \cos \chi_o \cos \vartheta_o, \\
 A_o^{(2)} + A_o^{(4)} &= \sin \vartheta_o, \\
 [A_o^{(1)} + A_o^{(3)}] \sin \varphi &= \sin \chi_o \cos \vartheta_o, \\
 [A_o^{(2)} - A_o^{(4)}] \cotg \varphi &= \frac{1}{\sin \chi_o} \left[\sin \vartheta_o \left(\frac{a_{11}^{II}}{a_1} \cos \chi_o - \frac{a_{13}^{II}}{a_1} \sin \chi_o \right) + \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \cos \vartheta_o \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Vertauscht man in diesen Formeln die χ_o und ϑ_o mit χ_e und ϑ_e , so erhält man ebenso vier Gleichungen für die uniradialen Azimuthe $A_e^{(n)}$, welche für den Fall gelten, dass im zweiten Medium nur diejenige Welle existirt, deren zugehöriges φ_2 gleich χ_e ist.

Wir wollen nun annehmen, es sei das einfallende Licht linear polarisirt, und zwar sei E_p die Amplitude der parallel zur Einfallsebene schwingenden, d. h. auch in ihr polarisirten Componente, E_s die Amplitude der senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Componente der einfallenden Welle. Wie wir oben sahen (pag. 745) ist dann auch das reflektirte und gebrochene Licht linear polarisirt; es seien R_p und R_s die parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten, d. h. schwingenden, Componenten der reflektirten Welle, D_o und D_e die Amplituden der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen, welche sich auf die Indices o und e beziehen¹⁾.

¹⁾ Der positive Sinn der Amplituden E_p , R_p , D_p soll zur Fortschrittrichtung der zugehörigen Wellen stets so liegen, wie die positive x -Axe zur positiven x -Axe. Der positive Sinn von E_s , R_s , D_s liegt der positiven y -Axe parallel.

Nach dem auf pag. 744 Erläuterten ist, falls $D_e = 0$, $D_o = 1$ ist, zu setzen:

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= E_\rho, & A_0^{(3)} &= R, \\ A_0^{(2)} &= E_s, & A_0^{(4)} &= R_s, \end{aligned}$$

falls dagegen D_0 von 1 verschieden ist, so ist

$$\begin{aligned} D_0 A_0^{(1)} &= E_\rho, & D_0 A_0^{(3)} &= R_\rho, \\ D_0 A_0^{(2)} &= E_s, & D_0 A_0^{(4)} &= R_s. \end{aligned}$$

Ebenso ist, falls D_0 gleich Null ist

$$\begin{aligned} D_e A_e^{(1)} &= E_\rho, & D_e A_e^{(3)} &= R_\rho, \\ D_e A_e^{(2)} &= E_s, & D_e A_e^{(4)} &= R_s. \end{aligned}$$

Nach dem Princip der Coexistenz der Bewegungen, welches hier gilt, da alle Gleichungen linear sind, folgt für den allgemeinen Fall, in welchem D_o und D_e beide von Null verschieden sind:

$$\begin{aligned} E_\rho &= A_o^{(1)} D_o + A_e^{(1)} D_e, & E_s &= A_o^{(2)} D_o + A_e^{(2)} D_e, \\ R_\rho &= A_o^{(3)} D_o + A_e^{(3)} D_e, & R_s &= A_o^{(4)} D_o + A_e^{(4)} D_e. \end{aligned}$$

Der Zweck der Rechnung ist, R_ρ , R_s , D_o , D_e aus E_ρ und E_s zu berechnen. Durch Umformung dieser Gleichungen erhält man sofort

$$\begin{aligned} \wp D_o &= A_e^{(2)} E_\rho - A_e^{(1)} E_s, & \wp D_e &= -A_o^{(2)} E_\rho + A_o^{(1)} E_s, \\ \wp R_\rho &= [A_o^{(3)} A_e^{(2)} - A_e^{(3)} A_o^{(2)}] E_\rho - [A_o^{(3)} A_e^{(1)} - A_e^{(3)} A_o^{(1)}] E_s, \\ \wp R_s &= [A_o^{(4)} A_e^{(2)} - A_e^{(4)} A_o^{(2)}] E_\rho - [A_o^{(4)} A_e^{(1)} - A_e^{(4)} A_o^{(1)}] E_s, \end{aligned} \quad (16)$$

wo \wp eine Abkürzung ist für

$$\wp = A_o^{(1)} A_e^{(2)} - A_o^{(2)} A_e^{(1)}.$$

Da die A nach den Formeln (15) bestimmt sind, so ist das Problem völlig gelöst.

Aus diesen Formeln bestimmen sich sowohl die absoluten Intensitäten R_s , R_ρ , D_o , D_e des reflektirten und gebrochenen Lichtes, als auch die Lage der Polarisations Ebenen derselben, welche durch die Verhältnisse R_s/R_ρ und D_o/D_e gegeben sind. Da diese nicht dieselben Werthe besitzen, wie das Verhältniss E_s/E_ρ , welches die Polarisations Ebene des einfallenden Lichtes bestimmt, so tritt also durch Reflexion und Brechung eine gewisse Drehung der Polarisations Ebene ein. Im Voraus sei schon bemerkt, dass im Gegensatz zu dem Verhalten zweier isotroper Medien bei der Krystallexreflexion diese Drehung auch bei senkrechter Incidenz ($\varphi = 0$) vorhanden ist¹⁾, sowie dass eine fernere Eigenthümlichkeit der Krystallexreflexion die ist, dass die Intensität R_ρ des parallel zur Einfallsebene schwingenden reflektirten Lichtes auch von der Intensität E_s des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden einfallenden Lichtes abhängt, und ebenso R_s auch von E_ρ .

Aus den beiden letzten der Formeln (16) folgt, dass, falls unter den A eine gewisse Beziehung stattfindet, R_ρ/R_s von E_ρ/E_s unabhängig wird, d. h. dass natürliches Licht (in welchem E_ρ/E_s alle möglichen Werthe besitzt) durch die Reflexion zu linear polarisirtem wird. Man nennt den Einfallswinkel φ , für welchen dies stattfindet, den Polarisationswinkel. Jene Beziehung zwischen den A kann man in die Form bringen:

$$\wp [A_o^{(3)} A_e^{(4)} - A_o^{(4)} A_e^{(3)}] = 0.$$

¹⁾ Diese Drehung ist von SÉNARMONT experimentell constatirt. (Vergl. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von EXNER, 2. Bd., pag. 440. 1887.)

Da ϱ nicht verschwinden kann, so ist also der Polarisationswinkel definiert durch

$$\Lambda_o^{(3)} \Lambda_e^{(4)} - \Lambda_o^{(4)} \Lambda_e^{(3)} = 0. \quad (17)$$

Das zugehörige Azimuth der Polarisationssebene des reflectirten Lichtes ist gegeben durch

$$R_s : R_p = \Lambda_o^{(4)} : \Lambda_o^{(3)} = \Lambda_e^{(4)} : \Lambda_e^{(3)}. \quad (18)$$

Sowohl φ als R_s/R_p hängen ab von der Orientirung der reflectirenden Fläche und der Einfallsebene gegen die optischen Symmetriemaxen des Krystalls, da hierdurch nach pag. 744 die Werthe der $a_{h,k}$ beeinflusst werden.

Zuerst ist diese Abhängigkeit des Polarisationswinkels φ' von der Orientirung der spiegelnden Fläche und der Einfallsebene von BREWSTER¹⁾ am Kalkspath entdeckt, nachdem zuvor MALUS²⁾ behauptet hatte, es verhalte sich ein Krystall hinsichtlich der Reflexionsgesetze wie ein isotroper Körper. Die Beobachtungsmethode für φ' ist die, dass man denjenigen Winkel aufsucht, unter welchem natürliches Licht einfallen muss, damit das reflektirte Licht durch ein um seine Axe drehbares NICOL'Sches Prisma betrachtet, vollständig ausgelöscht werden kann. Die Lage der Polarisationssebene des Nicols in der Stellung, in welcher dies stattfindet, ergibt zugleich den Werth von R_s/R_p . BREWSTER fand auch, dass der Werth des R_s/R_p , welches bei Reflexion an isotropen Medien Null ist (cf. unten), stark von 0 abweichende Werthe (bis zu ∞) annimmt, falls das Medium 1, in welchem die Reflexion stattfindet, einen hohen Brechungsexponenten besitzt, wie z. B. Cassiaöl. Dies folgt auch aus der Formel (18).

Nach ihm hat SEEBECK³⁾ an mehreren künstlich an einen Kalkspathkrystall angeschliffenen Flächen die Polarisationswinkel φ' gemessen. Er konnte auch die Abweichung des Werthes des Verhältnisses R_s/R_p von Null, d. h. die Abweichung der Polarisationssebene des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes von der Einfallsebene, in dem Falle constatiren, dass das erste Medium Luft war. SEEBECK hat besondere Sorgfalt auf die Herstellung reiner, spiegelnder Flächen verwandt und wählte danach das Polirmittel. Dasselbe scheint in der That die Krystallflächen nicht wesentlich verunreinigt zu haben, denn F. NEUMANN⁴⁾ erhielt eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten Werthen und den nach der auseinandergesetzten Theorie sich ergebenden.

Dieselbe wird für einaxige Krystalle einfacher, da zwei der Wurzeln der bi-quadratischen Gleichung (5) für $\tan \varphi$ sich sofort ohne Wurzelzeichen bestimmen, nämlich diejenigen, welche den ordinären Wellen angehören. Für den Werth des Polarisationswinkels φ' ergibt sich nach NEUMANN, falls die optische Axe in der Einfallsebene liegt und mit der Grenznormale den Winkel w einschliesst, die Gleichung:

$$\sin^2 \varphi' = \frac{(1 - a) \cos^2 w + (1 - c) \sin^2 w}{1 - ac}, \quad (19)$$

wobei a und c die Verhältnisse der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls in der Richtung der optischen Axe zu dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium bedeuten.

Die Gleichung (19) ist dieselbe, welche SEEBECK rein empirisch zur Darstellung seiner Beobachtungen fand.

¹⁾ D. BREWSTER, Phil. Trans. 1819, pag. 145. Die Resultate dieser Arbeit sind von ihm später in Edinb. Trans. 24, pag. 233. 1866 noch weiter bestätigt.

²⁾ MALUS, Théorie de la double refraction. Paris 1810.

³⁾ SEEBECK, POGG. Ann. 21, pag. 290. 1831.

⁴⁾ F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

Zur weiteren Bestätigung seiner Theorie unternahm NEUMANN¹⁾ noch zahlreiche Messungen unter anderen Winkeln als dem Polarisationswinkel, über die unradialen Azimuthe und Bestimmung der Azimuthe der Polarisationssebenen des reflektirten und gebrochenen Lichtes bei beliebiger Lage der Polarisationssebene des einfallenden Lichtes. Sämmtliche Beobachtungen wurden durch die Rechnung völlig befriedigend dargestellt. Wie NEUMANN²⁾ bemerkt hat, erhält man durch die beobachtete Drehung der Polarisationssebene durch Reflexion und Brechung zugleich auch eine Bestätigung der theoretischen Ergebnisse für die absoluten Intensitäten R_s und R_p , da wegen des Principis der Erhaltung der lebendigen Kräfte Beziehungen zwischen E_s , E_p und R_s , R_p , D_o , D_e bestehen.

Später sind von CONROY³⁾ ausführliche Messungen von φ' und R_s'/R_p' an Spaltflächen von Kalkspath in Luft, Wasser und Chlorkohlenstoff ausgeführt. Im letzteren ist die Abhängigkeit der beobachteten Grössen von der Lage der Einfallsebene besonders stark, was im Einklang mit den Beobachtungen BREWSTER's und den theoretischen Ergebnissen steht (cf. pag. 744). Die gleichen Messungen in Luft sind auch von DRUDE⁴⁾ ausgeführt.

GLAZEBROOK⁵⁾ hat die Azimuthe ϑ_o und ϑ_e der Polarisationssebenen der beiden gebrochenen Strahlen im Kalkspath beobachtet, falls das einfallende Licht in unradialen Azimuthe polarisirt war. Er erhielt betreffs der Abhängigkeit der ϑ vom Einfallswinkel φ Abweichungen von der theoretischen Formel (10), welche aber wahrscheinlich durch die weiter unten zu besprechenden Störungen veranlasst sind, da angeschliffene und polirte Grenzflächen benutzt wurden.

SCHRAUF⁶⁾ hat ebenfalls Beobachtungen über ϑ_o und ϑ_e angestellt und hat namentlich sein Augenmerk auf die Azimuthdifferenz der gebrochenen Strahlen, d. h. die Grösse $\vartheta_o - \vartheta_e$, gerichtet. Dieselbe weicht von 90° ab, wie auch aus Formel (10) unmittelbar hervorgeht. SCHRAUF fand, dass jene Abweichung von 90° in erster Näherung gleich der Richtungs-differenz der Normalen der ordinären und extraordinären Welle ist.

c) Beide Medien sind isotrop.

Es ist zu setzen

$$\begin{aligned} a_{11}^{II} &= a_{22}^{II} = a_{33}^{II} = a_2, \\ a_{23}^{II} &= a_{31}^{II} = a_{12}^{II} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Gleichung (5) liefert für $\tan \varphi_2$

$$\tan^2 \varphi_2 = \frac{a_2}{h^2 - a_2},$$

d. h. nach Gleichung (4)

$$\mu^2 + \pi_2^2 = \frac{1}{a_2}. \quad (21)$$

Die Gleichung (10) für $\tan \vartheta$ erscheint in der Form $\frac{\vartheta}{2}$. Wir setzen

$$\vartheta_o = 0, \quad \vartheta_e = \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

1) F. NEUMANN, POGG. Ann. 42, pag. 1. 1837.

2) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

3) CONROY, Proc. Roy. Soc. 40, pag. 173. 1886.

4) P. DRUDE, WIED. Ann. 38, pag. 265. 1889.

5) R. T. GLAZEBROOK, Proc. Roy. Soc. 32, pag. 30. 1881. — Phil. Trans. for 1882, 173, pag. 595. 1883.

6) SCHRAUF, Ztschr. f. Kryst. 11, pag. 5. 1885.

Bezeichnet man mit χ den Brechungswinkel φ_2 , wobei wegen (13) und (21) die Relation besteht

$$\sin \varphi : \sin \chi = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2} \quad (\text{SNELLUIS'sches Brechungsgesetz}), \quad (23)$$

so wird nach den Gleichungen (15) und den entsprechenden für die A_e gebildeten, da $\chi_o = \chi_e = \chi$ ist

$$\begin{aligned} A_o^{(2)} &= A_o^{(4)} = A_e^{(1)} = A_e^{(3)} = 0. \\ A_o^{(1)} &= \frac{\sin(\varphi + \chi)}{\sin 2\varphi}, & A_o^{(3)} &= -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi} \\ A_e^{(2)} &= \frac{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi}, & A_e^{(4)} &= \frac{\cos(\varphi + \chi) \sin(\varphi - \chi)}{\sin 2\varphi}. \end{aligned} \quad (24)$$

Nach den Formeln (16) ist daher

$$\begin{aligned} D_p &= E_p \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, & D_s &= -E_s \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}, \\ R_p &= -E_p \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, & R_s &= E_s \frac{\tan(\varphi - \chi)}{\tan(\varphi + \chi)}. \end{aligned} \quad (25)$$

In diesen Formeln ist D_p und D_s für D_o und D_e geschrieben, da diese Grössen jetzt die Amplituden der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden gebrochenen Wellen bedeuten.

Die bisherigen Formeln gelten für den NEUMANN'schen Vector, d. h. die magnetische Kraft. — Um Formeln für den FRESNEL'schen Lichtvector oder die elektrische Kraft aufzustellen, genügt zu bemerken, dass nach pag. 672 letzterer Vector in fortschreitenden Wellen stets proportional zu ersterem ist und senkrecht zu ihm liegt. Haben daher $\mathfrak{E}_p, \mathfrak{R}_p, \mathfrak{E}_s, \mathfrak{R}_s$ dieselbe Bedeutung für den FRESNEL'schen Vector, wie E_p , etc. für den NEUMANN'schen, so ist

$$\mathfrak{E}_p = \sigma \cdot E_s, \quad \mathfrak{R}_p = \sigma \cdot R_s, \quad \mathfrak{E}_s = -\sigma \cdot E_p, \quad \mathfrak{R}_s = -\sigma \cdot R_p,$$

wobei σ ein Proportionalitätsfaktor ist, auf den es nicht weiter ankommt.

Aus (25) folgt daher

$$\mathfrak{R}_s = -\mathfrak{E}_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad \mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p \frac{\tan(\varphi - \chi)}{\tan(\varphi + \chi)}. \quad (25')$$

Die Angabe der gebrochenen Amplituden mag hier unterbleiben, da an diese sich kein besonderes Interesse knüpft.

Aus den Formeln (25) und (25') ergibt sich zunächst, dass, abgesehen von Vorzeichenänderungen, die Amplituden des reflektirten Lichtes dieselben Werthe behalten, falls φ und χ vertauscht werden, d. h. wenn das Licht anstatt im Medium 1 unter dem Winkel φ im Medium 2 unter dem Winkel χ einfällt. Ferner folgt, dass D_p und D_s für keinen Einfallswinkel verschwinden, ebenso nicht R_p und \mathfrak{R}_s , dagegen verschwinden R_s und \mathfrak{R}_p für $\varphi + \chi = \pi/2$ oder mit Rücksicht auf (23) für

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = n, \quad (26)$$

wobei n den Brechungsexponenten des Mediums 2 gegen das Medium 1 bedeutet. Natürliches Licht, welches unter diesem Winkel φ' einfällt, ist daher nach der Reflexion linear polarisirt, und zwar zeigt die Beobachtung, dass es in der Einfallsebene polarisirt ist, wenn man an der Definition festhält, dass der ordinäre Strahl eines einaxigen Krystals im Hauptschnitt polarisirt sei. Daher folgt auch aus den Reflexionserscheinungen, dass der NEUMANN'sche Lichtvector in die Polarisationssebene fällt, dass dagegen der FRESNEL'sche zu ihr senkrecht liegt. Der Einfallswinkel φ' wird der Polarisationswinkel der beiden Medien genannt. Das durch die Formel (26) ausgesprochene Gesetz für diesen Winkel

ist zuerst von BREWSTER¹⁾ experimentell gefunden und wird nach ihm das BREWSTER'sche Gesetz genannt. — Er fand zunächst an einigen Substanzen merkliche Ausnahmen von seinem Gesetze, jedoch ist dasselbe später von SEEBECK²⁾, welcher grössere Sorgfalt auf die Reinheit der Grenzfläche verwandte, an zahlreichen Substanzen mit grosser Genauigkeit verificirt.

