universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Prismen und Prismensysteme

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

bequem von Fläche zu Fläche berechnet werden, so dass man nicht nöthig hat, die ganze Durchrechnung für jede Wellenlänge besonders auszuführen. Man hat nämlich zur Verfolgung eines Strahls beliebiger Wellenlänge durch irgend eine Fläche gemäss pag. 68/69 das Schema

$$\text{(a)}\quad \frac{s-r}{r}\cdot \sin u = \sin i \qquad \text{woraus} \qquad \frac{du}{\operatorname{tang} u} + \frac{ds}{s-r} = \frac{di}{\operatorname{tang} i} \qquad \text{(a')}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{n}{n'}\sin i = \sin i' \qquad \text{,,} \qquad \frac{di}{\operatorname{tang} i} + \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} = \frac{di'}{\operatorname{tang} i'} \qquad \text{(b')}$$

$$\text{(c)}\quad u + (i' - i) = u' \qquad \text{,,} \qquad du + di' - di = du' \qquad \text{(c')}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{r \sin i'}{\sin u'} = s' - r \qquad \text{,,} \qquad \frac{di'}{\operatorname{tang} i'} - \frac{du'}{\operatorname{tang} u'} = \frac{ds'}{s'-r} \qquad \text{(d')}$$

daher schliesslich $\Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right) = -\Delta\left(\frac{du}{\operatorname{tang} u}\right) - \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)$

folgt. Ist also du und ds gegeben und der Strahl von der Wellenlänge λ festgelegt, so werden nach dem rechtstehenden Schema ds' und du' sehr einfach berechnet.

Die chromatischen Variationen der übrigen Kugelgestaltfehler: der Bildkrümmung, des Astigmatismus und der Orthoskopie sind selten Gegenstand der Untersuchung, bezw. ihre Aufhebung Gegenstand der Bemühungen gewesen. Allein die letztere, die Orthoskopie, muss bei manchen Gattungen von Instrumenten von der Variation mit der Wellenlänge unabhängig gemacht werden. Die Bedingung hierfür folgt ohne weiteres aus der entsprechenden Grundbedingung. $\frac{n \operatorname{tang} w}{n' \operatorname{tang} w'} = B$ (pag. 127).

Die Literatur über diesen Abschnitt ist theils im Text, theils in der dem vorigen Abschnitt angehängten Uebersicht mit aufgeführt worden. Da die sphärischen und chromatischen Fehler dem Zweck der optischen Instrumente, scharfe Bilder zu erzeugen, gleich hinderlich sind, so sind dieselben auch meistens im Connex mit einander behandelt worden. S. Czapski.

Prismen und Prismensysteme.

Der Specialfall, dass die die verschiedenen brechenden Medien trennenden Flächen sämmtlich die Krümmung Null haben, Ebenen sind, bietet ein hervorragendes praktisches Interesse und soll daher im Folgenden besonders diskutirt werden.

I. Weg eines einzelnen Strahls.

Derselbe ist innerhalb der Einfallsebene durch das Brechungsgesetz und durch die pag. 25 und 26 abgeleiteten Hilfssätze auch in Bezug auf eine beliebig anzunehmende andere Grundebene völlig bestimmt. Sind ϑ und φ die Winkel, welche die Projection eines Strahles auf eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene mit dem Strahl selbst bezw. mit jener Normalen bildet, ϑ' und φ' dieselben für die Projection des gebrochenen Strahls, i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so war ausser der Grundgleichung

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

noch

$$n \cdot \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \qquad (1)$$

und

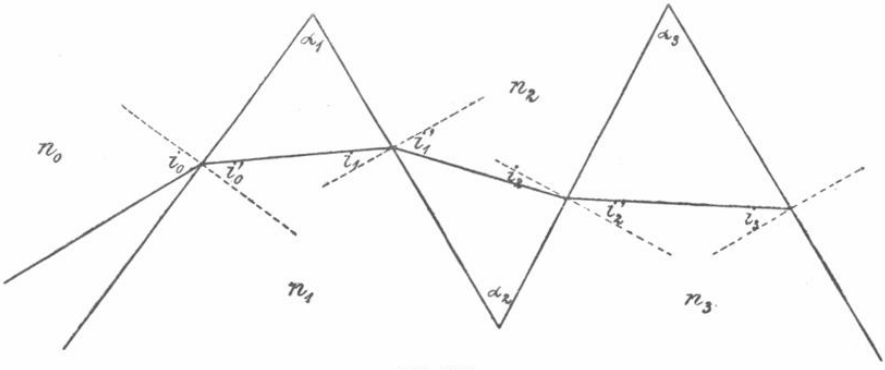
$$n \cdot \sin \varphi \cos \vartheta = n' \sin \varphi' \cos \vartheta',$$

daher aus ϑ und φ auch ϑ' und φ' ohne weiteres berechenbar.

Von den vielen graphischen Constructionen, welche für die Lösung dieser Aufgabe angegeben worden sind[1]), will ich nur die von REUSCH[2]) erwähnen, welche aus Fig. 300, pag. 26, fast unmittelbar zu entnehmen ist. Man schlage um den Einfallspunkt O Halbkugeln mit den Radien n und n' nach dem zweiten Medium zu. Den Punkt P, in welchem die Verlängerung des einfallenden Strahls die erstere Halbkugelfläche trifft, proicire man parallel der Einfallsnormalen auf die zweite Halbkugel nach P', dann ist P' ein Punkt des gebrochenen Strahls.

Liegen mehrere brechende Ebenen vor, so genügen die gleichen Formeln und auch die angegebene graphische Construction, wenn man für erstere als Projectionsebene die zur Schnittlinie je zweier auf einander folgender Ebenen senkrechte den »Hauptschnitt« der beiden Ebenen annimmt und beachtet, dass der Winkel, welchen der an der ersteren Fläche gebrochene Strahl mit jener Ebene bildet, derselbe ist, wie derjenige, welchen er beim Einfall auf die zweite Fläche mit dieser bildet, dass also stets $\vartheta_{k+1} = \vartheta_k'$. Zur Bestimmung von φ_{k+1} aus φ_k' muss der Neigungswinkel der beiden brechenden Ebenen α_k und der zweier auf einander folgender Hauptschnitte gegeben sein. Da die Richtung des Strahls dieselbe bleibt, er mag an einer gegebenen Fläche selbst oder an einer zu dieser parallelen gebrochen werden, so kann für die Construction wie Berechnung der Richtungsänderung durch Brechung in einem Prismensystem angenommen werden, dass dessen sämmtliche Flächen sich selbst parallel bis zum Einfallspunkte verschoben seien. Man hat alsdann für die analytische Verfolgung des Strahlenweges nur eine Reihe sphärische Dreiecke aufzulösen[3]).

Besonders einfach ist der, auch am häufigsten vorliegende Fall, dass die Hauptschnitte aller brechenden Ebenenpaare zusammenfallen, also alle Ebenen auf diesem einen Hauptschnitt senkrecht stehen. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen fasst man unter der Bezeichnung **Prisma** zusammen, ihre Schnittlinie heisst brechende Kante, der Winkel α, den sie einschliessen, brechender Winkel des Prismas.



(Ph. 337.)

Der Weg eines Strahls durch ein solches Prismensystem bestimmt sich, wenn der Strahl im Hauptschnitt verläuft, folgendermaassen (Fig. 337).

Die Einfalls- und Brechungswinkel des Strahls an den einzelnen Ebenen

---

[1]) RADAU, POGG. Ann. 118, pag. 452. 1863. LOMMEL, ebendort 156, pag. 578. 1876; KESSLER, Jahresb. Gew.-Schule Bochum f. 1880. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 69. 1884. Alle diese behandeln auch den Weg eines Strahls durch ein Prisma.

[2]) REUSCH, POGG. Ann. 117, pag. 241. 1862.

[3]) S. z. B. HERSCHEL, Light. D. Uebers. pag. 82.

seien wie früher mit i_k, i_k' bezeichnet und als positiv gerechnet, wenn man den Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit seiner Normalen zur Deckung zu bringen. Die brechenden Winkel α_k der Prismen rechnen wir als positiv, wenn sich ihre Scheitel von einem mit dem Strahle sich Bewegenden und auf die Zeichnungsebene Blickenden links befinden. Die Ablenkung endlich, welche ein Strahl erfährt, rechnen wir als positiv, wenn man den einfallenden Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit dem austretenden zur Deckung zu bringen.

Der Weg des Strahls im Hauptschnitt ist dann bestimmt durch das Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{aligned} n_1 \sin i_0' &= n_0 \sin i_0 \\ i_1 &= i_0' - \alpha_1 \\ n_2 \sin i_1' &= n_1 \sin i_1 \\ i_2 &= i_1' - \alpha_2 \\ &\cdots\cdots \\ n_p' \sin i_p' &= n_p \sin i_p \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= i_0 - i_0' \\ \\ \varepsilon_1 &= i_1 - i_1' \\ \\ &\cdots \\ \varepsilon_p &= i_p - i_p' \end{aligned} \qquad (3)$$

daher ist die Gesammtablenkung $\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=0}^{k=p} \varepsilon_k = i_0 - i_p' - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \alpha_k.$

$\sum_{k=1}^{k=p} \alpha_k$ ist nichts anderes als der Winkel der letzten gegen die erste brechende Fläche $= \alpha_{1,p}$, also

$$\varepsilon^{(p)} = i_0 - i_p' - \alpha_{1,p}.$$

Diese Ablenkung ist ein Minimum für denjenigen Einfallswinkel i_0, für welchen unter den gegebenen Verhältnissen (n, α)

$$\frac{\delta \varepsilon^{(p)}}{\delta i} = 0 \quad \text{also} \quad \delta i = \delta i_p' \tag{4}$$

ist (natürlich vorausgesetzt, dass $\delta^2\varepsilon/\delta i^2$ einen positiven Werth hat).

