

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Encyklopaedie der Naturwissenschaften**

Optik

**Winkelmann, Adolph**

**1894**

Doppelbrechung

## Doppelbrechung.

### I. Allgemeine Gesetze.

Wie oben pag. 669—671 erörtert ist, gibt es bei jeder Lichtbewegung in einem durchsichtigen (nicht aktiven) Krystall mehrere (drei) periodisch mit der Zeit sich ändernde Vektoren, welche verschiedene Gesetze befolgen. Wie dort hervorgehoben wurde, ist es für die Darstellung der optischen Erscheinungen gleichgültig, für welchen der drei Vektoren man die definitiven Formeln aufstellt. Untersuchen wir zunächst nur die Gesetze derjenigen Vektoren genauer, welche sich in streng transversalen, ebenen Wellen fortpflanzen können, so handelt es sich um weitere Verfolgung der Gleichungen (14), (15) der pag. 669, 670, welchen die magnetische Kraft der elektrischen Theorie oder der Lichtvector der mechanischen Theorie NEUMANN'S, gehorcht, und der Gleichungen (20), (21) der pag. 671, welchen die elektrische Kraft oder der Lichtvector der mechanischen Theorie FRESNEL'S unterworfen ist. Die Componenten des letzteren mögen im Folgenden mit  $u, v, w$ , die des ersteren (des NEUMANN'Schen Vectors) mit  $u', v', w'$  bezeichnet werden.

Da nach pag. 671 der NEUMANN'Sche Lichtvector senkrecht zum FRESNEL'Schen (und zur Wellennormale) liegt, so können die Gesetze des ersteren leicht aus denen des letzteren Vectors abgeleitet werden. Die folgende Rechnung knüpft daher an die Gleichungen (20), (21) des FRESNEL'Schen Vectors an. — Es wird sich weiter unten herausstellen, dass auch die Gesetze, denen der dritte der genannten Vektoren unterworfen ist, aus den angestellten Betrachtungen sofort abzuleiten sind, da dieser senkrecht zum NEUMANN'Schen Vector und zum Lichtstrahl liegt.

Durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems lässt sich die Gleichung (21) auf die Form bringen:

$$2H = au^2 + bv^2 + cw^2, \quad (1)$$

wobei sich die  $u, v, w$  auf das neue Coordinatensystem beziehen und die  $a, b, c$  gewisse, dem Krystall individuelle Constanten bedeuten, deren Werth mit der Lichtfarbe variirt.

Die Coordinatenachsen haben die Lage der Hauptachsen des in der Gleichung (21) der pag. 671 durch  $2H$  definirten dreiaxigen Ellipsoides, wenn man dort  $u, v, w$  als Coordinaten eines Punktes ansieht.

Aus den früheren Gleichungen (20) folgt, dass für den Krystall die drei neuen Coordinatenebenen Symmetrieebenen hinsichtlich seiner optischen Eigenschaften sind, da die Gleichungen unverändert gelten, wenn man die Richtung einer Coordinatenaxe in die entgegengesetzte verwandelt.

Bei denjenigen Krystallen, welche auch hinsichtlich ihres krystallographischen Verhaltens Symmetrieebenen besitzen, müssen diese zugleich optische Symmetrieebenen sein. Daher ist bei Krystallen des rhombischen Systems die Lage der letzteren durch die krystallographische Orientirung sofort bestimmt, bei Krystallen des monoklinen Systems hingegen nur eine der optischen Symmetrieebenen, und bei Krystallen des triklinen Systems gar keine. Letztere besitzen also 6 ihnen individuelle optische Constanten, von denen drei die Werthe der nach (1) definirten Constanten  $a, b, c$  angeben und die drei anderen die Lage der optischen Symmetrieebenen gegen die krystallographischen Axen. Die Krystalle des monoklinen Systems besitzen 4 optische Constanten, die des rhombischen Systems nur 3. Die Zahl dieser Constanten reducirt sich noch weiter, wenn der Krystall gleichwerthige Symmetrieebenen besitzt, d. h. wenn er eine Symmetrieaxe besitzt, die mehr als zweizählig ist.

Dieser Fall tritt für Krystalle des hexagonalen und tetragonalen Systems ein. Wählt man jene Symmetrieaxe zur  $z$ -Axe, so müssen die in (1) auftretenden Constanten  $a$  und  $b$  einander gleich sein. Diese Krystalle besitzen daher nur zwei optische Constanten. Die Krystalle des regulären Systems besitzen mehr als eine vierzählige Symmetrieaxe, daher sind für diese alle drei Coëfficienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  einander gleich zu setzen, und jene Krystalle unterscheiden sich optisch nicht von isotropen Medien, indem sie nur eine optische Constante besitzen. — Diese Sätze werden durch die Erfahrung bestätigt. DUFAY<sup>1)</sup> hatte erkannt, dass Krystalle des regulären Systems keine Doppelbrechung zeigen, HAUY<sup>2)</sup> fand, dass alle anderen Systemen angehörigen Krystalle Doppelbrechung aufweisen. Schliesslich beobachtete BREWSTER<sup>3)</sup> an 150 krystallisirten Mineralen, dass die Krystalle des hexagonalen und tetragonalen Systems ein wesentlich anderes optisches Verhalten zeigten, als die der Systeme niederer Symmetrie, und diese Thatsache wird durch die oben genannten Beziehungen zwischen den  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vollständig erklärt, wie wir weiter sehen werden.

Die Hauptgleichungen (20) der pag. 671 nehmen unter Zugrundelegung der optischen Symmetrieebenen als Coordinatenebenen die Gestalt an

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a\Delta v - \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\Delta w - \frac{\partial}{\partial z} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Man kann diesen Differentialgleichungen genügen durch die Annahme linear-polarisirter ebener Wellen, d. h. durch die Integrale

$$\begin{aligned}u &= A\mathfrak{M} \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right), \\ v &= A\mathfrak{N} \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right), \\ w &= A\mathfrak{P} \cos \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

wobei

$$m^2 + n^2 + p^2 = \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 + 1, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}\quad (4)$$

angenommen ist.

$T$  bedeutet die Schwingungsdauer des Lichtes,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  die Richtungscosinus der Wellennormalen,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{P}$  des Lichtvectors,  $A$  seine Amplitude.

Bezeichnen  $M$ ,  $N$ ,  $P$  die Richtungscosinus des NEUMANN'schen Lichtvectors, so bilden der letztere, ferner der FRESNEL'sche und die Wellennormale ein rechtwinkliges Axenkreuz. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned}m\mathfrak{M} + n\mathfrak{N} + p\mathfrak{P} &= 0, \\ M\mathfrak{M} + N\mathfrak{N} + P\mathfrak{P} &= 0, \\ mM + nN + pP &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned}\omega^2 \mathfrak{M} &= a\mathfrak{M} - m(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p), \\ \omega^2 \mathfrak{N} &= b\mathfrak{N} - n(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p), \\ \omega^2 \mathfrak{P} &= c\mathfrak{P} - p(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p).\end{aligned}\quad (6)$$

<sup>1)</sup> DUFAY, Mém. de l'anc. Acad. des sc., pag. 81. 1739.

<sup>2)</sup> HAUY, Traité de minéralogie. I, pag. 159. 1801. — Mém. de l'anc. Acad. des sc., pag. 34. 1788.

<sup>3)</sup> BREWSTER, Phil. Trans., pag. 199. 1818.

Indem man diese Gleichungen in der Form schreibt

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \frac{m}{a - \omega^2} (a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p), \\ \mathfrak{N} &= \frac{n}{b - \omega^2} (a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p), \\ \mathfrak{P} &= \frac{p}{c - \omega^2} (a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\end{aligned}\quad (7)$$

erhält man durch Multiplication dieser Gleichungen mit resp.  $m$ ,  $n$ ,  $p$  und Addition

$$\frac{m^2}{a - \omega^2} + \frac{n^2}{b - \omega^2} + \frac{p^2}{c - \omega^2} = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung spricht das FRESNEL'sche Gesetz für die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen von der Richtung ihrer Normalen aus. Da die Gleichung (8) eine quadratische Gleichung für  $\omega^2$  ist, die stets reelle Wurzeln hat, so pflanzen sich also in jeder Richtung zwei Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort.

Die zu jeder Welle zugehörigen Schwingungsrichtungen des FRESNEL'schen Lichtvectors ergeben sich nach den Gleichungen (7), welche man in der Form schreiben kann

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{N} : \mathfrak{P} = \frac{m}{a - \omega^2} : \frac{n}{b - \omega^2} : \frac{p}{c - \omega^2}, \quad (9)$$

worin für  $\omega$  ein bestimmter, der Gleichung (8) genügender Werth von  $\omega$  einzusetzen ist. Die Schwingungsrichtungen des NEUMANN'schen Lichtvectors sind zu der durch (9) definirten Richtung senkrecht.

Bezeichnet man die beiden Wurzeln von  $\omega^2$  der Gleichung (8) durch  $o^2$  und  $e^2$ , und drückt durch angehängte Indices an  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{P}$  die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Wellen aus, deren Geschwindigkeiten resp.  $o$  und  $e$  sind, so ist also nach (9):

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_o : \mathfrak{N}_o : \mathfrak{P}_o &= \frac{m}{a - o^2} : \frac{n}{b - o^2} : \frac{p}{c - o^2}, \\ \mathfrak{M}_e : \mathfrak{N}_e : \mathfrak{P}_e &= \frac{m}{a - e^2} : \frac{n}{b - e^2} : \frac{p}{c - e^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die Schwingungsrichtungen der beiden zu der gleichen Normale gehörigen Wellen senkrecht aufeinander stehen, indem die Beziehung besteht:

$$\mathfrak{M}_o \mathfrak{M}_e + \mathfrak{N}_o \mathfrak{N}_e + \mathfrak{P}_o \mathfrak{P}_e = 0.$$

In der That kann man die linke Seite der letzten Gleichung nach (10) schreiben

$$\frac{1}{o^2 - e^2} \left( \frac{m^2}{a - o^2} + \frac{n^2}{b - o^2} + \frac{p^2}{c - o^2} - \frac{m^2}{a - e^2} - \frac{n^2}{b - e^2} - \frac{p^2}{c - e^2} \right).$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber nach der Gleichung (8). Nach der 2ten der Gleichungen (5) folgt daher für die Schwingungsrichtung des NEUMANN'schen Lichtvectors

$$\begin{aligned}M_o : N_o : P_o &= \frac{m}{a - e^2} : \frac{n}{b - e^2} : \frac{p}{c - e^2}, \\ M_e : N_e : P_e &= \frac{m}{a - o^2} : \frac{n}{b - o^2} : \frac{p}{c - o^2}.\end{aligned}\quad (10')$$

Die durch die Gleichungen (8) und (9) ausgesprochenen Gesetze für Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsrichtung kann man durch eine geometrische Construction sehr anschaulich erhalten<sup>1)</sup>.

Es sei eine Fläche gegeben, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten die Gestalt haben möge

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^i. \quad (11)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung  $m, n, p$  sind gleich der  $(i - 1)$ ten Potenz des grössten, resp. kleinsten Radiusvectors derjenigen Curve, in welcher jene Fläche von der Wellenebene geschnitten wird, die zugehörigen (FRESNEL'schen) Schwingungen sind parallel den Richtungen der entsprechenden Radienvectoren. Setzt man  $i = 0$ , so geht die Oberfläche (11) in ein Ellipsoid über, dessen Halbachsen die Werthe  $\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}$  besitzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind also die reciproken Werthe der Hauptachsen der Schnittellipse des Ellipsoides mit der Wellenebene. Dieses Ellipsoid ist von CAUCHY<sup>2)</sup> das Polarisationsellipsoid genannt. — In dem Falle  $i = 1$  wird die Oberfläche (11) zur geometrischen Construction untauglich, da sie in diesem Falle keine geschlossene Fläche, sondern einen Kegel darstellt. — Für  $i = 2$  geht die Oberfläche in eine von FRESNEL Elasticitätsfläche, von SENFF<sup>3)</sup> Ovaloid genannte Fläche über, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind gleich den Hauptachsen der Schnittcurve.

Verhält sich das Medium rings um eine (die  $z$ -) Axe optisch gleich, wie die Krystalle des tetragonalen und hexagonalen Systems, so werden zwei jener Coëfficienten  $a, b, c$  einander gleich ( $a = b$ ), und die Fläche (11) wird zu einer Rotationsfläche. Aus obiger geometrischen Construction folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen Welle von der Richtung der Wellennormale unabhängig ist (ordinäre Welle) und dass ihre Schwingung (im FRESNEL'schen Sinne) senkrecht zum Hauptschnitt, d. h. der durch die Wellennormale und die Rotationsaxe gelegten Ebene ist. Da der Hauptschnitt als Polarisationsebene der ordinären Welle defnirt ist, so folgt, dass nach FRESNEL die Schwingung des Lichtvectors senkrecht zur Polarisationsebene stattfindet, nach NEUMANN daher in derselben. Dies Resultat musste aus der FRESNEL'schen Annahme, dass die Schwingungsrichtung allein für das Verhalten einer Lichtwelle, d. h. auch für ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, maassgebend sei, nothwendig folgen, auch ohne die speciellere Kenntniss der Geschwindigkeitsgesetze. Denn falls die Wellennormale verschiedene Lagen im Hauptschnitt des Krystalls annimmt, muss nach obiger Annahme die Geschwindigkeit für diejenige Welle constant bleiben, deren Schwingungsrichtung constant bleibt, und das ist daher diejenige Welle, welche senkrecht zum Hauptschnitt schwingt.

Trägt man in jeder Richtung  $m, n, p$  die beiden zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auf, so erhält man eine zweischalige Fläche, deren Gleichung in Polarcoordinaten durch (8) dargestellt wird. Diese Fläche wird die Normalenfläche genannt, da sie die Geschwindigkeiten der Wellennormalen angiebt. Löst man (8) nach  $\omega^2$  auf, so entsteht

$$\omega^4 - \omega^2 [m^2 (b + c) + n^2 (c + a) + p^2 (a + b)] + m^2 bc + n^2 ca + p^2 ab = 0.$$

<sup>1)</sup> cf. V. v. LANG, Wien. Ber. 43, pag. 627. 1861. — Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, 1873, pag. 334.

<sup>2)</sup> CAUCHY, Mém. de l'Acad. des sciens. 8, pag. 361. 1843.

<sup>3)</sup> SENFF, Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und Polarisation des Lichtes in den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems. Dorpat 1837.

Setzt man

$$A = m^2 (b - c), \quad B = n^2 (c - a), \quad C = p^2 (a - b),$$

so folgt unter Rücksicht auf  $m^2 + n^2 + p^2 = 1$  für  $\omega^2$

$$2\omega^2 = \frac{m^2 (b + c) + n^2 (c + a) + p^2 (a + b)}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB}}. \quad (12)$$

Es sei nun

$$a > b > c.$$

Dann sind  $A$  und  $C$  positiv,  $B$  negativ. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen kann man in die Form bringen

$$(A + B - C)^2 - 4AB.$$

Dies ist eine stets positive Grösse, welche nur dann zu Null wird, wenn

$$A + B - C = 0, \quad AB = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind, da  $B$  und  $C$  entgegengesetztes Vorzeichen haben, nur durch

$$B = 0, \quad A = C$$

zu erfüllen. Die Gleichung (12) ergibt daher stets zwei reelle Wurzeln für  $\omega$ , welche für

$$n = 0, \quad m^2 (b - c) = p^2 (a - b), \quad \text{d. h.} \quad m^2 = \frac{a - b}{a - c}, \quad p^2 = \frac{b - c}{a - c} \quad (13)$$

zu einer einzigen zusammenfallen.

Durch die Gleichungen (13) sind zwei Richtungen der Wellennormalen ermittelt, in welchen keine Doppelbrechung stattfindet. Diese Richtungen werden die optischen Axen genannt. Dieselben haben offenbar die Eigenschaft, dass eine zu ihnen senkrechte Ebene das Polarisationsellipsoid und das Ovaloid in einem Kreise schneidet. Die Schwingungsrichtung ist daher in diesem Falle unbestimmt.

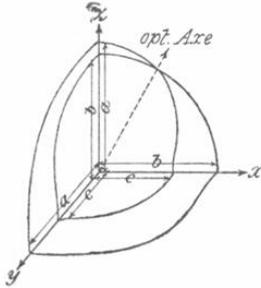
Da die Werthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  von der Wellenlänge (und Temperatur) abhängen, so ist die Lage der optischen Axen mit der Farbe variabel. Man bezeichnet diese Erscheinung als Dispersion der optischen Axen. Bei den triklinen Krystallen ist nicht nur der Winkel, sondern auch die Ebene der optischen Axen und die Halbirungslinien ihrer Winkel mit der Farbe variabel, bei monoklinen Krystallen, bei welchen die Ebene der optischen Axen entweder in der krystallographischen Symmetrieebene oder senkrecht zu ihr liegt, sind im ersten Falle nur der Winkel der optischen Axen und ihre Halbirungslinien variabel, im zweiten Falle nur ihr Winkel und ihre Ebene. Bei rhombischen Krystallen hängt nur der Winkel der optischen Axen von der Farbe ab, jedoch kann auch ihre Ebene bei einigen Farben um  $90^\circ$  von der für andere Farben gültigen abweichen, wenn die Reihenfolge der Werthe  $a$ ,  $b$ ,  $c$  für verschiedene Farben wechselt. Letztere Erscheinung tritt z. B. ein bei Brookit, Manganpikrat, Eisenpikrat<sup>1)</sup>.

Die Krystalle, bei welchen alle drei Constanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  von einander verschiedene Werthe besitzen, d. h. die Krystalle des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems, werden wegen der Eigenschaft, zwei optische Axen zu besitzen, zweiaxige Krystalle genannt, im Gegensatz zu den Krystallen des tetragonalen und hexagonalen Systems, bei welchen zwei jener Constanten einander gleich sind und bei welchen nach (13) die optischen Axen in eine einzige zusammenfallen. Diese Krystalle werden daher einaxige genannt.

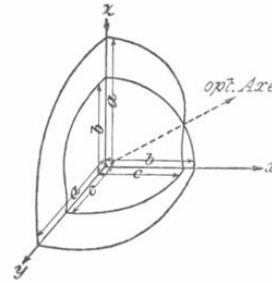
Man bezeichnet diejenige optische Symmetrieaxe, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, als erste Mittellinie, diejenige, welche den stumpfen

<sup>1)</sup> cf. TH. LIEBISCH, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891, pag. 358.

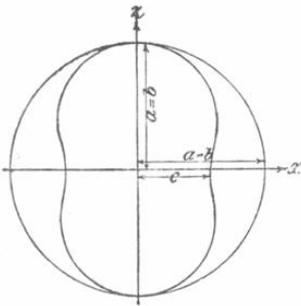
Winkel halbirt, als zweite Mittellinie. Man nennt einen zweiachsigem Krystall positiv oder negativ, je nachdem die erste Mittellinie die Richtung der kleinsten oder der grössten Ovaloidaxe besitzt, d. h. je nachdem der Werth der mittleren Ovaloidaxe ( $b$ ) sich mehr dem der grössten Axe ( $a$ ), als dem der kleinsten ( $c$ ) nähert, oder je nachdem das Umgekehrte der Fall ist. Dementsprechend nennt man auch einaxige Krystalle positiv oder negativ, je nachdem ihr Ovaloid eine Rotationsfläche ist, welche in der Richtung der Rotationsaxe abgeplattet oder verlängert ist. Für einaxige Krystalle zerfällt nach der Gleichung (8) die Normalenfläche in eine Kugel und ein dasselbe in Richtung der Axe berührendes Rotationsovaloid. Der Krystall ist gemäss der vorigen Festsetzung positiv oder



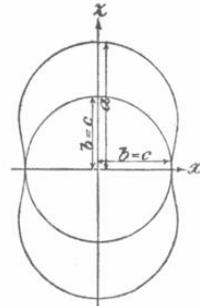
a) Positiv zweiaxiger Krystall.



b) Negativ zweiaxiger Krystall.



c) Positiv einaxiger Krystall



d) Negativ einaxiger Krystall.

(Ph. 476.)

negativ, je nachdem die Kugel das Ovaloid umschliesst oder das Ovaloid die Kugel, d. h. je nachdem die ordinäre Welle die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt als die extraordinäre, oder umgekehrt.

Diese Unterscheidung des Charakters der Doppelbrechung bei einaxigen Krystallen rührt von BIOT<sup>1)</sup> her. Quarz ist positiv einaxig, Kalkspath negativ. In den obigen Figuren sind die Durchschnitte der Normalenfläche durch die Symmetrieebenen (Hauptebenen) der zweiachsigem und durch den Hauptschnitt der einaxigen Krystalle gezeichnet (Fig. 476). Wie aus der Gleichung (8) unmittelbar

<sup>1)</sup> BIOT, Mém. de la classe des sc. math. et phys. de l'Inst. 13 (2), pag. 19. 1816. — GILBERT, Ann. d. Phys. 65, pag. 1. 1820. BIOT nannte (im Sinne der Emissionstheorie) die einaxigen Krystalle attractiv oder repulsiv, je nachdem der extraordinäre Strahl von der Axe angezogen oder abgestossen wurde. Ersteres ist der Fall bei den positiven, letzteres bei den negativen Krystallen. Diese Bezeichnung rührt von FRESNEL her; sie ist daran leicht zu merken, dass bei den positiven Krystallen die Differenz zwischen der ordinären und extraordinären Fortpflanzungsgeschwindigkeit positiv ist, bei den negativen negativ. Die Bezeichnung des Charakters der Doppelbrechung zweiachsigem Krystalle ist so gewählt, dass sie für Zusammenfallen der Axen in die Bezeichnung bei den einaxigen Krystallen übergeht, wie oben gezeigt ist.

hervorgeht, pflanzt sich in jeder Hauptebene eine Welle mit constanter Geschwindigkeit fort.

Führt man die Winkel  $g$  und  $g'$  ein, welche die Wellennormale mit den beiden optischen Axen bildet, und zwar mit denjenigen Richtungen derselben, welche einen spitzen Winkel einschliessen, so lassen sich die beiden Wurzeln ( $o$  und  $e$ ) der Gleichung (8) getrennt und ohne Wurzelzeichen angeben<sup>1)</sup>. Aus den Werthen, welche die Richtungscosinus der optischen Axen nach (13) besitzen, folgt nämlich

$$\cos g = m \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} - p \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}, \quad \cos g' = m \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} + p \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} m^2(b+c) + n^2(c+a) + p^2(a+b) &= (a+c) - (a-c) \cos g \cos g', \\ A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB &= (a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g'; \end{aligned} \quad (13')$$

Die Wurzeln von  $\omega^2$  sind daher nach (12)

$$\begin{aligned} o^2 &= \frac{a+c}{2} \pm \frac{a-c}{2} \cos(g-g'), \\ e^2 &= \frac{a-c}{2} \pm \frac{a-c}{2} \cos(g+g'). \end{aligned} \quad (12')$$

Die Bezeichnung ist so gewählt, dass, falls das Medium in ein einaxiges übergeht, d. h.  $g = g'$  wird,  $o$  die Geschwindigkeit der ordinären Welle,  $e$  die der extraordinären bedeutet. Das obere Zeichen in (12') gilt für positive Krystalle, das untere für negative.

Unter Zuhilfenahme der optischen Axen lassen sich auch die Schwingungsrichtungen leicht construiren. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der Richtung der Hauptaxen des Ovals, in welchem das Ovalöid von der Wellenebene geschnitten wird. Dieses Oval wird nun von den Kreisschnitten des Ovalöids in gleichen Radienvectoren  $r$  und  $r'$  geschnitten, die Halbierungslinien der von denselben gebildeten Winkel sind also die Hauptaxen des Ovals. — Weiter sind jene Radienvectoren  $r$  und  $r'$  gegen die durch die Wellennormale  $N$  und je eine optische Axe gelegte Ebene senkrecht, denn sie gehören ja dem Ovalschnitt und je einem (zur optischen Axe senkrechten) Kreisschnitt gleichzeitig an. Diese Ebenen schneiden daher das Oval in zwei Radienvectoren  $r_1$  und  $r'_1$ , welche zu den  $r$  und  $r'$  senkrecht sind. Die Hauptaxen des Ovals halbiren daher auch die von den Vektoren  $r_1$  und  $r'_1$  gebildeten Winkel, und da die Schwingungsrichtungen mit jenen Hauptaxen coincidiren, so liegen folglich die Schwingungsrichtungen in denjenigen Ebenen, welche die Winkel der durch die Wellennormale und die optischen Axen gelegten Ebenen halbiren<sup>2)</sup>. Da die Schwingungsrichtungen zur Wellennormale senkrecht sind, so sind sie durch diese Betrachtung völlig bestimmt.

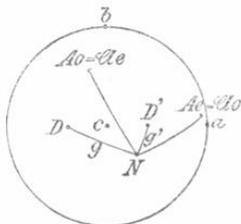
Die FRESNEL'sche Schwingung  $\mathfrak{A}_o$ , welche zu der mit der Geschwindigkeit  $o$  fortschreitenden Welle gehört, muss in der Ebene liegen, welche denjenigen Winkelraum jener beiden Ebenen halbirt, welcher die zweite Mittellinie enthält, wie ersichtlich ist für den Fall, dass beide optische Axen coincidiren, da dann  $\mathfrak{A}_o$  senkrecht zur optischen Axe steht. — In der folgenden Figur ist eine Darstellung auf der Kugelfläche gegeben.  $N$  bezeichnet die Wellennormale,  $a$ ,  $b$ ,  $c$

<sup>1)</sup> F. NEUMANN, POGG. Ann. 33, pag. 257. 1834.

<sup>2)</sup> Dieser Satz ist von MAC CULLAGH gefunden (Trans. of the Irish Acad. 16. 1830, part 2, pag. 65.)

die Ovaloidaxen,  $D, D'$  die optischen Axen,  $\mathfrak{A}_o, \mathfrak{A}_e$  die Schwingungsrichtung des FRESNEL'schen,  $A_o, A_e$  die des NEUMANN'schen Lichtvectors (Fig. 477.)

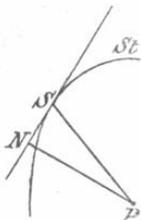
War bisher die Fortpflanzung einer Gesamtheit von Erschütterungen betrachtet, welche alle in einer Ebene lagen, so wollen wir nun die Fortpflanzung einer einzelnen Erschütterung näher ins Auge fassen. — Diejenige Fläche, bis zu welcher sich eine einzelne Erschütterung nach Ablauf einer gewissen Zeit fortgepflanzt hat, wird Wellenfläche oder Strahlenfläche genannt. Mit Hilfe derselben kann man sich leicht diejenige Fläche  $\Sigma_t$  construiren, bis zu welcher sich eine Lichtbewegung nach Ablauf einer Zeit  $t$  fortgepflanzt hat, die



(Ph. 477.)

sich zur Zeit 0 auf einer Fläche  $\Sigma_o$  befand. Zu dem Zwecke muss man nämlich nach dem HUYGENS'schen Princip um jeden Punkt  $P$  der Fläche  $\Sigma_o$  die Wellenfläche  $S_t$  construiren. Die Enveloppe sämtlicher zu den verschiedenen Punkten  $P$  gehöriger Wellenflächen ist die gesuchte Fläche  $\Sigma_t$ . Es möge die um einen bestimmten Punkt  $P$  von  $\Sigma_o$  construirte Wellenfläche die Enveloppe  $\Sigma'_t$  in dem Punkte  $S$  berühren. Irgend welche zwischen  $\Sigma_o$  und  $\Sigma_t$  befindlichen undurchsichtigen Schirme verhindern nur dann, dass sich eine Erschütterung von  $\Sigma_o$  nach  $S$  fortpflanzt, wenn sie von der Geraden  $PS$  geschnitten werden, wie aus der Construction und gemäss den früher pag. 624 angestellten Ueberlegungen folgt. Man sagt daher, dass sich das Licht nach  $S$  in der Richtung von  $PS$  fortpflanze und nennt diese Richtung die des Lichtstrahles im Punkte  $S$ . Ist die Fläche  $\Sigma_o$  eine Ebene, so ist  $\Sigma_t$  auch eine solche. Diejenige Ebene, bis zu welcher sich eine Lichtbewegung nach Ablauf einer Zeit  $t$  fortgepflanzt hat, die zur Zeit 0 sich auf einer Ebene befand, welche durch den Punkt  $P$  geht und deren Normale mit  $N$  bezeichnet sein möge, wird daher dadurch erhalten, dass man an die um  $P$  construirte Wellenfläche  $S_t$  eine Tangentialebene legt, deren Normale mit der Normalen  $N$  zusammenfällt.

