universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Dioptrik in Medien mit continuirlich variablem Brechungsindex

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Sauerstoff, die Atomrefraction dieser Elemente sich um einen bestimmten Betrag erhöht, wenn mehr als eine Valenz des betreffenden Elements mit einem benachbarten Atom desselben Elements verbunden ist. Nachdem der Einfluss solcher Bindungen erkannt und festgestellt war[1]), hat die Molecularrefraction auch umgekehrt mehrfach zur Erforschung der chemischen Constitution von Substanzen Verwendung gefunden. Indessen muss bemerkt werden, dass gegen die Benutzbarkeit der Molekularrefraction für Constitutionsbestimmungen wiederholt lebhafter Widerspruch laut geworden ist[2]).

Es sei zum Schluss noch auf die Arbeiten von GLADSTONE (Phil. Mag. 1870 und 1885), SORET (Arch. des sc. ph. et nat., Genève 1884 bis 1888) u. Anderen hingewiesen, durch welche auch für die Körper der anorganischen Chemie ein Zusammenhang der Molecularrefraction mit der chemischen Zusammensetzung nachgewiesen ist. PULFRICH.

Dioptrik in Medien mit continuirlich variablem Brechungsindex.

A. Allgemeines.

Das vorliegende Capitel der Lehre vom Licht besitzt im Allgemeinen für Medien mit stetig veränderlichem Brechungsindex dieselbe Aufgabe, wie die vorangehenden Capitel für Medien, deren Indices in einer Reihe aneinandergrenzender Räume in jedem derselben constant, dagegen von Raum zu Raum endlich verschieden sind. Aber mit der Gleichheit der Aufgabe ist nicht die Gleichheit der Grundlagen verbunden. Denn die eine derselben, die Geradlinigkeit der Strahlen im selben Medium, kommt selbstverständlich hier nicht in Betracht, die andere aber, das Brechungsgesetz, ist weder noch kann es der Natur der Sache nach überhaupt direkt experimentell erhärtet sein. Wir müssen also betreffs der Richtungsbeziehung zwischen zwei aneinandergrenzenden Elementen des einen Strahles auf indirektem Wege den Nachweis liefern, dass der analytisch vollziehbare Grenzübergang auch physikalisch zulässig ist, da andernfalls die Anwendungsfähigkeit auf Naturerscheinungen hinwegfiele und das Kapitel in das Gebiet der reinen Mathematik gehören würde. Jener Nachweis ist nun von vornherein in zweifacher Art möglich, nämlich erstens durch Vergleichung der Resultate einer auf jenem hypothetischen Grundgesetz aufgebauten Theorie mit direkten Beobachtungen und zweitens durch Zurückgehen auf unsere als fundamental betrachteten mechanischen Grundbegriffe. Der erste Weg, das »Integralgesetz« der Theorie mit den Beobachtungen zusammenzustellen, und aus dem Zusammenfallen der Zahlenwerthe auf die Giltigkeit des »Differentialgesetzes« einen Rückschluss zu machen, ist hier im Gegensatz zu gewissen bekannten Gebieten zwar principiell möglich, leidet aber an der Schwierigkeit künstlich realisirbarer experimenteller Bestimmungen einerseits und der Complicirtheit der

[1]) Bezüglich der den einzelnen Atomrefractionen und Bindungen zukommenden Refractionswerthe sei auf die »Neuberechnung der Atomrefraction« von BRÜHL, Z. f. physik. Chemie 1891, pag. 191, verwiesen. In dieser Arbeit ist auch der Versuch gemacht, die Beziehungen der Dispersion mit der chemischen Zusammensetzung zu erforschen.

[2]) Vergl. insbesondere O. WALLACH, LIEBIG, Ann. 245, pag. 191. 1888.

in der Natur dargebotenen Erscheinungen andererseits. Denn die Refractionstheorie, die man bei dem heutigen Stande der Wissenschaft allein im Auge haben könnte, ist vermöge der Mannigfaltigkeit und des Wechsels der atmosphärischen Zustände für unseren Zweck nicht geeignet und nimmt überdies vielfach zum Zwecke besserer Anschmiegung der Theorie an die Beobachtungen ihre Constanten aus den letzteren. Wir sind also gezwungen, den zweiten Weg zu betreten und aus unseren mechanischen Grundbegriffen in Form der Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie die Berechtigung der Benützung des Brechungsgesetzes auch für den Fall eines Mediums mit stetig veränderlichem Brechungsindex herzuleiten. Dies zu thun, ist hier weder Ort noch Zeit; wir müssen uns vielmehr begnügen, die Resultate einer derartigen Untersuchung[1]), soweit sie für unseren Zweck erforderlich sind, anzugeben. Dieselben sagen aus, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und damit der Brechungsexponent allein vom Orte und nicht auch von der Fortpflanzungsrichtung abhängt, dass ferner die Schwingungsdauer und damit die Farbe unveränderlich ist, und drittens die Ablenkung des Strahles in der That nach dem Brechungsgesetze erfolgt, wobei als Normalen die Senkrechten zu den Flächen mit gleichem Brechungsexponenten gelten. Wir haben hier ausser dem zuerst erstrebten Resultate noch zwei weitere erhalten und es ist zu beachten, dass dieselben keineswegs selbstverständlich sind. Vielleicht sind dieselben im Allgemeinen, z. B. wenn man auch Absorptionswirkungen mit in Betracht zieht, nicht einmal richtig, da auf dem Boden der reinen Elasticitätstheorie Absorptionswirkungen überhaupt nicht stattfinden und in unserem speciellen Falle das Princip der kinetischen Energie gilt. — Nachdem so die Grundlagen für die Dioptrik der Medien mit stetig veränderlichem Brechungsindex auseinandergesetzt sind, soll im folgenden zunächst das System der Differentialgleichungen für die Curve, welche der Lichtstrahl in einem solchen Medium beschreibt, entwickelt werden. Es sollen dann weiter einige besonders einfache oder interessante Specialfälle nebst Anwendungen erörtert und zum Schlusse auf die durch unsere Atmosphäre verursachten normalen (Refractionstheorie) und anormalen Erscheinungen eingegangen werden.

Differentialgleichungen für die Trajektorie.

Um die Gleichungen für den Lichtstrahl im dreidimensionalen Raume zu entwickeln, benutzen wir ein im Raume festes, ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem und denken uns den Brechungsindex (n) an irgend einer Stelle des Raumes als Function der 3 Coordinaten xyz dieser Stelle gegeben. Indem wir diese Function nach einander den Gliedern einer in arithmetischer Progression fortschreitenden Reihe gleichsetzen, deren erstes und letztes Glied der niedrigste resp. höchste Brechungsindex ist, erhalten wir ein System von Flächen, auf deren jeder der Brechungsindex des Mediums constant ist und die ein anschauliches Bild von der für unseren Zweck in Betracht kommenden Constitution jenes letzteren geben. Diese Flächen (Curven) sollen Aequiindicial- oder kürzer Indicial-Flächen (Curven) heissen. Nach dem grösseren oder geringeren Grade der Einfachheit in der Constitution müssen wir für die Zwecke der Anschauung diese Indicialflächen in weiteren oder engeren Intervallen folgen lassen.

Für die Ableitung der Differentialgleichungen stützen wir uns auf das

[1]) Paul Harzer, Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr., No. 2554—56.

FERMAT'sche Princip, nach welchem die optische Länge eines Lichtstrahles zwischen zwei Punkten desselben, d. h. das Integral $\int n ds$ erstreckt vom ersten bis zum zweiten Punkte ein Grenzwerth ist, d. h. seine Variation verschwindet. ds bedeutet dabei ein Linienelement der Curve. Dass dieses Princip hier gilt, nachdem es nur für ein System Grenzflächen bewiesen ist, folgt sowohl physisch aus der Natur der Lichtausbreitung, als auch analytisch daraus, dass das Brechungsgesetz ebenfalls gültig ist und deshalb die Grenzen der Curven, von denen die eine nach dem Princip des Grenzwerthes construirt ist, wobei das Brechungsgesetz von selbst erfüllt wird, und die andere auf Grund des Brechungsgesetzes, nothwendig zusammenfallen müssen. Die Variation von $\int n ds$ ist also gleich Null und wir erhalten durch Ausführung der Variationsoperation unter dem Integralzeichen [1])

$$o = \int \delta n \, ds + \int n \delta ds.$$

Beachten wir die Beziehungen

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z,$$

sowie

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz$$

und integriren unter Berücksichtigung von $\delta dx = d\delta x$ das zweite Integral partiell, so erhalten wir geeignet angeordnet:

$$o = \left[n \left(\frac{\partial x}{\partial s} \delta x + \frac{\partial y}{s} \delta y + \frac{\partial z}{\partial s} \delta z \right) \right]_1^2$$

$$+ \int \left[\left[\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x + \left[\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y + \left[\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \right] ds.$$

Von diesem Ausdruck verschwindet der erste vom Integralzeichen freie Theil von selbst, da an den Grenzen 1 und 2 Variationen nicht gestattet sind; der zweite dagegen kann, bei der völligen Willkürlichkeit und Unabhängigkeit der Variationen in den Coordinaten, nur dann Null werden, wenn die mit den Variationen multiplicirten Glieder einzeln verschwinden. Man erhält also für die Trajektorie das Gleichungssystem:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}; \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}; \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich leicht eine allgemein zuerst von HEATH [2]) entwickelte für die Trajektorie charakteristische Eigenschaft folgern, die einen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius (ρ) an einer Stelle einerseits und der Aenderung des Brechungsindex in der Richtung der Normale (N) zur Trajektorie andererseits angiebt. Benützen wir den Satz, dass die Richtungscosinus des Krümmungsradius der Reihe nach

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \rho \frac{d^2z}{ds^2}$$

sind und der Krümmungsradius selbst sich also aus der Gleichung

$$1 = \rho^2 \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]$$

ergiebt, so erhalten wir durch Anwendung der Identität

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial x}{\delta N} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial N} + \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial N},$$

---

[1]) R. S. HEATH, treatise on geometrical Optics, pag. 338.

[2]) a. a. O.

indem wir für $\frac{\partial x}{\partial N}$ etc. die Werthe $\rho \frac{d^2x}{ds^2}$ etc. und für $\frac{\partial n}{\partial x}$ etc. die Werthe aus den Differentialgleichungen setzen, das gesuchte Resultat. Es ist nämlich zunächst

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \sum n\rho \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \sum \rho \frac{dn}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2},$$

wo die Summenzeichen sich auf die Coordinaten beziehen. Hiervon verschwindet das zweite Glied, da

$$\sum \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

ist und das erste wird wegen

$$\sum \rho \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho} \quad \text{zu} \quad \frac{n}{\rho}.$$

Wir erhalten also die Gleichung $\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{n}{\rho}$, oder auch $\frac{\partial ln}{\partial N} = \frac{1}{\rho}$. Dieses Resultat lässt sich auch leicht auf synthetische Weise ableiten. Wir denken uns zu diesem Zwecke am Ende eines Elementes der Trajektorie die Normale zur Indicialfläche gezogen und durch diese beiden Linien eine Ebene gelegt. In dieser Ebene wird dann nach dem Brechungsgesetz auch das folgende Element der Trajektorie und in Folge dessen auch der Krümmungsradius derselben liegen. Ziehen wir nun in dieser Ebene die Indicialcurve, welche die Medien vom Index n und $n + dn$ begrenzt und nennen den Einfalls- und Brechungswinkel an dieser $i_1 r_1$ sowie das aus den benachbarten Stücken der Trajektorie gebildete Linienelement ds, so ist die Richtungsänderung der Trajektorie nach dem Passiren der Indicialcurve $i_1 - r_1$ und der Krümmungsradius $\rho = lim \frac{ds}{i_1 - r_1}$. Hierin können wir $i_1 - r_1$ für kleine Werthe der Differenz aus der Gleichung $n \sin i_1 = (n + dn) \sin r_1$ durch $\frac{dn}{n} tg\, i$ ersetzen. Ziehen wir weiter die durch die Endpunkte des Linienelementes ds gehenden Indicialcurven, so lässt sich ds durch das zwischen denselben liegende Stück der in einem Endpunkte des Elementes errichteten Normalen ausdrücken und wir erhalten $ds = dN tg\, i$. Durch Einsetzen in unsere obige Gleichung folgt unmittelbar $\frac{1}{\rho} = \frac{dln}{dN}$.

Die drei Grundgleichungen für die Trajektorie in ebenen, rechtwinkligen Coordinaten können offenbar, um eine Curvenschaar vorzustellen, nicht unabhängig von einander sein. Dies erkennt man auch, indem man die Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds}$ multiplicirt und addirt, wobei sich eine Identität ergiebt. Wir können also, sofern dies wünschenswerth ist, bei dreidimensionalen Problemen uns auf zwei, und bei zweidimensionalen auf eine Gleichung beschränken und diese beliebig wählen.

Es sollen nun im folgenden zwei Specialfälle zweidimensionaler Natur behandelt werden und zwar erstens der Fall einer geradlinigen und zweitens der einer kreisförmigen Gestalt der Indicialcurven. Für den ersten Fall mögen die Indicial-linien der x Axe parallel sein, so dass also $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$ ist. Die Grundgleichungen ergeben dann unmittelbar $n \frac{dx}{ds} = C$, wo C eine Constante für die betreffende Curve ist. Diese Aussage besagt weiter nichts als die Gültigkeit des Brechungs-

gesetzes, da $\frac{dx}{ds} = sin\, i$ ist. Die Differentialgleichung der Trajektorie ergiebt sich, indem man die Gleichung

$$n^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = C^2$$

und die aus ihr folgende

$$n^2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = n^2 - C^2$$

durch einander dividirt. Man erhält so

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2}{C^2} - 1.$$

Um die Ablenkung des Lichtstrahles auf seinem Wege zwischen zwei Punkten 1 und 2 zu erhalten, benütze man die Gleichung $n_1\, sin\, i_1 = n_2 sin\, i_2$. Die Ablenkung $i_1 - i_2$ häugt ausser von der Anfangs- oder Endrichtung nur von den Brechungsindices der beiden Punkte ab, ist also wie im Falle ebener homogener Platten unabhängig von den Zwischenzuständen. Die Curve des Lichtstrahles hat einen oder mehrere Scheitel, deren Coordinaten sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $n = C$ ergeben und deren X Coordinaten aus der integrirten Curvengleichung zu entnehmen sind. — Um zweitens bei kreisförmiger Gestalt der Indicialcurve die Curvengleichung zu finden, wenden wir dasselbe Verfahren, welches zu den Grundgleichungen in ebenen Coordinaten führte, bei Benützung von Polarcoordinaten (r, φ) an und erhalten, indem wir uns auf die eine für den vorliegenden Zweck bequemere Gleichung beschränken:

$$\frac{d}{ds}\left(nr^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) - \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0.$$

Dieselbe geht für unseren Fall, in dem n von φ unabhängig ist, also als Coordinatenanfangspunkt der gemeinsame Nullpunkt aller Indicialcurven genommen ist, in $nr^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$ über, wo wieder C für die betreffende Lichtcurve eine Constante ist. Da die Normalen zu den Indicialcurven mit den Radienvektoren zusammenfallen, so sagt diese Gleichung aus, dass das Produkt aus Brechungsindex, Radius und Sinus des Neigungswinkels von Curve und Radius im Verlaufe der Curve eine Constante ist.

Dieses wegen seiner Einfachheit wichtige Resultat lässt sich leicht auf synthetischem Wege ableiten. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch die Endpunkte eines Linienelementes die beiden Indicialcurven und Radien (r, r_1) und nennen die Einfalls- und Brechungswinkel der Reihe nach i, i', i_1, i_1', sowie die Brechungsindices n, n_1, n_2. Dann giebt das Brechungsgesetz an der ersten Fläche $n\, sin\, i = n_1\, sin\, i'$. Ferner erhält man aus dem von den beiden Radien und dem Linienelement gebildeten Dreieck $r\, sin\, i' = r_1\, sin\, i_1$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Multiplication $nr\, sin\, i = n_1 r_1\, sin\, i_1 = C$, unsere obige Relation. Dieselbe lässt sich auch in der Form $np = C$ schreiben, wo p das vom Mittelpunkt der Indicialcurven auf die Tangente der Curve gefällte Loth bedeutet.