Aus der am Eingang der Discussion der Formeln gemachten Bemerkung ergibt sich, dass der Polarisationswinkel φ_2' bei Reflexion am Medium 1 der Brechungswinkel χ ist, welcher zu dem Polarisationswinkel φ_1' , bei Reflexion am Medium 2 zugehört, dass daher $\sin \varphi_1' : \sin \varphi_2' = n$ ist. Dies Gesetz hat MALUS³⁾ gefunden.

Wie die aufgestellten Formeln lehren, sind die reflectirten Amplituden am kleinsten bei senkrechter Incidenz ($\varphi = 0$), für welche sie die Werthe annehmen, da $\varphi : \chi = n$ bei kleinem φ :

$$\begin{aligned} R_p &= -E_p \frac{n-1}{n+1}, & R_s &= E_s \frac{n-1}{n+1}, \\ \mathfrak{R}_s &= -\mathfrak{E}_s \frac{n-1}{n+1}, & \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Die reflectirten Amplituden sind am grössten für streifende Incidenz ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), nämlich

$$\begin{aligned} R_p &= -E_p, & R_s &= -E_s, \\ \mathfrak{R}_p &= -\mathfrak{E}_p, & \mathfrak{R}_s &= -\mathfrak{E}_s. \end{aligned} \quad (28)$$

Die reflectirten Intensitäten sind proportional den Quadraten der Amplituden (cf. pag. 636), daher sind ihre Werthe aus (25) und für die speciellen Fälle aus (27) und (28) zu bilden. Bei streifender Incidenz ist die Intensität des reflectirten Lichtes gleich der des einfallenden⁴⁾. — Die Intensitäten des gebrochenen Lichtes sind ebenfalls den Quadraten der Amplituden D_p , D_s proportional. Will man denselben Proportionalitätsfaktor erhalten, wie er für das Medium 1 gilt, so sind die Intensitäten des gebrochenen Lichtes einfach durch die Differenz der Intensität des einfallenden und des reflectirten Lichtes gegeben, da durch den Akt der Reflexion keine Lichtintensität verloren geht. Bezeichnet man daher die Intensitäten des einfallenden Lichtes durch J_p^e , J_s^e , des reflectirten durch J_p^r , J_s^r , des gebrochenen durch J_p^d , J_s^d , so ist nach dem NEUMANN'schen Standpunkt:

$$\begin{aligned} J_p^r &= \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} J_p^e, & J_s^r &= \frac{\tan^2(\varphi - \chi)}{\tan^2(\varphi + \chi)} J_s^e, \\ J_p^d &= \frac{\sin 2\varphi \sin 2\chi}{\sin^2(\varphi + \chi)} J_p^e, & J_s^d &= \frac{\sin 2\varphi \sin 2\chi}{\sin^2(\varphi + \chi) \cos^2(\varphi - \chi)} J_s^e. \end{aligned} \quad (25'')$$

Nach dem FRESNEL'schen Standpunkte sind die Faktoren der s - und p -Componenten mit einander zu vertauschen.

Es möge nun der Unterschied in den Resultaten, welche man vom NEUMANN'schen resp. FRESNEL'schen Standpunkte aus erhält, etwas näher betrachtet werden.

¹⁾ D. BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. 125. Betreffs der Beobachtungsmethode vergl. pag. 748.

²⁾ SEEBECK, POGG. Ann. 20, pag. 27. 1830.

³⁾ MALUS, Mém. de la Soc. d'Arcueil, 2, pag. 143. 1808. — Mém. de la prem. et de l'Inst. II. 1810.

⁴⁾ Eine graphische Darstellung der reflectirten und gebrochenen Amplituden gab BEER, Wien. Ber. 21, pag. 428. 1856.

Wie die Formeln (25) und (25') zeigen, sind die Faktoren, mit denen die einfallenden Amplituden multiplicirt werden müssen, um die reflektirten zu ergeben, nach beiden Standpunkten vertauscht. Dies bedeutet aber keinen beobachtbaren Unterschied zwischen beiderlei Resultaten, da nur die Polarisations-ebene eines Lichtstrahls, nicht seine Schwingungsebene durch Beobachtung festgestellt werden kann.

Man erhält andere Differenzen zwischen beiderlei Lichtvektoren, wenn man ihre durch Reflexion herbeigeführten Vorzeichenänderungen berücksichtigt. Nach den Erörterungen der pag. 746, Anm. 1, bedeutet ein positiver Werth des Verhältnisses R_s/E_s und $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{E}_s$, dass die reflektirte Amplitude dieselbe Richtung hat, wie die einfallende (die Phasendifferenz des reflektirten Lichtes gegen das einfallende ist Null), ein positiver Werth von R_p/E_p und $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{E}_p$ hat dieselbe Bedeutung bei streifender Incidenz, dagegen die entgegengesetzte bei senkrechter Incidenz, indem dann die reflektirte Amplitude die entgegengesetzte Richtung hat, wie die einfallende (die Phasendifferenz des reflektirten Lichtes gegen das einfallende Licht ist gleich π).

Daher folgt aus den Formeln (28), dass beide Vektoren bei streifender Incidenz unabhängig von dem Werthe des Brechungsexponenten der Medien durch Reflexion eine Umkehr ihrer Amplituden erfahren. Dieser Satz ist von FRESNEL¹⁾ experimentell durch seinen Dreispiegelversuch verificirt, in welchem die Interferenz von zwei Lichtstrahlen beobachtet wird, von denen der eine an zwei Glasspiegeln, der andere an einem reflektirt wird. An der Stelle, an welcher die von beiden Strahlen durchlaufenen Wege dieselben Werthe haben (welche Stelle sich dadurch kennzeichnet, dass zu ihr bei Beleuchtung mit inhomogenem Lichte die Farben der Interferenzstreifen symmetrisch vertheilt sind), tritt Dunkelheit ein, d. h. die beiden Lichtstrahlen haben eine Phasendifferenz von π , d. h. entgegengesetzt gerichtete Amplituden.

Die Reflexion an zwei Spiegeln bringt den Lichtstrahl wieder in den ursprünglichen Zustand; man kann diese aber auch vermeiden und direkt einen einfallenden Lichtstrahl mit einem unter nahezu streifender Incidenz reflektirten zur Interferenz bringen, wie in dem LLOYD'schen Experiment²⁾ geschehen ist. Auch hier tritt Dunkelheit an der Stelle gleicher Weglängen beider Strahlen ein.

Aus den Formeln (27) folgt, dass bei senkrechter Incidenz für $n > 1$, d. h. bei Reflexion am stärker brechenden Medium nach NEUMANN die reflektirte Amplitude die gleiche Richtung hat, wie die einfallende, nach FRESNEL dagegen die entgegengesetzte. Diese Verhältnisse kehren sich um für $n < 1$, d. h. bei Reflexion am schwächer brechenden Medium.

Man hat bisher vergeblich versucht, durch Experimente zu entscheiden, ob die Amplitude durch Reflexion am stärker brechenden Medium umgekehrt wird oder nicht. Versuche an NEWTON'schen Ringen erlauben nur, die Amplitudenänderungen, wie sie durch Reflexion an zwei verschiedenen Grenzflächen herbeigeführt werden, mit einander zu vergleichen, und für eine derartige Vergleichung stimmen beide Theorien überein. — In neuerer Zeit hat O. WIENER³⁾

¹⁾ A. FRESNEL, Oeuvr. compl. T. I, pag. 703. Wegen der experimentellen Anordnung vergl. auch MASCART, Traité d'Optique. Bd. I, pag. 187, Paris 1889. Die Abhängigkeit der Erscheinung bei kleinerem Einfallswinkel vom Polarisationszustande ist erörtert von MASCART, Compt. rend. 105, pag. 967. 1887.

²⁾ LLOYD, Irish. Trans. 17. 1834. — POGG. Ann. 45, pag. 95. 1838. — G. QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 177. 1871.

³⁾ O. WIENER, WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

diese Frage dadurch zu entscheiden gesucht, dass er durchsichtige, lichtempfindliche Gelatinehäutchen, deren Dicke klein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes war, auf einen stark reflektirenden Spiegel¹⁾ mit sehr geringer Neigung gegen denselben befestigte. Bei senkrecht einfallendem Lichte hängt die photographische Wirkung im Häutchen ab von der Summe des einfallenden und des reflektirten Lichtvectors. Wenn dieselben also entgegengesetzt liegen, wird die erzielte Wirkung eine schwächere sein, als wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet sind.

Es treten nun in der That in Distanzen von einer halben Wellenlänge vom Spiegel abwechselnd Maxima und Minima der photographischen Wirkung ein, und zwar liegt am Spiegel selbst, für den $n > 1$ war, ein Minimum. Damit ist gezeigt, dass der FRESNEL'sche Vector oder die elektrische Kraft für das Auftreten der photographischen Wirkung maassgebend ist. Im Einklang mit diesem Versuche zeigte sich auch, dass zwei rechtwinklig gegen einander laufende Wellenzüge nur dann Interferenzen der photographischen Wirkung ergeben, wenn ihre Polarisations Ebenen zusammenfallen, dagegen nicht, wenn die Polarisations Ebenen senkrecht auf einander stehen. Da Interferenz nur bei parallelen Amplituden eintreten kann, so folgt auch aus diesem zweiten Versuche, dass für die photographische Wirkung ein Vector maassgebend ist, welcher senkrecht zur Polarisations Ebene liegt, d. h. der FRESNEL'sche Vector.

Spätere Versuche von DRUDE und NERNST²⁾ haben gleiche Resultate für die Fluoreszenzwirkung geliefert.

Durch diese Versuche ist noch keine Entscheidung zwischen der Zulässigkeit der Grundhypothesen der mechanischen Theorien von FRESNEL und NEUMANN (ob der Aether in allen Medien gleiche Dichte, aber verschiedene Elasticität besitzt, oder ob das Umgekehrte der Fall ist) getroffen, weil man nicht weiss, ob die untersuchten Wirkungen an den Vector der kinetischen oder an den der potentiellen Energie des Aethers geknüpft sind. Letzterer befolgt aber nach NEUMANN's Theorie die Gesetze, welchen ersterer nach der FRESNEL'schen unterworfen ist und umgekehrt³⁾ (cf. oben pag. 673).

Die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln (25') und (25) sind mannigfach experimentell verificirt. Am bequemsten lassen sich die Amplitudenverhältnisse $R_s : R_p$ und $D_s : D_p$ beobachten, d. h. die durch Reflexion und Brechung herbeigeführte Drehung der Polarisations Ebene linear polarisirten einfallenden Lichtes, da man hierzu nur zwei drehbare NICOL'sche Prismen gebraucht, bei denen man die Lage ihrer Polarisations Ebenen gegen die Einfallsebene bestimmen kann. Dreht man das analysirende Nicol so lange, bis der beobachtete reflektirte oder gebrochene Lichtstrahl vollständig ausgelöscht wird, so steht dessen Polarisations Ebene auf der des Nicols senkrecht, d. h. ihre Lage ist ebenfalls bekannt. Auf diesem Wege haben FRESNEL⁴⁾ und BREWSTER⁵⁾ die Formeln für $R_s : R_p$ und

¹⁾ WIENER benutzte meist Metallspiegel. Die theoretischen Betrachtungen modificiren sich dadurch nur sehr wenig, wie weiter unten ausgeführt ist.

²⁾ P. DRUDE u. W. NERNST, Gött. Nachr. 10, pag. 2. 1891. — WIED. Ann. 45, pag. 460. 1892.

³⁾ Theoretische Discussionen über die WIENER'schen Versuche finden sich bei A. CORNU, Compt. rend. 112, pag. 186 u. 365. 1891. — H. POINCARÉ, Compt. rend. 112, pag. 325 u. 456. 1891. — BERTHELOT, Compt. rend. 112, pag. 329. 1891. — A. POTIER, Compt. rend. 112, pag. 383. 1891; Journ. de phys. (2) 10 pag. 101. 1891. — P. DRUDE, WIED. Ann. 41, pag. 154. 1890; 43, pag. 177. 1891; 48, pag. 119. 1893.

⁴⁾ A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 314. 1821.

⁵⁾ D. BREWSTER, Phil. Trans. 1830, pag. 69, 133 u. 145.

$D_s : D_p$ verificirt, falls die beiden aneinander grenzenden Medien Glas und Luft resp. Wasser und Luft, waren. $D_s : D_p$ kann man am bequemsten beim Durchgang des Lichts durch eine planparallele Platte eines Mediums 2, welche sich in einem Medium 1 befindet, messen. Wegen der zweimaligen Brechung an der Vorder- und Hinterfläche derselben ist das Amplitudenverhältniss des austretenden Lichtes das Quadrat des Amplitudenverhältnisses des gebrochenen Lichtes.

Aus der Bestätigung der Formeln, welche sich für die Grössen R_s/R_p und D_s/D_p ergeben, folgt schon¹⁾, wie wir oben pag. 749 bei Besprechung der Krystallreflexion sahen, auch die Bestätigung der Formeln für die absoluten Werthe R_s , R_p , D_s , D_p , jedoch sind diese auch durch besondere Versuche verificirt.

PROVOSTAYE und DESAINS²⁾ haben die Formeln auf calorimetrischem Wege verificirt. Die Wärmestrahlen unterscheiden sich von den Lichtstrahlen nur durch ihre grössere Schwingungsdauer und daher sind für erstere ebenfalls die angestellten Betrachtungen anwendbar. In der That hat BÉRARD³⁾ schon im Jahre 1821 gezeigt, dass Wärmestrahlen wie die Lichtstrahlen durch Reflexion polarisirt werden können.

PROVOSTAYE und DESAINS polarisirten die einfallenden Wärmestrahlen mit Hilfe eines doppelbrechenden Prismas und haben mittelst eines Thermomultiplifiers die Richtigkeit der Formeln für die Intensitäten des reflektirten Lichtes bei Reflexion an einer Glasfläche nachgewiesen, sowohl für die s - als p -Componente.

Die Verification der Formel für R_p ist für Lichtstrahlen bei Reflexion an Glas von GLAN⁴⁾ mit Hilfe eines Polarisationsphotometers geschehen. Die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen betragen höchstens $1\frac{1}{8}$.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich darauf, dass das einfallende Licht linear polarisirt war. Ist dasselbe elliptisch polarisirt, so sind für E_p und E_s complexe Werthe $E_p e^{i\phi}$, $E_s e^{i\psi}$ einzuführen, wo dann die E_p , E_s , und $\phi - \psi$ die Gestalt der Schwingungsellipse des einfallenden Lichts nach den Gleichungen (8) der pag. 634 bestimmen.

Es werden dann die R_p , R_s , D_p , D_s ebenfalls complex, und zwar folgt aus den Formeln (25), dass, wenn man diese Grössen in die Form $R_p \cdot e^{i\phi'}$, $R_s e^{i\psi'}$, $D_p e^{i\phi''}$, $D_s e^{i\psi''}$ bringt, dann die Beziehungen stattfinden:

$$\phi' = \phi'' = \phi, \quad \psi' = \psi'' = \psi,$$

d. h. die relativen Phasendifferenzen der beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componenten des reflektirten und gebrochenen Lichtes haben gleiche Werthe wie im einfallenden Lichte. — Die Gestalt der Bahn der Aethertheilchen ist dagegen im reflektirten und gebrochenen Licht im Allgemeinen eine andere als im einfallenden, da die Formeln (8) der pag. 634 lehren, dass diese Gestalt auch von den Amplitudenverhältnissen jener beiden (s - und p -) Componenten abhängt. Nur für senkrechte und streifende Incidenz bleibt auch die Bahngestalt dieselbe, im ersteren Falle kehrt sich aber wegen

¹⁾ Man vergl. dazu auch G. STOKES, *Cambr. and Dubl. Math. Journ.* 4, pag. 1. 1849. — *Math. and phys. papers* II, pag. 101.

²⁾ PROVOSTAYE et DESAINS, *Ann. de chim. et de phys.* (3) 30, pag. 276. 1849.

³⁾ BÉRARD, *Mém. d'Arcueil* 3, pag. 5. 1821. Genauere Versuche hierüber stellte KNOBLAUCH (*POGG. Ann.* 74, pag. 161, 170 u. 177. 1848) mit Hilfe des MELLONI'schen Thermomultiplifiers an.

⁴⁾ P. GLAN, *Berl. Ber.* 1874, pag. 511.

der entgegengesetzten Richtung der Wellennormalen der Rotationssinn um. So wird z. B. ein senkrecht einfallender, rechts-circular polarisirter Lichtstrahl nach der Reflexion zu einem links-circular polarisirten, wie von POWELL¹⁾ experimentell verificirt ist. Alle Betrachtungen gelten unverändert auch vom FRESNEL'schen Standpunkte aus.

Fällt natürliches Licht ein, so ist zu setzen

$$E_p = \Sigma E_p e^{i\phi}, \quad E_s = \Sigma E_s e^{is},$$

wobei die Summen über alle möglichen Werthe E_p , E_s , ϕ und s zu erstrecken sind. Indess sind dieselben nach den früher (pag. 637) aus der Natur des natürlichen Lichtes abgeleiteten Gleichungen (10) an die Relationen geknüpft:

$$\Sigma E_p^2 = \Sigma E_s^2, \quad \Sigma E_p E_s \cos(\phi - s) = 0, \quad \Sigma E_p E_s \sin(\phi - s) = 0. \quad (29)$$

Es folgen dann aus den Formeln (25), falls man die Intensität des reflektirten Lichtes wieder durch J_p^r resp. J_s^r , die des einfallenden durch $J_p^e = J_s^e$ bezeichnet, analoge Gleichungen wie die Formeln (25''), welche bei einfallendem linear oder elliptisch polarisirtem Lichte bestehen, nämlich

$$J_p^r = J_p^e \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)}, \quad J_s^r = J_s^e \frac{\tan^2(\varphi - \chi)}{\tan^2(\varphi + \chi)}. \quad (30)$$

Bezieht man die Componenten des reflektirten Lichtes auf zwei rechtwinklige Ebenen, welche den Winkel α , resp. $\frac{\pi}{2} + \alpha$ mit der Einfallsebene einschliessen, so sind die Intensitäten der in diesen Ebenen schwingenden Componenten wegen des Bestehens der dritten der Gleichungen (29) gegeben durch

$$\begin{aligned} J_\alpha^r &= J_s^r \cos^2 \alpha + J_p^r \sin^2 \alpha, \\ J_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^r &= J_s^r \sin^2 \alpha + J_p^r \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Ebene der partiellen Polarisation des reflektirten Lichtes mit der Einfallsebene zusammenfällt, da für $\alpha = 0$ die Differenz zwischen J_α^r und $J_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^r$ ein Maximum erreicht.