Berührt diese Ebene die Strahlenfläche  $S_t$  im Punkte  $S$ , so giebt  $PS$  die Richtung des Strahles und zugleich den vom Lichtstrahl in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg an (Fig. 478). Ist  $PN$  die Länge des von  $P$  auf die Wellenebene gefällten Lothes, so ist daher  $PN$  proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  der ebenen Welle. Dagegen ist  $PS$  proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\sigma$  des Lichtstrahles, und wegen der auseinandergesetzten geometrischen Beziehungen findet die Relation statt:



(Ph. 478.)

$$\omega = \sigma \cdot \cos(NS), \quad (14)$$

wobei  $(NS)$  den Winkel zwischen Strahl und Wellennormale bedeutet. Es ist also die Normalenfläche die Fusspunktfläche der Strahlenfläche.

Da die Strahlenfläche  $S_t$  sämtliche von  $P$  aus nach der Zeit  $t$  in beliebigen Richtungen fortgepflanzten Wellenebenen berührt, so heisst das, dass die Strahlenfläche die Enveloppe jener Ebenen ist. Hierdurch kann man die Strahlenfläche aus der Normalenfläche bestimmen<sup>1)</sup>. Nennt man die Richtungscosinus des Strahles  $m, n, p$  und setzt man

<sup>1)</sup> AMPÈRE, Ann. de chim. et de phys. (2) 39, pag. 113. 1828. — A. SMITH, Trans. Camb. Phil. Soc. (1) 6, pag. 85. 1836. — Phil. Mag. 12, pag. 335. 1838. — C. E. SENFF, l. c. (cf. pag. 690), pag. 101.

$$G^2 = \left( \frac{m}{a - \omega^2} \right)^2 + \left( \frac{n}{b - \omega^2} \right)^2 + \left( \frac{p}{c - \omega^2} \right)^2, \quad (15)$$

so sind die Bestimmungsstücke des Lichtstrahles mit denen der zugehörigen Wellennormale durch die Relationen verknüpft:

$$\begin{aligned} m\sigma &= m\omega \left[ 1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - a)} \right], \\ n\sigma &= n\omega \left[ 1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - b)} \right], \\ p\sigma &= p\omega \left[ 1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - c)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Durch Quadriren und Addiren dieser drei Gleichungen folgt:

$$\sigma^2 = \omega^2 + \frac{1}{G^2\omega^2}. \quad (16')$$

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die hier gegebene Definition des Strahles sich mit einer anderen von G. KIRCHHOFF gegebenen Definition deckt, welche nicht das HUYGENS'sche Princip benutzt und daher direkter ist, da letzteres zu seiner strengen theoretischen Begründung noch einiger Erörterungen bedarf.

Wenn die Grenzfläche zweier Medien parallel zur Richtung der Lichtstrahlen in dem einen Medium verläuft, so hat das Vorhandensein und die Natur des zweiten Mediums keinerlei Einfluss auf die Lichtbewegung im ersten Medium. Denn der Lichtstrahl ist ja dadurch charakterisirt, dass er nur durch direkt in seinem Wege liegende Hindernisse modificirt, d. h. entweder vernichtet (Schatten) oder gebrochen wird. — Wenn daher die Grenzfläche zweier Medien parallel zu einem im ersteren derselben verlaufenden Lichtstrahl liegt, so kann keine Energieübertragung aus dem ersteren Medium in das zweite hinein stattfinden, da letzteres auf die Lichtbewegung im ersteren keinerlei Einfluss hat. Die Richtung des Lichtstrahles kann also auch dadurch definirt werden, dass durch jede zu ihm parallel gelegte Ebene kein Energiefluss stattfindet.

Nun lässt sich aus den Formeln (11) der pag. 669 nach der elektromagnetischen Theorie leicht ableiten, dass der Energiefluss durch die Flächen-Einheit einer Ebene, deren Normale die Richtungscosinus  $\cos(nx)$  etc. besitzt, dem Ausdruck proportional ist:

$$(NY - MZ) \cos(nx) + (LZ - NX) \cos(my) + (MX - LY) \cos(nz).$$

Hierin bedeuten  $L, M, N$  die Componenten der magnetischen Kraft, d. h. des NEUMANN'schen Vectors  $u', v', w'$ , und ferner bedeuten  $X, Y, Z$  die Componenten der elektrischen Kraft, d. h. desjenigen dritten Lichtvectors  $u'', v'', w''$ , welcher sich in quasi-transversalen Wellen fortpflanzt. Letzterer ist aber mit dem FRESNEL'schen Vector durch die Beziehungen verknüpft

$$X = u'' = au, \quad Y = v'' = bv, \quad Z = w'' = cw. \quad (17)$$

Es muss daher die Relation stattfinden:

$$(bw'v - cv'w) \cos(nx) + (cw'w - aw'u) \cos(ny) + (av'u - bu'v) \cos(nz) = 0,$$

für jede Richtung  $n$ , welche normal zum Lichtstrahl liegt. Bezeichnet man daher die Richtungscosinus des Strahles durch  $m, n, p$ , so muss die aufgestellte Gleichung für alle Richtungen  $n$  gelten, welche der Relation genügen:

$$m \cos(nx) + n \cos(ny) + p \cos(nz) = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die Richtungscosinus des Strahles, wenn man noch  $u, v, w$  durch die ihnen proportionalen Werthe  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$  ersetzt, und ebenso  $u', v', w'$  durch  $M, N, P$ :

$$m : n : p = c\mathfrak{P}N - b\mathfrak{N}P : a\mathfrak{M}P - c\mathfrak{P}M : b\mathfrak{N}M - a\mathfrak{M}N. \quad (17')$$

Durch Multiplication der zweiten der Gleichungen (6) mit  $P$  und der dritten mit  $N$  und Subtraction erhält man, da nach (5)  $m = \mathfrak{N}P - N\mathfrak{P}$  etc.,

$$\omega^2 m = c\mathfrak{P}N - b\mathfrak{N}P + \mathfrak{M}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),$$

und zwei analoge Gleichungen kann man aus dieser durch cyklische Vertauschung der Buchstaben ableiten. Man kann daher setzen:

$$\begin{aligned} m &= \rho [\omega^2 m - \mathfrak{M}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \\ n &= \rho [\omega^2 n - \mathfrak{N}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \\ p &= \rho [\omega^2 p - \mathfrak{P}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \end{aligned} \quad (18)$$

wo  $\rho$  ein gewisser Proportionalitätsfactor ist, dessen Grösse durch Quadriren und Addiren der letzten drei Gleichungen unter Rücksicht auf die Beziehung

$$a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p = \frac{1}{G}, \quad (19)$$

welche durch Quadriren und Addiren der Gleichungen (7) folgt, bestimmt wird zu

$$\rho = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{G^2 \omega^2}}} = \frac{1}{\omega \sigma} \text{ nach (16')}. \quad (20)$$

Durch Einsetzen dieses Werthes von  $\rho$  und der aus (7) folgenden Werthe  $\mathfrak{M} = \frac{m}{(a - \omega^2)G}$ ,  $\mathfrak{N} = \text{etc.}$  in die Gleichungen (18) erhält man die Gleichungen (16), sodass die Identität der beiden Definitionen des Strahles erwiesen ist.

Setzt man in den Gleichungen (16) für  $\frac{1}{G^2 \omega^2}$  den Werth  $\sigma^2 - \omega^2$ , welcher aus (16') folgt, so nehmen sie die Gestalt an:

$$\frac{m\sigma}{a - \sigma^2} = \frac{m\omega}{a - \omega^2}, \quad \frac{n\sigma}{b - \sigma^2} = \frac{n\omega}{b - \omega^2}, \quad \frac{p\sigma}{c - \sigma^2} = \frac{p\omega}{c - \omega^2}. \quad (21)$$

Diese Gleichungen kann man auch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} m\omega &= m\sigma \left( 1 + \frac{\sigma^2 - \omega^2}{a - \sigma^2} \right), \\ n\omega &= n\sigma \left( 1 + \frac{\sigma^2 - \omega^2}{b - \sigma^2} \right), \\ p\omega &= p\sigma \left( 1 + \frac{\sigma^2 - \omega^2}{c - \sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit  $m\sigma$ ,  $n\sigma$ ,  $p\sigma$  und addirt sie, so kann man unter Rücksicht auf die Relation (14) den Factor  $\omega^2 - \sigma^2$  fortheben und es resultirt

$$\frac{1}{\sigma^2} + \frac{m^2}{a - \sigma^2} + \frac{n^2}{b - \sigma^2} + \frac{p^2}{c - \sigma^2} = 0. \quad (23)$$

Addirt man zu dieser Gleichung die Identität

$$\frac{m^2}{\sigma^2} + \frac{n^2}{\sigma^2} + \frac{p^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} = 0,$$

so entsteht

$$\frac{m^2 a}{a - \sigma^2} + \frac{n^2 b}{b - \sigma^2} + \frac{p^2 c}{c - \sigma^2} = 0, \quad (23')$$

oder

$$\frac{m^2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\sigma^2}} + \frac{n^2}{\frac{1}{b} - \frac{1}{\sigma^2}} + \frac{p^2}{\frac{1}{c} - \frac{1}{\sigma^2}} = 0. \quad (23'')$$

Die drei Gleichungen (23, 23', 23'') sind Polargleichungen der Strahlenfläche. In der letzten Form erhellt nach Erläuterungen der pag. 690 unmittelbar,

dass die Punkte der Strahlenfläche geometrisch dadurch zu erhalten sind, dass auf dem Radiusvector ( $m, n, p$ ) die Haupttaxen derjenigen Ellipse aufgetragen werden, in welcher eine zum Radiusvector ( $m, n, p$ ) senkrechte Ebene das Ellipsoid schneidet, dessen Haupttaxen resp.  $a, b, c$  sind.

Da aus der Formel (23'') folgt, dass durch Ersetzung sämtlicher bei der Normalenfläche auftretenden Linien durch ihre reciproken Werthe die Strahlenfläche erhalten wird, so resultirt unmittelbar nach den Erörterungen der pag. 691, dass für jede Richtung, deren  $\cos m, n, p$  sind, zwei reelle Radien  $\sigma$  sich ergeben, dass dagegen für zwei Richtungen, welche durch die Gleichungen:

$$n = 0, m^2 = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a-b}{a-c}, p^2 = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b-c}{a-c}, \quad (24)$$

definiert sind, die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Strahles zusammenfallen. Diese Richtungen heissen die Strahlenaxen. Da  $a > b > c$  vorausgesetzt ist, so folgt aus (24) und (13), dass die Strahlenaxen näher der kleinsten Axe des Ovaloids liegen (der  $z$ -Axe), als die optischen Axen. Bei den positiv zweiaxigen Krystallen liegen also die Strahlenaxen innerhalb der von der ersten Mittellinie und den optischen Axen gebildeten Winkel, bei den negativen ausserhalb derselben.

Die Gestalt der Durchschnitte der Strahlenfläche mit den Hauptebenen ist den in Fig. 476 der pag. 692 dargestellten der Normalenfläche mit jenen Ebenen ähnlich, nur treten Ellipsen an Stelle der Ovale.

Der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale, dessen  $\cos$  durch  $\omega:\sigma$  gegeben ist, erreicht in 6 Richtungen, von denen je zwei in einer Hauptebene liegen, relative Maxima<sup>1)</sup>. Bei Kalkspath erreicht dieser Maximalwinkel den Betrag von  $6^\circ 16' 2''$ .

Die Gleichungen (16) und (16') dienen zur Bestimmung des Strahles aus der Wellennormale. Aus den Gleichungen (22) kann man durch Transformation solche ableiten, welche die Wellennormale aus dem Strahl bestimmen. Nach (16') ist nämlich

$$\sigma^2 - \omega^2 = \frac{1}{G^2 \omega^2},$$

und da durch Quadrirung und Addirung der Gleichungen (21) folgt:

$$\omega^2 G^2 = \left( \frac{m\sigma}{a - \sigma^2} \right)^2 + \left( \frac{n\sigma}{b - \sigma^2} \right)^2 + \left( \frac{p\sigma}{c - \sigma^2} \right)^2 = F^2, \quad (25)$$

so ist nach (22)

$$m\omega = m\sigma \left[ 1 + \frac{1}{F^2(a - \sigma^2)} \right],$$

$$n\omega = n\sigma \left[ 1 + \frac{1}{F^2(b - \sigma^2)} \right], \quad (26)$$

$$p\omega = p\sigma \left[ 1 + \frac{1}{F^2(c - \sigma^2)} \right].$$

$$\omega^2 = \sigma^2 - \frac{1}{F^2}. \quad (26')$$

Diese Gleichungen (26) und (26') bestimmen zu jedem Strahl die zugehörige

<sup>1)</sup> W. WALTON, Quart. Journ. 4, pag. 1. 1861.

<sup>2)</sup> Weitere numerische Angaben bei anderen Krystallen, cf. LIEBISCH, physikal. Krystallogr. pag. 309 u. 339.

Wellennormale. Diese Bestimmungen gestalten sich einfacher durch Zuhilfenahme der optischen Axen und Strahlenaxen.

Es folgt aus den Gleichungen (16), welche zunächst für denjenigen Strahl  $\sigma_0$  ( $m_0, n_0, p_0$ ) betrachtet werden mögen, welcher zu der mit der Geschwindigkeit  $\sigma$  sich fortpflanzenden Welle gehört, durch Multiplication mit resp.  $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e, \mathfrak{P}_e$  und Addition nach der zweiten der Gleichungen (10):

$$\sigma_0 \cos(\sigma_0 \mathfrak{N}_e) = \frac{1}{G_0^2 \sigma} \left[ \frac{m^2}{(a - \sigma^2)(a - e^2)} + \frac{n^2}{(b - \sigma^2)(b - e^2)} + \frac{p^2}{(c - \sigma^2)(c - e^2)} \right];$$

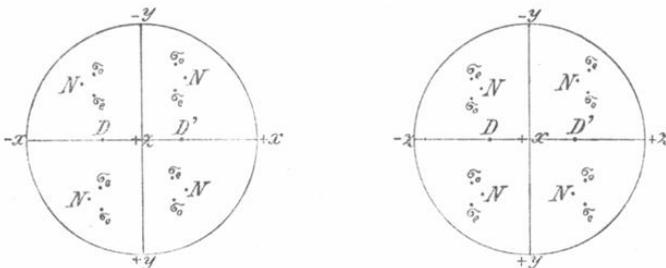
Dieser Ausdruck verschwindet aber, wie wir schon oben, pag. 689, sahen. Es ist daher

$$\cos(\sigma_0 \mathfrak{N}_e) = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \cos(\sigma_e \mathfrak{N}_o) = 0, \quad (27)$$

d. h. der Strahl  $\sigma_0$  ist senkrecht zu der Schwingungsrichtung  $\mathfrak{N}_e$ , und  $\sigma_e$  senkrecht zu  $\mathfrak{N}_o$ . Da nun die Wellennormale  $N$ , sowie  $\mathfrak{N}_o$  und  $\mathfrak{N}_e$  drei zu einander rechtwinklige Richtungen sind, so liegt  $\sigma_0$  in der  $N$  und  $\mathfrak{N}_o$  verbindenden Ebene, und  $\sigma_e$  in der  $N$  und  $\mathfrak{N}_e$  verbindenden Ebene d. h. die Strahlen liegen (nach pag. 693) auf den Halbierungsebenen derjenigen Winkel, welche die durch die Wellennormale und die optischen Axen gelegten Ebenen mit einander bilden. Die Polarisationsebene, d. h. die durch die Wellennormale und den NEUMANN'schen Lichtvector gelegte Ebene, steht also senkrecht zu der durch den zugehörigen Strahl und die zugehörige Wellennormale gelegten Ebene. Die Lage des Strahles in dieser Ebene wird durch die Relationen gefunden:

$$\sigma_0 \cos(\sigma_0 \mathfrak{N}_o) = \frac{1}{G_0 \sigma}, \quad \sigma_e \cos(\sigma_e \mathfrak{N}_e) = \frac{1}{G_e \sigma}, \quad (28)$$

welche Beziehungen durch Multiplication der drei Gleichungen (16) mit resp.  $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_o$ , oder  $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e, \mathfrak{P}_e$  und Addition sofort abgeleitet werden. Der Sinn,



a) Positiv zweiaxiger Krystall.

b) Negativ zweiaxiger Krystall.

(Ph. 479.)

in welchem  $\sigma$  zu  $N$  liegt, ergibt sich durch Betrachtung der Fälle, in welchen  $N$  in eine Hauptebene fällt. Die Lage von  $\sigma$  zu  $N$  wird durch die beifolgenden schematischen Figuren geliefert, in welchen  $D, D'$  die optischen Axen bedeuten (Fig. 479).

Ausser den Richtungen  $\mathfrak{N}_o$  und  $\mathfrak{N}_e$ , welche in die Hauptaxen des von der Wellenebene aus dem Ovaloid ausgeschnittenen Ovals liegen, mögen nun noch die zwei Richtungen  $\mathfrak{N}'_o$  und  $\mathfrak{N}'_e$  eingeführt werden, welche in die Hauptaxen derjenigen Ellipse fallen, in welcher eine zum Strahl normale Ebene das zur Construction der Strahlenfläche dienende Ellipsoid schneidet. Da wir früher (pag. 697) sahen, dass durch Uebergang zu den reciproken Längen sämtliche Constructionen am Ovaloid in die entsprechenden an dem genannten Ellipsoid übergehen, so gelten auch die am ersteren erhaltenen geometrischen Beziehungen unmittelbar am letzteren, speciell halbiren also die durch  $\sigma$  und  $\mathfrak{N}'_o$  resp.  $\mathfrak{N}'_e$

gelegten Ebenen diejenigen Winkel, welche die durch  $\sigma$  und die Strahlenaxen gelegten Ebenen mit einander bilden. Die Richtungscosinus der Richtungen  $\mathfrak{N}'_o$  und  $\mathfrak{N}'_e$  werden erhalten, wenn man in den Gleichungen (10)  $m, n, p$  durch  $m, n, p$ , ferner  $a, b, c$  durch  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ , schliesslich  $\sigma$  und  $e$  durch  $\frac{1}{\sigma_o}$  und  $\frac{1}{\sigma_e}$  ersetzt. Bezeichnet man jene Richtungscosinus durch  $\mathfrak{M}'_o, \mathfrak{N}'_o, \mathfrak{P}'_o$  und  $\mathfrak{M}'_e, \mathfrak{N}'_e, \mathfrak{P}'_e$ , so ist also

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'_o : \mathfrak{N}'_o : \mathfrak{P}'_o &= \frac{am}{a - \sigma_o^2} : \frac{bn}{b - \sigma_o^2} : \frac{cp}{c - \sigma_o^2}, \\ \mathfrak{M}'_e : \mathfrak{N}'_e : \mathfrak{P}'_e &= \frac{am}{a - \sigma_e^2} : \frac{bn}{b - \sigma_e^2} : \frac{cp}{c - \sigma_e^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

In Folge der Gleichungen (21) und (10) folgt hieraus:

$$\mathfrak{M}' : \mathfrak{N}' : \mathfrak{P}' = a\mathfrak{M} : b\mathfrak{N} : c\mathfrak{P},$$

d. h. nach (17) fällt der Vector  $\mathfrak{U}'$  zusammen mit der elektrischen Kraft, d. h. demjenigen Vector, dessen Componenten mit  $u'', v'', w''$  bezeichnet sind. Dass dieser Vector senkrecht zum Strahl liegt, folgt aus (29) und (23'). Nach pag. 671 liegt er auch senkrecht zum NEUMANN'schen Vector  $u', v', w'$ .

Durch Multiplication der Gleichungen (26), welche zunächst für diejenige Welle aufgestellt werden mögen, die sich auf den Strahl  $\sigma_o$  bezieht, mit den Grössen  $\mathfrak{M}'_e, \mathfrak{N}'_e, \mathfrak{P}'_e$ , und Addition folgt:

$$o \cos(N_o \mathfrak{U}'_e) = \frac{\sigma_o}{F_o^2} \left[ \frac{m^2 a}{(a - \sigma_o^2)(a - \sigma_e^2)} + \frac{n^2 b}{(b - \sigma_o^2)(b - \sigma_e^2)} + \frac{p^2 c}{(c - \sigma_o^2)(c - \sigma_e^2)} \right],$$

und da

$$\frac{1}{(a - \sigma_o^2)(a - \sigma_e^2)} = \frac{1}{\sigma_o^2 - \sigma_e^2} \left( \frac{1}{a - \sigma_o^2} - \frac{1}{a - \sigma_e^2} \right),$$

so folgt, vermöge der Gleichung (23') der Strahlenfläche, dass

$$\cos(N_o \mathfrak{U}'_e) = o \text{ und ebenso } \cos(N_e \mathfrak{U}'_o) = o^1. \tag{30}$$

Durch Anwendung derselben Schlussweise, wie sie zur Ermittlung der Lage der beiden zu einer Wellennormale gehörigen Strahlen angewandt ist, gelangt man hier zu dem Resultat, dass die beiden zu einem Strahl gehörigen Wellennormalen auf den Halbirungsebenen derjenigen Winkel liegen, welche die durch den Strahl und die Strahlenaxen gelegten Ebenen mit einander bilden.

Dieser Satz spricht also in Verbindung mit dem über die Lage der beiden zu einer Normale gehörigen Strahlen gefundenen, aus, dass die Verbindungsebene einer Wellennormale mit einem der zugehörigen Strahlen gleichzeitig die beiden Winkel halbirt, welche man erhält, indem man die Wellennormale mit den optischen Axen und den Strahl mit den Strahlenaxen durch Ebene verbindet. Es ist dadurch eine einfache geometrische Construction<sup>2)</sup> der Strahlen ermöglicht. Wir wollen sie uns auf der Kugelfläche ausgeführt denken.

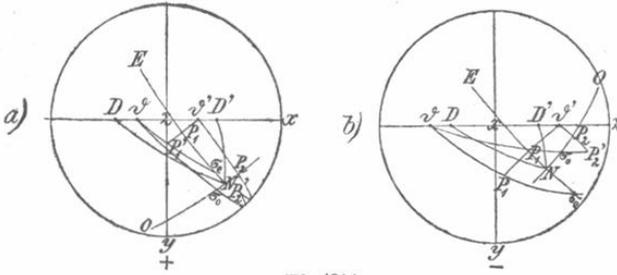
Es sei die Wellennormale  $N$ , die optischen Axen  $D, D'$  und die Strahlenaxen  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$  gegeben. Man halbire den Winkel  $(DND')$  durch den grössten Kreis  $NE$  und seinen Nebenwinkel durch  $NO$ , lege durch  $\mathfrak{D}'$  zwei zu  $NE$  und  $NO$  senkrecht grösste Kreise, welche  $NE$  und  $NO$  in  $P_1$  und  $P_2$  schneiden mögen, wähle zwei Punkte  $P'_1$  und  $P'_2$  derart auf  $\mathfrak{D}'P_1$  und  $\mathfrak{D}'P_2$ , dass die Bögen  $(P_1P'_1)$ ,  $(P_2P'_2)$  resp. gleich den Bögen  $(\mathfrak{D}P_1)$ ,  $(\mathfrak{D}'P_2)$  sind, und ziehe durch

<sup>1)</sup> Ebenso folgt, dass  $\cos(\mathfrak{U}_o \mathfrak{U}'_e) = o$ ,  $\cos(\mathfrak{U}_e \mathfrak{U}'_o) = o$ , d. h. die zu  $N_e$  gehörige Richtung  $\mathfrak{U}_o$  fällt mit  $\mathfrak{U}'_o$  zusammen, die zu  $N_o$  gehörige Richtung  $\mathfrak{U}_e$  mit  $\mathfrak{U}'_e$ .

<sup>2)</sup> J. J. SYLVESTER, Phil. Mag. 12, pag. 81. 1883.

$\mathcal{D}$  und  $P_1', P_2'$  zwei grösste Kreise. Ihre Schnittpunkte mit den Kreisen  $NE$  und  $NO$  ergeben die zu  $N$  gehörigen Strahlen  $\sigma_e$  und  $\sigma_o$  (Fig. 480)

Von Fig. 480 bezieht sich die erste (a) auf einen positiven Krystall, die zweite (b) auf einen negativen. Die Construction erläutert unmittelbar die in



(Ph. 480.)

beiden Fällen verschiedenen Lagen der Strahlen zur Wellennormale, wie sie in Fig. 479, pag. 698 angedeutet ist.

Durch eine ganz analoge Construction kann man zu jedem Strahl die beiden zugehörigen Wellennormalen erhalten<sup>1)</sup>.

Diese Constructionen versagen, wenn die Wellennormale in eine optische Axe, oder der Strahl in eine Strahlenaxe fällt.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Multiplicirt man die Gleichungen (21) resp. mit  $m, n, p$  und addirt sie, so entsteht:

$$\frac{mm}{a - \sigma^2} + \frac{nn}{b - \sigma^2} + \frac{pp}{c - \sigma^2} = 0. \tag{31}$$

Fällt die Wellennormale in eine optische Axe, so ist nach (13)

$$n = 0, \quad m = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \quad p = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}, \quad \omega^2 = b. \tag{32}$$

Die Gleichung (31) wird daher, weil  $\sigma^2$  von  $b$  verschieden ist, zu

$$\frac{mm}{a - \sigma^2} + \frac{pp}{c - \sigma^2} = 0. \tag{33}$$

Ferner ist nach (14)

$$\sigma \cos(NS) = \sigma(mm + pp) = \sqrt{b}. \tag{34}$$

Eliminirt man nun  $\sigma$  aus (33) und (34), so entsteht:

$$(mmc + ppa)(mm + pp) = b. \tag{35}$$

Nennt man die Coordinaten der Endpunkte des Strahles  $x, y, z$ , wobei also ist

$$x = m\sigma, \quad y = n\sigma, \quad z = p\sigma,$$

so entsteht aus (35) durch Multiplikation mit  $\sigma^2$ :

$$(xmc + zpa)(xm + zp) = b(x^2 + y^2 + z^2). \tag{36}$$

Dies ist die Gleichung eines durch den Coordinatenanfang gehenden Kegels. Es gehören also zur optischen Axe als Wellennormale unendlich viel auf einem durch die Gleichung (36) definirten Kegel liegende Strahlen. Derselbe schneidet auf der Wellenebene

$$xm + zp = \text{const.} \tag{37}$$

einen Kreis aus, da durch Einsetzen der Gleichung (37) in die Gleichung (36) letztere in

$$(xmc + zpa) \cdot \text{const.} = b(x^2 + y^2 + z^2), \tag{38}$$

d. h. in die Gleichung einer Kugel übergeht. Nach dem in pag. 694 Erörterten folgt daher, dass die Strahlenfläche zwei zu den optischen Axen senkrechte Tangentialebenen besitzt, welche dieselbe in einem Kreise berühren. Eine Erzeugende des Strahlenkegels fällt in die optische Axe selber und steht daher auf der Ebene des Kreises senkrecht. — Der Oeffnungswinkel  $\varepsilon$  des Strahlen-

<sup>1)</sup> Wegen weiterer Consequenzen des FRESNEL'schen Gesetzes cf. V. v. LANG, Wien. Ber. (2) 43, pag. 627. 1861.

kegels wird erhalten, wenn man in (36)  $y = 0$  setzt und den Winkel zwischen den beiden, dann durch (36) dargestellten, in der  $xz$ -Ebene liegenden Linien berechnet. Es ergibt sich

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\sqrt{(a-b)(b-c)}}{b}. \quad (39)$$

Die Polarisations Ebenen der Strahlen des Kegels stehen nach pag. 690 senkrecht auf der die Strahlen und die optische Axe verbindenden Ebene. Die Polarisations Ebene des Strahles, welcher mit der optischen Axe zusammenfällt, liegt daher in der Ebene der optischen Axen, die des zweiten in dieser Ebene liegenden Strahles senkrecht zu derselben.

Die beschriebene Erscheinung wird innere konische Refraction genannt aus dem Grunde, weil, wenn ein Lichtstrahl auf eine Krystallplatte in einer solchen Richtung einfällt, dass die gebrochene Wellennormale die Richtung einer optischen Axe des Krystalls besitzt, die im Innern desselben gebrochenen Lichtstrahlen auf einem Kegelmantel liegen; die aus der Krystallplatte austretenden Lichtstrahlen liegen daher auf einem elliptischen Cylinder, dessen Erzeugende dem einfallenden Lichtstrahl parallel sind, falls die Krystallplatte planparallel ist.

