Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Theorie des Lichtes für durchsichtige Medien

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Ueber n haben wir direkt keine Anhaltspunkte. Nach THOMSON ist n jedenfalls kleiner als $\frac{1}{50}$, da schon in der Nähe der Sonne v viel kleiner als V sein muss. Daraus würde folgen

$$s > 10^{-25}.$$

Um zu einer Schätzung von n zu gelangen, stellt GLAN[1]) die Ueberlegung an, dass die Lichtschwingungen ohne Zerreissung des Aethers stattfinden müssen, und dass daher die Dilatation seiner Längeneinheit einen gewissen grössten Betrag δ nicht überschreiten könne. δ steht mit n in der Beziehung $\delta = \sqrt{1+n^2}-1$. Indem GLAN annimmt, dass δ ungefähr gleich dem für Wasser oder Glas gültigen Werthe sei, folgt

$$s > 10^{-18}.$$

Eine obere Grenze der Dichte des Lichtäthers hat GRAETZ[2]) berechnet auf Grund der MAXWELL'schen Molekularwirbeltheorie in Verbindung mit der Beobachtung von KUNDT über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes beim Durchgang durch Eisen. Er findet

$$s < 9 \cdot 10^{-16}.$$

Diese Zahl kann keinen Anspruch auf grosse Zuverlässigkeit machen, da zu ihrer Ermittelung mehrere nicht erwiesene Hypothesen nothwendig sind. In noch weit höherem Maasse tritt dies ein bei den von WOOD[3]) zur Ermittelung der Aetherdichte angestellten Ueberlegungen. P. DRUDE.

Theorie des Lichtes für durchsichtige Medien.

I. Experimentelle Thatsachen. Uebersicht über die verschiedenen Theorien.

Wenn für eine gewisse Klasse von Naturerscheinungen eine Theorie ausgebildet werden soll, so heisst das, aus einigen Grundhypothesen die beobachteten Erscheinungen deduktiv ableiten. Eine Theorie ist um so vollkommener, je wahrscheinlicher die angenommenen Hypothesen durch andere bekannte physikalische Thatsachen gemacht werden, je geringer ihre Anzahl ist, und je mannigfaltiger die durch sie erklärten Erscheinungen sind.

Die Anforderungen, die an eine Theorie des Lichtes zu stellen sind, welche nach den erwähnten Gesichtspunkten vollkommen zu nennen wäre, sind ausserordentlich hohe, einmal, weil die optischen Erscheinungen so mannigfaltiger Art sind, wie in kaum einem anderen Zweige der Physik, und andererseits, weil wir über die Eigenschaften des Lichtäthers, an welche die anzunehmenden Hypothesen anzuknüpfen haben, durch keine Eigenschaften der ponderablen Materie, welche unseren Messungen direkter zugänglich ist, Aufschluss erhalten. Diesen hohen Anforderungen hat bisher noch keine Lichttheorie genügt, indem noch keine Theorie das Gesammtgebiet der optischen Erscheinungen umfasst, und auch einige der Hypothesen, welche zur theoretischen Darstellung eines Partialgebietes angenommen sind, nicht als unmittelbar nothwendige erscheinen, sondern vielmehr nur nachträglich durch den Erfolg gerechtfertigt werden.

Aber auch eine unvollkommene Theorie kann dadurch von grossem Werthe für die Forschung sein, dass sie in einfachster, ökonomischer Weise ein grosses

---

[1]) GLAN, WIED. Ann. 7, pag. 655. 1879.

[2]) GRAETZ, WIED. Ann. 25, pag. 165. 1885.

[3]) WOOD, Phil. Mag. (5) 20, pag. 389. 1885.

Gebiet von Erscheinungen beschreibt und eventuell Fingerzeige zu noch unbeobachteten Thatsachen giebt. Ein typisches Beispiel hierfür bietet die Entdeckung der konischen Refraction am Aragonit, zu welcher LLOYD durch Betrachtungen von HAMILTON veranlasst wurde, welche dieser an die in dem oben genannten Sinne sicher sehr unvollkommen zu nennende Theorie der Doppelbrechung von FRESNEL anknüpfte. — Der Weg, auf welchem in dieser rationellsten Weise eine Theorie zu verfahren hat, ist der, dass sie Differentialgleichungen bildet — wir wollen sie Hauptgleichungen nennen — welche die zu erklärenden Erscheinungen umfassen, soweit sie sich in demselben homogenen Medium abspielen. Ist dies nicht als unendlich ausgedehnt anzunehmen, sondern werden die Erscheinungen wesentlich beeinflusst durch das Vorhandensein anderer vom ersten verschiedener Medien, so hat die Theorie noch Gleichungen zu bilden, welche für die Erscheinungen beim Uebergang der Grenze zweier verschiedener Medien gültig sind, die sogen. Grenzbedingungen. Dieselben können aus den Hauptgleichungen der Theorie abgeleitet werden, falls letztere auch für inhomogene Medien aufgestellt sind, da die Grenzschicht zweier verschiedener Medien stets als eine Schicht aufgefasst werden kann, innerhalb deren die optische Natur sehr schnell variirt. Dieser Weg der Ableitung der Grenzbedingungen ist bisher nur von HERTZ[1]) für die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes eingeschlagen, während die mechanischen Lichttheorien bisher die Grenzbedingungen durch Heranziehung besonderer Principien aufgestellt haben. — Bei der Beurtheilung einer Theorie sind sowohl ihre Hauptgleichungen, als ihre Grenzbedingungen zu prüfen, weil beide für eine grosse Klasse optischer Erscheinungen nothwendig mit einander verknüpft sind. Gerade dieser Umstand bewirkt es, dass einige Theorien, welche nach ihren Hauptgleichungen unanstössig erscheinen, doch zu verwerfen sind, weil ihre Grenzbedingungen zu Widersprüchen mit der Beobachtung führen.

Dass hier die Theorie einer grossen Klasse optischer Erscheinungen vorher behandelt wird, bevor im Genaueren diese selbst beschrieben sind, geschieht deshalb, weil wir dadurch eine weit bessere und classificirende Uebersicht über unseren Gegenstand gewinnen. Nur wenige experimentelle Thatsachen mögen vorangeschickt werden, weil sie zum Aufbau der Theorien von wesentlicher Bedeutung gewesen sind.

Zunächst lassen sich durch einige Thatsachen allgemeine Schlüsse auf die Gestalt, welche die Theorie ihren Gleichungen geben muss, ziehen. Es ist constatirt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes unabhängig von der Intensität, d. h. der Grösse des Lichtvectors, ist. J. J. MÜLLER[2]), welcher zuerst diese Frage einer genaueren Untersuchung unterzog, erhielt allerdings ein abweichendes Resultat, indem er eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude constatirt zu haben glaubte, die allerdings erst merklich wäre, wenn man Differenzen von Milliontheilen des eigenen Werthes und kleinere berücksichtigt. Er verfuhr nach zwei verschiedenen Methoden: 1. Er erzeugte zwischen zwei NEWTON'schen Gläsern Interferenzringe mit grosser Wegdifferenz (25000 Wellenlängen). Bei Abnahme der Intensität der Beleuchtung glaubte er ein Zusammenschieben der Ringe zu erkennen, was auf eine Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit deuten würde. Dies Experiment ist später von EBERT[3]) mit verbesserten Anordnungen wiederholt.

[1]) H. HERTZ, Gött. Nachr. No. 4, pag. 117. 1890. — WIED. Ann. 40, pag. 589. 1890.

[2]) J. J. MÜLLER, POGG. Ann. 145, pag. 86. 1872.

[3]) EBERT, WIED. Ann. 32, pag. 337. 1887.

EBERT zerschnitt eine dicke, schwach keilförmige Glasplatte senkrecht zur brechenden Kante und legte dann die beiden Stücke mit entgegengesetzt liegenden Keilwinkeln nebeneinander. Die in monochromatischem Lichte erzeugten Interferenzstreifen müssen, falls ihre Lage von der Intensität der Beleuchtung abhängt, nach entgegengesetzter Richtung bei Wechsel derselben wandern, was daran deutlich zu erkennen ist, dass zwei Streifen der beiden Platten, welche ursprünglich in ihrer gegenseitigen Verlängerung liegen und so als ein einziger Streifen erscheinen, bei Wechsel der Intensität der Beleuchtung an der Schnittfläche als abgesetzt erscheinen. Dieses letztere war indess nicht wahrzunehmen, selbst wenn die Intensität bedeutend variirt wurde, sodass z. B. für die Quecksilberlinie Hg_α die Constanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bis auf fast ein Milliontel des eigenen Betrages nachgewiesen wurde, falls die Intensität zwischen den Werthen 1 und 250 variirt. Die Erklärung der abweichenden Resultate MÜLLER's, welcher die Intensität nur bis auf $\frac{1}{3}$ schwächte, sucht EBERT in physiologischen Gründen.

2) Die zweite Versuchsanordnung MÜLLER's bestand darin, dass er das aus einem mit 2 Spalten behafteten Beugungsschirm austretende Strahlenbündel schräg eine planparallele Glasplatte durchsetzen liess. Da für den einen Strahl die Intensitätsschwächung, welche beim Durchtritt der Grenze Luft — Glas eintritt, eher erfolgt, als für den anderen, so muss, falls die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität abhängt, eine Phasenänderung der beiden Strahlen durch Einschalten der Glasplatte eintreten, d. h. eine Verschiebung der Interferenzstreifen. Eine solche glaubte MÜLLER zu constatiren um 0·1—0·3 Streifenbreite. — Dies Experiment ist in bedeutend verfeinerter Anordnung später von LIPPICH[1]) wiederholt, indem er durch eingeschaltete Rauchgläser oder polarisirende Vorrichtungen eine viel grössere Schwächung der Intensität, als MÜLLER durch den Verlust bei Reflexion, erreichte, und die Distanz der Schwächungsstellen etwa 100 Mal grösser machte als MÜLLER. LIPPICH erreichte dies dadurch, dass er die Interferenzstreifen der beiden Strahlenbündel beobachtete, erst nachdem dieselben von einem Spiegel reflektirt wurden, der vermöge einer eingeschalteten Convexlinse den Weg der beiden Lichtbündel vertauschte. Eine Vorrichtung, welche in den Gang des einen Lichtbündels eingeschaltet wird, schwächt die Intensität des einen Bündels beim Hingang zum Spiegel, die des zweiten beim Rückgang von demselben, sodass die Distanz der Schwächungsstellen das Doppelte der Entfernung der Schwächungsvorrichtung vom Spiegel beträgt. — Schon bei mässiger Lichtschwächung hätte bei einem Betrage jener Distanz von 2·5 *m* für mittlere Wellenlängen die Verschiebung der Interferenzfransen, wenn die von MÜLLER gefundenen numerischen Ergebnisse genau wären, 13 Fransenbreiten betragen müssen, also würden bei weissem Licht die Minima im Beugungsbilde ganz verschwunden sein; allein LIPPICH sah dieselben sehr rein und deutlich und nahm selbst bei den stärksten Schwächungen keine Spur von Verschiebung wahr. Ebenso wenig war eine solche zu bemerken, als anstatt Luft Glas-, resp. Wassersäulen eingeschaltet wurden. Die Genauigkeit, mit welcher die Constanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bis zu den stärksten Schwächungen hin in Luft constatirt wurde, beträgt den 182 millionsten Theil des eigenen Betrages.

Es ist also die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude als experimentell erwiesen anzusehen. Hieraus fliesst mit Nothwendigkeit, dass die Hauptgleichungen der Theorien homogene Differentialgleichungen sein müssen.

---

[1]) LIPPICH. Wien. Ber. 2, 72, pag. 355. 1875.

Eine weitere Thatsache, welche bis jetzt durch kein Experiment widerlegt ist, ist die, dass die optischen Erscheinungen additiver Natur sind, in der Weise, dass man die aus dem Zusammenwirken zweier Wellenzüge resultirende Lichtbewegung durch (geometrische) Addition der aus den einzelnen Wellenzügen resultirenden Bewegungen erhält. Dies prägt sich z. B. darin aus, dass das Verhältniss der Intensität des reflektirten Lichtes zu dem des einfallenden lediglich durch die Beschaffenheit der Medien und die Lage der einfallenden Wellennormale und Polarisationsebene zur Grenze der Medien gegeben ist, dagegen von der Intensität des einfallenden Lichtes unabhängig ist.

Aus dieser Thatsache folgt, dass sowohl Hauptgleichungen, als Grenzbedingungen lineare Gleichungen sein müssen, und sollten letztere durch die Theorie in noch nicht linearer Form geliefert werden, so müssen sie in eine solche transformirbar sein.

Ein weiterer Prüfstein für die Brauchbarkeit einer Theorie bieten die Erscheinungen in doppelbrechenden Krystallen, weil sie zum Theil einer besonders genauen experimentellen Untersuchung fähig sind. Die Doppelbrechung, d. h. die Zertheilung eines einfallenden Lichtstrahls in zwei gebrochene, wurde am Kalkspath entdeckt von ERASMUS BARTHOLINUS [1]). Es gelang HUYGENS [2]) kurz darauf, die Gesetze dieser Doppelbrechung durch eine einfache, derjenigen für isotrope Mittel analoge Construction darzustellen, indem er annahm, dass die Wellenfläche im Kalkspath, d. h. diejenige Fläche, auf welcher sich eine von einem Punkte des Krystalls ausgegangene Erschütterung nach Ablauf einer gewissen Zeit befindet, aus einer Kugel und einem dieselbe in den Endpunkten eines Durchmessers berührenden Rotationsellipsoide bestehe. Durch Anwendung seines Princips der einhüllenden Wellen gelangte er gerade wie bei der Brechung an isotropen Medien [3]) unmittelbar zu den Gesetzen, welchen die Brechung ebener Lichtwellen beim Eintritt aus Luft in Kalkspath unterworfen ist, und die durch Messungen von WOLLASTON und MALUS bestätigt wurden [4]). Aus der Construction folgt unmittelbar der Unterschied im Verhalten des ordinären und extraordinären Strahles, indem ersterer das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgt, letzterer dagegen nicht.

FRESNEL constatirte [5]) durch Versuche am Topas, dass es Krystalle gäbe, welche ein von dem beschriebenen abweichendes Verhalten zeigten, indem sie gar keinen ordinären, nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz gebrochenen Strahl besässen.

Am deutlichsten wies FRESNEL diese Thatsache durch folgendes, auf Anregung von ARAGO angestelltes Experiment nach. Er schnitt aus Topas planparallele Platten in verschiedenen Richtungen, klebte dieselben auf einander und gab der so entstehenden Säule die Gestalt eines Prismas mit zu den Grenzflächen der verschiedenen Platten senkrechter brechender Kante. Blickt man durch dasselbe nach einer der letzteren parallelen Geraden, so überzeugt man sich, dass bei keinem der beiden Bilder der Geraden die den einzelnen Platten entsprechenden Theile eine gerade Linie bilden, wie dies der Fall sein müsste, wenn einer der beiden Strahlen das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgen würde.

Für diese, sogen. zweiaxigen Krystalle, stellte FRESNEL das nach ihm be-

---

[1]) E. BARTHOLNUS, Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici. Hafniae 1670.

[2]) HUYGENS, Traité de la lumière. Leyden 1690.

[3]) s. oben pag. 624.

[4]) Das Nähere hierzu s. im Kapitel: Doppelbrechung.