Um die Gleichung der Curve zu erhalten, ersetze man in

$$nr^2 \frac{d\varphi}{ds} = C \quad ds \text{ durch } \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

und erhält nach geeigneter Umformung

$$d\varphi = \frac{C dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}.$$

Um weiter die Differentialgleichung für den Richtungsunterschied der Curve in zwei Punkten zu erhalten, ist zu bedenken, dass an den beiden Seiten jeder brechenden Fläche $n \sin i$ den gleichen Werth hat, also das Element des gesuchten Richtungsunterschiedes $(di) = -\frac{dn}{n} tg\, i$ ist. Setzt man hierin für $tg\, i$ seinen aus der Gleichung $nr \sin i = C$ folgenden Werth, so ergiebt sich

$$(di) = -\frac{dn}{n} \cdot \frac{C}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}},$$

welches die Funtamentalformel für die Theorie der atmosphärischen Refraction ist. Es könnte auffällig erscheinen, dass bei Ableitung der letzten Formel sowohl die Constanz von $n \sin i$ wie $rn \sin i$ benützt wurde, indess ist zu bemerken, dass die Constanz von $n \sin i$ sich nur auf die beiden Seiten einer und derselben Fläche bezieht, während $nr \sin i$ eine Invariante für die genannte Flächenschaar bildet und dass (di) keineswegs den Zuwachs des Einfallswinkels gegenüber dem jedesmaligen Einfallsloth, sondern den Zuwachs der Neigung des Strahles gegenüber der festen Normale der betreffenden Fläche, wie er durch die Brechung an dieser Fläche erzeugt wird, bedeutet. Der erstere setzt sich demgemäss additiv aus dem letzteren und der Richtungsdifferenz des Einfallslothes zusammen oder es ist $di = (di) + d\varphi$. Setzen wir für di seinen aus der Gleichung $nr \sin i = C$ folgenden Werth, so erhalten wir wieder unsere obige Gleichung

$$(di) = -\frac{dn}{n} tg\, i.$$

Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die Fälle geradliniger und kreisförmiger Indicialcurven wenden wir uns jetzt einigen Specialfällen zu und beginnen dabei mit einem, der wegen seiner Bedeutung für die ophthalmologische Optik einerseits und der relativen Leichtigkeit einer experimentellen Behandlung andererseits ein besonderes Interesse verdient und deshalb auch in erster Linie von zwei Forschern[1]) in Angriff genommen wurde. Es ist dies der Fall eines Cylinders, in dem der Brechungsindex von der Axe nach dem Mantel zu continuirlich, aber wenig und immer in gleichem Sinne variirt und nur eine Function der Entfernung von der Axe (y) ist. Nennen wir die Brechungsindices des Cylinders in der Axe und am Mantel n_0 und n_1 und seinen Radius b, so lässt sich offenbar in erster Näherung das genannte Gesetz nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze durch die Form

$$n = n_0 - (n_0 - n_1) \frac{y^2}{b^2}$$

darstellen, was wir in der Formel

$$n = n_0 \left(1 - \alpha \frac{y^2}{b^2}\right)$$

schreiben wollen. Dabei soll α als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet werden und speciell der Strahlenverlauf in einem Axenschnitte näherungsweise

[1]) S. EXNER, Ueber Cylinder, welche optische Bilder entwerfen. Archiv für die gesammte Physiologie, Bd. 38. Abdruck in EXNER's Rep., Bd. 22. S. EXNER, das Netzhautbild des Insektenauges, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 3. Abth., Bd. 98. Abdruck in EXNER's Rep., Bd. 21. — L. MATTHIESSEN, Ueber den Strahlendurchgang durch coaxial continuirlich geschichtete Cylinder etc. EXNER's Rep., Bd. 22. Derselbe, Die Phoronomie der Lichtstrahlen in anisotropen, unkrystallinischen Medien im Allg. und in sphärischen Niveauflächen im besonderen (behandelt nicht unseren Fall). EXNER's Rep., Bd. 25. Genaueres bei MATTHIESSEN, Bd. 22.

untersucht werden. Lassen wir zunächst ein der Axe und sich selbst paralleles Strahlenbüschel senkrecht auf die Grundfläche einfallen, so lautet die Differentialgleichung der Trajektorie, wenn der Brechungsindex von der Mitte nach dem Mantel zu abnimmt

$$dx = -\frac{C dy}{\sqrt{n^2 - C^2}}.$$

Setzen wir hierin für den Brechungsindex n seinen Werth aus obiger Formel, so erhalten wir näherungsweise

$$dx = -\frac{C dy}{\sqrt{n_0^2\left(1 - 2\alpha\frac{y^2}{b^2}\right) - C^2}}.$$

Dabei sind für periphere Strahlen Glieder relativ zweiter, für paraxiale Glieder relativ dritter Ordnung vernachlässigt. Um dieser Formel eine geeignete Form zu geben, drücken wir die Constante C durch die Einfallshöhe des Strahles beim Eintritt in den Cylinder (b_1) aus und erhalten, da die Curve an diesem Punkte der Axe parallel ist

$$n_0^2\left(1 - 2\alpha\frac{b_1^2}{b^2}\right) = C^2.$$

Dies giebt bei Vernachlässigung von Grössen erster resp. dritter Ordnung wie oben

$$dx = -\frac{b}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{b_1^2 - y^2}}$$

und integrirt

$$+ x = -\frac{b}{\sqrt{2\alpha}} \arcsin\frac{y}{b_1} + const.$$

Wählen wir den Anfang der Cylinderaxe als Coordinatenanfangspunkt, so ist für $y = b_1$, $x = o$; die Constante wird also zu

$$+\frac{b}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und stellt zugleich die Entfernung des Schnittpunktes von Strahl und Axe von der Endfläche dar. Man sieht unmittelbar, dass diese Grösse, weil sie von b_1, der Einfallshöhe, nicht abhängt, für alle Strahlen dieselbe ist, diese also sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen. Wir nennen diese Grösse a_1 und erhalten durch Umkehrung die Formel

$$y = b_1 \cos\frac{\pi x}{2a_1}.$$

Die Curve des Lichtstrahles ist demnach periodisch und zwar eine einfache Cosinuslinie mit der Periode $4a_1$ und der Amplitude b_1. Eine solche Linie schneidet die Axe unter einem Winkel, dessen Tangente gleich $\frac{\pi b_1}{2a_1}$ ist, also wie die Schnitthöhe variirt. Wir haben also ein Resultat, welches vollständig analog dem in der allgemeinen Abbildungstheorie für geradlinige Strahlen gewonnenen ist. Dasselbe ist indess wegen der begangenen Vernachlässigungen nicht ganz exakt; der Cosinus des fraglichen Winkels ergiebt sich vielmehr leicht durch Anwendung des Brechungsgesetzes zu $1 - \alpha\frac{b_1^2}{b^2}$. Die Lichtcurve hat weiter die allgemeine Eigenschaft, dass alle Strahlen unseres Büschels beim Durchtritt durch einen Normalschnitt des Cylinders nach dem gleichen Punkte convergiren oder von demselben divergiren. Denn, wie leicht zu sehen, liegt für einen Normal-

schnitt in der Entfernung l der Convergenzpunkt von diesem aus gerechnet in der Entfernung

$$\frac{2a_1}{\pi} \, cotg \left(\frac{\pi l}{2a_1}\right),$$

ist also von dem Parameter b_1 unabhängig. Denken wir uns jetzt unseren Cylinder durch den ebengenannten Normalschnitt begrenzt und an ein Medium mit dem Index 1 angrenzend, so handelt es sich jetzt darum, den Abstand des Convergenzpunktes von dieser Grenzfläche (f_1) zu finden. Durch Anwendung des Brechungsgesetzes ergiebt sich

$$\left(f_1^2 + b_1^2 \cos^2 \frac{\pi l}{2a_1}\right) n^2 = \left(\frac{2a_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2 + b_1^2 \cos^2 \frac{\pi l}{2a_1},$$

worin

$$n = n_0 \left(1 - \alpha \frac{b_1^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi l}{2a_1}\right)$$

ist. Für Centralstrahlen folgt daraus unmittelbar

$$f_1 = \frac{2a_1}{\pi n_0} \, cotg \, \frac{\pi l}{2a_1}.$$

Wir haben also, da wir für Centralstrahlen uns früher nur eine Vernachlässigung dritter Ordnung erlaubt haben, hier eine Strahlenvereinigung zweiter Ordnung, wie es auch bei einer einfachen Linse der Fall ist. Was die peripherischen Strahlen anbetrifft, so dürfen wir, um nicht in der Differentialgleichung Glieder erster Ordnung zu vernachlässigen, das C des Zählers nicht durch n_0 ersetzen. Wir können dies berücksichtigen, wenn wir an Stelle von $a_1 \frac{C}{n_0} a_1 = \bar{a}_1$ gesetzt denken. Entwickeln wir unter diesen Umständen f_1^2, so erhalten wir

$$f_1^2 = \left[\left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 + b_1^2 \cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right] \frac{1}{n_0^2} \left(1 + 2\alpha \frac{b_1^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right) - b_1^2 \cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}$$

$$= \left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{n_0^2} \cdot 2\alpha \frac{b_1^2}{b^2} \cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1} \left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2.$$

Da $a_1 \infty$ gross erster Ordnung ist, so sind bei endlicher Länge des Cylinders die Glieder der Reihe nach ∞ gross von der vierten und dritten Ordnung und falls der Cylinder die Grössenordnung von a_1 besitzt von der zweiten und ersten Ordnung. Um den Charakter der Strahlenvereinigung zu untersuchen, schreiben wir das Hauptglied

$$\left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2$$

in der Form

$$\left(\frac{2a_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 - \left(\frac{2a}{\pi} \, cotg \, \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2,$$

worin die erste Form von der Einfallshöhe unabhängig ist und die zweite ein Glied dritter resp. erster Ordnung repräsentirt. Dieses Glied besitzt genau die Form des vorher erwähnten Gliedes gleicher Ordnung, aber einen anderen Zahlencoëfficienten; eine Compensation der Glieder findet also nicht statt und es lässt sich demnach bei peripherischen Strahlen nur eine Strahlenvereinigung erster Ordnung erzielen[1]).

Um jetzt auf den Fall eines in endlicher Entfernung befindlichen leuchtenden Punktes überzugehen, wobei wir uns auf Centralstrahlen beschränken wollen,

[1]) Die Abweichung dieses Resultates gegenüber MATTHIESSEN (Bd. 22, pag. 340) erklärt sich daraus, dass bei diesen in der Differentialgleichung bereits Glieder von relativ erster Ordnung vernachlässigt worden sind.

genügt die Bemerkung, dass, falls ein reelles Bild entstehen soll, die Trajektorie nothwendig an einer Stelle der Axe parallel sein muss; denken wir uns den Cylinder an dieser Stelle durch einen Normalschnitt getrennt, so lässt sich die obige Formel unmittelbar auf die beiden Stücke anwenden und es handelt sich noch darum, l_1 und l_2 zu eliminiren. Dies liefert

$$arc\ tang \frac{2a_1}{\pi n_0 f_1} + arc\ tang \frac{2a_1}{\pi n_0 f_2} = \frac{\pi l}{2a_1}.$$

Ist die Länge (l) des Cylinders gegen a_1 kurz, so lässt sich diese Formel in der Gestalt

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{\pi^2 l n_0}{4a_1^2} = \frac{2\alpha n_0 l}{b^2}$$

schreiben und stimmt mit der Formel für eine dünne Linse überein. Aus Gründen der Continuität wird diese Formel, welche nur für den Fall eines reellen Bildes abgeleitet wurde, auch allgemein gelten. Die Brennweite eines solchen kurzen Cylinders ist also dem Quadrat der Dicke direkt und der Länge umgekehrt proportional; dasselbe findet bekanntlich auch für jede schwache, biconvexe Linse statt. Hinsichtlich der allgemeinen Formel für Centralstrahlen ist noch eine Bemerkung zu machen. l_1 und l_2 waren von den äussersten Stellen, an denen die Kurve der Axe parallel war, an zu rechnen; $l_1 + l_2$ ist demnach im Allgemeinen $= l - 2a_1 p$, wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, welche $l - 2a_1 p$ positiv und kleiner als $2a_1$ macht; da indess die vorkommenden *arc tang* mit der Periode π vieldeutig sind, so kann die obige Formel ihre Gestalt behalten, und man mag im speciellen Falle die betreffenden Periodenmultipla berücksichtigen. Bei hinreichender Kürze besitzt der Cylinder, wie ersichtlich, den Charakter einer Sammellinse und liefert wie diese ein umgekehrtes Bild; mit wachsender Länge ändert sich dies indess und es können in der That[1]) alle möglichen Bilder entstehen. Wie man leicht sieht, liefert nämlich ein Cylinder für ein unendlich entferntes Objekt bei einer Länge zwischen 0 und a_1 ein umgekehrtes reelles, zwischen a_1 und $2a_1$ ein umgekehrtes virtuelles, zwischen $2a_1$ und $3a_1$ ein aufrechtes reelles und zwischen $3a_1$ und $4a_1$ ein aufrechtes virtuelles Bild. Von da an kehren die Verhältnisse mit der Periode $4a_1$ wieder.

Dem bisher behandelten Falle, in welchem nach dem obigen Gesetze die Dichtigkeit von dem Mantel nach der Axe des Cylinders hin zunahm, steht der umgekehrte gegenüber, bei welchem also $n_1 > n_0$ ist. Wir brauchen, um diesen Fall zu untersuchen, nur in den betreffenden Formeln α negativ $= -\alpha'$ zu nehmen. Ferner müssen wir noch, um das richtige Vorzeichen in der Differentialgleichung zu erhalten, x negativ setzen. Alle abgeleiteten Beziehungen und alle daraus gezogenen Schlüsse gelten dann in gleicher Weise. So gilt also die Formel

$$y = \frac{b_1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}\frac{x}{a_1'}} + e^{-\frac{\pi}{2}\frac{x}{a_1'}}\right),$$

wobei

$$a_1' = -\frac{b\pi}{2\sqrt{2\alpha^1}},$$

welche besagt, dass die Curve eine Minimalentfernung gleich b_1 besitzt und nach beiden Seiten symmetrisch sich dann von der Axe wegwendet. Ferner besitzt die Curve die Eigenschaft, dass die Minimalentfernung von der Axe für die verschiedenen Strahlen des betrachteten Büschels in demselben Normalschnitt erreicht wird, gerade wie vorher die Maximalentfernung oder der Schnittpunkt mit der

[1]) Matthiessen, l. c.

Axe. Auch die Identität des Divergenzpunktes für die einen Normalschnitt passirenden Strahlen oder, was hier dasselbe ist, die Proportionalität zwischen Einfallshöhe und der Tangente der Neigung der Kurve finden statt; f_1 ergiebt sich für Centralstrahlen zu

$$-\frac{2a_1'}{\pi n_0}\left(\frac{e^{+\frac{\pi l'}{2a_1'}}+e^{-\frac{\pi l'}{2a_1'}}}{e^{+\frac{\pi l'}{2a_1'}}-e^{-\frac{\pi l'}{2a_1'}}}\right)$$

und es besteht bei kurzen Cylindern für conjugirte Punkte die Relation

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f}=-\frac{2\alpha' n_0 l'}{b^2},$$

wobei f_1 und f_2 die Entfernungen von Objekt- und Bildpunkt von den zugewandten Seiten des Cylinders sind. Der Cylinder wirkt also bei mässiger Länge als Dispersionslinse und behält im Gegensatz zu vorhin diese Eigenschaft auch bei beliebiger Länge bei. —

Die beiden hier kurz behandelten Fälle wurden von S. Exner, Matthiessen[1]) und anderen experimentell untersucht. Die erstgenannten benützten Gelatine-, Leim- und Celloidin-Cylinder, welche durch Quellung resp. Trocknung die erforderlichen Refractionsunterschiede erhielten. Ein gequellter Cylinder entspricht unserem ersten, ein getrockneter unserem zweiten Falle. Beide Processe wurden nur so lange fortgesetzt, bis sie zur Axe vorgedrungen waren. Das Gesetz für die Veränderung des Brechungsindex gequellter Cylinder mit der Distanz von der Axe war schon vorher von Matthiessen und Schwarz[2]) bestätigt worden. Exner verificirte für kurze Cylinder die Gültigkeit der Linsenformel, während Matthiessen die theoretisch aus Dimensionen und Brechungsverhältnissen abgeleitete Brennweite mit der experimentell bestimmten verglich. Theorie und Beobachtung fanden sich innerhalb der Beobachtungsfehler in Uebereinstimmung. Aehnliche Beobachtungen, wie mit den erwähnten Cylindern, kann man auch mit Glascylindern machen, wenn man dieselben rasch erkalten lässt, also z. B. das flüssige Glas in eiserne Röhren giesst. Das Glas wird hierdurch in einen Spannungszustand versetzt, der den Brechungsexponenten einerseits durch eine entstehende Dichteänderung, andererseits direkt beeinflusst. Solche Cylinder sind von Schott[3]) hergestellt worden und wirken immer als Concavlinsen, wenn man ihre Endflächen plan macht.

Das oben zugrundegelegte Gesetz für die Veränderlichkeit des Brechungsindex ist desshalb von ganz besonderer Wichtigkeit, weil es für die Krystalllinsen der Säugethiere und Fische gilt. Denkt man sich nämlich in einer solchen Krystalllinse von dem Kern- oder Schichtungscentrum, welches den grössten Index besitzt, irgend eine gerade Linie nach der Oberfläche gezogen, so variirt der Brechungsindex auf derselben nach dem Gesetze

$$n=n_0\left(1-\frac{n_0-n_1}{n_0}\frac{y^2}{b^2}\right);$$

dabei bedeuten $n_0 n_1$ die Indices des Centrums resp. der peripheren Schicht, der sogenannten Corticalis, b ist die ganze Länge der Linie zwischen den Indicialflächen n_0 und n_1 und y der Abstand des betrachteten Punktes von Kerncentren.

[1]) S. Exner, l. c., Matthiessen, l. c.

[2]) Matthiessen, Gräfe's Archiv für Ophthalmologie, Bd. 31, 2; A. Schwarz, Ueber das Gesetz der Quellung von Leimcylindern, Exner's Rep., Bd. 21.

[3]) Czapski, Ueber die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten, Wiedemann's Annalen 42. 1891.

Bezeichnen wir für zwei dieser Linien $(b_1 b_2)$ die Abstände der gleichen Indicialfläche mit $y_1 y_2$, so ist ersichtlich, dass $y_1 : y_2 = b_1 : b_2$ ist, dass also die Indicialflächen ähnlich und homothetisch um das Kerncentrum liegen[1]). Hiermit sind, in Verbindung mit den gemessenen Dimensionen und dem Maximal- wie Minimal-Index der Krystalllinse, die genügenden Grundlagen für eine strenge Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen sowie der Fundamentalpunkte und Constanten gegeben; aus Raummangel ist es nicht möglich, dies hier zu thun, und verweisen wir hierfür auf MATTHIESSEN[2]).

Der Fall der Krystalllinse der Vertebraten ist übrigens nicht der einzige, in welchem die oben charakterisirten Refractionsverhältnisse vorliegen, es kommen dieselben vielmehr auch bei den sogenannten zusammengesetzten Augen vor, welche aus radiär auf eine Kugelfläche aufgesetzten Cylindern bestehen. Auf diese Cylinder lässt sich sogar, abgesehen von den durch die Wölbung der Endflächen bedingten Verschiedenheit, die obige Theorie vielleicht unmittelbar anwenden, doch soll bei der Complication des Gegenstandes hierauf nicht eingegangen werden.