Aus (30) ergibt sich das Quantum der Polarisation des reflektirten Lichtes zu

$$J_p^r - J_s^r = \frac{1}{2} J_e \left[\frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} - \frac{\tan^2(\varphi - \chi)}{\tan^2(\varphi + \chi)} \right], \quad (32)$$

die Gesammtmenge des reflektirten Lichtes zu

$$J^r = J_p^r + J_s^r = \frac{1}{2} J_e \left[\frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} + \frac{\tan^2(\varphi - \chi)}{\tan^2(\varphi + \chi)} \right], \quad (33)$$

wobei J_e die Gesammtintensität des einfallenden Lichtes bedeutet.

In ähnlicher Weise sind die Intensitäten für das durchgehende Licht aus (25) zu berechnen.

Aus (33) folgt, dass die Intensität des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes, da für diesen $\varphi + \chi = \frac{\pi}{2}$, und $\tan \varphi = n$ ist, gegeben ist durch

$$J^r = \frac{1}{2} J_e \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

Für Glas vom Brechungsexponenten 1.5 ist $J^r = \frac{1}{13.5} J_e$; die Methode, Licht durch einfache Reflexion zu polarisiren, ist also erheblich unvortheilhafter als die Anwendung eines Kalkpaths, welcher nahezu $\frac{1}{2} J_e$ für die Intensität des polarisirten Lichtes liefert.

¹⁾ POWELL, Phil. Mag. (3) 22, pag. 92 u. 262.

Die Formel (32) ist experimentell von DESAINS¹⁾ verificirt. Er bestimmte das Maass der Polarisation des reflektirten Lichtes, indem er dasselbe nach der Reflexion durch einen Satz paralleler Glasplatten gehen liess, welcher ebenfalls die Eigenschaft hat, die Intensitäten des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten durchgehenden Lichtes in verschiedenem Grade je nach dem Einfallswinkel zu schwächen, wie weiter unten noch ausführlicher erörtert werden soll. Durch geeignete Drehung des Glasplattensatzes kann man es daher erreichen, dass die beiden rechtwinklig zu einander polarisirten Componenten wieder gleiche Intensität erhalten, d. h., dass vollständige Depolarisation des von dem untersuchten Spiegel reflektirten Lichtes eintritt. Bei bekannter Wirkung des Glasplattensatzes lässt sich daher aus dessen Stellung das Quantum der Polarisation jenes Lichtes, d. h. $J_p^r - J_s^r$ bestimmen.

Die Gesamtintensität des vom Glas reflektirten Lichtes ist von RAYLEIGH²⁾ mit Hilfe eines Sektorenphotometers bestimmt. Derselbe beruht auf dem Princip, dass man einen Lichtstrahl in zu berechnender Weise schwächen kann, wenn man in seinen Weg eine rotirende Scheibe einschaltet, in welcher sich durchbrochene Stellen befinden, deren Grösse im Verhältniss zu den undurchbrochenen bekannt ist. Es ergab sich, dass frisch polirte Flächen ein Reflexionsvermögen haben, das um $1-2\%$ vom theoretischen Werthe abweicht; nach einigen Monaten oder Jahren nimmt es um $10-30\%$ ab, ohne dass man eine Veränderung der Politur wahrnimmt. Dies Verhalten muss offenbar durch Aenderung der Oberfläche herbeigeführt sein.

Der Einfluss des Alters der Politur auf die absoluten reflektirten Intensitäten, sowie auf die Grösse des Polarisationswinkels ist auch von CONROY³⁾ studirt, welcher zur Messung des ersteren meist polarisationsphotometrische Methoden benutzte. Im Allgemeinen ergaben sich nur geringe Abweichungen von den theoretischen Werthen.

Tritt eine mehrmalige (n -malige) Reflexion unter demselben Reflexionswinkel ein, wie es experimentell leicht realisirt werden kann, wenn das Licht z. B. zwischen zwei mit ihren Grenzflächen parallelen Glasstücken hin- und herreflektirt wird, so sind die absoluten Amplitudenverhältnisse R_s/E_s und R_p/F_p die n ten Potenzen der nach einmaliger Reflexion stattfindenden Werthe. Da ersteres Verhältniss (R_s/E_s) stets kleiner ist als letzteres (R_p/E_p), so vermag man durch wiederholte Reflexionen auch unter anderen Winkeln als unter dem Polarisationswinkel eine nahezu vollständige Polarisation zu erzielen, wie BREWSTER⁴⁾ gezeigt hat.

d) Reflexion und Durchgang des Lichtes durch eine planparallele isotrope Platte oder mehrere untereinander parallele.

Es sollen zunächst die Fälle betrachtet werden, in welchen die Platten so dick sind, dass sie keine Interferenzfarben ergeben. Es möge zunächst nur eine Platte vorhanden sein. Die reflektirte und durchgehende Lichtintensität ergibt

¹⁾ DESAINS, Compt. rend. 31, pag. 676. 1850. — Ann. de chim. et de phys. (3) 31, pag. 286. 1851. — POGG. Ann. 82, pag. 152. 1851.

²⁾ RAYLEIGH, Nat. 35, pag. 64. 1886; Proc. of the Roy. Soc. 41, pag. 275. 1886. — Nach einer mit dieser verwandten Methode hatte schon BOUGUER die absoluten von Glas und Wasser reflektirten Intensitäten gemessen. Vergl. VERDET, Wellenthorie, deutsch von EXNER, II. Bd., pag. 376. Braunschw. 1887.

³⁾ CONROY, Phil. Trans. 180, pag. 245. 1889. — Im Auszuge Proc. Roy. Soc. 45, pag. 101. 1888.

⁴⁾ D. BREWSTER, Phil. Trans. 1830; POGG. Ann. 19. 1830.

sich dann als Summe der Intensitäten derjenigen Lichtstrahlen, welche eine 1 malige, 3 malige, 5 malige etc. Reflexion an der Vorder- und Rückfläche der Platte, und eine 2 malige, 4 malige etc. Brechung an ihnen erfahren haben.

Setzt man

$$\begin{aligned} J_p^r &= r_p \cdot J_p^e, & J_s^r &= r_s \cdot J_s^e, \\ J_p^d &= d_p \cdot J_p^e, & J_s^d &= d_s \cdot J_s^e, \end{aligned} \quad (34)$$

wobei nach den Formeln (25'') gesetzt ist

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)}, & r_s &= \frac{\tan^2(\varphi - \chi)}{\tan^2(\varphi + \chi)}, \\ d_p &= 1 - r_p, & d_s &= 1 - r_s, \end{aligned} \quad (34')$$

so sind die reflektirten und durchgehenden Gesamtintensitäten I^r und I^d , wie aus der beistehenden Figur sich ergibt, in welcher die Intensitäten, welche zu summiren sind, bei den einzelnen Strahlen angegeben sind (Fig. 488).

$$\begin{aligned} I^r &= J^e [r + d^2 r (1 + r^2 + r^4 + \dots)] = J^e \frac{2r}{1+r}, \\ I^d &= J^e d^2 (1 + r^2 + r^4 + \dots) = J^e \frac{1-r}{1+r}. \end{aligned} \quad (35)$$

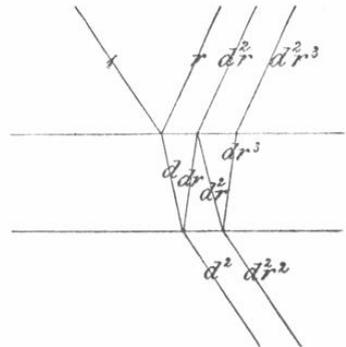
wobei an sämmtlichen Buchstaben noch die Indices p oder s anzufügen sind, je nachdem das parallel oder das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht betrachtet wird.

ARAGO¹⁾ hat die Formeln (35) in dem Falle, dass natürliches Licht einfällt, verificirt, indem er diejenigen Einfallswinkel maass, für welche die Intensität des reflektirten Lichtes in einem einfachen rationalen Verhältniss zu der des durchgehenden steht, was er mit Hilfe eines besonderen von ihm construirten Doppelprismas constatiren konnte. Er erhielt annähernde Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Einfallswinkeln. Bei der von ihm benützten Glasplatte hatte für $\varphi = 78^\circ 52'$ das reflektirte Licht dieselbe Intensität wie das durchgehende.

Sind mehrere (n) unter einander parallele identische Platten vorhanden (ein Plattensatz), so ist²⁾

$$I^r = J^e \frac{2nr}{1 + (2n-1)r}, \quad I^d = J^e \frac{1-r}{1 + (2n-1)r}. \quad (35')$$

Es folgt hieraus, dass, da I_s^r für den Polarisationswinkel $\varphi = \varphi'$ verschwindet, da dann $r_s = 0$ ist, unter diesem Winkel einfallendes natürliches Licht vollständig nach der Einfallsebene polarisirt ist, gerade wie bei der Reflexion an nur einer Grenzfläche. Die Intensität des reflektirten Lichtes ist aber in diesem Falle bei weitem grösser als bei letzterem. Betrug die Intensität des an einer Glasfläche unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes nur den 13·5ten Theil des einfallenden, so ist dieselbe bei Anwendung einer einzigen Platte schon



(Ph. 488.)

¹⁾ ARAGO, Oeuvr. compl. 10, pag. 150, 185, 217 u. 468.

²⁾ Man gelangt zu diesen Formeln am einfachsten durch einen Schluss von n Platten auf $n + 1$ Platten, cf. F. NEUMANN, Optik, herausg. von DORN, Leipzig 1885, pag. 147. — Man vergl. auch C. BOHN, POGG. Ann. 117, pag. 117. 1862.

doppelt so gross, bei Anwendung von 20 Platten beträgt sie den 2:3ten Theil des einfallenden Lichtes.

Die Verification der Formeln (35') bei Glas sowohl für die s - als p -Componente ist mit Hilfe eines Thermomultiplicators, d. h. für Wärmestrahlen, von PROVOSTAYE und DESAINS¹⁾ nachgewiesen. Um die Absorption²⁾ zu vermeiden, wurden Strahlen angewendet, welche schon durch eine dicke Glasschicht hindurchgegangen waren, so dass der Glasplattensatz für die benutzten Strahlen als vollkommen diatherman gelten konnte.

Fällt natürliches Licht ein, so ist das durch einen Plattensatz durchgehende Licht theilweise polarisirt und zwar senkrecht zur Einfallsebene. Der Betrag der Polarisation hängt in einer aus den Formeln (25') leicht zu berechnenden Weise vom Einfallswinkel ab. Ein solcher Glasplattensatz kann daher nach ARAGO³⁾ als Polarimeter benutzt werden, d. h. als ein Instrument, mittelst dessen man das Quantum der Polarisation eines Lichtstrahls messen kann, indem derselbe durch einen Plattensatz geschickt wird und derselbe in eine solche Lage gebracht wird, dass das austretende Licht völlig depolarisirt ist. Letzteres kann dadurch erkannt werden, dass bei einer Krystallplatte, welche im polarisirten Licht irgend welche Farbenerscheinungen zeigt, diese bei vollständiger Depolarisation des einfallenden Lichtes nicht mehr auftreten.

Die Anwendung eines Plattensatzes zur Bestimmung der Polarisation durch Reflexion ist von DESAINS⁴⁾ gemacht. Vermittelst desselben hat WILD⁵⁾ das blaue Himmelslicht untersucht, welches im Gegensatz zum Wolkenlicht theilweise polarisirt ist.

Die Sonne und der antisolare Punkt sind neutral, in der nächsten Umgebung ist ein Theil senkrecht zu dem durch die Sonne und den beobachteten Punkt gelegten Kreis polarisirt. Dann folgt in einem Abstände, der je nach der Sonnenhöhe von 7—15° variirt, wieder eine neutrale Zone, im übrigen Theile des Himmels fällt die Polarisationsebene mit der durch die Sonne gelegten Ebene zusammen. Das Maximum der Polarisation findet sich senkrecht zur Sonne.

WILD hat einen Glasplattensatz auch in ähnlicher Weise als Photometer verwandt⁶⁾.

Ist eine Platte vorhanden und dieselbe so dünn, dass sie zu Interferenzfarben Anlass giebt, so darf man nicht, wie vorhin, die Intensitäten der einzelnen mehrfach reflektirten und gebrochenen Strahlen addiren, um die Gesamtintensität des reflektirten und durchgehenden Lichtes zu erhalten, sondern es muss Rücksicht auf die Phasenunterschiede der einzelnen Strahlen genommen werden⁷⁾.

Man kann entweder so verfahren, dass man die complexen Amplituden, welche ja in der complexen Form zugleich die der zugehörigen Lichtwelle anhaftende Phase angeben, der einzelnen zur Interferenz gelangenden Wellen addirt,

1) PROVOSTAYE et DESAINS, Ann. de chim. et de phys. (3) 30, pag. 159. 1849.

2) Die betreffenden Formeln mit Rücksicht auf Absorption gab G. STOKES, Proc. Roy. Soc. 11, pag. 545. 1862. — Phil. Mag. (4) 24, pag. 450. 1862.

3) ARAGO, Oeuvr. compl. 10, pag. 270.

4) Vergl. d. Anm. 1 auf pag. 756.

5) WILD, POGG. Ann. 99, pag. 235. 1856.

6) WILD, ibid. Betreffs eines ähnlichen, von DUBOSQ construirten Photometers, bei welchem nur eine Glasplatte benutzt wird, vergl. VERDET, Wellentheorie, deutsch von EXNER, II. Bd. Braunschw. 1887, pag. 391.

7) Diese Rechnungen sind zuerst von AIRY (Phil. Mag. (2) 10, pag. 141; (3) 2, pag. 120. 1832. — POGG. Ann. 41. 1831 angestellt.

welche Operation auf unendliche Reihen führt, deren Summe aber leicht in geschlossener Form angebar ist, oder so, dass man für beide Grenzflächen der Platte die Uebergangsbedingungen (2) anwendet, dabei aber für das Innere der Platte nicht nur eine gebrochene, d. h. im Sinne der einfallenden Welle fortschreitende Bewegung annimmt, sondern auch eine im Innern reflektirte. Dieses Verfahren¹⁾ ist deshalb bequemer, weil man dadurch die Summation von unendlichen Reihen ganz umgeht.

Befindet sich die Platte, deren Dicke d sein mag, zwischen zwei gleichen Medien, in welchen das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes a_1 ist, während dasselbe in der Platte den Betrag a_2 besitzen soll, und haben μ , π_1 und π_2 die früheren Bedeutungen, nach welchen, falls φ den Einfallswinkel bezeichnet,

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{a_1}}, \quad \mu^2 + \pi_1^2 = \frac{1}{a_1}, \quad \mu^2 + \pi_2^2 = \frac{1}{a_2}$$

ist, setzt man ferner

$$p = e^{\frac{i}{\tau} \pi_2 d}, \quad q = e^{-\frac{i}{\tau} \pi_2 d}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T},$$

so findet man auf dem angedeuteten Wege für die reflektirten Amplituden die Werthe

$$R_s = E_s \frac{(p - q)(a_1^2 \pi_1^2 - a_2^2 \pi_2^2)}{(p - q)(a_1^2 \pi_1^2 + a_2^2 \pi_2^2) + 2(p + q)a_1 \pi_1 a_2 \pi_2}, \quad (36)$$

$$R_p = E_p \frac{(p - q)(\pi_1^2 - \pi_2^2)}{(p - q)(\pi_1^2 + \pi_2^2) + 2(p + q)\pi_1 \pi_2}.$$

Für die Amplituden des durch die Platte hindurchgehenden Lichtes ergibt sich

$$D_s = E_s e^{\frac{i}{\tau} \pi_1 d} \frac{4 a_1 \pi_1 a_2 \pi_2}{(p - q)(a_1^2 \pi_1^2 + a_2^2 \pi_2^2) + 2(p + q)a_1 \pi_1 a_2 \pi_2}, \quad (36')$$

$$D_p = E_p e^{\frac{i}{\tau} \pi_1 d} \frac{4 \pi_1 \pi_2}{(p - q)(\pi_1^2 + \pi_2^2) + 2(p + q)\pi_1 \pi_2}.$$

In den Formeln bedeuten E_s , E_p die Amplituden des einfallenden Lichtes. Auch wenn diese reell sind, d. h. dasselbe linear polarisirt ist, so sind doch die Amplituden des reflektirten und gebrochenen Lichtes complex, da sie die imaginäre Grösse $p - q = 2i \sin \frac{\pi_2 d}{\tau}$ enthalten, d. h. auch bei einfallendem linear polarisirten Lichte ist das reflektirte und durchgehende Licht elliptisch polarisirt.

Die Intensitäten J_s^r , J_p^r , J_s^d , J_p^d des reflektirten und durchgehenden Lichtes ergeben sich durch Multiplikation der Amplituden R_s , R_p , D_s , D_p mit ihren conjugirten Ausdrücken. Da $p - q$ die einzige in den Formeln auftretende imaginäre Grösse ist²⁾, so erhält man für jene Intensitäten, wenn man die des einfallenden Lichtes durch den oberen Index e bezeichnet:

$$J_s^r = J_s^e \frac{(a_1^2 \pi_1^2 - a_2^2 \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}}{4 a_1^2 \pi_1^2 a_2^2 \pi_2^2 + (a_1^2 \pi_1^2 - a_2^2 \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}}, \quad (37)$$

$$J_p^r = J_p^e \frac{(\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}}{4 \pi_1^2 \pi_2^2 + (\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}},$$

¹⁾ Dasselbe ist angewandt bei W. VOIGT, WIED. ANN. 22, pag. 226. 1887; 35, pag. 76. 1888. — P. DRUDE, WIED. ANN. 36, pag. 865. 1889; 43, pag. 126. 1891.