Diese Erscheinung ist FRESNEL bei seinen Untersuchungen entgangen. Sie wurde erst von HAMILTON<sup>1)</sup> bei seinen theoretischen Forschungen über die Strahlenfläche entdeckt, und auf seine Veranlassung von LLOYD<sup>2)</sup> einer experimentellen Prüfung unterzogen. Dieser wählte zu seinen Versuchen den Aragonit, weil sich aus den von RUDBERG<sup>3)</sup> mit grosser Sorgfalt gemessenen Werthen ein relativ grosser Oeffnungswinkel  $\varepsilon$  (zu  $1^\circ 52'$ ) ergab. LLOYD liess ein dünnes, durch Diaphragmen begrenztes Strahlenbündel auf eine parallel zur (krystallographischen) Basis geschnittene Aragonitplatte fallen. Im Allgemeinen treten nur zwei Strahlen aus, welche auf einem hinter der Platte aufgestellten Schirme zwei helle Lichtpunkte erzeugen. Durch Variation der Richtung des einfallenden Strahlenbündels konnte es erreicht werden, dass sich die Lichtpunkte zu einem Ringe erweiterten, dessen Oeffnung sich mit der Entfernung des Schirmes von der Platte nicht änderte. Die Prüfung der austretenden Strahlen mit Hilfe einer Turmalinplatte bestätigte die oben beschriebenen Polarisations eigenschaften<sup>4)</sup>.

NODOT<sup>5)</sup> hat empfohlen, zum Nachweis der konischen Refraction an Stelle von Aragonitkrystallen solche von Zucker, doppeltchromsaurem Kali oder Weinsäure zu nehmen, da beim ersten eine natürliche, bei letzteren eine Spaltungsfläche senkrecht zur optischen Axe ist.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (21) resp. mit  $am$ ,  $bn$ ,  $c\phi$  und addirt sie, so entsteht

$$\frac{amm}{a - \omega^2} + \frac{bnn}{b - \omega^2} + \frac{c\phi\phi}{c - \omega^2} = 0. \quad (31')$$

Fällt der Strahl mit einer Strahlenaxe zusammen, so war nach (24)

$$n = 0, \quad m^2 = \frac{c}{b} \cdot \frac{a-b}{a-c}, \quad \phi^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b-c}{a-c}, \quad \sigma^2 = b. \quad (32')$$

<sup>1)</sup> W. HAMILTON, Trans. Irish Acad. 17, pag. 132. 1837 (gelesen 1832).

<sup>2)</sup> LLOYD, Trans. Irish Acad. 17, pag. 145. 1833. — Phil. Mag. (3) 2, pag. 112, 207 1833. — POGG. Ann. 28, pag. 91, 104. 1833.

<sup>3)</sup> J. RUDBERG, POGG. Ann. 17, pag. 1. 1828.

<sup>4)</sup> Die Vertheilung der Lichtintensität in dem Strahlenkegel ist von F. NEUMANN (Abhandl. d. Berl. Acad. 1835, pag. 112) eingehend untersucht. Vergl. A. BEER, POGG. Ann. 83, pag. 194. 1851; 85, pag. 67. 1852. — Ueber Complicationen, die eintreten, falls der Strahlenkegel nicht ganz im Krystall liegt, vergl. G. CESÄRO, Bull. de l'Acad. R. de Belg. (3) 22, pag. 503. 1891.

<sup>5)</sup> NODOT, POGG. Ann. 156, pag. 656. 1875.

Die Gleichung (31') wird daher, weil  $\omega^2$  von  $b$  verschieden ist, zu

$$\frac{amm}{a - \omega^2} + \frac{c\wp\phi}{c - \omega^2} = 0. \quad (33')$$

Ferner ist nach (14)

$$\sigma \cos(NS) = \sqrt{b}(mm + \wp\phi) = \omega. \quad (34')$$

Eliminirt man nun  $\omega$  aus (33') und (34'), so entsteht

$$b(mma + \wp\phi c)(mm + \wp\phi) = ac. \quad (35')$$

Nennt man die Coordinaten der Endpunkte der Wellennormalen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , wobei also ist

$$x' = m\omega, \quad y' = n\omega, \quad z' = \phi\omega,$$

so entsteht aus (35') durch Multiplication mit  $\omega^2$

$$b(x'ma + z'\phi c)(x'm + z'\phi) = ac(x'^2 + y'^2 + z'^2). \quad (36')$$

Die zu einer Strahlenaxe gehörigen Wellennormalen liegen also auf einem Kegel, welcher von einer zur Strahlenaxe senkrechten Ebene ( $x'm + z'\phi = \text{const}$ ) in einem Kreise geschnitten wird. Die Strahlenfläche besitzt also in den Austrittspunkten der Strahlenaxen einen Tangentenebenen-Kegel. Die Gleichung des Kegels wird aus der Gleichung (36) erhalten, wenn man die dort auftretenden Grössen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Daher ergibt sich der Oeffnungswinkel  $\epsilon'$  des Normalenkegels aus (39) unmittelbar zu

$$\text{tang } \epsilon' = \frac{\sqrt{(a-b)(b-c)}}{\sqrt{ac}}. \quad (39')$$

Die Polarisations Ebenen der Wellennormalen des Kegels stehen nach pag. 690 senkrecht auf der dieselben und die Strahlenaxe verbindenden Ebene.

Das soeben beschriebene Verhalten wird äussere konische Refraction genannt, aus dem Grunde, weil ein Lichtstrahl, welcher im Innern eines Krystals in der Richtung einer seiner Strahlenaxen fällt, beim Austritt aus demselben einen Kegel von äusseren Lichtstrahlen entstehen lässt.

LLOYD konnte diese Erscheinung ebenfalls am Aragonit beobachten, indem er mittelst einer Sammellinse Sonnenlicht in einem Punkte  $A$  der ersten Begrenzungsfläche einer Aragonitplatte concentrirte, deren zweite Begrenzungsfläche durch ein Diaphragma mit einer kleinen Oeffnung  $B$  bedeckt war. Durch Verschieben von  $B$  konnte man es erreichen (wenn nämlich  $AB$  die Richtung einer Strahlenaxe hatte), dass aus  $B$  ein Strahlenkegel austrat, der sich auf einem auffangenden Schirm als Lichtring projicirt. Der Durchmesser desselben erweitert sich mit Entfernung des Schirmes von der Platte, im Gegensatz zu der bei der inneren konischen Refraction beobachteten Erscheinung. Später sind einige von der LLOYD'schen etwas abweichende, bequemere Versuchsanordnungen beschrieben<sup>1)</sup>.

Zur Demonstration der beschriebenen Erscheinungen eignet sich weit besser als der Aragonit der rhombische Schwefel, da bei letzterem die Winkel  $\epsilon$  und  $\epsilon'$  weit grösser sind (ungefähr  $7^\circ$ ), als bei ersterem. Die optischen Constanten des Schwefels sind von BOLTZMANN<sup>2)</sup> bestimmt. SCHRAUF<sup>3)</sup> verwendet zur Demonstration der Erscheinungen den Schwefel in Kugelgestalt.

<sup>1)</sup> F. BILLET, *Traité d'optique physique*. Paris 1859; 2, pag. 571. — LAURENT, *Journ. de phys.* 3, pag. 23. 1874. — Lissajous, *ib. pub.* 25. — TH. LIEBISCH beschrieb eine Vorrichtung zur Beobachtung der äusseren konischen Refraction unter dem Mikroskop; s. *Gött. Nachr.* 1888, pag. 124. — *Physik. Krystallogr.*, pag. 348.

<sup>2)</sup> L. BOLTZMANN, *Wien. Ber.* (2) 70, pag. 342. 1874. — *POGG. Ann.* 153, pag. 531. 1874.

<sup>3)</sup> A. SCHRAUF, *WIED. Ann.* 37, pag. 127. 1889.

## II. Durchgang des Lichtes durch doppelbrechende Medien.

Die Gesetze der Lichtbrechung sind in den Grenzbedingungen der Theorie enthalten. Diese ergeben nicht nur die Richtung der Normalen der reflektirten und gebrochenen Wellen, sondern auch ihre Intensitäten. Lassen wir aber die Untersuchung der letzteren vorläufig bei Seite, so kann man die Richtung der gebrochenen Wellennormalen und die der Strahlen auch ohne Eingehen auf die Grenzbedingungen aus dem HUYGENS'schen Princip finden, wenn man die Strahlenfläche in den betreffenden Medien, in welchen die Lichtbewegung stattfindet, kennt.

Es bedeute  $G$  die ebene Grenzfläche zweier Medien (1) und (2). Das Licht möge im Medium (1) einfallen und es möge eine einfallende Wellenebene zur Zeit  $t$  die Grenze  $G$  in der Geraden  $P$ , zur Zeit  $t + t'$  in der Geraden  $P'$  schneiden. Die aus dieser einfallenden Wellenebene hervorgehenden gebrochenen Wellen müssen zur Zeit  $t + t'$  die Gerade  $P'$  enthalten und gleichzeitig die um die Punkte der Geraden  $P$  als Mittelpunkte beschriebenen Strahlenflächen  $\Sigma^{(2)}$  des zweiten Mediums, in welcher sich eine in  $P$  erregte Erschütterung nach Ablauf der Zeit  $t'$  befindet, berühren. Sie sind daher gegeben durch die in dasselbe fallenden Tangentialebenen, welche man durch  $P'$  an  $\Sigma^{(2)}$  legen kann. — Ebenso sind die reflektirten Wellenebenen die in das erste Medium fallenden Tangentialebenen, welche man durch  $P'$  an diejenige um die Punkte der Geraden  $P$  als Mittelpunkte beschriebenen Strahlenflächen  $\Sigma^{(1)}$  des ersten Mediums legen kann, welche ebenfalls der Zeit  $t'$  angehört.

Beachtet man noch, dass durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der construirten Tangentialebenen mit den Mittelpunkten der zugehörigen Strahlenflächen die Richtung der Lichtstrahlen gegeben wird, so gelangt man zu folgender Construction:

Um einen beliebigen Punkt  $O$  der Geraden  $P$ , in welcher zur Zeit  $t$  die einfallende Wellenebene  $W$  die Grenze  $G$  schneidet, construire man die zu gleichen, aber beliebigen Zeiten gehörigen Strahlenflächen  $\Sigma^{(1)}$  und  $\Sigma^{(2)}$ . Man verlängere den durch den Einfallspunkt  $O$  gehenden, zu  $W$  gehörigen Strahl über  $O$  hinaus bis zum Schnitt  $H$  mit der correspondirenden Schale von  $\Sigma^{(1)}$  und lege in  $H$  an diese Schale eine Tangentialebene  $W'$ . Durch die Schnittgerade  $P'$  von  $W'$  mit  $G$  lege man nun die in das zweite Medium fallenden Tangentialebenen an  $\Sigma^{(2)}$  und die in das erste Medium fallenden Tangentialebenen an  $\Sigma^{(1)}$ ; jene liefern die Richtungen der gebrochenen, diese die Richtungen der reflektirten Wellenebenen. Die Radien von  $O$  nach den Berührungspunkten dieser Wellenebenen mit ihren Strahlenflächen bezeichnen die Richtungen der gebrochenen und der reflektirten Strahlen.

Aus dieser Construction geht hervor, dass die Normalen der reflektirten und gebrochenen Wellen in der Einfallsebene, d. h. in der die Normale der Grenzfläche  $G$  und die der einfallenden Welle  $W$  verbindenden Ebene liegen, und dass sie dem Sinus-Gesetz unterworfen sind, demzufolge der Quotient aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit jeder einzelnen Welle und dem Sinus des Winkels zwischen der Normale der Welle und der der Grenzebene einen constanten Werth besitzt, (weil nämlich jener Quotient gleich dem gegenseitigen Abstand der Geraden  $P$  und  $P'$  ist).

a) Erscheinungen, für welche das Verhalten der Lichtstrahlen maassgebend ist. Durchgang des Lichtes durch eine doppelbrechende Platte.

Aus dem Vorgehenden ist ersichtlich, dass die Richtung einer ebenen Welle nach irgend einer Anzahl von Brechungen und Reflexionen an ebenen

Grenzflächen homogener Medien nur abhängt von den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Richtungen der Normalen; sie bleibt dagegen unabhängig von den Elementen, welche die zugehörigen Strahlen bestimmen.

Letztere sind dagegen maassgebend, wenn es sich um den scheinbaren Ort von im Endlichen gelegenen Gegenständen handelt, z. B. eines auf Papier gezeichneten Punktes, auf welches man eine doppelbrechende Platte legt. Da die gebrochenen Lichtstrahlen nicht das Sinus-Gesetz befolgen und auch im Allgemeinen nicht in der Einfallsebene liegen, so erscheinen auch bei senkrechtem Anvisiren des Punktes zwei Bilder von demselben. Bei einaxigen Krystallen erscheint in diesem Falle das eine Bild desselben nicht abgelenkt, es rührt vom ordinären Strahl her, das zweite, vom extraordinären Strahl herrührende, liegt im Hauptschnitt, dreht sich also bei drehender Krystallplatte mit.

Die Abhängigkeit der optischen Constanten von der Farbe kann dabei zu eigenthümlichen Dispersionserscheinungen Anlass geben. Beim Kalkspath nimmt die Excentricität des ellipsoidischen Theiles der Strahlenfläche von violett gegen roth ab. Dies erklärt völlig folgende von MALUS<sup>1)</sup> bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung beobachteten Erscheinungen:

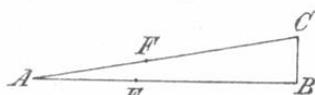
1) Fällt ein Strahl senkrecht auf eine der natürlichen Begrenzungsflächen eines Kalkspathrhomboëders, so erfährt der ordinäre Strahl weder Brechung noch Dispersion. Der extraordinäre Strahl jedoch erscheint abgelenkt, und zwar der violette Theil mehr als der rothe.

2) Bei kleinen Incidenzwinkeln erscheinen beide Strahlen abgelenkt, und zwar liegt beim ordinären Strahl der violette Theil dem Einfallslothe näher, beim extraordinären der rothe.

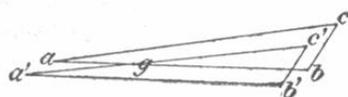
3) Bei einer Incidenz von ungefähr  $40^\circ$  erscheinen beide Strahlen abgelenkt, doch zeigt der extraordinäre Strahl keine merkliche Dispersion.

4) Bei noch grösserer Incidenz erscheint sowohl beim ausserordentlichen als beim ordentlichen Strahl violett näher am Einfallslothe als roth.

Auf der Messung der Ablenkung der Lichtstrahlen beruht eine von MALUS<sup>2)</sup>



angewendete Methode zur Prüfung der HUYGENS'schen Construction der gebrochenen Lichtstrahlen in einaxigen Krystallen.



(Ph. 481.)

Auf einer Kupferplatte wird ein sehr schmales rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  (cf. Fig. 481) eingerissen, dessen Hypotenuse  $AC$  und grosse Kathete  $AB$  in Millimeter getheilt ist. Die Kupferplatte wird horizontal gestellt und auf dieselbe ein dicker Kalkspathkrystall mit parallelen Begrenzungsflächen gelegt.

Richtet man das Fernrohr eines Theodolithen nach einem Punkte  $G$  der oberen Fläche des Krystalls, so nimmt man zwei Bilder  $abc$ ,  $a'b'c'$  des Dreiecks wahr. Die Hypotenuse  $a'c'$  des einen der beiden Bilder schneidet die Seite  $ab$  des anderen in einem Punkte  $g$ . Die an den Seiten des Dreiecks laufenden Theilungen lassen die Längen  $ag$  und  $a'g$  unmittelbar ablesen. Trägt man auf der Seite  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  eine Länge  $AE$  gleich  $ag$  ab, und auf der Hypotenuse  $AC$  eine Länge  $AF$  gleich  $a'g$ , so liegen die beiden Punkte  $E$  und  $F$  so, dass ein von ihnen ausgehender ordinärer und extraordinärer Strahl, welche sich in

<sup>1)</sup> MALUS, Théorie de la double réfraction, pag. 201. 1810.

<sup>2)</sup> MALUS, l. c.

$G$  treffen, in der Luft einen einzigen Strahl bilden. Da man den Austrittswinkel desselben am Theodolithen ablesen kann, so kann man, falls man noch die Dicke des Krystalls und die Lage des Punktes  $G$  zum Dreieck  $ABC$  kennt, sowohl die Brechungswinkel wie die Azimuthe der Brechungsebenen der beiden im Krystall verlaufenden Strahlen berechnen und hat daher alle nöthigen Elemente, um die Resultate der HUYGENS'schen Construction experimentell zu prüfen. Nach einer ähnlichen von BILLET<sup>1)</sup> vorgeschlagenen Methode ist das HUYGENS'sche Gesetz von PICHOT<sup>2)</sup> experimentell bestätigt.

Die MALUS'sche Methode misst nur die Richtungsunterschiede des scheinbaren Ortes der beiden Bilder, welche eine doppelbrechende Platte von einem Gegenstande entwirft, aber nicht die Entfernungsunterschiede des scheinbaren Ortes der beiden Bilder vom Auge. Solche sind aber in der That vorhanden und wenn MALUS anstatt eines weit entfernten Theodolithen ein dicht über der Kalkspathplatte aufgestelltes Mikroskop angewandt hätte, so würde er bemerkt haben, dass die beiden Bilder  $abc$  und  $a'b'c'$  des Dreiecks  $ABC$  nicht zu gleicher Zeit deutlich im Mikroskop erschienen.

Der scheinbare Ort eines Licht aussendenden Gegenstandes  $P$  ist durch den Durchschnitt der Strahlen der von ihm ausgehenden Strahlenfläche bestimmt, d. h. derjenigen Fläche, bis zu welcher sich die Lichtbewegung nach Ablauf einer gewissen Zeit von  $P$  aus fortgepflanzt hat. Man kann daher die Strahlenfläche auch als diejenige Fläche definiren, auf welcher die von  $P$  ausgehende Lichtbewegung zu einer bestimmten Zeit sich in gleicher Phase befindet. — In einfach brechenden Mitteln sind die Strahlen senkrecht zur Strahlenfläche gerichtet. Der scheinbare Ort eines deutlichen Bildes, welches wir von  $P$  in einem Mikroskop wahrnehmen, ist also, da die Objektivlinse desselben stets von einem einfach brechenden Mittel, nämlich Luft oder Flüssigkeiten, umgeben ist, dadurch theoretisch zu ermitteln, dass wir die Durchschnitte der Normalen eines kleinen Stückes der auf  $P$  bezüglichen Strahlenfläche bestimmen, die der Richtung der optischen Axe des Mikroskops nahe liegen. Diese Strahlenfläche kann durch den Durchgang durch irgend welche durchsichtigen Körper mannigfach deformirt sein, sie braucht jedenfalls keine Kugelgestalt zu besitzen. Daher schneiden sich auch die Normalen des betrachteten Stückes der Strahlenfläche nicht in einem Punkte, sodass im Allgemeinen überhaupt kein deutliches Bild von  $P$  wahrzunehmen ist; aber stets schneiden sich dieselben in zwei zu einander senkrechten Brennlinien, welche in den Hauptkrümmungsebenen des betrachteten Flächenstückes liegen. Man wird daher von  $P$  im Allgemeinen zwei in verschiedenen Entfernungen liegende Bilder wahrnehmen, und zwar ist jedes derselben nur in einer Richtung scharf; diese Richtungen sind bei beiden Bildern auf einander senkrecht. Dieses erklärt völlig die Erscheinungen, welche man wahrnimmt, falls man auf ein Objekt  $P$ , auf welches man ein Mikroskop eingestellt hat, eine planparallele Platte eines homogenen Körpers legt. Ist dieselbe nicht doppelbrechend, so ist die Strahlenfläche in der Platte eine Kugel. Wir wollen uns diejenige Strahlenfläche  $\Sigma_1$  construirt denken, welche die obere Plattenseite berührt. Die Gestalt der Strahlenflächen  $\Sigma_2$  ausserhalb der Platte ist dann dadurch zu erhalten, dass man die Strahlen über  $\Sigma_1$  hinaus verlängert und auf ihnen Strecken abträgt, welche in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Da diese rings um die Plattennormale gleich sind, so ist das betrachtete Stück der Strahlen-

1) BILLET, Ann. de chim. et de phys. (3) 4, pag. 250. 1859.

2) PISCHOT, Comp. rend. 52, pag. 356. 1860.

fläche  $\Sigma_2$  bei senkrechter Mikroskop-Einstellung das Stück einer Rotationsfläche, d. h. man nimmt ein deutliches über  $P$  liegendes Bild  $P'$  von  $P$  wahr. Das Mikroskop muss also um eine Strecke  $x$  gehoben werden und zwar ist, falls  $d$  die Plattendicke,  $n$  ihren Brechungsexponenten gegen die Umgebung bedeutet:

$$x = d \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Hierauf beruht die von DE CHAULNESS<sup>1)</sup> vorgeschlagene Methode zur Bestimmung von Brechungsexponenten.

Ist die über  $P$  gelegte Platte doppelbrechend, so nimmt man im Allgemeinen drei in verschiedenen Entfernungen liegende Bilder wahr, falls dieselbe einem einaxigen Krystall angehört, und zwar ist eines derselben unverzerrt, dagegen vier, falls die Platte einem zweiaxigen Krystall angehört, und jedes dieser Bilder ist verzerrt. Diese Erscheinungen sind zuerst von SORBY<sup>2)</sup> beobachtet, und in demselben Jahre von STOCKES<sup>3)</sup> theoretisch erklärt. Die Erscheinungen sind nach den obigen Erörterungen leicht verständlich: Die geometrische Gestalt des betrachteten Stückes der Strahlenfläche  $\Sigma_2$  in der Luft hängt wesentlich von der Fläche  $\Sigma_1$  im Krystall ab, da wir, falls wir  $\Sigma_1$  construirt haben, bis auf verschwindend kleine Fehler die Construction von  $\Sigma_2$  gerade so vollziehen können, wie vorhin, wo die Platte nicht doppelbrechend war.  $\Sigma_1$  besteht nun aus zwei Schalen mit zwei verschiedenen Krümmungsmittelpunkten, daher auch  $\Sigma_2$ . Die vier zu  $\Sigma_2$  gehörigen Brennlinien ergeben die Bilder von  $P_2$ . Dieselben sind verzerrt in Richtungen parallel zu den zugehörigen Brennlinien. Auf der theilweisen Verzerrung beruht es, dass, falls  $P_2$  aus feinen, sich kreuzenden Linien besteht, nur ein Theil derselben deutlich wahrgenommen wird, nämlich derjenige, dessen Linien in der Verzerrungsrichtung verlaufen. Die verschiedenen Bilder besitzen verschiedene Polarisationsrichtungen<sup>4)</sup>.

Die Bedeutung dieser Beobachtungsmethode liegt weniger in einer genauen Bestimmung der Brechungsexponenten<sup>5)</sup>, als vielmehr in der Unterscheidung einfachbrechender und doppelbrechender, und zwar einaxiger und zweiaxiger Substanzen.

b) Erscheinungen, für welche das Verhalten der Wellennormalen maassgebend ist. Durchgang des Lichtes durch ein doppelbrechendes Prisma.

Wir wollen uns der Aufgabe zuwenden, die Richtung der gebrochenen Wellennormalen beim Durchgang des Lichtes durch ein doppelbrechendes Prisma zu bestimmen, welches von einem einfachbrechenden Mittel umgeben ist. Nennt man den brechenden Winkel des Prismas  $A$ , die Winkel der eintretenden

<sup>1)</sup> Duc DE CHAULNESS, Hist. de l'acad. roy. des sc. Année 1767. Paris 1770, pag. 162 u. 423. — Vergl. D. BREWSTER, Treatise on new Phil. Instrum. Edinburgh 1813, pag. 247. — L. MOSER, in DOVE's Repertor. der Physik 5, pag. 395. 1844. — A. BERTIN, Comp. rend. 28, pag. 447. 1849. — Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 288. 1849. — POGG. Ann. 76, pag. 611. 1849. — H. WILD, POGG. Ann. 99, pag. 258. 1856. — L. BLEEKRODE, Proc. Roy. Soc. 37, pag. 339. 1884. — Journ. de phys. (2), 4, pag. 109, 1885.

<sup>2)</sup> H. C. SORBY, Proc. Roy. Soc. of London 26, pag. 384. 1877.

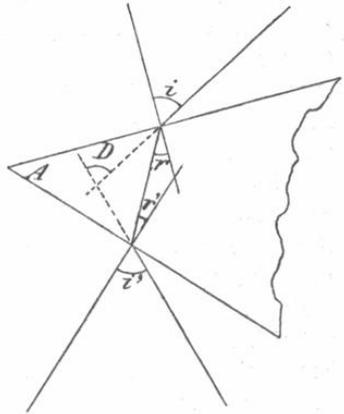
<sup>3)</sup> G. G. STOCKES, ibid., pag. 386.

<sup>4)</sup> Betreffs der detaillirteren Beschreibung vergl. TH. LIEBISCH, physik. Krystallogr. pag. 359 bis 373.

<sup>5)</sup> Eine Kritik der von M. BAUER und K. SCHARIZER an Glimmer ausgeführten Messungen gab B. HECHT, N. Jahrb. für Mineral. Beil. Bd. 6, pag. 271. 1889.

und austretenden Wellennormalen gegen die Normalen der Prismenflächen  $i$  und  $i'$ , ferner die Winkel derselben gegen die Normalen einer gebrochenen Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  sei,  $r$  und  $r'$ , bezeichnet  $\omega_0$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im umgebenden Medium und schliesslich  $D$  die durch das Prisma hervorgerufene Ablenkung der Lichtstrahlen, so ergeben sich, falls die Prismenkante senkrecht zur Einfallsebene steht, aus dem pag. 703 erläuterten Brechungsgesetz der Wellennormalen, welche sämmtlich in der Einfallsebene, d. h. im Querschnitt des Prismas liegen, folgende Relationen zwischen den genannten Grössen (Fig. 482):

$$\begin{aligned} \omega \sin i &= \omega_0 \sin r, \\ \omega \sin i' &= \omega_0 \sin r', \\ r + r' &= A, \\ i + i' &= A + D. \end{aligned} \quad (40)$$



(Ph. 482.)

In diesen Gleichungen sind  $i$ ,  $i'$ ,  $A$  und  $D$  als bekannte Grössen anzusehen, da sie durch die Beobachtung direkt gemessen werden können, dagegen  $r$ ,  $r'$  und  $\omega$  als unbekannt. Man kann<sup>1)</sup> aus ihnen durch Elimination von  $\omega$  leicht die Gleichung ableiten:

$$\operatorname{tang} \left( r - \frac{A}{2} \right) = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \left( i - \frac{A + D}{2} \right) \operatorname{cotg} \frac{A + D}{2} = \operatorname{tang} \left( \frac{A}{2} - r' \right), \quad (41)$$

eine Relation, welche  $r$  und  $r'$  und daher nach (40) auch  $\omega : \omega_0$  aus den Beobachtungen abzuleiten gestattet. Es ist also möglich, aus Prismenbeobachtungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  der Wellennormale für eine gewisse Richtung derselben zu berechnen. Zweckmässig bezieht man diese Richtung auf die Halbierungsebene des Prismenwinkels  $A$ . Nennt man den Winkel dieser Ebene mit der gebrochenen Wellennormale  $\psi$ , so ist

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \frac{\pi}{2} + r - \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{A}{2}. \quad (42)$$

Mit Hilfe dieses Winkels  $\psi$  und unter Benutzung der Abkürzungen

$$C = \frac{\cos \frac{A + D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad S = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (43)$$

wird

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = \frac{\cos^2 \psi}{C^2} + \frac{\sin^2 \psi}{S^2}, \quad (44)$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{S}{C} \operatorname{cotg} \frac{i' - i}{2}. \quad (45)$$

Durch Variation des Einfallswinkels  $i$  kann man daher für beliebig viel Richtungen  $\psi$  die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $\omega$  berechnen, d. h. man kann experimentell die Gestalt eines Querschnittes der Normalenfläche ermitteln. Dieses Resultat gestattet eine experimentelle Prüfung des FRESNEL'schen Gesetzes.

<sup>1)</sup> Betreffs der ausführlicheren Herleitung dieser und der folgenden Gleichungen vergl. TH. LIEBISCH, physikal. Krystallographie, pag 296—297.

Eine Prüfung der Gesetze der Doppelbrechung einaxiger Krystalle mit Hilfe der Prismenmethode hat SWAN<sup>1)</sup> ausgeführt, welcher constatirte, dass ein beliebig orientirtes Kalkspathprisma für den Brechungsexponenten der ordinären Welle einen constanten, um höchstens zwei Einheiten der fünften Decimale variirenden Werth ergab. — Auf dem oben angedeuteten Weg (mit Benutzung mehrerer an einem Krystall angeschliffener Kanten) haben STOKES<sup>2)</sup>, ABRIA<sup>3)</sup>, GLAZEBROOK<sup>4)</sup> und HASTINGS<sup>5)</sup> die HUYGENS'sche Construction am Kalkspath (ABRIA auch am Quarz) bestätigt gefunden. HASTINGS schliesst aus seinen Versuchen, dass die Bestätigung bis zu einer Genauigkeit von 1 auf 500000 erwiesen ist.