Zur Berechnung von $\delta i_p'$ in Funktion von δi_0 dient das aus (2) abzuleitende Gleichungssystem

$$(5)\qquad \begin{aligned} \delta i_0' &= \frac{n_0}{n_1} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \delta i_0 \\ \delta i_1' &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \delta i_1, \quad \text{worin} \quad \delta i_1 = \delta i_0' \\ &\cdots\cdots \\ \delta i_p' &= \frac{n_p}{n_p'} \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \delta i_p, \quad \text{worin} \quad \delta i_p = \delta i'_{p-1}, \end{aligned}$$

also schliesslich

$$\delta i_p' = \frac{n_0}{n_p'} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \cdot \cdots \cdot \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \cdot \delta i_0. \tag{6}$$

Das Verhältniss der Cosinus von Einfalls- und Brechungswinkel an je einer Fläche $\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}$, ist eine Function des Einfallswinkels i_k und des relativen Brechungsexponenten der beiden wirksamen Medien. Bezeichnen wir Produkte durch das Zeichen Π, so ist bei der Minimalablenkung, wo also $\delta i_p' = \delta i_0$

$$n_0 \Pi(\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = n_p' \Pi(\cos i_k')_{k=0}^{k=p} \tag{7}$$

oder, da fast stets erstes und letztes Medium Luft, $n_0 = n_p' = 1$ ist

$$\Pi(\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi(\cos i_k')_{k=0}^{k=p}\ ^{1)}. \tag{7a}$$

---

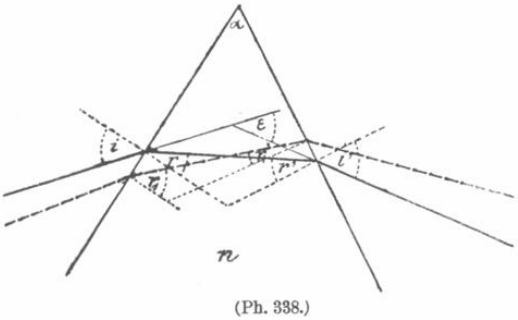
[1]) Herschel, a. a. O. pag. 89.

Wenden wir die letztere Gleichung auf ein einziges, beiderseits vom gleichen Medium umgebenes Prisma an, bei welchem wir der Symmetrie wegen die äusseren Einfallswinkel mit i und i', die inneren mit r und r' bezeichnen (Fig. 338), so muss hier bei der Minimalablenkung

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos i' \cdot \cos r \quad \text{oder} \quad \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'}, \tag{7b}$$

sein. Der Quotient $\cos i/\cos r$ ist nun, wie ersichtlich, dieselbe eindeutige Function von i und n, als der Quotient $\cos i'/\cos r'$ von i' und n. Man hat daher aus $f(i, n) = f(i', n)$

$$i = \pm i'. \tag{7c}$$



(Ph. 338.)

Eine unmittelbare Betrachtung zeigt aber, dass beim einfachen Prisma das Minimum der Ablenkung eines Strahls stattfindet, wenn dieser das Prisma symmetrisch durchsetzt, also wenn $i = -i'$, $r = -r'$ ist. Denn gehe ich unter Voraussetzung eines solchen Verlaufs des Strahls vom Innern des Prismas aus, so ist die Ablenkung, die der Strahl an der einen Fläche erfährt, $\varepsilon = (i - r)$ ebenso gross und trägt zu dem Endeffekt im gleichen Sinne bei als die an der andern Fläche, $\varepsilon' = i' - r'$. Bei einem anderen Strahlengang (s. Fig. 338) ist stets der eine der Winkel r gegenüber der symmetrischen Lage um ebenso viel grösser, als der andere kleiner, da ja dem absoluten Betrage nach stets $[r] + [r'] = \alpha$. Nach dem pag. 26 bewiesenen Satze wächst aber die Ablenkung eines Strahls durch Brechung *caet. par.* mit dem Einfallswinkel immer schneller. Der Zunahme δr des einen Winkels entspricht also eine grössere Zunahme der Ablenkung $\delta\varepsilon$ an dieser Fläche, als die Abnahme $\delta\varepsilon'$ beträgt, welche der gleichgrossen Abnahme $\delta r'$ des anderen inneren Einfallswinkels entspricht. Der verbleibende Ueberschuss der Gesammtablenkung $\delta\varepsilon + \delta\varepsilon'$ ist bei kleinen Werthen δr von der zweiten Ordnung, also in erster Näherung gleich Null, aber, wie gerade diese Betrachtungsweise zeigt, positiv und stetig wachsend bis zu den grössten möglichen Werthen von r oder r'.

Diese grössten Werthe entsprechen den Werthen $\sin i$ bezw. $\sin i' = \pm 1$, d. h. streifendem Ein- bezw. Austritt des Strahls. Ein Prisma, bei welchem der ein- und der austretende Strahl die Flächen streifen, hat den Grenzwinkel $\bar{\alpha}$, welcher durch die Beziehung $n \sin \bar{\alpha}/2 = 1$, bestimmt ist und nicht gesteigert werden darf, damit überhaupt noch durch das Prisma mittelst blosser Brechung an seinen beiden Flächen Licht hindurchtreten könne. Derselbe beträgt z. B. für

$n =$	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
$\bar{\alpha} =$	100° 34′	91° 10′	83° 37′	77° 22′	72° 4′	67° 30′	63° 30′	60° 0′
$\bar{\varepsilon} =$	79° 56′	88° 50′	96° 23′	102° 38′	107° 56′	112° 30′	116° 30′	120° 0′

Die Ablenkung des Strahls in diesem Falle — bei welchem ebenfalls symmetrischer Durchgang desselben, also Minimalablenkung stattfindet, beträgt $\bar{\varepsilon} = 180° - \bar{\alpha}$ und ist oben mit angegeben.

Bei der Minimalablenkung überhaupt ist

$$r = -r' = \frac{\alpha}{2}; \qquad \varepsilon_0 = 2i - \alpha; \qquad i = \frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2},$$

also wegen $\sin i = n \sin r$

$$sin\frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2} = n \cdot sin\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Diese Gleichung liegt dem FRAUNHOFER'schen Verfahren der Brechungsexponentbestimmung zu Grunde.

Die Einfalls- bezw. Austrittswinkel auf jeder Seite des Prismas können zwischen 90° und demjenigen Werthe variiren, welchem auf der andern Seite der Winkel 90° entspricht. Innerhalb dieser Grenzen kann also jeder Winkel sowohl als Einfallswinkel vorkommen, als auch — mit dem entgegengesetzten Vorzeichen — als Austrittswinkel. Die Ablenkung $\varepsilon = i - i' - \alpha$ ist für irgend ein Werthepaar $i = p$ und $i' = -q$ dieselbe wie für das Werthepaar $i = q$ und $i' = -p$. Es kommt also innerhalb der durch das Minimum (bei symmetrischem Strahlengang) und das Maximum (bei streifendem Ein- oder Austritt) gegebenen Grenzen jeder Betrag der Ablenkung in zwei Stellungen des Prismas vor, welche ihrerseits symmetrisch zu der Stellung der Minimalablenkung liegen — die Richtung des einfallenden Strahls als fest gedacht.

Allgemein ist bei einem einzelnen Prisma

$$sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) = n\, sin\frac{1}{2}\alpha\frac{cos\frac{1}{2}(r + r')}{cos\frac{1}{2}(i + i')}. \tag{8a}$$

Besonders einfach und übersichtlich werden diese Verhältnisse bei einem System von Prismen, deren brechende Winkel sehr klein sind, so dass deren Sinus den Bogen selbst gleich gesetzt werden können. Alsdann ist nämlich für je ein solches Prisma in Luft bei kleinen Einfallswinkeln stets

$$\varepsilon = (n - 1)\,\alpha \tag{9}$$

und bei einem System von p solchen Prismen ebenso

$$\varepsilon(p) = \sum(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{k=p}(n_k - 1)\alpha. \tag{9a}$$

Wenn der betrachtete Strahl nicht im Hauptschnitt des Prismensystems verläuft, so ist seine Verfolgung, wie wir oben andeuteten, etwas umständlicher. Versteht man unter ϑ und φ die Winkel, welche die Projection des Strahls auf den Hauptschnitt eines Prismas mit dem Strahl bezw. der Einfallsnormalen bildet, dann haben wir bei einem solchen Prisma in Luft gemäss den Gleichungen (1), wenn n der Brechungsindex des Prismas ist, an der ersten Fläche:

$$n\, sin\, i_1' = sin\, i_1, \tag{1a}$$

$$\frac{sin\vartheta_1'}{sin\vartheta_1} = \frac{1}{n}, \tag{1b}$$

$$\frac{sin\varphi_1}{sin\varphi_1'} = \frac{n\, cos\vartheta_1'}{cos\vartheta_1}. \tag{1c}$$

Da für die zweite Fläche des Prismas die Projectionsebene dieselbe ist, so hat man $\vartheta_2 = \vartheta_1'$, demnach folgt aus

$$\frac{sin\vartheta_2'}{sin\vartheta_2} = n, \tag{1b'}$$

dass $\vartheta_2' = \vartheta_1$ ist, d. h. der austretende Strahl gegen den Hauptschnitt des Prismas ebenso stark geneigt ist, als der eintretende. Bezeichne ich daher kurz mit ϑ den betreffenden Winkel in Luft, mit ϑ' den im Prisma so wird durch

$$n\, sin\varphi_1' \cdot cos\vartheta' = sin\varphi_1\, cos\vartheta \tag{1c'}$$

und

$$sin\varphi_2'\, cos\vartheta = n\, sin\varphi_2\, cos\vartheta'$$

in Verbindung mit (1b) und der Beziehung $\varphi_2 = \varphi_1' - \alpha$ der Weg der Projection des Strahls auf den Hauptschnitt innerhalb dieses bestimmt.