²⁾ π_2 ist reell, da wir Fälle der partiellen Reflexion voraussetzen.

$$J_s^d = J_s^e \frac{4a_1^2 \pi_1^2 a_2^2 \pi_2^2}{4a_1^2 \pi_1^2 a_2^2 \pi_2^2 + (a_1^2 \pi_1^2 - a_2^2 \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}},$$

$$J_p^d = J_p^e \frac{4\pi_1^2 \pi_2^2}{4\pi_1^2 \pi_2^2 + (\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2 \frac{\pi_2 d}{\tau}}. \quad (37')$$

Es ist also

$$J_s^r + J_s^d = J_s^e, \quad J_p^r + J_p^d = J_p^e,$$

wie es ja der Fall sein muss.

Die Formeln (37) und (37') lassen sich durch Einführung der nach den Gleichungen (24) definirten r_p , r_s in der einfachen Gestalt schreiben

$$J^r = J^e \frac{4r \sin^2 \left(2\pi \cos \chi \frac{d}{\lambda_2} \right)}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \left(2\pi \cos \chi \frac{d}{\lambda_2} \right)}, \quad (37'')$$

$$J^d = J^e - J^r,$$

wobei die unteren Indices p und s an J und r anzuhängen sind, und χ den Brechungswinkel, λ_2 die Wellenlänge des Lichtes in der Platte bedeuten.

Aus den Formeln (37'') folgt, dass, falls die Platte eine variable Dicke d besitzt, wie es am NEWTON'schen Farbengläse eintritt, die Maxima und Minima der reflektirten und durchgehenden Lichtintensität an den gleichen Stellen unabhängig von dem Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes eintreten. Daher ist die Erscheinung der NEWTON'schen Ringe im polarisirten Lichte dieselbe wie im natürlichen. Nur falls das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist und unter dem Polarisationswinkel auffällt, verschwindet die Erscheinung der Ringe gänzlich, da in diesem Falle $r_s = 0$ ist. Die Platte erscheint dann im reflektirten Lichte gleichförmig dunkel, im durchgehenden gleichförmig hell.

In den Minimis der reflektirten Lichtintensität tritt völlige Dunkelheit ein, also z. B. auch im Centrum des Ringsystems, für welches $d = 0$ ist. Diese Verhältnisse werden modificirt, wenn die Platte sich nicht mehr zwischen zwei Medien von demselben Brechungsexponenten befindet.

Liegt z. B. der Brechungsexponent der Platte zwischen denen der angrenzenden Medien, so tritt, wie wir oben pag. 752 sahen, entweder an der Vorder- und an der Rückfläche der Platte bei senkrechter Incidenz eine Umkehr der Schwingungsrichtung durch die Reflexion ein, oder an beiden Flächen keine. Jedenfalls haben die an beiden Flächen reflektirten Amplituden dasselbe Vorzeichen, und daher ist in diesem Falle das Centrum der NEWTON'schen Ringe im reflektirten Licht hell. Dies Verhalten war ohne Weiteres schon aus der Ueberlegung vorherzusehen, weil man im Centrum des Ringsystems sich die zwischenlagernde Platte ganz fort-denken kann. Lag nun dieselbe zwischen zwei Medien von verschiedenen Brechungsexponenten, so muss an ihrer Grenzfläche, d. h. im Ringcentrum, ein gewisser Theil des einfallenden Lichtes reflektirt werden, lag die Platte aber zwischen zwei Medien von gleichen Brechungsexponenten, so kann an ihrer Grenzfläche, d. h. im Ringcentrum, kein Licht reflektirt werden, da aus dem Innern eines optisch homogenen Mediums kein Licht reflektirt wird. — Diese je nach den Umständen verschiedene Helligkeit des Ringcentrums ist von YOUNG¹⁾ experimentell constatirt.

¹⁾ Man vergl. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von EXNER, I. Bd., Braunsch. 1881, pag. 22. Weitere Experimente sind von AIRY (l. c.) gemacht bei Reflexion zwischen Schwefelzink und Schwefeleisen. — Vergl. auch BREWSTER, Phil. Mag. 32, pag. 181. 1849.

In den Minimis der Lichtintensität des reflektirten Lichtes tritt natürlich auch nicht vollkommene Dunkelheit ein, falls die beiden die Platte umgebenden Medien verschiedene Brechungsexponenten besitzen, da die an der Vorderfläche der Platte reflektirten Wellen eine andere Intensität besitzen, als die an der Hinterfläche reflektirten, mit welchen erstere interferiren.

Besitzt die Platte die Dicke von mehreren Wellenlängen, so erscheint sie bei Beleuchtung im weissen Lichte farblos, da die Maxima und Minima verschiedener Lichtsorten übereinander fallen. Zerlegt man dagegen das reflektirte Licht spectral, so erkennt man, dass dasselbe nicht ein continuirliches Spectrum liefert, sondern ein von schwarzen Streifen durchzogenes, welche um so enger an einander liegen, je dicker die Platte ist. WERNICKE¹⁾ hat die Beobachtung dieser Streifen dazu angewandt, um die Differenz in den Phasen des Lichtes, welches in der Lamelle an zwei verschiedenen, an dieselbe anstossenden Substanzen reflektirt wird, zu bestimmen. Wenn man mit einem Fernrohr auf die Grenzlinie, in der jene beiden Substanzen aneinanderstossen, einstellt, so erscheinen offenbar an ihr jene Interferenzstreifen abgesetzt, wenn eine Phasendifferenz existirt. Aus der relativen Verschiebung des einen Streifensystems gegen das andere kann man die Grösse der Phasendifferenz berechnen. — WERNICKE constatirte nach dieser Methode, dass bei Anwendung von zwei Substanzen, von denen die eine einen grösseren, die andere einen kleineren Brechungsexponenten als die Lamelle besitzt, eine Phasendifferenz von π auftritt (cf. pag. 752), d. h. dass in der Grenzlinie, in welcher beide Substanzen aneinanderstossen, die Maxima pes einen Interferenzbildes in die Verlängerung der Minima des andern fallen.

e) Modifikation der Reflexionserscheinungen durch Oberflächenschichten.

Das Studium gerade der zuletzt beschriebenen Erscheinungen, der NEWTON'schen Ringe im polarisirten Lichte, hat zu der Entdeckung geführt, dass die bisher beschriebenen Reflexionsgesetze nicht immer streng erfüllt sind.

Als AIRY²⁾ die NEWTON'schen Ringe, welche er zwischen einer Glaslinse und einem Diamanten hervorbrachte, in senkrecht zur Einfallsebene polarisirter Beleuchtung betrachtete, verschwanden bei Variation des Einfallswinkels die Ringe nicht plötzlich, als der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich wurde, und traten bei weiterem Wachsen des Einfallswinkels nicht wieder an denselben Stellen auf, an welchen sie vorher gelegen hatten, wie es die auseinandergesetzte Theorie erfordert, sondern es trat Folgendes ein:

Der schwarze centrale Fleck öffnete sich drei oder vier Grade vor dem Winkel des Polarisationsmaximums. Der entstandene centrale, bei einfallendem weissen Lichte farbige Fleck erreichte seine grösste Ausdehnung, wenn die Incidenz dem Winkel des Polarisationsmaximums gleich geworden war, und verschwand wieder fünf oder sechs Grade hinter dem Polarisationsmaximum.

Diese Erscheinungen führen auf die Auffassung, dass die *s*-Komponente in der Nähe des Polarisationswinkels durch die Reflexion eine gewisse Phasenänderung erleidet, oder mit anderen Worten, dass auch bei Reflexion an einer Grenzfläche bei einfallendem linear polarisirten Lichte das reflektirte Licht elliptisch polarisirt ist, falls der Einfallswinkel dem früher definirten Polarisationswinkel nahe liegt. Da die von AIRY beobachteten Ringe unter keinem Einfallswinkel

1) W. WERNICKE, Berl. Ber. 1875, pag. 673.

2) AIRY, Camb. Trans. 4, pag. 219. 1832.

winkel verschwanden, so folgt zugleich, dass die s -Componente für keinen Einfallswinkel verschwindet, oder dass unter keiner Incidenz einfallendes, natürliches Licht durch Reflexion zu vollständig nach der Einfallsebene linear polarisirt wird, mit anderen Worten, dass es im eigentlichen Sinne keinen Polarisationswinkel giebt¹⁾.

Diese aus der AIRY'schen Beobachtung zu ziehenden Schlussfolgerungen hat JAMIN experimentell bei zahlreichen festen²⁾ und flüssigen³⁾ Substanzen verificirt, indem er linear polarisirtes Licht, dessen Polarisationsebene nicht mit der Einfallsebene parallel war, oder senkrecht zu ihr stand, nach der Reflexion an jenen Substanzen mit Hilfe eines BABINET'schen Compensators, dessen Hauptschnitte parallel und senkrecht zur Reflexionsebene lagen, und eines drehbaren Nicols untersuchte. Nach den Erörterungen der pag. 721 misst man mit Hilfe des ersteren die relative Phasendifferenz (Δ) derjenigen beiden Componenten des reflektirten Lichtes, welche nach den Hauptschnitten des Compensators genommen sind, d. h. parallel und senkrecht zur Einfallsebene, mit Hilfe des Nicols dagegen wird das Azimuth (ψ) der Polarisationsebene des durch den Compensator linear polarisirt gemachten Lichtes gemessen, oder wie man sich kurz ausdrückt, das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation.

JAMIN fand nun, dass Δ continuirlich bei zunehmendem Einfallswinkel von 0 bis π (resp. von π bis 0, was keinen wesentlichen Unterschied bedeutet, da der Sinn, in welchem man die reflektirten Amplituden als positiv annimmt, willkürlich ist) variire, dass Δ den Werth $\pi/2$ annimmt für denjenigen Einfallswinkel, welcher nach der obigen FRESNEL-NEUMANN'schen Theorie der Polarisationswinkel sein sollte, dessen Grösse also durch die Beziehung $\tan \varphi = n$ gegeben ist, und dass für diesen ψ nicht Null, wie es obige Theorie erfordert, sei, sondern ein von Null noch messbar abweichendes Minimum annehme. Der Winkel, für den Δ zu $\frac{\pi}{2}$ wird, wird der Haupteinfallswinkel genannt. Eine merkliche Abweichung des Δ von den Werthen 0 oder π , d. h. eine merkliche Ellipticität des reflektirten Lichtes tritt nur für Einfallswinkel ein, welche dem Haupteinfallswinkel benachbart sind.

Der Vorzeichenwechsel einer Amplitude kann man auch als Aenderung der zugehörigen Phase um π deuten. Die Differenz zwischen den beobachteten Eigenschaften des reflektirten Lichtes und den nach der bisher dargelegten Theorie sich ergebenden liegt daher darin, dass letztere bei einem gewissen Einfallswinkel eine sprunghafte Aenderung der relativen Phasendifferenz Δ um π ausspricht, während die Beobachtungen eine allmähliche Aenderung derselben erweisen. Dass jene theoretische sprunghafte Aenderung keine wirkliche Discontinuität der Erscheinungen zur Folge hat, welche in der Natur nie stattfindet, liegt daran, dass für jene Einfallswinkel die Componente R_s theoretisch Null sein müsste. Wenn, wie es faktisch der Fall ist, dieselbe für keinen Einfallswinkel verschwindet, so folgt daraus wegen des Continuitätsprincipes schon von selbst, dass die durch Wechsel des Einfallswinkels hervor-

¹⁾ Diese Beobachtung hatte schon BREWSTER an einigen stark brechenden Substanzen gemacht (Phil. trans. 1815, pag. 125). Vergl. auch SEEBECK, Observaciones de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Diss. Berolini 1830, pag. 46. — POGG. Ann. 20, pag. 35. 1830.

²⁾ JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 29, pag. 263. 1850.

³⁾ JAMIN, ibid. 31, pag. 165. 1850.

gebrachte Aenderung der Phasendifferenz Δ um π allmählich, nicht sprunghaft vor sich gehen muss.

Da R_c beim Haupteinfallswinkel nur sehr kleine Werthe besitzt, so ist es für genaue Messung von Δ erforderlich, mit sehr intensivem Lichte (Sonnenlicht) zu beleuchten und das Azimuth der Polarisationssebene des einfallenden Lichtes nahezu senkrecht zur Einfallsebene zu wählen, damit ψ nicht zu kleine Werthe erhält. Der Compensator misst Δ am genauesten, wenn $\psi = 45^\circ$ ist. Man wählt daher (wie von DRUDE, cf. unten, geschehen ist) die Versuchsanordnung zweckmässig so, dass man das analysirende Nicol in der festen Lage lässt, in welcher seine Polarisationssebene einen Winkel von $\pm 45^\circ$ mit der Einfallsebene bildet, dagegen das polarisirende Nicol und die Compensatorschraube so lange dreht, bis dass im Gesichtsfelde Dunkelheit eintritt. Das Azimuth des polarisirenden Nicols in diesem Falle ist das Complement des Azimuths der Polarisationssebene des analysirenden Nicols in demjenigen Falle, dass das einfallende Licht unter dem Winkel $\pm 45^\circ$ gegen die Einfallsebene polarisirt ist.

JAMIN fand, dass zwei Klassen von Substanzen zu unterscheiden wären, je nach dem Vorzeichen von Δ . Setzt man fest (was in gewisser Weise willkürlich ist), dass bei streifender Incidenz $\Delta = 0$, bei senkrechter Incidenz $\Delta = \pm \pi$ sei, und bezeichnet Δ die Differenz zwischen den Phasen des senkrecht und des parallel zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes, so gerechnet, dass letztere als Subtrahend auftritt, so geht bei den von JAMIN »positiv« genannten Substanzen Δ mit abnehmendem Einfallswinkel continuirlich von 0 in $-\pi$ über, bei den »negativen« Substanzen von 0 in $+\pi$.

Die festen durchsichtigen Substanzen gehören im Allgemeinen zu den positiven Körpern, falls ihr Brechungsexponent grösser als 1.46 ist, dagegen zu den negativen, falls er kleiner als diese Zahl ist. Jedoch kommen Ausnahmen von dieser Regel vor. Dieselbe ist für Flüssigkeiten gar nicht mehr anwendbar, da für wässrige Salzlösungen z. B. das Vorzeichen von Δ sich mit der Concentration ändern kann, ohne dass der Brechungsexponent stark dadurch beeinflusst ist. Wasser und wässrige Lösungen verhalten sich im Allgemeinen als negative Körper, Alkohol, Aether und Oele als positive.

Die Untersuchungen von QUINCKE¹⁾ haben indess gezeigt, dass die Unterscheidung der Substanzen in positive und negative nur einen Sinn hat, wenn man die Reflexion immer in Luft stattfinden lässt. Findet dieselbe in der Substanz selber statt, so kehrt sich damit zugleich das Vorzeichen von Δ um. QUINCKE untersuchte auch die Reflexion an Gläsern in Flüssigkeiten und fand qualitativ die gleichen Erscheinungen, wie bei Reflexion in Luft.

Die JAMIN'sche Untersuchungsmethode ist ausserdem von KURZ²⁾ auf Flintglas angewandt und hat zu gleichen Resultaten geführt, wie sie JAMIN erhalten hat. — CORNU³⁾ hat die Abhängigkeit der elliptischen Reflexion von der Farbe des angewandten Lichtes an zahlreichen Substanzen ermittelt, selbst für ultraviolette Strahlen mit Hilfe photographischer Methoden.

Bezogen sich die erwähnten Arbeiten auf Feststellung der relativen Phasendifferenz Δ der parallel und der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtcomponenten bei einfallendem linear polarisirtem Lichte, so hat

¹⁾ G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 355. 1866.

²⁾ KURZ, POGG. Ann. 108, pag. 588. 1859.

³⁾ A. CORNU, Compt. rend. 108, pag. 917 u. 1211. 1889.

WERNICKE¹⁾ nach seiner oben (pag. 761) erwähnten Methode die absoluten durch die Reflexion hervorgerufenen Phasenänderungen Δ_p und Δ_s jener Componenten d. h. ihre Phasendifferenzen gegen die Componenten des einfallenden Lichtes an der Grenzfläche genommen, bestimmen können. Es ergab sich, dass Δ_p stets 0 (oder π) ist, während Δ_s allmählich von 0 zu π bei Variation des Einfallswinkels sich ändert. — Nach der gleichen Methode hat RITTER²⁾ die Reflexion des Lichtes an parallel zur optischen Axe geschnittenem Quarz untersucht und gefunden, dass auch hier nur Δ_s eine allmähliche Aenderung erleidet. Es ergeben sich verschiedene Werthe des Haupteinfallswinkels je nach der Lage der optischen Axe zur Einfallsebene.

Bald nachdem JAMIN die beschriebenen Experimente angestellt hatte, gab CAUCHY³⁾ eine Theorie derselben, in welcher ausser den Brechungsexponenten der beiden aneinander grenzenden Medien noch ein gewisser Coefficient ϵ auftritt, welchem JAMIN den Namen des Ellipticitätscoefficienten gab und welcher die Modifikation der beobachteten Erscheinungen gegenüber den durch die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln dargestellten theoretisch angeibt. Ableitungen der Formeln CAUCHY's wurden gegeben von BEER⁴⁾, ETTINGSHAUSEN⁵⁾, EISENLOHR⁶⁾ und von LANG⁷⁾. Man erhält dieselben aus der Annahme, dass die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente des einfallenden Lichtes im reflektirten und im gebrochenen Strahle auch longitudinale Schwingungen erregt, welche bei ihrer Fortpflanzung, deren Geschwindigkeit in beiden Medien als verschieden angenommen wird, an Intensität äusserst rasch abnehmen und schon in unmessbarer Entfernung von der Trennungsfläche verschwinden.

Eine andere Theorie⁸⁾ der genannten Erscheinungen beruht auf der Vorstellung, dass der Uebergang zwischen beiden aneinander grenzenden Medien nicht ein plötzlicher sein kann, wie es bisher bei Benutzung der Formeln angenommen ist, sondern streng genommen ein allmählicher ist, dass also zwischen beiden homogenen Medien sich eine sehr dünne Schicht mit variablem Brechungsexponenten befindet, welche einen continuirlichen Uebergang der Werthe der Brechungsexponenten in beiden angrenzenden Medien vermittelt.