[5]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 20, pag. 337. 1821.

nannte Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes auf[1]). Er fand dasselbe zunächst rein intuitiv[2]), indem er sich die Aufgabe stellte, eine Wellenfläche zu finden, welche zu drei rechtwinkligen Axen symmetrisch sei, welche ferner stets zwei Wellen ergebe, von denen keine das gewöhnliche Brechungsgesetz befolge; und die schliesslich im Falle zweier gleichberechtiger Axen in die HUYGENS'sche Wellenfläche, d. h. eine Kugel und ein dasselbe berührendes Ellipsoid, überginge. Er suchte dann seinem Gesetze eine theoretische Grundlage zu geben, indem er u. A. von der Vorstellung ausging, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle lediglich von der Schwingungsrichtung der Aethertheilchen abhinge, eine Annahme, die, wie CAUCHY[3]) bald darauf gezeigt hat, durchaus nicht aus irgend welchen Grundannahmen, wie z. B. aus der elastischen Natur des Aethers, folgt. Es lassen sich vielmehr Theorien bilden, die in sich widerspruchsfrei sind und mit den Beobachtungen ebenso im Einklang stehen, und bei welchen die Richtung der Wellennormale ebenfalls von Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Ist demnach die FRESNEL'sche Theorie der Doppelbrechung als unbefriedigend zu bezeichnen, was darin seine natürliche Erklärung findet, dass damals noch die durch NAVIER, POISSON und CAUCHY geschaffene Elasticitätstheorie fehlte, so ist trotzdem die Divinationsgabe FRESNEL's zu bewundern, indem sein Gesetz durch die bisherigen Experimente stets mit grosser Genauigkeit bestätigt ist. Dieselbe ist eine derartige, dass alle Theorien, welche ein von dem FRESNEL'schen abweichendes Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in doppelbrechenden Medien ergeben, selbst wenn die numerischen Differenzen nur wenige Bruchtheile von Procenten betragen sollten, als mit der Erfahrung nicht im Einklang stehend zu verwerfen sind[4]).

Die verschiedenen Theorien, welche mit dem FRESNEL'schen Gesetz im Einklang sind, unterscheiden sich nun wesentlich in der Art der Herleitung desselben. Im Allgemeinen treten nämlich so viele zunächst als unabhängig von einander erscheinende Coëfficienten in den Hauptgleichungen auf, dass zunächst ein viel allgemeineres Gesetz als das FRESNEL'sche gefolgert wird. Dieses kann erst durch Bedingungsgleichungen zwischen jenen Coëfficienten erhalten werden. Bei den einzelnen Theorien ist nun die Begründung derselben eine verschiedene, die einen stellen jene Gleichungen einfach als mathematische Beziehungen hin, ohne den Coëfficienten und jenen Beziehungen eine physikalische Bedeutung unterzulegen, die anderen leiten jene Gleichungen mit mehr oder weniger Strenge aus physikalischen Vorstellungen ab. Bei gleichem Erfolge werden wir der letzten Klasse von Theorien den Vorrang vor der ersten einräumen. Es ist indess nicht zu verkennen, dass bis jetzt gerade die Theorien, welche in ihrem ersten Ansatz die höchsten Anforderungen an Vollendung zu erfüllen bestrebt waren, nämlich Hauptgleichungen und Grenzbedingungen abzuleiten auf Grund

---

1) FRESNEL, Mém. de l'Acad. des scienc. 7, pag. 45. 1821; Ann. de chim. et de phys. (2) 28, pag. 263. 1821; Oeuvr. compl. 2, No. 38, 39, 47.

2) Der Weg, auf welchem FRESNEL wahrscheinlich zu seiner Entdeckung gelangt ist, ist unten im Kapitel »Doppelbrechung« ausführlicher angegeben. FRESNEL selber deutet ihn in seinen soeben citirten Schriften nicht an.

3) CAUCHY, Mém. de l'Acad. des sc. 9, pag. 114. 1829.

4) Die allgemeinsten mit dem FRESNEL'schen Gesetze vereinbaren Hauptgleichungen gab M. LÉVY (Compt. rend. 105, pag. 1044. 1887). Dieselben schliessen in der That als specielle Fälle die Differentialgleichungen der im Folgenden auseinander gesetzten Theorien in sich, welche zu dem FRESNEL'schen Gesetze führen.

von Kräften, welche zwischen den kleinsten Theilchen eines Mediums nach irgend welchen Gesetzen wirken, in ihren Erfolgen zurückstehen hinter denjenigen Theorien, welche nicht auf mechanisch vorstellbare Molekularwirkungen zurückgehen. Letztere Theorien suchen eine Erklärung für das Wesen und die Gesetze der Lichterscheinungen entweder in anderen Erscheinungen des Aethers, welche ebenfalls dem Verständniss insofern verschlossen sind, als sie Analoga in der Physik der ponderablen Materie nicht besitzen, wie die elektromagnetische Lichttheorie, oder sie berücksichtigen nur die von den unbekannten Molekularwirkungen herrührenden Resultanten, deren Gesetze eventuell weit complicirter, als die der Molekularwirkungen sind. Die Theorien der letzteren Gattung sollen mit dem Namen »Theorien der resultirenden Wirkungen« bezeichnet werden, im Gegensatz zu den Theorien der ersten Gattung, »den Theorien der Molekularwirkungen«. Beide Gattungen zusammen werden üblich mit dem Namen »mechanische Lichttheorien« belegt, um sie in Gegensatz zu der elektromagnetischen Lichttheorie zu stellen.

Dieser Gegensatz liegt aber, wie im vierten Abschnitt dieses Capitels näher erläutert werden soll, mehr in den Grundvorstellungen. Für die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen führen beide Anschauungsweisen zum grossen Theil zu gleichen Resultaten, und da durch die Beobachtung nur die Richtigkeit jener Gleichungen, nicht die der Grundannahmen, zu prüfen ist, so sind auch gewisse mechanische Lichttheorien mit der Erfahrung im Einklang, wenn es die elektromagnetische Lichttheorie ist.

Trotzdem drängt letztere die Bedeutung der mechanischen Theorien zurück, und zwar nicht nur, weil sie einige optische Erscheinungen, z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Aether und in manchen ponderabeln Körpern aus rein elektrischen Experimenten zu berechnen erlaubt, sondern auch, weil die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie in gewisser Weise umfassender als die irgend einer mechanischen Theorie sind.

Der letztere Vorzug bleibt bestehen, selbst wenn auch die eben erwähnten numerischen Beziehungen oft nicht mit der Erfahrung im Einklange stehen. Jedoch aus diesem Grunde bedarf auch die elektromagnetische Theorie noch weiterer Ausbildung.

Im Folgenden sollen nur die mechanischen Theorien ausführlich besprochen werden, da die elektromagnetische Theorie in dem dritten Bande dieses Buches näher erläutert wird. — Zum Schluss dieses Capitels sollen jedoch kurz die Resultate, wie sie sich aus beiden Anschauungsweisen über die Natur des Lichtes ergeben, verglichen werden.

Es dient zur Erleichterung der Uebersicht des Folgenden, schon hier auf einen wesentlichen Unterscheidungspunkt der verschiedenen Theorien hinzuweisen. Derselbe liegt darin, ob dieselben bei zwei optisch verschiedenen Medien in den Hauptgleichungen Gleichheit der Coëfficienten der Differentialquotienten des Lichtvectors nach der Zeit, aber Verschiedenheit der Coëfficienten der Differentialquotienten nach den Coordinaten annehmen, oder umgekehrt. In den rein elastischen Theorien haben diese genannten Coëfficienten die Bedeutung der Dichtigkeit und der Elasticität des Aethers. Irgend eine Relation zwischen diesen anzunehmen, ist man schon deshalb gezwungen, weil die Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an der Grenze zweier isotroper Mittel lediglich nur von einer durch die Natur derselben gegebenen Constante, dem Brechungsexponenten, abhängen und nicht von deren zwei. Bei Ersetzung der Grenzbedingungen durch allgemeinere in der Weise, dass in ihnen ein weiterer verfügbarer Coëfficient auftritt, kann man allerdings[1]) sowohl Dichte, als Elasticität in den verschiedenen Medien als verschieden annehmen. Indess ist dies kein direkter Vortheil, so lange jener in den Grenzbedingungen neu eingeführte Coëfficient nicht durch irgend welche physikalische Vorstellung von vornherein bestimmbar ist.

Mit dem genannten Unterscheidungspunkte der Theorien Hand in Hand geht die Verschiedenheit hinsichtlich der Definition der Polarisationsebene, indem erstere dieselbe als mit der Schwingungsrichtung zusammenfallend, letztere dagegen senkrecht zu ihr annehmen.

II. Theorien der Molekularwirkungen.

a) Rein elastische Theorien.

Unter diesen Theorien verstehen wir solche, in denen der Einfluss der ponderablen Körper auf die Lichtbewegung nicht berücksichtigt wird, vielmehr der Lichtäther als ein homogenes, eventuell krystallinisches Medium angesehen wird, welches vermöge seines elastischen Verhaltens Wellen fortzupflanzen im Stande ist, und dessen Eigenschaften in den verschiedenen Körpern, z. B. Luft, Glas etc. verschiedene sind.

Der Erste, welcher von dieser Anschauung aus der unvollkommenen Theorie FRESNEL's eine grössere Strenge zu geben suchte, war CAUCHY[2]); das Charakteristische seiner Elasticitätstheorie ist, dass die Molekulardruckkräfte aus Einzelwirkungen der Moleküle abgeleitet werden, welche gewisse unbekannte Functionen ihrer gegenseitigen Entfernung sind. Aus diesem allgemeinen Ansatz ergiebt sich zunächst ein viel allgemeineres Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als das FRESNEL'sche. Vor Allem ist das Resultat ein von der Beobachtung zunächst sehr abweichendes, dass ein Erschütterungscentrum eines krystallinischen Mittels Anlass zu drei Wellensystemen giebt, an Stelle von nur zwei beobachteten. Durch gewisse zwischen den Coëfficienten der Hauptgleichungen aufzustellende Relationen kann man eine angenäherte Uebereinstimmung mit dem FRESNEL'schen Gesetze erhalten, insofern dasselbe für zwei jener drei Wellensysteme gültig ist, in denen, für den Fall ebener Wellen, die Schwingungen nahezu transversal sind, welche also als Lichtwellen zu deuten sind. Das dritte Wellensystem ist ein nahezu longitudinales, und es lag zunächst nahe, dieses einfach unberücksichtigt zu lassen unter der Annahme, dass dasselbe keine Lichtempfindung erzeuge.

CAUCHY zeigte, dass die Reduction des allgemeinen Fortpflanzungsgesetzes auf das FRESNEL'sche möglich sei, sowohl wenn die Lichtschwingungen in der Polarisationsebene, als auch wenn sie senkrecht zu ihr stattfänden. Er hielt aber die letztere Annahme für die wahrscheinlichere.

Eine grosse Schwierigkeit bereitet nun in dieser Theorie das Auftreten der longitudinalen Welle. Schon in einem isotropen elastischen Körper tritt eine solche auf.

Die Hauptgleichungen für einen solchen lauten:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + B\Delta u,$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + B\Delta v,$$
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + B\Delta w,$$

1) M. RÉTHY, WIED. Ann. 11, pag. 121. 1880.

2) Mém. de l'Acad. des scienc. 9, pag. 114; 10, pag. 293 u. 549; 18, pag. 153. 1829. — Exerc. de Math. 3, pag. 188; 4, pag. 129; 5, pag. 19. — Man sehe auch MOTH, Theorie des Lichtes von CAUCHY.

wobei u, v, w die Componenten der Verrückungen der Theilchen aus ihrer Gleichgewichtslage nach den Coordinaten x, y, z bedeuten, ρ die Dichtigkeit des Mittels, A und B gewisse, seine elastischen Eigenschaften definirenden Constanten, t die Zeit, und wobei Δ eine Abkürzung für die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ϑ die räumliche Dilatation bezeichnet, d. h. es ist $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Die Constante B drückt den Widerstand aus, welchen das Medium einer tangentialen Verschiebung zweier benachbarter Flächenelemente entgegensetzt, während die Constante A sich in einfacher Weise durch B und den Compressionswiderstand des Mediums ausdrückt. Bezeichnet man letzteren durch k, so ist nämlich

$$k = A - \tfrac{4}{3}B.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, bei Annahme ebener Wellen, durch einfache Rechnung, dass zwei Wellensysteme möglich sind, ein transversales, dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{B}{\rho}}$ beträgt, und ein longitudinales mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{A}{\rho}}$. Ersteres muss als Lichtwelle gedeutet werden.

Es muss hier zunächst der Einwand erledigt werden, welchen man zum Theil der Erklärungsart transversaler Lichtwellen aus der elastischen Natur des Aethers gemacht hat, indem man sagte, dass transversale Wellen nur in festen elastischen Körpern auftreten könnten, dagegen in Flüssigkeiten nur longitudinale, da in ihnen der Widerstand B gegen tangentiale Verschiebung Null ist. Gegen die Natur des Lichtäthers als eines festen Körpers spreche aber die Unmerklichkeit des Widerstandes, welchen ponderable Körper bei der Bewegung durch den Aether hindurch erfahren; aus letzterem Umstande müsse man schliessen, dass der Aether die Constitution einer ausserordentlich wenig dichten Flüssigkeit besitze.

Eine solche Constitution schliesst aber trotzdem nicht das Auftreten transversaler Lichtwellen aus[1]). Denn selbst bei einer vollkommenen Flüssigkeit werden die Moleküle, wenn die tangentielle Verschiebung einen gewissen, wenn auch sehr kleinen Betrag nicht überschreitet, noch nicht neue Gleichgewichtslagen angenommen haben. Wenn also bei der Lichtbewegung die Dilatationen unter jenem Betrage bleiben, so sind dadurch transversale Wellen und die Berechtigung der Auffassung des Lichtäthers als eines starren Körpers erklärt, wogegen der Aether bei Auftreten bedeutender relativer Dilatationen, wie bei Bewegungen ponderabler Körper im Aether, als Flüssigkeit zu behandeln ist.

Bietet sonach die Erklärung einer transversalen Lichtwelle keine Schwierigkeit, so handelt es sich nun noch darum, die Bedeutung der longitudinalen Wellen zu finden. Dieselbe einfach zu ignoriren auf Grund der Annahme, dass sie der Träger der Energie einer anderen als der Lichtbewegung, z. B. der Wärme sei, geht deshalb nicht, weil, auch wenn ursprünglich in einem Medium nur ein transversales Wellensystem existiren sollte, doch bei jeder Reflexion oder Brechung an der Grenze anderer Medien auch longitudinale Wellen entstehen würden, welche einen merklichen Antheil der Energie der einfallenden transversalen Wellenbewegung in Anspruch nehmen würden. Dieser Umstand würde mit der Thatsache in Widerspruch gerathen, dass beim Passiren einer Grenze zweier Medien Energie der Lichtbewegung nicht merklich verloren geht, indem die In-

---

[1]) Diese Betrachtungen sind STOKES, Trans. Cambr. Phil. Soc. 8, pag. 287 entnommen.

tensität des einfallenden Lichtes gleich der Summe der Intensitäten des reflektirten und gebrochenen Lichtes ist. Es muss also jedenfalls so über die Constante A verfügt werden, dass beim Passiren einer Grenze die longitudinalen Wellen keinen merklichen Betrag von Energie der einfallenden transversalen Wellen erhalten. Es findet dies statt, sowohl wenn $A=\infty$, als wenn $A=0$ ist. Im ersten Falle würde ein unendlich grosser Compressionswiderstand folgen, d. h. das Medium würde einer Deformation, welche mit einer Aenderung seines Volumens verbunden ist, einen sehr viel stärkeren Widerstand entgegensetzen, als einer solchen, welche das Volumen nicht ändert, wie z. B. Torsion. Man kann diesem Umstand auch dadurch Rechnung tragen, dass man das Medium als incompressibel annimmt, d. h. dass man die räumliche Dilatation ϑ gleich Null setzt. Die Hauptgleichungen nehmen in diesem Falle, da das erste Glied ihrer rechten Seiten unbestimmt wird, indem die unendlich grosse Zahl A mit der unendlich kleinen Zahl ϑ multiplicirt ist, die Gestalt an:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=B\Delta u+\frac{\partial\sigma}{\partial x},\quad \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=B\Delta v+\frac{\partial\sigma}{\partial y},\quad \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=B\Delta w+\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

worin σ eine, dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeiten analoge, vorläufig noch unbestimmte Grösse ist, welche aber zu berechnen ist mit Hinzuziehung der Incompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Die Bedingung $A=0$ hat gerade die entgegengesetzte physikalische Bedeutung, indem das Medium einer Volumenänderung gar keinen Widerstand entgegensetzt, wohl aber einer Gestaltsänderung.