Die Ablenkung η, welche die Projection eines Strahls auf den Hauptschnitt erfährt, ist nun dasselbe wie die Projection der Ablenkung E des Strahls selbst auf den Hauptschnitt, es ist dann $\cos\frac{1}{2}E = \cos\frac{1}{2}\eta \cdot \cos\vartheta$, demnach erstere stets kleiner als letztere. Ihr Minimum η_0 findet, ganz ebenso wie das eines wirklichen Strahls, statt, wenn die Projection in dem Hauptschnitt symmetrisch verläuft, also, wenn $\varphi_1 = -\varphi_2' = \frac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)$; sie ist daher aus (1c') bestimmt gemäss

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) \cdot \cos\vartheta = n \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \cos\vartheta'. \tag{10}$$

Für $\vartheta = 0$ wird die Bestimmungsgleichung und alle in sie eintretende Grössen dieselben, wie für einen Strahl im Hauptschnitt, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)_{\vartheta=0} = n \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha). \tag{8}$$

Daher allgemein, für andere Werthe von ϑ

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha)\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}. \tag{10a}$$

Nun ist stets $\vartheta' < \vartheta$, also $\cos\vartheta'/\cos\vartheta > 1$, daher auch stets

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) > \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha).$$

Folglich hat *a fortiori* das Minimum der Ablenkung eines ausserhalb des Hauptschnitts verlaufenden Strahls einen grösseren Betrag als das eines im Hauptschnitt verlaufenden[1]).

Krümmung der Spectrallinien. In Folge dieser Verhältnisse werden Strahlen, die von den Punkten einer zur Prismenkante parallelen Geraden ausgehen und unter verschiedenen Winkeln gegen den Hauptschnitt des Prismas verlaufen (z. B. sich alle in einem Punkte — etwa in der Pupille des Beobachters — kreuzen) verschiedene Ablenkung erfahren. Die geringste Ablenkung erfährt derjenige Strahl, welcher mit jenem Kreuzungspunkt in demselben Hauptschnitt des Prismas liegt, die anderen desto grössere Ablenkung, je grössere Winkel sie beim Einfall mit dem Hauptschnitt bilden. Wenn diese Strahlen die Axen von Büscheln sind, deren Spitzen in jener Geraden liegen, so wird das Bild der Geraden im Sehfeld gekrümmt erscheinen, einen Bogen bilden, dessen Scheitel in dem durch den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (z. B. der Pupille des durch das Prisma blickenden Auges) gehenden Hauptschnitt liegt[2]).

Die Ablenkungen der von einer zur Prismenkante parallelen Geraden aus in verschiedenen Neigungen zum Hauptschnitt einfallenden Strahlen werden nach Cornu[3]) durch dieselbe Formel dargestellt, wie die Ablenkung des im Hauptschnitt verlaufenden Strahls, wenn man dem brechenden Medium in Bezug auf jeden Strahl an Stelle von n den Brechungsexponenten

$$n_\vartheta = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\tan^2\vartheta}$$

zuertheilt.

Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Prismensysteme, deren Hauptschnitte zusammenfallen, und auf Strahlenbüschel, deren Axen in diesem Hauptschnitt verlaufen.

---

[1]) Vergl. Reusch a. a. O., pag. 245; Heath, Treatise, pag. 31.

[2]) Genauere Berechnung der Bildkurve bei Ditscheiner, Wiener Sitzber. 51, pag. 368. 1865; Pogg. Ann. 129, pag. 336. 1866; und Hepperger, Wien. Sitzber. 92, pag. 109. 1885.

[3]) Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. de l'Ec. norm. (2) 1, pag. 231. 1872. vergl. auch Christie, Note on the curvature of lines in the spectrum an the method of correcting it. Monthly Not. 34, pag. 263. 1875. Bemerkgn. hierzu v. Simms ibid. pag. 363. Crova, Etudes des aberrations des prismes et de leur influence sur les observations spectroscopiques. Ann. de chim. et de phys. (5) 22, pag. 513. 1881.

II. Abbildung durch Prismensysteme.

Beziehungen zwischen conjugirten Punkten. Astigmatismus.

Die Modificationen, welche ein von einem leuchtenden Punkte ausgehendes breites oder enges Büschel bei normaler wie schiefer Incidenz durch Brechung an einem Systeme von Ebenen — wie ein Prismensatz ein solches vorstellt — erfährt, werden ohne weiteres aus denjenigen bei der Brechung an Kugelflächen abgeleitet, indem man deren Radien sämmtlich gleich Null setzt. Die Möglichkeit einer Abbildung durch solche Brechungen, sowie deren Grenzen und Fehler lassen sich unmittelbar aus den früher angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall übertragen.

Bei senkrechter Incidenz des Haupstrahls ist die Abbildung in dem ihn umgebenden fadenförmigen Raume symmetrisch um ihn. Zwischen den Scheitelabständen von Objekt und Bild findet bei jeder Brechung die Beziehung statt (vergl. pag. 75 unten)

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Punkten ist constant $\gamma = n/n'$, ebenso die Lateralvergrösserung $\beta = +1$. In der That repräsentirt eine brechende Ebene und ebenso ein System von solchen den in einem früheren Abschnitt (pag. 58) hervorgehobenen Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Die Abbildung bei normaler Incidenz ist auf unendlich kleine Büschelöffnungen beschränkt. Ein homocentrisches Büschel endlicher Oeffnung ergiebt eine Kaustik[1]), deren beide Theile die geometrischen Oerter der ersten und zweiten Brennpunkte der von jenem Punkte ausgegangenen schiefen Elementarbüschel sind, in welche man das ganze Büschel zerlegt denken kann.

Die Abbildung kann für mehrere Ebenen eine solche bei normaler Incidenz natürlich nur dann bleiben, wenn diese sämmtlich einander parallel sind oder sehr kleine Winkel mit einander bilden. Andernfalls wird die Axe der Abbildung zu den Normalen der folgenden Flächen geneigt und wir haben es zu thun mit der

Abbildung bei schiefer Incidenz des Hauptstrahls. Das Büschel erfährt dann die pag. 82—95 beschriebene astigmatische Veränderung. Die Abbildung zerfällt in zwei getrennte, auf je eine — zur Einfallsebene senkrechte (sagittale) und ihr parallele (tangentiale) — Ebene beschränkte mit verschiedenen Grundfaktoren[2]). Die, in dem vorliegenden Falle, sehr leicht auch unmittelbar abzuleitenden Beziehungen zwischen den Scheitelabständen conjugirter Punkte und den Convergenzverhältnissen in ihnen folgen aus Gleichung (1) und (2) für den Sagittalschnitt zu

---

[1]) S. Literatur über Kaustiken, oben pag. 32, ferner u. A. O. Röthig, Probleme der Brechung etc., pag. 49. Leipzig 1876. J. Ritz, Beob. u. Berechn. über Brechung homoc. Lichts an n parall. Ebenen. Progr. Handelsschule, München 1879. Tait, Light, pag. 87.

[2]) Die Richtung der Brennlinien ist hier ebenso wie in dem allgemeineren früher behandelten Falle bestimmt: als senkrecht zum Hauptstrahl und in, bezw. senkrecht zu der Einfallsebene gelegen — bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Die genauere Ermittelung derselben — analog zu den gleichartigen pag. 35 erwähnten Untersuchungen von Matthiessen für Brechung an Kugelflächen — haben für den Fall eines Prismas in Luft, Reusch a. a. O. und besonders P. Zech, Ztschr. f. Math. u. Physik 24, pag. 168. 1879, vorgenommen.

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

und

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{n'},$$

also identisch mit den Beziehungen für senkrechte Incidenz des Hauptstrahls.

Im Tangentialschnitt wird gemäss Gleichung (3b) auf pag. 86

$$\frac{n'}{t'} = \frac{n}{t} \cdot \frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} \quad \text{oder} \quad t' = \frac{n'}{n} \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} t$$

und (12)

$$\gamma_t = \frac{du'}{du} = \frac{t}{t'} \frac{\cos i'}{\cos i} = \frac{n \cos i}{n' \cos i'}.$$

Ein homocentrisches Büschel ($t = s$) erhält also durch die einmalige Brechung unter den Winkeln i, i' die astigmatische Differenz

$$(t' - s') = \frac{n'}{n} t \left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} - 1\right). \tag{13}$$

Die Gleichungen (11) und (12) für die Bildorte gestatten den Astigmatismus zu berechnen, welchen ein Büschel durch die Brechung in einem System von p-Prismen erhält[1]).