Wir wollen jetzt noch zwei Beispiele für ein sphärisch geschichtetes Medium nehmen und benützen zur Untersuchung die für derartige Medien charakteristische Beziehung $np = C$, sowie die allgemein gültige Formel $\rho dp = r dr$, in der man r und p von einem beliebigen aber demselben Punkte der betrachteten Ebene aus rechnen kann. Letzteres kann natürlich hier nicht in Betracht kommen, da wir p und damit r vom Mittelpunkte der Indicialcurven zu rechnen haben. Zuerst wollen wir eine mit dem Medium confocale Ellipse[3]) von der Gleichung

$$r = \frac{b^2}{a(1 - c\cos\rho)}$$

als Trajektorie annehmen und die hierzu nöthige Beziehung zwischen Brechungsindex und Radiusvector suchen. Benützen wir die bekannte Formel

$$\rho = \frac{(2ar - r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

so ergiebt sich

$$dp = \frac{ab r dr}{(2ar - r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und, da für $p = b$ $r = a$ wird,

$$p = \frac{br}{\sqrt{2ar - r^2}}, \quad n \text{ wird also } = \frac{C\sqrt{2ar - r^2}}{br}.$$

Soll zu r_1 der Brechungsindex n_1 gehören, so ergiebt die Elimination von C

$$n = n_1 \cdot \frac{r_1\sqrt{2ar - r^2}}{r\sqrt{2ar_1 - r^2}}.$$

Da aus dieser Formel b verschwunden ist, so giebt es also bei einer gegebenen Constitution des Mediums durch einen Punkt eine ganze Schaar von Ellipsen, welche sich nach Lage und Gestalt unterscheiden. Falls diese Ellipsen geschlossen sind und dies ist der allgemeine Fall, wenn das Medium bis zum Brechungsindex o vorhanden ist, so kehren die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen wieder zu demselben zurück. Der Punkt ist also sein eigenes Bild und es sind

---

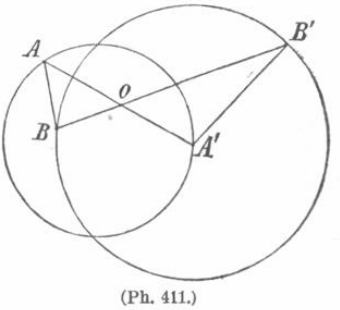
[1]) MATTHIESSEN, Ueber das Gesetz der Zunahme etc., GRÄFE's Archiv für Ophthalmologie, Bd. 31, 2.

[2]) Derselbe, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, sowie PFLÜGER's Archiv 1879, Bd. 19.

[3]) MATTHIESSEN, l. c., EXNER's Rep., Bd. 25.

nach dem Satze von MALUS für irgend eine Farbe die Umlaufszeiten der Lichtwellen gleich. Nennt man dieselben T und die, wie leicht einzusehen, für alle Ellipsen constante Geschwindigkeit im Scheitel der kleinen Axe v_1, so ist $v_1 T = 2a\pi$. Denkt man sich also um die grosse Axe $2a$ einen Kreis konstruirt und auf demselben einen Punkt mit der Geschwindigkeit v_1, so wird derselbe mit der Lichtwelle gleiche Umlaufszeit haben. Wie man sieht, haben wir hier ein Analogon zu dem bei der elliptischen Planetenbewegung benutzten ideellen Punkte, wie denn überhaupt die Planetenbewegung interessante Vergleichsmomente mit der betrachteten bietet, auf welche hier nur hingewiesen sein mag[1]). Während aber bei der ersteren bekanntlich die Geschwindigkeit mit wachsender Entfernung vom Centrum abnimmt, also im Pericentrum am grössten, im Apocentrum am kleinsten ist, ist hier das Umgekehrte der Fall, wenigstens für die Undulationstheorie. Auf dem Boden der Emissionstheorie dagegen würde vollkommene Identität in allen Verhältnissen herrschen.

Als zweites Beispiel sphärischer Indicialflächen wollen wir das von MAXWELL bei der Krystalllinse der Fische vermuthete Gesetz $n = \frac{b}{a^2 + r^2}$ annehmen, wo a und b für das Medium charakteristische Constanten sind. Benützen wir wiederum die Formeln $np = C$ und $r\,dr = \rho\,dp$, so ergiebt sich aus der Vergleichung von $\frac{bp}{a^2 + r^2} = C$ und $r\,dr = \rho\,dp$ zunächst $\rho = \frac{b}{2C}$ und dies besagt, dass für jede beliebige durch den Parameter b charakterisirte Trajektorie der Krümmungsradius constant, also die Trajektorie selbst ein Kreis ist. Nennen wir weiter die Entfernung eines Kreismittelpunktes vom Centrum der Indicialflächen d, so liefert die Natur des Kreises die Gleichung $r^2 + \rho^2 - d^2 = 2\rho p$ und dies giebt mit $r^2 + a^2 = \frac{b}{C} p$ verglichen, die Beziehung $\rho^2 - d^2 = a^2$. Alle Trajektorien haben demnach die Eigenschaft, dass ihre »Potenz« in Bezug auf den Mittelpunkt des Mediums gleich a^2 ist. Ziehen wir also durch diesen Mittelpunkt eine Gerade und nennen die beiden Abschnitte, in welche dieselbe durch irgend eine Trajektorie getheilt wird, r resp. r', so ist $rr' = a^2$. Da dies eine nur vom Medium abhängige Beziehung ist, so besitzen die Endpunkte der Sehne den Charakter conjugirter Punkte, verhalten sich also wie Objekt und Bildpunkt, und zwar ist die Abbildung aplanatisch. Wir können sie aber weiter in chromatischer Beziehung fehlerfrei machen, wenn wir nur annehmen, dass a^2 von der Farbe unabhängig ist. Das überraschend einfache Resultat, wonach conjugirte Punkte auf einer durch das Centrum des Mediums gehenden Geraden liegen, ist übrigens schon aus Symmetriegründen nothwendig. Bilden wir jetzt behufs näherer Untersuchung (Fig. 411) ein Linienelement AB ab, so ist zunächst klar, dass irgend zwei zu verschiedenen Punkten gehörige Trajektorien sich schneiden, falls sie in derselben Ebene liegen. Denken wir uns nun irgend wohin ein Auge o gesetzt, welches keinen Einfluss auf den Gang der Lichtstrahlen ausüben soll, so wird dieses, wenn es sich dem Objekte zuwendet, das Objekt aufrecht AB sehen; falls es sich aber abwendet, wird es dasselbe von der Kehrseite und umgekehrt $A'B'$ sehen.



(Ph. 411.)

[1]) Ibid.

B. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung.

Die die Erde umgebende Atmosphäre bewirkt im Allgemeinen eine Veränderung im scheinbaren Orte eines Objektes, welche Refraction heisst. Man nennt dieselbe, je nachdem das Objekt unserer Erde angehört oder nicht, astronomische resp. terrestrische. Beide sind also ihrem Wesen nach nicht verschieden, man könnte in der That sowohl die astronomische als Grenzfall der terrestrischen, als auch die terrestrische als Differenz zweier astronomischen Refractionen darstellen. Die speciellen Umstände indessen lassen es angezeigt erscheinen, eine Trennung in der Behandlung beider vorzunehmen. Die hauptsächlichste Wirkung der Refraction besteht in einer Vergrösserung der Höhe, in der uns ein Objekt erscheint; es würde dies sogar die einzige Wirkung sein, wenn wir die Erde als Kugel und die umgebende Atmosphäre im Zustande des Gleichgewichtes in mechanischer, thermischer und chemischer Hinsicht annehmen würden. Da beides nicht der Fall ist, so tritt zu der eben genannten, der Vertikalrefraction, noch eine zweite Wirkung, die Lateralrefraction hinzu, welche in der Veränderung des scheinbaren Azimutes eines Objektes besteht. Beide, Vertikal- wie Lateralrefraction, sind dem Wechsel der bewirkenden Ursachen entsprechend Veränderungen unterworfen, die bald einen äusserst rasch periodischen (siehe Scintillation), bald einen langsam veränderlichen Charakter tragen; diese entziehen sich jedoch bei der Unkenntniss der speciellen Vorgänge im Luftmeere einerseits und der Schwierigkeit der analytischen Behandlung andererseits bis jetzt der genaueren Erforschung und Berücksichtigung. Für unsere Behandlung, die nicht den Anspruch grösstmöglichster Genauigkeit und Vollständigkeit macht, wollen wir auch von der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt absehen und den Idealfall einer homogenen, concentrisch sphärisch geschichteten Atmosphäre zu Grunde legen. Wir können dann die früher entwickelte Differentialgleichung für die Refraction unmittelbar benützen und wollen dieselbe nur soweit verändern, dass wir das Vorzeichen der rechten Seite positiv nehmen. Wir fassen also die Refraction (ζ) auf als eine Correction, die man an der scheinbaren Zenithdistanz eines Punktes anzubringen hat, um die wahre zu erhalten. Die Differentialgleichung geht dadurch über in

$$d\zeta = \frac{dn}{n} \cdot \frac{C}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}.$$

Bezeichnen wir ferner alle Grössen, die sich auf die Oberfläche der Erde beziehen mit dem Index 0 und ersetzen C durch $n_0 r_0 \sin z$, wo z die scheinbare Zenithdistanz eines Punktes bedeutet, so erhalten wir

$$d\zeta = \frac{r_0 n_0 \sin z \, dn}{rn\sqrt{n^2 - \frac{r_0^2 n_0^2 \sin^2 z}{r^2}}}.$$

In dieser Gleichung können wir zunächst nach dem Gesetz von der »Constanz des specifischen Brechungsvermögens« n und n_0 durch ihre Werthe $\sqrt{1 + 4k\delta}$ resp. $\sqrt{1 + 4k\delta_0}$ ersetzen. Dabei bedeuten δ und δ_0 die Dichtigkeiten der Luft bezogen auf Luft von 0° und 760 *mm* Druck, und k eine nur von der Natur der Atmosphäre abhängige Constante. Führen wir weiter an Stelle von r die Variable s ein, welche mit r durch die Gleichung $\frac{r_0}{r} = 1 - s$ verbunden ist, und schreiben zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{2k\delta_0}{1 + 4k\delta_0},$$

so erhalten wir diejenige Gestalt der Differentialgleichung, welche der Ausgangspunkt der meisten neueren Refractionstheorien gewesen ist, nämlich

$$d\zeta = \frac{\alpha \frac{d\delta}{\delta_0}(1-s)\sin z}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, ist es, wie man sieht, nothwendig, den Zusammenhang zwischen s und δ resp. r und δ zu kennen. Hier muss man, da derselbe *a priori* nicht angebbar ist, zu Hypothesen seine Zuflucht nehmen, die allerdings nur dann befriedigend erscheinen können, wenn sie die wenigen von meteorologischer Seite aus bekannt gewordenen Daten darstellen. Man braucht hier nicht unmittelbar eine Beziehung zwischen Höhe und Dichtigkeit aufzustellen, es genügt vielmehr, irgend einen Zusammenhang zwischen diesen beiden und Druck und Temperatur festzulegen. Denn die Formel für das ärostatische Gleichgewicht einerseits und das combinirte Gesetz von MARIOTTE-GAY-LUSSAC andererseits liefern ja bereits zwei Zusammenhänge zwischen den genannten Grössen, die die Form

$$dp = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2}\delta\, dr \quad \text{und} \quad \frac{p}{\delta(1+\varepsilon t)} = \frac{p_0}{\delta_0(1+\varepsilon t_0)}$$

besitzen.

I. Astronomische Refractionstheorie.

Von den mannigfachen astronomischen Refractionstheorien, welche entwickelt worden sind, entweder auf Grund bestimmter Hypothesen oder nach analytischen Rücksichten, wollen wir nur drei etwas genauer behandeln und uns bei den übrigen mit einer Kritik der zu Grunde liegenden Annahmen begnügen. Die erste derselben, die von BOUGUER-SIMPSON-BRADLEY, möge deshalb Platz finden, weil sie eine im Vergleich zu ihrer grossen Einfachheit relativ gute Darstellung ist, die zweite, die BESSEL'sche Theorie, weil die auf ihrer Grundlage berechneten Tafeln bis auf die heutige Zeit fast ausschliesslich wegen ihrer Correctheit von den Astronomen benützt worden und die dritte, die Theorie von IVORY, weil die dieser zu Grunde liegende Hypothese berufen zu sein scheint, noch für längere Zeit als Fundament neuer Refractionstheorien zu dienen.

Die zuerst von BOUGUER aufgestellte Hypothese $r n^{m+1} = r_0 n_0^{m+1}$ liefert, in die Differentialgleichung eingesetzt

$$d\zeta = \frac{n^{m-1} dn \cdot \sin z}{n_0^m \sqrt{1-\left(\frac{n}{n_0}\right)^{2m}\sin^2 z}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich unmittelbar integriren und man erhält für das Integral zwischen den Grenzen 1 und n_0 den Werth

$$\zeta = \frac{1}{m}\left(z - ar\sin\cdot\frac{\sin z}{n_0^m}\right).$$

In dieser Form hat SIMPSON die Refraction dargestellt; um dieselbe in der ihr von BRADLEY gegebenen Gestalt zu erhalten, schreiben wir der Reihe nach

$$\frac{\sin z}{n_0^m} = \sin(z - m\zeta) \qquad \frac{\sin z - \sin(z-m\zeta)}{\sin z + \sin(z-m\zeta)} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1},$$

$$\operatorname{tang}\frac{m\zeta}{2} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\cdot\operatorname{tang}\left(z - \frac{m\zeta}{2}\right).$$

Ist $\frac{m\zeta}{2}$ ein kleiner Bruch, so können wir schliesslich die letztere Form durch

$\zeta = g\,tang\,(z - f\zeta)$ ersetzen. BRADLEY fand, dass für einen mittleren Luftzustand von 9·3° C. und 751·85 *mm* die Constanten g und f die Werthe 57″ und 3 erhalten müssen, um die von ihm beobachteten Refractionen durch die Formel darstellen zu können. Die Horizontalrefraction ($z = 90°$) erhält danach den Werth 33′; sie war indess eines der Mittel gewesen, die Constanten zu bestimmen und darf also nicht als Beweis für die Güte der Hypothese herangezogen werden; die Prüfung dieser könnte höchstens durch eine vollständige Vergleichung der nach dieser Formel berechneten Refractionswerthe mit den von der Beobachtung gelieferten erfolgen.

Dass dieser Weg ziemlich misslich ist, werden wir später sehen, wir wollen lieber die Prüfung in der Weise vornehmen, dass wir einerseits aus physikalisch bestimmten Grössen unter Zugrundelegung der obigen Formel die Horizontalrefraction bestimmen und andererseits aus der Hypothese auf die Constitution der Atmosphäre Schlüsse machen. Setzen wir in der obigen Formel $n_0^2 = 1 + 4k\delta_0$, so erhalten wir mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, indem $4k\delta_0$ als Grösse erster Ordnung aufgesetzt wird,

$$tang\,\frac{m\zeta}{2} = mk\delta_0\,tang\left(z - \frac{m}{2}\zeta\right)$$

und also für die Horizontalrefraction

$$tang\,\frac{m}{2}\zeta' = \sqrt{mk\delta_0}.$$

$4k$ hat nach den Bestimmungen von BIOT den Werth 0·0005888; um die Grösse m zu bestimmen, benützen wir die Gleichgewichtsbedingung für ein Element der Atmosphäre

$$dp = -g_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\delta\,dr = +g_0 r_0\,\delta\,d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Setzen wir hierin

$$\frac{r_0}{r} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{m+1} = \left(\frac{1+4k\delta}{1+4k\delta_0}\right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

so erhalten wir wieder mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung $dp = 2(m+1)g_0 r_0 k\delta\,d\delta$ und durch Integration $p = (m+1)g_0 r_0 k\delta^2$, also für die Oberfläche der Erde $p_0 = (m+1)g_0 r_0 k\delta_0^2$. Andererseits ist $p_0 = g_0\delta_0 l$. wo l die Höhe einer homogenen Atmosphäre von der Dichtigkeit δ_0, die den Druck p_0 ausübt, bedeutet. Hierin ist l bekannt, da es offenbar durch die Höhe der Quecksilbersäule multiplicirt mit dem Verhältniss der specifischen Gewichte von Quecksilber und Luft gegeben ist. Nehmen wir Normal-Druck und Temperatur (760 *mm* und 0°), so ist $l = 0{\cdot}76 \cdot 10517{\cdot}3 = 7993{\cdot}15\ m$. Der mittlere Erdradius ist ferner 6366738 *m*, wir erhalten also für ζ', indem wir die beiden Werthe von p_0 gleichsetzen und m ausrechnen, den Werth 1824″ oder 30′ 24″, während die Beobachtungen[1]) für die obigen atmosphärischen Verhältnisse $\zeta = 37'\,31''$ ergeben haben. Die obige Hypothese liefert also eine über mehr als 7′ zu kleine Horizontalrefraction. Prüfen wir weiter die Hypothese an ihren Folgerungen für die Constitution der Atmosphäre, so zeigt die Vergleichung der Ausdrücke

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \quad \text{und} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0}\,\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0},$$

dass

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0}.$$

[1]) CHAUVENET, Manual of spherical and practical Astronomy.

Ersetzen wir in der letzteren Beziehung δ durch r, so erhalten wir in erster Annäherung mit Beachtung der Gleichung

$$(m+1)k\delta_0 = \frac{l}{r_0},$$
$$r - r_0 = 2l\varepsilon(t_0 - t).$$

Die Temperatur der Atmosphäre nimmt also in arithmetischer Progression mit der Höhe ab und zwar, da $\varepsilon = \frac{1}{273}$ ist, auf $2l\varepsilon$, d. h. 58·6 m um einen Grad Celsius. Alle neueren Beobachtungen führen aber auf einen Mittelwerth von ungefähr 172 m; die behandelte Hypothese ist also auch in dieser Beziehung nicht entfernt mit der Wirklichkeit übereinstimmend.

Theorie von BESSEL.