Indess sind alle beide Verfügungen nach dem ursprünglichen Ansatz Cauchy's deshalb unstatthaft, weil die Constanten A und B nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation $B=\frac{1}{3}A$ mit einander verknüpft sind. Nach der Cauchy'schen Theorie ergiebt sich also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle $\sqrt{3}$ mal grösser, als die der transversalen, sodass beide oben gemachten Annahmen für die erstere zu denselben Folgerungen für die letztere führen, was aber unstatthaft ist.

Dieser Uebelstand ist dadurch herbeigeführt, dass Cauchy die Elasticitätstheorie auf nicht genügend allgemeinen Annahmen aufbaute, indem er die zwischen zwei Molekülen wirkenden Kräfte als nur von ihrer gegenseitigen Entfernung, nicht von der gegenseitigen Lage der Moleküle, abhängig einführte. Durch den Ausschluss dieser polaren Kräfte wird jene Relation $B=\frac{1}{3}A$ herbeigeführt, welche für ponderable isotrope elastische Körper sicher im Allgemeinen nicht gültig ist, wie neuere Versuche von Voigt[1]) zur Evidenz beweisen.

Man kann indessen diesem Uebelstand durch die erwähnte Verallgemeinerung, d. h. Einführung polarwirkender Molekularkräfte, abhelfen, oder auch dadurch, dass man überhaupt nicht auf diese zurückgeht, sondern für die elastischen Kräfte gewisse Relationen gewinnt nur aus der Annahme, dass man dieselben als dem Energieprincip unterworfen betrachtet, d. h. dass man für sie ein Potential annimmt. Diesen Ansatz hat zuerst Green[2]) gemacht. Setzt man voraus, dass im Ruhezustande, d. h. für $u=v=w=0$, das Medium keinerlei Druckkräften unterliege, so besitzt nach Green ein krystallinisches Medium im allgemeinsten Falle 21 Elasticitätsconstanten, nach Cauchy nur deren 15 — ein isotropes Medium

1) W. Voigt u. P. Drude, Gött. Nachr. No. 16, pag. 541. 1890.

2) G. Green, Camb. Phil. Trans. 7, pag. 120. 1838.

besitzt nach GREEN zwei von einander unabhängige Constanten, nach CAUCHY nur eine.

Es bildet sonach die Annahme von gewissen Festsetzungen des Werthes der Constanten A nichts Anstössiges, zumal da man auch von den Molekularwirkungen ausgehend, nur allerdings unter Berücksichtigung polarwirkender Kräfte, den allgemeinen GREEN'schen Ausdruck für das Potential eines elastischen Körpers erhalten kann, wie VOIGT[1]) gezeigt hat. — Indess ist von jenen beiden Verfügungen über A zunächst nur die erstere statthaft, indem $A = 0$ einen negativen Compressionswiderstand, d. h. ein labiles Gleichgewicht des Mediums zur Folge hat. Für stabiles Gleichgewicht musste $A > \frac{4}{3}B$ sein.

Die beiden Theorien von CAUCHY und GREEN unterscheiden sich nun gerade hinsichtlich der Verfügungen über A, indem ersterer A gleich Null (ja sogar, um besseren Anschluss an die späteren JAMIN'schen Beobachtungen zu gewinnen, gleich einer kleinen negativen Grösse) setzt, letzterer $A = \infty$ annimmt.

Erscheint schon aus diesem Grunde die GREEN'sche Theorie als theoretisch widerspruchsfreier, so ist dies noch mehr der Fall hinsichtlich der Aufstellung der Grenzbedingungen. GREEN stellte als solche die Gleichheit der Verrückungen der Aethertheilchen zu beiden Seiten der Grenze zweier Medien und die Gleichheit der normal zur Grenze wirkenden Druckkräfte in beiden Medien auf. Diese Grenzbedingungen werden noch heute als die bei einer einheitlichen elastischen Natur des lichtfortpflanzenden Mediums einzig möglichen anerkannt.

CAUCHY stellte dagegen als Grenzbedingungen[2]) sein sogenanntes Continuitätsprincip auf, nach welchem nicht nur die Verrückungen u, v, w zu beiden Seiten der Grenze einander gleich sein sollten, sondern auch deren nach der Normale genommene Differentialquotienten. CAUCHY ist es, trotz mannigfacher Bestrebungen, nicht gelungen, eine zwingende theoretische Herleitung dieser Grenzbedingungen zu geben[3]).

Die CAUCHY'schen Grenzbedingungen mit den GREEN'schen zu vereinigen und daher theoretisch zu rechtfertigen, ist allerdings möglich, falls man annimmt, dass die Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien die gleiche, dagegen seine Dichtigkeit eine verschiedene sei. Diese Annahme macht GREEN in der That, indess ist er dadurch auf die Betrachtung der Reflexion an isotropen Körpern beschränkt, da bei Krystallen eine mit der Richtung variabele Dichtigkeit zunächst nicht denkbar ist, insofern als die Dichtigkeit keine Vectorgrösse ist.

Der Erfolg ist nun aber entschieden auf Seiten der CAUCHY'schen Theorie, indem dieselbe für $A = 0$ die von FRESNEL[4]) zuerst für die Reflexion des Lichtes an isotropen Medien aufgestellten Formeln, welche mehrfach durch Beobachtungen nahezu bestätigt sind, zu liefern im Stande ist. Ja durch die

---

1) W. VOIGT, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, pag. 34. 1887.

2) CAUCHY hat in seiner Reflexionstheorie nur die Resultate der Rechnung angegeben. Eine analytische Herleitung derselben aus den CAUCHY'schen Grenzbedingungen gab F. EISENLOHR in POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858 und A. BEER in POGG. Ann. 91, pag. 467. 1854.

3) Es soll im vierten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt werden, dass man vom elektromagnetischen Standpunkt aus die Grenzbedingungen CAUCHY's und seine Verfügung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen rechtfertigen kann. — Vom rein elastischen Standpunkt aus ist mit Zuhülfenahme des Principes, dass die in einer Grenzschicht, d. h. Uebergangsschicht, auftretenden longitudinalen Wellen jenseit derselben stets verschwinden, das Problem der Reflexion von WEHNER (GRUNERT's Arch. (2) 9, pag. 337. 1890, vergl. auch VON DER MÜHL, Math. Ann. 27, pag. 506. 1886) behandelt.

4) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 190 u. 312. 1821; 46, pag. 225. 1823.

Annahme, dass A einen negativen kleinen Betrag habe, ergiebt die CAUCHY'sche Theorie auch die Modifikationen der FRESNEL'schen Formeln, welche nach den Beobachtungen JAMIN's[1]) an ihnen anzubringen sind, während die GREEN'sche Theorie Formeln ergiebt, welche gegenüber den FRESNEL'schen Abweichungen zeigen, die die Beobachtungsfehler weit überschreiten. — Zwar suchte HAUGHTON[2]) die GREEN'sche Theorie so zu modificiren, dass sie sich besser den Beobachtungen anpasste, indem er für die Grenzschicht zweier Mittel einen Brechungsexponenten annahm, welcher von dem im Innern derselben vorhandenen abweicht, und besonders nur auf das Verhalten der longitudinalen Wellen von Einfluss ist. Indess hat EISENLOHR[3]) und VON DER MÜHLL[4]) auf die Unhaltbarkeit der HAUGHTON'schen Annahmen hingewiesen.

Von den beiden genannten Theorien ist sonach die CAUCHY'sche jedenfalls die vorzuziehende, ihr haftet noch der Mangel an, dass die von CAUCHY getroffene Verfügung über diesen Werth der Grösse A zu einem labilen Gleichgewicht des elastischen Aethers führt. Diese Schwierigkeit ist in neuerer Zeit durch eine Untersuchung THOMSON's[5]) vermindert, indem er zeigte, dass für ein elastisches Medium A den Werth Null annehmen kann, ohne dass es instabil wird, wenn dasselbe nämlich von einem starren Gefäss begrenzt ist. So würde z. B. homogener luftloser Schaum, welcher durch Adhäsion an den Wänden des ihn einschliessenden Gefässes vor dem Zusammenfallen bewahrt ist, ein Medium von der Beschaffenheit darstellen, dass in ihm A gleich Null ist, während die Constante B einen positiven, von Null verschiedenen Werth besitzt. — Das Potential W der Volumeneinheit der elastischen Kräfte eines isotropen Körpers ist nämlich durch die Formel gegeben:

$$2W = A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + B\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$- 4B\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Volumenelement und integrirt sie über das ganze, vom starren Gefäss begrenzte Volumen, so kann man das letzte Glied der rechten Seite obiger Gleichung durch partielle Integration transformiren in ein Flächenintegral, welches über die Oberfläche des betrachteten Volumens zu erstrecken ist und dessen Elemente sämmtlich einen der drei Ausdrücke u, v, w als Faktoren enthalten und in ein Raumintegral, welches die Form hat

$$- 4B\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Weil wegen der als starr angenommenen Grenzen des Volumens u, v, w an der Oberfläche verschwinden, so bleibt nur der letzte Term übrig und das Gesammtpotential W' erhält die Form

$$2W' = \iiint dx\,dy\,dz\left\{A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left. + B\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}.$$

Hierdurch ist erwiesen, dass das Potential W' positiv bei jeder Art von

---

1) JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 29, pag. 263. 1850.

2) HAUGHTON, Phil. Mag. (4) 6, pag. 81. 1853.

3) F. EISENLOHR, POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858.

4) VON DER MÜHLL, Math. Ann. 27, pag. 506. 1886.

5) W. THOMSON, Phil. Mag. (5) 26, pag. 414. 1888.

Deformation bleibt, d. h. der Zustand des Mediums ein stabiler ist, wenn nur B positiv, und A keine negative Grösse ist. — Wenn also auch die Annahme CAUCHY's, dass A einen kleinen negativen Betrag besitze, nicht gerechtfertigt erscheint, so ist doch die Annahme des Werthes Null für A unanstössig. Diese liefert dann die FRESNEL'schen Reflexionsformeln, und auch die nach den JAMIN'schen Beobachtungen an ihnen anzubringenden Correctionen können von einer anderen Vorstellung aus durch Beibehaltung des Werthes $A = 0$ erhalten werden, wie unten gezeigt werden soll.

Ausserdem folgert THOMSON (nach einer ihm von GLAZEBROOK gemachten Mittheilung), dass eine weitere Bedingung der Stabilität des Gleichgewichts die Gleichheit des Werthes von B für alle Medien sei, d. h., dass sich der Aether in verschiedenen Medien nur hinsichtlich seiner Dichtigkeit unterscheiden könne. Hierdurch ist dann zugleich die Benutzung der CAUCHY'schen Continuitätsgleichungen als Grenzbedingungen theoretisch gerechtfertigt (s. oben pag. 650).

Man könnte noch die Frage aufwerfen, ob der Aether wirklich als von einem starren Gefäss umkleidet, d. h. in der Unendlichkeit als ruhend, anzunehmen sei. Indess hat die Beantwortung dieser Frage hier deshalb keine grosse Bedeutung, weil bei den bei der Lichtbewegung stattfindenden Deformationen das Gleichgewicht auch ohne diese Eigenschaft ein stabiles für positives B und verschwindendes A sein würde. Denn, wie GLAZEBROOK[1]) bemerkt hat, transformirt sich schon das Potential W der Volumeneinheit in die Summe zweier Quadrate, deren Coëfficienten A resp. B sind, bei jeder Wellenbewegung, bei welcher u, v, w Functionen derselben Function von x, y, z und t sind, da in diesem Falle die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

wie unmittelbar zu ersehen ist.

Zeigen diese Untersuchungen, dass die CAUCHY'sche Behandlung des Problems der Reflexion des Lichtes an isotropen Körpern theoretisch zu rechtfertigen ist bei gewissen Annahmen, zu denen nothwendig die Gleichheit der elastischen Kräfte des Aethers in allen Medien gehört, so sind die Continuitätsbedingungen nicht mehr statthaft für das Problem der Reflexion des Lichtes an einem Krystall. Denn für diesen muss man, falls man sich auf den Boden der hier genannten Klasse von Theorien stellt, welche den Aether als ein homogenes Medium behandeln, Verschiedenheit der elastischen, auf den Aether wirkenden Kräfte annehmen, falls man überhaupt eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgesetze des Lichtes von der Richtung im Krystall erhalten will. Die Rechnungen BRIOT's[2]), welcher durch Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen auf krystallinische Reflexion zu denselben Formeln, wie MAC CULLAGH (vergl. weiter unten) gelangte, jedoch unter Beibehaltung der FRESNEL'schen Annahme hinsichtlich der Lage der Lichtschwingungen zur Polarisationsebene, sind also vom Standpunkt der Elasticitätstheorie aus nicht als theoretisch streng begründet anzusehen; dass sie jedoch trotzdem mit dem Experiment in Uebereinstimmung sein können, soll im 4. Abschnitt dieses Capitels gezeigt werden.

---

[1]) R. T. GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) 26, pag. 521. 1888.

[2]) CH. BRIOT, Compt. rend. 64, pag. 956. 1867. — Liouv. Journ. (2) 12, pag. 185. 1867. — In Compt. rend. 31, pag. 422. 1850 findet sich eine Notiz, nach der CAUCHY schon vor BRIOT dieses Problem behandelt hat, jedoch habe ich das betreffende Mémoire nicht abgedruckt gefunden.

Betrachten wir jetzt eine andere Gruppe von Theorien, welche sich von der vorigen hauptsächlich hinsichtlich der Grenzbedingungen unterscheidet. Es war schon oben erwähnt, dass vom rein elastischen Standpunkt die Gleichheit der Elongationen und Druckcomponenten zu beiden Seiten der Grenze die einzig möglichen Grenzbedingungen sind. Wenn die hier zu nennenden Theorien andere Grenzbedingungen bilden, so bedeutet dieses ein Abweichen von der Auffassung des Aethers als eines homogenen elastischen Mittels; nur durch Berücksichtigung des Einflusses der ponderabeln Moleküle ist eine Begründung abweichender Grenzbedingungen zu erreichen. Da indess in Behandlung der Hauptgleichungen der genannte Einfluss unberücksichtigt bleibt, so mögen diese Theorien schon an dieser Stelle ihren Platz finden.