Man hat hierzu zwei Systeme von je $2(p + 1)$ Gleichungen, nämlich für die

Sagittalstrahlen	Tangentialstrahlen
(14) $\left\| \begin{array}{l} s_k' = \frac{n_{k+1}}{n_k} s_k \\ s_{k+1} = s_k' - d_{k+1} \end{array} \right\|_{k=0}^{k=p}$	$\left\| \begin{array}{l} t_k' = \frac{n_{k+1}}{n_k} t_k \frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \\ t_k = t'_{k-1} - d_k \end{array} \right\|_{k=0}^{k=p}$ (15)

worin d_k der von dem betreffenden Hauptstrahl in dem Prisma zurückgelegte Weg ist und s_0 bezw. t_0 sowie n_0 die auf das erste, s_p', t_p', $n_{p+1} = n_p'$ die auf das letzte das Prismensystem begrenzende Medium bezogenen Werthe der betreffenden Grössen sind.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn wir $n_0 = n_p' = 1$ also ein beiderseits von Luft begrenztes Prismensystem annehmen,

$$s_p' = s_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k}, \tag{14a}$$

unabhängig von den i_k, i_k' und

$$t_p' = t_0 \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=0}^{k=p} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k}^{k=p}, \tag{15a}$$

daher für $s_0 = t_0 = a$

$$t_p' - s_p' = a \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=0}^{k=p} - 1\right] - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k}^{k=p} - 1\right]. \tag{16}$$

In dem oben betrachteten Falle der Minimalablenkung verschwindet der Faktor von a; die astigmatische Differenz wird dann unabhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes; sie hängt aber dann noch wesentlich mit von den Grössen d_k ab und verschwindet mit diesen[2]). Bei endlicher Grösse der d_k ist der

[1]) Es ist hier bequemer, diesen Astigmatismus direkt durch die Differenz der letzten Schnittweiten selbst zu bemessen und nicht — wie früher und wie das auch an sich rationeller wäre — nach der Differenz der Reciproken von s und t.

[2]) Vergl. die analogen Untersuchungen von A. Gleichen, Ztschr. f. Math. u. Phys. 34, pag. 161. 1889 (von denen ich erst nach Abschluss der meinigen (1886) Kenntniss erhielt).

Astigmatismus relativ zur Bild- oder Objektentfernung desto geringfügiger, je grösser diese sind und wird gleich Null bei unendlich entferntem Objekte — wie denn auch die unmittelbare Betrachtung zeigt, dass parallelstrahlige (telecentrische) Büschel durch die Brechung an Ebenen keine anderen Modificationen erfahren als solche ihrer Richtung und ihres Querschnitts. Hierin liegt ein wesentlicher Vortheil der Anwendung telecentrischer Büschel bei allen spectroskopischen Untersuchungen.

Das Bild eines vertikalen zur Kante der Prismen parallelen Spaltes in einem Spectroskop würde allerdings gemäss dem pag. 89/90 ausgeführten (vergl. Fig. 322) auch bei nicht aufgehobenem Astigmatismus scharf bleiben, wenn man das Beobachtungsfernrohr auf dasselbe entsprechend einstellte. Nur die horizontalen Endlinien des Spaltes würden verwaschen erscheinen. Doch bietet die Anwendung telecentrischer Büschel bei messenden Untersuchungen den weiteren Vortheil, dass man es alsdann nur mit Richtungen und deren Aenderungen zu thun hat, und dass man unabhängig wird von den gegenseitigen Entfernungen des Prismensystems, Collimators und Beobachtungsfernrohrs.

Uebrigens kann man den bei nicht telecentrischen Büscheln auftretenden Astigmatismus benützen, um mit Hilfe eines guten Prismas Collimator und Fernrohr auf ∞ einzustellen, ohne ein GAUSS'sches Ocular zu Hilfe zu nehmen. Geht man nämlich von der Stellung der Minimalablenkung des Prismas aus zu grösseren Einfallswinkeln, so muss man das Ocular des Fernrohrs herausziehen, um den vertikalen Spalt des Collimators deutlich sichtbar zu behalten, wenn derselbe von dem Objektiv zu weit entfernt war und hineinschieben, wenn er demselben näher als der Brennpunkt war. Beim Uebergang zu kleineren Einfallswinkeln umgekehrt (vergl. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, I. Aufl., pag. 257). Ein ähnliches Verfahren wurde von SCHUSTER vorgeschlagen. Phil. Mag. (5) 7, pag. 95. 1879.

Bei einem einfachen Prisma in Luft ist

$$s' = s_0 - \frac{d}{n}, \tag{14}$$

unabhängig von den Winkeln des Hauptstrahls

$$t' = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}\left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}\, t_0 - \frac{d}{n}\right), \tag{15*}$$

also unter Vernachlässigung der Dicken

$$t' = t_0 \frac{\cos^2 r \cdot \cos^2 i'}{\cos^2 i \cdot \cos^2 r'}$$

oder

$$t'\left(\frac{n^2-1}{\cos^2 i'} - 1\right) = t_0\left(\frac{n^2-1}{\cos^2 i} - 1\right), \tag{15**}$$

welche Gleichung das vorhin Gesagte erklärt.

Scheinbare Grösse der Bilder von Spalten.

Ein zum Hauptschnitt des Prismensystems senkrechter Spalt wird von demselben in seiner scheinbaren Länge unverändert abgebildet, denn wie wir gesehen haben, tritt jeder Strahl — also auch der Hauptstrahl des abbildenden Büschels — unter demselben Winkel gegen den Hauptschnitt aus dem Prismensystem aus, unter welchem er in dasselbe einfiel. Die scheinbare Breite des Spaltes aber wird durch das Prismensystem im Allgemeinen verändert, d. h. die angulare Breite des Spaltbildes gesehen von der Austrittsstelle an der letzten Fläche des Systems ist im Allgemeinen verschieden von der scheinbaren Breite des Spaltes selbst, gesehen vom Einfallspunkte des Büschels an der ersten Fläche. Der Zusammenhang beider Grössen wird dargestellt durch Gleichung (6) des vorigen Abschnitts, also bei einem Prismensystem in Luft ($n_0 = n_p' = 1$ angenommen)

$$\delta i_p' = \delta i' = \delta i_0 \prod \left(\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}\right)_{k=0}^{k=p}. \tag{17}$$

Aus dem dort Angeführten folgt, dass die scheinbare Breite des Spaltes ungeändert dieselbe ist im Bilde wie im Objekt, wenn der Hauptstrahl das Prismensystem im Minimum der Ablenkung durchsetzt, wenn also

$$\Pi\,(cos\,i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi\,(cos\,i_k')_{k=0}^{k=p}\,. \tag{17*}$$

In anderen Stellungen des Prismensystems kann die scheinbare Breite des Spaltes sowohl vermindert als vergrössert werden. Sie erscheint unendlich klein bei jeder Stellung des Prismensystems, bei welcher einer der Einfallswinkel $i_k = \frac{\pi}{4}$ ist, und jedesmal unendlich vergrössert, wenn einer der Austrittswinkel $i_k' = \pi$ ist, ausser wenn beides zugleich vorkommt.

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist

$$\delta i' = \delta i_0 \frac{cos\,i \cdot cos\,r'}{cos\,r \cdot cos\,i'}$$

oder

$$\frac{\delta i'}{\sqrt{\frac{n^2-1}{cos^2\,i'} - 1}} = \frac{\delta i_0}{\sqrt{\frac{n^2-1}{cos^2\,i} - 1}}\,. \tag{17a}$$

Hieraus folgt nebenbei, dass bei einem solchen Prisma

$$\delta i' : \delta i_0 = \sqrt{t_0} : \sqrt{t'}\,.$$

Die scheinbare Breite des Spaltes, betrachtet durch ein einfaches Prisma, wächst also von derjenigen Stellung, bei welcher der Hauptstrahl streifend einfällt — bei welcher sie $= 0$ ist — stetig bis zu derjenigen Stellung, wo der Hauptstrahl aus dem Prisma streifend austritt, in welchem Falle jene Breite $= \infty$ wird.

Planparallele Platten.

Dieselben bilden nur einen Specialfall der Prismen, nämlich denjenigen, wo der brechende Winkel gleich Null ist. Es ist daher der Einfallswinkel an irgend einer Fläche stets gleich dem Brechungswinkel an der vorangehenden. Haben erstes und letztes Medium gleiches n, so ist der austretende Strahl parallel dem eintretenden, ganz gleich, welches die Folge der brechenden Schichten ist. Der austretende Strahl ist gegen den einfallenden nur seitlich verschoben. Der Austrittspunkt des Strahls aus der $k$ten Platte ist von dem in diese Platte einfallenden Strahl um die Strecke

$$e_k = \frac{d_k\,sin(i_k - i_k')}{cos\,i_k'}$$

entfernt, wenn d_k die Dicke der Platte, i_k und i_k' Einfalls- und Brechungswinkel an ihrer vorderen Fläche sind. Der schliesslich austretende Strahl ist also von dem einfallenden um

$$e^{(p)} = \sum e_k = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k\,sin\,(i_k - i_k')}{cos\,i_k'} \tag{18}$$

entfernt.

Auf dieser Wirkung planparalleler Platten beruht das von Helmholtz erfundene Ophthalmometer, bei welchem die Austrittswinkel zweier unter verschiedenem Winkel einfallender Strahlen durch entgegengesetzt gleiche Drehungen zweier Glasplatten identisch gemacht werden[1]).

---

[1]) H. Helmholtz, Gräfe's Arch. f. Ophthalm. 2, pag. 3. 1854. Physiol. Opt. 1. Aufl., pag. 8. S. auch A. König, Ztschr. f. Instrkde. 3, pag. 153. 1883.