Wir wenden uns jetzt zur BESSEL'schen Theorie der Refraction, müssen jedoch, um die Motive für deren Hypothese würdigen zu können, kurz eine andere Annahme betrachten, die von NEWTON seiner Refractionstheorie zu Grunde gelegt worden ist und dies ist die Annahme einer gleichen Temperatur für alle Punkte der Atmosphäre. Unsere beiden Gleichungen geben dann durch Division

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 r_0 \delta_0 ds}{p_0}$$

und durch Integration durch die ganze Atmosphäre hindurch

$$log\ nat\ p = -\frac{g_0 r_0 \delta_0}{p_0} s + log\ nat\ p_0,$$

oder mit Anwendung der Grösse l

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0} = e^{-\frac{r_0 s}{l}}.$$

Bei der Annahme einer gleichen Temperatur fällt also die Dichtigkeit in geometrischer Progression mit der Höhe. Diese Eigenschaft behält nun BESSEL bei, aber er setzt, um der erfahrungsmässig falschen Consequenz einer constanten Temperatur zu entgehen, einen Faktor $\frac{h-l}{h}$ zu dem Exponenten, sodass die BESSEL'sche Hypothese

$$\delta = \delta_0 e^{-\frac{h-l}{h}\frac{r_0}{l}s} = \delta_0 e^{-\beta s}$$

lautet. Um mit dieser Annahme die Differentialgleichung zu integriren, lassen wir in derselben einige Vereinfachungen eintreten, indem wir erstens den Faktor

$$1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

im Nenner ausserhalb des Wurzelzeichens durch seinen Mittelwerth $1 - \alpha$ ersetzen, was, wie leicht einzusehen, eine Vernachlässigung von Grössen relativ zweiter Ordnung bedeutet. Dabei ist α als Grösse erster Ordnung betrachtet. Zweitens wollen wir s^2, was ebenfalls — wenigstens im wirksamen Theile der Atmosphäre — eine Grösse zweiter Ordnung ist, weglassen.

Dass diese letztere Vereinfachung gestattet ist, kann durch Reihenentwickelung nach der zu vernachlässigenden Grösse bewiesen werden. Beschränken wir uns zu diesem Zwecke auf die beiden ersten Glieder, so wird

$$d\zeta = \frac{-\alpha\beta\ sin\ z\ e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\beta s}) + 2s\ sin^2 z}}$$
$$+ \frac{\alpha\beta\ sin\ z\ e^{-\beta s} s\, ds\left[cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\beta s}) + \frac{3}{2} s\ sin^2 z\right]}{(1-\alpha)\sqrt{cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\beta s}) + 2s\ sin^2 z}}.$$

Das zweite Glied hat einen Maximalwerth für $z = 90$, also für die Horizontalrefraction. Werthen wir hierfür dasselbe aus, so können wir zunächst, da s zwischen 0 und 1 liegt, α eine kleine Grösse ist, und der Hauptantheil des Integrales sehr kleinen Werthen von s entspricht, an Stelle von $1 - e^{-\beta s}$ βs setzen. Hiermit erhalten wir

$$\zeta_{90} = \frac{\alpha\beta(3 - 4\alpha\beta)}{2^{\frac{5}{2}}(1-\alpha)(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 s^{\frac{1}{2}} e^{-\beta s} ds.$$

Erstrecken wir das Integral nicht bis 1, sondern bis ∞, so erhalten wir offenbar einen zu grossen Werth. Dieser beträgt

$$\frac{\alpha(3 - 4\alpha\beta)}{8(1-\alpha)(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}},$$

oder mit den BESSEL'schen Daten $\alpha = 0{\cdot}000294211$ und $\beta = 768{\cdot}57$ $0{\cdot}72''$. Es ist demnach gerechtfertigt, dieses Glied zu vernachlässigen.

Für die weitere Entwickelung des nunmehr bleibenden Integrales

$$\zeta = \int \frac{-\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\beta s}) + 2s \sin^2 z}}$$

machen wir nach dem Vorbilde von LAPLACE die Substitution $s' \sin^2 z = s \sin^2 z - \alpha(1 - e^{-\beta s})$ und erhalten zunächst

$$\zeta = \int \frac{-\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{\sin^2 z + 2s' \sin^2 z}}.$$

Um auch im Zähler die Variable s' einzuführen, schreiben wir an Stelle von $\beta e^{-\beta s} ds$ $de^{-\beta s}$ und erübrigt es also bloss noch $e^{-\beta s}$ durch s' auszudrücken. Nach einem bekannten Satze von LAGRANGE erhalten wir

$$e^{-\beta s} = e^{-\beta s'} - \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}(1 - e^{-\beta s'})e^{-\beta s'} - \frac{\alpha^2\beta}{1\cdot 2 \sin^4 z}\frac{d}{ds'}[(1 - e^{-\beta s'})^2 e^{-\beta s'}]$$
$$- \frac{\alpha^3\beta}{1\cdot 2\,3 \sin^6 z}\frac{d^2}{ds'^2}[(1 - e^{-\beta s'})^3 e^{-\beta s'}] - \text{etc.} - \ldots,$$

also

$$d\zeta = \frac{\alpha\beta \sin z\, ds'}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}} e^{-\beta s} + \frac{\alpha}{\sin^2 z}\frac{d}{ds'}[(1 - e^{-\beta s'})e^{-\beta s'}]$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1\cdot 2 \sin^4 z}\frac{d}{ds'^2}[(1 - e^{-\beta s'})^2 e^{-\beta s'}] + \ldots,$$

oder durch Entwickelung der Klammerinhalte

$$d\zeta = \frac{\alpha\beta \sin z\, ds'}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}} \left[e^{-\beta s'} + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}(2e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) + \right.$$
$$\frac{\alpha^2\beta^2}{1\cdot 2 \sin^4 z}(3^2 e^{-3\beta s'} - 2^2 \cdot 2 e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) +$$
$$\left. \frac{\alpha^3\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3 \sin^6 z}(4^3 e^{-4\beta s'} - 3^3 \cdot 3 e^{-3\beta s'} + 2^3 \cdot 3 e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) + \ldots \right].$$

Dies ist zu integriren zwischen $s = 0$ und $s = 1$, da aber bereits für $s = 1$ die Dichtigkeit eine ganz ausserordentlich geringe ist, nämlich ungefähr $\frac{1}{(2{\cdot}72)^{800}}$ der an der Oberfläche der Erde, so können wir auch ohne irgend welche merkbare Vernachlässigung zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriren. Die gleichen Grenzen hat dann s'.

Wie man sieht, haben alle Integrale den gleichen Typus; sie sind nämlich sämmtlich von der Form

$$\frac{\beta\, ds' e^{-p\beta s'} \sin z}{\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}},$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet. Die Substitution

$$\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 2s' = \frac{2t^2}{p\beta}$$

verwandelt diese Form in

$$\sqrt{\frac{2\beta}{p}}\, e^{\frac{p\beta}{2}\cot g^2 z - t^2} dt.$$

Setze ich nun zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{p\beta}{2}}\cot z = T \quad \text{und} \quad \psi(p) = e^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2} dt,$$

so kann ich das obige Integral durch

$$\sqrt{\frac{2\beta}{p}}\,\psi(p)$$

bezeichnen. Mit dieser Bezeichnung erhalte ich für den Werth der Refraction den Ausdruck

$$\zeta = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha}\,\psi(1) + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\,[2\tfrac{1}{2}\psi(2) - \psi(1)] + \frac{\alpha^2\beta^2}{1\cdot 2\sin^4 z}\,[3\tfrac{3}{2}\psi(3) \mp 2\tfrac{3}{2}\cdot 2\psi(2) + \psi(1)]$$
$$+ \frac{\alpha^3\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3\sin^6 z}\,[4\tfrac{5}{2}\psi(4) - 3\tfrac{5}{2}\cdot 3\psi(3) + 2\tfrac{5}{2}\cdot 3\psi(2) - \psi(1)] + \ldots$$

oder anders geordnet

$$\zeta = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha}\left[e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(1) + 2\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(2) + \frac{3\frac{3}{2}}{1\cdot 2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\sin^4 z}e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(3) + \right].$$

Für die Horizontalrefraction ($z = 90$, $T = 0$) erhält man, da bekanntermaassen

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

wird, alle ψ also den Werth $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ annehmen,

$$\zeta_h = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}}\left[e^{-\alpha\beta} + 2\tfrac{1}{2}\alpha\beta e^{-2\alpha\beta} + \frac{3\frac{3}{2}}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^2 e^{-3\alpha\beta} + \ldots\right].$$

Das Problem, die Refraction nach Bestimmung der Constanten α und β für jede beliebige Zenithdistanz zu berechnen, ist hiermit auf die Berechnung der Function ψ zurückgeführt. Sind für ψ die Werthe tabellarisch niedergelegt, so wird man, falls die obige Reihe für praktische Zwecke genügend convergirt, die numerische Bestimmung ohne weiteres vornehmen können. Von den Hilfsmitteln, ψ zu berechnen, wollen wir hier nicht sprechen und genügt ein Hinweis auf LAPLACE, BRUHNS und CHAUVENET[1]).

Es handelt sich jetzt um die Berechnung der Constanten α und β; da die erstere, wie man sieht, von Druck und Temperatur, die letztere wenigstens von der Temperatur abhängt, so müsste man die genannten Constanten für die ganze Reihe der vorkommenden atmosphärischen Zustände tabellarisch niederlegen. Mit den jedesmaligen Constanten hätte man dann die Refractionsberechnung vorzunehmen. Um diese immerhin etwas langwierige und beschwerliche Arbeit zu vermeiden, hat BESSEL die einem gewissen mittleren Zustande der Atmosphäre entsprechenden Refractionswerthe berechnet und die bei veränderten Verhält-

[1]) LAPLACE, Mécanique céleste, livre X. BRUHNS, Die astronomische Strahlenbrechung. CHAUVENET, l. c.

nissen geltenden Werthe auf folgende Weise numerisch leicht bestimmbar gemacht. Er setzt nämlich, wenn wir die auf jenen mittleren Normalzustand bezüglichen Werthe mit dem Index 0 und die allgemeinen Werthe ohne Index bezeichnen, in einer für logarithmische Rechnung bequem brauchbaren Form

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^A \left[\frac{1}{1+\varepsilon(t-t_0)}\right]^\lambda.$$

Um hierin die Constanten A und λ zu finden, entwickelt er einmal ζ direkt nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze und andererseits aus der vorliegenden Formel nach Potenzen von $p-p_0$ und $t-t_0$. Die Entwickelungen lauten

$$\zeta = \zeta_0\left[1 + \frac{p-p_0}{p_0}t + \left(\frac{p-p_0}{p_0}\right)^2 \frac{A(A-1)}{1\cdot 2} \ldots\right]$$
$$\left[1 - \varepsilon(t-t_0)\lambda + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\varepsilon^2(t-t_0)^2 \ldots\right]$$

und

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\partial\zeta_0}{\partial p_0}(p-p_0) + \frac{\partial\zeta}{\partial t_0}(t-t_0) + \ldots$$

Vergleichen wir die ersten Potenzen der Variablen, welche hier allein beibehalten werden sollen, so ergiebt sich

$$A = \frac{p_0}{\zeta_0}\frac{\partial\zeta_0}{\partial p_0} \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{1}{\varepsilon\zeta_0}\frac{\partial\zeta}{\partial t_0}.$$

Bestimmen wir weiter aus der Formel für die Refraction die vorliegenden Differentialquotienten, so erhalten wir nach mancherlei Umformungen mit Anwendung der Abkürzungen

$$x = \frac{\alpha_0\beta_0}{sin_2 z}$$

und

$$Q = xe^{-x}1\tfrac{3}{2}\psi(1) + \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{-2x}2\tfrac{5}{2}\psi(2) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}e^{-3x}3\tfrac{7}{2}\psi(3) + \ldots$$

die folgenden Formeln:

$$(1-\alpha_0)\frac{\partial\zeta_0}{\partial p_0} = sin^2 z\sqrt{\frac{2}{\beta_0}}\,Q\,\frac{(1-x)}{p_0}$$

$$(1-\alpha_0)\frac{\partial\zeta_0}{\partial t_0} = -\varepsilon\, sin^2 z\sqrt{\frac{2}{\beta_0}}\,Q\left[\frac{2h-l_0}{h-l_0}(1-x) + \frac{h}{h-l_0}\frac{\beta}{2}\,cotg^2 z\right]$$
$$+\varepsilon\left[(1-\alpha)\zeta_0 + \frac{\alpha_0\beta_0}{1-x}\,cotg^2 z\right]\frac{1}{2}\frac{h}{h-l_0}.$$

Aus diesen Ausdrücken hat BESSEL für eine hinreichend enge Reihe von Zenithdistanzen die obigen Coëfficienten A und λ berechnet; er hat dann weiter noch, da die Refraction für kleine Zenithdistanzen der Tangente fast genau proportional läuft, um die Tabellen auf möglichst kleinen Umfang einzuschränken, ζ_0 in der Form $\varkappa\, tang\, z$ dargestellt und also $\varkappa$ tabellarisch niedergelegt.

Theorie von IVORY.

Wir wenden uns jetzt zu der Theorie von IVORY. Dieselbe verdankt, wie bereits erwähnt, ihre Bedeutung nicht so sehr dem Umstande, die mittleren Verhältnissen entsprechenden Refractionen gut darzustellen, als vielmehr dem anderen, auch complicirtere, ja anomale Verhältnisse ohne grössere Schwierigkeiten der Rechnung unterwerfen zu lassen. Die Fundamentalhypothese dieser Theorie lautet:

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right).$$

Wir schreiben dieselbe, indem wir eine neue Variable u einführen

$$\frac{\delta}{\delta_0} = e^{-u}, \qquad \frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f(1-e^{-u}).$$

f bedeutet darin eine Constante, deren Werth ungefähr 0·2 ist Um den Zusammenhang zwischen der Höhe über dem Boden einerseits und Temperatur, Druck und Dichtigkeit andererseits darzustellen, benutzen wir wiederum die atmosphärische Gleichgewichtsbedingung $dp = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \delta dr$ und ersetzen darin p und δ durch u. Dies liefert mit Benutzung der bekannten Abkürzungen

$$p_0 = g_0 \delta_0 l \quad \text{und} \quad s = 1 - \frac{r_0}{r},$$

$$(1 - f + 2fe^{-u})\, du = \frac{r_0 ds}{l},$$

oder, indem wir von der Erdoberfläche bis zu einem beliebigen Punkte der Atmosphäre integriren,

$$(1-f)u + 2f(1-2^{-u}) = \frac{r_0}{l} s.$$

Ist f bekannt, so gestattet uns diese Gleichung, den Zusammenhang zwischen u und s resp. r tabellarisch niederzulegen, womit die obige Aufgabe gelöst ist.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung der Refraction, indem wir die Fundamentalgleichung derselben mit statthaften Vernachlässigungen transformiren. Wir schreiben nämlich der Reihe nach

$$d\zeta = \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{(1-s)\sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{(1-s)\sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) - \sin^2 z (1-s)^2}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{\sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)}{(1-s)^2} - \sin^2 z}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{d_0} \cdot \frac{\sin z}{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) + 2s}}.$$

Indem wir weiter noch die neue Unbekannte x durch die Gleichung

$$x \frac{l}{r_0} = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

einführen, erhalten wir

$$d\zeta = -\frac{\alpha(1+\alpha)\sin z e^{-u} du}{\sqrt{\cos^2 z + 2x \frac{l}{r_0}}}$$

und es handelt sich nur noch darum $e^{-u} du$ durch x auszudrücken. Dies geschieht aus der Gleichung

$$x \frac{l}{r_0} = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right),$$

indem wir dieselbe in der Form

$$x = u - \alpha \frac{r_0}{l}(1 - e^{-u}) + f(2 - u - 2e^{-u})$$

schreiben und nach einem bekannten Satze von LAGRANGE e^{-u} darstellen, woraus dann sofort durch Differentiation $e^{-u}du$ folgt. Wir brauchen dabei, wie eine genauere Discussion lehrt, nur die beiden ersten Glieder der Reihe von LAGRANGE, nämlich

$$e^{-x}dx \quad \text{und} \quad \frac{\alpha r_0}{l}(2e^{-2x} - e^{-x})dx - f(4e^{-2x} - 3e^{-x} + xe^{-x})dx$$

mitzunehmen. Die hierbei gemachten Vernachlässigungen liegen nämlich vollständig innerhalb des Rahmens der bereits bei der Differentialgleichung gemachten und betragen im Falle der Horizontalrefraction nur wenig mehr als eine Bogensecunde.

Wir erhalten demnach als Ausdruck für die Refraction

$$d\zeta = \alpha(1+\alpha)\sin z\left[\int \frac{dx \cdot e^{-x}}{\sqrt{\cos^2 z + 2x\frac{l}{r_0}}} + \frac{\alpha}{l} r_0 \int \frac{(2e^{-2x} - e^{-x})dx}{\sqrt{\cos^2 z + 2x\frac{l}{r_0}}} - f\int \frac{(4e^{-2x} - 3e^{-x} - xe^{-x})dx}{\sqrt{\cos^2 z + 2x\frac{l}{r_0}}}\right]$$

Als Grenzen ergeben sich für x aus der Gleichung

$$x\frac{l}{r_0} = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

die Werthe o und

$$\frac{1 - \alpha\left(1 - \frac{\delta'}{\delta_0}\right)}{l} \cdot r_0,$$

worin δ' die Dichtigkeit der Atmosphäre im Unendlichen bedeutet. Die IVORY'sche Hypothese leidet nämlich an dem Mangel, diese Dichtigkeit, obwohl ausserordentlich klein, so doch nicht gleich Null zu liefern. Da $\frac{r_0}{l}$ ungefähr den Werth 800 hat, so können wir indessen auch als obere Grenze für x den Werth ∞ annehmen. Die weitere Behandlung der Integrale kann nun genau wie bei der BESSEL'schen Theorie in der Weise erfolgen, dass man dieselben auf die Form $(e^{-t^2}dt)$ zurückführt. Wir wollen dies indess hier nicht thun und ebenso wenig die von IVORY selbst gegebene Entwickelung genauer verfolgen, sondern vielmehr nur das Wesen der letzteren kurz skizziren. IVORY setzt

$$\cos z = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tang}\varphi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = c,$$

also

$$\cos^2 z = \frac{(1-c^2)^2}{2c^2}$$

und entwickelt die Wurzelausdrücke nach Potenzen von c, so dass die Refraction ζ sich in der Form $\zeta = \sin z\,(ca_1 + c^3a_3 + c^5a_5 \ldots)$ darstellt. Die Convergenz dieser Reihe ist eine sehr gute, da selbst für eine Zenithdistanz von 89° die 7 ersten Glieder der Reihe die Refraction bis auf weniger als eine Secunde darstellen. Für die Horizontalrefraction findet sich nach IVORY mit

$$\alpha = 58{\cdot}47'', \quad \frac{l}{r_0} = 0{\cdot}0012958, \quad \frac{\alpha r_0}{l} = 0{\cdot}21878, \quad f = \frac{2}{q}$$

der Werth 2072·5″, während er 2070 sein soll.