Eine Verifikation der FRESNEL'schen Gesetze für zweiaxige Krystalle ist von RUDBERG<sup>6)</sup> ausgeführt, welcher an Prismen von Aragonit und Topas, deren Kanten einer Symmetrieaxe parallel lagen, die Constanz des Brechungsexponenten der senkrecht zur Prismenkante polarisirten gebrochenen Welle für alle Einfallswinkel beobachtete. Was das Verhalten der zweiten, senkrecht zu der ersteren polarisirten Welle anbelangt, so fand GLAZEBROOK<sup>7)</sup> an Aragonitprismen das FRESNEL'sche Gesetz sehr nahe erfüllt, die geringen Abweichungen davon sind durch andere Beobachtungen (Totalreflexion und Axenwinkelmessung) nicht bestätigt, sodass sie vielmehr durch ungenügend genaue Orientirung der Prismen zu erklären sind.

Die Beobachtung der Ablenkung der Lichtstrahlen durch ein doppelbrechendes Prisma lässt sich ferner zu einer genauen Bestimmung der optischen Constanten eines Krystalls benutzen, falls man das FRESNEL'sche resp. HUYGENS'sche Gesetz als gültig annimmt.

Betrachten wir zunächst die Fälle, in welchen die Lage der optischen Symmetrieaxen zum Prisma bekannt ist und es sich nur um die Bestimmung von (im allgemeinsten Falle) drei Constanten, z. B. der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Symmetrieaxen, handelt. Wir wollen diese Geschwindigkeiten die Hauptlichtgeschwindigkeiten nennen. Die Quadrate derselben sind durch die in der Gleichung (8) auf pag. 689 der Normalenfläche auftretenden Constanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gegeben.

Handelt es sich zunächst um einaxige Krystalle, so sind zwei jener Constanten, z. B.  $a$  und  $b$ , einander gleich. Ihr Wert ist gleich dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ordinären Welle. Man erhält dieselbe nach den Formeln (40) und (41) dieses Abschnittes, wenn man drei der vier Winkel  $i$ ,  $i'$ ,  $A$ ,  $D$  beobachtet. — Nach denselben Formeln erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $e$  der extraordinären Welle. Nach der Gleichung (8) auf pag. 689 der Normalenfläche ist nun

$$e^2 = a \cos^2 \vartheta + c \sin^2 \vartheta, \quad (46)$$

wo  $\vartheta$  die Neigung der Wellennormale gegen die optische Axe bedeutet. Zur

1) W. SWAN, Trans. Edinb. Roy. Soc 16, pag. 375. 1847.

2) G. G. STOKES, Rep. of the Brit. Assoc. 1862, pag. 272; Compt. rend. 77, pag. 1150. 1872; Phil. Mag. (4) 44, pag. 311. 1872.

3) ABRIA, Comp. rend. 77, pag. 814. 1873; 79, pag. 1253. 1874; 80, pag. 826. 1875; Ann. d. chim. et de phys. (5) 1, pag. 289. 1874.

4) R. T. GLAZEBROOK, Lond. Philos. Trans. 2, pag. 421. 1880.

5) Ch. S. HASTINGS, Amer. Journ. of Science (3) 35, pag. 60. 1888.

6) J. RUDBERG, POGG. Ann. 17, pag. 1. 1828.

7) R. T. GLAZEBROOK, Proc. Roy. Soc. 27, pag. 496. 1878; Philos. Trans. 1879, 1, pag. 287.

Bestimmung der Constante  $c$  muss man also  $\vartheta$  zuvor berechnen. Bezeichnet  $\tau$  die Neigung der optischen Axe zum Querschnitt des Prismas und  $\rho$  den Winkel, welchen die durch Prismenkante und optische Axe gelegte Ebene mit der Halbierungsebene des inneren Prismenwinkels einschliesst, so ist

$$\cos \vartheta = -\cos \tau \cos (\rho - \psi), \quad (47)$$

wo  $\psi$  den oben (pag. 707) definirten Winkel der gebrochenen Wellennormale gegen die Halbierungsebene des inneren Prismenwinkels bedeutet, der also ebenfalls nach der Gleichung (45) durch die beobachteten Grössen zu berechnen ist. — Die optischen Constanten eines einaxigen Krystalls sind also durch Messung der Richtung der ordinären und extraordinären Welle an einem einzigen Prisma und bei einem einzigen Einfallswinkel zu berechnen.

Diese Berechnung vereinfacht sich, wenn die Halbierungsgrade des inneren oder des äusseren Prismenwinkels eine optische Symmetrieaxe ist, oder wenn beides gleichzeitig stattfindet. Die Berechnung wird am bequemsten, falls die optische Axe parallel zur Prismenkante liegt; dann ist  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und man erhält  $c$  direkt als Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Welle, welche in diesem Fall auch das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgt. Dieser einfachste Fall ist zugleich dadurch ausgezeichnet, dass eine kleine Abweichung in der Orientirung des Prismas den geringsten Einfluss auf das Resultat ausübt<sup>1)</sup>.

Von besonderem Werth für die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten doppelt brechender Krystalle durch Prismenbeobachtungen sind diejenigen Fälle, in welchen durch Messung des Minimums der Ablenkung unmittelbar eine oder zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten gefunden werden.

Da ein einaxiger Krystall für die ordentliche Welle sich wie ein isotroper Körper verhält, so gelten für diese auch unverändert die für letztere gültigen Resultate, d. h. es ist die Geschwindigkeit  $o$  der ordinären Welle durch die Beziehung gegeben,

$$\left(\frac{o}{\omega_o}\right)^2 = \frac{a}{\omega_o^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}(A + D_o)}, \quad (48)$$

wobei  $D_o$  das Minimum der Ablenkung der ordinären Welle bedeutet. Dieselbe liegt symmetrisch zu den Prismenseiten, d. h. es ist  $r = r'$ . Diese Beziehungen gelten im Allgemeinen nicht mehr für die extraordinäre Welle.

Um zu einer Relation zu gelangen<sup>2)</sup>, welche das Minimum  $D_e$  der Ablenkung der extraordinären Welle mit den Hauptlichtgeschwindigkeiten verknüpft, hat man zunächst eine Gleichung zu bilden, welche die Ablenkung  $D$  durch die optischen Constanten ( $a, b, c$ ) und die Richtung  $\psi$  der gebrochenen Welle ausdrückt. Es geschieht dies unmittelbar, wenn man in der linken Seite der Gleichung (44)  $\omega$  mit Hilfe der Gleichung (8) (pag. 689) der Normalenfläche eliminirt. Es resultirt dadurch eine Gleichung

$$f(D, \psi) = 0, \quad (49)$$

welche ausser den Constanten  $a, b, c$  nur noch die Grössen, welche die Orientirung des

<sup>1)</sup> Vergl. M. BORN, N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. 5, pag. 13. 1887.

<sup>2)</sup> Vergl. G. G. STOKES, Cambr. and Dublin. Math. Journ. 1, pag. 183. 1846; Math. and Phys. Papers, 1, pag. 148. Cambridge 1880; H. DE SÉNARMONT. Nouv. Ann. de Math. 16, pag. 273. 1857. — V. v. LANG, Wien. Ber. 33, pag. 155 u. 577. 1858. — H. TOPSOE og C. CHRISTIANSEN, Ann. de chim. et de phys. (5) 1, pag. 5. 1874. — Pogg. Ann. Egd. 6, pag. 499. 1874. — A. CORNU, Ann. scient. de l'Ecole Norm. (2), 1, pag. 231. 1872; 3, pag. 25. 1874. — M. BORN, N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. 5, pag. 16. 1887.

Prismas gegen die optischen Symmetrieachsen bestimmen, und den Prismenwinkel  $A$  enthalten. Das Minimum der Ablenkung ist dadurch charakterisirt, dass  $\frac{dD}{d\psi} = 0$  ist. Die gesuchte Beziehung des Minimums  $D_e$  der Ablenkung zu den Constanten  $a, b, c$  erhält man daher durch Differentiation der Gleichung (49) nach  $D$  und  $\psi$ , und durch nachfolgende Elimination der letzten Grösse mit Hilfe der Gleichung (45).

Für einaxige Krystalle erhält man<sup>1)</sup> mit Benutzung der bisher angewandten Bezeichnungen:

$$A_0 c^2 + 2A_1 c + A_2 = 0,$$

worin bedeutet

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin^2 \tau, \\ 2A_1 &= \left( a + \frac{\sin^2 \rho}{C^2} + \frac{\cos^2 \rho}{S^2} \right) \cos^2 \tau - \frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2}, \\ A_2 &= -a \left( \frac{\sin^2 \rho}{C^2} + \frac{\cos^2 \rho}{S^2} \right) \cos^2 \tau + \frac{1}{C^2 S^2}, \\ \frac{1}{C} &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A + D_e}{2}}, \quad \frac{1}{S} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A + D_e}{2}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Hierbei ist bemerkenswerth, dass auch für die ausserordentliche Welle der zum Minimum der Ablenkung  $D_e$  gehörige Einfallswinkel nicht gemessen zu werden braucht.

Wie die Gleichungen (50) lehren, ergibt sich zur Bestimmung von  $c$  eine quadratische Gleichung; allein von den beiden Wurzeln kann mit Rücksicht auf die schwache Doppelbrechung der bekannten krystallisirten Körper nur diejenige in Betracht gezogen werden, für welche die zugehörige ausserordentliche Welle annähernd parallel zur Halbierungsebene des Prismenwinkels  $A$  liegt, also Einfallswinkel und Austrittswinkel nahezu einander gleich sind.

Aus den Formeln (50) folgt, dass die Berechnung von  $c$  aus  $D_e$  am einfachsten wird, wenn der Hauptschnitt der Prismenkante, d. h. die durch letztere und die optische Axe gelegte Ebene, den inneren Prismenwinkel  $A$  halbirt. Specielle Fälle hiervon sind die, dass die optische Axe den Winkel  $A$  halbirt, oder dass sie in die Prismenkante fällt.

Bei allen diesen Orientirungen des Prismas ergibt sich für  $c$  eine der für  $a$  gültigen Formel (48) ganz analoge, nämlich

$$\frac{c}{\omega^2} = \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} (A + D_e)}. \quad (51)$$

Es möge nun ein Prisma aus einem zweiaxigen Krystall betrachtet werden. Wie wir oben, pag. 707, sahen, kann man die Gestalt eines Central-schnittes der Normalfläche ermitteln. Da dieselbe bei bekannter Orientirung des Prismas noch drei unbekannte Constanten ( $a, b, c$ ) enthält, so genügt die Beobachtung dreier Werthepaare ( $\omega, \psi$ ) zur Bestimmung derselben, indess ist die Lösung im Allgemeinen fünfdeutig<sup>2)</sup>, und muss man, um Eindeutigkeit zu erzielen, zunächst Näherungswerthe jener Constanten ermitteln.

LIEBISCH<sup>3)</sup> hat untersucht, in welchen Fällen die Beobachtung des Minimums

<sup>1)</sup> Vergl. z. B. TH. LIEBISCH, physikal. Krystallogr., pag. 389.

<sup>2)</sup> TH. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 23. 1886.

<sup>3)</sup> TH. LIEBISCH, Gött. Nachr. 1888, pag. 197.

der Ablenkungen zur Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ausreicht, derart, dass die zugehörigen Einfallswinkel nicht gemessen zu werden brauchen. Ein beliebig orientirtes Prisma eines zweiaxigen Krystalls liefert keine praktisch verwerthbaren Resultate<sup>1)</sup>. Zweckmässiger legt man die Querschnittsebene des Prismas in eine optische Symmetrieebene. Der Centralschnitt der Normalenfläche zerfällt dann in einen Kreis und ein Oval. Die nach der Querschnittsebene polarisirte Welle von constanter Geschwindigkeit liefert eine Hauptlichtgeschwindigkeit und die Bestimmung des Minimums der Ablenkung der parallel zur Prismenkante polarisirten Welle von veränderlicher Geschwindigkeit ergiebt eine zuerst von STOKES<sup>2)</sup> aufgestellte Relation zwischen den beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten. Zur vollständigen Bestimmung der letzteren muss man zwei Werthepeare ( $\omega$ ,  $\psi$ ) für zwei parallel zur Prismenkante polarisirte Wellen kennen, man wird jedoch, um den Einfluss der Beobachtungsfehler zu verkleinern, eine grössere Reihe von Messungen anstellen, aus jeder die zugehörigen Werthe von  $\omega$ ,  $\psi$  und dann nach der Methode der kleinsten Quadrate die Hauptlichtgeschwindigkeiten berechnen. Dies Verfahren ist von v. LANG<sup>3)</sup> am Gyps und von BORN<sup>4)</sup> am Anglasit durchgeführt.

Fällt ausserdem die Halbirungsebene des Prismenwinkels in eine optische Symmetrieebene, so erhält man durch Beobachtung der Minimalablenkungen zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten direkt nach analogen Formeln, wie sie für isotrope Medien gültig sind. Zur Berechnung der dritten Hauptlichtgeschwindigkeit muss man an demselben Prisma noch ein zusammengehöriges Werthepeaar ( $\omega$ ,  $\psi$ ) ermitteln.

Lassen wir die Voraussetzung fallen, dass die Lage der Prismenflächen gegen die optischen Symmetrieebenen bekannt sei, so erhebt sich die Frage, ob an einem einzigen beliebig orientirten Prisma eines optisch zweiaxigen Krystalls sowohl die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten, als die Lage der optischen Symmetrieebenen aus dem Prismenwinkel  $A$  und mehreren zu einem Centralschnitt der Normalenfläche zugehörigen Werthepearen  $\omega$ ,  $\psi$  berechnet werden können.

Sechs solcher Werthepeare genügen in der That zu dem Zweck, da es sich um die Bestimmung von sechs unbekanntem Constanten handelt, indess lassen sich durch einen auf diese Weise durch die Beobachtung bestimmten Centralschnitt der Normalenfläche, wie BRILL<sup>5)</sup> gezeigt hat, im Allgemeinen zwei reelle, verschiedene Normalenflächen legen, sodass also die Lösung der vorliegenden Aufgabe im Allgemeinen zweideutig ist. Die beiden Normalenflächen unterscheiden sich lediglich hinsichtlich der mittleren Hauptlichtgeschwindigkeit, während die Werthe der kleinsten und grössten Hauptlichtgeschwindigkeit übereinstimmen. Sie fallen nur dann zusammen, wenn die Prismenkante auf einer optischen Axe senkrecht steht<sup>6)</sup>.

Durch die hier besprochenen Beobachtungsmethoden werden die auf die gebrochene Wellennormale bezüglichen Bestimmungsstücke  $\omega$  und  $\psi$  ermittelt.

1) Betreffs gewisser Näherungsformeln vergl. Vorlesungen über theoretische Optik von F. NEUMANN, herausgeg. von E. DORN. Leipzig 1885, pag. 211.

2) G. G. STOKES, Math. and Phys. Paper. I, pag. 148. Cambridge 1880.

3) V. v. LANG, Wien. Ber. (2) 76, pag. 793. 1877.

4) M. BORN, l. c.

5) A. BRILL, Sitz.-Ber. der bayr. Acad. 1883, pag. 423, Math. Ann. 34, pag. 297. 1889.

6) H. DUFET gab in J. de Phys. (2) 10, pag. 171. 1891 ein Verfahren an, um die optische Orientirung eines triklinen Krystalls aus den Winkeln zu bestimmen, welche die Normale zweier Flächen desselben mit den optischen Axen einschliesst.

Durch Zuhilfenahme der Messung noch einer anderen Erscheinung kann man auch die Bestimmungsstücke des gebrochenen Lichtstrahles ermitteln, wie CORNU<sup>1)</sup> gezeigt hat. Die Bilder, welche man von einem geradlinigen Spalte im Collimatorrohr eines Spectrometers, welcher zur Kante eines doppelbrechenden Prismas parallel ist, nach dem Durchgang durch dasselbe wahrnimmt, sind im Allgemeinen unter einem Winkel  $\varphi$  gegen die Spaltrichtung geneigt. Dies tritt stets ein, wenn der gebrochene Strahl nicht in die Querschnittsebene des Prismas fällt, d. h. wenn die Berührungspunkte  $S$  der gebrochenen Wellenebene mit der Strahlenfläche nicht in den Prismenquerschnitt fallen. Dem Abstände der Berührungspunkte  $S$  von letzterem sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel  $\varphi$  proportional. Ein von R. FUESS<sup>2)</sup> construirtes Oculargoniometer erlaubt, dieselben zu messen, und so auch Bestimmungsstücke der Strahlenfläche durch Beobachtungen zu ermitteln.

Die folgende Tabelle enthält die Verhältnisse der Hauptlichtgeschwindigkeiten  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{c}$  einiger Krystalle zu der Lichtgeschwindigkeit in der Luft, welche theils nach Prismenbeobachtungen, theils nach der Methode der Totalreflexion, welche weiter unten besprochen werden soll, ermittelt sind. Bei den einaxigen Krystallen bezieht sich  $\sqrt{a}$  auf die Geschwindigkeit der ordinären,  $\sqrt{c}$  auf die Hauptlichtgeschwindigkeit der extraordinären Welle. Die zweite Columnne giebt den Charakter der Doppelbrechung an. Die an die Krystallnamen gesetzten Indices bezeichnen die unter der Tabelle angegebenen Beobachter, welche die bezüglichen Constanten ermittelt haben. Die letzte Columnne giebt an, für welche Wellenlänge die Zahlen gelten, und zwar bedeutet  $r$  rothes,  $g$  gelbes (Natrium-) Licht.

## Einaxige Krystalle.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{c}$	
Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> <sup>5)</sup> . . . . .	+	0.510	0.385	$r$
Natriumnitrat <sup>3)</sup> . . . . .	—	0.63084	0.74917	$g$
Dolomit <sup>6)</sup> . . . . .	—	0.59462	0.66552	$g$
Kalkspath <sup>12)</sup> . . . . .	—	0.60295	0.67279	$g$
Rutil <sup>2)</sup> . . . . .	+	0.38229	0.34448	$g$
Proustite <sup>6)</sup> . . . . .	—	0.32386	0.35812	$g$
Zirkon <sup>14)</sup> . . . . .	+	0.521	0.508	$r$
Turmalin <sup>11)</sup> . . . . .	—	0.61193	0.61754	$g$
Phenakit <sup>5)</sup> . . . . .	+	0.60459	0.59891	$g$
Anatas <sup>13)</sup> . . . . .	—	0.39442	0.40066	$g$
Beryll <sup>13)</sup> . . . . .	—	0.63207	0.63466	$g$
Korund <sup>5)</sup> . . . . .	—	0.56577	0.56844	$r$
Apatit <sup>7)</sup> . . . . .	—	0.60750	0.60912	$g$

<sup>1)</sup> A. CORNU, Ann. de l'école norm. (2) 1, pag. 231. 1872; 3, pag. 1. 1874.

<sup>2)</sup> TH. LIEBISCH, N. Jahrb. für Mineral. 2, pag. 51. 1886; Physikal. Krystallogr., pag. 383, Abbildung 201.

<sup>3)</sup> ARZRUNI, <sup>2)</sup> BAERWALD, <sup>3)</sup> CORNU, <sup>4)</sup> DANKEF, <sup>5)</sup> DES CLOIZEAUX, <sup>6)</sup> FIZEAU, <sup>7)</sup> HEUSSER, <sup>8)</sup> F. KOHLRAUSCH, <sup>9)</sup> W. KOHLRAUSCH, <sup>10)</sup> v. LANG, <sup>11)</sup> MILLER, <sup>12)</sup> RUDBERG, <sup>13)</sup> SCHRAUF, <sup>14)</sup> SENARMONT, <sup>15)</sup> TSCHERMAK.

Betreffs der Dispersion des Kalkspaths und Quarzes, sowie der Abhängigkeit ihrer optischen Eigenschaften von der Temperatur vergl. die Arbeiten von RUDBERG (POGG. Ann. 14, pag. 45. 1828; 26, pag. 291. 1832), MASCART (Ann. de l'écol. norm. 1, pag. 238. 1864); VAN DER WILLIGEN (2. Mém. Arch. Musée Teyler, 3, pag. 34, Harlem 1870), FIZEAU (Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862. — Compt. rend. 58, pag. 923. 1864. — POGG. Ann. 119,

## Zweiaxige Krystalle.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{c}$	
Andalusit <sup>5)</sup> . . . . .	—	0·6127	0·6105	0·6086	r
Anglesit <sup>1)</sup> . . . . .	+	0·53275	0·53128	0·52808	g
Anhydrit <sup>4)</sup> . . . . .	+	0·63710	0·63471	0·61972	g
Aragonit <sup>12)</sup> . . . . .	—	0·65354	0·59468	0·59316	g
Axinit <sup>5)</sup> . . . . .	—	0·59809	0·59599	0·59489	r
Borax <sup>15)</sup> . . . . .	—	0·69119	0·68093	0·67959	g
Cerussit <sup>13)</sup> . . . . .	—	0·55442	0·48163	0·48122	g
Chrysoberyll <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·57241	0·57195	0·56931	g
Cölestin <sup>1)</sup> . . . . .	+	0·61653	0·61587	0·61315	g
Cordierit <sup>5)</sup> . . . . .	—	0·6515	0·6489	0·6468	g
Datolith <sup>5)</sup> . . . . .	—	0·61500	0·60477	0·59880	g
Diopsid <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·59783	0·59531	0·58734	g
Euklas <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·60533	0·60411	0·59844	g
Glimmer . . . . .	—	0·64067	0·62730	0·62511	g
Gyps <sup>10)</sup> . . . . .	+	0·65758	0·65670	0·65339	g
Kieselzinkerz <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·6192	0·6180	0·6116	g
Natrolith <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·67714	0·67582	0·67172	r
Olivin <sup>5)</sup> . . . . .	+	0·6020	0·5960	0·5893	g
Orthoklas (Adular) <sup>8)</sup> . . . . .	—	0·65823	0·65660	0·65591	g
Orthoklas (Sanidin) <sup>8)</sup> . . . . .	—	0·65764	0·65573	0·65561	g
Schwefel <sup>13)</sup> . . . . .	+	0·51270	0·49060	0·44632	g
Schwerspath <sup>7)</sup> . . . . .	+	0·61113	0·61071	0·60681	g
Topas <sup>12)</sup> . . . . .	+	0·62050	0·61967	0·61687	g
Weinsäure <sup>9)</sup> . . . . .	+	0·66900	0·65160	0·62302	g

pag. 297. 1863; 123, pag. 515. 1864); ESSELBACH (POGG. Ann. 98, pag. 513. 1856); SARASIN (Compt. rend. 85, pag. 1230. 1877); MOUTON (Compt. rend. 88, pag. 1087, 1189. 1879); J. MACÉ DE LÉPINAY (Compt. rend. 101, pag. 874. 1885; Journ. de phys. (2) 4, pag. 159 u. 261. 1885; 6, pag. 190. 1887; (3) 1, pag. 23. 1892).

Gyps ist untersucht von F. NEUMANN (POGG. Ann. 27, pag. 240. 1833—35, pag. 81. 1835), E. MITSCHERLICH (POGG. Ann. 8, pag. 519. 1826), A. DES CLOIZEAUX (Mém. des sav. étr. 18, pag. 511. 1867), v. LANG (Wien. Ber. (II) 76, pag. 793. 1877), J. ANGSTRÖM (POGG. Ann. 86, pag. 206. 1852), G. QUINCKE (Festschr. der naturf. Ges. in Halle, 1879), H. DUFET (Journ. de phys. 10, pag. 513. 1881; (2) 8, pag. 292. 1888).

Betreffs des Einflusses der Temperatur auf die optischen Eigenschaften anderer Mineralien vergl. die Arbeiten von J. STEFAN (Wien. Ber. II, 63, pag. 223. 1871. — Rep. de Exp. Phys. 8, pag. 97. 1872), N. LAGERBERG (Bihang. Sv. Vet.-Acad. Handl. Stockholm, 1887, 13, 1. No. 10), H. DUFET (l. c. und Bull. soc. min. de France 8, pag. 257. 1885), A. DES CLOIZEAUX (Nouv. rech. sur les propr. opt. des cristaux etc. — Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, 18, pag. 511. 1867. — POGG. Ann. 129, pag. 345. 1866), F. RUDBERG (POGG. Ann. 17, pag. 1. 1829; 26, pag. 291. 1832), A. ARZRUNI (Ztschr. f. Kryst. 1, pag. 165. 1877), A. MÜTTRICH (POGG. Ann. 121, pag. 193 u. 398. 1864), D. BREWSTER (Edinb. Phil. Trans. 11, pag. 273. 1831. — Phil. Mag. (3) 1, pag. 417. 1832. — POGG. Ann. 21, pag. 607. 1831. — 27, pag. 480. 1833), H. LASPEYRES (Ztschr. f. Kryst. 1, pag. 529. 1877), A. OFFRET (Bull. de la Soc. Franc. de Minéral. 13, pag. 405. 1890), A. SCHRAUF (Ztschr. f. Kryst. 18, pag. 113. 1890), A. SELLA (Rend. R. Acc. dei Lincei, Roma 7, 2. sem., pag. 300. 1891).

Isomorphe Reihen von Krystallen sind optisch untersucht von F. L. PERROT (Compt. rend. 111, pag. 967. 1890. — Arch. de Gen. 25, pag. 26. 1891).

Ueber die Berechnung der optischen Eigenschaften isomorpher Mischungen aus denjenigen der gemischten reinen Substanzen vergl. F. POCKELS (Neues Jahrb. f. Mineral., Beilagebd. 8, pag. 117. 1892).

### III. Interferenzerscheinungen im polarisirten Licht.

Die Interferenzerscheinungen, welche planparallele Platten doppelbrechender Krystalle in senkrecht einfallendem polarisirten Lichte zeigen, wurden von ARAGO<sup>1)</sup> entdeckt und bald darauf von BIOT<sup>2)</sup> auf experimentellem Wege eingehend untersucht. Nach missglückten Versuchen von ihm, die Erscheinungen nach den Vorstellungen der Emissionstheorie zu erklären, versuchte YOUNG<sup>3)</sup> dasselbe nach der Undulationstheorie. Indem er BIOT's numerische Resultate benutzte, fand er die bemerkenswerthe Thatsache, dass, falls ein Krystallblättchen im polarisirten Lichte und eine dünne Luftlamelle im durchgehenden Lichte dieselbe Farbe zeigen, ihre Dicken in solcher Beziehung stehen, dass der Gangunterschied des ordinären und extraordinären Strahles beim Austritt aus dem Krystallblättchen gleich ist dem Gangunterschied der beiden interferirenden Strahlen der Luftlamelle, von welchen der eine direkt durch die Lamelle gegangen ist, während der andere im Innern derselben zwei Reflexionen erlitten hat. YOUNG suchte so die Erscheinungen der chromatischen Polarisation auf die der Interferenz zurückzuführen, doch erkannte er selbst das Unvollkommene seiner Theorie, da sie nicht zu erklären vermochte, warum die Farbenercheinungen dünner Krystallplatten nur im polarisirten Lichte und bei Zurückführung auf eine Polarisationsebene eintreten. Die vollständige Erklärung hierfür gab FRESNEL<sup>4)</sup> auf Grund der von ihm in Gemeinschaft mit ARAGO entdeckten Gesetze der Interferenz polarisirten Lichtes (cf. oben pag. 633).

Einen Theil der überaus mannigfachen Interferenzerscheinungen, welchen Platten doppelbrechender Krystalle im convergenten polarisirten Lichte zeigen, hat BREWSTER<sup>5)</sup> entdeckt. Nachdem es AIRY<sup>6)</sup> gelungen war, diese Erscheinungen für Platten einaxiger Krystalle, welche senkrecht zur optischen Axe geschliffen sind, zu erklären, entwickelte F. NEUMANN<sup>7)</sup> eine allgemein gültige Theorie dieser Interferenzerscheinungen. Speciell für einaxige Krystalle sind dieselben von OHM<sup>8)</sup>, FREYSS und SCHLAGDENHAUFFEN<sup>9)</sup>, FRIESS<sup>10)</sup>, für zweiaxige Krystalle von ZECH<sup>11)</sup> und LOMMEL<sup>12)</sup> mit gewissen Annäherungen berechnet.