Die Benutzung der bisherigen Grenzbedingungen hat den Uebelstand, dass die Amplituden der longitudinalen Wellen an der Grenze zunächst immer mit zu berücksichtigen sind, auch wenn man ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit Null setzt. Es liegt dies daran, dass die früheren Grenzbedingungen 6 Gleichungen liefern, welche gleichzeitig zu erfüllen nicht möglich ist, falls man nur die transversalen Wellen in Rechnung zieht, da diese nur vier Unbekannte liefern, nämlich die Amplituden von zwei reflektirten und zwei gebrochenen Wellen. Diese Schwierigkeit umgehen[1]) die hier zu besprechenden Theorien, indem sie nur vier Grenzbedingungen bilden, und daher die longitudinalen Wellen ausser Betracht lassen.

Fresnel, welcher die ersten Formeln für die Reflexion des Lichtes an isotropen Körpern gegeben hat[2]), hat dieselben in der genannten Weise erhalten. Er stellte als Grenzbedingungen die Gleichheit der der Grenze parallelen Verrückungen der Aethertheilchen zu beiden Seiten derselben auf. Dadurch sind zwei Gleichungen gewonnen. Zwei weitere erhielt er durch die Annahme, dass die lebendige Kraft der einfallenden Lichtbewegung gleich der Summe der lebendigen Kräfte der reflektirten und gebrochenen Lichtbewegung sei. Diese Annahme involvirt zwei Gleichungen, da sie sowohl anzuwenden ist, falls das einfallende Licht parallel, als auch falls es senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Er nahm ferner an, dass der Aether in allen Medien gleiche Elasticität, aber verschiedene Dichte besässe, womit seine Annahme, dass die Polarisationsebene senkrecht zur Schwingungsrichtung läge, nothwendig verknüpft ist, um Uebereinstimmung mit der Beobachtung zu erhalten (s. oben pag. 647).

Fresnel hat seine Anschauung über die Constitution des Aethers nicht consequent durchgeführt, da er in seiner Doppelbrechungstheorie die Elasticität des Aethers als von der Richtung abhängig voraussetzte.

Unter Annahme der gleichen Grenzbedingungen, nur mit dem Unterschiede gegen Fresnel, dass die Dichtigkeit des Aethers in allen Medien als gleich, die Elasticität aber als verschieden gesetzt wurde, wodurch also auch die der vorigen entgegengesetzte Definition der Polarisationsebene nothwendig wurde, haben fast

---

[1]) Auch in andrer Weise ist es allerdings leicht, die Amplituden der longitudinalen Wellen aus den Grenzbedingungen zu eliminiren, wie im vierten Abschnitt gezeigt werden soll.

[2]) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 190 u. 312. 1821; 46, pag. 225. 1823. Es ist zu bemerken, dass Young schon im Jahre 1817 in dem Artikel Chromatics der Encyclopädia Britannica eine Reflexionsformel bei senkrechter Incidenz nach Analogie des Stosses elastischer Kugeln aufgestellt hatte. Die von ihm benutzte Idee des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft findet sich bei Fresnel wieder.

gleichzeitig MAC CULLAGH[1]) und F. NEUMANN[2]) das Reflexionsproblem behandelt, und zwar dehnten sie ihre Untersuchungen auch auf Reflexion an Krystallen aus, was nur bei der Annahme der variablen Elasticität möglich gemacht war.

Hinsichtlich der Verrückungscomponente senkrecht zur Grenze ergiebt sich nach diesen Theorien Gleichheit zu beiden Seiten derselben, eine Beziehung, die vom Standpunkte der Elasticitätstheorie nothwendig ist. Als Grenzbedingungen lassen sich also hier auch die Gleichheit sämmtlicher (nicht nur zur Grenze paralleler) Verrückungscomponenten zu beiden Seiten derselben und die Erhaltung der lebendigen Kräfte aufstellen, da durch die getroffene Verfügung über die Dichtigkeit des Aethers die so gewonnenen 5 Gleichungen nur 4 von einander unabhängigen äquivalent sind.

Nach dem FRESNEL'schen Ansatz folgt, dass die senkrecht zur Grenze stattfindenden Verrückungscomponenten in beiden Medien sich umgekehrt wie ihre Dichtigkeiten verhalten, eine Beziehung, welche ebenfalls vom Standpunkte der reinen Elasticitätstheorie nicht haltbar ist[3]). CORNU[4]) suchte jene Beziehung durch das Princip der Erhaltung der Bewegungsquantität zu beiden Seiten der Grenze zu rechtfertigen. Er benutzte dieses Princip in Verbindung mit dem der Erhaltung der lebendigen Kraft, um die FRESNEL'schen Ideen auch auf das Problem der krystallinischen Reflexion anzuwenden, und gelangte auf diese Weise zu Formeln, welche sich ebenso wie die von MAC CULLAGH und F. NEUMANN gegebenen der Erfahrung anschliessen. CORNU führt die Dichtigkeit als mit der Richtung im Krystall variabel ein. Damit wird der Standpunkt rein elastischer Theorien vollkommen verlassen und es ergeben sich gewisse Schwierigkeiten, welche weiter unten bei Besprechung der SARRAU'schen Theorie im Capitel: »Erweiterte Theorien« erörtert sind.

MAC CULLAGH verdankt man nicht nur eine elegante geometrische Darstellung der von FRESNEL bei der Reflexion an isotropen Körpern erhaltenen Gesetze, sondern auch eine Vereinfachung der für Krystalle gültigen Reflexionsgesetze durch Einführung der sogen. uniradialen Azimuthe, d. h. derjenigen Azimuthe der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, bei welcher nur ein gebrochener Lichtstrahl auftritt. — Die Anwendung der genannten Grenzbedingungen rechtfertigt MAC CULLAGH zunächst nur durch den Erfolg, indem sie zu Resultaten führen, welche mit den am Kalkspath angestellten Reflexionsbeobachtungen im Einklang stehen, gegen die später[5]) versuchte theoretische Begründung sind Einwände zu erheben, wie STOKES[6]) nachgewiesen hat. — In geometrischer Weise hat CORNU[7]) die Resultate MAC CULLAGH's noch weiter verfolgt.

In der genannten Arbeit hat F. NEUMANN in sehr vollständiger Weise das Problem der krystallinischen Reflexion behandelt und mannigfaltige, der Beobachtung direkt zugängliche Fälle untersucht, welche durch die damals vorliegenden Experimente durchaus bestätigt wurden, wie weiter unten des Näheren gezeigt werden soll. — NEUMANN behandelt den Aether als einen einheitlichen

---

[1]) MAC CULLAGH, Trans. of the Irish Acad. 13. 1837.

[2]) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

[3]) Ueber die Berechtigung dieser Beziehung vom Standpunkte der »erweiterten« Theorien vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 900. 1883.

[4]) A. CORNU, Compt. rend. 63, pag. 1058. 1866. — Ann. de chim. et de phys. (4) 11, pag. 283. 1867.

[5]) MAC CULLAGH, Trans. of Roy. Irish Acad. 21. 1839.

[6]) STOKES, Rep. of the Brit. Assoc. 1862, pag. 253.

[7]) A. CORNU, Compt. rend. 60, pag. 47. 1865.

elastischen Körper, die Anwendung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte als Grenzbedingung erklärt er demnach nicht für theoretisch gerechtfertigt, da in seiner Betrachtungsweise longitudinale Wellen nicht ausgeschlossen sind, und demnach von vornherein nicht einzusehen wäre, warum solche bei der Reflexion nicht ebenfalls entstehen sollten. Er rechtfertigt jene Grenzbedingung durch die Erfahrung, nach der es Körper wirklich giebt, für welche bei der an ihnen stattfindenden Reflexion die Intensität des einfallenden Lichtes gleich ist der Summe der Intensitäten des reflektirten und gebrochenen. — Auch in der schon früher von NEUMANN[1]) gegebenen Theorie der Doppelbrechung, welche zu ähnlichen Resultaten wie die CAUCHY'sche Theorie führte, nur unter der entgegengesetzten Annahme über die Lage der Polarisationsebene, treten noch drei Wellensysteme auf, von denen zwei nahezu transversal[2]) und eines nahezu longitudinal ist.

Die Resultate F. NEUMANN's sind in eleganter Weise von G. KIRCHHOFF[3]) abgeleitet, aber mit der Abänderung, dass vorausgesetzt wird, dass bei der Lichtbewegung Dichtigkeitsänderungen des Aethers nicht vorkommen. Hierdurch wird das Zustandekommen von longitudinalen Wellen ausgeschlossen und es können nur rein transversale existiren.

Die Incompressibilitätsbedingung ist als eine vierte Hauptgleichung in die Rechnung von C. NEUMANN[4]) zuerst eingeführt.

Wie C. NEUMANN hervorgehoben hat, ist durch die Incompressibilitätsbedingung noch nicht die Gleichheit der Dichte des Lichtäthers in allen Medien bedingt. Denn durch jene Bedingung ist nur ausgesprochen, dass der Aether so schwachen Kräften gegenüber, wie sie bei der Lichtbewegung wirken, als merklich incompressibel anzusehen ist, während wohl die von den ponderabeln Körpern auf den Aether ausgeübten Kräfte eine solche Grösse besitzen können, dass sie den Aether je nach Massgabe derselben verdichten. — C. NEUMANN erhielt nach seinem Ansatz zunächst ein Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Krystall, welches viel complicirter war, als das FRESNEL'sche. Die Reduction auf dasselbe nahm er aber nicht, wie CAUCHY und F. NEUMANN thaten, rein mathematisch vor, sondern er gewann dieselbe auf Grund zweier physikalischer Annahmen, nämlich

1) Dass die Anordnung der Aethertheilchen innerhalb eines Krystalls nur wenig von der innerhalb eines isotropen Körpers stattfindenden verschieden sei.

2) Dass das Gesetz, nach welchem die Aethertheilchen auf einander wirken, aus zwei Gliedern bestehe, von denen das eine der 4., das andere der 6. Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sei.

Die Reduction auf das FRESNEL'sche Gesetz lässt sich nach LAMÉ[5]) noch einfacher erreichen.

Derselbe ging aus von den Hauptgleichungen eines krystallinischen Körpers, welche im allgemeinsten Falle 21 Coëfficienten enthalten. Unter Zugrundelegung der Annahme, dass im Medium ebene transversale Wellen möglich sind, und dasselbe incompressibel ist, reduciren sich jene Coëfficienten auf sechs und durch

---

[1]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 25, pag. 418. 1832.

[2]) Die Schwingungsrichtung ergiebt sich senkrecht zum Strahl, nicht zur Wellennormale.

[3]) G. KIRCHHOFF, Abhandl. der Berl. Acad. 1876.

[4]) C. NEUMANN, Math. Annal. 1, pag. 325. 1869. — 2, pag. 182. 1870. Vergl. auch die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle 1863, pag. 34, § 8.

[5]) LAMÉ, Leçons sur la théorie de l'élasticité. Paris 1866.

passende Wahl des Coordinatensystems auf nur drei, sodass die Hauptgleichungen schliesslich die Gestalt annehmen:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Das Medium zeigt hinsichtlich seines optischen Verhaltens Symmetrie nach den drei Coordinatenebenen. Es ist bemerkenswerth, dass diese Symmetrie lediglich aus den gemachten Annahmen folgt, ohne Voraussetzung irgend welcher schon existirender Symmetrieebenen, sodass die Krystalle also hinsichtlich ihres optischen Verhaltens eine höhere Symmetrie zeigen, als z. B. hinsichtlich ihres elastischen oder geometrischen.

Aus den Gleichungen folgt direkt das FRESNEL'sche Gesetz, es muss dabei die NEUMANN'sche Definition der Polarisationsebene angenommen werden.

Zu derselben Gestalt der Differentialgleichungen führt der von GREEN[1]) gegebene Ausdruck für das Pontential des Lichtäthers. Es ist zu bemerken, dass die Incompressibilitätsbedingung völlig hinreichen muss, um die GREEN'schen und LAME'schen Resultate abzuleiten, denn aus derselben folgt die Existenz rein transversaler Wellen von selbst. Diese Ableitung ist auch leicht auf einem von P. VOLKMANN[2]) eingeschlagenen Wege möglich.

In der citirten Abhandlung benutzt KIRCHHOFF die erwähnten LAME'schen Gleichungen. Die NEUMANN'sche Grenzbedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft der Lichtbewegung ersetzt er durch das später nach ihm benannte KIRCHHOFF'sche Princip, welches aussagt, dass die an der Grenze zweier Medien geleistete Arbeit der auf den Aether wirkenden Kräfte verschwindet. KIRCHHOFF begründet sein Princip mit dem Hinweis darauf, dass die ponderabeln Theilchen auf den Aether an der Grenze unbekannte Druckkräfte ausübten. Diese verhindern daher die in der reinen Elasticitätstheorie angewandten Grenzbedingungen aufzustellen, da man die sämmtlichen in der Grenze wirkenden Drucke nicht kennt. Die KIRCHHOFF'sche Grenzbedingung ist dann ein Ausdruck dafür, dass beim Acte der Reflexion kein Energieverlust eintritt, jedoch ist jene Bedingung hierfür noch nicht der allgemeinste Ausdruck, wie VOIGT[3]) gezeigt hat. Das KIRCHHOFF'sche Princip ist der FRESNEL-NEUMANN'schen vierten Grenzbedingung äquivalent, hat aber vor letzterer den Vortheil voraus, dass es auch für den Fall der Totalreflexion angewandt werden kann, während dort die NEUMANN'sche Grenzbedingung durch eine andere ersetzt werden muss[4]). — Eine mathematische Schwierigkeit, welche die NEUMANN-KIRCHHOFF'sche Theorie zunächst bietet, ist die Reduction der Grenzbedingungen auf lineare Gleichungen im Falle der Reflexion an Krystallflächen. Es gelingt dies jedoch durchaus.

---

[1]) G. GREEN, Cambr. Philos. Trans. 7, pag. 120. 1839.

[2]) P. VOLKMANN, WIED. Ann. 35, pag. 354. 1888. Wegen der mangelnden Strenge der dort angewandten Schlussweise, vergl. P. VOLKMANN, physikal. ökonom. Ges. in Königsbg. 31. Jahrg. 1890, pag. 7 Anmerkg. Die dort gemachte Verbesserung der Schlussweise ist ebenfalls nicht zwingend, durch eine kleine Abänderung kann jedoch das Verfahren leicht einwandsfrei gemacht werden. Vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 43, pag. 421. 1891.

[3]) W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 701. 1883.

[4]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 40, pag. 510. 1837.

Genannte Reduction ist ohne weiteres auszuführen bei der Reflexion an isotropen Körpern. Für diese ergeben sich die FRESNEL'schen Formeln, aber unter Zugrundelegung der der FRESNEL'schen entgegengesetzten Definition der Polarisationsebene.

b) Erweiterte Theorien.

Unter diesem Namen sollen diejenigen Theorien verstanden werden, welche eine Erweiterung der bisher genannten Vorstellungen vornehmen, um ein grösseres Gebiet optischer Erscheinungen in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen zu können. — Diese Erweiterung wird meist[1]) dadurch gewonnen, dass der Einfluss der ponderabeln Theile des Mediums auf die Lichtbewegung mit berücksichtigt wird, sei es nun, dass derselbe ein direkter, irgend welchen unmittelbar zwischen Aether und Materie wirkenden Kräften entsprechender ist, sei es, dass er indirekt durch Veränderung der Constitution des Aethers, welche durch die Anwesenheit der ponderabeln Moleküle veranlasst ist, herbeigeführt wird.