Eine Weiterbildung der Theorie von IVORY hat RADAU[1]) versucht und zwar

[1]) M. R. RADAU, Sur la Théorie des réfractions astronomiques. Bulletin astronomique, Tome I, 1884, pag. 489.

in zweifacher Hinsicht, indem er einmal für ein mittleres $f(0{\cdot}2)$ die Refractionen berechnete und die für $f = 0{\cdot}2 + \varphi$ anzubringenden Correctionen als Functionen von φ darstellte und indem er andererseits die IVORY'sche Hypothese insofern verallgemeinerte als er

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right) - g\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2$$

setzte und f und g variiren liess. Die von ihm für 3 Zenithdistanzen gegebenen Resultate mögen in der folgenden Tabelle nebst dem Temperaturabfall für eine Erhebung von 1000 m Platz finden.

f	g	Δt für 1000 m	Refractionen für 10° und 0·76 m		
			84·5°	87·24°	90·00°
0·331	0·223	$8{\cdot}50° + 0{\cdot}20° h$	544·7″	901·4″	1963·1″
0·331	0·000	$8{\cdot}50° - 0{\cdot}20° h$	545·3	905·6	1987·5
0·200	0·000	$5{\cdot}69° - 0{\cdot}19° h$	546·0	911·0	2072·2
0·198	0·079	$5{\cdot}63°$	545·8	909·5	2063·9
0·108	0·267	$3{\cdot}34° + 0{\cdot}66° h$	545·7	909·4	2104·1
0·108	0·000	$3{\cdot}34° - 0{\cdot}15° h$	546·5	915·0	2140·0
0·000	0·223	$+0{\cdot}92° h$	546·4	915·0	2198·6
0·000	0·000	0	547·2	920·0	2232·7
−0·115	0·446	$-4{\cdot}42° + 3{\cdot}02° h$	546·3	915·2	2274·3
Nach den BESSEL'schen Tafeln			545·7	909·6	2107·6

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung zunächst, dass die 3., 4. und 5. Hypothese die besten Werthe liefern und dass speciell die 5. ganz ausgezeichnete Uebereinstimmung mit den empirisch bestimmten BESSEL'schen Werthen liefert. Man sieht aber auch vor allem, dass für eine Zenithdistanz von 84·5, sehr differente Werthe von f und g noch ganz ausgezeichnete Resultate geben. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dass bis zu diesen Zenithdistanzen die Krümmung der Indicialflächen noch keine grosse Rolle spielt, für ebene Indicialflächen aber andererseits die Refraction nur vom Orte des Beobachters und nicht von dem Gesetze, nach dem die Dichtigkeit mit der Höhe variirt, abhängt. In der That war es auch bereits ORIANI und LAPLACE gelungen, einen 2gliedrigen, die 1. und 3. Potenz von *tang z* enthaltenden Ausdruck ohne irgend welche Hypothese abzuleiten. Zu dem Zwecke hatten sie den Ausdruck für das Refractionsdifferential nach Potenzen von α und s entwickelt und von diesen beiden nur erste Potenzen beibehalten. Es ist dies auch für s angängig, weil dasselbe wenigstens in dem wirksamen Theile der Atmosphäre eine kleine Grösse ist. Auf diese Weise erhält man

$$d\zeta = -\alpha\frac{d\delta}{\delta_0}\,tang\,z\left[1-\frac{s}{cos^2 z}+\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)\frac{2\,cos^2 z+1}{cos^2 z}\right]$$

und durch Integration zwischen den Grenzen δ_0 und 0

$$\zeta = \alpha\,tang\,z\left(1+\frac{1}{2}\alpha\frac{2\,cos^2 z+1}{cos^2 z}+\frac{1}{cos^2 z}\int s\frac{d\delta}{\delta_0}\right).$$

Nun ist, wie man leicht durch partielle Integration von $\int s\frac{d\delta}{\delta_0}$ zwischen den erforderlichen Grenzen findet,

$$\int s\frac{d\delta}{\delta_0} = -\int_0^1 \frac{\delta}{\delta_0}\,ds,$$

welches in Verbindung mit der Gleichung

$$dp = -g_0 r_0 \delta ds, \quad \int_0^1 \frac{\delta}{\delta_0} ds = -\frac{p_0}{g_0 \delta_0 r_0} = -\frac{l}{r_0}$$

liefert. Setzen wir diesen Werth ein, so erhalten wir

$$\zeta = \alpha\left(1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l}{r_0}\right) tang\, z - \alpha\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right) tang^3 z,$$

oder mit den für 0° und 0·76 *m* von LAPLACE benützten Werthen

$$\zeta = 60{\cdot}567'' \, tang\, z - 0{\cdot}06702'' \, tang^3 z.$$

Die soeben nachgewiesene Thatsache, dass selbst bis zu bedeutenden Zenithdistanzen die Refraction unabhängig von der Hypothese dargestellt werden kann, hat natürlich die Consequenz, dass durch die Beobachtung bei kleineren Zenithdistanzen auch umgekehrt keine Entscheidung über die Constitution der Atmosphäre erfolgen kann. Wenden wir uns aber, um über die Constitution Aufschluss zu erhalten, an die nahe dem Horizonte gemachten Beobachtungen so liegt andererseits wieder die Schwierigkeit vor, dass diese entsprechend dem Wechsel der atmosphärischen Zustände zeitlich und örtlich stark abweichende Werthe liefern. Trotz dieser Schwierigkeiten ist es indess den Bemühungen der Astronomen gelungen, durch Refractionsbeobachtungen unsere Kenntniss von der Atmosphäre zu erweitern. Für einen sicheren Weg dürfen wir denselben freilich nicht halten und müssen lieber umgekehrt der direkten Erforschung der Atmosphäre durch Ballons mit oder ohne Beobachter es überlassen, genauere Grundlagen für neue Theorien oder die Constanten der alten zu liefern. Nichtsdestoweniger erscheint es nicht uninteressant, die Consequenzen einiger Hypothesen in Bezug auf die Constitution der Atmosphäre kennen zu lernen. Eine hierfür geeignete Zusammen stellung ist von BRUHNS[1]) und später mit Hinzufügung de, Höhe für 1° C. Temperaturabnahme und der seine eigene Theorie betreffenden Daten von C. M. BAUERNFEIND[2]) gegeben worden. Dieselbe enthält die Theorien von LAPLACE, BESSEL, YOUNG, SCHMIDT, IVORY, LUBBOCK und BAUERNFEIND. Mit Beibehaltung früherer Bezeichnungen und Abkürzungen geben wir zunächst die fundamentalen Beziehungen, die zu Grunde gelegt worden sind.

LAPLACE setzt

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + \frac{0{\cdot}49039}{0{\cdot}000741829}\, u\right) e^{-\frac{u}{0{\cdot}000741829}}$$

und

$$u = s - 0{\cdot}0002939\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right),$$

wodurch sich ergiebt

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0}\left(0{\cdot}59224 + \frac{0{\cdot}29045}{1 + u\, 661{\cdot}11} + 0{\cdot}11731\, \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

BESSEL hat

$$\delta = \delta_0 e^{-\beta s}, \; \beta = 745{\cdot}75,$$

also

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{r_0}{l}\frac{e^{-\beta s}}{\beta} - \frac{r_0}{l\beta},$$

wobei $l = 7964\ m$.

YOUNG wählt

$$p = \frac{3}{2}\delta^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\delta^2,$$

woraus

$$\frac{r_0}{r} = \frac{9}{2l}\sqrt{\delta} - \delta l - \frac{7}{2l} + l$$

folgt.

---

[1]) l. c.

[2]) Die atmosphärische Strahlenbrechung. Astr. Nachr. 1478—1480.

Nach SCHMIDT ist

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - \frac{r - r_0}{b},$$

$b = 49100$ und demnach

$$log\,\frac{p}{p_0} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon t_0} \cdot \frac{1}{r_0 + 2b}\, log\,\frac{r_0(b - r + r_0)}{3(2r - r_0)}$$

und

$$log\,\frac{\delta}{\delta_0} = log\,\frac{p}{p_0} - log\left(1 - \frac{r - r_0}{b}\right).$$

Die IVORY'sche Hypothese lautet

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - \frac{2}{9}\left(1 - e^{-u}\right) \quad \text{und} \quad \delta = \delta_0 e^{-u},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{7}{9}u + \frac{4}{9}f(1 - e^{-u}) = \frac{s}{0{\cdot}0012958}.$$

LUBBOCK nimmt an

$$\frac{\delta}{\delta_0} = (1 - q)^2(1 - Hq),$$

wobei

$$q = 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{5}} \quad \text{und} \quad H = 9{\cdot}54378$$

und erhält

$$\frac{r - r_0}{r} = \frac{3l}{H}\, log(1 - Hq).$$

Endlich macht BAUERNFEIND die Annahme

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Mit diesen Hypothesen erhält man folgende Werthe:

Höhe	LAPLACE	BESSEL	YOUNG	SCHMIDT	IVORY	LUBBOCK	BAUERNFEIND
			1. Luftdruck ($p_0 = 1$).				
1600	0·62	0·65	0·62	0·62	0·62	0·62	0·62
4800	0·40	0·44	0·42	0·40	0·41	0·41	0·40
8000	0·24	0·26	0·27	0·26	0·26	0·26	0·25
24000	0·01	0·03	0·01	0·00	0·01	0·01	0·01
			2. Dichtigkeit ($\delta_0 = 1$).				
1600	0·858	0·829	0·840	0·843	0·849	0·846	0·842
4800	0·601	0·570	0·610	0·588	0·595	0·598	0·585
8000	0·348	0·392	0·410	0·400	0·402	0·414	0·395
24000	0·030	0·061	0·010	0·032	0·040	0·036	0·029
			3. Temperatur ($t_0 = 0$).				
1600	—13·2	— 2·0	— 13·0	— 8·7	— 8·2	— 8·3	— 9·2
4800	—34·1	— 8·0	— 33·0	— 26·1	— 24·0	— 24·6	— 27·7
8000	—48·7	— 17·0	— 48·0	— 43·5	— 34·9	— 42·5	— 46·2
24000	—85·2	—137·5	—225·0	—130·3	— 56·0	—153·4	—138·5
			4. Höhe für 1° C. Temperaturabnahme.				
0—1600	121·2	800·0	123·1	184·1	195·1	192·7	173·2
3200—4800	161·6	457·1	160·0	184·1	219·2	188·2	173·2
6400—8000	231·9	320·0	266·6	184·1	313·5	175·8	173·2
16000—24000	833·3	93·5	94·1	184·1	1481·5	132·6	173·2

Die Tabelle zeigt, dass der Luftdruck bis zu 8000 *m* Höhe fast identisch ist und höchstens LAPLACE eine kleine Differenz zu verzeichnen hat, dass weiter

wiederum bis auf LAPLACE auch die Dichtigkeit nicht allzu verschieden ist. Anders steht es dagegen bei der Temperatur. Hier hat die Theorie von BESSEL ganz ausserordentliche Abweichungen gegenüber den übrigen Theorien und auch der Erfahrung, sodass sie nach physikalischen Rücksichten gemessen die bei weitem unvollkommenste ist. Dieselbe giebt bei 4800 *m* gegenüber den übrigen ein Minus von ungefähr 20 und bei 8000 *m* ein solches von fast 30°. Entsprechend hat man dann an der Erdoberfläche für 1° 800 *m* zu steigen, während die Beobachtung im Mittel 172 *m* liefert. Ein specielleres Urtheil über den Werth der einzelnen Theorien ist nicht gut zu fällen, doch kann man sagen, dass von den in der Tabelle vertretenen die von SCHMIDT, IVORY, LUBBOCK und BAUERNFEIND ziemlich gleichwerthig sind. Wenn die von IVORY etwas zu langsamen Temperaturabfall zeigt, so besitzt sie als Aequivalent die analytische Eleganz und vor allem die schon betonte Möglichkeit einer Weiterbildung in der Richtung der Darstellung anomaler Refractionsverhältnisse. Ausser den erwähnten Theorien sind in neuerer Zeit noch eine ganze Reihe anderer gegeben worden, so von RADAU[1]), M. KOWALSKI[2]), BAEYER[3]), GYLDEN[4]). KOWALSKI nimmt als Fundamentalhypothese

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right) - k\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{5}{7}},$$

BAEYER

$$\delta = \delta_0 \cdot \frac{[1+v(r-r_0)]^{\varepsilon-1}}{[1+w(r-r_0)]^{\varepsilon+1}},$$

wo ε den Werth 4 erhält und v und w von der Höhe abhängige Grössen bedeuten, GYLDEN schliesslich

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = \left(1-\frac{\beta}{2}s\right)^2.$$

Für die Mehrzahl der Theorien existiren auch praktische Tafeln, indessen sind von diesen doch immerhin nur wenige in grössere Aufnahme gekommen. Sehen wir von der BRADLEY'schen ab, die noch längere Zeit benutzt worden ist, so kann man eigentlich sagen, dass erst die BESSEL'schen Tafeln vermöge ihrer Exaktheit einen wirklichen Erfolg gehabt haben, und dieser Erfolg erstreckt sich auch noch bis in die neueste Zeit, da die ganz neuen Tafeln von RADAU doch erst selten benutzt werden.

Wir haben bisher einen Punkt nicht berücksichtigt, der dies *a priori* beanspruchen kann, nämlich die Anwesenheit von Wasserdampf in der Atmosphäre; LAPLACE hat indessen bewiesen, dass die hierfür anzubringenden Correctionen ausserordentlich klein sind und BESSEL hat aus diesem Grunde dieselben von vornherein vernachlässigt. In den neuen Tafeln von RADAU ist jedoch auf dieselben Rücksicht genommen und zwar in Form einer Correction des Barometerstandes.

Wenn wir zum Schluss eine kleine Refractionstafel geben, so soll dieselbe nur den Zweck haben, eine Uebersicht über den Verlauf der Refraction zu bieten. Dieselbe gilt für den BESSEL'schen »Normalzustand« der Atmosphäre, nämlich

---

[1]) RADAU, l. c. und Essai sur les Réfractions astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires t. XIX. Paris 1889.

[2]) M. KOWALSKI.

[3]) J. J. BAEYER, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Mémoires de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersb. VII. Série Tome III, No. 5. 1860.

[4]) H. GYLDEN, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Mémoires etc. VII. Série Tome X, No. 1. 1866.

für eine Barometerhöhe von 751·5 *mm* und eine Temperatur von 9·31° C. und ist den BESSEL'schen Refractionstafeln entnommen. Daneben mögen noch des historischen Interesses wegen die BRADLEY'schen auf denselben Zustand der Atmosphäre bezogenen Werthe Platz finden.

Zenithdistanz	Refraction nach BESSEL	Refraction nach BRADLEY	Zenithdistanz	Refraction nach BESSEL	Refraction nach BRADLEY
0°	0′ 0·0″	0′ 0·0″	74	3′ 18·6″	3′ 16·9″
5	0 5·1	0 5·0	75	3 32·1	3 30·3
10	0 10·2	0 10·0	76	3 47·4	3 45·6
15	0 15·5	0 15·1	77	4 4·9	4 3·1
20	0 21·0	0 20·6	78	4 25·0	4 23·4
25	0 26·9	0 26·5	79	4 48·5	4 47·1
30	0 33·3	0 33·0	80	5 16·5	5 15·1
35	0 40·4	0 39·6	81	5 49·3	5 48·7
40	0 48·4	0 47·6	82	6 29·6	6 29·8
45	0 57·5	0 57·0	83	7 19·7	7 21·1
50	1 8·7	1 7·9	84	8 23·3	8 26·6
55	1 22·2	1 21·4	85	9 46·5	9 53·0
60	1 39·7	1 38·4	86	11 38·9	11 50·2
65	2 3·2	2 1·7	87	14 14·6	14 35·1
70	2 37·3	2 35·5	88	18 8·6	18 34·8
71	2 46·1	2 44·3	89	24 24·6	24 28·7
72	2 55·8	2 53·9	89·5	29 3·5	28 22·9
73	3 6·6	3 4·7	90·0	34 54·1	33 0·0

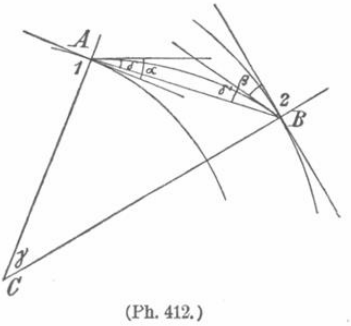
Was ferner die Correctionen anbetrifft, die bei einem anderen atmosphärischen Zustande an dieser Tafel anzubringen sind, so mag folgendes eine Uebersicht bieten. Bezeichnen wir mit a_0 die Normalrefraction, mit a eine beliebige andere, sowie die bezüglichen Barometerstände und Temperaturen mit b_0 b resp. t_0 t, so ist in erster Annäherung, $a = a_0\,[1 + (b - b_0)\,\alpha + (t - t_0)\,\beta]$, wo

α für b gleich	695	715	740	765
die resp. Werthe	0·00138	0·00134	0·00130	0·00126 und
β für t gleich	−15°	0°	+15°	+30°
die resp. Werthe	0·00376	0·00365	0·00351	0·00328

besitzen.

II. Terrestrische Refractionstheorie.

Auch dieses Capitel gehört, wie das vorige, seinem vollen Umfange nach nicht in das Gebiet der Physik und soll deshalb hier nur kurz behandelt werden. Es handelt sich in demselben um die (normalen) Richtungsänderungen, welche ein Lichtstrahl auf dem Wege von einem terrestrischen Punkte zu einem anderen erfährt. Diese Aufgabe ist für die Geodäsie und speciell für das Capitel der trigonometrischen Höhenmessung von der grössten Bedeutung. Wir wollen zunächst die genannte vertikale Richtungsänderung eines Lichtstrahls zwischen 2 Punkten unter der Voraussetzung kugelförmiger Indicialflächen durch beobachtbare Grössen darstellen. Nennen wir zu diesem Zwecke (Fig. 412) die Winkel, welche die resp. Tangente an dem Lichtstrahl in den Punkten A und B mit der direkten Verbindungslinie von A und B macht,



(Ph. 412.)