Einheitliche Gesichtspunkte für eine übersichtliche geometrische Deutung der NEUMANN'schen Formeln wurden von BERTIN<sup>13)</sup> durch Einführung der Ober-

1) F. ARAGO, *Mém. de la Cl. des scienc. math. et phys. de l'inst. Année 1811*, 12, pag. 93. 1812; *Oeuvr. compl.* 10, pag. 36. — GILBERT's *Ann. de Phys.* 40, pag. 145. 1812.

2) Eine Zusammenstellung der Ergebnisse dieser Untersuchungen findet sich in J. B. BIOT, *Traité de phys.* 4, 1816.

3) YOUNG, *Quarterly Review* 11, pag. 42. 1814; *Miscell. Works* 1, pag. 269.

4) A. FRESNEL, *Ann. de chim. u. de phys.* (2) 17, pag. 102, 167. 1821; *Oeuvr. compl.* 1, pag. 609; *POGG. Ann.* 12, pag. 336. 1828.

5) D. BREWSTER, *Treatise on New Philosophical Instruments*, Edinb. 1813, pag. 336. — *Phil. Trans.* 1814, pag. 187; 1818, pag. 199.

6) G. B. AIRY, *Trans. Cambr. Phil. Soc.* 4, pag. 79, 198. 1833; *POGG. Ann.* 23, pag. 204. 1831.

7) F. NEUMANN, *POGG. Ann.* 33, pag. 257. 1834.

8) G. S. OHM, *Münch. Abh.* 7, pag. 43, 265. 1853.

9) FREYSS und SCHLAGDENHAUFFEN, *POGG. Ann.* 112, pag. 15. 1861.

10) J. FRIESS, *Progr. d. k. k. Staatsoberrealschule zu Olmütz 1876/77*; *WIED. Ann.* 31, pag. 90. 1884.

11) ZECH, *POGG. Ann.* 102, pag. 354. 1857.

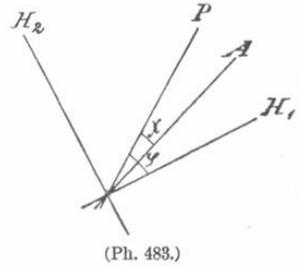
12) E. LOMMEL, *POGG. Ann.* 120, pag. 69. 1863.

13) A. BERTIN, *Ann. de chim. et de phys.* (3) 63, pag. 57. 1861; (6) 2, pag. 485. 1884.

flächen gleichen Gangunterschiedes und von LOMMEL<sup>1)</sup> durch Construction der Flächen gleicher Polarisationsrichtung (Isogyren-Flächen) gewonnen.

a) Interferenzerscheinungen im senkrecht einfallenden Lichte.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass linear polarisirtes Licht senkrecht auf eine doppelbrechende Krystallplatte fällt und dann eine zweite polarisirende Vorrichtung durchsetzt; dieser Fall wird z. B. realisirt, wenn man die Platte auf das Tischchen des pag. 628 erwähnten NÖRREBERG'schen Polarisationsapparates legt, oder zwischen zwei Polarisationsprismen bringt. Das erste der Prismen wird der Polarisator, das letzte der Analysator genannt. Ihre Polarisations Ebenen (sie sind in Fig. 483 durch die Linien  $P$  und  $A$  bezeichnet) mögen den Winkel  $\chi$  mit einander einschliessen, die Polarisations Ebenen  $H_1$  und  $H_2$  der beiden in der Krystallplatte fortgepflanzten Wellen  $W_1$  und  $W_2$  mögen mit der Polarisations Ebene ( $P$ ) des Polarisators die Winkel  $\varphi$  und  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  einschliessen.



(Ph. 483.)

Ist  $a$  die Amplitude der einfallenden, längs  $P$  polarisirten Welle, so ist, falls man von der durch Reflexion herbeigeführten Schwächung absieht,  $a \cos \varphi$  die Amplitude der Welle  $W_1$ ,  $a \sin \varphi$  die der Welle  $W_2$ . Diese beiden Wellen werden nach dem Austritt aus dem Krystall auf die gemeinsame Polarisations Ebene  $A$  zurückgeführt, besitzen daher nach dem Durchtritt durch den Analysator die Amplituden  $a \cos \varphi \cos(\varphi - \chi)$  und  $a \sin \varphi \sin(\varphi - \chi)$ . Nach der Gleichung (4) der pag. 634, welche die Amplitude gleichgerichteter Wellenzüge aus den Einzelamplituden zu berechnen gestattet, ist daher, falls  $\delta$  die Phasendifferenz der Wellen  $W_1$  und  $W_2$  bedeutet, welche durch die Durchsetzung der Krystallplatte herbeigeführt ist, die resultirende Lichtintensität proportional zu  $J^2$ , wo  $J^2$  gegeben ist durch die Formel

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \varphi \cos^2(\varphi - \chi) + \sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \chi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin(\varphi - \chi) \cos(\varphi - \chi) \cos \delta].$$

Ersetzt man hierin  $\cos \delta$  durch  $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta$ , so wird die Formel zu

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{1}{2} \delta]. \quad (52)$$

Die Phasendifferenz  $\delta$  ergibt sich unmittelbar zu

$$\delta = l \frac{2\pi}{T} \left( \frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right) = 2\pi \frac{l}{\lambda_0} \left( \frac{\omega_0}{o} - \frac{\omega_0}{e} \right), \quad (53)$$

wobei  $l$  die Dicke der Krystallplatte bedeutet,  $o$  und  $e$  die Geschwindigkeiten der beiden in ihr sich fortplanzenden Wellen,  $T$  ihre Schwingungsdauer,  $\omega_0$  die Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium (Luft),  $\lambda_0$  die in ihm stattfindende Wellenlänge. In der Formel (52) ist zu bemerken, dass das erste Glied  $a^2 \cos^2 \chi$  den Werth der Lichtintensität angiebt, wie er ohne Einschaltung der Krystallplatte in dem Polarisationsapparat stattfinden würde. Diese Intensität soll im Folgenden die ursprüngliche genannt werden.

Dreht man die Krystallplatte in ihrer Ebene, während Polarisator und Analysator dieselben Stellungen behalten, so bleibt im Ausdruck (52)  $\chi$  constant,

<sup>1)</sup> E. LOMMEL, WIED. ANN. 18, pag. 56. 1883. — Die Isogyrenfläche ist von H. PRITSCH allgemein discutirt (Wien. Ber. (II) 91, pag. 527. 1885) und mit einer gewissen Annäherung in einfacher Weise abgeleitet von MACÉ DE LÉPINAY (Journ. de phys. (2) 2, pag. 162. 1883).

während  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  variiert. Aus jenem Ausdrucke folgt, dass in 8 Lagen der Krystallplatte die ursprüngliche Intensität beobachtet wird, nämlich für:

$$\varphi = 0, \quad \chi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \chi, \quad \pi, \quad \pi + \chi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} + \chi,$$

d. h. wenn eine der Polarisations Ebenen  $H_1, H_2$  des Krystalls entweder mit der des Polarisators oder der des Analysators zusammenfällt. Zwischen diesen 8 Stellungen der Platte erreicht die Intensität viermal ein Maximum und viermal ein Minimum.

In dem besonderen Falle, wo die Polarisations Ebenen  $P$  und  $A$  dieselbe Richtung haben ( $\chi = 0$ ) ist

$$J^2 = a^2 (1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\delta). \quad (54)$$

Demnach tritt das Maximum der Intensität ein, wenn  $H_1$  oder  $H_2$  parallel zu  $P$  liegt, das Minimum, wenn  $H_1$  oder  $H_2$  mit  $P$  den Winkel  $\pi/4$  einschliesst. Ist gleichzeitig  $\delta = (2h + 1)\pi$ , wobei  $h$  eine ganze Zahl bedeutet, so erscheint die Platte in den letzten Stellungen vollkommen dunkel.

Stehen die Polarisations Ebenen  $P$  und  $A$  senkrecht aufeinander ( $\chi = \pi/2$ ), so ist

$$J^2 = a^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\delta. \quad (55)$$

Folglich erscheint die Platte, falls nicht zugleich  $\delta = (2h)\pi$  ist, nur dunkel, wenn die Polarisations Ebenen  $H_1$  und  $H_2$  mit  $P$  und  $A$  zusammenfallen. Hierauf gründet sich eine Methode, um die Lage der Polarisations Ebenen in einer doppelbrechenden Platte zu ermitteln. Die Methode ist aber nicht sehr empfindlich, wir werden weiter unten eine bessere kennen lernen, die auf der Combination zweier Platten beruht.

Ist  $\delta = 2h\pi$ , so erscheint die Platte bei einer vollen Umdrehung in ihrer Ebene stets dunkel. Hierdurch erklärt sich das Verhalten einer keilförmigen Platte, welche im homogenen Lichte zwischen gekreuzten NICOL'schen Prismen ( $\chi = \frac{\pi}{2}$ ) betrachtet wird. Dieselbe erscheint von schwarzen, der Keilkante parallelen Streifen durchzogen, welche nach der Gleichung (53) an denjenigen Stellen auftreten, für welche die Dicke  $l$  gegeben ist durch:

$$l = \frac{h\lambda_0}{\omega_0 \left( \frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right)}.$$

Fällt weisses Licht ein, so muss man, um die resultierende Intensität zu erhalten, die Summe aller Ausdrücke (52) bilden, welche sich auf die verschiedenen Wellenlängen beziehen. Im Allgemeinen ist ausser der Amplitude  $a$  auch die Phasendifferenz  $\delta$  und die Polarisationsrichtungen  $H_1$  und  $H_2$ , d. h. der Winkel  $\varphi$ , von der Farbe (d. h.  $\lambda_0$ ) abhängig. Letztere Abhängigkeit werden wir dagegen vernachlässigen, da sie bei der Kleinheit der Dispersion der optischen Axen, wie sie sich bei den in der Natur vorkommenden Körpern darbietet, nur sehr gering ist. Wir schreiben also:

$$J^2 = \cos^2 \chi \Sigma a^2 - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \Sigma a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\delta. \quad (52')$$

Der erste Ausdruck der rechten Seite dieser Gleichung stellt die ursprüngliche Intensität dar, d. h. die weisse Farbe ist durch  $\Sigma a^2$  defnirt. In dieser erscheint die Krystallplatte in den vorhin erwähnten 8 Stellungen, in welchen eine der Polarisations Ebenen  $H_1$  oder  $H_2$  mit  $P$  oder  $A$  zusammenfällt, in den Zwischenstellungen erscheint jedoch die Platte gefärbt und zwar derartig, dass in zwei zu einer der obigen 8 Stellungen symmetrischen Lagen complementäre

Färbungen auftreten, da in diesem Falle die zweiten Glieder der Formel (52') gleich, doch von entgegengesetzten Vorzeichen werden.

Das Gesichtsfeld zeigt bei einer vollen Umdrehung der Platte nur eine einzige Färbung, wenn  $\chi = 0$  oder  $\frac{\pi}{2}$  ist (d. h. bei parallelen oder gekreuzten Nicols). Im ersten Falle ist

$$J^2 = \Sigma a^2 - \sin^2 2\varphi \Sigma a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\delta, \quad (54')$$

im zweiten Falle

$$J^2 = \sin^2 2\varphi \Sigma a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\delta. \quad (55')$$

In correspondirenden Lagen der Platte (für gleiche  $\varphi$ ) sind die Färbungen derselben in beiden Fällen complementär. Die letzten beiden Formeln stimmen überein mit denjenigen, welche die Intensität des durch eine dünne, einfachbrechende Platte hindurchgehenden, resp. von ihr reflektirten, Lichtes darstellen. Im ersten Falle erhält man daher bei variirendem  $\delta$ , d. h. variirender Dicke  $l$  der Krystallplatte (realisirbar durch Betrachtung einer keilförmigen Platte) die NEWTON'schen Farben des durchgehenden, im zweiten Falle die des reflektirten Lichtes. Aus dem durch (53) gegebenen Ausdruck für die Phasendifferenz  $\delta$  erhält man sofort das oben (pag. 714) erwähnte, von YOUNG aufgefundene Gesetz, welches die Dicke einer Krystallplatte verknüpft mit der Dicke der die gleiche Farbe gebenden Luftschicht.

Durch Vergleichung correspondirender Dicken erhält man daher eine Messungsmethode für die Differenz  $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$ . Am bequemsten vergleicht man indessen die Krystallplatte nicht mit einer die gleiche Farbe zeigenden Luftschicht, sondern mit einer anderen Krystallplatte, von der man jene Differenz schon kennt. Hierauf beruht die Anwendung des von MICHEL-LEVY<sup>1)</sup> beschriebenen Quarzkeil-Compensators. Wir werden indess unten eine bessere Methode zur Messung von  $\delta$ , d. h. der Differenz  $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$  kennen lernen<sup>2)</sup>.

Eine Krystallplatte zeigt nur dann eine ausgesprochene Färbung, wenn die Phasendifferenz  $\delta$  für Licht mittlerer Wellenlänge weder einen zu kleinen noch einen zu grossen Betrag besitzt. Im ersten Falle, der bei einer sehr kleinen Dicke der Platte eintritt, variirt  $\delta$  mit der Wellenlänge so wenig, dass die resultirende Intensität für verschiedene Farben nicht merklich verschieden ist, im letzteren Falle, der bei grosser Dicke der Platte eintritt, variirt  $\delta$  so schnell mit der Wellenlänge, dass innerhalb eines sehr kleinen Farbengebietes die Intensität von ihren Minimal (Null)-Werthen bis zu ihren Maximalwerthen übergeht. Es wird in Folge dessen eine gleichmässige weisse Farbe resultiren, jedoch ist dieselbe nicht identisch mit derjenigen des einfallenden Lichtes, sondern es fehlen darin sehr viele Farben, welche aber einander so benachbart sind, dass kein ausgedehnteres, für das Auge wahrnehmbares Farbengebiet gegenüber einem anderen merklich geschwächt ist. Von dem Fehlen zahlreicher Farben überzeugt man sich durch spectrale Zerlegung des durch eine dicke

<sup>1)</sup> A. MICHEL-LÉVY, Bull. Soc. min. de France 6, pag. 143. 1883. — Les minéraux des roches, Paris 1888, pag 54.

<sup>2)</sup> Ausser den unten angeführten giebt es auch noch eine gute Methode zur Messung von  $\delta$ , welche RIGHI angewandt hat, vergl. RIGHI, Rend. R. Acc. dei Lincei Roma (5) 1, 1. sem. pag. 189. 1892. — Refer. in WIED. Beibl. 16, pag. 538. 1892.

Krystallplatte hindurchgehenden weissen Lichtes<sup>1)</sup>. Diese Methode ist von FIZEAU und FOUCAULT angewandt, um die Interferenzfähigkeit zweier Lichtwellen mit grossem Gangunterschied nachzuweisen (cf. oben pag. 639).

Die Grenzen der Dicke einer Krystallplatte, innerhalb welcher dieselbe intensive Polarisationsfarben zeigt, schwanken nach Obigem sehr je nach der Grösse der Differenz  $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$ , d. h. je nach der Orientirung der Platte und der Stärke der Doppelbrechung. Je grösser die letztere ist, um so dünner wird man die Platte wählen müssen, um deutliche Färbung zu erhalten<sup>2)</sup>.

Betrachtet man den Fall, dass die Platten eine feste Lage gegen den Polarisator besitzt, dagegen der Analysator eine volle Umdrehung beschreibt, so erhellt aus der Formel (52'), in welcher nun  $\varphi$  als fest und  $\chi$  als variabel zu betrachten ist, dass das Gesichtsfeld in denjenigen vier Lagen des Analysators ungefärbt erscheint, in welchen seine Polarisations Ebene mit einer der beiden des Krystalls zusammenfällt. Ueberschreitet man beim Drehen des Analysators eine dieser vier Lagen, so geht die Färbung des Gesichtsfeldes in die complementäre über.

Wie DITSCHNEIDER<sup>3)</sup> beobachtet hat, zeigt ein Gypsblättchen auch ohne Anwendung eines Analysators eine matte Färbung, falls partiell polarisirtes Licht einfällt, wie es z. B. der Fall ist, wenn man die Platte auf eine mattschwarze Unterlage legt, nach welcher man in schiefer Richtung hinsieht.

Die Erklärung der Farben ist in diesem Falle in den mehrfachen Reflexionen des Lichtes im Innern der Platte zu finden.

Schaltet man zwei über einander liegende Platten  $K$  und  $K'$  der Dicken  $l$  und  $l'$  in den Polarisationsapparat und bildet die Polarisations Ebene  $H_1$  der schnelleren Welle in der ersten Platte den Winkel  $\varphi$  mit der Polarisations Ebene  $P$  des Polarisators, die Polarisations Ebene  $H_1'$  der schnelleren Welle in der zweiten Platte den Winkel  $\varphi'$  mit  $P$ , während  $P$  mit der Polarisations Ebene des Analysators den Winkel  $\chi$  bildet, so ist<sup>4)</sup> die Intensität des austretenden Lichtes

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \chi + \cos 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2} \delta \\ - \sin 2(\varphi' - \chi) \cos 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2} \delta' \\ - \sin 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \cos^2 (\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2} (\delta - \delta') \\ + \sin 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \sin^2 (\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2} (\delta - \delta')],$$

falls  $\delta$  und  $\delta'$  die in jeder einzelnen Platte hervorgerufenen Phasendifferenzen der beiden in ihnen fortgepflanzten Wellen bedeuten.

Liegt die Polarisations Ebene  $H_1$  parallel oder senkrecht zu  $P$

$$\left( \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} \right),$$

so ist

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \chi - \sin 2\varphi' \sin 2(\varphi' - \chi) \sin^2 \frac{1}{2} \delta'],$$

<sup>1)</sup> J. MÜLLER, POGG. Ann. 69, pag. 98. 1846; 71, pag. 91. 1847. — H. FIZEAU et L. FOUCAULT, Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 138, 1849; 30, pag. 146. 1850. — J. STEFAN, Wien. Ber. (2) 50, pag. 481. 1864. — L. DITSCHNEIDER, ibid. 57, pag. 15. 1868. — E. MACH, optisch-akustische Versuche. Prag 1873. — DEAS, Trans. Roy. Soc. Edinb. 26, pag. 69, 177. 1872. — MAXWELL, ibid. pag. 185.

<sup>2)</sup> Eine Tabelle für die Werthe der Dicken, welche Platten von verschiedenen Krystallen, aber übereinstimmender Orientirung, besitzen müssen, um ein und dieselbe Interferenzfarbe (roth erster Ordnung) hervorzurufen, gab TH. LIEBISCH, physikal. Krystallogr., pag. 471.

<sup>3)</sup> L. DITSCHNEIDER, Wien. Ber. (2) 73, pag. 180. 1876.

<sup>4)</sup> A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 167. 1821.

d. h. die Combination der beiden Platten wirkt so, als ob  $K$  gar nicht vorhanden wäre. Aus der Formel (56) ergibt sich ebenso direkt, dass, falls  $H_1'$  parallel oder senkrecht zu  $A$  liegt ( $\varphi' = \chi, \frac{\pi}{2} + \chi$ ), die Combination so wirkt, als ob die Platte  $K'$  nicht vorhanden wäre. Da man die Reihenfolge der Platten  $K$  und  $K'$  beliebig vertauschen kann, so folgt allgemein, dass eine Platte nicht wirkt, falls eine ihrer Polarisations Ebenen mit der des Polarisators oder Analysators zusammenfällt.

Je nachdem die Polarisations Ebenen der beiden schnelleren Wellen zusammenfallen, ( $\varphi' = \varphi$ ), oder aufeinander senkrecht stehen ( $\varphi' = \frac{\pi}{2} + \varphi$ ) ist

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta + \delta')], \quad (57)$$

resp.

$$J^2 = a^2 [\cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta - \delta')]; \quad (57')$$

die Combination wirkt also im ersten Falle wie eine einzige Platte von vergrößerter, im zweiten Falle wie eine einzige von geringerer Dicke, als die einer einzigen Platte beträgt. Hierauf kann man ein Verfahren gründen, um  $\delta$  an einer Platte  $K$  mit Hilfe einer keilförmigen Platte  $K'$  zu ermitteln, von welcher man  $\delta'$  an jeder Stelle kennt. Man hat zu dem Zweck nur nöthig, diese Platte mit zu der ersten Platte  $K$  gekreuzten Polarisations Ebenen so lange auf  $K$  zu verschieben, dass das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols schwarz und ungefärbt erscheint. Die zu messende Grösse  $\delta$  ist dann gleich der an der Stelle des schwarzen Streifens auftretenden bekannten Grösse  $\delta'$  der Platte  $K'$ .

Die Combination einer Platte  $K$  mit einer zweiten  $K'$  kann man ferner dazu benutzen, um sehr schwache Spuren von Doppelbrechung in  $K$  zu entdecken. Aus der NEWTON'schen Farbenscala<sup>1)</sup> ist nämlich ersichtlich, dass für gewisse Phasen-Differenzen Färbungen auftreten, welche stark variiren, falls die Phasendifferenz nur wenig schwankt. Diese Färbungen werden «empfindliche Farben» genannt. Eine solche ist z. B. ein violett erster Ordnung, welches eintritt, falls die Phasendifferenz für Licht mittlerer Wellenlänge ungefähr den Werth  $\pi$  besitzt. Die Farbe schlägt für eine geringe Vergrößerung von  $\delta$  in blau, für eine geringe Verminderung in roth um.

Legt man nun in einen Polarisationsapparat eine Platte  $K'$ , welche diese empfindliche Farbe zeigt, über eine andere  $K$ , so machen sich Spuren von Doppelbrechung in letzterer durch eine Farbenänderung in  $K'$  bemerkbar. Noch empfindlicher wird die Vorrichtung, wenn man die Platte  $K'$  in der Richtung der Halbierungslinie ihrer Polarisations Ebenen zerschneidet und dann die beiden Hälften in ihrer Schnittlinie wieder vereinigt, nachdem man zuvor eine derselben um die Normale der Schnittfläche um  $180^\circ$  umgeklappt hat. Da dann die Polarisations Ebenen  $H_1'$  der beiden Hälften senkrecht aufeinander stehen, so bewirkt eine geringe Doppelbrechung in  $K$  eine Farbenänderung der beiden Hälften von  $K'$  in entgegengesetztem Sinne. — Diese Vorrichtung wird nach ihrem Erfinder<sup>2)</sup> die BRAVAIS'sche Doppelplatte genannt. Man kann mit ihrer Hilfe leicht z. B. nachweisen, dass der Druck der Finger genügt, um in einem Glaswürfel Doppelbrechung zu erzeugen.

Eine weitere Anwendung der Combination zweier Platten hat BABINET bei

<sup>1)</sup> cf. E. BRÜCKE, POGG. Ann. 74, pag. 582. 1848. — G. QUINCKE, ibid. 129, pag. 180. 1866. — A. ROLLET, Wien. Ber. 77, pag. 117. 1878.

<sup>2)</sup> A. BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 129. 1855.

der Construction seines Compensators gemacht, welcher das empfindlichste Instrument ist, um Phasendifferenzen zu messen.

In diesem Instrument sind zwei Quarzkeile  $P_1$  und  $P_2$  von gleichem Winkel zu einer planparallelen Platte vereinigt. Die optische Axe liegt in  $P_1$  parallel zur Kante, in  $P_2$  senkrecht zur Kante und parallel zur Austrittsfläche. Da demnach die Polarisations Ebenen  $H_1$  und  $H_1'$  der beiden Platten senkrecht zu einander stehen, so giebt die Formel (57') die Intensität des Lichtes an, wenn man es durch einen Polarisationsapparat, in welchen der Compensator eingeschaltet ist, gehen lässt.  $\delta - \delta'$  ist nun in diesem Falle proportional der Dickendifferenz der Quarzkeile an der betrachteten Stelle, das Gesichtsfeld erscheint daher bei gekreuzten Nicols ( $\chi = \pi/2$ ), falls  $\varphi$  von Null verschieden ist, im homogenen Lichte von schwarzen, in weissem Lichte von farbigen Streifen durchzogen, welche den Keilkanten parallel verlaufen. Von den letzteren Streifen ist einer nicht farbig, sondern schwarz. Er entspricht der Stelle, an welcher die Quarzkeile gleiche Dicke besitzen, für welche also für alle Wellenlängen  $\delta = \delta'$  ist. Der eine Quarzkeil ist mikrometrisch über dem anderen verschiebbar. Man notirt zunächst eine Stellung der Mikrometerschraube, für welche bei linearpolarisirtem einfallenden homogenen Lichte ein schwarzer Streifen an einer bestimmten Stelle des Gesichtsfeldes erscheint; sodann dreht man die Schraube, bis dass ein zweiter schwarzer Streifen an jener Stelle auftritt. Die Anzahl der Umdrehungen der Schraube von der ersten Stellung zur zweiten möge  $g$  genannt werden. Sie entspricht einer Zu- resp. Abnahme der Dickendifferenz beider Quarzkeile an der betrachteten Stelle, welche eine Zu- resp. Abnahme der Phasendifferenz der beiden im Compensator sich fortpflanzenden Lichtwellen um  $2\pi$  zur Folge hat. Fällt nun nicht linearpolarisirtes Licht in den Compensator ein, sondern elliptisch polarisirtes, in welchem die Phasendifferenz der zwei parallel zu den Polarisationsebenen  $H_1'$  und  $H_2'$  genommenen Componenten den Betrag  $\varepsilon$  besitzt, so erscheint der schwarze Streifen im Compensator verschoben und man muss die Mikrometerschraube drehen, damit er wieder an der alten Stelle erscheint. Nennt man die Anzahl der hierzu nothwendigen Umdrehungen  $g'$ , so ergiebt sich  $\varepsilon$  aus

$$\varepsilon : 2\pi = g' : g,$$

denn die Lichtintensität wird in diesem Falle erhalten, wenn man in der Formel (57') zu  $\delta - \delta'$  die Grösse  $\varepsilon$  subtractiv oder additiv hinzufügt.

Die Zahl  $g$  hängt, da sie umgekehrt proportional der Differenz der beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten des Quarzes ist, von der Farbe des einfallenden Lichtes ab, kann aber, falls man sie für eine Lichtsorte bestimmt hat, für jede andere berechnet werden, falls man die Dispersionsconstanten des Quarzes kennt<sup>1)</sup>.

Bei der beschriebenen Einrichtung zeigt der Compensator in den verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes verschiedene Lichtintensität. Man kann ihn auch so construiren, dass dieselbe überall die gleiche ist, und in diesem Falle ist er dann geeignet, die Verzögerung  $\varepsilon$  eines einfallenden Lichtstrahl zu ermitteln, falls man durch den Analysator nicht mit freiem Auge, oder einer Lupe, sondern mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr sieht, während die aus dem Polarisator austretenden Strahlen durch ein Collimatorrohr parallel gemacht sind. Man

<sup>1)</sup> Eine Berechnung der durch den Compensator herbeigeführten Phasendifferenz mit Rücksicht auf die Reflexion des Lichtes an den Grenzflächen der Keile gab W. VOIGT, WIED. Ann. 22, pag. 234. 1884. — Die Orte des deutlichsten Auftretens der Interferenzstreifen sind discutirt von K. E. F. SCHMIDT, *ibid.* 35, pag. 360. 1888, und J. MACÉ DE LÉPINAY, Journ. de phys. (2) 10, pag. 204. 1891.

braucht zu diesem Zwecke nur den Compensator zu construiren aus einer planparallelen Platte der Orientirung, wie sie vorhin der Keil  $P_1$  besass, und aus zwei keilförmigen Platten, welche gleiche Orientirung (wie vorhin der Keil  $P_2$ ) besitzen und bei gegenseitiger mikrometrischer Verschiebung eine planparallele Platte von variabler Dicke darstellen<sup>1)</sup>. Die Verzögerung wird dann genau wie vorhin gemessen, indem man den Compensator auf Dunkelheit einstellt. Diese Anordnung bietet bei alle den Versuchen, bei welchen man ein grösseres optisch homogenes Feld zur Verfügung hat (z. B. bei Messung der durch Reflexion von einem Spiegel hervorgerufenen Verzögerung) grosse Vortheile dar wegen der grösseren zum Auge des Beobachters gelangenden Lichtmenge.

Mit Hilfe des BABINET'schen Compensators in Verbindung mit einem unter ihm befindlichen drehbaren Polarisationsprisma (Analysator) kann man die Natur eines beliebig elliptisch polarisirten Lichtstrahles bestimmen, d. h. nicht nur die Phasendifferenz zweier rechtwinkliger Componenten desselben, sondern auch ihr Amplitudenverhältniss. Zu dem Zweck hat man zu beachten, dass Dunkelheit des Gesichtsfeldes nur eintreten kann, falls das aus dem Compensator austretende Licht linear polarisirt ist in einer zur Polarisationsebene des Analysators senkrechten Ebene. Dreht man daher an dem Theilkreis des letzteren und zugleich an der Mikrometerschraube des Compensators so lange, bis völlige Dunkelheit eintritt, so giebt die Stellung des letzteren die Phasendifferenz der beiden parallel den Polarisationsebenen des Compensators genommenen Componenten des einfallenden Lichtes an, die Stellung des Analysators hingegen die Polarisationsebene des linear polarisirt gemachten einfallenden Lichtes, d. h. das Amplitudenverhältniss jener beiden Componenten des einfallenden Lichtes.