CAUCHY bemerkte, dass er in seiner Lichttheorie vom rein elastischen Standpunkte aus die Erscheinungen der Dispersion, sowie diejenigen, welche die sogen. optisch activen Medien, wie Quarz und Zuckerlösungen, zeigen, nicht erklären konnte. Letztere Medien sind dadurch charakterisirt, dass die Polarisationsebene von linear polarisirtem Lichte, welches senkrecht auf eine Platte jener Substanzen auffällt, nach dem Austritt gegen die ursprüngliche Lage gedreht erscheint.

Die Erweiterung seiner Theorie nahm CAUCHY[2]) dadurch vor, dass er in der Entwickelung der relativen Entfernung zweier Aethertheilchen sich nicht nur auf erste Differentialquotienten der Elongationen nach den Coordinaten beschränkte. Dies Verfahren begründete er mit der Annahme, dass der Radius der Wirkungssphäre der Aethertheilchen mit der Länge der Lichtwelle vergleichbar sei. Dadurch wird in der That eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge gewonnen.

Bedeutet n den Brechungsexponenten eines Mediums gegen den leeren Raum, λ die Wellenlänge des Lichtes in dem Medium, so folgt nach CAUCHY

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$$

Diese Formel ist insofern noch nicht direkt auf Beobachtungen anwendbar, als λ von n abhängt. Nennt man die Wellenlänge des angewandten Lichtes im leeren Raum λ_0, so kann man unter der Annahme, dass sämmtliche Coëfficienten der obigen unendlichen Reihe klein gegen ihre vorangehenden seien, also z. B. dass B klein gegen A, C klein gegen B sei etc., leicht die Formel ableiten

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4} + \ldots$$

Zur angenäherten Darstellung der Thatsachen genügen oft die beiden ersten Glieder dieser Reihe. — Man gelangt indess zu einer besseren Darstellung der Beobachtungen, wenn man in der ursprünglichen CAUCHY'schen Formel nicht die Kleinheit von B gegen A voraussetzt, dagegen die übrigen Coëfficienten C etc.

---

[1]) Hiervon macht eine Ausnahme die oben genannte Dispersionstheorie von CAUCHY, sowie eine Theorie von K. PEARSON (Proc. Lond. Math. Soc. 20, pag. 297. 1889), in welcher die erweiternde Annahme eingeführt wird, dass die elastischen Kräfte auch von der Geschwindigkeit der Moleküle abhängen. — Ebenso basirt die Theorie von DE COLNET-D'HUART (Publ. de l'Inst. de Luxembourg, 1890) auf einer anderen Erweiterung. Nach ihr sollen die Aethertheilchen nicht als ausdehnungslose Punkte aufzufassen sein.

[2]) CAUCHY, Mém. sur la dispersion de la lumière. Prague 1835.

gleich Null setzt. — Man kann dann nach CHRISTOFFEL[1]) n leicht aus einer quadratischen Gleichung berechnen.

Nach CAUCHY's Auffassung von der Ursache der Dispersion müsste der freie Aether ebenfalls Dispersion zeigen. Dagegen sprechen ganz entschieden einige astronomische Beobachtungen, z. B. die Farbenfolge variabler Sterne[2]). — Daher gab F. NEUMANN[3]) die Erklärung der Dispersion durch die Einwirkung der ponderablen Theile auf den Aether, indem er erstere als unbewegt annahm, was bei der im Vergleich zur Aetherdichte ausserordentlich hohen Körperdichte zunächst plausibel ist, und zwischen ponderablen und Aethertheilchen ein dem elastischen (zwischen zwei Aethertheilchen wirkenden) Kraftgesetze analoges annahm.

In anderer Weise erklärte BRIOT[4]) die Dispersion. Er nahm an, dass die ponderablen Theile dadurch von Einfluss auf die optischen Erscheinungen seien, dass sie den Lichtäther in ihrer Umgebung verdichteten, sodass derselbe nicht eine überall constante Dichtigkeit und Elasticität besitzt, sondern eine bei regelmässiger Anordnung der ponderablen Moleküle periodisch wechselnde. Die Hauptgleichungen enthalten in Folge dessen Coëfficienten, welche periodische Functionen des Orts sind. Aus diesen Hauptgleichungen können, wie schon CAUCHY[5]) angegeben hat, Hilfsgleichungen mit constanten Coëfficienten abgeleitet werden, welche die Mittelwerthe der Verrückungen u, v, w angeben. Diese nehmen dann eine Gestalt an, welche in der That die Dispersion zur Folge hat.

Die von BRIOT erhaltenen Resultate hinsichtlich der Kraftgesetze, welche zwischen den Aethermolekülen, resp. zwischen den Aether- und Körpermolekülen wirken sollen, dass nämlich erstere sich mit einer der 6. Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen, letztere mit einer der 2. Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft sich anziehen, sind deshalb nicht einwandsfrei, weil zu ihrer Herleitung die zu speciell gefasste POISSON'schen Elasticitätstheorie (cf. pag. 649) benutzt wird. Ausserdem führt BRIOT diese Anschauungen nicht consequent durch, indem er bei der Erklärung der Reflexion die von CAUCHY getroffene Festsetzung adoptirt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ausserordentlich klein sei (cf. pag. 650). Dies tritt aber mit den obigen Kraftgesetzen in Widerspruch, wie GLAZEBROOK[6]) bemerkt hat. — Auch bei der Behandlung der Reflexion an Krystallflächen benutzt BRIOT[7]) die CAUCHY'schen Grenzbedingungen und erhält die MAC CULLAGH'schen Formeln (vergl. oben pag. 654).

Wie wir aber oben (pag. 650) sahen, ist die Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen vom elastischen Standpunkt aus nur gestattet, wenn die Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien sowohl, als auch in verschiedenen Richtungen ein und desselben Krystalls dieselbe ist. Diese Annahme, mit Bei-

---

1) CHRISTOFFEL, POGG. Ann. 117, pag. 27. 1862.

2) Vergl. dazu VERDET, Wellentheorie, deutsch von K. EXNER, Braunschw. 1884, 2. Bd., pag. 11.

3) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1841.

4) BRIOT, Essai sur la théorie mathématique de la lumière. Paris 1864.

5) CAUCHY, Compt. rend. 30, pag. 17. 1850. Derselbe hat die hier dargelegte Auffassung einer periodisch wechselnden Struktur des Aethers zuerst ausgesprochen, hat sie aber nicht zur Dispersionserklärung verwandt, sondern vielmehr an Stelle der periodisch wechselnden Dichte des Aethers eine mittlere gleichmässige gesetzt.

6) R. T. GLAZEBROOK, Rep. of the Brit. Assoc. 1886, pag. 165.

7) BRIOT, Liouv. Journ. (2) 11, pag. 305. 1866. — 12, pag. 185. 1867.

behaltung der Grundanschauungen CAUCHY's und BRIOT's hat SARRAU[1]) gemacht, indem er allein die Dichte des Aethers als eine periodische Function einführte, die Elasticität aber überall als constant annahm. Dies hat zur Folge, dass in den Hilfsgleichungen eine mit der Richtung im Krystall variable Dichtigkeit auftritt, und für dieses vom rein elastischen Standpunkte schwer verständliche Verhalten ist also hierdurch eine physikalische Erklärung gegeben. — Indess hat die bei periodisch wechselnder Dichtigkeit constante Elasticität wenig Wahrscheinlichkeit für sich[2]). SARRAU hat das Reflexionsproblem nicht behandelt. Die Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingung als Grenzbedingung würde, selbst wenn die Constitution des Aethers die angenommene wäre, ohne weiteres nicht evident sein, da wir es bei dieser Vorstellung keineswegs mit einem rein elastischen Problem zu thun haben[3]).

In anderer, wie in der bisher erörterten Weise, hat v. LANG[4]) den Einfluss der ponderablen Körper in seiner Theorie der Doppelbrechung berücksichtigt, indem er die auf den Aether wirkenden Kräfte als lediglich von der relativen Entfernung der Aether- von den Körpertheilchen abhängig einführt. Dieser Standpunkt ist indess nicht streng zu rechtfertigen, da auf den Aether jedenfalls auch Kräfte wirken, welche von den Dilatationen im Aether abhängen.

Die Theorie von CHALLIS[5]) mag hier unerörtert bleiben, da sie nicht zum FRESNEL'schen Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Krystall führt. Dagegen ist die Theorie von RAYLEIGH[6]) bemerkenswerth, da sie den Einfluss der ponderablen Theilchen in einer einfachen Weise zu deuten sucht. Der Aether wird als ein in allen Körpern gleich beschaffener homogener Körper angenommen, in welchem die ponderablen Theilchen gleichsam schwimmen. Der bei der Bewegung des umgebenden Aethers hervorgerufene hydrodynamische Widerstand derselben hängt von den Beschleunigungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ etc. ab, und kann in einem krystallinischen Mittel mit der Richtung variiren, da er nicht nur von der Grösse des einzelnen ponderablen Moleküls, sondern auch von der Anordnung der benachbarten Moleküle im Aether abhängt. Jener hydrodynamische Widerstand vergrössert also in den Hauptgleichungen den Coëfficienten der Differentialquotienten der Verrückungen nach der Zeit, d. h. scheinbar die Dichte des Aethers, und zwar in verschiedenen Richtungen verschieden.

Nimmt man an, dass die Gesetze jenes Widerstandes eine Symmetrie nach

---

1) SARRAU, Compt. rend. 60, pag. 1174. 1865. Liouv. Journ. (2), 12, pag. 1. 1867; 13, pag. 59. 1868.

2) Wegen weiterer Bedenken hinsichtlich der SARRAU'schen Theorie vergl. DE ST. VÉNANT, Ann. de chim. et de phys. (4) 25, pag. 335. 1872, und SARRAU, Ann. de chim. et de phys. (4) 28, pag. 266. 1873.

3) Betreffs weiterer Untersuchungen über die BRIOT'sche und SARRAU'sche Dispersionstheorie vergl. E. CARVALLO, Ann. de l'éc. norm. (3) 7, Suppl., pag. 3. 1890. — Compt. rend. 112, pag. 431, 521. 1891. — Journ. de Phys. (2) 10, pag. 53. 1891. Eine Darstellung auch noch anderer Theorien der normalen Dispersion (von BORCH, REDTENBACHER, EISENLOHR) hat A. BREUER (Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Hannover 1890) gegeben. — RÉNARD hat ferner in Compt. rend. 64. 1867 die Grundzüge einer besonderen Dispersionstheorie gegeben.

4) v. LANG, POGG. Ann. 159, pag. 168. 1876.

5) CHALLIS, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 524. 1862.

6) RAYLEIGH, Phil. Mag. (4) 41, pag. 519. 1871.

drei zu einander rechtwinkligen Ebenen besitzen, so nehmen, unter Benutzung derselben als Coordinatenebenen, die Hauptgleichungen die Gestalt an:

$$\rho_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + B \Delta u,$$

$$\rho_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + B \Delta v,$$

$$\rho_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + B \Delta w,$$

RAYLEIGH nimmt den Aether als incompressibel an, d. h. er setzt $A = \infty$, $\vartheta = 0$, $(A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ etc. (cf. pag. 649). Dadurch wird er auf ein vom FRESNEL'schen abweichendes Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geführt. Durch die Modifikation, die GLAZEBROOK[1]) an obigem Ansatz vorgenommen hat, indem er nämlich $A = 0$ setzte, führt indess obige Theorie zum FRESNEL'schen Gesetze für zwei quasi transversale Wellen, d. h. solche, deren Schwingungen senkrecht zum Strahl stehen, und auf diese Weise zu keinem Widerspruch mit der Erfahrung.

Es lässt sich indess nicht verkennen, dass der hier gemachte Ansatz für den Einfluss der ponderablen Körper, wenn er auch gewisse Anschaulichkeit besitzt, doch zu specieller Natur ist, als dass man ihn als einzig möglichen hinstellen könnte. Und in der That muss er verallgemeinert werden, wenn man noch andere Gebiete der Optik in den Kreis der Betrachtungen hineinziehen will, wie wir an der BOUSSINESQ'schen Theorie sehen werden, von der die hier erörterte nur ein specieller Fall ist.

Die bisher besprochenen Theorien bilden nur ein System von Hauptgleichungen, welches für die Elongationen der Aethertheilchen aufgestellt wird. — In vollständigerer Weise berücksichtigt eine andere Gruppe von Theorien den Einfluss der ponderablen Theile auf die Bewegung des Aethers, indem auch für die ponderablen Moleküle ein System von Hauptgleichungen aufgestellt wird. Dieses Verfahren wird nothwendig, wenn man die Annahme fallen lässt, dass die ponderablen Theile bei der Lichtbewegung in Ruhe verbleiben. Der Hauptvortheil, welcher durch diesen allgemeineren Ansatz erreicht wird, ist, dass auch die anomale Dispersion dadurch eine Erklärung findet. Da dieselbe aber stets mit Absorption verknüpft ist, sollen diese Theorien an späterer Stelle (Theorie der anomalen Dispersion) näher behandelt werden. — Es mag hier nur kurz erwähnt werden, dass LOMMEL[2]) und KETTELER[3]) auch Anwendungen ihrer Formeln auf krystallinische Medien mit nicht starker Absorption, d. h. normaler Dispersion gemacht haben. — Letzterer passt dabei seine Theorie dem FRESNEL'schen Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Krystallen an, dagegen führt die Theorie LOMMEL's zu einem vom FRESNEL'schen abweichenden Gesetze. — Diese Abweichung führt derartige Differenzen herbei, dass sie, wie HOLLEFREUND[4]) zeigte, die Beobachtungsfehler der von W. KOHLRAUSCH[5]) am Natronsalpeter an-

---

[1]) R. T. GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) 26, pag. 521. 1888.

[2]) E. LOMMEL, WIED. Ann. 4, pag. 55. 1878; 14, pag. 523. 1881; 15, pag. 378. 1882.

[3]) E. KETTELER, WIED. Ann. 7, pag. 94 u. 107. 1879; 12, pag. 363. 1881; 16, pag. 86. 1882; 18, pag. 631. 1883; 21, pag. 199. 1884; 22, pag. 204 u. 590. 1884. — Theoretische Optik. Braunschw. 1885.

[4]) K. HOLLEFREUND, Nova Acta Acad. Leopold. 46, No. 1. 1883.

[5]) W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 6, pag. 86. 1879

gestellten Messungen überschreiten. Daher ist die LOMMEL'sche Theorie als nicht mit der Erfahrung im Einklang stehend anzusehen[1]).

III. Theorien der resultirenden Wirkungen.

Die Theorien dieser Gattung unterscheiden sich von den vorhin beschriebenen dadurch, dass sie hinsichtlich des Einflusses, welchen die ponderablen Moleküle auf die Bewegung der Aethermoleküle ausüben, keine speciellen, aus anderen Gebieten der Physik bekannten Vorstellungen zu Grunde legen, sondern denselben nach allgemeinen Gesichtspunkten zu bestimmen suchen. Die sich dabei ergebenden Formen für die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie bieten, auch wenn dergestaltete Kraftgesetze bei anderen einfacheren physikalischen Erscheinungen bisher noch nicht auftreten, deshalb nichts an sich Unwahrscheinliches, weil dieselben als Resultanten von irgend welchen Einzelwirkungen anzusehen sind, deren Gesetze aber unbekannt und für das Wahrnehmbare der Erscheinungen unwesentlich sind.