δ und δ', ferner die Neigungswinkel dieser Tangenten gegen die Indicialflächen in A und B, α und $-\beta$, endlich den Winkel zwischen den Normalen dieser Indicialflächen γ, so erhalten wir aus dem Dreieck ABC, wo C das Centrum der Flächen ist,

$$\gamma + 90 + \alpha - \delta + 90 - \beta - \delta' = 180 \quad \text{oder} \quad \delta + \delta' = \gamma + \alpha - \beta.$$

Setzen wir jetzt unter Beschränkung auf Strecken AB, die gegen den Erdhalbmesser klein sind, die Bahn des Strahles als kreisförmig, also δ und δ' als gleich voraus, so ist $\delta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \alpha')$. Man pflegt nun in der Geodäsie den Krümmungsradius und zwar den für schwach geneigte Strahlen geltenden (ρ) in Beziehung zum Erdhalbmesser r zu setzen und das Verhältniss $\frac{r}{\rho} = k$ als Refractionscoëfficient zu bezeichnen. Um dieses k in die obige Formel $\delta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \alpha')$ einzuführen, nennen wir die horizontal entweder auf der Erdoberfläche oder in mittlerer Höhe zwischen A und B gemessene Entfernung von A und B a und erhalten damit für schwach geneigte Strahlen und mit Beschränkung auf Grössen 1. Ordnung.

$$2\delta = \frac{a}{\rho} = \frac{ak}{r} = \gamma + \alpha - \beta = \frac{a}{r} + \alpha - \beta$$

oder

$$1 - k = (\beta - \alpha)\frac{r}{a}.$$

Nach dem Princip, das in dieser Formel liegt, sind eine grosse Reihe von Bestimmungen der Refractionsconstante gemacht worden, die indess sehr beträchtliche Abweichungen von einander zeigen und nothwendiger Weise auch zeigen müssen. Im Mittel hat sich für k ungefähr 0·13 ergeben. Wir wollen jetzt zeigen, wie man bei der trigonometrischen Höhenmessung die Grösse k benutzt. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die Höhen- (Radien-) Differenz mit h, so erhalten wir aus dem Dreieck ABE, worin E der Durchschnittspunkt der durch A gelegten Niveaufläche mit dem Radius CB ist, bei Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung $\left(\frac{a}{r}\right)^2$:

$$\frac{h}{a} = \frac{sin\left(\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2}\right)}{sin\,(90 - \alpha + \delta - \gamma}$$

oder

$$\frac{h}{a} = \frac{sin\left(\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2}\right)}{cos(\alpha - \delta + \gamma)}.$$

Betrachten wir nun weiter δ und γ als Grössen erster Ordnung, so können wir diese Formel bei Vernachlässigung von Grössen 2. Ordnung in die Gestalt

$$\frac{h}{a} = tang\,\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2} + (\gamma - \delta)\,tang^2\,\alpha$$

bringen. Führen wir hierin schliesslich die Beziehungen

$$\gamma = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad 2\delta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{r}k$$

ein, so ergiebt sich das Schlussresultat[1])

$$h = a\,tang\,\alpha + \frac{1-k}{2r} \cdot a^2 + \frac{2-k}{2r}\,a^2\,tang^2\,\alpha.$$

[1]) Jordan, Vermessungskunde Bd. II. Die Differenz des Resultates gegenüber Jordan rührt davon her, dass dieser a selbst als Grösse erster Ordnung auffasst.

Diese Gleichung enthält ein neuerdings in Aufnahme gekommenes Verfahren, k zu bestimmen und dieses besteht darin, dass man h a und α direkt misst. Ersteres geschieht dabei durch Nivellirung.

Die gemachte Hypothese einer kreisförmigen Gestalt der Lichtkurve ist indess, wenn es sich um beträchtlichere Strecken und um grössere Elevationswinkel der Trajektorie gegenüber den Niveauflächen handelt, zu roh und man muss deshalb auf die Differentialgleichung der Curve zurückgehen[1]). Wir schreiben dieselbe, indem wir den Punkt A als Ausgangspunkt der Trajektorie nehmen und die auf ihn bezüglichen Grössen mit dem Index 1 versehen,

$$d\zeta = \frac{\alpha_1 \frac{d\delta}{\delta_1}(1-s)\sin z_1}{\left[1 - 2\alpha_1\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha_1\left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) + (2s - s^2)\sin^2 z_1}}.$$

Dabei sind, wie früher, die Abkürzungen

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{2k\delta_1}{1 + 4k\delta_1}$$

benutzt. Es entsteht nun hier die Schwierigkeit, dass eine Entwickelung der Wurzel nach Potenzen des zweiten und dritten Gliedes für grosse Zenithdistanzen nicht angängig ist. Wir wollen diesen Fall, der praktisch am häufigsten sein wird, hier nicht diskutiren, sondern für das folgende $\cos z_1$ als endliche Grösse auffassen. Thun wir dies, so können wir für die Zwecke der terrestrischen Refraction bei Beschränkung auf kleine Strecken AB, das zweite und dritte Glied unter dem Wurzelzeichen als Grösse erster Ordnung vernachlässigen und erhalten dann bei gleicher Vernachlässigung in den übrigen Gliedern

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \operatorname{tang} z_1 \, d\delta.$$

Charakterisiren wir weiter den Punkt B durch den Index 2, so erhalten wir, indem wir auch die α's als Grössen erster Ordnung auffassen

$$\alpha_1 = \alpha_0 \frac{p_1}{760} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon t_1} \left(\alpha_2 = \alpha_0 \frac{p_2}{760} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon t^2}\right) \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1 + \varepsilon t_1}{1 + \varepsilon t_2}$$

$$= \frac{p_2}{p_1} \cdot [1 + \varepsilon(t_1 - t_2)]$$

und aus der barometrischen Höhenformel

$$h = K \log \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{t_1 + t_2}{2}\right).$$

K bedeutet dabei in der letzten Formel die barometrische Constante mit Einschluss der Correctionsglieder zweiter Ordnung, die sich auf den Einfluss der Feuchtigkeit und die Variationen der Schwere nach der geographischen Breite und mittleren Meereshöhe beziehen. Wir wollen nun weiter die Hypothese einer mit der Höhe gleichförmigen Temperaturabnahme machen und demnach $t_1 - t_2 = gh$ setzen, wo g eine Constante ist. Es handelt sich nun zunächst darum, in der Differentialgleichung

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \cdot \operatorname{tang} z_1 \, d\delta,$$

oder, wenn wir den Punkt 2 als variabel auffassen, in

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \operatorname{tang} z_1 d\delta_2$$

[1]) Das folgende giebt auszugsweise die Theorie von JORDAN wieder. Handbuch d. Verrm. Bd. II.

δ_2 durch h resp. a zu ersetzen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir die barometrische Höhenformel nach Potenzen von $p_1 - p_2$ und erhalten:

$$h = K\left[\frac{p_1 - p_2}{p_1} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 \ldots\right]\left(1 + \varepsilon\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_1 - \frac{gh}{2}$$

$$1 - \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \varepsilon t_1}{K}h + \ldots.$$

Damit wird

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(1 - \frac{1 - \varepsilon t_1}{K}h + \ldots\right)(1 + g\varepsilon h + \ldots) = 1 - \frac{1 - \varepsilon t_1}{K}h + g\varepsilon h + \ldots$$

und

$$\frac{d\delta_2}{\delta_1} = -dh\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon + \ldots\right).$$

Vernachlässigen wir weiter die angedeuteten Glieder und benützen die angenähert gültige Beziehung $h = a\,cotg\,z_1$, so ergiebt sich $d\zeta = -\alpha_1 da\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - \varepsilon g\right)$ und demnach wird bei einer Integration vom Punkte 1 bis 2 der Richtungsunterschied der Curve in den genannten Punkten zu

$$\alpha_1 a\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon\right)$$

gefunden. Denken wir uns jetzt die Tangente im Punkte 1 als ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems $\xi\eta$, so können wir diesen Richtungsunterschied auch genähert durch

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_a$$

ausdrücken und wir erhalten also für

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_a$$

den Werth

$$\alpha_1\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon\right).$$

Für eine wenig gegen die Abscissenaxe geneigte Kurve stellt der zweite Differentialquotient in erster Annäherung den Werth des Krümmungshalbmessers (R) dar; es wird also der Refractionscoëfficient im Punkte 1

$$k_1 = \alpha_1\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g_1\varepsilon\right)r$$

und entsprechend im Punkte 2

$$k_2 = \alpha_2\left(\frac{1 - \varepsilon t_2}{K} - g_2\varepsilon\right)r,$$

wobei wir g_1 und g_2 unterscheiden wollen. Legen wir die Krümmungsradien in diesen Punkten zu Grunde, so können wir in erster Annäherung eine Gleichung für unsere Trajektorie gewinnen. Setzen wir nämlich dieselbe in der Gestalt $\eta = P\xi^2 + Q\xi^3$ an, so bestimmen sich die Coëfficienten P und Q durch die Krümmungsradien R_1 und R_2 zu

$$P = \frac{1}{2R_1} \quad \text{und} \quad Q = \frac{R_1 - R_2}{6aR_1R_2}.$$

Mit diesen Werthen ergiebt sich die Ordinate im Punkte 2 zu $\frac{a^2}{2R'}$, wo

$$\frac{1}{R'} = \frac{\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{3}$$

ist, und also mit Einführung der Abkürzung

$$k' = \frac{r}{R'}$$

der Richtungsunterschied der Tangente im Punkte 1 und der Verbindungslinie von 1 und 2 zu

$$\frac{a}{2R'} = \frac{a}{r} \cdot \frac{k'}{2} = \frac{1}{2} k' \gamma.$$

γ bedeutet dabei, wie schon oben, den Centriwinkel ACB. Hiermit ist die Aufgabe, die Refractionsbeträge an zwei, durch eine Trajektorie verbundenen Punkten zu finden, gelöst und es bedarf jetzt nur noch einfacher trigonometrischer Rechnung, um den Höhenunterschied derselben zu erhalten.

C. Anomalien der terrestrischen Strahlenbrechung.

An Stelle der regelmässigen astronomischen oder terrestrischen Strahlenbrechung ist eine ganze Reihe von unregelmässigen mehr oder weniger complicirten Phänomenen beobachtet worden, die man unter dem Namen Kimmung, Luftspiegelung und Fata morgana zusammengefasst hat. Dieselben bestehen kurz gesagt darin, dass von Gegenständen Bilder entstehen, die entweder nach Ort oder Lage oder Form oder Grösse oder nach mehreren dieser Rücksichten zusammen Anomalien zeigen. So z. B. werden Gegenstände sichtbar, die infolge der Krümmung der Erdoberfläche oder sonstiger physischer Hindernisse es im allgemeinen nicht sind und andererseits tauchen sonst sichtbare unter. Hierher gehören z. B. auch die Verfrühungen und Verspätungen im Sonnenauf- und Untergange, wie sie zum Theil in ganz abnormer Weise von Reisenden beobachtet worden sind. Weiter erscheinen Gegenstände in zu geringer oder bedeutender Höhe oder auch, was allerdings höchst selten ist, zu weit nach rechts oder links verschoben und zwar sowohl in congruenter wie symmetrischer Gestalt. Häufig ist vor allem auch das Auftreten doppelter, selten schon das dreifacher oder noch mehrfacher Bilder, die übereinander sich befinden. Alle diese Erscheinungen wechseln ferner mit dem Orte des Beobachters; bei Bewegung desselben ändern die Bilder im allgemeinen ihre Form und Grösse, einige schrumpfen zusammen, andere werden deutlicher und grösser, neue tauchen auf etc. Besonders merkwürdig ist auch die Erscheinung, dass ein Stück der Gegend wie von Wasser umgeben erscheint und also den Charakter einer Insel vortäuscht.

Es kann natürlich nicht unsere Aufgabe sein, für alle angeführten Fälle und deren Combinationen, soweit dieselben vorhanden, historisches Material anzugeben, indessen sollen doch einige der merkwürdigsten Fälle hier kurz geschildert werden. Auf Malta hat man einmal ein anomales Bild des Aetna für eine neue Insel gehalten und sich angeschickt dieselbe zu besetzen[1]). Nach einer Schilderung von LATHAM[2]) sah man von Hastings aus einmal die ca. 10 Meilen entfernte französische Küste mit voller Deutlichkeit. Stieg man auf einen Hügel, so konnte man die ganze Küste bis Calais und mit dem Fernrohr die dortigen Fischerboote erkennen. Es schien überhaupt alles stark vergrössert zu sein und

[1]) RADICKE, Handbuch der Optik, Bd. II.

[2]) LATHAM, Philos. Trans. 1798.

dicht vor den Augen zu liegen. Ein weiteres interessantes Phänomen ist von M. VINCE[1]) beobachtet und nebst einer grossen Reihe anderer höchst merkwürdiger Fälle beschrieben worden. Derselbe sah am Abend eines heissen Sommertages von den vorüberfahrenden Schiffen zwei, ja auch drei Bilder, unter denen jedesmal ein umgekehrtes war. Dasselbe lag, als drei Bilder vorhanden waren, in der Mitte und bei Anwesenheit von zweien bald ober-, bald unterhalb des aufrechten. Dabei veränderten sich alle Umstände mit dem Orte des gesehenen Schiffes. Eine weitere gut, weil von vielen Zeugen constatirte Luftspiegelung schildert MONGE[2]). Dieselbe überraschte die französische Armee, bei der sich MONGE befand, beim Eintritt in die ägyptische Wüste. Das flache Land vor den Blicken des Heeres schien mit Wasser bedeckt zu sein und bot ganz deutlich den Anblick einer Ueberschwemmung. Im Wasserspiegel selbst erblickte man ein zweites umgekehrtes Bild der Gegend. Bei Annäherung wich der Wasserspiegel immer mehr und mehr zurück, wurde dabei kleiner und verschwand schliesslich mit der ganzen Erscheinung.

VINCE wie MONGE haben auch versucht das Gesehene zu erklären, aber ihre Erklärungen tragen mehr einen geometrischen als physikalischen Charakter, insofern als sie die Möglichkeit solcher Bilder bei gewissen Gestaltungen der Indicialflächen nachwiesen, dabei aber nicht so sehr die Wahrscheinlichkeit der hierzu nöthigen physikalischen Bedingungen untersuchten. Durch Beobachtung und Experiment hat WOLLASTON[3]) im Jahre 1800 wichtige Beiträge für die Theorie der fraglichen Erscheinung geliefert. Er erklärte wie schon MONGE die beobachteten Thatsachen durch anomale Dichtigkeitsverhältnisse der Luft in der Nähe des Bodens, die ihrerseits durch die Sonnenwärme hervorgebracht würden, und wies durch Thermometerbeobachtungen die Richtigkeit dieser Ansicht an wirklichen Fällen nach. Vor allem aber unterwarf er die Erscheinung dem Experiment, indem er theils mit sorgfältig über einander geschichteten Flüssigkeiten von verschiedenem Brechungsindex operirte und den Durchgang des Lichtes durch die durch Diffusion entstehende Uebergangsschicht verfolgte, theils aber in noch grösserer Nachahmung der natürlichen Verhältnisse mehr oder weniger hochtemperirte Platten benutzte. Auch begnügte er sich nicht mit qualitativen Ergebnissen, sondern nahm direkte Messungen vor.

Wenn WOLLASTON vom Standpunkt des experimentellen Physikers aus eine ausgezeichnete Bearbeitung des Gegenstandes geliefert hatte, so that dies BIOT[4]) in einem grossen Memoire nach der mathematischen Seite hin und zwar sofort in einer so gründlichen Weise, dass der grösste Theil seiner Ausführungen auch noch heute Gültigkeit hat. Als Material für seine Rechnungen benutzte er Beobachtungen von WOLLASTON, WOLTMANN[5]), HUMBOLDT und solche, die er selbst in Gemeinschaft mit M. MATHIEU im Jahre 1808 zu Dünkirchen und zusammen mit ARAGO in Spanien gemacht hatte. Die Dünkirchener Beobachtungen sind desshalb so interessant, weil sie zeigen, dass Luftspiegelungen an einzelnen Orten äusserst häufig vorkommen. Es war nämlich an einer bestimmten Stelle alle Tage möglich, diese Anomalien zu beobachten. Das Hauptergebniss der in Spanien gemachten Beobachtungen war, dass auch mehr als dreifache Bilder

[1]) M. VINCE, Philos. Trans. 1799.

[2]) MONGE, Mémoires de l'Institut du Caire.

[3]) WOLLASTON, Philos. Trans. 1800.

[4]) M. BIOT, Recherches sur les Réfractions extraordinaires, qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810.

[5]) WOLTMANN, GILBERT's Annalen.

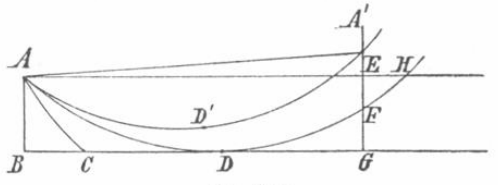
vorkommen. Beim Anvisiren eines Leuchtthurms zum Zwecke geodätischer Messungen bemerkte nämlich BIOT, dass neben und zwar über dem ersten Bilde plötzlich ein zweites auftauchte, das einen Abstand von ungefähr drei Minuten hatte, und höher sowie verbreitert und gefärbt war. Diesem folgten bald ein drittes, viertes und weitere Bilder, die ohne Regelmässigkeit verschwanden und wieder erschienen.