Dieselben Ziele kann man erreichen, wenn man nach einem von SÉNARMONT<sup>2)</sup> vorgeschlagenen Verfahren anstatt des BABINET'schen Compensators ein in seiner Ebene drehbares Glimmerblättchen verwendet, für welches die Phasendifferenz der beiden normal zur Begrenzung sich fortpflanzenden Wellen  $\frac{\pi}{2}$  beträgt (sogenanntes  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen). Nach den Gleichungen (8) (pag. 634) des Abschnittes »Natur der Lichtbewegung« ist, falls  $A$  und  $B$  die rechtwinkligen Componenten eines elliptisch polarisirten Lichtstrahls sind, nach zwei Coordinatenrichtungen  $x$  und  $y$ ,  $\varepsilon$  die Phasendifferenz der beiden Componenten, das Axenverhältniss der Haupttaxen der Schwingungsellipse durch den Ausdruck  $\tan g i$  gegeben, wo

$$\sin 2i = \frac{2AB}{A^2 + B^2} \sin \varepsilon \quad (58)$$

ist, während diese Haupttaxen mit den Coordinatenrichtungen einen Winkel  $\vartheta$  einschliessen, der definit ist durch:

$$\tan g 2\vartheta = \frac{2AB}{A^2 + B^2} \cos \varepsilon. \quad (58')$$

Wenn man daher die Coordinatenrichtungen in die Haupttaxen der Ellipse

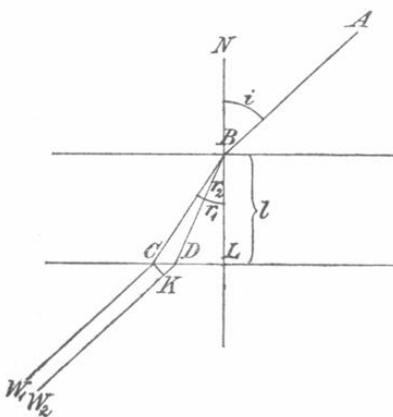
<sup>1)</sup> Diese Anordnung ist zuerst von BIOT benützt, nachdem BRAVAIS (Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 139. 1855) zuvor eine etwas complicirtere Vorrichtung beschrieben hatte, indem er vier Quarzprismen benützte. SOLEIL hat die hier beschriebenen Vortheile schon mit den beiden Prismen des BABINET'schen Compensators erreicht, welche jedoch mit ihren Keilwinkeln nach derselben Seite liegen, sodass das Licht nach dem Durchgang durch das Platten-system etwas abgelenkt ist. (Vergl. MASCART, Traite d'Optique, 2. Bd., pag. 61, Paris 1890.

<sup>2)</sup> SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (2) 73, pag. 337. 1840; POGG. Ann. Ergzbd. I, pag. 451. 1842. — Vergl. auch E. WIEDEMANN, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. für 1872; POGG. Ann. 151, pag. I. 1874.

legt, so haben die beiden rechtwinkligen Componenten eine Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$ . Das Glimmerblättchen macht daher das Licht zu linear polarisirtem, falls seine Polarisations Ebenen mit den Haupttaxen der Ellipse zusammenfallen. Die Polarisations Ebene des so linear polarisirt gemachten Lichtes, d. h. das Verhältnis  $\tan i$  der Haupttaxen der Schwingungsellipse ergibt sich unmittelbar aus der Stellung des analysirenden, hinter dem Glimmer befindlichen NICOL'schen Prismas. Wenn man also durch Drehen beider Dunkelheit erzeugt hat, so werden die Componenten  $AB$  des einfallenden Lichtes nach zwei beliebigen rechtwinkligen Richtungen  $x$  und  $y$ , sowie ihre Phasendifferenz  $\varepsilon$  aus den beiden Gleichungen (58), (58') berechnet, indem man für  $i$ , resp.  $\vartheta$  die von den Polarisations Ebenen des Nicols, resp. des Glimmers mit jenen Coordinatenrichtungen gebildeten Winkel einsetzt.

b) Interferenzerscheinungen im convergent einfallenden Lichte.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass ein Kegel von geradlinig polarisirten Lichtstrahlen auf eine doppelbrechende Krystallplatte fällt. Man kann diesen Fall dadurch realisiren, dass man vor und hinter der Krystallplatte je ein System Sammellinsen anbringt<sup>1)</sup>. Lichtstrahlen, welche von einem Punkte der vorderen



(Ph. 484.)

Brennebene des ersten Systems ausgehen, durchsetzen die Krystallplatte in paralleler Richtung und vereinigen sich in einem Punkte der hinteren Brennebene des zweiten Systems. Auf letztere stellen wir mit dem Auge oder einer Lupe ein. Wir nehmen eine nicht gleichförmige Lichtintensität des Gesichtsfeldes wahr, da die verschiedenen Punkte desselben verschiedenen Richtungen der durch den Krystall hindurchgegangenen Lichtstrahlen und daher verschiedenen Polarisationsrichtungen und Phasendifferenzen  $\delta$  der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellensysteme entsprechen.

Wir wollen zunächst  $\delta$  für eine schief auf die Krystallplatte auftreffende linear polarisirte Welle berechnen. Die Platten normale schliesse mit der Normale der einfallenden Welle den Winkel  $i$ , mit der der gebrochenen Wellen die Winkel  $r_1$  und  $r_2$  ein (Fig. 484).

Die Phasendifferenz  $\delta$  der beiden aus der Platte (in der Richtung  $i$  mit der

<sup>1)</sup> Die Apparate sind etwas verschieden construiert, je nachdem sie zur Beobachtung grösserer Krystallpräparate oder kleinerer dienen sollen. Im letzteren Falle ist ein Mikroskop mit ihnen verbunden. Die Apparate der ersten Art sind im Wesentlichen von NÖRREBERG angegeben (cf. J. GRAILICH, Krystall-optische Untersuchungen, Wien 1858, pag. 42. — E. REUSCH, Ueber Linsen und Linsensysteme zur Beobachtung der Farbenringe im polarisirten Lichte. Bericht der 34. Naturf. Vers. Karlsruhe 1858. — A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 69, pag. 87, 1863), die der letzteren von G. B. AMICI [Ann. de chim. et de phys. (3) 12, pag. 114. 1844. POGG. Ann. 64, pag. 472. 1845]. Wegen der ausführlicheren Beschreibung und technischen Ausführung dieser Apparate vergl. TH. LIEBISCH, physikalische Krystallographie, Leipzig 1891, pag. 450—455, und Bericht über die wiss. Instr. auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, pag. 342 u. ff. — C. KLEIN (Ber. d. Berl. Acad. 24, pag. 435. 1891), construirte ein Polarisationsmikroskop, welches ermöglicht, die Krystalle bei freier Drehung in Medien von ähnlicher Brechbarkeit zu untersuchen, was mancherlei Vortheile bietet.

Normale) austretenden Wellen  $W_1$  und  $W_2$  ist offenbar, falls  $o$  resp.  $e$  die Geschwindigkeit der Wellen im Krystall,  $\omega_0$  die derselben im umgebenden Medium (der Luft) bedeutet:

$$\delta = \frac{2\pi}{T} \left( \frac{BD}{e} + \frac{DK}{\omega_0} - \frac{BC}{o} \right)$$

(betreffs der Bedeutung der Buchstaben vergl. die Figur.  $CK$  ist rechtwinklig zu  $DK$  angenommen). Nun ist  $BD = l/\cos r_2$ ,  $BC = l/\cos r_1$ , wobei  $l$  die Dicke der Krystallplatte bezeichnet, ferner ist  $DK = DC \sin i = (BC \sin r_1 - BD \sin r_2) \sin i$ , daher

$$\delta = \frac{2\pi}{T} l \left[ \left( \frac{\sin i \sin r_1}{\omega_0} - \frac{1}{o} \right) \frac{1}{\cos r_1} - \left( \frac{\sin i \sin r_2}{\omega_0} - \frac{1}{e} \right) \frac{1}{\cos r_2} \right].$$

Da nun nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin i}{\omega_0} = \frac{\sin r_1}{o} = \frac{\sin r_2}{e},$$

so ist

$$\delta = \frac{2\pi}{T} l \left( \frac{\cos r_2}{e} - \frac{\cos r_1}{o} \right). \tag{59}$$

Führt man nun die Winkel ein, welche die Wellennormalen im Krystall mit den optischen Axen desselben bilden, so lassen sich nach den Gleichungen (12') dieses Abschnittes die Grössen  $o$  und  $e$  rational durch  $a + c$ ,  $a - c$  und jene Winkel ausdrücken. Beschränkt man sich auf erste Ordnung in  $a - c$ , was bei der Kleinheit der Doppelbrechung bei den in der Natur vorkommenden Mineralien stets zulässig ist, so wird für  $\rho = l/\cos r_1$ ,

$$\delta = \frac{2\pi}{T} \frac{a - c}{\left( \frac{a + c}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} \rho \sin g \sin g', \tag{60}$$

wobei nun  $g$  und  $g'$  die Winkel bedeuten, welchen eine, gleichgültig welche, der beiden gebrochenen Wellennormalen mit den optischen Axen einschliesst. Erstere sind also in der hier angewandten Näherung als gleichgerichtet anzusehen, und  $\rho$  bedeutet daher den von den gebrochenen Wellennormalen im Krystall zurückgelegten Weg ( $BD = BC$ ).

Setzt man nun ausserdem noch voraus, dass der Winkel  $r$  nur klein sei, d. h. das Licht nicht sehr schief einfalle, so wird die Intensität des Lichtes, wie wir dieselbe im Polarisationsapparate an einem Punkte  $M$  der Brennebene des nach dem Analysator zuliiegenden Linsensystems beobachten, nach welchem Lichtstrahlen gelangen, deren Winkel mit der Plattennormale  $i$  ist, durch die Formel (52) gerade so, wie bei senkrecht einfallendem Lichte gegeben. Denkt man sich sämtliche die Krystallplatte durchsetzende Lichtstrahlen durch einen einzigen Punkt  $O$  der ersten Begrenzungsfläche der Platte hindurchgehend, so gelangt nur ein Lichtstrahl zum Punkte  $M$ . Derselbe schneidet die zweite Begrenzungsfläche der Platte in dem Punkte  $M'$  (Spur des Punktes  $M$ ). Wenn wir auf diese Weise jedem Punkte  $M$  der Brennebene einen Punkt  $M'$  der Plattengrenze zuordnen, so sind Figuren, deren Punkte zugeordnete sind, einander ähnlich. Wir werden daher uns jetzt immer auf die Punkte  $M'$  der zweiten Krystallgrenze beziehen. Bezieht man ferner die Lage der Polarisations Ebenen des Polarisators ( $P$ ), Analysators ( $A$ ) und des Krystalls ( $H_1$  und  $H_2$ ) auf eine feste Gerade  $\wp$  in der Krystallfläche, indem man setzt  $\angle (P\wp) = \beta$ ,  $\angle P(A\wp) = \alpha$ ,  $\angle (H_1\wp) = \eta$ , so ist die Intensität im Punkte  $M'$ :

$$J^2 = a^2 [\cos^2 (\beta - \alpha) - \sin 2 (\beta - \eta) \sin 2 (\alpha - \eta) \sin^2 \frac{1}{2} \delta]. \tag{61}$$

Gehen wir von einem Punkte  $M'$  zu einem anderen  $M''$  über, so ändert sich damit  $\delta$  und  $\eta$ . Hieraus ergibt sich, dass zwei Curvenschaaren für die Interferenzerscheinung charakteristisch sind: die Curven gleichen Gangunterschiedes,  $\delta = \text{const}$ , und die Curven gleicher Polarisationsrichtung oder Isogyren,  $\eta = \text{const}$ .

Erstere Curvenschaar wird durch den Schnitt der zweiten Grenzfläche des Krystalls mit einer um  $O$  beschriebenen Fläche gleichen Gangunterschiedes ( $\delta = \text{const}$ ) geliefert. Falls man  $M'$  auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $x, y, z$  um  $O$  als Coordinatenanfang bezieht und die Richtungscosinus der Plattennormalen  $p_1, p_2, p_3$  nennt, so wird die zweite Grenzfläche des Krystalls durch die Gleichung

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = l \quad (62)$$

dargestellt, dagegen ist die Polargleichung der Fläche gleichen Gangunterschiedes

$$\rho \sin g \sin g' = C, \quad (63)$$

worin  $C$  eine Constante und  $\rho$  den von  $O$  ausgehenden Radiusvector der Fläche bedeutet, was sich sofort aus der Gleichung (60) ergibt.

Wie die Gleichung (63) lehrt, ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes von der Orientirung der Krystallplatte unabhängig. Die Schnittcurven der Ebene (62) mit der Fläche

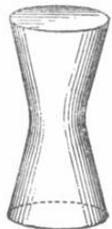
$$\rho \sin g \sin g' = kC,$$

ist derjenigen Curve ähnlich, welche man als Schnitt der Fläche (63) mit einer nur um  $l/k$  vom Coordinatenanfang entfernten, jedoch dieselbe Richtung ( $p_1, p_2, p_3$ ) besitzenden Ebene erhält, die linearen Dimensionen der letzteren Curve sind nur  $k$ mal kleiner, als die der ersteren. Deshalb erhält man alle Curven gleichen Gangunterschiedes auf der Krystallfläche, wenn man eine einzige Fläche gleichen Gangunterschiedes durch ein System von zu jener Grenze parallelen Ebenen schneidet und die Schnittcurven dann in dem umgekehrten Verhältniss des Abstandes der Ebenen vom Coordinatenanfangspunkte vergrößert.

Für einaxige Krystalle ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin^2 g = C, \quad (64)$$

wo  $g$  den Winkel bedeutet, welchen der Radiusvector  $\rho$  mit der optischen Axe bildet. Die Fläche ist nicht geschlossen, sondern hat die optische Axe zu einer Asymptote. Die Fläche ist eine Rotationsfläche und hat ungefähr die in der beistehenden Figur angegebene Gestalt (Fig. 485).



(Ph. 485.)

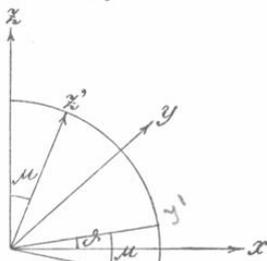
Die Gleichung dieser Fläche in rechtwinkligen Coordinaten lautet, da  $\sin^2 g$

$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$  ist, falls man die  $z$ -Axe in die optische Axe legt:

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C. \quad (65)$$

Um die Gleichung der Schnittcurven dieser Fläche mit der Ebene (62) zu finden, wollen wir nun ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem einführen ( $x', y', z'$ ), dessen  $z'$ -Axe in die Plattennormale, dessen  $x'$ -Axe in den Hauptschnitt fällt. Bildet erstere mit der optischen Axe den Winkel  $\mu$  und ist  $\vartheta$  der Winkel, unter welchem die  $x$ -Axe gegen den Hauptschnitt geneigt ist (cf. Fig. 486), so ist zu setzen:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \mu \cos \vartheta - y' \sin \vartheta + z' \sin \mu \cos \vartheta, \\ y &= x' \cos \mu \sin \vartheta + y' \cos \vartheta + z' \sin \mu \sin \vartheta, \\ z &= -x' \sin \mu + z' \cos \mu. \end{aligned} \quad (66)$$



(Ph. 486.)

Die Gleichung (65) wird daher unter Rücksicht darauf, dass für die gesuchte Schnittcurve  $z' = l$  ist:

$$\frac{x'^2 \cos^2 \mu + y'^2 + l^2 \sin^2 \mu + x'l \sin 2\mu}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + l^2}} = C. \quad (67)$$

Nun haben wir stets vorausgesetzt, dass die gebrochenen Wellennormalen nur kleine Winkel mit der Plattennormalen einschliessen sollen. Es ist daher  $x'^2 + y'^2$  klein gegen  $l^2$ . Beschränkt man sich auf erste Ordnung, so wird die Gleichung (67):

$$x'^2(\cos^2 \mu - \frac{1}{2} \sin^2 \mu) + y'^2(\cos^2 \mu + \frac{1}{2} \sin^2 \mu) + x'l \sin 2\mu = Cl - l^2 \sin^2 \mu. \quad (68)$$

Die Curven gleichen Gangunterschiedes sind also für alle Werthe der Phasendifferenz, d. h. alle Werthe von  $C$ , concentrische Kegelschnitte, deren Centrum im Hauptschnitt liegt.

Für  $\mu = 0$  (Platte senkrecht zur optischen Axe) sind dieselben:

$$x'^2 + y'^2 = Cl, \quad (69)$$

d. h. concentrische Kreise um die optische Axe als Mittelpunkt.

Für

$$0 < \mu < \text{arc tang } \sqrt{2}$$

sind die Curven Ellipsen, für

$$\mu = \text{arc tang } \sqrt{2} = 54^\circ 44'$$

sind sie Parabeln, für

$$\text{arc tang } \sqrt{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$$

sind die Curven Hyperbeln.

Für zweiaxige Krystalle ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin g \sin g' = C. \quad (64')$$

Dieselbe besitzt die in der beistehenden Figur angedeutete Gestalt. In Richtung der beiden optischen Axen erstreckt sie sich ins Unendliche (Fig. 487).

Diese Fläche wird durch Ebenen, welche zu einer der beiden Mittellinien senkrecht stehen, in lemniscatenförmigen Curven geschnitten. Durch Ebenen, welche zur Ebene der optischen Axe parallel sind, in hyperbolischen Curven. In der Mitte des Gesichtsfeldes haben letztere unabhängig von der Grösse des Winkels der optischen Axen die Gestalt von zwei Schaaren gleichseitiger Hyperbeln.

Liegt die gebrochene Wellennormale sehr nahe an einer optischen Axe ( $D$ ), so ist  $g'$  nahezu gleich dem doppelten Winkel  $2V$  der optischen Axen. Daher ist in der Nähe von  $D$  die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin g = \frac{C}{\sin 2V}.$$

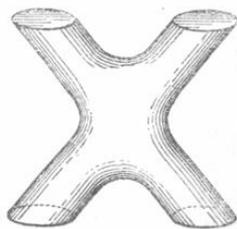
Diese Fläche wird durch Ebenen, welche senkrecht zur Axe  $D$  stehen, in Kreisen geschnitten. Führt man gerade wie vorhin bei den einaxigen Krystallen ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen  $x' y'$ -Ebene in die Plattengrenze fällt, so ist

$$\rho \sin g = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

daher die Gleichung der Curven gleichen Gangunterschiedes

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{C}{\sin 2V}. \quad \sqrt{\rho} \quad (69')$$

Es soll jetzt die Gleichung der Isogyren abgeleitet werden, für welche also  $\eta = \text{const}$  ist. Auch diese können als Schnittcurven der zweiten Grenz-



(Ph. 487.)

fläche  $G_2$  der Krystallplatte mit einer gewissen Fläche, der Isogyrenfläche, angesehen werden, zu der wir durch folgende Ueberlegung gelangen: die Polarisations Ebenen, deren Schnittgraden mit  $G_2$  eine vorgeschriebene Richtung  $\eta$  haben sollen, liegen parallel  $\eta$ ; ihre Normalen sind also auf  $\eta$  senkrecht. Diese fallen nun aber, sowohl im FRESNEL'schen, wie im NEUMANN'schen System, mit der Schwingungsrichtung einer der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen zusammen, falls man, wie wir es immer gethan haben, den Richtungsunterschied der beiden gebrochenen Wellennormalen vernachlässigt. Daher kann man die Isogyrenfläche definiren als den geometrischen Ort aller vom Einfallspunkte  $O$  in der Eintrittsfläche  $G_1$  der Krystallplatte ausgehenden Wellennormalen, für welche eine der zugehörigen Schwingungsrichtungen senkrecht auf der gegebenen Geraden  $\eta$  steht.

Wir denken uns durch  $O$  ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen Axen mit den optischen Symmetriemaxen des Krystalls zusammenfallen. Nennt man, wie wir es früher gethan,  $m, n, p$  die Richtungscosinus der Wellennormalen in Bezug auf dieses Coordinatensystem,  $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_o$  resp.  $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e, \mathfrak{P}_e$  die der (FRESNEL'schen) Schwingungsrichtungen, so ist

$$m \mathfrak{M}_o + n \mathfrak{N}_o + p \mathfrak{P}_o = 0, \quad (70)$$

$$m \mathfrak{M}_e + n \mathfrak{N}_e + p \mathfrak{P}_e = 0, \quad (71)$$

$$\mathfrak{M}_o \mathfrak{M}_e + \mathfrak{N}_o \mathfrak{N}_e + \mathfrak{P}_o \mathfrak{P}_e = 0. \quad (72)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (6) dieses Abschnittes (pag. 688), welche man sich für die Grössen  $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_o$  gebildet denken mag, mit den bezüglichen Faktoren  $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e, \mathfrak{P}_e$  und Addition folgt nun unter Rücksicht auf (70) und (72):

$$a \mathfrak{M}_o \mathfrak{M}_e + b \mathfrak{N}_o \mathfrak{N}_e + c \mathfrak{P}_o \mathfrak{P}_e = 0. \quad (73)$$

Aus dieser und der Gleichung (72) folgt:

$$\mathfrak{M}_o \mathfrak{M}_e : \mathfrak{N}_o \mathfrak{N}_e : \mathfrak{P}_o \mathfrak{P}_e = b - c : c - a : a - b. \quad (74)$$

Sind nun  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die Richtungscosinus von  $\eta$ , so soll auch nach der Eigenschaft der Isogyrenfläche sein:

$$\mathfrak{M}_o \sigma_1 + \mathfrak{N}_o \sigma_2 + \mathfrak{P}_o \sigma_3 = 0. \quad (75)$$

Die Gleichungen (70), (71), (74), (75) gestatten eine Elimination der Grössen  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ .

Zunächst folgt aus (71) und (74):

$$\frac{m(b-c)}{\mathfrak{M}_o} + \frac{n(c-a)}{\mathfrak{N}_o} + \frac{p(a-b)}{\mathfrak{P}_o} = 0, \quad (76)$$

und aus (70) und (75):

$$\mathfrak{M}_o : \mathfrak{N}_o : \mathfrak{P}_o = n \sigma_3 - p \sigma_2 : p \sigma_1 - m \sigma_3 : m \sigma_2 - n \sigma_1. \quad (77)$$

Setzt man diese Werthe in (76) ein, so entsteht die Gleichung der Isogyrenfläche in Polarcoordinaten:

$$\frac{m(b-c)}{n \sigma_3 - p \sigma_2} + \frac{n(c-a)}{p \sigma_1 - m \sigma_3} + \frac{p(a-b)}{m \sigma_2 - n \sigma_1} = 0. \quad (78)$$

Führt man rechtwinklige Coordinaten ein und nennt  $V$  den Winkel zwischen den optischen Axen und der  $z$ -Axe (Mittellinie), so wird unter Rücksicht auf die Gleichungen (13) die Gleichung (78) zu:

$$\frac{x \cos^2 V}{y \sigma_2 - z \sigma_3} - \frac{y}{z \sigma_1 - x \sigma_3} + \frac{z \sin^2 V}{x \sigma_2 - y \sigma_1} = 0. \quad (79)$$

Die Isogyrenfläche ist also eine Kegelfläche dritter Ordnung, welche durch die beiden optischen Axen ( $y = 0, x = \pm z \tan V$ ) hindurchgeht. Sie ist kein festes, nur von den optischen Constanten des Krystalls abhängendes Gebilde,

wie die Oberfläche gleichen Gangunterschiedes, sondern sie ist vielmehr von der Orientirung der Krystallplatte abhängig, da die Richtung, deren Cosinus  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sind, senkrecht zur Plattennormale (mit den Richtungscosinus  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ) sein muss, d. h. die Beziehung besteht:

$$\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2 + \sigma_3 \rho_3 = 0. \quad (80)$$

Die Gleichungen (79) und (80) stellen in Verbindung mit der Gleichung (62), welche die Grenzebene  $G_2$  der Krystallplatte repräsentirt, die Gleichungen der auf letzterer verlaufenden Curven gleicher Polarisationsrichtung, oder Isogyren, dar.

Für einaxige Krystalle ist  $V = 0$ , falls die  $z$ -Axe zur optischen Axe gewählt wird. Die Isogyrenfläche (79) zerfällt daher in die Ebene

$$x\sigma_2 - y\sigma_1 = 0 \quad (79')$$

und den Kegel zweiten Grades:

$$(x^2 + y^2)\sigma_3 - z(x\sigma_1 + y\sigma_2) = 0. \quad (79'')$$

Führt man wie oben (pag. 724) ein neues Coordinatensystem  $x', y', z'$  ein, dessen  $z'$ -Axe in die Plattennormale fällt, während die  $x'$ -Axe im Hauptschnitt liegt, haben  $\mu$  und  $\vartheta$  die früheren Bedeutungen ( $\mu$  gleich dem Winkel zwischen Plattennormale und optischer Axe) und ist  $\nu$  der Winkel zwischen der Richtung  $\eta$  und dem Hauptschnitt, so gelten für  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die Relationen:

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_2 \cos \vartheta &= \sin \nu, \\ \sigma_1 \cos \vartheta + \sigma_2 \sin \vartheta + \sigma_3 \cotg \mu &= 0, \end{aligned} \quad (80')$$

von denen die erste aussagt, dass der Winkel zwischen der Richtung  $\eta$  und  $y'$  gleich dem Complementwinkel von  $\nu$  ist, während die letzte Gleichung aus (80) folgt, d. h. die Rechtwinkligkeit von  $\eta$  und  $z'$  ausspricht. Aus den Gleichungen (80') ergibt sich durch Quadriren und Addiren:

$$\sigma_3 = \sin \mu \cos \nu.$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (66) in (79') und (79'') ergibt sich, wenn man  $z' = l$  setzt, die Gleichung der aus (79') folgenden Isogyre zu:

$$(x' \cos \mu + l \sin \mu) \sin \nu + y' \cos \mu \cos \nu = 0, \quad (79''')$$

welche eine Schaar von Graden darstellt, welche durch den Austrittspunkt der optischen Axe

$$(y' = 0, \quad x' = -l \tan \mu)$$

gehen, während die Gleichung der aus (79'') hervorgehenden Isogyren die Gestalt annimmt.

$$y'^2 \sin \mu \cos \nu + x' y' \sin \mu \sin \nu - y' l \cos \mu \sin \nu + l \cos \nu (x' \cos \mu + l \sin \mu) = 0. \quad (79''')$$

Diese Gleichung stellt eine ebenfalls durch den Austrittspunkt der optischen Axe gehende hyperbolische Curvenschaar dar, deren Asymptoten der Hauptschnitt ( $y' = 0$ ) und die Grade  $y' + x' \tan \nu = 0$  sind.

Die allgemeine Discussion der Isogyren für zweiaxige Krystalle möge unterbleiben, da sie complicirtere Resultate liefert.

Wenden wir uns jetzt zurück zur Betrachtung der durch die Platte hervorgerufenen Interferenzfigur. Die Lichtintensität in einem beliebigen Punkte derselben wird durch den Ausdruck (61) dargestellt. Die ursprüngliche Lichtstärke, wie sie ohne Zwischenschaltung der Platte beobachtet würde, tritt ein an denjenigen Stellen, für welche ist

$$\sin 2(\beta - \eta) \sin 2(\alpha - \eta) \sin^2 \frac{1}{2} \delta = 0.$$

Hierdurch sind defnirt: 1) die Curvenschaar gleichen Gangunterschiedes, für welche  $\delta = 2h\pi$  beträgt, 2) die beiden Isogyren, für welche  $\eta = \beta$  oder  $\eta = \alpha$  ist, d. h. die Verbindungscurven derjenigen Punkte, in denen die Polari-

sationsrichtungen parallel oder senkrecht zu denen des Polarisators oder Analysators liegen. Die erstere Curvenschaar wird die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes genannt, die letztere die Hauptisogyren. Erstere sind in ihrer Lage unabhängig von der Orientirung der Platte gegen Polarisator ( $P$ ) und Analysator ( $A$ ), in ihrer Lichtstärke dagegen abhängig von dem Winkel ( $PA$ ). Die Hauptisogyren sind mit der Orientirung der Platte gegen  $P$  und  $A$  variabel, sie kreuzen sich, wie alle Isogyren, in den Spuren der optischen Axen. Sie trennen die Gebiete des Gesichtsfeldes, in denen die Intensität kleiner oder grösser als die ursprüngliche ist. Wenn die Polarisations Ebenen des Polarisators und Analysators einander parallel sind ( $\beta = \alpha$ ) oder auf einander senkrecht sind ( $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ), fallen die beiden Hauptisogyren zusammen. Im ersteren Falle ist die Intensität in jedem Punkte des Gesichtsfeldes, der keiner der beiden betrachteten Curvenschaaren angehört, kleiner, im letzteren Falle dagegen grösser als die ursprüngliche. Die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes und die Hauptisogyren zerschneiden das Gesichtsfeld in krummlinig begrenzte Felder. Innerhalb jedes derselben giebt es eine Stelle, in welcher die Intensität ein Maximum resp. Minimum erreicht. Die Curven gleicher Lichtstärke umgeben diese Punkte als geschlossene Curven. Ihre Grenzlagen sind die Feldergrenzen, d. h. die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes und die Hauptisogyren<sup>1)</sup>.