Bezeichnen, wie vorhin, u, v, w die Elongationen der Aethertheilchen aus der Ruhelage, U, V, W die der ponderablen Theilchen, ferner m, resp. μ die Dichtigkeit des Aethers, resp. der Materie, so sind die Bewegungsgleichungen, falls keinerlei äussere Kräfte wirken:

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X_1 + X_2, & m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y_1 + Y_2, & m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z_1 + Z_2, \\ \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \Xi_1 + \Xi_2, & \mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2, & \mu\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bezeichnen X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der auf den Aether von den umgebenden Aethertheilchen, Ξ_1, H_1, Z_1 diejenigen der auf die ponderablen Theile von den umgebenden ponderablen Theilen ausgeübten inneren Kräfte X_2, Y_2, Z_2, Ξ_2, H_2, Z_2 die Componenten der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether. Sämmtliche Kräfte sind auf die Volumeneinheit bezogen und aufzufassen als die Differenz der im ursprünglichen und im verschobenen Zustande wirkenden Kräfte. Wenn man annimmt, dass die Wechselwirkungen nur als von Theilen desselben Volumenelementes herrührend anzusehen sind, was der Fall ist, wenn die Wirkungssphäre der zwischen Aether und Materie wirkenden Kräfte klein gegen die Dimensionen des Volumenelementes ist, so finden die Beziehungen statt:

$$X_2 = -\Xi_2, \quad Y_2 = -\mathrm{H}_2, \quad Z_2 = -\mathrm{Z}_2. \tag{2}$$

In den hier zu betrachtenden Theorien wird nun der Aether als isotrop und in allen Körpern von gleicher Beschaffenheit angenommen. Demnach werden allgemein für X_1, Y_1, Z_1 die aus der Elasticitätstheorie sich ergebenden Formeln angenommen, nämlich (cf. pag. 647).

$$\begin{aligned} X_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + B\Delta u, \\ Y_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + B\Delta v, \\ Z_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + B\Delta w, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{wobei}\quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

---

[1]) Betreffs theoretischer Discussionen vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 17, pag. 468. 1882; 20, pag. 444. 1883. — E. LOMMEL, WIED. Ann. 19, pag. 908. 1883. — Ferner bezüglich der KETTELER'schen Theorie: W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 691. 1883; 21, pag. 534; 23, pag. 159. 1884. — E. KETTELER, WIED. Ann. 21, pag. 178; 22, pag. 217. 1884.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der X_2, Y_2, Z_2. Da μ ausserordentlich viel grösser ist als m, und da, wie aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleiche Grössenordnung mit $\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ hat, so ist U neben u zu vernachlässigen, falls es eben nicht mit dem Faktor μ multiplicirt auftritt. In der Theorie von BOUSSINESQ[1]) wird nun angenommen, dass die Elongationen U, V, W der ponderablen Theile aus der Ruhelage überhaupt so klein seien, dass dadurch merkliche elastische Kräfte Ξ_1, H_1, Z_1, nicht geweckt werden. Durch Addiren der beiden Gleichungssysteme (1) kann man daher die Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether eleminiren und erhält:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=X_1,\quad m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=Y_1,\quad m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=Z_1. \tag{4}$$

Von den ponderablen Theilen wird angenommen, dass ihre Schwingungsdauer gleich der der Aethertheilchen sei, und dass ihre Elongationen sich bestimmen durch die Elongationen u, v, w an der Stelle x, y, z, sowie durch die der benachbarten Stellen, d. h. es müssen die U, V, W Functionen der u, v, w und deren Differentialquotienten nach den Coordinaten sein. Es ist von vornherein plausibel, anzunehmen, dass die Coëfficienten der Entwickelung der U, V, W nach den Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten mit wachsender Ordnungszahl der Differentialquotienten abnehmen, da ja für die U, V, W in erster Annäherung nur das Verhalten der unmittelbar anliegenden Aethertheilchen massgebend sein wird, und erst in weiterer Annäherung das der entfernteren. BOUSSINESQ geht nun in der Entwickelung bis auf zweite Differentialquotienten und bestimmt die Coëfficienten derselben lediglich nach Symmetrierücksichten.

Für isotrope Medien, d. h. solche, für welche bei beliebiger Drehung des Coordinatensystems um den Anfangspunkt die Kräfte denselben Werth behalten, ergiebt sich die Form

$$\begin{aligned}
U &= au + b\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+c\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+d\Delta u,\\
V &= av + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+c\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+d\Delta v,\\
W &= aw + b\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+c\frac{\partial \vartheta}{\partial z}+d\Delta w,
\end{aligned} \tag{5}$$

Es giebt isotrope Medien, welche noch eine höhere Symmetrie als die bisher benutzte aufweisen, bei denen nämlich auch jede Coordinatenaxe in die entgegengesetzte Richtung gelegt werden darf, ohne dass sich dadurch die Kräfte ändern. Diese Medien werden i s o t r o p - s y m m e t r i s c h genannt, im Gegensatz zu den vorhin betrachteten, i s o t r o p - d i s s y m e t r i s c h e n, bei welchen nur das Coordinatensystem als ganzes gedreht werden darf. Bei ersteren müssen die Gleichungen (5) unverändert bestehen bleiben, wenn man z. B. x mit $-x$, u mit $-u$, U mit $-U$ vertauscht. In Folge dessen müssen dort die b verschwinden, und es bleibt für die U, V, W die Form:

$$\begin{aligned}
U &= au + c\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+d\Delta u,\\
V &= av + c\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+d\Delta v,\\
W &= aw + c\frac{\partial \vartheta}{\partial z}+d\Delta w,
\end{aligned} \tag{5'}$$

[1]) U. BOUSSINESQ, Compt. rend. 65, pag. 235 u. 672. 1867. — Liouville Journ. (2) 13, pag. 313, 340 u. 425. 1868; 17, pag. 167. 1872; 18, pag. 361. 1873. — Ann. de chim. et de phys. (4) 30, pag. 539. 1873.

Die Gleichungen (5) resp. (5') in die Gleichungen (4) mit Rücksicht auf (3) eingesetzt, ergeben die Hauptgleichungen der Theorie. Es ergeben sich für isotrop-symmetrische Mittel eine transversale und eine longitudinale Welle, deren Geschwindigkeit gerade wie in den vorhin betrachteten Theorien die Grösse $\sqrt{A}$ [cf. Formeln (3)] im Zähler enthält, deren Einfluss auf die optischen Erscheinungen, d. h. bei den transversalen Wellen, man also durch die Annahmen $A = \infty$, oder $A = 0$ vernichten kann.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen ergiebt sich eine Abhängigkeit von der Schwingungsdauer, wie sie den von anderen Theorien, z. B. der CAUCHY'schen, aufgestellten Dispersionsformeln in erster Annäherung entspricht. Es wird Identität mit jenen Formeln erreicht, wenn die Entwickelung der U, V, W nach Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten auf weitere, als zweite, ausgedehnt wird.

Für die isotrop dissymmetrischen Medien ergiebt sich in völliger Uebereinstimmung mit der Erfahrung die für sie charakteristische Drehung der Polarisationsebene. In der bisherigen Annäherung ist dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge, und dies war die von BIOT[1]) experimentell zuerst aufgestellte Formel, in weiterer Annäherung wird sie mit der BOLTZMANN'schen Formel[2]) identisch, welche bisher als sehr gut sich den Beobachtungen anschliessend erkannt ist.

Nach den einfachen Vorstellungen der BOUSSINESQ'schen Theorie lässt sich das optische Verhalten von Mischungen in gewissen Fällen leicht berechnen[3]). In solchen müssen an Stelle der Ausdrücke $\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ etc. in den Formeln (4) die Summen:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} + \,.\,.$$

treten, wo die verschiedenen Indices sich auf die verschiedenen in der Mischung enthaltenen ponderablen Substanzen beziehen. Unter der Voraussetzung nun, dass eine jede derselben auf die Aetherbewegung so wirkt, als ob sie allein vorhanden wäre, erhält man sofort die Gesetze:

1) Abgesehen von der Dispersion ist das Brechungsvermögen eines Gemisches gleich der Summe der Brechungsvermögen seiner Bestandtheile, und jedes derselben ist proportional der Dichtigkeit derselben. Hierin ist das Brechungsvermögen einer Substanz definirt als das Quadrat ihres Brechungsexponenten gegen den leeren Raum (freien Aether) vermindert um 1. Dies Gesetz ist bei Gasen bestätigt und wird vermuthlich ebenso bei stark verdünnten Lösungen Gültigkeit besitzen,

2) Abgesehen von der Dispersion ist das Drehungsvermögen[4]) eines Gemisches gleich der Summe der Drehungsvermögen seiner Bestandtheile, und jedes derselben ist proportional der Dichtigkeit derselben. Auch dieses Gesetz ist annähernd bei Lösungen bestätigt.

Für die Krystalle nimmt BOUSSINESQ an, dass für sie die Abweichung vom isotropen Verhalten nur eine geringe sei. Dies hat zur Folge, dass nur die Coëfficienten der Anfangsglieder (d. h. der u, v, w) der Entwickelung der U, V, W

---

[1]) BIOT, Mém. de l'Acad. des scienc. 2, pag. 41. 1818.

[2]) L. BOLTZMANN, POGG. Ann. Jubelbd., pag. 129. 1874.

[3]) M. BOUSSINESQ, Liouv. Journ. (2) 13, pag. 425. 1868.

[4]) d. h. der Betrag der Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang linear polarisirten Lichtes durch eine Schicht der Dicke 1.

als mit der Richtung variabel anzusehen sind, während die Coëfficienten der in der Entwickelung auftretenden Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten, da sie ohnehin schon klein sind, dieselbe Form besitzen, wie in isotropen Medien. Dies führt, falls der Krystall drei zu einander rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, und diese zu Coordinatenebenen gewählt werden, unmittelbar zu folgenden Formeln:

$$U = a(1+\alpha)u + c\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + d\Delta u,$$
$$V = a(1+\beta)v + c\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + d\Delta v,$$
$$W = a(1+\gamma)w + c\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + d\Delta w,$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (4) ein und berücksichtigt, dass bei periodischen Schwingungen der u, v, w mit der Periode T die Beziehung stattfindet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}w,$$

so werden die Hauptgleichungen:

$$\begin{aligned}
[m+\mu a(1+\alpha)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta u,\\
[m+\mu a(1+\beta)]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta v, \qquad (7)\\
[m+\mu a(1+\gamma)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta w.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Gestalt, wie die RAYLEIGH'schen und GLAZEBROOK'schen (cf. pag. 660). Man erkennt, dass letztere nur ein specieller Fall der BOUSSINESQ'schen Theorie sind, der sich für $c = d = 0$ ergiebt. Wie schon oben bemerkt, ergiebt sich das FRESNEL'sche Fortpflanzungsgeschwindigkeitsgesetz, falls man die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen, d. h. den Ausdruck

$$A + \frac{4\pi^2\mu(c+d)}{T^2}$$

gleich Null setzt.

Diese Bedingung würde, da A von der Schwingungsdauer unabhängig sein muss, die zwei Gleichungen zur Folge haben:

$$A = 0, \qquad c + d = 0.$$

Falls die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit wachsender Schwingungsdauer wächst, wie es bei der sogenannten normalen Dispersion der Fall ist, muss d einen negativen, daher c einen positiven Werth haben.

Die Wellen sind nicht streng transversal, da ihre Schwingungen nicht senkrecht zur Wellennormale, sondern zum Strahl stehen. Die Incompressibilitätsbedingung ist in der That nicht erfüllt.

Lässt man die Bedingung der Symmetrie nach drei zu einander rechtwinkligen Ebenen fallen, so ergeben sich noch unverändert dieselben Gesetze für alle Krystalle, bei welchen eine krystallographische Axe senkrecht auf der Ebene der zwei anderen steht, also für alle Krystalle der ersten fünf Systeme. Für trikline Krystalle indessen folgt zwar auch noch die Existenz von nur zwei optischen Axen (vergl. unten im Capitel »Doppelbrechung«), indessen für Wellen, welche sich in einer Richtung fortpflanzen, die stark von der Ebene dieser Axen abweicht, ein vom FRESNEL'schen verschiedenes Gesetz für ihre Geschwindigkeit.

Dem Experiment bleibt es noch vorbehalten, über die Zulässigkeit dieser Folgerung zn entscheiden.

Durch Beibehaltung derjenigen Terme in den Hauptgleichungen, welche die Erscheinungen der Rotationspolarisation isotroper Medien erklären, ergeben sich die am Quarz und anderen optisch aktiven Krystallen beobachteten Erscheinungen.

In besonders einfacher Weise lässt sich nach der dargelegten Theorie das Verhalten bewegter Medien erklären. Wird für diese angenommen, dass der Aether ruhe und nur die ponderablen Theile sich bewegen, so werden dadurch die Werthe der Componenten U, V, W in leicht zu berechnender Weise geändert und damit auch die Zusatzglieder in den für die u, v, w gültigen Hauptgleichungen. Es ergiebt sich dadurch ohne Schwierigkeit das FRESNEL'sche Gesetz der scheinbaren theilweisen Mitführung des Aethers in bewegten Medien, sowie die Erklärung der FIZEAU'schen Experimente über die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers durch Strömung (vergl. pag. 12 dieses Bandes).

Als Grenzbedingungen nimmt BOUSSINESQ die CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen an. Wenn diese auch die Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an isotropen und krystallinischen Medien mit genügender Uebereinstimmung mit der Erfahrung liefern, so sind hier doch die theoretischen Grundlagen derselben sehr unsicher, da wir es mit einem complicirteren als einem rein elastischen Problem zu thun haben. Hinsichtlich der Grenzbedingungen verfährt die jetzt auseinanderzusetzende Theorie von W. VOIGT in rationellerer Weise.

In der VOIGT'schen[1]) Theorie werden ebenfalls die Excursionen der ponderablen Theile gegen die der Aethertheilchen vernachlässigt. Wie schon früher bemerkt, müssen bei dieser Vorstellung Erscheinungen, wie sie die Fluorescenz und anomale Dispersion bieten, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. — VOIGT stellt sich nun die Aufgabe, für durchsichtige Medien, d. h. solche, welche die Energie der Lichtbewegung ohne Schwächung fortzupflanzen im Stande sind, diejenigen Arten von Kräften zu finden, für welche das Princip der Erhaltung der Energie Gültigkeit besitzt, welches aussagt, dass der in der Zeit dt gewonnene Zuwachs an kinetischer Energie gleich ist der in derselben Zeit erfolgenden Abnahme einer gewissen Function Φ, welche von der Configuration und dem Zustand des Aethers abhängt und seine potentielle Energie genannt wird. Dadurch, dass dieses Energieprincip nicht nur als gültig angenommen wird bei der besonderen Art von Bewegung, wie sie bei den Lichtschwingungen stattfindet, sondern auch bei jeder, überhaupt denkbaren, ergeben sich gewisse Arten von Kräften, durch welche das optische Verhalten von Krystallen erklärt wird[2]), welche nicht, wie z. B. Quarz, die Polarisationsebene drehen.

Zerlegt man die auf den Aether wirkende Kräfte in die Gestalt:

$$\begin{aligned}
mu'' &= A + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y} + \ldots\right) \\
mv'' &= B + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 B_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{xy}}{\partial x \partial y} + \ldots\right) \qquad (8) \\
mw'' &= C + \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 C_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_{xy}}{\partial x \partial y} + \ldots\right),
\end{aligned}$$

[1]) W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 873. 1883; 21, pag. 522. 1884; 23, pag. 493. 1884; 24, pag. 156. 1885; 43, pag. 410. 1891.