III. Die von Prismensystemen entworfenen Spectra.

Ausdehnung des Spectrums.

Wenn von einem leuchtenden Punkte oder Spalte Licht verschiedener Wellenlänge ausgeht, so wird das Bild desselben der Verschiedenheit des Brechungsexponenten entsprechend auch verschieden stark abgelenkt, ja sogar — gemäss den Gleichungen (14) (15) und (17) — in verschiedener Entfernung und verschiedener Breite erscheinen. Sehen wir von diesen letzteren Veränderungen zunächst ab, so ist die Variation der Ablenkung bestimmt durch ein System von Gleichungen, die ebenso wie (5) aus (2) abgeleitet werden, indem ausser Einfalls- und Brechungswinkeln auch die Brechungsindices, und zwar mit λ, als variabel angenommen werden. Also:

$$\left| \begin{array}{ll} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' + \sin i_k' \, dn_{k+1} = n_k \cos i_k \, di_k + \sin i_k \, dn_k & \\ \text{wo} \qquad di_{k+1} = di_k' & \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \tag{19}$$

Hieraus ergiebt sich für di_p', wenn wieder $n_0 = n_p' = 1$ und $dn_0 = dn_p' = 0$ angenommen wird und der Kürze wegen die Produkte der Cosinus der Einfalls- bezw. Brechungswinkel einfach mit Π resp. Π' bezeichnet werden

$$di_k' = di_0 \frac{\Pi_0^p}{\Pi'^p_0} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_{k-1}} dn_k \sin \alpha_k, \tag{19a}$$

oder

$$di_k' \Pi'^p_0 = di_0 \Pi_0^p - \sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^{k-2}_0. \tag{19b}$$

Man kann das System (19) auch in die Form bringen:

$$\left| \begin{array}{c} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' = n_k \cos i_k \, di_k - n_k \sin i_k \left(\dfrac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \dfrac{dn_k}{n_k} \right) \\ di_k = di_k' \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \tag{20}$$

und hieraus, indem man der Kürze wegen

$$n_k \sin i_k \left(\frac{dn_k'}{n_k'} - \frac{dn_k}{n_k} \right) = \mathrm{M}_k,$$

setzt, ableiten

$$di_p' \Pi'^p_0 = di_0 \Pi_0^p - \sum_{k=0}^{k=p} \mathrm{M}_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^{k-1}_0. \tag{20a}$$

In diesen Gleichungen ist stets $\Pi_m^p = 1$, wenn $m > p$ und $\Pi'^l_0 = 1$, wenn $l > 0$[1]).

Für das Minimum der Ablenkung ist nach Gleichung (7a) $\Pi_0^p = \Pi'^p_0$, also die Zunahme der Dispersion durch das Prismensystem $di_p' - di_0 = di' - di$ gegeben durch

$$di' - di = - \sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \Pi_{k+1}^p \Pi'^p_{k-2} \tag{19*}$$

oder

$$di' - di = - \sum_{k=0}^{k=p} \frac{\mathrm{M}_k \Pi'^{k-1}_0}{\Pi_0^k} = - \sum_{k=0}^{k=p} \frac{\mathrm{M}_k \Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_k}. \tag{20*}$$

Das Minimum der Ablenkung findet u. A. statt, wenn die Ablenkung gleich Null, d. h. das Prismensystem ein sogen. geradsichtiges (euthyoptrisches, *P. à vision directe*) ist. Auf ein solches haben also (19*) und (20*) jedenfalls Bezug.

---

[1]) Aehnliche Entwickelungen s. bei E. Block, Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen. Diss. Dorpat 1873.

Nur bei dieser Stellung des Prismensystems ist die Zunahme der Dispersion $(di' - di)$ unabhängig von der beim Eintritt der Büschel in das System bereits vorhandenen (di).

Bedingung der Achromasie. Das Prismensystem verursacht keine Zunahme der Dispersion, es ist »achromatisch« wenn

$$di(\Pi'^{p}_{0} - \Pi^{p}_{0}) - \sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0 \qquad (20^{**})$$

also, falls beim Eintritt in das Prismensystem keine Dispersion vorhanden war, $di = 0$ ist, wenn

$$\sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0,$$

d. h.

$$\sum n_k \sin i_k \left(\frac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{dn_k}{n_k}\right) \Pi (\cos i_k)^{p}_{k+1} \Pi (\cos i_k')^{k-1}_{0} = 0 \qquad (21)$$

ist.

In letzterem Falle bewirkt das Prismensystem nur eine Ablenkung der Hauptstrahlen, welche für alle Wellenlängen die gleiche und durch Gleichung (3) bestimmt ist.

Jeder der beiden zuletzt erwähnten Effekte: Dispersion ohne Ablenkung des Strahls mittlerer Wellenlänge und Ablenkung ohne Dispersion lässt sich bereits mit einem aus zwei Einzelprismen zusammengesetzten System erreichen; diese Prismen können sogar aus der gleichen Substanz bestehen, wenn man keine anderen einschränkenden Bedingungen stellt. Stellt man als solche aber die, dass die einander zugewandten Prismenflächen einander parallel seien (damit man die Prismen durch einen Kitt fest mit einander verbinden könne, wodurch zugleich die Lichtverluste an diesen Flächen erheblich gemindert werden), so müssen die Substanzen der Prismen verschiedenes Zerstreuungsvermögen haben, damit der eine oder andere Effekt erreichbar sei. Nur in dem, den thatsächlich vorliegenden Verhältnissen meist sehr fernliegenden Grenzfalle unendlich kleiner Prismen- und Einfallswinkel lassen sich die in Betracht zu ziehenden Verhältnisse bequem übersehen. In den praktisch vorkommenden Fällen muss man daher gewöhnlich die weniger übersichtlichen Gleichungen (3) und (20*) bezw. (21) anwenden.

Für kleine Prismen- und Brechungswinkel hatten wir die Ablenkung

$$\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} (n_k - 1)\alpha_k \qquad (9a)$$

gefunden, also bei einem aus zwei Prismen zusammengesetzten System

$$\varepsilon = (n_1 - 1)\alpha_1 + (n_2 - 1)\alpha_2.$$

Die Dispersion, welche ein solches System hervorruft, kann daher direkt durch die Aenderung der Ablenkung, die es hervorbringt, ausgedrückt werden

$$d\varepsilon = dn_1 \alpha_1 + dn_2 \alpha_2.$$

Wie man sieht, sind dies Gleichungen von ganz derselben Form wie sie für die Möglichkeit einer Achromasie von Linsensystemen (pag. 140) in Betracht kamen. In der That war historisch (Klingenstierna, Dollond, Clairaut, Boscovich etc.) die Möglichkeit und Art und Weise der Achromatisirung von Prismensystemen maassgebend für die von Linsencombinationen. Man hat also für ein achromatisches Prismenpaar $(d\varepsilon = 0)$ die Winkel α_1 und α_2 so zu wählen, dass

$$\alpha_2 : \alpha_1 = - dn_1 : dn_2$$

und wenn dabei eine bestimmte Ablenkung ε hervorgebracht werden soll, so bestimmen sich α_1 und α_2 — wie früher bei einem Linsensystem von der Stärke $\varphi = 1/f$ die Grössen — k_1 und k_2 zu

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{dn_1(\nu_1 - \nu_2)}; \qquad \alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{dn_2(\nu_1 - \nu_2)}. \tag{22}$$

Soll umgekehrt die Dispersion $d\varepsilon$ ohne Ablenkung erzielt werden, so muss sein

$$\alpha_1 = -\frac{d\varepsilon}{dn_1}\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}; \qquad \alpha_2 = +\frac{d\varepsilon}{dn_2}\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}, \tag{23}$$

wo wie früher

$$\nu = \frac{n-1}{dn}$$

gesetzt ist.

Das secundäre Spectrum hat auf die durch solche dünne Prismen hervorgerufene Dispersion oder die mittelst ihrer hergestellte Achromasie einen ganz analogen Einfluss wie bei Linsen; einer Brennpunktsdifferenz dort entspricht eine Winkelabweichung hier. Es braucht deshalb auf diese Verhältnisse hier nicht nochmals eingegangen zu werden. —

Die bei dünnen Prismen von unendlich kleinen Winkeln stattfindenden Verhältnisse werden oft ohne weiteres auf Prismen von endlichen Winkeln übertragen. Dies ist aber, wie hier ausdrücklich bemerkt werden mag, ganz unzulässig. Insbesondere die Grösse und der Gang der Dispersion hängen schon bei einer einzigen Brechung in erheblichem Grade von dem Einfallswinkel ab, und werden bei den weiteren Brechungen, wie wir oben gesehen haben, auch noch mit durch den vorher erhaltenen Betrag bedingt. Es sind daher, wie eine genauere Untersuchung zeigt, weder die von zwei Prismen gleicher Substanz aber verschiedenen endlichen Winkels — selbst in gleicher Stellung, z. B. der der Minimalablenkung — hervorgebrachten Spectra einander »proportional«, noch haben solche von Prismen verschiedener Substanz immer verschiedenen Gang, wenn die wahren Dispersionen dieser Substanzen in den verschiedenen Theilen des Spectrums disproportional sind; sondern es hängen diese Verhältnisse eben sehr von dem Betrage und der Folge der Brechungen ab. Man kann daher, wie schon bemerkt, sehr wohl Prismenpaare aus optisch gleichen Substanzen herstellen, welche nur geradsichtig oder nur achromatisch sind, und im ersteren Falle eine endliche Dispersion, im letzteren Falle eine endliche Ablenkung haben (ersteres sogar, indem man einem solchen Prisma ein anderes genau gleiches mit umgekehrter Kante derart gegenüberstellt, dass der Strahl unter demselben Winkel in dieses einfällt, unter welchem er aus jenem austrat). Es folgt hieraus aber keineswegs, dass z. B. im letzteren Falle kein secundäres Spectrum vorhanden sei[1]). Nur wenn zwei Prismen von gleicher Substanz und gleichem Winkel mit einander so zusammengestellt werden, dass die inneren und äusseren Flächen je einander parallel sind, so dass das Prismenpaar gewissermaassen eine planparallele Platte wird, verschwinden nothwendig immer gleichzeitig Ablenkung, Dispersion und secundäres Spectrum.