Die letzteren sind in ihrer Lage nur wenig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes abhängig, sie erscheinen daher bei einfallendem weissen Lichte ungefärbt (weiss, schwarz oder nur farbig gesäumt) und werden daher auch achromatische Linien genannt. Die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes sind dagegen stark von der Wellenlänge abhängig, jede Curve derselben weist jedoch bei einfallendem weissen Lichte innerhalb eines zwischen den Hauptisogyren liegenden Abschnittes, falls die Dispersion der optischen Axe nicht bedeutend ist, dieselbe Farbe auf. Die Farben sind die bei den NEWTON'schen Ringen beobachteten<sup>2)</sup>. Diese Curven werden daher auch isochromatische Linien genannt. Ihre Farbe schlägt bei Ueberschreitung einer Hauptisogyre in die complementäre um, nur bei Zusammenfallen der letzteren (d. h. bei parallelen oder gekreuzten Nicols) ist die Farbe einer Hauptcurve gleichen Gangunterschiedes längs ihres ganzen Verlaufs dieselbe.

Es mögen nun die Interferenzbilder bei speciellen Lagen der Krystallplatte erläutert werden.

Bei einer Platte eines einaxigen Krystalls sind, wie oben erläutert ist, die isochromatischen Curven Kegelschnitte. Dieselben werden zu Kreisen, falls die optische Axe in die Plattennormale fällt ( $\mu = 0$ ). Wie die Gleichung (69) lehrt,

1) Wegen weiterer geometrischer Eigenschaften der Curven gleicher Lichtstärke vergl. R. T. GLAZEBROOK (Proc. Cambr. Phil. Soc. 4, pag. 299. 1883); C. SPURGE (ibid. 5, pag. 74. 1885; Trans. Cambr. Phil. Soc. 14, pag. 63. 1885) und E. LOMMEL (POGG. Ann. 120, pag. 69. 1863. — WIED. Ann. 39, pag. 258. 1890).

2) Wenn die Dispersion der optischen Axen bedeutend ist, so können die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes für die verschiedenen Wellenlängen zum Durchschnitt gelangen. In diesem Falle haben die im weissen Licht beobachteten Isochromaten eine von den Curven gleichen Gangunterschiedes abweichende Gestalt, auch die Farben derselben gehören nicht mehr den NEWTON'schen an. Dieser Fall tritt z. B. sehr deutlich bei den oben pag. 691 erwähnten rhombischen Krystallen ein, für welche die Ebene der optischen Axen mit der Wellenlänge wechselt.

verhalten sich die Radien derselben wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen, denn aus der Bedingung  $\delta = 2h\pi$ , folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (60) für die nach (64) definierte Constante  $C$ :

$$C = hT \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a-c}{2}},$$

d. h. es sind nach (69) die Quadrate der Radien der isochromatischen Kreise gegeben durch:

$$x'^2 + y'^2 = hT \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a-c}{2}}.$$

Durch Messung dieser Ringdurchmesser kann man daher  $a-c$ , d. h. die Differenz der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten berechnen, falls man eine derselben kennt. Die Lichtgeschwindigkeit  $\sqrt{a}$  kann man z. B. nach der DE CHAULNES'schen Methode bestimmen (cf. pag. 706). Man beobachtet diese Ringe am besten im monochromatischen Lichte bei gekreuzten Nicols, wo sie vollkommen schwarz erscheinen.

Die bisherige Ableitung setzt voraus, dass der Winkel  $\varphi$  der einfallenden (und austretenden) Strahlen mit der Plattennormale so klein sei, dass  $\sin^2 \varphi$  neben 1 zu vernachlässigen ist. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so ergibt sich für die Winkel  $\varphi$  der an der Stelle der Ringe austretenden Strahlen die strengere Formel<sup>1)</sup>:

$$\frac{l}{\lambda_0} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi}} \frac{c-a}{2\omega_0 \sqrt{a}} = h, \quad (81)$$

$$h = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Die Winkel  $\varphi$  misst man am besten, indem man die Krystallplatte um eine zur optischen Axe des Polarisationsapparates senkrechte Axe dreht. Zur Messung dieser Drehungswinkel dienen besondere Apparate (Axenwinkelapparate oder Stauroskope), die weiter unten bei Messung des Axenwinkels zweiaxiger Krystalle besprochen werden sollen.

Die Isogyren werden für eine senkrecht zur optischen Axe geschliffene einaxige Platte nach (79''') und (79''''') durch die Gleichungen dargestellt

$$x' \sin \nu + y' \cos \nu = 0, \quad x' \cos \nu - y' \sin \nu = 0;$$

Die Hauptisogyren sind also 4 Grade, welche durch das Centrum der Platte parallel und senkrecht zu den Polarisations Ebenen  $P$  und  $A$  des Polarisators und Analysators verlaufen. Sind letztere parallel oder senkrecht zu einander, so reduciren sich die 4 Grade auf zwei zu einander senkrechte; im ersten Falle (parallele Nicols) durchzieht also ein helles Kreuz, im letzten Falle (gekreuzte Nicols) ein schwarzes Kreuz die ringförmige Interferenzfigur<sup>2)</sup>.

Wächst der Winkel  $\mu$  der Plattennormalen mit der optischen Axe, so nehmen die isochromatischen Curven zunächst ellipsenförmige Gestalt an, während die

<sup>1)</sup> BAUER, Berl. Ber., pag. 958. 1881.

<sup>2)</sup> Sehr schöne Reproduktionen dieser und der im Nachfolgenden beschriebenen Figuren nach photographischen Aufnahmen finden sich in den Tafeln, welche der citirten «physikalischen Krystallographie» von TH. LIEBISCH beigegeben sind. — Durch gewisse Anordnungen (Total-reflexion) kann man diese Interferenzfiguren ohne polarisirende Vorrichtungen in einem Kalkspathpräparat sichtbar machen. Vergl. S. P. THOMPSON, Chem. News 61, pag. 155. 1890.

achromatischen Linien annähernd die Gestalt von Graden besitzen, welche durch den Austrittspunkt der optischen Axe gehen. Für  $\mu = \text{arc tang } \sqrt{2}$  werden die isochromatischen Linien Parabeln. Dieser Werth von  $\mu$  hängt indess, falls man sich nicht nur auf erste Ordnung in  $a - c$  beschränkt, etwas von den optischen Constanten des Krystalls ab. G. S. OHM<sup>1)</sup> hat diesen Werth von  $\mu$  für Kalkspath zu  $53^\circ 16'$ , für Quarz zu  $54^\circ 50'$  berechnet.

Für grössere Werthe von  $\mu$  werden die isochromatischen Linien zu Hyperbeln (cf. pag. 725), und zwar zu gleichseitigen für  $\mu = \frac{\pi}{2}$ . In letzterem Falle, d. h. für eine zur optischen Axe parallel geschliffene Platte<sup>2)</sup>, werden nach (97''') die Isogyren zu:

$$y'^2 + x' y' \text{tg } \nu + l^2 = 0,$$

d. h. ungleichseitige Hyperbeln. Man kann dieselben dann am besten beobachten, wenn sie durch die isochromatischen Linien nicht gestört werden, was bei einer Platte der Fall ist, die entweder zu dünn oder zu dick ist, um deutliche Färbung im weissen Lichte zu zeigen (cf. pag. 717). Bei gekreuzten Nicols kennzeichnen sich die Hauptisogyren, falls der Hauptschnitt entweder zu  $P$  oder  $A$  parallel liegt, als ein schwarzes Kreuz ( $x' = 0, y' = 0$ ). Bei Drehen der Platte zerbricht dasselbe in zwei hyperbolische Schatten, welche sich in diejenigen beiden gegenüberliegenden Quadranten zurückziehen, in die bei der Drehung die optische Axe des Krystalls eingetreten ist. Hierdurch hat man daher ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Lage der optischen Axe bei einer derselben parallel geschliffenen Platte<sup>3)</sup>.

Es möge nun eine Platte eines zweiaxigen Krystalls betrachtet werden, und zwar sei sie senkrecht zur ersten Mittellinie ( $z$ -Axe) geschliffen. Wie wir oben sahen, sind die Isochromaten lemniscatenartige Curven, und zwar bestehen diejenigen unter ihnen, für welche der Gangunterschied klein ist, die also dicht an einer der optischen Axen verlaufen, aus zwei getrennten, dieselben umschliessenden Curven, da sie als Durchschnitte der auf pag. 725 dargestellten Fläche gleichen Gangunterschiedes mit einer weit vom Mittelpunkt derselben, zur  $z$ -Axe senkrechten, Ebene erhalten werden. Um die Isochromaten, für welche der Gangunterschied grösser ist, zu erhalten, können wir nach der pag. 724 angestellten Ueberlegung die schneidende Ebene allmählich an den Mittelpunkt  $O$  der Fläche gleichen Gangunterschiedes heranrücken lassen, müssen dann nur die Schnittcurve in demselben Verhältniss, wie die Entfernung der Ebene von  $O$  abnimmt, vergrössern. Mit wachsendem Gangunterschied entfernen sich daher die beiden Curvenstücke einer Isochromate von den Spuren der optischen Axen, gehen durch eine lemniscatenförmige Curve mit Doppelpunkt hindurch, und nehmen schliesslich die Gestalt von einfach geschlossenen, beide optischen Axen zugleich umfassenden Curven an.

In der Gleichung (79) der Isogyrenfläche ist  $\sigma_3 = 0$  zu setzen und  $\sigma_1 = \cos \zeta$ ,  $\sigma_2 = \sin \zeta$ , falls  $\zeta$  den Winkel bedeutet, welchen die Polarisationsrichtung  $\eta$  mit der Ebene ( $xz$ ) der optischen Axen einschliesst. Dadurch wird die Gleichung der Isogyren (es ist  $z = l$  gesetzt):

$$x^2 \cos^2 V - xy (\cos^2 V \cotg \zeta - \text{tg } \zeta) - y^2 = l^2 \sin^2 V.$$

<sup>1)</sup> G. S. OHM, Münch. Abh. 7, pag. 43 u. 265. 1853.

<sup>2)</sup> SOLEIL erfand ein Verfahren, um mit grosser Genauigkeit zu prüfen, ob eine Platte parallel zur Axe geschliffen ist, cf. VERDET, Wellentheorie, Deutsch von K. EXNER, Bd. 2., pag. 141.

<sup>3)</sup> Dies Verfahren ist von E. LOMMEL angegeben in WIED. Ann. 18, pag. 56. 1883.

Demnach ist jede Isogyre eine durch die Spur der optischen Axen ( $y = 0$ ,  $x = \pm l \operatorname{tg} V$ ) gehende Hyperbel, deren Asymptoten durch die Gleichungen:

$$x \cos^2 V + y \operatorname{tg} \zeta = 0, \quad x - y \operatorname{cotg} \zeta = 0$$

dargestellt werden. Letztere Asymptote fällt daher mit der Polarisationsrichtung zusammen, erstere ist zu ihr bei kleinen Axenwinkeln ( $\cos V = 1$ ) senkrecht, d. h. die Isogyren sind in diesem Falle gleichseitige Hyperbeln.

Fällt bei gekreuzten Nicols ( $P \perp A$ ) die Ebene der optischen Axen mit einer der Ebenen  $P$  oder  $A$  zusammen, so ist für die Hauptisogyren  $\zeta = 0, \frac{\pi}{2}$ .

Dieselben sind daher die beiden Coordinatenrichtungen  $x = 0, y = 0$ . Die bei einfallendem weissen Lichte farbig erscheinenden Lemniscaten sind daher von einem schwarzen Kreuz durchzogen, dessen Arme in die optischen Symmetrieebenen, d. h. die Polarisations Ebenen  $A$  und  $P$  fallen.

Halbirt bei gekreuzten Nicols die Ebene der optischen Axen den Winkel der Polarisations Ebenen  $P$  und  $A$  (sogen. Diagonalstellung der Platte), so ist für die Hauptisogyren  $\zeta = \pm \frac{\pi}{4}$  zu setzen.

Die Hauptisogyren sind in diesem Falle bei kleinem Axenwinkel ( $\cos V = 1$ ) eine durch die optischen Axen gehende gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten in die Ebenen  $A$  und  $P$  fallen. Bei grösserem Axenwinkel zerfällt diese eine Hyperbel in zwei. Dieselbe schneiden die Ebene der optischen Axen nahezu rechtwinklig (streng für  $\cos V = 1$ ); diese die Interferenzfigur durchziehenden schwarzen Linien sind sehr geeignet, den scheinbaren Winkel der optischen Axen zu messen, d. h. denjenigen Winkel  $2V'$ , welchen zwei aus der Platte austretende Wellennormalen mit einander bilden, welche im Innern derselben in den Richtungen der optischen Axen verlaufen sind, d. h. dort den Winkel  $2V$  miteinander gebildet haben. Da die Geschwindigkeit der Wellennormalen im Krystall in Richtung einer optischen Axe  $\sqrt{b}$  ist, so ergibt sich  $V$  aus dem zu messenden  $V'$  nach dem Brechungsgesetz:

$$\sin V = \sin V' \cdot \frac{\sqrt{b}}{\omega_0}. \quad (82)$$

Man ermittelt  $V$ , indem man den Drehungswinkel an einem Theilkreise abliest, um welchen man die Krystallplatte um eine zur Ebene der optischen Axen senkrechte Axe (optische Symmetrieaxe  $y$ ) drehen muss, damit die schwarzen Linien, welche die Spuren der optischen Axen in der Diagonalstellung der Platte kennzeichnen, mit einem Fadenkreuz zur Deckung gelangen, welches in der Brennebene des zweiten Sammellinsensystems angebracht ist. Die Instrumente, welche man zu diesen Zwecken verwendet, heissen Axenwinkelapparate oder Stauroskope<sup>1)</sup>. Ist der Winkel  $2V$  der optischen Axen so gross, dass Lichtwellen, welche in ihrer Richtung verlaufen, aus dem Krystall in Luft nicht austreten, so beobachtet man die Krystallplatte in einem Kästchen, in welches man

<sup>1)</sup> Betreffs der genaueren Beschreibung dieser Apparate vergl. LASPEYRES, Ztschrft. f. Instrumkde. 2, pag. 14 u. 54. 1882. — A. DES CLOIZEAUX, Ann. des mines (6) 6, pag. 572. 1864. — POGG. Ann. 126, pag. 403. 1865. — V. VON LANG, Wien. Ber. 45, pag. 587. 1862; 55, pag. 545. 1867. — Rep. dr. Exper. Phys. 3, pag. 201. 1867. — P. GROTH, POGG. Ann. 144, pag. 49. 1871. — TH. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 180. 1885. — Ber. üb. d. wiss. Instrum. etc., pag. 345. — Physikal. Krystallogr., pag. 489. — Ueber die dioptrischen Bedingungen der Messung von Axenwinkeln vergl. S. CZAPSKI, N. Jahrb. f. Mineral. Beil. Bd. 7, pag. 500. 1891.

Flüssigkeiten von geringerer Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega_0$  giesst. Die feineren Instrumente besitzen ausser dem Polarisator- und Analysatorrohr noch ein seitliches Collimatorrohr, mit Hilfe dessen man den Winkel der Plattennormale gegen die (scheinbaren) optischen Axen bestimmen kann. Kennt man diese, so kann man nach einer von G. KIRCHHOFF<sup>1)</sup> gegebenen Formel den wahren Axenwinkel  $2V'$  berechnen, falls ausserdem noch  $b$  bekannt ist. B. HECHT<sup>2)</sup> hat näher den Einfluss studirt, welchen Orientirungsfehler der Platte, d. h. Abweichungen ihrer Normale von der Richtung der Mittellinie, auf die Bestimmung des Axenwinkels ausüben. Es erweist sich die Formel (82), in welcher  $2V'$  den wirklich an der Platte gemessenen scheinbaren Axenwinkel bedeutet, unverändert gültig, so lange die Plattennormale in der durch die Mittellinie gehenden, auf der Ebene der optischen Axen senkrechten Ebene liegt. Die Orientirungsfehler haben um so geringeren Einfluss, je näher der Brechungsexponent der umgebenden Flüssigkeit gleich dem mittleren  $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$  des Krystalls ist. Es ist daher günstig, den scheinbaren Axenwinkel innerhalb einer die Krystallplatte umgebenden Flüssigkeit zu beobachten. Falls diese einen Brechungsexponenten von 1.6 besitzt, so liegt derselbe für die meisten Krystalle ihrem mittleren Brechungsexponenten hinreichend nahe, um kleine Orientirungsfehler der Platte vernachlässigen zu können.

Die Messung des Winkels der optischen Axen gewährt ebenfalls eine scharfe Prüfung<sup>3)</sup> der FRESNEL'schen Gesetze, falls die optischen Constanten des Krystalls aus Prismenbeobachtungen berechnet sind (cf. pag. 711).

Zur Bestimmung des Axenwinkels ist homogene Beleuchtung anzuwenden<sup>4)</sup>, da derselbe von der Wellenlänge abhängig ist. Im weissen Lichte erscheinen die Hauptisogyren in Folge der Dispersion der optischen Axen farbig gesäumt. Aus der Symmetrie<sup>5)</sup> des Farbenbildes in der Diagonalstellung der Platte kann man direkt einen Schluss auf das Krystallsystem derselben machen. Bei rhombischen Krystallen besitzt das Interferenzbild zwei senkrechte Symmetrielinien, bei monoklinen entweder nur eine [und zwar verläuft dieselbe parallel zur Ebene der optischen Axen, falls diese mit der krystallographischen Symmetrieebene zusammenfällt (sogen. geneigte Dispersion) oder senkrecht zur Ebene der optischen Axen, falls die zweite Mittellinie senkrecht zu der krystallographischen Symmetrieebene steht (horizontale Dispersion)] oder sie besitzt nur ein Symmetriecentrum [falls nämlich die erste Mittellinie senkrecht zur krystallographischen Symmetrieebene steht (gekreuzte Dispersion)]. Bei triklinen Krystallen ist das Interferenzbild völlig unsymmetrisch.

Ist die Krystallplatte senkrecht zur zweiten Mittellinie geschliffen, so ist das Interferenzbild im Allgemeinen von demselben Charakter, wie das vorhin

<sup>1)</sup> G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. 108, pag. 571. 1859. — Vergl. auch TH. LIEBISCH, Ztschrft. für Krystallogr. 7, pag. 304. 1882.

<sup>2)</sup> B. HECHT, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 250. 1887.

<sup>3)</sup> Vergl. G. KIRCHHOFF, l. c. Derselbe hat diese Prüfung am Arragonit vollzogen und befriedigende Uebereinstimmung mit der Theorie erhalten.

<sup>4)</sup> KIRCHHOFF (l. c., pag. 567, Ges. Abhandl. Leipzig, 1882, pag. 577) hat seinem Apparat eine Einrichtung gegeben, vermöge welcher man den Axenwinkel für die FRAUNHOFER'schen Linien bestimmen kann. Vergl. auch V. VON LANG, Wien. Ber. (II), 76, pag. 805. 1877. Ztschr. f. Kryst. 2, pag. 492. 1878. — H. DUFET, Bull. soc. franç. de min. 9, pag. 275. 1886. Journ. de phys. (2) 5, pag. 564. 1886.

<sup>5)</sup> Vergl. pag. 687.

betrachtete. Speciell kennzeichnen sich die Spuren der optischen Axen in der Diagonalstellung der Platte in gleicher Weise wie vorhin durch die schwarzen hyperbolischen Hauptsogyren. Gelangen daher die optischen Axen zum Austritt aus der Platte, so kann man in gleicher Weise wie bei Platten, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffen sind, ihren scheinbaren Winkel  $2V'$  staurosopisch messen. Da die optischen Axen mit der Plattennormale den Winkel  $\frac{\pi}{2} - V$  einschliessen, so ergibt sich  $V$  nach der Gleichung (82):

$$\cos V = \sin V'' \frac{\sqrt{b}}{\omega_0}. \quad (83)$$

Hat man an einer senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffenen Platte den scheinbaren Axenwinkel  $2V'$  gemessen, so kann man mit Hilfe der letzten Gleichung und der Gleichung (82) sowohl den Axenwinkel  $2V$  als  $b$  bestimmen. Denn aus (82) und (83) folgt:

$$\text{tang } V = \sin V' : \sin V'', \quad \frac{\omega_0^2}{b} = \sin^2 V' + \sin^2 V''. \quad (84)$$

Dieses von DES CLOIZEAUX<sup>1)</sup> angegebene Verfahren wird oft angewandt. Wie DE SÉNARMONT<sup>2)</sup> gezeigt hat, kann man überhaupt  $V$  und  $b$  durch Beobachtung des scheinbaren Winkels der optischen Axen an zwei Platten finden, deren Normalen zwei beliebige Lagen in der Ebene der optischen Axen besitzen.

Ist die Krystallplatte parallel zur Ebene der optischen Axen geschliffen, so sind nach pag. 725 die Isochromaten in der Mitte des Gesichtsfeldes gleichseitige Hyperbeln. Jede Isogyre ist eine Hyperbel. Da aber hier die Orientirung der Polarisationsrichtungen innerhalb des Gesichtsfeldes nur sehr geringe Aenderungen erfährt, so tritt bei gekreuzten Nicols die vollkommen dunkle Isogyre viel weniger deutlich hervor, als bei den vorhin betrachteten Platten.

Ist die Krystallplatte senkrecht zu einer optischen Axe geschliffen, so sind nach Gleichung (69') die Isochromaten Kreise um die optische Axe, deren Radien aber nicht, wie bei einaxigen Platten, wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen wachsen, sondern wie die ganzen Zahlen selber<sup>3)</sup>. Auch hinsichtlich der Hauptsogyren unterscheidet sich die Platte des zweiaxigen Krystalls von der des einaxigen.

Legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen  $z'$ -Axe in die Plattennormale (optische Axe), während die  $y'$ -Axe in die alte  $y$ -Axe fällt, so ist zu setzen:

$$x = x' \cos V + z' \sin V, \quad y = y', \quad z = -x' \sin V + z' \cos V.$$

Nennt man  $\nu$  den Winkel der Polarisationsrichtung  $\eta$  mit der Ebene ( $x'z'$ ) der optischen Axen, so ist

$$\sigma_1 = \cos V \cos \nu, \quad \sigma_2 = \sin \nu, \quad \sigma_3 = -\sin V \cos \nu.$$

Dadurch geht die Gleichung (79) der Isogyren, falls man sich auf Punkte in der Nähe der optischen Axe beschränkt und  $z' = l$  setzt, über in

$$\frac{y'}{x'} = \text{tang } 2\nu.$$

<sup>1)</sup> A. DES CLOIZEAUX, Compt. rend. 52, pag. 784. 1861.

<sup>2)</sup> H. DE SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (3) 33, pag. 412. 1851. — POGG. Ann. 86, pag. 55. 1852.

<sup>3)</sup> Aus der Messung der successiven Radien kann man analog wie bei einaxigen Krystallen  $a - c$  berechnen, falls man  $a$  kennt.

Die Hauptisogyren sind daher zwei durch die optische Axe gehende Gerade, welche mit einander den Winkel  $2 (AP)$  einschliessen. Für gekreuzte Nicols  $\left[ (AP) = \frac{\pi}{2} \right]$  fallen sie in eine einzige Gerade zusammen. Der Winkel derselben mit der Ebene der optischen Axen wird durch die Polarisations Ebenen  $P$  und  $A$  des Polarisators und Analysators halbirt. Bei Drehung der Krystallplatte dreht sich daher die (schwarze) Hauptisogyre gleich schnell in entgegengesetzter Richtung. — Bei einaxigen Platten bilden, wie wir oben pag. 729 sahen, die Hauptisogyren bei gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz, dessen Lage bei Drehen der Krystallplatte unverändert bleibt<sup>1)</sup>.

Die Interferenzerscheinungen nehmen andere Formen an, wenn das einfallende Licht circular oder elliptisch polarisirt ist, und das aus der Krystallplatte austretende Licht entweder linear oder elliptisch analysirt wird. Letzteres ist z. B. der Fall, wenn man die Krystallplatte im Polarisationsapparat zwischen zwei  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen einschaltet. Alle diese Erscheinungen werden allgemein behandelt, wenn man anstatt einer Krystallplatte, deren zwei oder drei übereinander gelegte voraussetzt. In der Natur kommen diese Fälle bei den Zwillingkrystallen vor. Wir greifen hier nur einige für die Praxis wichtige Fälle heraus<sup>2)</sup>.

Es möge eine zur optischen Axe senkrecht geschliffene Platte eines einaxigen Krystalls zwischen gekreuzten Nicols im circular polarisirten convergenten Lichte betrachtet werden. Letzteres kann man dadurch herstellen, dass man ein  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen in den Polarisationsapparat vor der Krystallplatte einschaltet, dessen Polarisations Ebenen  $H_1'$ ,  $H_2'$  den rechten Winkel zwischen den Polarisations Ebenen  $A$  und  $P$  des Analysators und Polarisators halbiren. Es möge  $H_1'$  die Polarisations Ebene der schnelleren Welle im  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen sein. (Dieselbe liegt bei Spaltblättchen von Glimmer in der Ebene der optischen Axen).

Wir setzen voraus, dass die Schwingungen des Lichtes in ihren Polarisations Ebenen stattfinden (die Annahme, dass beide senkrecht zu einander stehen, führt zu denselben Resultaten). Wenn die längs  $P$  schwingende einfallende Lichtbewegung durch

$$u_P = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt wird, so sind dessen Componenten nach  $H_1'$  und  $H_2'$ , falls beide als positiv nach derselben Seite von  $P$  gerechnet werden:  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  und  $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

<sup>1)</sup> Eine weitere Differenz einer zweiaxigen und einaxigen, senkrecht zur Axe geschliffenen Platte ergibt sich in dem Verhalten bei senkrecht einfallendem Licht. Während letztere bei gekreuzten Nicols vollkommen dunkel erscheint, ist das bei ersterer nicht der Fall, da sie zur conischen Refraction Anlass giebt (cf. E. KALKOWSKI, Zeitschr. f. Krystallogr. 9, pag. 486. 1884).

<sup>2)</sup> Betreffs der ausführlicheren Behandlung der Interferenzerscheinungen des polarisirten Lichtes in mehreren übereinander geschalteten Platten und der Interferenzerscheinungen des circular polarisirten Lichtes vergl. G. S. OHM, Münch. Abh. 7, pag. 43 u. 265. 1853. — E. WILDE, POGG. Ann. 89, pag. 234 u. 402. 1853. — A. BERTIN, Compt. rend. 48, pag. 458. 1859. — Ann. de chim. et de phys. (3) 57, pag. 257. 1859. — Ibid. (4) 13, pag. 240. 1868. — Ibid. (5) 18, pag. 495. 1879. — Ibid. (6) 2, pag. 485. 1884. — M. v. D. WILLIGEN, POGG. Ann. Jubelbd., pag. 491. 1874. W. PSCHIEDL, POGG. Ann. Egbd. 8, pag. 497. 1878. — L. WRIGHT, Phil. Mag. (5) 13, pag. 20. 1882. — H. G. MADAN, Nature, 31, pag. 83. 1884. — Die Erscheinungen in Zwillingplatten sind behandelt bei CH. LANGBERG, POGG. Ann. Egbd. 1, pag. 529. 1842. — OHM, l. c. und POGG. Ann. 90, pag. 327. 1853. — V. D. WILLIGEN und A. BERTIN, l. c. — FR. POCKELS, Gött. Nachr. 1890. — TH. LIEBISCH, physikal. Krystallogr. pag. 499. Dort finden sich auch photographische Reproduktionen dieser Erscheinungen.