Im Uebrigen wird die bisher erörterte Theorie unverändert beibehalten, es werden also z. B. keine longitudinalen Strahlen eingeführt. Die genannte Zwischen- oder Oberflächenschicht kann künstlich durch die Politur noch vergrössert sein, sie kann aber auch, wie z. B. bei Flüssigkeiten, eine natürliche sein. Eine auf dieser Vorstellung aufgebaute Theorie ist von L. LORENZ⁹⁾ gegeben, welche indess nicht zu völlig analytisch identischen Formeln für die Amplituden und Phasen des reflektirten und gebrochenen Lichtes führt wie die CAUCHY'sche Theorie.

1) W. WERNICKE, WIED. Ann. 25, pag. 203. 1885.

2) R. RITTER, WIED. Ann. 36, pag. 236. 1889.

3) A. CAUCHY, Compt. rend 30, pag. 465. 1850; 31, pag. 60, 255 u. 766. 1850. — Mém. de l'Acad. des sc. 22, pag. 29. 1849.

4) A. BEER, POGG. Ann. 111, pag. 467. 1854.

5) ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. 18, pag. 369. 1855.

6) EISENLOHR, POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858.

7) V. v. LANG, Einleitung in die theoretische Physik, Braunschw. 1873, pag. 263.

8) Im Grunde genommen ist diese Theorie dieselbe wie die CAUCHY's, denn in einer inhomogenen Schicht muss man thatsächlich Longitudinalwellen annehmen. — Diese Vorstellung vermeidet aber gewisse Schwierigkeiten der CAUCHY'schen Theorie.

9) L. LORENZ, POGG. Ann. 111, pag. 460. 1860; 114, pag. 238. 1861.

Zur numerischen Uebereinstimmung mit dieser führen die Rechnungen P. ZECH's¹⁾, welcher indess insofern eine zu specielle Annahme benutzte, als er die Oberflächenschicht als längs ihrer ganzen Dicke homogen annahm.

Die Ausführungen VON DER MÜHLL's²⁾ führten insofern zu keinem Resultate, als sie die Reflexionserscheinungen als unabhängig von der Existenz der Oberflächenschicht ergeben, so lange das Quadrat ihrer Dicke gegen das der Wellenlänge des Lichtes zu vernachlässigen sei.

In neuerer Zeit hat indess A. C. VAN KYN VAN ALKEMADE³⁾ eine Theorie dieser Erscheinungen unter Benutzung der Vorstellung einer beliebigen, aber sehr dünnen Oberflächenschicht von der elektromagnetischen Lichttheorie aus gegeben, DRUDE⁴⁾ von der mechanischen Theorie aus. Beide Wege führen natürlich zu gleichen Resultaten, da man auch die Ausgangsgleichungen in einander überführen kann.

Für das relative Amplitudenverhältniss $\tan \psi$ und die relative Phasendifferenz Δ der beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Componenten ergeben sich unter der Voraussetzung, dass die Oberflächenschicht dünn gegen die Wellenlänge des Lichtes sei, analytisch identische Resultate mit der CAUCHY'schen Theorie. Diese Formeln sind durch die JAMINschen und QUINCKE'schen Versuche experimentell bestätigt.

Bezeichnet Δ die relative Phasendifferenz bei der Reflexion am Medium (2), Δ' dieselbe bei Reflexion am Medium (1), φ den Einfallswinkel im ersten Falle, φ' denselben im letzteren, und ist schliesslich n der Brechungsexponent des Mediums 2 gegen das Medium 1, ϵ der Ellipticitätscoefficient, so kann man die CAUCHY'schen Formeln in die Gestalt bringen:

$$\tan \Delta = 2\epsilon \frac{\sin \varphi \tan \varphi}{\tan^2 \varphi - 1}, \quad \tan \Delta' = -2\epsilon n \frac{\sin \varphi' \tan \varphi'}{n^2 \tan^2 \varphi' - 1}. \quad (38)$$

Die reflektirten Amplituden, d. h. auch $\tan \psi$, erweisen sich im Allgemeinen als erst von dem Quadrat von ϵ abhängig. Nur bei dem Einfallswinkel $\varphi = \arctan n$ bei Reflexion am Medium 2, und bei dem Einfallswinkel $\varphi' = \arctan \frac{1}{n}$ bei Reflexion am Medium 1 ist $\tan \psi$ resp. $\tan \psi'$ (wobei sich ψ auf ersteren, ψ' auf letzteren Fall bezieht), von ϵ selbst abhängig, nämlich

$$\tan \psi = \tan \psi' = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + n^2}. \quad (39)$$

Diese Resultate werden durch die Erfahrung völlig bestätigt, vorausgesetzt dass ϵ so klein ist, dass sein Quadrat gegen die Grösse selbst zu vernachlässigen sei. Im Allgemeinen müssen dann die Intensitäten des reflektirten Lichtes durch die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln befriedigend dargestellt werden, und das ist, wie wir nach den pag. 754 erwähnten Experimenten sahen, wirklich der Fall. Nur für den Einfallswinkel, welcher der Polarisationswinkel der Substanzen sein sollte, für welchen also ψ nach den FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln Null sein sollte, tritt eine Abweichung hinsichtlich des Verhaltens der Amplituden ein, indem für diesen Einfallswinkel jene Grösse ψ nicht Null ist, sondern eine nach

¹⁾ P. ZECH, POGG. Ann. 109, pag. 60. 1860.

²⁾ K. VON DER MÜHLL, Math. Ann. 5, pag. 471. 1872.

³⁾ A. C. VAN KYN VAN ALKEMADE, WIED. Ann. 20, pag. 22. 1883.

⁴⁾ P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 126. 1891.

den Gleichungen (39) definirte Grösse behält. Zugleich wird für diesen Winkel Δ resp. Δ' zu $\frac{\pi}{2}$, wie die Gleichungen (38) lehren, d. h. jener Einfallswinkel ist der Haupteinfallswinkel. Letztere Gleichungen erklären auch völlig die von QUINCKE beobachtete Umkehr des Vorzeichens der elliptischen Reflexion bei Vertauschung des reflektirenden Mediums.

Die Theorie ergibt ferner in Uebereinstimmung mit dem Experiment, dass von den absoluten, durch die Reflexion herbeigeführten Phasenänderungen Δ_ϕ und Δ_s nur letztere in merklicher Weise durch die Anwesenheit der Oberflächenschicht modificirt wird, und ebenso ergibt die Theorie einen nur unbedeutenden Einfluss der Oberflächenschicht auf das gebrochene Licht.

Bezeichnet dl die Dicke einer Elementarschicht der Oberflächenschicht an einer Stelle derselben, an welcher der Brechungsindex gegen das Medium 1 den Werth n' hat, so ist

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n^2 - 1} \int dl \frac{(n'^2 - 1)(n^2 - n'^2)}{n'^2}, \quad (40)$$

wobei unter λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im Medium (1) verstanden ist, und das Integral über die ganze Oberflächenschicht zu erstrecken ist.

Nach den Gleichungen (38) entspricht ein positives ε einem nach der JAMIN'schen Bezeichnung (cf. pag. 763) positiven Sinne der elliptischen Reflexion. Nach der Gleichung (40) ist ε positiv, falls der Brechungsindex n' jeder Elementarschicht der Oberflächenschicht zwischen denen der angrenzenden Medien 1 und 2 enthalten ist. In diesem Falle kann man eine untere Grenze l für die Dicke der Oberflächenschicht angeben. Dieselbe beträgt

$$\frac{l}{\lambda} > \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Bei Diamant, für welchen ε nach JAMIN 0.018 beträgt, ist diese untere Grenze $l = 0.0068 \lambda$. Diese geringe Dicke der Oberflächenschicht vermag also schon die beim Diamant in sehr starkem Maasse auftretende elliptische Reflexion zu erklären, was für die Wahrscheinlichkeit der ganzen Vorstellungsweise sehr günstig ist.

Ist in einer grösseren Anzahl von Elementarschichten der Oberflächenschicht n' grösser als n , so kann ε negativ werden, wie Formel (40) zeigt. Dies enthält einen plausibeln Grund dafür, dass polirte feste Körper mit niederem Brechungsindex negative elliptische Reflexion zeigen, da man sich vorstellen kann, dass bei diesen der Brechungsindex der durch das Polirmittel künstlich hervorgerufenen Oberflächenschicht den der polirten Substanz übertrifft.

Auf Grund der FRESNEL'schen Vorstellung variabler Dichte der Oberflächenschicht gelangte POTIER¹⁾ auf anderem Wege zu Resultaten, welche zwar mit den CAUCHY'schen analytisch nicht identisch zu sein scheinen²⁾, aber für ein und dieselbe Farbe nicht merklich von ihnen abweichen sollen. Speciell ist die von POTIER gegebene Formel für den Ellipticitätscoefficienten analog mit der obigen Formel (40), insofern als sie ebenfalls die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im Nenner enthält. Sieht man also von der Dispersion der Brechungsindex der Medien 1 und 2 und ihrer Grenzschicht ab, so folgt, dass der Ellipticitätscoefficient umgekehrt proportional mit der Wellenlänge ist. Die oben (pag. 763)

¹⁾ POTIER, Compt. rend. 1888, pag. 599. 1889.

²⁾ Aus der kurzen l. c. gegebenen Notiz lässt sich dies nicht ersehen.

citirten Experimente von CORNU bestätigen ein nach diesem Gesetze starkes Wachsen der elliptischen Reflexion mit abnehmender Wellenlänge. Die CAUCHY'sche Theorie ergibt dagegen einen von der Wellenlänge unabhängigen Ellipticitätscoëfficienten.

Auch in anderen Fällen ergibt sich keine Uebereinstimmung mehr zwischen der CAUCHY'schen Theorie und der der Oberflächenschichten, wie DRUDE ausführte. Es sind dies die Fälle, für welche die absoluten Amplituden- und Phasenänderungen des reflektirten Lichtes beider (s - und p -) Componenten maassgebend sind, und welche z. B. bei der Erscheinung der NEWTON'schen Ringe im polarisirten Licht eintreten, falls die dieselben erzeugende Platte mit Oberflächenschichten behaftet ist.

Theoretisch ist die Erscheinung der NEWTON'schen Ringe, wie sie durch das Auftreten der elliptischen Reflexion an den Grenzflächen modificirt wird, zunächst von JAMIN¹⁾ nach der CAUCHY'schen Theorie behandelt. Letztere erweist sich aber insofern hier als unzureichend, als sie die Helligkeit des Centralflecks der NEWTON'schen Ringe, welcher einer Plattendicke gleich Null entspricht, bei Beleuchtung mit unter dem Polarisationswinkel einfallendem senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichte, dem der übrigen Maxima der Ringe als gleich ergibt, während derselbe, wie das Experiment lehrt, viel dunkler als letztere ist. — Zu diesem Resultate führen jedoch die DRUDE'schen Rechnungen, und zugleich ist in ihnen gezeigt, dass man aus dem Polarisationswinkel des Centralflecks den Brechungsexponent der Oberflächenschicht erhält, falls man diese als homogen annimmt²⁾, und daher auch bei bekannten durch gewöhnliche Reflexion bestimmten Ellipticitätscoëfficienten nach Formel (40) die Dicke der Oberflächenschicht.

Erweist sich daher die CAUCHY'sche Theorie schon aus dem genannten Grunde als nicht ausreichend gegenüber der die Vorstellung von Oberflächenschichten benutzenden, so tritt dies besonders auch noch durch Heranziehung folgender Thatsachen hervor:

Nach der Vorstellung der Oberflächenschichten ist der Ellipticitätscoëfficient mehr eine secundäre, von Nebenumständen (nämlich der Oberflächenschicht) abhängende Grösse, während derselbe nach CAUCHY für die beiden Medien, an deren Grenze die Reflexion stattfindet, charakteristisch wäre.

Die Beobachtungen sprechen nun entschieden mehr für die erste Auffassung, denn es hat sich der Ellipticitätscoëfficient als stark von der Behandlung, Politur Alter etc. des Spiegels als abhängig erwiesen³⁾ und andererseits zeigen Beobachtungen an frischen Krystall-Spalt-Flächen⁴⁾ und neuerdings auch an gut rein

¹⁾ JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 36, pag. 158. 1852. — Vergl. auch MASCART, Compt. rend. 112, pag. 407. 1891; Ann. de chim. et de phys. (6) 24, pag. 373. 1891.

²⁾ Eine Anwendung hiervon ist gemacht von P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 158. 1891.

³⁾ Vergl. C. SPURGE, Proc. Roy. Soc. 42, pag. 242. 1887. — P. DRUDE, cf. folgende Anm. Auf eine Wirkung von Oberflächenschichten ist auch die von GLAZEBROOK (Proc. cambr. Phil. Soc. V (3) pag. 169. 1884) beobachtete Abhängigkeit der Drehung der Polarisationssebene des in Glas gebrochenen Lichtes von der Feuchtigkeit der umgebenden Luft zurückzuführen.

⁴⁾ P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 532. 1889. Gegen diese Beobachtungen sind Einwände von K. E. F. SCHMIDT (WIED. Ann. 37, pag. 353. 1889) erhoben, welcher fand, dass an Kalkspath-Spaltflächen noch starke elliptische Reflexion vorhanden sei. Indess hat für diese DRUDE (WIED. Ann. 38, pag. 265. 1889.) seine früheren Resultate bestätigt gefunden, dass nämlich ϵ sehr klein sei, wenn man genügend frische Spaltflächen untersucht.

gehaltenem Wasser¹⁾, dass, je mehr man für die Fernhaltung von Oberflächenschichten sorgt, auch der Ellipticitätscoëfficient um so kleiner wird.

Ferner hat QUINCKE²⁾ den Einwand gegen die CAUCHY'sche Theorie erhoben, dass, falls der Ellipticitätscoëfficient eines Mediums a gegen b , und von b gegen c beobachtet ist, die CAUCHY'sche Theorie den Ellipticitätscoëfficienten von a gegen c zu berechnen erlaubt. Dieser berechnete Werth stimmt aber durchaus nicht mit dem beobachteten. Ebenso ist die von RAYLEIGH³⁾ beobachtete Lichtreflexion an der Grenze zweier Medien von gleichem Brechungsexponenten nach der CAUCHY'schen Theorie nicht zu erklären.

Diese Einwände kann man gegen die Theorie der Oberflächenschichten nicht geltend machen. — Wie oben erörtert ist, ergibt sich der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ durch die Beziehung $\text{tang } \bar{\varphi} = n^4$). Von dieser Regel haben indess schon BREWSTER und SEEBECK⁵⁾ merkliche Ausnahmen constatirt; der Winkel des Polarisationsmaximums (welcher derselbe wie $\bar{\varphi}$ ist), schwankte oft bei demselben Spiegel je nach Wahl des Polirmittels und des Alters seiner Herstellung. Diese Erscheinungen sind nach der Theorie der Oberflächenschichten so zu erklären, dass dieselben nicht mehr so dünn sind, dass das Quadrat ihrer Dicke gegen das der Lichtwellenlänge zu vernachlässigen ist⁶⁾.

Es ist schliesslich noch ein Versuch von MATHIEU⁷⁾ zu erwähnen, welcher die elliptische Reflexion durchsichtiger Körper dadurch erklären wollte, dass er die NEUMANN'schen Formeln durch Berücksichtigung eines kleinen durch den Akt der Reflexion herbeigeführten Intensitätsverlustes modificirte. — Die erhaltenen Resultate schliessen sich aber den Beobachtungen nicht so gut an, wie die aus der obigen Theorie sich ergebenden. — Auch ist es unwahrscheinlich, dass der durch Reflexion herbeigeführte Intensitätsverlust für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente weit grösser sein sollte, als für die parallel zur Einfallsebene polarisirte, wie es die MATHIEU'sche Theorie erfordert. — Schliesslich ist gegen dieselbe einzuwenden, dass die Ellipticität des reflektirten Lichtes nicht von der grösseren oder geringeren Vollkommenheit der Politur des Spiegels abhängt.

Die folgende Tabelle enthält die Werthe der Ellipticitätscoëfficienten ε , des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$, sowie des aus ihm nach der Formel $\bar{n} = \text{arc tang } \bar{\varphi}$ berechneten Brechungsexponenten nach Beobachtungen von JAMIN. n giebt den direkt ermittelten Werth der Brechungsexponenten an. — Die Reflexion fand stets in Luft statt.

Wenn die erhaltenen Zahlen, zumal bei festen Körpern, auch nicht Constanten

1) LORD RAYLEIGH, Phil. Mag. 30, pag. 386. 1890; 33, pag. I. 1892.

2) G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 359. 1866.

3) LORD RAYLEIGH, Rep. of the Brit. Assoc. 1887, pag. 585.

4) Daher ist die W. WERNICKE'sche Behauptung nicht gerechtfertigt, dass, falls für $\bar{\varphi}$ obige Beziehung gilt, Oberflächenschichten nicht mehr vorhanden wären. Vergl. W. WERNICKE, WIED. Ann. 31, pag. 452. 1887. — W. VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 326. 1887.

5) Vergl. die oben (pag. 751) citirten Arbeiten. — Vergl. auch SISSINGH, Arch. Néerl. 20, pag. 171. 1885.

6) Für die Wahrscheinlichkeit dieser Erklärung spricht, dass es W. WERNICKE (cf. vorige Anm. 4) stets gelungen ist, bei Substanzen, welche zunächst eine Abweichung von der Beziehung $\text{tang } \bar{\varphi} = n$ aufweisen, durch ein Reinigungsverfahren ihrer Oberfläche dieselbe herbeizuführen. — Das Verfahren bestand darin, dass die Oberfläche mit Gelatine übergossen wurde, welche nach dem Eintrocknen abgerissen wurde.

7) MATHIEU, Liouv. Journ. (3) 7, pag. 219. 1881.

bedeuten, welche für jene Substanzen bei allen Beobachtungen die gleichen Werthe besitzen werden, da sie durch die Behandlung der Oberfläche, Wahl des Polirmittels, Alter der Politur etc. variiren, so geben sie doch, da jene Variationen nie sehr bedeutend sein werden, eine annähernde Vorstellung von dem Betrage der elliptischen Reflexion auch in allen Fällen.