Bei einem Prisma von endlichem Winkel in Luft bestimmt sich die Dispersion aus (19) oder (20) zu

$$di' \frac{\cos r}{\cos r'} = di \frac{\cos i}{\cos i'} - \frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'}. \tag{24}$$

Im Minimum der Ablenkung, wo $i = -i'$, $r = -r'$ wird die Zunahme der Dispersion, unabhängig von der beim Eintritt vorhandenen

$$di' - di = -2\frac{dn}{n} tg\, i = -d\varepsilon. \tag{24*}$$

War beim Eintritt des Büschels in das Prisma keine Dispersion vorhanden, $di = 0$, so ist für jede beliebige Stellung des Prismas die Dispersion beim Austritt

$$di' = -\frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r}; \tag{24a}$$

dieselbe wächst also von einem gewissen, zwischen streifendem Eintritt und Minimalablenkung liegenden Minimum stetig mit dem Austrittswinkel des mittleren Strahls bis zu dem, bei streifendem Austritt erreichten Werthe ∞[2]).

---

[1]) Diese Verhältnisse hebt z. Th. schon BREWSTER hervor (Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 361 ff.), wie ich nachträglich gefunden habe.

[2]) Vergl. MOUSSON, POGG. Ann. 112, pag. 428. 1861. THOLLON, Compt. rend. 89, pag. 93. 1879.

Diese Ausbreitung in einen grösseren Winkelraum ist aber keineswegs genügend, um eine entsprechende Leistungsfähigkeit des Prismas oder Prismensystems zu verbürgen. Als Maass dieser darf der kleinste Unterschied der Wellenlänge gelten, den benachbarte Spectrallinien haben dürfen, damit sie durch das Prismensystem eben noch getrennt werden können. Hierzu ist erstens vom geometrisch optischen Standpunkte eine gewisse

Reinheit des Spectrums erforderlich. Durch das Prismensystem werden von dem lichtgebenden Spalte so viele Bilder entworfen, als in seinem Lichte Wellenlängen vorhanden sind. Wenn die Breite der Spaltbilder $\delta i'$ grösser ist als die Dispersion di' für einen bestimmten Unterschied $d\lambda$ der Wellenlängen, so decken sich die Spaltbilder der Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ zum Theil, und das Spectrum erscheint entsprechend unrein. Als Maass der Reinheit R des von einem gegebenen Prismensystem gelieferten Spectrums können wir also nach HELMHOLTZ[1]) das Verhältniss

$$R = \frac{di'}{d\lambda} : \frac{\delta i'}{\delta i} \tag{25}$$

annehmen. Wir haben hierfür nach (17) und (19a) — $di_0 = 0$ vorausgesetzt —

$$R^{(p)} = -\sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \frac{\Pi_0'^{k-2}}{\Pi_0^k} \tag{25a}$$

oder nach (17) und 20a)

$$R^{(p)} = -\sum_{k=0}^{k=p} \frac{M_k \Pi_0'^{k-1}}{\Pi_0^k}. \tag{25b}$$

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist hiernach

$$R^{(1)} = -\frac{dn \cdot \sin \alpha}{\cos i \cdot \cos r'}. \tag{25*}$$

Der Vergleich dieses letzteren Ausdrucks mit dem für die Dispersion (24a) eines einfachen Prismas lehrt, dass die Reinheit des von einem solchen gelieferten Spectrums von einem zwischen streifendem Austritt und Minimalablenkung gelegenen Minimum an nach beiden Seiten stetig zunimmt und bei streifendem Einfall (von der dicken Seite des Prismas her) sich dem Werthe ∞ nähert.

Das Trennungs-(Auflösungs-)Vermögen eines Prismensystems hängt jedoch, nach den Grundsätzen der Undulationstheorie betrachtet, nicht allein von der Winkeldifferenz ab, welche durch die Dispersion den verschiedenfarbigen Bildern des Spaltes ertheilt wird, sondern wesentlich mit von der Breite der Büschel, welche die Abbildung des Spaltes vermitteln. Ohne hier auf diesen Gegenstand — welcher in einem anderen Abschnitt dieser Darstellung ausführlich behandelt wird — näher einzugehen, mag nur soviel bemerkt werden, dass das Bild einer selbstleuchtenden Linie, vermittelt durch Büschel, deren Breite, senkrecht zur Richtung der Linie $= q$, und deren Wellenlänge $= \lambda$ ist, — durch welche optische Mittel auch immer es erzeugt sein mag — niemals wieder eine Linie, sondern immer ein Streifen ist, dessen Helligkeit nach den Rändern allmählich abfällt. Zurückbezogen auf das Objekt — wie wir dies früher bei der Berechnung der Aberration gethan haben — ist die Länge des Bildes (Höhe des Streifens) nahezu gleich der der ursprünglichen Linie, die Ausbreitung

[1]) Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 259. HELMHOLTZ nimmt als Maass für die Reinheit des Spectrums die Grösse $R^* = (di'/d\lambda) : \delta i'$, so dass sein R^* gleich unserem $(R/\delta i)$. Uns lag jedoch näher, in R eine nicht sowohl für das Spectrum, als für das es erzeugende Prismensystem charakteristische Grösse zu definiren.

des Lichtes senkrecht dazu, also die Breite des Bildes nur eine Function von q und λ und zwar *caet. par.* mit wachsendem q abnehmend, mit wachsendem λ wachsend. Von zwei benachbarten Lichtlinien — seien dieselben reell als Objekte vorhanden oder virtuell, z. B. durch Dispersion, aus einer einzigen entstanden — entwirft das optische System als Bilder zwei solche Streifen, welche sich bei ungenügender Grösse von q oder unzureichender Kleinheit von λ zum Theil decken. Die Intensität des Bildes in diesen sich deckenden Theilen ist gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbilder an den betreffenden Stellen.

Eine genauere Betrachtung des Verlaufs der Intensität in den Einzelbildern nach den Grundsätzen der Diffractionstheorie zeigt nun, dass bei solcher Superposition zweier — und zwar einander gleich vorausgesetzter — Spaltbilder eine merkliche Intensitätsverminderung zwischen den beiden den Bildmitten entsprechenden Intensitätsmaximis (nämlich auf etwa 0·8 dieser) erst dann vorhanden ist, wenn der Winkel di', unter welchem die beiden Bilder (Spectrallinien) von der die Büschel begrenzenden rechteckigen Oeffnung aus erscheinen, grösser ist als derjenige, unter welchem die Wellenlänge λ des wirksamen Lichtes aus einer dem Querdurchmesser der Oeffnung q' gleichen Entfernung gesehen erscheint, also wenn

$$di' > \frac{\lambda}{q'}\,^{1)}. \tag{26}$$

Mit der Brechung eines parallelstrahligen Büschels durch ein Prismensystem ist nun im Allgemeinen auch eine Veränderung seines Querschnitts im Hauptschnitt verbunden, welche nach obigem neben der Breite der in das System eintretenden Büschel hier mit in Anschlag zu bringen ist.

Durch jede Brechung an einer Ebene wird nämlich, wie leicht ersichtlich, der Querschnitt q des Büschels in dem Verhältniss der Cosinus der Brechungswinkel geändert, also

$$\frac{q_k'}{q_k} = \frac{\cos i_k'}{\cos i_k}.$$

Da für ein Prismensystem $q_{k+1} = q_k'$, so haben wir für die Veränderung der Breite eines Büschels durch die Brechung in einem solchen System

$$\frac{q_p'}{q_0} = \frac{q'}{q} = \frac{\Pi(\cos i')_0^p}{\Pi(\cos i)_0^p} = \frac{\Pi'^p_0}{\Pi^p_0} = \frac{\delta i}{\delta i'}, \tag{27}$$

— wie übrigens auch aus dem LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Satze unmittelbar gefolgert werden könnte.

Damit das durch die Dispersion auf die Winkeldifferenz di' gebrachte Linienpaar getrennt erscheinen könne, muss also die Breite des abbildenden — aus dem Prismensystem austretenden — Büschels, q', der Bedingung (26) entsprechen.

Diese geht demnach, unter Berücksichtigung von (25) und (27) in die bemerkenswerthe Beziehung über

$$q > \frac{\lambda}{R\,d\lambda} \quad \text{oder auch} \quad R > \frac{\lambda}{q\,d\lambda}. \tag{27a}$$

Für q darf nicht der Querschnitt des in das Prismensystem überhaupt eingetretenen Büschels, also die Grösse $b_0 \cdot \cos i_0$ gesetzt werden (wo b_0 die von dem Büschel getroffene Länge der ersten Prismenfläche ist), sondern nur derjenige Theil desselben, welcher nicht durch die Begrenzung einer der folgenden Flächen nachträglich eine Abblendung erfährt — was wohl zu beachten ist.