[2]) Betreffs der Ausdehnung dieser Theorie auf bewegte Medien vergl. W. VOIGT, Gött. Nachr. 8. 1887. — WIED. Ann. 35, pag. 370, 524. 1888. — 43, pag. 418. 1891.

wobei u'' für $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gesetzt ist, analog v'' für $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ etc., so liefert die Anwendung des Energieprincipes als mögliche Formen der Kräfte:

$$
\begin{aligned}
A &= \alpha_{11}^{(0)} u + \alpha_{12}^{(0)} v + \alpha_{13}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{11}^{(1)} u' + \alpha_{12}^{(1)} v' + \alpha_{13}^{(1)} w' \\
&+ \alpha_{11}^{(2)} u'' + \alpha_{12}^{(2)} v'' + \alpha_{13}^{(2)} w'' \\
&+ \cdots\cdots\cdots \\
B &= \alpha_{21}^{(0)} u + \alpha_{22}^{(0)} v + \alpha_{23}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{21}^{(1)} u' + \alpha_{22}^{(1)} v' + \alpha_{23}^{(1)} w' \\
&+ \alpha_{21}^{(2)} u'' + \alpha_{22}^{(2)} v'' + \alpha_{23}^{(2)} w'' \\
&+ \cdots\cdots\cdots \\
C &= \alpha_{31}^{(0)} u + \alpha_{32}^{(0)} v + \alpha_{33}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{31}^{(1)} u' + \alpha_{32}^{(1)} v' + \alpha_{33}^{(0)} w' \\
&+ \alpha_{31}^{(2)} u'' + \alpha_{32}^{(2)} v'' + \alpha_{33}^{(2)} w'' \\
&+ \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Dabei muss sein

$$\alpha_{hk}^{(2n)} = \alpha_{kh}^{(2n)}, \qquad \alpha_{hk}^{(2n+1)} = -\alpha_{kh}^{(2n+1)}.$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
A_x &= a_{11}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial y} + \cdots + a_{19}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&+ a_{11}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial x} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial y} + \cdots + a_{19}^{(1)} \frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ a_{11}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial x} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial y} + \cdots + a_{19}^{(2)} \frac{\partial w''}{\partial z} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_y &= a_{21}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_z &= a_{91}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\cdots + a_{99}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&+ a_{91}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial x} + \cdots\cdots + a_{99}^{(1)} \frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ a_{91}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial x} + \cdots\cdots + a_{99}^{(2)} \frac{\partial w''}{\partial z} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

wobei sein muss

$$a_{hk}^{(2n)} = a_{kh}^{(2n)}, \qquad a_{hk}^{(2n+1)} = -a_{kh}^{(2n+1)}.$$

Die Kräfte höherer Ordnung, nämlich A_{xx} etc. werden Null gesetzt, da ihr Vorhandensein in Krystallen mehr wie zwei Lichtwellen ergeben würde[1]).

Für die weitere Bestimmung der α_{hk} und a_{hk} nimmt Voigt an, dass die Kräfte keine räumliche Dilatation zu Stande kommen lassen sollen, d. h. dass ihre Form eine derartige ist, dass die Gleichung

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

durch die Hauptgleichungen identisch erfüllt ist. Es ist für den Erfolg gleichgültig, ob man dem Aether die Eigenschaft der Incompressibilität beilegt oder den Kräften die oben genannte Eigenschaft.

[1]) Dieser Uebelstand trifft übrigens die Dispersionstheorien von Cauchy, Briot und Sarrau, falls man ihre Hauptgleichungen nicht als convergente Reihenentwicklungen auffast.

Durch diese neue Bedingung werden die Kräfte A, B, C ganz allgemein, d. h. auch in Krystallen, von der Richtung unabhängig. Deshalb hält VOIGT dieselben für unwahrscheinlich, und da sie bei der Aufstellung der Grenzbedingungen ausserdem gewisse Schwierigkeiten bereiten[1]), so lässt er sie überhaupt fort.

Da bei den optischen Erscheinungen die u, v, w periodische Functionen der Zeit sind, so kann man die Gleichungen (10) schreiben:

$$A_x = A_x^I + A_x^{II}, \quad A_y = A_y^I + A_y^{II}, \text{ etc.}$$

$$A_x^I = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{19}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$A_y^I = a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{29}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_x^{II} = b_{12}\frac{\partial u'}{\partial y} + b_{13}\frac{\partial u'}{\partial z} + \dots + b_{19}\frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$A_y^{II} = b_{21}\frac{\partial u'}{\partial x} + b_{23}\frac{\partial u}{\partial z} + \dots + b_{29}\frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

wobei

$$a_{hk} = a_{kh}, \qquad b_{hk} = -b_{kh},$$

und die Coëfficienten Reihen sind, welche nach Potenzen des reciproken Quadrats der Schwingungsdauer des Lichtes fortschreiten. Dadurch ist die Möglichkeit der (normalen) Dispersion ausgesprochen. Das Dispersionsgesetz besitzt eine ähnliche Gestalt, wie in den Theorien von CAUCHY, BRIOT, SARRAU (cf. oben).

Die Kräfte A_x^{II} etc., welche ungerade Differentialquotienten der u, v, w nach der Zeit enthalten, ergeben bei Anwendung der Incompressibilitätsbedingung, dass sie sich rings um eine Axe gleich verhalten. Sie stellen die Erscheinung der Drehung der Polarisationsebene dar, welche in durchsichtigen Körpern unter dem Einfluss des Magnetismus hervorgerufen wird. Da dieses Gebiet in dem III. Bande dieses Handbuches behandelt wird, so mag es hier unerörtert bleiben.

Wendet man auf die allein übrig bleibenden Kräfte A_x^I etc. die Incompressibilitätsbedingung an, so erscheinen die rechten Seiten der Hauptgleichungen (8) als Superposition zweier Kräftesysteme, von denen jedes allein eine Symmetrie nach drei zu einander rechtwinkligen Axen aufweist und das FRESNEL'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Krystallen ergiebt, und zwar das eine in der Weise, dass in Uebereinstimmung mit NEUMANN der Lichtvector in der Polarisationsebene liegt, während nach dem andern Kräftesystem der Lichtvector in Uebereinstimmung mit FRESNEL senkrecht zur Polarisationsebene liegt. Diese beiden Kräftesysteme sollen daher kurz das NEUMANN'sche und das FRESNEL'sche Kräftesystem genannt werden.

Als Grenzbedingungen verwendet VOIGT das Princip der Gleichheit der Elongation der Aethertheilchen zu beiden Seiten der Grenze, sowie das Energieprincip, welches aussagt, dass auch beim Uebergang der Lichtbewegung über die Grenze zweier verschiedener Medien kein Energieverlust stattfinden soll. — Mit Hilfe dieser beiden Principe lassen sich dann aus dem NEUMANN'schen Kräftesystem vier lineare Grenzbedingungen ableiten. Die gewonnenen Resultate unterscheiden sich dann von der KIRCHHOFF'schen Modifikation der F. NEUMANN-schen Theorie der Doppelbrechung und Reflexion an Krystallen (cf. pag. 655)

---

[1]) Vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 43, pag. 433. 1891.

nur dadurch, dass die auftretenden Constanten von der Schwingungsdauer des Lichtes abhängen, d. h. sie geben eine vollständigere Theorie durch Mitberücksichtigung der Dispersion. — Aus dem FRESNEL'schen Kräftesystem lassen sich nach dem genannten Verfahren nicht vier lineare Grenzbedingungen erhalten. Deshalb ist dasselbe mit der VOIGT'schen Theorie unvereinbar.

IV. Vergleichung der Resultate der verschiedenen Theorien untereinander und mit denen der elektromagnetischen Lichttheorie.

Aus den bisherigen Erörterungen geht zur Genüge die grosse Mannigfaltigkeit der Grundhypothesen der verschiedenen Lichttheorien hervor. Diese Mannigfaltigkeit wird noch um ein grosses Stück vermehrt durch die Hinzunahme der elektromagnetischen Lichttheorie, und doch hat gerade das Auftreten der letzteren ganz bedeutend zur Klärung beigetragen hinsichtlich der Frage, in welchem Verhältniss die aus den verschiedenen Theorien für die beobachtbaren Erscheinungen sich ergebenden Resultate zu einander stehen.

Diese Resultate knüpfen nur an die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen der Theorie an, nicht an die Art der mathematischen Deduction dieser Gleichungen, oder die Hypothesen über die Constitution des Aethers. Das Hauptinteresse vom Standpunkte des beobachtenden Physikers aus liegt daher in den Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, im »Erklärungssystem« einer Theorie, da dieses mit der Erfahrung zu vergleichen ist und werthvolle numerische Beziehungen für die Beobachtungen liefern kann.

Die mathematische Herleitung des Erklärungssystems wird nie frei von willkürlichen Hypothesen sein, sodass durchaus nicht zu schliessen ist, dass eine Form von Hauptgleichungen oder Grenzbedingungen überhaupt unmöglich sei, wenn sie sich mit den mathematischen Deductionen einer bestimmten Theorie nicht verträgt. Selbst z. B. in der VOIGT'schen Theorie, welche unter den mechanischen Theorien wohl mit am meisten in zwingender Weise vorgeht, ist die Anwendung des Energieprincips insofern mit einer gewissen Willkür verknüpft, als die kinetische Energie des Aethers in einer bestimmten Form, nämlich als $\frac{1}{2}m(u'^2+v'^2+w'^2)$, angenommen ist. Hierin ist begründet, dass einerseits das optische Verhalten sogen. aktiver Körper, wie Zuckerlösungen oder Quarz, von dem Erklärungssystem nicht umfasst wird, andererseits rührt daher eine gewisse Einseitigkeit der Theorie, indem das FRESNEL'sche Kräftesystem als unmöglich erscheint.

Eine derartige Einseitigkeit zeigen alle mechanischen Theorien, so z. B. ergiebt die BOUSSINESQ'sche Theorie die Unmöglichkeit des NEUMANN'schen Kräftesystems. Nur die elektromagnetische Theorie ist von dieser Einseitigkeit frei. Sie fasst ferner nicht nur die Erklärungssysteme vieler mechanischer Theorien in sich, sondern lässt auch ohne Rechnung erkennen, dass letztere von ganz verschiedenen Standpunkten aus zu gleichen Resultaten für die Beobachtung gelangen müssen. Nach diesen Betrachtungen ergiebt sich auch, dass alle Theorien, welche von den CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen als Grenzbedingungen Gebrauch machen, die Polarisationsebene mit FRESNEL definiren müssen, um mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bleiben. — Ferner ergiebt sich[1]), dass man für jedes beliebige Medium (krystallinisch, aktiv und absorbirend) ein

[1]) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. No. 10, pag. 366; pag. 392. 1892. Für magnetisch-aktive Körper ist dies gezeigt von P. DRUDE in WIED. Ann. 46, pag. 384. 1892 (Formeln 61'', 62'').

richtiges Erklärungssystem mit Benutzung der CAUCHY'schen Grenzbedingungen aufstellen kann.

Das Erklärungssystem der elektromagnetischen Theorie für nicht aktive durchsichtige Krystalle schreibt sich[1])

$$\begin{aligned}
&A\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.\\
&A\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},\\
&A\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},\\
&A\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Hierin bedeuten L, M, N die Componenten der magnetischen, X, Y, Z die der elektrischen Kraft. A ist das Verhältniss der Einheit der Elektricitätsmenge, wenn man sie nach elektromagnetischem Maasse misst, zu der nach elektrostatischem Maasse gemessenen, ferner sind ε_{hk} die Dielektricitätsconstanten des Krystalls und es ist $\varepsilon_{hk}=\varepsilon_{kh}$. Die Grenzbedingungen lauten: Die der Grenze parallelen Componenten der elektrischen sowohl, wie der magnetischen Kraft sind beim Durchgang durch die Grenze stetig. — Ist daher die Grenze die xy-Ebene, und bezeichnet man die Zugehörigkeit zu den zwei verschiedenen Medien durch untere Indices, so lauten die Grenzbedingungen:

$$L_1=L_2, \quad M_1=M_2, \quad X_1=X_2, \quad Y_1=Y_2 \quad \text{für} \quad z=0. \tag{12}$$

Die elektromagnetische Theorie liefert zunächst allgemeinere Gleichungen als das System (11), indem auch die Magnetisirungsconstante eines Krystalls mit der Richtung variiren kann. Um aber das FRESNEL'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bekommen, muss man diese Annahme fallen lassen. Um ferner bei dem Reflexionsproblem Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten, muss man die Magnetisirungsconstanten aller Medien gleich annehmen (= 1). Diese Verfügungen kann man durch die Vorstellung unterstützen, dass der Vorgang, welcher bei langsamen Veränderungen zum Theil so erhebliche Verschiedenheiten der Magnetisirungsconstanten in den verschiedenen Körpern hervorruft, den schnellen Wechseln der Kräfte, wie sie bei Lichtschwingungen eintreten, nicht zu folgen im Stande ist.

Interpretirt man die magnetische Kraft als den Lichtvector, d. h. setzt man

$$L=u, \quad M=v, \quad N=w,$$

führt man ferner die Componenten ξ, η, ζ eines aus dem Lichtvector nach folgenden Operationen ableitbaren Vectors ein:

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{13}$$

so erhält man[2]) aus (11) und (12) das Erklärungssystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right),\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right),
\end{aligned} \tag{14}$$

wobei $2G$ gesetzt ist für

---

[1]) Vergl. H. HERTZ, Gött. Nachr. 4, pag. 114. 1890. — Für die Begründung dieser elektromagnetischen Gleichungen mag auf den III. Band dieses Handbuches verwiesen sein.

[2]) Betreffs ausführlicherer Herleitung vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr., l. c., pag. 393.

$$2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta, \tag{15}$$

und die a_{hk} aus den ε_{kh} leicht ableitbar sind. Als Grenzbedingungen folgen

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_2 \text{ für } z = 0. \tag{16}$$

Die Formeln (14, 15, 16) sind identisch mit der KIRCHHOFF'schen Form der NEUMANN'schen Theorie und dem VOIGT'schen Erklärungssystem, falls die a_{kh} als von der Schwingungsdauer abhängig angesehen werden. — Die Wellen sind streng transversal, da $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ist.

Interpretirt man die elektrische Kraft als Lichtvector, d. h. setzt man

$$X = u, \quad Y = v, \quad Z = w,$$

so ergiebt sich das Erklärungssystem:

$$A^2\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varepsilon_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{17}$$

. . . .

$\left(\text{wobei } \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$, und als Grenzbedingungen:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \quad \text{für } z = 0. \tag{18}$$

Legt man die Coordinatenebenen in die optischen Symmetrieebenen, so gehen die Gleichungen (17) in die Formeln der BOUSSINESQ'schen (vergl. Formel (7), pag. 664), RAYLEIGH'schen, GLAZEBROOK'schen, SARRAU'schen und KETTELER'schen[1]) Theorie für rhombische Krystalle über, falls man in ihnen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen gleich Null setzt. Die Formeln (18) sind mit den von jenen Theorien adoptirten[2]) CAUCHY'schen Grenzbedingungen identisch. In der That trennt man nach CAUCHY die Componenten der gesammten Verrückung, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in zwei Theile, nämlich in die Componenten u, v, w der Verrückung der Lichtwelle, und in die Componenten einer Longitudinal-Welle, welche sich stets in die Form $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ setzen lassen, so ist zu schreiben:

$$\mathfrak{u} = u + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v} = v + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{w} = w + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{19}$$

Aus der Stetigkeit der Differentialquotienten der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nach den Coordinaten in der Grenzschicht folgt nach (19) sofort die Stetigkeit der ξ, η, ζ, da in $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}$ etc. die Function φ eleminirt wird. Da ferner sowohl u, v, w, als φ in beiden Medien Functionen derselben Function der Coordinaten x, y sein müssen, falls für $z = 0$ gewisse Grenzbedingungen für alle Werthe der Coordinaten x, y bestehen sollen, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetig beim Hindurchgang durch die Grenze, da φ selber stetig ist. Aus der Stetigkeit von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ folgt daher auch die Stetigkeit von u und v. — Die Gleichungen (18) sind daher identisch mit den CAUCHY'schen Grenzbedingungen, wenn man in ihnen die Longitudinal-Wellen eleminirt[3]).