I. Feste Körper.

Name der Substanz	ε	φ	n	n
Positive Substanzen.				
Selen	+ 0.1200	68° 5'	2.605	
Steinkohle	0.1158	59° 17'	1.701	
Turmalin	0.0864	58° 25'	1.645	1.668
Bleiglätte	0.0825	64° 0'	2.076	
Realgar	0.0791	67° 26'	2.454	2.420
Kalkspath, \perp zur Axe geschnitten	0.0606	59°	1.675	1.654
Anthracit	0.0548	59° 42'	1.720	
Dunkelblauer Strass	0.0492	57° 53'	1.597	
Flintglas, MATTHIESSEN A	0.0365	59° 14'	1.683	
Arsenigte Säure	0.0332	59° 24'	1.692	
Blende	0.0296	67° 6'	2.371	2.369
Flintglas, FARADAY B	0.0285	60° 16'	1.755	
Antimonglas	0.0258	63° 34'	2.013	2.010
Borsaures Bleioxyd	0.0256	61° 16'	1.825	1.866
Asphalt	0.0252	57° 38'	1.579	
Cornalin	0.0245	56° 53'	1.534	
Grünes Glas	0.0218	56° 46'	1.527	
Leim	0.0199	56° 28'	1.509	1.520
Alocharz	0.0197	58° 18'	1.619	1.634
Diamant	0.0180	67° 30'	2.434	2.439
Flintglas, GUINAND C	0.0170	59° 44'	1.714	1.710
Topas	0.0161	58° 36'	1.638	1.638
Farbloser Strass D	0.0158	57° 53'	1.593	1.580
Beryll, \perp zur Axe geschnitten	0.0145	57° 21'	1.560	1.598
Flintglas E	0.0120	58° 12'	1.613	1.614
Granat	0.0110	60° 30'	1.767	
Quarz	0.0112	56° 50'	1.530	1.547
Bernstein	0.0107	56° 50'	1.530	1.547
Diopsid	0.0106	54° 2'	1.378	
Grüner Strass	0.0089	58° 36'	1.638	1.620
Copal	0.0092	56° 48'	1.528	1.535
Dunkelrother Strass	0.0088	58° 17'	1.618	1.618
Roths Glas	0.0085	56° 8'	1.490	
Gummi arabicum	0.0082	56° 3'	1.480	1.476
Flintglas E	0.0082	57° 40'	1.579	1.574
Alaun	0.0075	55° 22'	1.448	1.457
Glas	0.0075	56° 5'	1.487	
Colophonium	0.0070	55° 15'	1.545	1.543
Neutrale Substanzen.				
Alaun, \perp zur Octaëderaxe geschnitten	—	55°	1.428	
Menilit	—	56°	1.482	
Negative Substanzen.				
Flussspath	— 0.0097	55° 15'	1.441	
Hyalith	0.0074	54° 52'	1.421	

II. Flüssigkeiten.

Name der Substanz	ε	φ	n	n
Positive Flüssigkeiten.				
Gastheer	+ 0·00823	60° 30'	1·768	1·768
Jodwasserstoffäther	0·00283	56° 37'	1·517	1·503
Lavendelöl	0·00250	55° 37'	1·462	1·462
Terpentinöl	0·00237	55° 36'	1·461	1·462
Amylen	0·00233	56° 5'	1·487	1·487
Anisöl	0·00231	57° 12'	1·553	1·555
Salpeteräther	0·00225	54° 37'	1·408	1·381
Rosmarinöl	0·00223	55° 45'	1·469	1·472
Sternanisöl	0·00216	57° 20'	1·560	1·555
Chlorzink, gesättigt	0·00213	56° 34'	1·515	1·543
Camphron	0·00212	56° 30'	1·511	1·503
Wermuthöl	0·00212	56° 15'	1·497	1·473
Cajeputöl	0·00212	55° 51'	1·474	1·465
Absoluter Alkohol	0·00208	53° 38'	1·358	1·465
Fenchelöl	0·00203	55° 59'	1·482	1·492
Melissenöl	0·00201	56° 26'	1·507	1·480
Kümmelöl	0·00200	56° 3'	1·486	1·489
Ingweröl	0·00200	55° 57'	1·480	1·479
Pfefferöl	0·00195	56° 5'	1·487	1·490
Copaivabalsamöl	0·00193	56° 27'	1·508	1·498
Quendelöl	0·00191	55° 47'	1·471	1·479
Aetherisches Lorbeeröl	0·00189	56° 59'	1·539	1·540
Gewürznelkenöl	0·00189	56° 56'	1·536	1·535
Benzoeäther	0·00188	56° 55'	1·535	1·503
Elaylbromür	0·00185	56° 52'	1·532	1·532
Oenanthol	0·00183	54° 51'	1·420	1·412
Camillenöl	0·00174	55° 27'	1·453	1·456
Campheröl	0·00168	55° 48'	1·472	1·461
Pimentöl	0·00166	56° 41'	1·521	1·531
Sadebaumöl	0·00168	55° 45'	1·469	1·472
Aceton	0·00165	53° 55'	1·372	1·359
Oxaläther	0·00154	55° 45'	1·469	1·407
Chloral	0·00154	55° 25'	1·450	1·461
Essigäther	0·00117	53° 45'	1·364	1·367
Essigsaurer Holzäther	0·00101	53° 47'	1·366	1·359
Neutrale Flüssigkeiten.				
Schwefelsaures Eisenoxyd 7:4 . .	0	55° 33'	1·458	1·458
„ „ 1:4	0	55° 3'	1·431	1·431
Glycerin	0	54° 42'	1·412	1·413
Neutralessigsaurer Bleioxyd, gesättigt	0	54° 3'	1·379	1·379
Manganchlorür 1:3	0	53° 29'	1·350	1·350
Goldchlorid 2:13	0	53° 18'	1·341	1·342
Salpetersaures Nickeloxyd 1:5 . .	0	53° 8'	1·333	1·334
Negative Flüssigkeiten.				
Doppeltchromsaures Kali 1:6 . .	- 0·00170	53° 24'	1·346	1·346
Schwefelsaures Kupferoxyd, gesättigt	0·00171	53° 49'	1·367	1·359
Jodkalium 1:4	0·00206	53° 25'	1·347	1·347
Essigsaurer Kupferoxyd, gesättigt .	0·00243	53° 6'	1·333	1·333
Chlorzink 2:3	0·00378	54° 30'	1·402	1·401
Platinchlorid 2:13	0·00400	53° 27'	1·349	1·349

Name der Substanz	ε	φ	"	"
Salpetersaures Uranoxyd	0·00430	53° 27'	1·349	1·349
Chromalaun 1:4	0·00514	53° 28'	1·350	1·355
Salpetersaures Natron 3:8	0·00561	53° 24'	1·347	1·389
Wasser	0·00577 ¹⁾	53° 7'	1·333	1·333
Salpetersaures Kali, gesättigt . .	0·00666	53° 37'	1·357	1·357
Basischessigsäures Bleioxyd, gesättigt	0·01027	53° 27'	1·349	1·349
Eisenchlorid 1:3	0·01056	53° 55'	1·372	1·372
Chlorzink 1:3	0·01152	53° 44'	1·363	1·371
Schwefelsaures Natron 1:4	0·01383	53° 28'	1·349	1·344

II. Totalreflexion.

Wir wählen als Ausgangspunkt zunächst wieder die allgemeinen Gleichungen (5), (10) und (11), welche die Lösung des Problems der Reflexion und Brechung an der Grenze zweier beliebiger durchsichtiger krystallinischer Medien enthalten.

Es soll die bisher gemachte Voraussetzung, dass die beiden den gebrochenen Wellen angehörigen Wurzeln φ der Gleichung (5) reelle Werthe seien, fallen gelassen werden. Da die φ die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung sind, so ist das Eintreten complexer Werthe derselben nur dadurch möglich, dass der Radicand einer zweiten Wurzel, welche in dem Ausdruck für φ auftritt, negativ wird. Der Uebergang von reellen zu complexen Werthen ist also dadurch gegeben, dass jener Radicand Null ist, d. h. da die verschiedenen aus der Gleichung (5) folgenden Werthe des φ dadurch gebildet werden, dass in ihren expliciten Ausdrücken den auftretenden zweiten Wurzeln verschiedene Vorzeichen beigelegt werden, so müssen beim Uebergang von reellen zu complexen Werthen zwei der Wurzeln φ zusammenfallen. Für diesen betrachteten Uebergang der gewöhnlichen Reflexion in die hier betrachtete muss also die Discriminante der Gleichung 5 verschwinden.

Hierdurch kann man analytisch den zu diesem Grenzfall gehörigen Einfallswinkel φ leicht berechnen. Es ergeben sich zwei solcher Werthe φ_0 und φ_0' , da die Discriminante aus einer biquadratischen Gleichung gebildet ist.

Man erhält aber auch eine einfache geometrische Construction des hier betrachteten Grenzfalls. Complexen Werthe von φ bedeuten offenbar, dass keine gebrochene Wellen zu Stande kommen, dass also die auf pag. 703 beschriebene geometrische Construction der gebrochenen Strahlen unmöglich wird. Diese Construction war folgende:

Um einen beliebigen Punkt O der Geraden P , in welcher die einfallende Wellenebene W die Grenzfläche G der beiden Medien (1) und (2) schneidet, construirt man die zu gleichen aber beliebigen Zeiten gehörigen Strahlenflächen $\Sigma^{(1)}$ und $\Sigma^{(2)}$, von welchen erstere sich auf das Medium (1), letztere sich auf das Medium (2) bezieht. Man verlängere den durch den Einfallspunkt O gehenden, zu W gehörigen Strahl über O hinaus bis zum Schnitt H mit der correspondirenden Schale von $\Sigma^{(1)}$ und lege in H an diese Schale eine Tangentialebene W' . Durch die Schnittgerade P' von W' mit G lege man nun die in das zweite Medium fallenden Tangentialebenen von $\Sigma^{(2)}$, so geben diese die Richtung der gebrochenen Wellenebenen. Die Radien von O nach den Berührungspunkten dieser Wellenebenen mit ihren Strahlenflächen bezeichnen die Richtungen der gebrochenen Strahlen.

Diese Construction ist nicht mehr möglich, wenn die Gerade P' eine der beiden von der Strahlenfläche $\Sigma^{(2)}$ mit der Grenzfläche G ausgeschnittenen Curven

¹⁾ Für möglichst reine Wasseroberflächen erhält man nach RAYLEIGH $\varepsilon = + 0·00042$.

oder beide schneidet. Der Grenzfall, in welchem gewöhnliche Reflexion in Totalreflexion einer der beiden gebrochenen Wellen übergeht, tritt also ein, wenn P' die zu der betreffenden Welle gehörige Schale der Strahlenfläche $\Sigma^{(2)}$ berührt. Analytisch kann man dies so ausdrücken, dass man zunächst die Gleichung für die Coordinaten der Schnittpunkte von P' mit $\Sigma^{(2)}$ aufstellt.

Es mögen nur die Fälle betrachtet werden, in denen das Medium (1), in welchem das Licht einfällt, isotrop ist. Die Strahlenfläche $\Sigma^{(1)}$ ist dann eine Kugel und zwar mit dem Radius ω_0 , falls sie nach Verlauf der Zeiteinheit um O construirt ist, und ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Medium (1) bezeichnet. Bei der hier getroffenen Wahl des Coordinatensystems (nämlich die z -Axe senkrecht zur Grenze, die y -Axe senkrecht zur Einfallsebene) ist für die Gerade P' $z = 0$, $x = -\omega_0/\sin \varphi = -h$ nach der Bezeichnungsweise der pag. 743. Dabei bezeichnet φ den Einfallswinkel, und zwar positiv gerechnet, wenn die einfallende Wellennormale in den von der positiven x -Axe und positiven z -Axe gebildeten Quadranten fällt.

Bildet man dann die Gleichung $\Sigma^{(2)}$ der Strahlenfläche, bezogen auf unser Coordinatensystem, und setzt in derselben $z = 0$, $x = -h$, so erhält man eine biquadratische Gleichung für y , d. h. die Coordinaten der Schnittpunkte der Strahlenfläche mit der Geraden P' . Das Verschwinden der Discriminante dieser Gleichung giebt die Bedingung dafür, dass P' die Strahlenfläche berührt, d. h. dass der Einfallswinkel einer der Grenzwinkel φ_o , φ_e ist.

Dass man auf den beiden, soeben auseinandergesetzten verschiedenen Wegen, von denen der erste an die Wellennormalen, der zweite an die Strahlen anknüpft, zu denselben Gleichungen für h , d. h. für die Grenzwinkel φ_o , φ_e gelangt, erkennt man am einfachsten, wenn man das von HAMILTON¹⁾ und MAC CULLAGH²⁾ gefundene Resultat berücksichtigt, dass die HUYGENS'sche Construction der gebrochenen Strahlen auch in der Weise ausgeführt werden kann, dass die Strahlenflächen durch ihre Reciprokflächen in Bezug auf eine concentrische Kugel, deren Radius gleich der Längeneinheit ist, ersetzt werden.

Aus der zuletzt angegebenen Construction folgt, dass für einen Grenzeinfallswinkel einer der zugehörigen gebrochenen Strahlen in der Trennungsfäche der beiden Medien (1) und (2) liegt. Wie oben pag. 695 erörtert wurde, geht in diesem Falle bei der zugehörigen Lichtwelle keine Energie von (1) auf (2) über, da allgemein ein Lichtstrahl die Eigenschaft hat, dass durch jede durch ihn gelegte Ebene keine Energie übertritt. Ist das Azimuth des einfallenden Lichtes so gewählt, dass nur dieser eine gebrochene Strahl überhaupt zu Stande kommen kann (uniradiales Azimuth $A^{(n)}$ nach Bezeichnung der pag. 746), so tritt überhaupt keine Energie vom Medium (1) auf (2) über, mit anderen Worten, die Intensität der reflektirten Welle muss gleich der der einfallenden sein. Daher nennt man diesen Fall der Reflexion Totalreflexion, weil das ganze einfallende Licht reflektirt wird. — Ebenso erhält man Totalreflexion, wenn der Einfallswinkel grösser als einer der Grenzwinkel φ_o oder φ_e wird, da dann ebenfalls kein gebrochener Strahl zu Stande kommt.

Ist das einfallende Licht nicht in einem uniradialen Azimuth polarisirt, so werden die Verhältnisse insofern complicirter, als nicht mehr die reflektirte Intensität gleich der einfallenden ist.

Das Polarisationsazimuth des reflektirten Lichtes ergibt sich aus den

¹⁾ HAMILTON, Trans. Irish Acad. 17, pag. 144. 1883, III. Suppl.

²⁾ J. MAC CULLAGH, Trans. Irish Acad. 17, pag. 252; Coll. Works, pag. 36. Vergl. auch TH. LIEBISCH, Physikal. Kryst. pag. 288.

Gleichungen (11) dieses Kapitels. Es ist in diesen zu berücksichtigen, dass die A complexe Grössen werden, sobald der Einfallswinkel an Grösse einen der Grenzwinkel überschreitet¹⁾.

Fällt natürliches Licht ein, so kann man die Grenzwinkel daran erkennen, dass für diese die reflektirte Intensität fast plötzlich bedeutend zunimmt. Beleuchtet man daher eine Krystallfläche mit diffussem homogenem Lichte, so erscheinen im Felde des reflektirten Lichtes zwei Curven, welche die Gebiete geringerer Lichtintensität von denen grösserer trennen. Diese Curven liegen an den Stellen, für welche der Reflexionswinkel einer der Grenzwinkel φ_o oder φ_e ist). Sie stehen im Allgemeinen nicht senkrecht zur Reflexionsebene; dies tritt nur dann ein, wenn dieselbe einer optischen Symmetrieebene des Krystalls parallel läuft, oder wenn die Schnittgerade der Reflexionsebene mit der Krystallfläche die Richtung einer optischen Symmetrieaxe besitzt.

Man hat Instrumente construirt, welche die Grenzwinkel nach dem angegebenen Principe bequem zu messen gestatten. In dem von F. KOHLRAUSCH³⁾ angegebenen Totalreflektometer wird der Krystall in eine stärker brechende Flüssigkeit⁴⁾ (Schwefelkohlenstoff), getaucht, damit man die Totalreflexion beobachten kann. Das Azimuth der Einfallsebene kann man dadurch variiren, dass der Krystall an einem zweckmässig construirt, um die Spiegelnormale drehbaren Träger⁵⁾ befestigt wird.

Wegen des bedeutenden Einflusses, welchen die Temperatur auf den Brechungsexponenten der umgebenden Flüssigkeit ausübt, ist erstere bei jedem Versuche genau zu ermitteln und dementsprechende Correctionen bei den Messungen anzubringen. Man vermeidet diese, wenn man anstatt der Flüssigkeit einen festen Körper als Umgebung der Krystallplatte wählt, dieselbe z. B. nach einem im Princip von WOLLASTON⁶⁾ angegebenen Verfahren gegen die eine Seite eines stark brechenden Glasprismas drückt⁷⁾.

1) Betreffs weiterer Ausführungen dieser Rechnungen vergl. E. KETTLER, WIED. ANN. 28, pag. 230 u. 520. 1886, und P. VOLKMANN, WIED. ANN. 29, pag. 263. 1886. — Experimentell ist die Polarisation der Grenzcurven untersucht von C. PULFRICH, WIED. ANN. 34, pag. 337. und 1888, J. NORRENBURG, WIED. ANN. 34, pag. 843. 1888.

2) Diese Grenzcurven treten noch deutlicher hervor, wenn man das Licht aus dem Krystall in das äussere Mittel streifend eintreten lässt; alsdann erscheint der bei der vorigen Anordnung hellste Theil des Gesichtsfeldes (der der vollständigen Totalreflexion) völlig dunkel, und das bei der vorigen Anordnung durch partiell reflektirtes Licht erleuchtete Gebiet wird nur durch partiell gebrochenes erleuchtet.

3) F. KOHLRAUSCH, WIED. ANN. 4, pag. 1. 1876; 16, pag. 609. 1882. Eine Abbildung dieses Instruments ist z. B. enthalten in TH. LIEBISCH, physikal. Krystall. pag. 407. — Eine weitere Vervollkommnung dieses Instrumentes, besonders zum Zweck der Dispersionsmessung gab CH. SORET, Arch. de Gen. (3), pag. 44. 1883. — Zeitschr. f. Instr. 2, pag. 414. 1883.