Bei einem dreitheiligen symmetrischen Prismensatz *à vision directe*, wie solche häufig an-

---

[1]) RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 9, pag. 266. 1879.

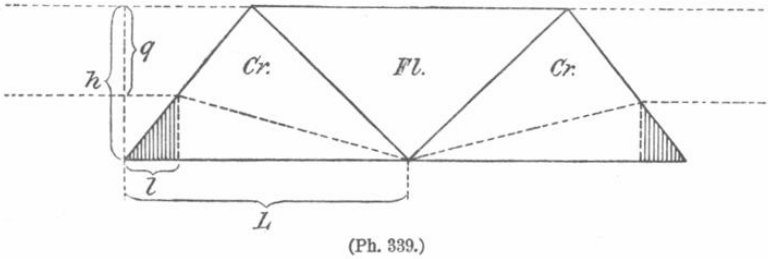
gewandt werden, ist z. B. das Verhältniss dieses nutzbaren Querschnitts q zu dem thatsächlichen, d. h. zu der Höhe der Prismen, h, in dem Verhältniss (s. Fig. 339)

$$\frac{q}{h} = \frac{\cos i_0 \cos i_1}{\cos i_0 \cos i_1 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \varepsilon_0}$$

oder der unbenützbare Theil der Höhe, $h-q$, zum benutzbaren in dem Verhältniss

$$\frac{h-q}{q} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \varepsilon_0}{\cos i_0 \cdot \cos i_1}.$$

Man kann daher die Prismen durch einen zur Einfallsrichtung des Büschel senkrechten Schnitt um den unbenützten Theil verkürzen. Es kann auf diese Weise der Prismensatz an



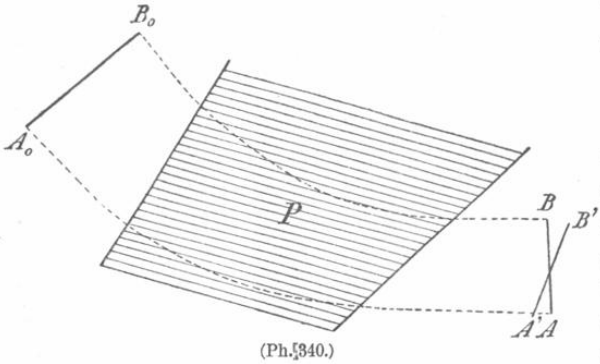
(Ph. 339.)

seiner breiteren Basis beiderseits um Stücke l verkürzt werden, welcher zur unverkürzten Länge dieser Basis L in dem Verhältniss stehen

$$\frac{l}{L} = n \cdot tg\, i_0' \cdot \sin \varepsilon_0.$$

Der combinirte Einfluss von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismensystems lässt sich nach RAYLEIGH[1]) unmittelbar aus den Principien der Undulationstheorie berechnen und in ganz allgemeiner Form darstellen. Wird durch die Brechung in dem System P die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ des einfallenden Lichtes in die Lage AB gebracht, so ist sowohl der Lichtweg von A_0 bis A, als auch derjenige von B_0 bis B ein Minimum, und beide sind einander gleich, also

$$\int_{A_0}^{A} n\, dl = \int_{B_0}^{B} n\, dl.$$



(Ph. 340.)

Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A' B'$ übergeführt (Fig. 340). Die Wege, welche die Strahlen derselben hierbei beschreiben, sind nun allerdings verschieden von den der Wellenlänge λ entsprechenden. Die Wegunterschiede sind aber vermöge der Minimumeigenschaft der Wege $A_0 \ldots A$ und $B_0 \ldots B$ bis auf Grössen höherer Ordnung verschwindend gegen die Wege selbst. Die optischen Längen von A_0 bis A' und B_0 bis B' können daher für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entlang denselben geometrischen Wegen berechnet werden wie für λ.

Die Differenz der optischen Längen von A_0 und B_0 nach A und B ist daher für $\lambda + d\lambda$ gleich

$$\int_{B_0}^{B} dn\, dl - \int_{A_0}^{A} dn\, dl$$

und diese Grösse dividirt durch den Querschnitt des austretenden Bündels, AB

[1]) l. c., pag. 271.

$= q'$ ist gleich dem Winkel, den die beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Wellenflächen mit einander einschliessen, d. h. gleich der Dispersion di'.

Bei einem System von Prismen gleicher Substanz z. B. ist hiernach die Dispersion

$$di' = dn \frac{e_2 - e_1}{q'}, \tag{28}$$

wo e_2 und e_1 die von den äussersten Randstrahlen des Büschels in Glas zurückgelegten Strecken sind. Geht der eine dieser Randstrahlen durch lauter Prismenkanten, so ist $e_1 = 0$, daher

$$di' = dn \frac{e}{q'}. \tag{28a}$$

Stehen die Prismen alle im Minimum der Ablenkung, so bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis. Die Dispersion ist also hier unabhängig von der Zahl und den brechenden Winkeln der einzelnen Prismen ausgedrückt.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spectrum auflösen könne, deren angularer Abstand $di' = \vartheta$ ist, muss nach dem oben ausgeführten

$$q' > \frac{\lambda}{\vartheta},$$

daher

$$e > \frac{\lambda}{dn}, \tag{29}$$

wo dn die den beiden Linien entsprechende Differenz der Indices ist. Es ist z. B. die zur Auflösung der Haupt-Doppellinie des Natriumlichtes nothwendige Basisdicke eines Prismas aus englischen Extradense Flint ($n_D = 1{\cdot}650$ $n_D - n_c = 0{\cdot}0055$) in der Stellung der Minimalablenkung fast genau gleich 1 *cm*.

Die Helligkeit des Spectrums an irgend einer Stelle desselben hängt davon ab, von wie viel Wellenlängen Licht an diese Stelle gelangt. Bei irgend einer Breite des Spaltes δi kommt nun an eine Stelle seines Bildes $\delta i'$ Licht von denjenigen Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$, deren Dispersion di' gleich der Breite jenes Spaltbildes $\delta i'$ ist. Die Helligkeit h' des Spaltbildes für irgend eine homogene Farbe ist nun, da seine Höhe bei der Brechung in dem Prismensystem unverändert bleibt, umgekehrt proportional der Breitenänderung des Spaltes durch die Brechung, also, wenn h die ursprüngliche Helligkeit des Spaltes selbst ist,

$$h' : h = \delta i : \delta i'.$$

Die Helligkeit des Spectrums für die Wellenlänge λ ist daher, wenn wir annehmen, dass die Intensität in ihm von λ bis $\lambda + d\lambda$ constant sei

$$H = h' \cdot d\lambda = h \frac{\delta i}{\delta i'} d\lambda,$$

worin $d\lambda$ durch die Bedingung bestimmt ist, dass das ihm entsprechende $di' = \delta i'$ sei. Daraus folgt unter Benützung des Ausdrucks (25) für die Reinheit des Spectrums, dass das betreffende

$$d\lambda = \frac{\delta i}{R}$$

ist, und

$$H = \frac{\delta i}{\delta i'} \frac{h \cdot \delta i}{R} = \frac{h \delta i}{di'/d\lambda}. \tag{30}$$

Im Minimum der Ablenkung ist $\delta i = \delta\ i'$ also

$$H = \frac{h \delta i}{R}, \tag{30*}$$

d. h. die Helligkeit des Spectrums — abgesehen von den durch Reflexion und Absorption des Lichtes beim Durchgang durch das Prismensystem erlittenen Verlusten — ist dann direkt proportional der Helligkeit des in den Spalt eindringenden Lichtes und umgekehrt proportional der Reinheit des Spectrums[1]).

Durch die Anwendung eines Fernrohrs zur Beobachtung der Spectra werden die meisten der oben bewiesenen Relationen, namentlich die über Reinheit, Helligkeit und Auflösungsvermögen von Prismensystemen nicht wesentlich berührt. Voraussetzung hierbei ist natürlich, dass die Apertur des Fernrohrs die des Prismensystems übersteigt, anderenfalls wäre für die Bestimmung der Helligkeit und des Trennungsvermögens die erstere statt der letzteren maassgebend. Im übrigen erscheint das durch ein Fernrohr gesehene Spectrum nur ebenso verändert, wie jedes andere Objekt, wovon an anderer Stelle näher die Rede sein wird[2]). Man kann die von Prismen erzeugten Spectren aber auch in anderer Weise beobachten, wenn die wirksamen Büschel nicht telecentrische sind, durch eine Lupe oder dergl. Aus den oben angeführten Gründen verwendet man die Prismen alsdann im Minimum der Ablenkung.

Die Helligkeit des Spectrums wird, ausser durch diese geometrischen Umstände, noch durch die mit jeder Reflexion und Brechung verbundenen, sowie die beim Durchgang durch die Prismen (durch Absorption) erfahrenen Lichtverluste verändert. Die durch theilweise Reflexion des Lichtes für das Spectralbild verloren gehenden Mengen lassen sich aus den Winkeln, unter denen, und den Brechungsexponenten der Medien, an denen jene Reflexionen stattfinden nach den sogen. FRESNEL'schen Intensitäts-Formeln berechnen. Die Grösse des Lichtverlustes durch Absorption hängt von der Grösse des in dem fraglichen Medium zurückgelegten Weges und von dessen Absorptionsvermögen ab. Hiernach lassen sich für einfachere Fälle allgemeine Regeln ableiten[3]).