Der Lichtvector u, v, w liegt nicht senkrecht zur Wellennormale, da nach

---

[1]) Vergl. KETTELER, Theoret. Optik, pag. 297, Formel (V).

[2]) KETTELER giebt seine Grenzbedingungen direkt in derselben Form wie (18), vergl. KETTELER, theor. Optik, pag. 343, Formel 22.

[3]) Auf diesen Punkt hat wohl zuerst POINCARÉ aufmerksam gemacht in seiner Théorie math. de la lum. Paris 1889, pag. 356.

den Formeln (11) der Werth von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ nicht streng Null ist. Man erhält daher nur quasi-transversale Wellen.

Interpretirt man als Componenten des Lichtvectors die Componenten der elektrischen Polarisation, nämlich:

$\varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z = u,\ \varepsilon_{21}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z = v,\ \varepsilon_{31}X + \varepsilon_{32}Y + \varepsilon_{32}Z = w,$

so erhält man wiederum streng transversale Wellen und die Hauptgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\},\end{aligned} \tag{20}$$

wobei

$$2H = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv. \tag{21}$$

Diese Formeln repräsentiren das FRESNEL'sche Kräftesystem[1]) (s. oben pag. 653). — Aus den Formeln (12) erhält man Grenzbedingungen, wie sie von CORNU bei Behandlung der Reflexion an Krystallen benutzt sind.

Aus den letzten drei Formeln des Systems (11) folgt

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = -\xi', \quad A\frac{\partial v}{\partial t} = -\eta', \quad A\frac{\partial w}{\partial t} = -\zeta', \tag{21'}$$

wobei u, v, w die Componenten des FRESNEL'schen Lichtvectors bedeuten, ξ', η', ζ' dagegen die Vectorcomponenten, welche nach den Formeln (13) aus dem NEUMANN'schen Lichtvector, der mit u', v', w' bezeichnet werden möge, abzuleiten sind. Nun ist nach (13)

$$\frac{\partial u'}{\partial t}\xi' + \frac{\partial v'}{\partial t}\eta' + \frac{\partial w'}{\partial t}\zeta' = \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial v'}{\partial z} + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber, falls u', v', w' Functionen ein und derselben Function von x, y, z, t sind, was bei Wellenbewegungen stets der Fall ist. Es ist daher mit Berücksichtigung von (21')

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w'}{\partial t} = 0,$$

d. h. da $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u'}{\partial t}$ proportional zu u, u' sind, so liegt der FRESNEL'sche Lichtvector (u, v, w) senkrecht zum NEUMANN'schen (u', v', w'). — Ebenso folgt aus den ersten drei Formeln des Systems (11), dass der NEUMANN'sche Vector u', v', w' senkrecht liegt zu dem Vector u'', v'', w'' (der elektrischen Kraft), welcher sich in quasi-transversalen Wellen fortpflanzt, dass dieser Vector daher bei ebenen Wellen in der durch die Wellennormale und den FRESNEL'schen Vector hindurchgehenden Ebene liegt.

Aus dem Erörterten erhellt, dass die oben genannten Theorien, welche quasi-transversale Wellen in Krystallen annehmen, in übereinstimmender Weise

---

[1]) Dass nach den Gleichungen (20) in einem einaxigen Krystall der Lichtvector der ordinären Welle senkrecht zu seinem Hauptschnitt liegt, sowie nach den Gleichungen (14) in demselben, ist unten im Kapitel »Doppelbrechung« gezeigt. — In dem Kapitel »Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier Medien« ist gezeigt, dass auch die Reflexionserscheinungen (schon an isotropen Körpern) bei Anwendung des Erklärungssystemes (14, 16) zu NEUMANN's Ansicht über die Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene, das Erklärungssystem (17, 18) zur FRESNEL'schen Ansicht führen.

die Beobachtungen beschreiben müssen, da sie zu demselben Erklärungssystem führen, so folgt aber auch, dass die zuletzt erörterte Theorie streng transversaler Wellen in Krystallen zu den gleichen beobachtbaren Resultaten führen muss. Beobachtbar sind nämlich nur die optischen Erscheinungen in dem die Krystalle umgebenden isotropen Medium (Luft). Es kann nun, sofern wenigstens das grundlegende Formelsystem ungeändert bleibt und alle Rechnungen in voller Strenge, d. h. mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, durchgeführt werden, keinen Unterschied machen, ob man die elektrische Kraft oder die elektrische Polarisation als Lichtvector interpretirt, da diese Grössen in isotropen Medien zusammenfallen (der Richtung nach), ja im leeren Raum identisch sind.

Werden nun auch die Erscheinungen in derselben Weise, wie durch die vorigen Verfügungen, beschrieben, wenn man die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt? Die Beantwortung der Frage ist insofern von Bedeutung, als damit zugleich gezeigt wird, ob man durch die Beobachtung zwischen de NEUMANN'schen und FRESNEL'schen Ansicht von der Lage des Lichtvectors zu Polarisationsebene entscheiden kann.

Nach den obigen Erläuterungen handelt es sich nur um Untersuchung dieser Frage für isotrope Medien, da in ihnen allein Beobachtungen anzustellen möglich ist. — Man erhält nun aus dem Formelsystem (11) sofort, dass in isotropen Medien bei ebenen fortschreitenden Wellen die magnetische Kraft numerisch gleich der elektrischen Kraft multiplicirt mit der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante des Mediums ist, dass aber die magnetische Kraft senkrecht zur elektrischen Kraft (und zur Wellennormale) liegt, und zwar so, dass die positive Richtung der elektrischen Kraft, der magnetischen Kraft und der Fortschreitung der Wellen ein rechtwinkliges Axensystem bilden, welches mit den positiven Coordinatenaxen zur Deckung gebracht werden kann. Da wir nun durch optische Erscheinungen stets nur Kenntniss von den relativen Grössen des Lichtvectors erhalten, so folgt, dass in fortschreitenden Wellen die Erscheinungen, wie sie durch die elektrische oder durch die magnetische Kraft hervorgerufen werden, dieselben sein müssen, da die Grösse der einen Kraft der der anderen stets proportional ist (im leeren Raum sogar gleich).

Also auch das NEUMANN'sche Kräftesystem stellt die Beobachtungen in fortschreitenden Wellen in derselben Weise dar, wie die anderen Theorien. Damit ist denn auch ausgesprochen, dass man aus diesen Beobachtungen nicht über die Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene entscheiden kann.

Anders dagegen gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Wirkung stehender Wellen untersucht wird[1]. Diese kann man ansehen als hervorgebracht durch Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude und Schwingungsdauer, jedoch von entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtungen. Aus dem obigen erhellt daher, dass in beiden Einzelwellen die magnetische Kraft entgegengesetzte Lage hat, falls die elektrische Kraft in beiden Einzelwellen die gleiche Lage hat und umgekehrt, mit anderen Worten: In der stehenden Welle fallen die Schwingungsbäuche der elektrischen Kraft auf die Schwingungsknoten der magnetischen Kraft und umgekehrt. — Man kann daher bei stehenden Wellen diese beiden Arten von Kräften gesondert auf ihre Wirkung untersuchen. WIENER[2] zeigte, dass photographische Wirkung in dem Schwingungsbauche einer Vectorgrösse

[1] Dies ist durch die Untersuchungen WIENER's möglich geworden. Das Nähere dazu vergl. unten im Kapitel »Uebergang des Lichtes etc.«

[2] O. WIENER, WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

stattfindet, welcher die FRESNEL'schen Reflexionsgesetze befolgt, d. h. in der elektromagnetischen Sprache: in dem Schwingungsbauche der elektrischen Kraft.

Dadurch ist trotzdem nicht entschieden, dass nothwendig der Lichtvector mit FRESNEL senkrecht zur Polarisationsebene liegt, und dass daher die NEUMANN-schen Formeln falsch sind. In den mechanischen Theorien ist nämlich dem Quadrat des Lichtvectors, dessen Componenten u, v, w sind, die kinetische Energie des Aethers proportional. Verallgemeinert man nun die Formeln der mechanischen Theorien, indem man auch für denjenigen Vector[1]), dessen Quadrat die potentielle Energie des Aethers proportional ist, Differentialgleichungen und Uebergangsbedingungen aufstellt, gerade wie auch in der elektromagnetischen Theorie beiderlei Arten von Vectoren auftreten, so gelangt man[2]) zu dem Resultat, dass in jeder Theorie bei der Lichtbewegung diese beiden Vectoren zwei verschiedene Gesetze befolgen, nämlich der eine in isotropen Medien den NEUMANN'schen Reflexionsformeln, der andere den FRESNEL'schen unterworfen ist. Der eine Vector liegt daher in der Polarisationsebene, der andere senkrecht zu ihr. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich nur darin, dass die Bedeutung dieser Vectoren — ob kinetisch oder ob potentiell — gegenseitig vertauscht erscheint. Nach MAXWELL ist z. B. die elektrische Kraft der potentielle Vector, die magnetische Kraft der kinetische. Daher liegt sowohl nach MAXWELL, wie nach NEUMANN der kinetische Vector in der Polarisationsebene, dagegen nach FRESNEL senkrecht zu ihr. — Es ist nun nicht zu entscheiden, ob die photographische Wirkung an den potentiellen oder kinetischen Vector geknüpft ist[3]), und darum ist auch nicht über die Zulässigkeit der verschiedenen Theorien und die Lage der Lichtschwingungen, d. h. des kinetischen Vectors, zur Polarisationsebene zu entscheiden. Diese Frage hat demnach aber auch keine Bedeutung für die richtige Berechnung optischer Erscheinungen, — für die praktische Physik ist sie gegenstandslos.

Wie oben auseinandergesetzt, müssen in (11) die ε_{hk} von der Schwingungsdauer T des Lichtes abhängen, um die Erscheinungen der normalen Dispersion mit zu umfassen. In dem ursprünglichen Ansatz der elektromagnetischen Theorie sind ε_{hk} dagegen von T unabhängig. Wie nun derselbe so erweitert gedacht werden kann, dass man zu einer Abhängigkeit der ε_{hk} von T und überhaupt zu anderen[4]) Werthen derselben geführt wird, als wie sie aus elektrostatischen oder langsam veränderlichen elektrischen Erscheinungen hergeleitet werden, soll im nächsten Kapitel »Theorie der anomalen Dispersion« näher beleuchtet werden.

Noch mag kurz erwähnt werden, dass auch die CAUCHY'sche Annahme, dass in der Grenzschicht zwischen zwei verschiedenen Medien longitudinale Wellen existiren, deren Geschwindigkeit Null ist, von der elektromagnetischen Theorie aus gerechtfertigt erscheint. Die Gleichungen (11) gelten nämlich auch für inhomogene Medien, d. h. für solche, in welchen ε_{hk} eine Function von x, y, z ist. Wendet man diese Gleichungen daher auf die Grenzschicht zwischen zwei

[1]) Es zeigt sich, dass dieser Vector die nach (13) definirten Componenten ξ, η, ζ besitzt.

[2]) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. l. c.

[3]) Wollte man letztere Annahme aus Gründen der Plausibilität machen, so würde dies die üblichen Anschauungen der elektro-magnetischen Theorie ändern, indem dann die elektrische Kraft als kinetischer Vector erschiene.

[4]) Aus (11) ergiebt sich der Brechungsexponent eines isotropen Mittels gegen den leeren Raum gleich $\sqrt{\varepsilon}$. Da diese Beziehung in der Natur oft nicht besteht (eclatant z. B. bei Wasser, wo ε nahe gleich 80 ist), so ist auch in dieser Beziehung eine Erweiterung des ursprünglichen Ansatzes der elektromagnetischen Theorie nothwendig.

Medien an, in welcher sich ε unendlich schnell ändert, so erhält man bei Elimination der magnetischen Kräfte ausser Transversalwellen auch Longitudinalwellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist zu dem Differentialquotienten der Dielectricitätsconstanten nach der Grenznormale. Bei unendlich dünner Grenz- oder Uebergangsschicht wird also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu Null.

Da die Hauptgleichungen (11) der elektromagnetischen Theorie insofern sehr vollständig sind, als sie auch für inhomogene Medien gelten, so müssen sich nach der oben pag. 642 gemachten Bemerkung die Grenzbedingungen (12) direkt aus den Hauptgleichungen (11) ergeben. Dies ist nun in der That auch der Fall, denn, falls die z-Axe normal zur Grenze steht, müssen auch in der Uebergangsschicht $\frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z}$ endliche Werthe behalten, falls die linken Seiten der Gleichungen (11) endlich bleiben sollen. Daraus folgt direkt die Stetigkeit von X, Y, L, M beim Durchgang durch die Grenze. — Es mag schliesslich hervorgehoben werden, dass die Grenzbedingungen (12) mit dem Energieprincip im Einklang stehen, sodass der Uebergang einer elektromagnetischen Störung, d. h. auch einer Lichtbewegung, über die Grenze zweier verschiedener Medien nie von einem Energieverlust begleitet ist[1]).

Theorie der anomalen Dispersion.

I. Die mechanischen Theorien.

In dem vorigen Kapitel sind einige Versuche erwähnt, die Erscheinung der Dispersion theoretisch zu erklären und Formeln aufzustellen, welche zu jedem Werthe der Schwingungsdauer T den zugehörigen Brechungsexponenten n eines Mediums gegen den leeren Raum zu berechnen erlauben. Die allgemeinste Formel (z. B. nach Briot) ist:

$$n^2 = -AT^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4} + \ldots,$$

wobei die A, B, C, D . . . Constanten des betreffenden Mediums sind. Wenn auch durch diese Formel, wie Ketteler[2]) zeigte, bei normaler Dispersion stets gute Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erzielen ist, wobei zu bemerken ist, dass sämmtliche Coëfficienten $A, B,$ . . sich als positiv herausstellen, so versagt dieselbe doch durchaus für gewisse Medien, bei welchen n mit abnehmendem T nicht beständig wächst. Diese Medien pflegt man anomal dispergirende zu nennen.

Da die Erfahrung lehrt, dass die anomale Dispersion stets von Absorbtion begleitet ist, so machte O. E. Meyer[3]) einen Versuch, durch Einführung von Reibungsgliedern in den Hauptgleichungen eine Formel für n zu gewinnen, welche sich besser der Erfahrung anschliesst. Er erhielt das Resultat, dass n mit abnehmendem T abnimmt. Wenn dieses auch dem Verhalten der Metalle zu entsprechen scheint, so widerstreitet doch das andere Resultat Meyer's der Erfahrung, dass die Absorption mit abnehmendem T wächst. Denn demnach müssten alle Metalle im durchgehenden Lichte roth gefärbt erscheinen, was durchaus nicht der Fall ist.

Meyer's Theorie unterscheidet sich insofern noch wenig von den meisten

---

1) Vergl. H. Hertz, pag. 4, l. c.

2) E. Ketteler, Theoret. Optik, pag. 547. Braunschw. 1885

3) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 145, pag. 80. 1872.