4) Andere geeignete Flüssigkeiten sind α -Monobromnaphthalin (cf. A. FOCK, Zeitschr. f. Kryst. 4, pag. 590. 1880), Methylenjodid (cf. R. BRAUNS, N. Jahrb. f. Mineral. 1886, 2, pag. 72; 1888, 1, pag. 213) oder eine Lösung von Jod und Schwefel in Methylenjodid, cf. E. BERTRAND, Bull. soc. franc. de min. 11, pag. 31. 1888. Der Brechungsexponent dieser Lösung übersteigt 1.85.

5) Construirt nach Angaben von C. KLEIN, N. Jahrb. f. Mineral. 1879, pag. 880.

6) WOLLASTON, Phil. Trans. 92 (2), pag. 381. 1802.

7) Eine solche Versuchsanordnung ist von F. KOHLRAUSCH, WIED. ANN. 16, pag. 603. 1882, vorgeschlagen. Betreffs der Berechnung der Beobachtungsdaten vergl. auch K. SCHERING, N. Jahrb. f. Mineral. 1883, 1, pag. 169, und B. HECHT, ibid. 1886, 2, pag. 186. Um das Azimuth der Einfallsebene beliebig ändern zu können, ist von TH. LIEBISCH für diese Methode eine zweckmässige Construction für den Krystallträger angegeben (Zeitschr. f. Instrumkd. 4, pag. 185. 1884; 5, pag. 13, 1885).

Die WOLLASTON'sche Methode ist ferner in der Weise modificirt worden, dass an Stelle des Glasprismas eine halbkugelförmige Linse¹⁾ oder ein Glascylinder²⁾ gesetzt ist. Durch Anwendung eines Ocularspectroskopes im Ocularauszug des beobachtenden Fernrohres mit einem Spalt, welcher parallel zur Einfallsebene liegt³⁾, erhält man bei Beleuchtung mit weissem Lichte bequem die Dispersion der Grenzwinkel.

a) Totalreflexion an optisch einaxigen Krystallen⁴⁾.

Bezeichnet μ den Winkel zwischen der Normale der reflektirenden Krystallfläche und der optischen Axe, und ist ϑ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der Einfallsebene (das Azimuth derselben), so ergibt das Verschwinden der Discriminante der Gleichung (5) für die beiden Grenzwinkel die Relationen

$$h_o^2 = \frac{\omega_o^2}{\sin^2 \varphi_o} = a, \quad (41)$$

$$h_e^2 = \frac{\omega_e^2}{\sin^2 \varphi_e} = c \frac{c + (a - c)(\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \vartheta)}{c + (a - c) \cos^2 \mu}, \quad (42)$$

worin a und c die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls bedeuten, und zwar erstere die der ordinären Welle, letztere die der extraordinären. Da für positiv einaxige Krystalle $a < c$ ist, für negativ einaxige $a > c$, so ist für erstere h_o kleiner als h_e , d. h. φ_o grösser als φ_e , bei negativen Krystallen ist dagegen φ_o kleiner als φ_e . Welche von den beiden im Gesichtsfelde eines Totalreflektometers sichtbaren Grenzcurven dem Winkel φ_o und welche φ_e entspricht, ist daran zu erkennen, dass erstere bei Aenderung des Azimuths der Einfallsebene eine feste Lage behält und stets senkrecht gegen erstere verläuft, während dies bei der zu φ_e gehörigen Grenzcurve nicht der Fall ist. — Aus der Lage der Grenzcurven kann man daher sofort den Charakter der Doppelbrechung ablesen.

Eine Discussion der Gleichung (42) zeigt, dass, falls man in ihr ϑ als variabel betrachtet, φ_e seinen Maximal- resp. Minimalwerth annimmt für $\vartheta = 0$ oder π und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, d. h. wenn die Einfallsebene im Hauptschnitt oder senkrecht zu ihm liegt. In diesen beiden Lagen allein steht auch die zu φ_e gehörige Grenzcurve senkrecht zur Einfallsebene.

In der ersteren Lage ($\vartheta = 0$) ist

$$h_e^2 = \frac{ac}{c + (a - c) \cos^2 \mu}, \quad (42')$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die Geschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles dar, dessen Richtung durch die Schnittlinie der Krystallfläche mit der Einfallsebene gegeben ist.

In der zweiten Lage ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), ist

$$h_e^2 = c. \quad (42'')$$

¹⁾ E. BERTRAND, Bull. soc. min. de France 8, pag. 375 u. 426. 1885. — Bull. soc. franc. de min. 9, pag. 15. 1886; 10, pag. 140. 1887. — E. MALLARD, Bull. soc. franc. de min. 9, pag. 167. 1886. — Auf demselben Princip beruht das von E. ABBE angegebene Totalreflektometer, welches von S. CZAPSKI beschrieben ist in der Zeitschr. f. Instrumkd. 9, pag. 360. 1889.

²⁾ Ein solcher ist von C. PULFRICH zur Construction eines Totalreflektometers verwandt. Vergl. WIED. Ann. 30, pag. 193 u. 487. 1887; 31, pag. 724. 1887. — Zeitschr. f. Instrumkd. 7, pag. 16, 55 u. 392. 1887.

³⁾ Vergl. C. PULFRICH, WIED. Ann. 30, pag. 487. 1887. — Zeitschr. f. Instrumkd. 7, pag. 55. 1887.

⁴⁾ Vergl. TH. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1885, 1, pag. 246; 2, pag. 203; 1886, 2, pag. 52.

Man kann daher an einer beliebigen Grenzebene eines optisch einaxigen Krystalls die Hauptlichtgeschwindigkeiten und den Winkel, welchen ihre Normale mit der optischen Axe bildet, durch Totalreflexion finden. Letzterer berechnet sich aus den beiden Gleichungen (42') und (42''), deren linke Seiten direkt beobachtbare Grössen enthalten, nämlich die Maximal- resp. Minimalwerthe der zur ausserordentlichen Welle gehörigen Grenzwinkel. — Aus dem Erörterten folgt ebenfalls, dass man für jede Lage der Einfallsebene ihr Azimuth gegen den Hauptschnitt auch aus alleiniger Beobachtung des totalreflektirten Lichtes finden kann.

Die Neigung χ der dem Winkel φ_e zugehörigen Grenzlinie gegen die Einfallsebene ist gegeben¹⁾ durch

$$\cos \chi = \frac{\sqrt{c(a-c)} \sin^2 \mu \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{\mathfrak{N}}}$$

wobei \mathfrak{N} gesetzt ist für

$$\mathfrak{N} = a[a c - \omega_0^2(a \cos^2 \mu + c \sin^2 \mu)] \cos^2 \vartheta + (c - \omega_0^2)(a \cos^2 \mu + c \sin^2 \mu)^2 \sin^2 \vartheta.$$

In der betrachteten Abhängigkeit der Grenzwinkel vom Azimuth ϑ der Einfallsebene macht es einen wesentlichen Unterschied, ob ω_0 kleiner als beide Hauptlichtgeschwindigkeiten ist, oder nur kleiner als die eine derselben. Im letzteren Fall erhält man nicht für alle Azimuthe ϑ Totalreflexion²⁾. Diese durch derartige Verhältnisse herbeigeführte Modifikationen kann man entweder dadurch experimentell studiren, dass man die Krystallplatte in verschiedene Flüssigkeiten mit geeigneten Brechungsexponenten taucht³⁾ oder dadurch, dass man eine Flüssigkeit anwendet, deren Dispersion hinreichend ist, um für gewisse Farben in jeglichen Azimuthe Totalreflexionen zu ergeben, für andere Farben dagegen nicht⁴⁾.

b) Totalreflexion an optisch zweiaxigen Krystallen.

Die Gleichungen der Grenzwinkel gestalten sich am einfachsten, wenn die Grenzfläche des Krystalls eine optische Symmetrieebene ist. Der eine Grenzwinkel ist unabhängig vom Azimuth der Einfallsebene und ergiebt direkt die eine Hauptlichtgeschwindigkeit, der andere ist von jenem Azimuth abhängig. Seine Maximal- resp. Minimalwerthe ergeben die beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Liegt die Grenzebene des Krystalls parallel zur Ebene der optischen Axen, so treten ausser den beiden den vorhin betrachteten Grenzwinkeln angehörigen Grenzcurven noch solche auf, welche der (äusseren) konischen Refraction ihre Entstehung verdanken⁵⁾. Da nämlich, wie wir aus der pag. 772 erläuterten geo-

1) TH. LIEBISCH, Physikal. Krystall., pag. 417. — Messungen des Winkels χ sind am Krystallspath ausgeführt von F. DANKER (N. Jahrb. f. Mineral., Beil., Bd. 4, pag. 265. 1885), C. PULFRICH, (ibid. 5, pag. 182. 1887), J. NORREBERG (Verh. des naturf. Ver. d. pr. Rheinl. 45, pag. 32. 1888).

2) Betreffs der specielleren Discussion vergl. das citirte Werk von LIEBISCH, pag. 418—420.

3) Nach dieser Methode ist C. PULFRICH (l. c. pag. 167), und J. DANKER (l. c. pag. 241) verfahren.

4) Diese Verhältnisse sind an einer parallel zur optischen Axe geschliffenen Kalkspathfläche erfüllt, welche sich in Monobromnaphtalin befindet, wie J. NORREBERG (l. c. und WIED. Ann. 34, pag. 843. 1880) gezeigt hat.

5) Vergl. W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 6, pag. 113. 1879, Taf. I. Betreffs weiterer Details mag wieder auf das citirte Werk von TH. LIEBISCH, pag. 423—425, und CH. SORET, Compt. rend. 107, pag. 479. 1888 verwiesen sein.

metrischen Construction sahen, Totalreflexion eintritt, wenn die Normale der einfallenden Welle eine derartige Lage hat, dass der gebrochene Strahl parallel zur Krystallgrenze verläuft, und da, falls derselbe in die Richtung einer Strahlenaxe fällt, ihm ein Kegel von im Krystall fortgepflanzten Wellennormalen angehört, so tritt auch für einen gewissen Kegel von im umgebenden Medium fortgepflanzten Wellennormalen Totalreflexion ein. Mit Hilfe desselben kann man direkt den Winkel der optischen Axen des Krystalls bestimmen, wie MÜLHEIMS¹⁾ gethan hat.

Auch bei beliebiger Orientirung der Krystallgrenzfläche erhält man nach SORET²⁾ aus dem absolut grössten und absolut kleinsten Grenzwinkel, den man erhält, wenn man das Azimuth der Einfallsebene ändert, die beiden extremen Hauptlichtgeschwindigkeiten nach dem Schema

$$h^2 = \frac{\omega_0^2}{\sin^2 \varphi} = a, c.$$

An einer einzigen Krystallplatte kann man dagegen nicht entscheiden, ob die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit \sqrt{b} dem grössten Werth desjenigen Grenzwinkels entspricht, welcher der Grenzcurve mit kleineren Grenzwinkeln angehört, oder dem kleinsten Werth desjenigen Grenzwinkels, welcher der Grenzcurve mit grösseren Grenzwinkeln angehört. Dies steht im Einklang mit der von A. BRILL³⁾ gefundenen Thatsache, dass durch einen Diametralschnitt einer Strahlenfläche im Allgemeinen noch eine zweite Strahlenfläche gelegt werden kann, welche die extremen Werthe \sqrt{a} , \sqrt{c} der Halbaxen mit ihr gemeinsam hat und sich nur durch einen anderen Werth der Halbaxe \sqrt{b} von ihr unterscheidet (cf. oben pag. 711).

Man muss daher, wenn zur Ermittlung der Hauptlichtgeschwindigkeiten keine durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnete Grenzebene benutzt werden kann, die Beobachtung der grössten und der kleinsten Grenzwinkel in dem äusseren und inneren Kegel der Grenzstrahlen an zwei verschiedenen orientirten Grenzebenen ausführen, um die drei allen Grenzebenen gemeinsamen Extremwerthe der Grenzwinkel, aus welchen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten ableiten lassen, zu finden⁴⁾.

SORET zeigte auch, wie man mit Hilfe der Totalreflexion die optische Orientirung einer beliebigen Krystallfläche finden kann. Nach B. HECHT⁵⁾ liefert indess diese Methode nicht sehr genaue Resultate, und man verbindet sie zweckmässig noch mit anderen Messungsmethoden, z. B. der der Interferenzerscheinungen im convergenten polarisirten Lichte, um die Orientirung genau zu bestimmen.

Da aus den Beobachtungen über Totalreflexion sich die Geschwindigkeit von bestimmt orientirten, in der Grenzfläche verlaufenden Strahlen ergibt, so eignet sich die Methode sehr gut zur experimentellen Prüfung der FRESNEL'schen

¹⁾ A. MÜLHEIMS, über eine Art der Axenwinkelmessung und über die Bestimmung von Brechungsexponenten nach der Methode der Totalreflexion. Inaug.-Diss., Bonn 1888. — Ztschrft. f. Kryst. 14, pag. 202. 1888.

²⁾ Vergl. CH. SORET, Compt. rend. 107, pag. 176 u. 479. 1888; Arch. de Gen. 20, pag. 263. 1888; Ztschrft. f. Kryst. 15, pag. 25. 1888.

³⁾ A. BRILL, Sitzber. der bayer. Akad. 1883, pag. 423; Math. Ann. 34, pag. 297. 1889.

⁴⁾ CH. SORET, Ztschrft. f. Kryst. 15, pag. 45. 1889; F. L. PERROT, Compt. rend. 108, pag. 137. 1889; Arch. de Gen. (3) 21, pag. 113. 1889. — B. HECHT, N. Jahrb. f. Mineral., Beil.-Bd. 6, pag. 241. 1889.

⁵⁾ B. HECHT, l. c., pag. 241.

Gesetze der Doppelbrechung¹⁾. Zu diesem Zweck angestellte Untersuchungen von W. KOHLRAUSCH²⁾ und J. DANKER³⁾ haben zu einer befriedigenden Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment geführt.

c) Totalreflexion an isotropen Medien.

Es mögen die Fälle näher ins Auge gefasst werden, in welchen der Einfallswinkel einen der Grenzwinkel φ_o oder φ_e überschreitet. Diese fallen bei isotropen Medien beide zusammen und werden durch die Relation geliefert:

$$\sin \varphi_o = \sin \varphi_e = n.$$

n bedeutet den Brechungsexponenten des reflektirenden Mediums (2) gegen das umgebende Medium (1).

Es gelten auch in diesem Falle die Formeln (25) oder (25') in ihrer analytischen Gestalt, nur ist der in ihnen auftretende Winkel χ nicht der wirkliche reelle Brechungswinkel, sondern es ist eine complexe Grösse, welche definit ist durch die Gleichungen:

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n}, \quad \cos \chi = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{n}.$$

$\sin \chi$ ist daher eine reelle, $\cos \chi$ eine imaginäre Grösse, da $\sin \varphi > n$ sein soll.

Löst man in den Formeln (25)⁴⁾ die trigonometrischen Functionen der Differenzen der Grössen φ und χ in solche der Grössen selber auf, so schreiben sich, wenn man für die reflektirten Amplituden $R_\rho = R_\rho + iR_\rho'$, resp. $R_s = R_s' + iR_s'$ schreibt, wobei die R_ρ , R_ρ' , R_s , R_s' reelle Grössen bedeuten sollen, und ebenso für die einfallenden Amplituden $E_\rho + iE_\rho'$, resp. $E_s + iE_s'$, wobei die imaginären Bestandtheile iE_ρ' , iE_s' neben den reellen E_ρ , E_s auftreten, falls das einfallende Licht elliptisch polarisirt ist, diese Formeln in der Gestalt:

$$\begin{aligned} R_\rho &= R_\rho + iR_\rho' = (E_\rho + iE_\rho') \frac{\cos \varphi - i\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi + i\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, \\ R_s &= R_s + iR_s' = (E_s + iE_s') \frac{n^2 \cos \varphi - i\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi - i\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

1) Zuerst hat WOLLASTON die von ihm ersonnene Methode der Totalreflexion (cf. oben pag. 773) benutzt zur Verifikation der HUYGENS'schen Gesetze am Kalkspath.

2) W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann 6, pag. 86. 1879; 7, pag. 427. 1879.

3) J. DANKER, N. Jahrb. f. Mineral. Beil.-Bd. 4, pag. 241. 1885.

4) Der Einfachheit wegen sind die folgenden Entwicklungen nur an die NEUMANN'schen Formeln angeknüpft. Die FRESNEL'schen ergeben ihnen gegenüber nichts wesentlich anderes.

5) Die Einführung complexer Werthe der Amplituden und des Winkels χ bedarf durchaus keiner besonderen physikalischen Erklärung zu ihrer Rechtfertigung, wie sie z. B. FRESNEL bei der von ihm zuerst gegebenen Theorie der Totalreflexion gab, indem er annahm, dass einige Theile der Lichtwellen an der Oberfläche des zweiten Mediums reflektirt würden, dagegen ein anderer Theil zunächst in dasselbe zu einer geringen Tiefe eindringe und dann reflektirt würde. Zu einer derartigen Reflexion aus dem homogenen Innern eines Mediums fehlt jede genügend theoretisch begründete Ursache. Wenn sich also auch in der That in das zweite Medium eine gewisse Art von Bewegung fortpflanzt, wie sowohl die Formeln angeben (da die D_ρ und D_s nicht Null sind), als auch die später pag. 780 zu besprechenden Versuche QUINCKE's, so giebt doch diese Bewegung nicht zu einer Reflexion in das erste Medium Anlass, wenn nicht, wie es bei den QUINCKE'schen Versuchen der Fall ist, die Homogenität des zweiten Mediums gestört wird.

Die gegebenen Formeln fliessen aus den Grenzbedingungen (2) mit derselben Begründung, wie die Formeln für gewöhnliche Reflexion. Dass complexe Grössen auftreten, ist nur ein die Rechnung vereinfachender Kunstgriff, und man könnte dieselben vermeiden, wenn man die Gleichungen (3) für die Lichtbewegung mit Vermeidung complexer Grössen schreiben würde, d. h. die dort angedeuteten reellen Theile wirklich bilden würde. Dadurch würde aber die Rechnung weit complicirter.