IV. Die üblichsten Constructionsformen.

Es sind dies

1) Das einfache Prisma, dessen Eigenschaften wir wiederholt näher betrachtet haben. Seine Dispersion in der Stellung der Minimalablenkung wächst nach (24a), welche Gleichung auch die Form erhalten kann

$$d\varepsilon = -2\,dn\,\frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha/2}}$$

mit dem brechenden Winkel des Prismas, α, ist daher nach dem pag. 154 ausgeführten auf einen mässigen Spielraum beschränkt. Bei einem 60° Prisma von schwerem Flintglase beträgt dieselbe von C bis F ca. 2°. Man verwendet deshalb zur Erziehung einer grösseren Dispersion oft

2) Viele gleiche Prismen, die sämmtlich in der Stellung der kleinsten Ablenkung sich befinden. Es ist dann natürlich auch die Ablenkung des ganzen Systems ein Minimum und sogar das kleinste mit demselben erreichbare. Um diese Minimalstellung während der Beobachtung für jede betrachtete

---

[1]) Diese Sätze wurden für ein einzelnes Prisma zuerst bewiesen von HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 260.

[2]) vergl. auch F. LIPPICH, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 49. 1881.

[3]) S. PICKERING, Am. Journ. of Sci. 45. 1868. Phil. Mag. (4) 36, pag. 39. 1868; s. auch F. LIPPICH, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 61. 1881; ROBINSON, Observatory 1882, pag. 53; KRÜSS, Ztschr. f. Instrkde. 5, pag. 185. 1885.

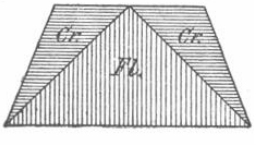
Spectralregion automatisch herzustellen, sind seit O LITTROW[1]) mancherlei sinnreiche Mechanismen in Anwendung gebracht worden[2]).

3) Von LITTROW rührt auch der Vorschlag her, dasselbe Prismensystem Licht mehrmals durchsetzen zu lassen. LITTROW liess das Büschel in sich selbst reflectiren; später zog man nach dem Vorschlag von C. A. YOUNG und LOCKYER vor, die Prismen so viel mal höher zu machen als das Büschel sie durchsetzen soll und führte es durch je zwei Reflexionen senkrecht zum Hauptschnitt aus einer Etage in die andre über[3]).

4) Wenn die Prismen durch Lufträume von einander getrennt sind, so ist der Lichtverlust durch partielle Reflexionen ein relativ grosser. Ausserdem müssen solche Prismen durch besondere mechanische Vorrichtungen in die gewünschte Stellung (z. B. der Minimalablenkung für irgend eine Wellenlänge) gebracht bezw. in derselbsn festgehalten werden, und endlich ist für manche Anwendung die hier mit der Dispersion Hand in Hand gehende Ablenkung unbequem. Allen drei Uebelständen hilft die von AMICI (1860) erfundene Combination von Prismen verschiedenen Brechungs- und Zerstreuungsvermögens mit verkitteten (parallelen) zugewandten Flächen ab, bei welchen die Ablenkung für irgend eine mittlere Wellenlänge aufgehoben ist, während ein gewisser Betrag von Dispersion bestehen bleibt. Wir haben die Theorie dieser geradsichtigen Prismen oder P. »*à vision directe*« oben näher betrachtet.

AMICI verwendete zuerst ein Flintglasprisma zwischen zwei mit ihrer Kante entgegengesetzten gleichen Prismen von Crownglas eingekittet (s. Fig. 339 oben). Andere suchten die Dispersion zu steigern durch Anwendung zweier Flintglasprismen und dreier Crownglasprismen. Derartige Combinationen sind oft beschrieben worden (s. die Literaturübersichten in den Werken von KAYSER und SCHEINER).

5) Wo auf die Geradsichtigkeit der Prismencombination kein besonderer Werth gelegt wird kann man die Dispersion erheblich steigern, indem man nach einer von RUTHERFURD[4]) wieder aufgenommenen Idee BROWNING's einem Prisma von hohem Zerstreuungsvermögen einen Winkel giebt, bei welchem (gemäss pag. 154) aus Luft überhaupt kein Strahl mehr durchtreten könnte und an dieses beiderseits Prismen von möglichst niedrigem Zerstreuungsvermögen ansetzt (Fig. 341), welche gerade ausreichen, um den Durchtritt des Lichtes zu ermöglichen, die Dispersion aber nur wenig herabsetzen. Gegenüber einem einfachen Prisma bieten diese nach RUTHERFURD benannten — 3- oder 5-fachen — Prismensätze den Vortheil erheblich grösserer Dispersion bei wenig vermehrtem Lichtverlust, da nur zwei Reflexionen an Luftgrenzen vorkommen. Ausserdem verändern sich die stark zerstreuenden Flintgläser leicht an der Luft, wogegen sie hier durch die aufgekitteten Crown-



(Ph. 341.)

[1]) Ber. Wien. Akad. 47, pag. 26. 1862. Amer. Journ. (2) 35, pag. 413.

[2]) S. z. B. Browning Monthly Not. 30, pag. 198 u. 214. 1871. H. KRÜSS, Ztschr. für Instrkde. 5, pag. 232. 1885; 8, pag. 388. 1888; 10, pag. 97. 1890. An ersterer Stelle discutirt K. des näheren die Vortheile und Bedingungen der Anwendung solcher Mechanismen. S. auch die Lehrbücher der Spectralanalyse von SCHELLEN, 2. Aufl., Braunschw. 1883, pag. 223, H. KAYSER, Berlin 1883, pag. 39; v. KONKOLY, Halle 1890, pag. 175 und SCHEINER, Leipzig 1890, pag. 82 ff., wegen der verschiedenen Arten der Adoptirung solcher und der im folgenden anzuführenden Apparate an die jeweilig in Frage stehende Beobachtungsmethode.

[3]) S. die angeführten Lehrbücher der Spectralanalyse.

[4]) Amer. Journ. of Sci. (3) 35, pag. 71, 407. 1865.

prismen geschützt sind, und endlich finden die Brechungen unter geringeren Winkeln statt, als bei einfachen Prismen von etwa 60°, wodurch die Ansprüche an die Ausführung der Flächen entsprechend geringere werden.

Da die Grösse der Dispersion wesentlich von der Differenz der Zerstreuungsvermögen der angewandten Substanz abhängt, manche Flüssigkeiten aber sich durch ausserordentlich hohes Zerstreuungsvermögen auszeichnen, so wendet man mit Vortheil oft mit Flüssigkeiten gefüllte Hohlprismen an. Früher diente hierzu meist der Schwefelkohlenstoff, auf den BREWSTER die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Von den vielen anderen Flüssigkeiten, die später vorgeschlagen worden sind, sei nur der von WERNICKE[1]) empfohlene Zimmtsäureäthyläther genannt. Mit diesem ist ein Rutherfurdsches Prismensystem construirbar, welches etwa dreimal so starke Dispersion besitzt, als ein einfaches Prisma aus schwerem Flint.

S. CZAPSKI.

Die Begrenzung der Strahlen und die von ihr abhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente.

Bei einer Abbildung, wie der pag. 40 ff. betrachteten — wo alle von je einem Punkte des Objektes ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, vereinigt werden — wäre es völlig gleichgiltig, welche von allen möglichen Strahlen thatsächlich die Abbildung bewirken. Wenigstens würden Lage, Grösse und dioptrische Vollkommenheit des Bildes hierdurch gar nicht berührt. Die Betrachtungen der folgenden Abschnitte jedoch haben gezeigt, dass bei den uns vorzüglich zu Gebote stehenden Verwirklichungsweisen optischer Abbildung es sehr wohl darauf ankommt, an welcher Stelle die spiegelnden und brechenden Flächen von den Strahlenbüscheln getroffen werden, sowie welche Neigungen zur optischen Axe und welche Oeffnungen diese Büschel haben. Der Giltigkeitsbereich einer Abbildung, sowohl als die Möglichkeit und die Mittel zu seiner Erweiterung erwiesen sich als wesentlich durch die genannten Momente mit bedingt.

Für andere bald zu erwähnende Eigenschaften der optischen Bilder würden dieselben aber selbst dann eine Rolle spielen, wenn die Abbildung jene ideal vollkommene eines unendlichen Raumes in einen anderen eben solchen wäre. Wir werden im Folgenden meist stillschweigend die Voraussetzung gelten lassen, dass die Abbildung zwar nicht jene geometrisch aber doch eine dioptrisch vollkommene sei, welche den Bedingungen und Einschränkungen unterliegt, die wir in dem betreffenden Abschnitt dieser Darstellung statuirt haben; also wenn sie mittels weiter Büschel erfolgt, dass in diesen die sphärischen und chromatischen Aberrationen aufgehoben und das Sinusgesetz erfüllt sei; wenn mittelst enger Büschel, dass diese frei von Astigmatismus seien, und dass ihre Axen im Objekt- und Bildraum constantes Tangentenverhältniss besitzen; dass ebenen Objekten ebene Bilder entsprechen u. s. w. Die Einschränkungen, welche die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten Beziehungen durch die in Wirklichkeit stets vorhandenen Unvollkommenheiten der Abbildung erfahren, sind — für die Praxis zwar oft wichtig genug — doch zu specieller Natur, um sie in dieser allgemeinen Uebersicht näher zu berücksichtigen.

---

[1]) Zeitschr. f. Instrkde. 1, pag. 353. 1881. S. auch ZENGER, ibib., pag. 263. THOLLON, Compt. rend. 86, pag. 329, 395. 1878. Journ. de phys. 8, pag. 73. 1879.