Die Hauptsache, die BIOT den Beobachtungen von WOLLASTON und WOLTMANN entnahm, war, dass in allen Fällen, wo Luftspiegelung beobachtet wurde, die Temperatur des Bodens höher als die der Luft war. Es scheint demnach ein Zustand von nach unten rasch abnehmender Dichte für die Erscheinung wesentlich zu sein. Wie wollen desshalb zunächst einmal die Consequenzen eines solchen Zustandes flüchtig skizziren. Zu diesem Zwecke wollen wir die Flächen gleicher Dichte als dem Erdboden parallel voraussetzen und die Dichte vom Erdboden aus nach irgend einem Gesetze zunehmen lassen. Die Voraussetzung paralleler Indicialflächen hat sofort zur Folge, dass jede Trajektorie gegen eine senkrecht zu jenen Flächen stehende Linie symmetrisch ist und demnach einen Scheitelpunkt besitzt, der in unserem Falle ein Minimum der Erhebung des Lichtstrahles repräsentirt. Denken wir uns jetzt das Auge als Ausgangspunkt einer Schaar von Trajektorien, so können offenbar zwei Fälle eintreten; entweder nämlich schneiden sich einige derselben oder nicht. Im ersten Falle wird das am Durchschnittspunkt befindliche Objekt doppelt oder dreifach u. s. w. gesehen, je nachdem der Durchschnittspunkt ein doppelter, dreifacher oder sonst mehrfacher ist; im zweiten Falle findet eine einfache Abbildung statt, die nur noch in Bezug auf die Lage, Form, Grösse und den Ort der Bilder Anomalien zeigen kann. Dabei ist nun eines zunächst klar, dass nämlich im Falle sich nicht schneidender benachbarter Trajektorien die Bilder aufrecht sein müssen und dass weiter dies ebenfalls stattfindet, wenn zwischen Objekt und Auge eine gerade Anzahl von Schnittpunkten zweier benachbarter Trajektorien liegt, dass dagegen für jede ungerade Anzahl dieser Schnittpunkte die Bilder umgekehrt sein werden. Auf diese Weise ist es also graphisch möglich, über die bei einer beliebigen Dichtigkeitsvertheilung vorkommenden Bilder Aufschluss zu erhalten; indess ist das Verfahren doch etwas beschwerlich und wir werden es deshalb später durch ein geeigneteres ersetzen, das von TAIT herrührt. Allerdings sind auch bereits von BIOT[1]) und GERGONNE[2]) Methoden angegeben worden, welche die Art und Anzahl der von einem Objekt entstehenden Bilder zu bestimmen gestatten. Dieselben grenzten das von einem Objektpunkte ausgehende Trajektoriensystem durch einhüllende Kurven so ab, dass in je zwei benachbarten durch diese Kurven begrenzten Gebieten die Anzahl der in einem Punkte sich schneidenden Trajektorien immer um eins differirte. Diese Kurven wurden von BIOT Brennlinien *(caustiques)* von GERGONNE Bestimmungscurven der Bilderzahl *(determinatrices)* genannt. Wenn wir hier nicht dieses Verfahren, sondern das von TAIT reproduciren, so geschieht dies, weil das letztere erheblich einfacher ist. Bevor wir dies indessen thun, wollen wir unser obiges Beispiel wieder aufnehmen und, um das Entstehen von Doppelbildern möglichst einfach zu exemplificiren, noch eine weitere Specialisirung eintreten lassen, die darin besteht, dass von der Augenhöhe aus nach oben die Dichtigkeit des Mediums constant bleiben soll. Wir nehmen jetzt eine Trennung der Aufgabe vor und

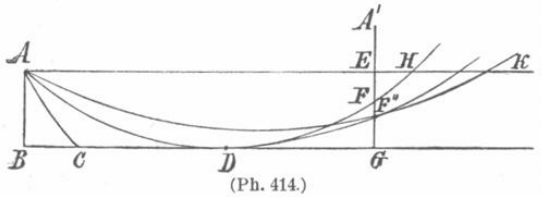
[1]) BIOT, l. c.

[2]) GERGONNE, Annales de mathematiques t. IV.

zwar je nachdem sich in dem unter Augenhöhe gelegenem Gebiete zwei Trajektorien schneiden oder nicht. Im letzteren Falle (Fig. 413) sehen wir, dass, wenn ADF die den Boden berührende Trajektorie ist und AE die durch das Auge gezogene Horizontale, von einem Objekt, welches wie $A'G$ gelegen ist, der Theil FG gar nicht, FE einfach, gesenkt und aufrecht und $A'E$ doppelt gesehen wird. Beide Bilder von $A'E$ sind aufrecht; das untere ist gesenkt, das obere an seinem natürlichen Platze. Man sieht hier ohne weiteres, dass bei einer Annäherung des Objektes an D der nicht und der doppelt gesehene Theil mehr und mehr abnehmen und zuletzt verschwinden, dass dieselben dagegen bei einer Annäherung des Objektes an H mehr und mehr auf Kosten des einfachen Bildes zunehmen. Bei H ist dieses vollständig verschwunden. Gehen wir dann noch weiter, so wächst wiederum der unsichtbare Theil auf Kosten des doppelt gesehenen, bis von einer gewissen Stelle an alles verschwunden ist. Betrachten wir jetzt einen der Fälle, wo die Trajektorien sich schneiden, wie derselbe z. B. auf Fig. 414 dargestellt ist. Es ist hier angenommen, dass die Scheitel der Trajektorien, welche unter geringerem Neigungswinkel als die den Boden berührende abgehen, sich vom Auge entfernen. $DF''K$ sei die Verbindungslinie der Schnittpunkte je zweier benachbarten Strahlen und also ADF'' so gewählt, dass der auf ihm liegende Schnittpunkt gerade im Objekte liegt. Dann ergiebt sich wiederum aus dem Anblick der Figur, dass GF'' gar nicht, $F''F$ doppelt, nämlich sowohl umgekehrt wie aufrecht und FA' einfach und zwar aufrecht abgebildet ist. Bei einer Annäherung des Objektes an D findet ein successives Abnehmen des nicht und des doppelt gesehenen Theiles statt, bei einer Annäherung an H ein Wachsen, bei einer Bewegung darüber hinaus ein Wachsen des unsichtbaren Theiles auf Kosten des doppelt sichtbaren, bis zuletzt alles verschwunden ist. Bei Bewegung des Objekts resp. des Beobachters treten also in beiden Fällen genau dieselben Erscheinungen auf. Die hier vorliegenden Verhältnisse würden also das Entstehen von Doppelbildern und zwar sowohl den Fall, wo beide aufrecht sind, als auch den, wo das eine aufrecht und das andere, nämlich das tiefer liegende, umgekehrt ist, zur Folge haben, sie würden aber nicht ausreichen, um z. B. die Beobachtungen von Vince zu erklären. Hierzu ist eine complicirtere Dichtigkeitsabstufung als die vorliegenden nöthig; wir wollen indessen dieselbe zunächst nicht untersuchen, sondern uns vielmehr zu der von Tait[1]) gegebenen Bestimmungsweise der Zahl und Art der Bilder für ein aus parallelen Ebenen bestehendes Indicialflächensystem wenden.



(Ph. 413.)

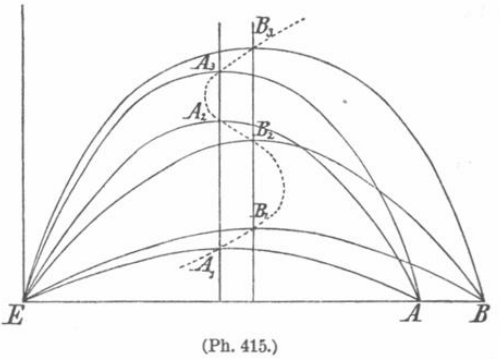


(Ph. 414.)

Tait geht von der Erwägung aus, dass wegen der Symmetrieeigenschaft der Trajektorien zwei benachbarte sich nur dann zum zweiten Male schneiden können, bevor die im ersten Schnittpunkte stärker geneigte Trajektorie die Horizontalebene erreicht hat, falls die Horizontalentfernung des Scheitels dieser vom ersten

[1]) Tait, On Mirage. Transactions of the Royal society of Edinburgh, Vol. XXX. 1883.

Schnittpunkte geringer ist als die der anderen. Denken wir uns nun als gemeinsamen ersten Schnittpunkt das Auge und betrachten wir vorläufig nur solche Objektpunkte, welche sich mit dem Auge in gleicher Höhe befinden, so ist klar, dass die Verbindungslinie der Scheitel sämmtlicher vom Auge ausgehender Trajektorien ohne weiteres die Zahl und Natur der Bilder erkennen lässt. Denn erstens wird das Objekt nur durch soviel Trajektorien gesehen, als ihre Scheitel in einer zwischen Objekt und Auge errichteten Vertikalen haben. Die Anzahl der Schnittpunkte dieser Linie mit dem geometrischen Ort für die Scheitelpunkte giebt demnach ohne weiteres die Anzahl der Bilder. Aber auch die Natur dieser Bilder lässt sich durch die Scheitelcurve erkennen. Wie der Anblick der Fig. 415 lehrt, bedeutet nämlich eine Annäherung der Kurve in horizontaler Richtung an das Auge mit wachsender Höhe ein Schneiden zweier benachbarter Strahlen und demnach ein umgekehrtes, eine Entfernung dagegen ein aufrechtes Bild, oder mit anderen Worten: Neigt sich die Kurve beim Schnitt mit der Vertikallinie nach dem Auge zu, so haben wir es mit einem umgekehrten, neigt sie sich weg, mit einem aufrechten Bilde zu thun. Bei der vorausgesetzten Anordnung gleicher Höhe von Auge und Objekt erhellt aus der Thatsache, dass die Kurve der Scheitel zwischen den beiden äussersten Schnittpunkten mit der Vertikallinie natürlich nur schlängelnd verlaufen kann, sofort der Satz, dass unter diesen Umständen aufrechte und umgekehrte Bilder abwechselnd auf einander folgen müssen. Sind Auge und Objekt in ungleicher Höhe, so können wir über die Aufeinanderfolge der beiden Bildarten nichts mehr aussagen, wohl aber können wir die obige Construction für diesen Fall erweitern. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur noch die Scheitelcurve für die durch das Objekt gehende Trajektorienschaar zu ziehen und die Schnittpunkte dieser beiden Scheitelcurven aufzusuchen. Dieselben werden, wie ersichtlich, die Scheitelpunkte der Lichtstrahlen liefern, durch welche das Objekt gesehen wird. Von dem hier gewonnenen Standpunkte aus würde jetzt die Entscheidung der Frage, ob von einem Objekte, das wir wiederum in gleicher Höhe mit dem Auge annehmen, drei oder eine beliebige andere Zahl von Bildern möglich ist, darauf reducirt sein, ob zu einer Scheitelabscisse drei oder mehr Ordinaten möglich sind. Wir müssten demnach zunächst die Scheitelcurve analytisch festlegen und sie nach dieser Richtung hin untersuchen. Der Punkt, an dem sich das Auge befindet, erhalte zu diesem Zwecke die Coordinaten o und b, ein beliebiger Punkt der Kurve x und y und der Scheitel derselben ξ und η. Rechnen wir weiter die y vom Boden aus und drücken die Relation zwischen Brechungsexponenten und der Höhe durch $n^2 = f(y)$ aus, so erhalten wir[1]) aus der Anwendung des Brechungsgesetzes:



(Ph. 415.)

$$x = \sqrt{f(\eta)} \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{f(y) - f(\eta)}},$$

und also als Scheitelcurve

[1]) Vergl. das Cap. Dioptrik in Medien mit . . .

$$\xi = \sqrt{f(\eta)} \int_{b}^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{f(y) - f(\eta)}}.$$

Wir wollen nun zunächst einmal $f(y) = n_0^2 + \alpha^2 y^2$ setzen, wobei also der Brechungsexponent am Boden n_0 ist und von da continuirlich bis über alle Grenzen wächst. Dass eine solche Annahme, wie die letztere, natürlich unstatthaft ist, kommt für uns nicht in Betracht, da wir die Brechungsverhältnisse der Luft nur in niedrigen Höhen beanspruchen werden. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir, wenn wir noch das Zeichen der rechten Seite verändern, also von (im Sinne der Lichtbewegung) nach dem Boden zu sich neigenden Trajektorien ausgehen:

$$\xi = \sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2} + \eta^2} \int_{\eta}^{b} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \eta^2}}$$

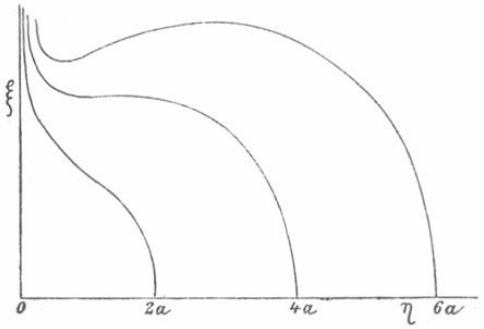
oder

$$\xi = \sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2} + \eta^2} \cdot ln \frac{b + \sqrt{b^2 - \eta^2}}{\eta}.$$

Setzen wir weiter der Abkürzung halber $\frac{n_0}{\alpha} = a$, so wäre also die durch

$$\xi = \sqrt{a^2 + \eta^2}\, ln \frac{b + \sqrt{b^2 - \eta^2}}{\eta}$$

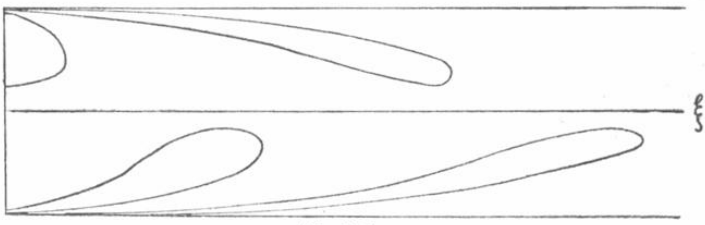
dargestellte Kurve in der Richtung hin zu diskutiren, ob dieselbe für ein bestimmtes ξ mehrere Werthe von η hat. Natürlich wird dies von vornherein von dem Verhältniss der Werthe von a und b abhängen und wir werden demnach eine ganze Schaar von Kurven zu diskutiren haben. TAIT[1]) hat dies für die Verhältnisse $\frac{a}{b} = 2, 4$ und 6 gethan und geben wir nach ihm in Fig. 416 die entsprechenden Kurven. Man ersieht sofort aus denselben, dass die angenommene Beziehung zwischen Brechungsexponenten und Höhe in der That unter gewissen Umständen drei Bilder liefern kann. Hierzu ist nämlich erstens eine passende Entfernung des Auges vom Objekte nöthig, die übrigens, wie aus der Figur ersichtlich ist, um so mehr variiren kann, je grösser das Verhältniss von b zu a ist. Zweitens aber ist ein Minimalwerth dieses Verhältnisses, den man graphisch oder durch Rechnung zu 3·68 findet, vorhanden, unter dem nur ein Bild entstehen kann. Dieser Minimalwerth aber zeigt sofort, dass trotz der rein theoretischen Möglichkeit dieser Bilder bei den Verhältnissen unserer Atmosphäre die gegebene Erklärung hinfällig ist. Da nämlich der Brechungsexponent in der Höhe des Auges gleich $\sqrt{n_0^2 + \alpha^2 b^2}$ ist, so würde derselbe 3·8 mal grösser sein müssen, als am Boden, was also selbst dann unmöglich sein würde, wenn wir am Boden eine Luftdichte gleich Null und in Augenhöhe den Brechungsexponenten des Diamanten hätteu. In derselben Weise, wie wir soeben am Boden ein Minimum



(Ph. 416.)

[1]) TAIT, l. c.

der Brechungsexponenten angenommen haben, wollen wir jetzt ein Maximum voraussetzen, also den Fall $f(y) = n_0^2 - \alpha^2 y^2$ behandeln. Wir erhalten dann mit der gleichen Abkürzung $\frac{n_0^2}{\alpha^2} = a^2$ wie oben, für die Scheitelkurve: $\xi = \sqrt{a^2 - \eta^2}\left(arc\,sin\,1 - arc\,sin\,\frac{b}{\eta}\right)$. Wie man aus derselben sieht, kann η nur Werthe zwischen b und a annehmen. Weiter ergiebt die Vieldeutigkeit vom *arc sin* eine Vielheit von Zweigen, so dass also die Curve einen ziemlich complicirten Charakter besitzt. Dieselbe ist für den Fall $a = 5b$ in Fig. 417 nach TAIT dargestellt. Nehmen wir wiederum der Einfachheit halber Auge und Objekt in gleicher Höhe an, so sehen wir unmittelbar, dass für jede Distanz des Objektes eine unendliche Anzahl von Bildern existirt. Nähert sich das Objekt dem Beobachter, so tauchen immer wieder neue auf, entfernt es sich, so verschwinden entsprechend davon. Dieser »periodische Wechsel« aber ist nach TAIT gerade der entscheidende Grund gegen die Möglichkeit, die Luftspiegelungen mit der obigen Relation zwischen Brechungsindex und Höhe zu erklären. Denn niemals scheint etwas ähnliches beobachtet worden zu sein; es blieben vielmehr die Bilder selbst bei relativ grossen Distanzveränderungen ziemlich gleich und schrumpften dann bis zum Verschwinden zusammen. Die bis jetzt gemachten Annahmen über die Lichtbrechungsverhältnisse der Atmosphäre versagen also für die Erklärung der beobachteten Erscheinungen. Es würde nun zwar keineswegs schwer halten, für jede einzelne Beobachtung einen entsprechenden Zustand der Atmosphäre zu finden, aber man muss andererseits doch auch an eine Erklärung ausser der physikalischen Zulässigkeit noch die Forderung stellen, für möglichst viele Erscheinungen zu passen. Nun war beobachtet ein direktes aufrechtes Bild mit einem darüber befindlichen umgekehrten, ferner und zwar besonders häufig ein umgekehrtes Bild mit einem darüber befindlichen aufrechten weiter drei Bilder, von denen das mittelste umgekehrt war, schliesslich auch einzelne abnormale und zwar sowohl aufrechte wie umgekehrte Bilder. Die hierfür nöthige Erklärung fand TAIT, indem er zunächst die Gestalt der Scheitelcurve anticipirte und dann zu dieser das Medium suchte, in der folgenden Constitution einer atmosphärischen Schicht. In der Nähe des Bodens sei die Dichtigkeit der Luft entweder constant oder die Verminderung nach oben wenigstens unbedeutend, darüber liege dann eine Schicht, in der der Brechungsindex bis zu einem Minimum oder einem streng resp. praktisch genügenden stationären Zustand abfalle. Die erste Bedingung genügt dann für das Entstehen des oberen aufrechten, die zweite für das umgekehrte Bild, falls man den Beobachter in der unteren nahe constanten Schicht voraussetzt. Um die Constitution eines solchen Mediums mit genügender Genauigkeit analytisch einfach auszudrücken, wählt TAIT die Function $f(y) = n^2 = a^2 + e^2 \cos\frac{\pi y}{b}$. Dieselbe ergiebt nämlich sowohl am Boden, d. h. für Werthe von y in der Nähe von Null, wie für $y = b$ und Umgebung fast stationäre Zustände und erfüllt zu gleicher Zeit auch noch die Be-



(Ph. 417.)

dingung in der Mitte, nämlich für $y = \frac{b}{2}$, rasch abzufallen. Mit diesem Gesetze erhält man für die Scheitelcurve die Gleichung

$$e\xi = \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}} \int_b^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{\cos\frac{\pi y}{b} - \cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

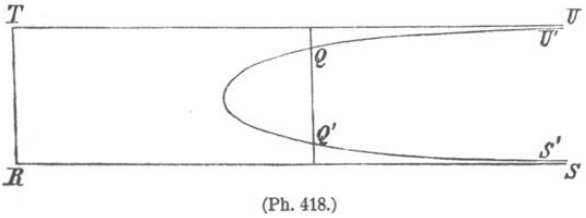
oder, wenn das Auge am Boden sich befinden soll, mit Einführung des vollständigen elliptischen Integrales 1. Gattung $F_1(k)$

$$e\xi = \frac{\sqrt{2}\cdot b}{\pi} \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}\, F_1(k), \quad \text{wo} \quad k = \sin\frac{\pi\eta}{2b}$$

gesetzt ist. Ebenso erhält man für die Gleichung einer Trajektorie, wenn man sich wiederum für das unvollständige elliptische Integral erster Gattung der Abkürzung $F_1(k, \varphi)$ bedient,

$$ex = \frac{\sqrt{2}\cdot b}{\pi} \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}\, F_1(k_1 \varphi).$$

Wir können hier aus Mangel an Raum nicht *in extenso* darlegen, dass die hierdurch dargestellten Trajektorien wirklich der Forderung genügen, drei Bilder der bezeichneten Art zu liefern und ebenso wenig ist es uns möglich, die für eine bessere Darstellung der Beobachtungen nöthigen Correctionsglieder zu würdigen; wir wollen uns deshalb, indem wir noch die für den obigen Fall bestehende Scheitelcurve nach TAIT[1]) in Fig. 418 wiedergeben, etwas den physikalischen Bedingungen der bei Luftspiegelungen vorkommenden atmosphärischen Zustände zuwenden. In der genannten Fig. 418 bedeutet O den Ort des Auges, $RSUT$ die vorausgesetzte atmosphärische Schicht und $U'QQ'S'$ nebst RS die hier in zwei Zweige zerfallene Scheitelkurve. —



(Ph. 418.)