Nach dem Austritt aus dem  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen ist daher die nach  $H_1'$  schwingende Lichtbewegung darzustellen durch

$$u_{H_1'} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

die nach  $H_2'$  schwingende Bewegung durch

$$u_{H_2'} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Da das austretende Licht circular polarisirt ist, so wird dasselbe nicht in seiner Natur geändert, wenn man das  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen mit dem Polarisator gemeinschaftlich dreht. Man kann daher voraussetzen, dass die Polarisations Ebenen  $H_1$  und  $H_2$  der Platte des einaxigen Krystals mit  $H_1'$  und  $H_2'$  zusammenfallen.

Nach dem Austritt aus der Platte lässt sich daher die längs  $H_1$  stattfindende Lichtbewegung darstellen durch

$$u_{H_1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l}{o} \right),$$

die längs  $H_2$  stattfindende durch

$$u_{H_2} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l}{e} \right) - \frac{\pi}{2} \right],$$

wo  $l$  die Dicke der Krystalplatte,  $o$  und  $e$  die Geschwindigkeit der ordinären und extraordinären Welle bedeutet.

Die längs der Ebene  $A$  des Analysators stattfindende Lichtbewegung ist daher, falls die positive Richtung von  $A$  in dem von den positiven Richtungen  $H_1, H_2$  gebildeten Winkel liegt,

$$u_A = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[ \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \varphi - \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} - \delta \right) \sin \varphi \right],$$

falls  $\varphi$  den zwischen  $H_1$  und  $A$  gebildeten Winkel und  $\delta = \frac{2\pi}{T} l \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{o} \right)$  bedeutet.

Die Lichtintensität ist folglich:

$$J^2 = \frac{a^2}{2} (1 - \sin 2\varphi \sin \delta).$$

Vollkommene Dunkelheit herrscht also dort, wo zugleich

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad -\frac{3\pi}{4}, \quad \delta = \frac{4h+1}{2} \pi, \quad -\frac{4h-1}{2} \pi.$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad +\frac{3\pi}{4}, \quad \delta = \frac{4h-1}{2} \pi, \quad -\frac{4h+1}{2} \pi.$$

Beachten wir jetzt, dass  $\delta$  positive oder negative Werthe annimmt, je nachdem der Charakter der Doppelbrechung der Krystalplatte positiv oder negativ ist, so ist ersichtlich, dass im ersten Falle die dunklen Ringe in dem positiven Quadranten, d. h. demjenigen, in welchem die Ebene  $H_1'$  liegt, verengert sind gegenüber den im negativen Quadranten vorhandenen. Im zweiten Falle ist es gerade umgekehrt.

Im Mittelpunkte der Platte treten zwei schwarze Flecke auf, deren Verbindungsgerade mit der Spur  $H_1$  bei positivem Krystal ein + Zeichen, bei negativem ein - Zeichen bildet.

Diese sehr bequeme Methode zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung ist von DOVE<sup>1)</sup> angegeben. Man erhält dieselbe Erscheinung, wenn

<sup>1)</sup> H. W. DOVE, POGG. Ann. 40, pag. 457 u. 482. 1837. — Vergl. A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (4) 13, pag. 240. 1868.

man das  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen anstatt unter, über der Krystallplatte anbringt. Die Erscheinung ändert sich in diesem Falle nicht, wenn das  $\frac{1}{4}\lambda$  Blättchen mit dem Analysator um die Axe des Polarisationsapparates gedreht wird.

Ganz dasselbe Kriterium der Erweiterung oder Verengerung der Isochromaten lässt bei Platten zweiaxiger Krystalle, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschnitten sind, den Charakter der Doppelbrechung erkennen, falls die Ebene der optischen Axen mit der Polarisationsebene des Analysators zusammenfällt.

Anstatt mit Hilfe der  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen kann man das Zeichen der Doppelbrechung bei Krystallplatten auch mit Hilfe von senkrecht zur Axe geschnittenen einaxigen Krystallplatten bestimmen, welche man um eine der zu untersuchenden Platte parallele Gerade dreht. Je nach der Lage, welche diejenige Drehungsaxe zu der krystallographischen Orientierung der Platte besitzt, bei welcher sich die Isochromaten erweitern, kann man den Charakter der Doppelbrechung bestimmen. Diese Methode ist für einaxige Krystalle von GRAILICH<sup>1)</sup>, für zweiaxige von NÖRREBERG<sup>2)</sup> angegeben.

Durch Combination einer doppelbrechenden Platte mit zwei  $\frac{1}{4}\lambda$ -Blättchen kann man, wie FRESNEL und AIRY gethan haben, künstlich die Erscheinungen der Rotationspolarisation nachahmen<sup>3)</sup>.

Eine weitere Anwendung der Combination mehrerer Platten ist das SAVART'sche Polariskop, welches aus zwei gleich dicken, unter fast  $45^\circ$  zur Axe geschnittenen Quarzplatten besteht, deren Hauptschnitte einen rechten Winkel mit einander bilden. Dieses Instrument in Verbindung mit einem Analysator, dessen Polarisationsebene dem von den Polarisationsebenen der Quarzplatten gebildeten Winkel halbirt, lässt Spuren von Polarisation des einfallenden Lichtes scharf erkennen, indem dann ein System paralleler Streifen im Gesichtsfeld wahrzunehmen ist.

#### IV. Accidentelle Doppelbrechung.

Einfachbrechende Körper werden, wenn man sie in einen deformirten Zustand bringt, wie er durch einseitigen Druck<sup>4)</sup> oder Zug, Biegung, Torsion oder durch ungleichförmige Erwärmung hervorgebracht wird, doppelbrechend. Erscheinungen dieser Art, sowie überhaupt alle diejenigen Aenderungen schon vorhandener, natürlicher Doppelbrechung, welche durch Einwirkung äusserer, nicht den Molekülen innewohnender Kräfte entstehen, werden accidentelle Doppelbrechung genannt. Zu der genannten Gattung von Kräften gehören auch die Wirkungen der Elektrizität und des Magnetismus, welche ebenfalls accidentelle Doppelbrechung hervorzurufen im Stande sind. Wir werden indess die letztere Klasse von Erscheinungen hier nicht behandeln, da dieses an späterer Stelle geschieht.

Die Thatsache, dass man in isotropen Körpern durch einseitigen Druck oder Zug Doppelbrechung hervorbringen kann, ist von BREWSTER entdeckt. Der-

<sup>1)</sup> cf. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von K. EXNER, 2. Bd., pag. 140. Die zu untersuchende Platte muss parallel zur optischen Axe geschnitten sein.

<sup>2)</sup> A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (4) 13, pag. 240. 1868.

<sup>3)</sup> Wegen des Details vergl. VERDET, Wellentheorie, deutsch von EXNER, 2. Bd., pag. 166 bis 180.

<sup>4)</sup> Durch allseitigen Druck ändern sich ebenfalls die optischen Eigenschaften der Körper, sie werden aber nicht doppelbrechend. — Ueber Versuche vergl. W. C. RÖNTGEN u. L. ZEHNDER, WIED. Ann. 44, pag. 24. 1891. — G. QUINCKE, WIED. Ann. 44, pag. 774. 1891.

selbe untersuchte in einer Reihe von Arbeiten<sup>1)</sup> zunächst weiche organische Substanzen, wie Leim, Wachs, Harz, sodann Glas, Flussspath, Steinsalz, und fand, dass sich diese Körper, wenn sie einseitigem Drucke ausgesetzt wurden, wie negative, dagegen bei Einwirkung einseitigen Zuges wie positive, optisch einaxige Krystalle verhalten, deren optische Axe mit der Druck- resp. Zugrichtung zusammenfällt<sup>2)</sup>. Der Gangunterschied der beiden in den betreffenden Körpern sich fortpflanzenden Wellen zeigte sich als dem ausgeübten Drucke annähernd proportional. Ebenfalls erwies sich ein gebogener Glasstreifen als doppelbrechend.

BREWSTER wies die Doppelbrechung durch die Beobachtung der Interferenzfarben im polarisirten Lichte nach.

In direkterer Weise wies FRESNEL<sup>3)</sup> die Doppelbrechung in gepressten Gläsern nach, indem er die Richtungsunterschiede der beiden in einem einseitig gedrückten Glasprisma senkrecht zur Druckrichtung sich fortpflanzenden Wellen direkt messen konnte. Er liess einen Lichtstrahl auf einen Satz von vier derartigen Prismen fallen, die hintereinander in paralleler Lage aufgestellt waren und zwischen welchen sich zur Aufhebung starker Ablenkungen des Lichtstrahls undeformirte Prismen derselben Glassorte mit gleichen brechenden Winkeln, wie die deformirten Prismen, doch in zu letzteren inverser Lage, befanden. Er erhielt dann eine sehr deutliche Spaltung des einfallenden Strahles in zwei, deren Richtungsunterschiede einige Minuten betragen.

Eine allgemeine Theorie der Erscheinungen der accidentellen Doppelbrechung, wie sie durch Einwirkungen elastischer oder thermischer Kräfte in isotropen Körpern hervorgerufen wird, gab F. NEUMANN<sup>4)</sup>. Er fand seine Theorie durch zahlreiche Versuche an deformirten oder ungleichförmig erwärmten Gläsern bestätigt. Den Ausgangspunkt der Theorie bilden folgende Annahmen: 1) In einem gleichförmig deformirten amorphen Körper befolgt die Doppelbrechung dieselben Gesetze, welche für homogene, optisch zweiaxige Krystalle gelten; dabei fallen die optischen Symmetrieaxen mit den Hauptdilataxionen zusammen. 2) Ein ungleichförmig deformirter amorpher Körper ist einem Aggregat von unendlich vielen sehr kleinen Krystallindividuen zu vergleichen, wobei die Richtungen der optischen Symmetrieaxen und die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten stetige Functionen des Ortes sind.

Nach NEUMANN sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten in einem deformirten amorphen Körper gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} A &= G + qx_x + py_y + pz_z, \\ B &= G + px_x + qy_y + pz_z, \\ C &= G + px_x + py_y + qz_z, \end{aligned}$$

wobei  $G$  die Lichtgeschwindigkeit vor der Deformation,  $x_x$ ,  $y_y$ ,  $z_z$  die Hauptdilataxionen und  $p$ ,  $q$  zwei der Substanz eigenthümliche Constanten bedeuten.

<sup>1)</sup> D. BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. 60; 1816, pag. 156. — Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8, pag. 369. 1818. — POGG. Ann. 19, pag. 527. 1830.

<sup>2)</sup> Dies Verhalten ist bisher an fast allen amorphen Körpern constatirt mit sehr wenig Ausnahmen. Zu letzteren gehört nach E. MACH (Opt.-akust. Versuche, Prag 1873, pag. 32), stark eingedickte Metaphosphorsäure, ferner nach v. EBNER (Wien. Ber. 97, pag. 39. 1888), Kirschgummi und Traganthgummi. — Vergl. AMBRONN, WIED. Ann. 38, pag. 159. 1889.

<sup>3)</sup> A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 20, pag. 376. 1822.

<sup>4)</sup> F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Akad. 1841, Theil II, pag. 1. — POGG. Ann. 54, pag. 449. 1841.

Durch Beobachtungen der Stärke der Doppelbrechung, wie z. B. durch Messung des Gangunterschiedes der beiden im deformirten Körper fortgepflanzten Wellen, durch Beobachtung der Interferenzfarben oder Interferenzfiguren im polarisirten Licht, erhält man Aufschluss über die Differenz  $p - q$  der beiden charakteristischen Constanten, während ihre absoluten Werthe durch Messung der absoluten Aenderung des Brechungsexponenten der Substanz zu erhalten sind, welche durch die Deformation hervorgerufen wird. Diese Aenderung kann man gut mit Hilfe eines JAMIN'schen Interferentialrefractors nach der FIZEAU'schen Methode bestimmen oder durch Messung der Verschiebung der FRAUNHOFER'schen Beugungsfransen, welche durch zwei Oeffnungen hervorgerufen werden, vor deren eine man die deformirte, vor deren zweite man eine gleich dicke undeformirte Platte des zu untersuchenden Körpers stellt. — Letztere Methode hat NEUMANN beim Glase angewandt, sein Resultat ist jedoch in Folge einer falschen Berücksichtigung der durch den Druck hervorgebrachten Dickenänderung der Glasplatte nicht richtig<sup>1)</sup>. Berechnet man die Constanten  $p$  und  $q$  aus den NEUMANN'schen Beobachtungen nach einer richtigen Formel, so ergibt sich aus dieser Berechnung, dass der Brechungsexponent des Glases bei einer durch allseitigen Druck hervorgebrachten Compression zunimmt. Da durch Versuche nachgewiesen ist, dass dasselbe bei gleichförmiger Erwärmung der Fall ist, welche eine Dilatation zur Folge hat, so muss man daher annehmen, dass es für die Werthe der Constanten  $p$ ,  $q$  nicht gleichgültig ist, ob die Deformationen durch Temperaturänderungen oder durch Einwirkung von äusseren Oberflächenkräften hervorgerufen werden.

Weitere messende Versuche über die durch Druck hervorgerufene Doppelbrechung des Glases sind nachdem von WERTHEIM<sup>2)</sup>, BRAVAIS<sup>3)</sup>, E. MACH<sup>4)</sup> und KERR<sup>5)</sup> ausgeführt. Das Verhalten von Kautschuk und Leimgallerten ist von BJERKÉN<sup>6)</sup> untersucht. — Ueber experimentelle Anordnung vergl. auch BOUASSE.<sup>7)</sup>

Dass schon die durch Tonschwingungen hervorgebrachten Dilatationen merkliche Doppelbrechung im Glase hervorrufen, ist von BIOT<sup>8)</sup> gezeigt, welcher eine 2 m lange Glasplatte in tönende Longitudinalschwingungen versetzte. Bei jeder Reibung war in der Nähe der Knotenlinien Doppelbrechung wahrzunehmen. Dieses Experiment ist später von KUNDT<sup>9)</sup> wiederholt, welcher nachweisen konnte, dass an jenen Stellen die Doppelbrechung periodisch intermittirend auftritt, und zwar ist die Periode gleich der des Tones.

Dass man an isotropen Körpern durch Druck oder Zug auch Dichroismus (cf. weiter unten) erzeugen kann, wurde zuerst von KUNDT<sup>10)</sup> an Kautschuk, dann

1) Vergl. F. POCKELS, Ueber den Einfluss elastischer Deformationen, speciell einseitigen Druckes auf das optische Verhalten krystallinischer Körper. Inaug.-Dissert. Göttingen 1889, pag. 91.

2) WERTHEIM, Compt. rend. 32, pag. 289. 1851. — POGG. Ann. 86, pag. 321. 1852. — Ann. de chim. et de phys. (3) 12, pag. 136. 1854.

3) BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 147. 1855. — POGG. Ann. 96, pag. 395. 1855.

4) E. MACH, POGG. Ann. 146, pag. 1872.

5) J. KERR, Phil. Mag. (5) 26, pag. 321. 1888.

6) P. v. BJERKÉN, WIED. Ann. 43, pag. 808. 1891.

7) BOUASSE, Séanc. de la Soc. franc. de Phys. 1890, pag. 245.

8) BIOT, Ann. de chim. et de phys. (2) 13, pag. 151. 1820.

9) A. KUNDT, POGG. Ann. 123, pag. 541. 1864.

10) A. KUNDT, POGG. Ann. 151, pag. 126. 1874.

von v. SEHERR-THOSS<sup>1)</sup> an auf Glas gestrichenen breiartigen Farbstoffen und von v. LASAULX<sup>2)</sup> an Krystallen der Silberhaloide beobachtet.

Die Einwirkung elastischer Deformationen auf die optischen Eigenschaften von Krystallen ist ebenfalls zuerst von BREWSTER<sup>3)</sup> studirt. Er fand, dass optisch einaxige Krystalle durch eine senkrecht zur optischen Axe ausgeübte Compression zweiaxig werden. Nach den Beobachtungen von MOIGNO und SOLEIL<sup>4)</sup> liegt die Ebene der optischen Axen parallel oder senkrecht zur Druckrichtung je nachdem der Charakter der Doppelbrechung des einaxigen Krystalls positiv oder negativ ist. Es war dies Verhalten schon nach den an isotropen Körpern angestellten Versuchen zu erwarten. Da dieselben durch einseitigen Druck zu negativ einaxigen Krystallen werden, so spricht sich darin das Gesetz aus, dass die in die Druckrichtung fallende Axe des zur Construction der Wellenfläche dienenden Ovaloids grösser ist, als die dazu senkrechten Axen, oder mit anderen Worten, dass durch Druck die in die Richtung desselben fallende Ovaloidaxe vergrössert, dagegen durch Zug verkleinert wird. Bei einem positiv einaxigen Krystall liegt in der Richtung der optischen Axe die kleinste Ovaloidaxe. Wirkt nun ein Druck senkrecht zu derselben, so wird die in die Druckrichtung fallende grosse Ovaloidaxe noch weiter vergrössert, daher liegen die extremen Werthe der Ovaloidaxen, d. h. die Ebene der optischen Axen, in der Druckrichtung. Bei einseitigem Zuge muss dagegen die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Zugrichtung liegen, da durch Zug die in dessen Richtung fallende grösste Ovaloidaxe des positiv einaxigen Krystalls verkleinert, d. h. zur mittleren Ovaloidaxe gemacht wird.

Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei den negativ einaxigen Krystallen, da bei diesen die grösste Ovaloidaxe in die Richtung der optischen Axe fällt.

Weitere Versuche über die Aenderung der optischen Eigenschaften der Krystalle durch Druck sind von WERTHEIM<sup>5)</sup>, BRAVAIS<sup>6)</sup>, PFAFF<sup>7)</sup>, VAN DER WILLIGEN<sup>8)</sup>, MACH und MERTEN<sup>9)</sup>, JANNETAZ<sup>10)</sup>, BÜCKING<sup>11)</sup>, KLOCKE<sup>12)</sup>, BRAUNS<sup>13)</sup>, KLEIN<sup>14)</sup> gemacht.

Besonderes Interesse erwecken unter diesen Versuchen die von MACH und MERTEN am Quarz angestellten, welcher durch Druck zweiaxig wird und die Eigenschaft der Circularpolarisation (cf. das spätere Capitel) in Richtung der optischen Axen behält.

1) v. SEHERR-THOSS, WIED. Ann. 6, pag. 270. 1879.

2) v. LASAULX, Sitzber. der schles. Ges. f. vaterl. Cultur 1879, pag. 171.

3) D. BREWSTER, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8, pag. 281. 1818.

4) MOIGNO u. SOLEIL, Compt. rend. 30, pag. 361. 1850. — MOIGNO, Rép. d'opt. mod. Paris 1850, 4, pag. 1592.

5) W. WERTHEIM, Compt. rend. 33, pag. 576. 1851; 35, pag. 276. 1852. — POGG. Ann. 86, pag. 321. 1852; 87, pag. 498. 1852.

6) A. BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 147. 1855. — POGG. Ann. 96 pag. 395. 1855.

7) TH. PFAFF, POGG. Ann. 107, pag. 333. 1859; 108, pag. 598. 1859.

8) VAN DER WILLIGEN, Arch. de musée de Teyl. 3, pag. 292. 1874.

9) E. MACH u. J. MERTEN, Wien. Ber. (2) 72, pag. 315. 1875. — POGG. Ann. 15 pag. 639. 1875.

10) JANNETAZ, Zeitschr. f. Kryst. 4, pag. 421. 1880.

11) H. BÜCKING, N. Jahrb. f. Min. 1, Ref. pag. 177. 1881. — Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 32, pag. 199. 1880. — Zeitschr. f. Kryst. 7, pag. 555. 1883.

12) F. KLOCKE, N. Jahrb. f. Min. 2, pag. 249. 1881.

13) R. BRAUNS, N. Jahrb. f. Min. 1, pag. 232. 1886.

14) C. KLEIN, Berl. Ber. 1890, 1, pag. 724.

Die von NEUMANN für amorphe Körper gegebene Theorie dieser Erscheinungen ist von POCKELS<sup>1)</sup> auf gleichförmig deformirte Krystalle erweitert und durch Beobachtungen geprüft worden. Es ist dabei der Theorie die Annahme zu Grunde gelegt, dass auch im deformirten Zustande die FRESNEL'schen Gesetze Gültigkeit behalten. Die optischen Symmetriemaxen fallen in dem deformirten Krystall im Allgemeinen nicht mehr mit den Dilatationshauptaxen zusammen. Dadurch wird die Zahl der für die accidentelle Doppelbrechung charakteristischen Constanten erheblich (beim triklinen Krystall 36, beim regulären 3). Die Durchführung der Theorie lehrt u. a. auch in einfacher Weise alle möglichen Fälle für das Verhalten von regulären Krystallen kennen. Diese werden durch Druck zweiaxig, jedoch ist das Gesetz über die Lage der Ebenen der optischen Axen ein zunächst nicht sehr übersichtliches. Nach der POCKELS'schen Theorie sind hinsichtlich der Lage der Ebene der optischen Axen die regulären Krystalle in vier wesentlich verschiedene Typen einzutheilen. Es gilt ferner das Gesetz, dass die optischen Axen in dem deformirten Krystall ihre Lage behalten, wenn sich nur die absolute Grösse der äusseren Drucke ändert, während die Verhältnisse der elastischen Druckcomponenten ungeändert bleiben, wie es bei einseitigem Zuge der Fall ist.

Für Krystalle hat sich bisher nicht das beim Glase constatirte merkwürdige Verhalten bestätigt, dass es für die Werthe der die Erscheinungen der accidentellen Doppelbrechung bestimmenden Constanten einen Unterschied macht, ob die Deformationen durch Druckkräfte, oder durch Temperaturänderungen hergebracht werden.

Die Doppelbrechungs-Erscheinungen, welche man in schlecht gekühlten Gläsern wahrnimmt, sind auf die gleichen Ursachen zurückzuführen, wie die beschriebenen Erscheinungen, nämlich auf im Innern der Gläser existirende Spannungen und dadurch herbeigeführte Deformationen. Diese Erscheinungen sind zuerst von SEEBECK<sup>2)</sup> beobachtet, ihre Ursache ist bald darauf von BREWSTER<sup>3)</sup> erkannt. Nachdem sind sie von MACÉ DE LEPINAY<sup>4)</sup> weiter studirt. Derselbe konnte durch Beobachtung der NEWTON'schen Ringe, welche eine auf die zu untersuchende Glasplatte aufgelegte Glaslinse hervorbrachte, direkt die durch den Process der Härtung hervorgerufene Deformation durch die Veränderung der NEWTON'schen Ringe messen. CZAPSKI<sup>5)</sup> hat eine einfache Methode angegeben, um an schlecht gekühlten Glasplatten ein Bild von dem Verlauf der Spannungen im Innern derselben zu erhalten. Bei Betrachtung zwischen gekreuzten Nicols treten auch im parallelen Lichte Interferenzcurven auf, da der Gangunterschied der beiden in der Glasplatte fortgepflanzten Wellen von Punkt zu Punkt wechselt. Dies hat auch zur Folge, dass eine planparallele, schlecht gekühlte Glasplatte wie eine Zerstreuungslinse wirkt, d. h. Brennpunkteigenschaften besitzt.

Die Krystallisation hat oft ähnliche Wirkungen, wie das schnelle Kühlen, wie BRAVAIS<sup>6)</sup> gezeigt hat. Die zahlreichen Anomalien, welche reguläre Krystalle

<sup>1)</sup> J. POCKELS, die oben (pag. 738) citirte Dissertat. Abgedruckt in WIED. Ann. 37, pag. 144 u. 269. 1889. — Vergl. auch WIED. Ann. 39, pag. 440. 1890.

<sup>2)</sup> SEEBECK, SCHWEIGGER's Journ. 7, pag. 252, 382. 1813; 11, pag. 471. 1814; 12, pag. I. 1814.

<sup>3)</sup> D. BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. I; 1816, pag. 46.

<sup>4)</sup> MACÉ, Compt. rend. 84, pag. 1024. 1877. — MACÉ DE LÉPINAY, Ann. de chim. et de phys. (5) 19, pag. 5. 1880.

<sup>5)</sup> S. CZAPSKI, WIED. Ann. 42, pag. 319. 1891.

<sup>6)</sup> BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 129. 1855.

in ihrem optischen Verhalten zeigen, indem sie doppelbrechend sind, sind meist auf unregelmässige Spannungen im Innern der Krystalle zurückzuführen<sup>1)</sup>.

In den bisher erwähnten Fällen ist die accidentelle Doppelbrechung nur an festen Körpern beobachtet, jedoch ist dieselbe auch an zähen Flüssigkeiten zu beobachten, wenn sie in eine derartige Bewegung versetzt werden, dass verschiedene Theile derselben verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Dieser Fall von Doppelbrechung ist zuerst von MAXWELL<sup>2)</sup> am Canadabalsam beobachtet. Er wurde später von KUNDT<sup>3)</sup> näher untersucht, indem er einen massiven Messingcylinder innerhalb eines festen Hohlcyllinders rotiren liess in einem grösseren Kasten, welcher die zu untersuchende Flüssigkeit aufnahm. Die Flüssigkeit ist für Lichtwellen, welche dieselbe parallel der Rotationsaxe durchsetzen, doppelbrechend, und zwar nimmt die Grösse der Doppelbrechung mit Entfernung des durchsetzenden Lichtstrahls von der Rotationsaxe ab. Dass eine solche Abnahme eintreten muss, ergibt sich aus den von STOKES<sup>4)</sup> angestellten theoretischen Betrachtungen über die stationäre Bewegung einer reibenden incompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei unendlich langen concentrischen Cylindern. Hiernach nimmt die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten zweier benachbarter Flüssigkeitsringe mit wachsenden Radien derselben ab. In Folge der verschiedenen Geschwindigkeit zweier benachbarter Ringe findet für jedes Volumenelement ein zum Radius tangentieller Zug statt, welcher bei einer elastischen Flüssigkeit in jedem Element ein Maximum der Dilatation und Compression in Richtungen herbeiführt, welche unter  $45^\circ$  zum Radius liegen und auf einander senkrecht sind. Diese Richtungen fallen in der That bei den meisten Flüssigkeiten, welche die besprochene Erscheinung zeigen, mit den Polarisationsrichtungen der in derselben fortgepflanzten Lichtwellen zusammen<sup>5)</sup>. Der Sinn der Doppelbrechung ist bei den meisten Flüssigkeiten derselbe, wie er für amorphe Körper bei Einwirkung von deformirenden Kräften im Allgemeinen stattfindet, d. h. sie werden durch einseitigen Druck optisch negativ. — Eine Ausnahme von dieser Regel machen jedoch nach UMLAUF<sup>6)</sup> diejenigen Flüssigkeiten (Traganth und Kirschgummi), welche sich auch bei einseitigem Druck der allgemeinen Regel entgegengesetzt verhalten (cf. oben pag. 737, Anm. 2). KUNDT constatirte ferner, dass die Stärke der Doppelbrechung mit der Rotationsgeschwindigkeit des inneren Cylinders proportional sei. Die Grösse des Reibungscoefficienten ist indess für die Stärke der Doppelbrechung nicht allein maassgebend, wenigstens wenn man verschiedene Flüssigkeiten mit einander vergleicht, wohl aber ist die Doppelbrechung dem Reibungscoefficienten bei ein und derselben Flüssigkeit proportional, wenn man deren Reibung durch Temperaturänderungen variirt. Dieses Verhalten hat DE METZ<sup>7)</sup> constatirt.

P. DRUDE.

<sup>1)</sup> Vergl. hierüber die Lehrbücher d. Mineralogie und die Untersuchungen von C. KLEIN, Zeitschr. f. Kryst. 9, pag. 38. 1884. — Gött. Nachr. 1884, pag. 129; 1882, No. 16. — MALLARD, Zeitschr. f. Kryst. 9, pag. 398. 1884. — R. BRAUNS, die opt. Anomalien der Krystalle. Preisschr. der JABLONOWSKI'schen Ges. Leipzig 1891.

<sup>2)</sup> CL. MAXWELL, POGG. Ann. 151, pag. 151. 1874.

<sup>3)</sup> A. KUNDT, WIED. Ann. 13, pag. 110. 1881.

<sup>4)</sup> STOKES, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. 8, 1845. — Math. and Phys. Papers. 1, pag. 102, Cambridge 1880.

<sup>5)</sup> Zur Erklärung der Abweichungen von diesem Gesetz vergl. Th. SCHWEDOFF, Journ. de phys. (3) 1, pag. 49. 1892.

<sup>6)</sup> K. UMLAUF, WIED. Ann. 45, pag. 304. 1892.

<sup>7)</sup> G. DE METZ, WIED. Ann. 35, pag. 497. 1888.