Nach der durch die Gleichungen (3) definirten Bedeutung der complexen Amplituden ist die Intensität des reflektirten Lichtes proportional mit $R_p^2 + R_p'^2$, resp. $R_s^2 + R_s'^2$, die des einfallenden proportional mit $E_p^2 + E_p'^2$, resp. $E_s^2 + E_s'^2$. Aus den Gleichungen (43) folgt sofort durch Multiplikation mit ihren conjugirten (nur durch das Vorzeichen von i sich von ihnen unterscheidenden) Ausdrücken:

$$R_p^2 + R_p'^2 = E_p^2 + E_p'^2, \quad R_s^2 + R_s'^2 = E_s'^2 + E_s'^2, \quad (44)$$

d. h. es ist in der That die Intensität des reflektirten Lichtes stets gleich dem des einfallenden, sobald der Einfallswinkel den Grenzwinkel erreicht oder überschreitet.

Aus der Bedeutung der complexen Amplituden, wie sie in den Gleichungen (3) definirt sind, folgt ferner, dass, wenn man die Quotienten zweier complexer Amplituden in die Form setzt:

$$\begin{aligned} \frac{R_p + iR_p'}{E_p + iE_p'} &= \text{tang } \psi_p e^{i\Delta_p}, \\ \frac{R_s + iR_s'}{E_s + iE_s'} &= \text{tang } \psi_s e^{i\Delta_s}, \\ \frac{R_s + iR_s'}{R_p + iR_p'} &= \text{tang } \psi e^{i\Delta}, \end{aligned} \quad (45)$$

die Δ_p , Δ die absoluten durch die Reflexion herbeigeführten Phasenänderungen des reflektirten Lichtes gegenüber der Phase des einfallenden Lichtes bedeuten, dass dagegen Δ die relative Phasendifferenz des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes gegen das in derselben polarisirten reflektirten, und dass ψ das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes bedeutet.

Für diese Grössen folgt daher nach den Formeln (43):

$$\begin{aligned} \text{tang } \Delta_p &= - \frac{2 \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{1 + n^2 - 2 \sin^2 \varphi}, \\ \text{tang } \Delta_s &= - \frac{2 \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{1 + n^2 - \left(n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \varphi}, \\ \text{tang } \psi_p &= \text{tang } \psi_s = 1 \end{aligned} \quad (46)$$

und wenn das einfallende Licht linear polarisirt im Azimuth ψ_0 ist, d. h.

$$\frac{E_s + iE_s'}{E_p + iE_p'} = \text{tang } \psi_0$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0, \quad \text{tang } \Delta = - \frac{2 \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + n^2 \cotg^2 \varphi}, \\ \text{oder } \cos \frac{1}{2} \Delta &= \frac{\sin \varphi \text{ tang } \varphi}{\sqrt{\text{tang}^2 \varphi - n^2}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes ist daher gleich dem Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Die absolute und die relative Phasendifferenz ist 0 (resp. π) für streifende Incidenz und ebenso für den Fall, dass φ bis auf den Grenzwinkel $\varphi_0 = \text{arc sin } n$ zurückgeht. Sie erreichen in Zwischenlagen des Einfallswinkels gewisse Maximalwerthe. Für die relative Phasendifferenz Δ tritt dies ein für einen Einfallswinkel φ' , welcher durch die Gleichung gegeben ist:

$$\sin^2 \varphi' = \frac{2n^2}{1 + n^2}.$$

Der zugehörige Maximalbetrag Δ' von Δ folgt aus

$$\cos \frac{1}{2} \Delta' = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Für Glas vom Brechungsexponenten 1.51 gegen Luft ist, da in diesem Falle $n = 1/1.51$ zu setzen ist, $\varphi' = 51^\circ 20'$, $\Delta' = \pi - 45^\circ 36'$. Zwei solcher Reflexionen erzeugen daher nahezu circularpolarisirtes Licht, falls das einfallende Licht unter dem Azimuth $\pm 45^\circ$ gegen die Einfallsebene polarisirt ist. Ebenso kann man durch mehr als zweimalige, z. B. drei- oder viermalige totale Reflexion unter einem grösseren oder kleineren Einfallswinkel als φ' circularpolarisirtes Licht erzeugen. FRESNEL¹⁾ hat in der That Glasparallelepipeda construirt, mit schiefen Endflächen, welche senkrecht auf letztere auffallendes Licht circularpolarisirt austreten lassen, wenn das auffallende Licht unter dem Azimuth 45° gegen die auf die Seitenflächen der Glaskörper bezogene Einfallsebene linear polarisirt ist. Die Wirkungsweise dieser Glasparallelepipeda beruht auf den soeben erörterten Thatsachen.

Einfallendes natürliches Licht behält nach der Totalreflexion vollständig seine Eigenschaften, d. h. es wird nicht theilweise polarisirt, wie es bei der partiellen Reflexion der Fall ist. Dieser Unterschied liegt darin begründet, dass für letztere nicht $\psi = \psi_0$ ist, welche Relation für die Totalreflexion nach den Formeln (47) besteht.

Experimentell ist die entwickelte Theorie, abgesehen²⁾ von einem Versuch ARAGO's (Oeuvr. compl. 10, pag. 226), welcher nach seinem pag. 757 erwähnten Verfahren constatirte, dass das totalreflektirte Licht die gleiche Intensität wie das einfallende besässe, bisher nur von JAMIN³⁾ und QUINCKE⁴⁾ hinsichtlich der Werthe für ψ und die relative Phasendifferenz Δ bestätigt, welche dieselben mit Hilfe des BABINET'schen Compensators bei der inneren Reflexion in Glas an Luft massen. Man fand eine genügende Uebereinstimmung⁵⁾ zwischen den berechneten und beobachteten Werthen, und in der That sind hier derartige Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung, wie sie bei der gewöhnlichen Reflexion sich einstellen, nicht zu erwarten, da für den Fall der Totalreflexion Oberflächenschichten keinen Einfluss auf ψ und nur sehr geringen Einfluss auf Δ besitzen⁶⁾.

1) A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2), 29, pag. 175. 1818.

2) Ausserdem sind Versuche BABINET's (Compt. rend. 8, pag. 709. 1839) zu erwähnen über die Interferenz von direkten mit totalreflektirten Lichtstrahlen, welche daher zur Messung der absoluten Phasenänderungen Δ_r und Δ_t verworther werden könnten. Diese Versuche sind aber nicht zur numerischen Berechnung jener Grössen benutzt.

3) J. JAMIN, Ann. de phys. et de chim. (3) 30, pag. 257. 1850.

4) G. QUINCKE, POGG. Ann. 127, pag. 217. 1866.

5) Um dieselbe zu erreichen, sind gewisse Vorsichtsmaassregeln anzuwenden, um die Wirkung einer event. vorhandenen Anisotropie des Glases zu eliminiren. cf. JAMIN, l. c.

6) Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 146. 1891. — Dies gilt jedoch [nur in der Annäherung, dass das Quadrat der Dicke der Oberflächenschicht gegen das der Wellenlänge des Lichtes vernachlässigt wird. — Bei sehr subtiler Prütung erhielt H. DUFET (Bull. de la soc. franç. de Miner. 14, pag. 130. 1891) an polirten Körpern eine geringe Abweichung zwischen dem nach der Prismenmethode und zwischen dem durch Totalreflexion ermittelten Werthe ihres Brechungsexponenten. — Auch die von CH. SORET (Arch. de Genève 26, pag. 541. 1891) beobachteten Anomalien bei der Erscheinung der Totalreflexion deuten auf Wirkung von Oberflächenschichten.

III. Totalreflexion an sehr dünnen Lamellen.

Die Erscheinungen der Totalreflexion können wesentlich modificirt werden, wenn sie an einer Lamelle stattfinden, deren Dicke nicht sehr gross gegenüber der Wellenlänge des Lichtes ist. — Auch wenn der Einfallswinkel den Grenzwinkel überschreitet, findet nicht Totalreflexion im eigentlichen Sinne des Wortes statt. Denn es wird nicht alles einfallende Licht reflektirt, sondern ein Teil wird durch die Lamelle hindurch in das hinter derselben befindliche Medium gebrochen.

Eine bequeme Versuchsanordnung zur Beobachtung dieser Erscheinungen erhält man, wenn man zwei rechtwinklige Glasprismen mit ihren Hypothenusenflächen, von denen die des einen Prismas schwach convex geschliffen ist, aneinander drückt. Diese Anordnung ist zuerst von NEWTON¹⁾ angegeben und später von QUINCKE²⁾ zum genaueren experimentellen Studium dieser Erscheinungen benutzt. — An der zwischen beiden Prismen befindlichen Luftschicht tritt Totalreflexion für senkrecht auf die Kathetenfläche eines Prismas auffallendes Licht ein, sodass bei genügender Dicke der Luftschicht die Prismencombination in jener Richtung undurchsichtig ist. Falls man aber die beiden Prismen so fest aneinander drückt, dass sie sich in den Hypothenusenflächen berühren, so wird die Berührungsstelle und ein gewisser Umkreis derselben durchsichtig und zwar bei einfallendem weissen Lichte mit braunrothem Rande. Im reflektirten Lichte erscheint jener Umkreis dunkel auf hellem Grunde, und zwar bei einfallendem weissen Lichte mit bläulichem Rande.

Dass für die Berührungsstelle selber diese Erscheinungen eintreten, war von vornherein zu erwarten, da an dieser der Glaskörper des einen Prismas ohne Unterbrechung der Homogenität in den des anderen fortgesetzt gedacht werden kann. Dass jene Erscheinungen aber auch noch in einer gewissen Umgebung der Berührungsstelle wahrzunehmen sind, d. h. bei einer gewissen, von Null verschiedenen Dicke der zwischenlagernden Luftschicht, hat seinen Grund darin, dass auch bei Totalreflexion an einem Medium (2) eine gewisse Bewegung in das reflektirende Medium fortgepflanzt wird, deren Amplitude allerdings sehr schnell mit wachsendem Abstand von der Grenzfläche abnimmt. Befindet sich nun in genügend naher Distanz von ihr eine zweite Grenzfläche im Medium (2), so giebt die an ihr erfolgte Reflexion und Brechung der im Medium (2) fortgepflanzten Bewegung Anlass zu den beschriebenen Erscheinungen, speciell wird dieselbe durch Brechung wieder in die gewöhnliche Art der Lichtbewegung verwandelt, d. h. solche, deren Amplitude überall längs der Wellennormalen constant ist.

Die Grösse des durchsichtigen Fleckes der Prismencombination hängt von der Intensität der Beleuchtung und der Grösse des Krümmungsradius der Hypothenusenfläche des einen Prismas ab, indem der Fleck mit Wachsen beider (Intensität und Krümmungsradius) ebenfalls an Grösse zunimmt.

Von den Erscheinungen geben die FRESNEL-NEUMANN'schen Reflexionsformeln eine vollständig in allen Einzelheiten mit dem Experiment übereinstimmende Erklärung.

Dies ist zuerst von STOKES³⁾ nachgewiesen, welcher vor Anstellung der QUINCKE'schen Versuche aus jenen Formeln das Auftreten des schwarzen Fleckes

¹⁾ NEWTON, Optice lib. II, obs. I, pag. 185.

²⁾ G. QUINCKE, POGG. Ann. 127, pag. I u. 199. 1866.

³⁾ G. STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 642. 1849.

im reflektirten Lichte in der Umgebung der Berührungsstelle der Prismen erklärte, und später hat VOIGT¹⁾ die QUINCKE'schen Versuche qualitativ völlig²⁾ erklärt, zum Theil auch berechnet.

Man erhält die Theorie der Versuche sehr einfach aus den hier pag. 759 angegebenen Formeln (36) und (36') für die Amplituden des an einer dünnen Platte reflektirten oder durch sie hindurchgehenden Lichtes. Es ist hier nur zu berücksichtigen, dass das dort auftretende π_2 jetzt eine imaginäre Grösse ist, nämlich

$$\pi_2 = i\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{i}{\sqrt{a_1}}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}, \quad (48)$$

da $\sin\varphi$ grösser sein soll als der Brechungsexponent $n = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$ der Platte gegen das umgebende Medium.

Es sind daher die dort auftretenden Grössen p und q reell, nämlich

$$p = e^{-2\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}\frac{d}{\lambda}}, \quad q = e^{+2\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}\frac{d}{\lambda}}, \quad (49)$$

wobei λ die Wellenlänge des Lichtes im umgebenden Medium bedeutet.

Nach diesen Formeln (36) sind die reflectirten Amplituden

$$R_s = E_s \frac{(p - q)(n^2 - 1)(n^2 \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{(p - q)(n^4 \cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p + q)n^2 \cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} \quad (50)$$

$$R_p = E_p \frac{(p - q)(1 - n^2)}{(p - q)(\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p + q)\cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}.$$

Die durchgelassenen Amplituden sind nach (36')

$$D_s = E_s e^{2\pi i \cos\varphi \frac{d}{\lambda}} \frac{4in^2 \cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{(p - q)(n^4 \cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p + q)n^2 \cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \quad (51)$$

$$D_p = E_p e^{2\pi i \cos\varphi \frac{d}{\lambda}} \frac{4i \cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{(p - q)(\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p + q)\cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}.$$

Durch Multiplication mit den conjugirten Ausdrücken erhält man sofort die Intensität des reflectirten und durchgehenden Lichtes, nämlich da $(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4$ ist

$$J_s^r = J_s^e \frac{(p - q)^2(1 - n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2 \cos^2\varphi)^2}{(p - q)^2(1 - n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2 \cos^2\varphi)^2 + 16n^4 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2}, \quad (52)$$

$$J_p^r = J_p^e \frac{(p - q)^2(1 - n^2)^2}{(p - q)^2(1 - n^2)^2 + 16 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2};$$

$$J_s^d = J_s^e \frac{16n^4 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2}{(p - q)^2(1 - n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2 \cos^2\varphi)^2 + 16n^4 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2}, \quad (52')$$

$$J_p^d = J_p^e \frac{16 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2}{(p - q)^2(1 - n^2)^2 + 16 \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)^2}.$$

Für die Dicke $d = 0$ der Zwischenschicht ist $p = q = 1$, daher $J_s^r = J_p^r = 0$, $J_s^d = J_s^e$, $J_p^d = J_p^e$.

Für sehr grosse Dicke d im Vergleich zur Wellenlänge λ ist $p = 0$, $q = +\infty$, daher $J_s^r = J_s^e$, $J_p^r = J_p^e$, $J_s^d = J_p^d = 0$.

Da q mit wachsendem Einfallswinkel wächst, so nimmt die Grösse des durchsichtigen Flecks der Prismencombination mit wachsendem Einfallswinkel ab, wie QUINCKE constatirte (l. c. pag. 7).

1) W. VOIGT, Gött. Nachr., pag. 49. 1884.

2) Abgesehen von einer bei QUINCKE, l. c., pag. 16, beobachteten Erscheinung, die aber jedenfalls weiterer Bestätigung bedarf.

Man kann die erste der Formeln (52') auch in der Gestalt schreiben

$$J_s^d = J_s^e \frac{16 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)}{(p - q)^2 (1 - n^2)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - \cos^2 \varphi \right)^2 + 16 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)},$$

d. h. J_s^d unterscheidet sich von J_p^d nur dadurch, dass bei ersterem die Grösse $(p - q)^2 (1 - n^2)^2$ im Nenner mit dem Faktor $\left(\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - \cos^2 \varphi \right)^2$ auftritt, bei letzterem mit dem Faktor 1. Beim Beginn der Totalreflexion ist $\sin \varphi = n$, der erste Faktor daher gleich $\sin^4 \varphi$, d. h. kleiner als der zweite, daher $J_s^d > J_p^d$. Bei streifender Incidenz ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, der erste Faktor daher $\frac{1}{n^4}$, also grösser als der zweite, d. h. $J_s^d < J_p^d$. Auch dieses Verhalten ist von QUINCKE constatirt (l. c. pag. 8).

Da q mit wachsender Wellenlänge abnimmt, so nimmt mit derselben die Grösse des durchsichtigen Fleckes zu (QUINCKE, l. c., pag. 8).

Nach den Erörterungen der pag. 788 ergibt sich die relative Phasendifferenz Δ des parallel zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes zu dem in derselben polarisirten, sowie des Azimuth ψ der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes nach den Formeln:

$$\text{tang } \psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{R_s}{R_p} =$$

$$\frac{E_s}{E_p} \frac{(\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi) (p - q) (\cos^2 \varphi + n^2 - \sin^2 \varphi) + 2i(p + q) \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{(p - q) (n^4 \cos^2 \varphi + n^2 - \sin^2 \varphi) + 2i(p + q) n^2 \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}; \quad (53)$$

haben ψ' und Δ' die analoge Bedeutung für das durchgehende Licht, wie ψ und Δ für das reflectirte, so folgt aus (51)

$$\text{tang } \psi' e^{i\Delta'} = \frac{D_s}{D_p} = \frac{n^2}{\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi} \text{tang } \psi \cdot e^{i\Delta}, \quad (54)$$

d. h.

$$\text{tang } \psi' (\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi) = n^2 \text{tang } \psi, \quad \Delta' = \Delta. \quad (54')$$

Die letzten dieser Gleichungen ist von QUINCKE (l. c., pag. 217, 220) bestätigt.

Aus der Gleichung (53) ergibt sich durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile für $E_s/E_p = 1$, d. h. bei linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirten einfallendem Lichte

$$\begin{aligned} \text{tang}^2 \psi &= \frac{(\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi)^2}{(p - q)^2 (1 - n^2)^2 + 16 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)} \\ \text{tang } \Delta &= \frac{(p - q)^2 (1 - n^2)^2 (\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi)^2 + 16 n^4 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)}{2(p^2 - q^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2} (1 - n^2)^2} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{2(p^2 - q^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2} (1 - n^2)^2}{(p - q)^2 (1 - n^2)^2 [\sin^4 \varphi - \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)] + 16 n^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n^2)}.$$

Die Phasendifferenz Δ wächst daher mit wachsendem q , d. h. zunehmender Dicke der Zwischenschicht. (Vergl. QUINCKE, l. c., pag. 220). Für $d = \infty$ geht letzte Formel in die früher abgeleitete Formel (47) für Totalreflexion über und es wird auch dementsprechend $\text{tang } \psi = 1$. — Die beiden letzten Formeln erklären die eigenthümlichen Erscheinungen, welche man wahrnimmt, wenn man bei Beleuchtung mit linear polarisirtem Lichte jene Prismencombination durch ein drehbares Nicol betrachtet (cf. STOKES, l. c.).

P. DRUDE.