Wir wollen jetzt im Anschluss an TAIT einmal kurz erörtern, welche Werthe durch die Beobachtung für e gefordert werden und wie dieselben mit der Stabilitätsbedingung für die Atmosphäre verträglich sind. Nehmen wir zu diesem Zweck die Trajektorie des Lichtstrahls in der Gestalt der Differentialgleichung, so ist die Neigungstangente gegen die Axe an einer beliebigen Stelle

$$\frac{dy}{dx} = e \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi y}{b} - \cos\frac{\pi\eta}{b}}{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

also am Auge, was wir in $x = 0$, $y = 0$ vorausgesetzt hatten

$$= \frac{e\sqrt{2}\cdot \sin\frac{\pi\eta}{2b}}{\sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

oder mit genügender Näherung

$$e\sqrt{2}\cdot \sin\frac{\pi\eta}{2b}.$$

[1]) Vergl. TAIT, l. c.

Nach Beobachtungen von SCORESBY war aber eine Maximalhöhe der Bilder von durchschnittlich 15 Bogenminuten vorhanden und demnach muss e mindestens einen Werth von $250\frac{1}{\sqrt{2}}$ haben, also $e^2 = 0{\cdot}000008$ sein.

Wir wollen nun weiter untersuchen, welcher Temperaturabfall im Maximum gestattet ist, ohne dass Instabilität in der Luft auftritt. Die Gleichgewichtsbedingung, die hier natürlich auch den Fall labilen Gleichgewichtes mit einschliesst, liefert mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen p, δ, T, g für Druck, Dichtigkeit, absolute Temperatur und Beschleunigung der Schwere die Relation $dp = -dy \cdot g\delta$. Daraus erhalten wir mit Benutzung der Zustandsgleichung $p = R\delta T$

$$R\frac{d(\delta T)}{dy} = -g\delta.$$

Führen wir weiter die bekannte Grösse H durch die Gleichung $p_0 = g_0\delta_0 H$ ein, wo g_0 den Werth von g am Boden bedeutet, und beachten, dass natürlich auch $p_0 = R\delta_0 T_0$, so können wir mit Vernachlässigung der Veränderlichkeit der Beschleunigung der Schwere

$$\frac{1}{T_0}\cdot\frac{dT}{dy} = -\frac{1}{H} - \frac{T}{T_0}\frac{1}{\delta}\cdot\frac{d\delta}{dy}$$

setzen. Soll nun Stabilität vorhanden sein, so darf die Dichtigkeit nach oben nicht zunehmen und wir erhalten also als Maximum der Temperaturabnahme pro 100 m nach oben $\frac{dT}{dy} = -\frac{T_0}{H}$, also für $T_0 = 274$ und $H = 8000$, 3·425° C. Diese Temperaturabnahme muss also in den von uns vorausgesetzten oberen und unteren Theilen der Schicht herrschen. Wir wollen nun weiter dazu übergehen, unter Voraussetzung einer bestimmten Dicke der Schicht die Temperaturverhältnisse in der Mitte zu untersuchen. Der Brechungsindex der Luft (n) ist, wenn derselbe für die Dichte δ_0 den Betrag 1·000294 hat, gleich $1 + 0{\cdot}000294\frac{\delta}{\delta_0}$, woraus mit genügender Annäherung

$$n\frac{dn}{dy} = 0{\cdot}000294\frac{1}{\delta_0}\cdot\frac{d\delta}{dy}$$

folgt. Nehmen wir nun eine Dicke von 50 Metern, so haben wir die Beziehung

$$n^2 = a^2 + e^2\cos\frac{\pi y}{50},$$

also

$$n\frac{dn}{dy} = -e^2\frac{\pi}{100}\sin\frac{\pi y}{50}$$

und andererseits

$$\frac{1}{\delta_0}\frac{d\delta}{dy} = -\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{T_0}\cdot\frac{dT}{dy}\right).$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{e^2\pi}{160}\sin\frac{\pi y}{50} = 0{\cdot}000294\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{T_0}\frac{dT}{dy}\right)$$

oder

$$\frac{dT}{dy} = T_0\left(\frac{e^2\pi}{100}\sin\frac{\pi y}{50}\,\frac{1}{0{\cdot}000294} - \frac{1}{H}\right).$$

Wie man sieht, liegt die grösste Temperaturveränderung bei $y = 25$, also in halber Höhe der Schicht, beträgt mit dem oben angenommenen Werthe von e 0·20° pro Meter und ist ein Temperaturanstieg. Das gleiche Zeichen hat die genannte Temperaturdifferenz für die ganze Schicht. Die Temperatur hat also

beim Durchwandern der Schicht folgenden Gang. Zunächst findet ein Temperaturabfall statt, dieser wird allmählich geringer, wird zu Null, um dann in einen beschleunigten Anstieg umzuschlagen, der ebenso rasch wieder geringer, darauf zu Null wird und wieder einem Temperaturabfall Platz macht. Der obige Werth von 0·2° C. pro Meter Aufstieg ist für grössere Höhen zwar bedeutend, doch ist derselbe in der That von GLAISHER in einer Höhe von beinahe 6000 Meter einmal beobachtet worden. Wollen wir mit diesem etwas starken Anstieg nicht erklären, so müssen wir durch eine Veränderung der Constitution des Mediums physikalisch zulässigere Werthe für die Temperaturverhältnisse zu erlangen suchen. So wäre es in unserem Falle vielleicht möglich, den Temperaturanstieg in der Mitte der Schicht auf eine grössere Strecke zu vertheilen, ohne doch die Existenz des betreffenden Bildes zu gefährden. Es sind indess so viele Umstände noch nicht berücksichtigt worden, dass Verbesserungen unbedeutender Art noch nicht angebracht sind. In erster Linie hätte man nämlich einmal die Beobachtungen mit Rücksicht auf die Entfernungen der Objekte vom Beobachter zu diskutiren, da dies eine scharfe Diagnose für die Art der Entstehung von Bildern bietet, ferner wären zu beachten die Grössenverhältnisse und ein keineswegs zu verachtender Faktor, nämlich der Einfluss der Erdkrümmung. Freilich scheint zu einer erfolgreichen Verarbeitung noch nicht Material genug vorzuliegen, oder wenn auch das, so doch ein Material, das bei dem häufigen Mangel wichtiger Daten der Verarbeitung grosse Schwierigkeiten bieten würde.

Literaturübersicht über die wichtigsten Erscheinungen im Gebiete der normalen und anormalen Strahlenbrechung.

CASSINI, Des réfractions astronomiques, Mém. de l'Acad. des sc. 1714.

SIMPSON, Deter-mination of the astr. refractions. London 1743.

BOUGUER, Observations sur les réfractions astronomiques. Mém. de l'Acad. des. sc. 1739.

BOUGUER, Second mémoire sur les réfractions astronomiques. Mém. de l'Acad. 1749.

TOBIAS MAYER, de refractionibus objectorum terrestrium. Göttingen 1751.

LAMBERT, Bahn des Lichts durch die Luft und verschiedene Mittel 1772.

LAGRANGE, Sur les réfractions astr. Mém. de Berlin 1772.

EULER, De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphaere. Mém. de Berlin 1754.

HUDDART, Observations on horizontal refractions. Phil. Trans. 1797.

ORIANI, de refractionibus astr. 1788.

LATHAM, On a singular instance of atmospherical refraction Phil. Trans. 1798.

BRADLEY, Astronomical observations made at the Roy. Observatory at Greenwich from 1750 to 1762. Oxford 1798. Vol. I.

KRAMP, Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strassburg 1799.

KLÜGEL, Ueber die atmosphärische Strahlenbrechung. Berl. Jahrbuch 1804.

MONGE, Sur le phénomène d'optique connu sous le nom de mirage. Description de l'Egypte I. 1799.

VINCE, Observations on an unusual horizontal refraction of the air, Phil. Trans. 1799.

W. H. WOLLASTON, On double images caused by atmospherical refraction. Phil. Trans. 1800.

GRUBER, Theorie der mit Spiegelung verbundenen Senkung und Hebung der Objekte am Horizont. GILB. Ann. III. 1800.

WOLLASTON, Observations on the quantity of horizontal refraction etc. Phil. Trans. 1803.

BRANDES, Beobachtungen über die Strahlenbrechung. GILB. Ann. 17, 18, 20.

LAPLACE, Réfractions astronomiques, Mécanique céleste t. 4. 1805.

YOUNG, Remarks on looming or horizontal refraction, NICHOLSON's Journ. 6. 1807.

HUMBOLDT, Essai sur les réfractions astr. dans la zone torride, Journal de Phys. 66, GILB. Ann. 31. 1808 u. 1809.

BIOT, Sur les réfractions extraordinaires qui s'observent près de l'horizon. Paris 1810. Mémoires de l'Inst. 10.

Maskelyne, Observations on atmospherical refraction. Phil. Trans. 1810.

Vince, On a very remarkable effect of refraction. Trans. of the roy. Soc. of Edinb. 6, 1812.

Bessel, Schreiben an Bode über Refractionstafeln. Bode's astr. Jahrb. 1816.

Jurine, Note sur un phéonomène de mirage latéral. Journal de Physique 10. 1820.

Scoresby, Description of some remarkable atmospheric reflections and refractions. Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 9.

Ivory, On calculating astronomical refraction Phil. Magaz. 59. 1822; 63. 1824; 65. 1825; 68. 1826.

Bessel, Fundamenta Astronomiae. Plana Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des refractions astronomiques. Mem. di Torino 27. 1823.

Ivory, On the astr. ref. Phil. Trans. 1823.

Bessel, Königsberger Beob. Bd. 7 u. 8.

Bessel, Ueber Refraction Astr. Nachr. 2.

Bessel, Tabelau Regiomontanae.

Young, A finite and exact expression for the refraction of an atmosphere nearly ressembling that of the earth. Phil. Trans. 1824.

Bessel, Ueber die atmosphärische Strahlenbrechung. Bode, Astr. Jahrb. 1826.

Gauss, Refractionsbestimmungen von der hannoverschen Gradmessung. Berliner astr. Jahrb. 1826.

Schmidt, Lehrbuch der phys. Geographie. Göttingen 1829.

Scoresby, Description of some remarkable effects of inequal refraction Trans of the Roy. Soc. of Edinb. 11. 1831.

Schmidt, Theorie der astr. Strahlenbrechung. Göttingen 1828.

Biot, Mémoire sur les réfractions astronomiques. Compt. rend. 3. 1836.

Svanberg, Disquisitiones anal. in theoriam ref. astr. Nov. acta reg. soc. scient. Upsaliae 1827. 1839.

Barfuss, Beiträge zur Theorie astr. Strahlenbrechung. Astr. Nachr. 15. 1837.

Bessel, Gradmessung in Ostpreussen 1838.

Biot, Sur la vraie constitution physique de l'atmosphère terrestr. Compt. rend. 6. 1838.

Fuss, Ueber eine Gleichung Biot's für die Refractionsdifferenz bei gegenseitigen Zenithdistanzbeobachtungen. Bull. scient. de l'Academic de St. Petersbourg 4. 1838.

Ivory, On the theory of astronomical refractions. Phil. Trans. 1838. 1839.

Biot, Sur la mesure théorique et expérimentale de la refraction astr. Compt. rend. 7. 1838.

Ritter, Récherches analytiques sur le problème des réfractions astr. Compt. rend. 8, 1839.

Fuss, Note sur les causes et l'effet de l'inégale réfraction. Bulletin scient. de l'Acad. de St. Petersbourg 5. 1839.

Biot, Sur les réfractions astronomiques. Additions à la Connaissance des temps pour 1839.

Lubbock, On astronomical refractions. London 1840.

Bessel, Mémoires sur la réfraction astronomique. Compt. rend. 15. 1842.

Biot, Sur les réfractions astronomiques. Compt. rend. 39. 1854; 40. 1855.

Lubbock, On the theory of astr. refractions. Mem. of Ast. Soc. tome 24. 1855.

Plana, Mémoire sur la connexion entre la hauteur de l'atmosphère et la loi de décroissement de sa température. Mem. di Torino 15. 1855.

Heegmann, Théorie de la réfraction astr. Paris 1856.

Lindhagen, Om terrestra Refractions-theorie. Stockholm 1856.

Kummer, Ueber atmosphärische Strahlenbrechung, Monatsber. der kgl. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1860. Annales de chimie et de physique 61. 1860.

Babinet, Note sur la réfraction terrestre. Compt. rend. 53. 1861.

Babinet, Note sur la réfraction astron. Compt. rend. 53. 1861.

Baeyer, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Mém. de l'acad. imp. des sciences de St. Petersb. 7. série, tome 3. 1860. Astr. Nachr. Bd. 41.

Bruhns, Die astr. Strahlenbrechung. Leipzig 1861.

Bauernfeind, die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung

über die physikalische Constitution der Atmosphäre. Astr. Nachr. 1478—1480, 1864, 1587 bis 1590, 1866.

Gylden, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die astronomische Strahlenbrechung in derselben. Mémoires de l'acad. imp. des sciences de St. Petersbourg, 7. série, tome 10. 1866.

Bauernfeind, Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. Kgl. Bayer. Akad. der Wiss. II. Kl., Bd. 13. 1880; Bd. 15. 1880.

Jordan, Ein Beitrag zur Theorie der terr. Refraction. Astr. Nachr. 2095. 1876; Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 2.

Hartl, Ueber den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung und den meteorologischen Elementen. Med. Zeitschr. Bd. 16. 1881.

Hartl, Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung. Mittheilungen des k. k. militär-geogr. Institutes, Bd. 3. 1883.

Hartl, Ueber mittlere Refractionscoëfficienten. Mitth. des k. k. mil.-geogr. Inst. Bd. 4. 1884.

Helmert, die math. und. phys. Theorien der höheren Geodäsie, Bd. 2.

Preussische Landesaufnahme 1870—1875.

Harzer, Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr. 2554—2556.

Radau, Sur la Theorie des réfractions astronomiques. Bulletin astronomique, Tome 1. 1884.

Tait, On mirage, Trans. of the Roy. soc. of Edinb. Vol. 30. 1883.

R. Straubel.

Scintillation.

Blickt man an einem erhitzten Gegenstande vorbei, so zeigen die Umrisse der betrachteten Gegenstände eine zitternde Bewegung. Diese ist eine Folge der Brechungen, welche die Strahlen erfahren, indem sie die durcheinander fliessenden kalten und warmen Luftströmchen durchsetzen. Aehnliches gewahrt man an den Gegenständen, welche sich auf dem Grunde eines klaren, fliessenden Baches befinden; hier finden die Brechungen an der Wasseroberfläche statt.

Es bedarf jedoch zur Hervorbringung dieser Erscheinung einer kräftigen lokalen Wärmequelle nicht, wenn nur die Strahlen eine hinreichend grosse Wegstrecke in der freien Luft zurücklegen. So erscheinen die Conturen entfernter Gebirge durch ein Fernrohr in wellenartiger Bewegung, und ebenso die Ränder der Sonne und des Mondes. Man kann hieraus schliessen, dass jenes Durcheinanderfliessen kalter und warmer Luftströmchen ein habitueller Zustand der Atmosphäre ist.

Die Fixsterne zeigen stets mehr oder weniger die Erscheinung des Funkelns. Höher stehende Sterne zeigen rasche und unregelmässige Variationen der Helligkeit, tiefer stehende überdies ebensolche Variationen der Farbe. So verschieden diese letztere Erscheinung von der früher beschriebenen ist, so beruht sie doch genau auf derselben Ursache; die Verschiedenheit der Wirkung rührt einzig daher, dass man es im ersteren Falle mit ausgedehnten und im letzteren mit punktförmigen Lichtquellen zu thun hat.

Wenn nämlich die von einem Fixsterne kommenden ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen durch die Atmosphäre gehen, erfahren sie daselbst durch unregelmässige Brechungen beständig kleine Verbiegungen; dies anders ausge-