universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Bilder. Abh. Münch. Akad. 17, pag. 519—587. 1891 (Untersuchg. der Brennfläche der von einem ausseraxialen Objektpunkt ausgegangenen Strahlen nach dem Durchgang durch ein centr. System. Zusammenhang der Durchstossungspunkte in der Diaphragmenebene mit denen in einem das Bild auffangenden Schirm. Intensitätsvertheilung im Zerstreuungsbilde bei verschiedener Lage der Blenden und der Schirmebene).

Die übrigen auf SEIDEL's Publikationen folgenden Abhandlungen nehmen merkwürdigerweise auf diese keinen Bezug und stehen ihr grösstentheils in der Schärfe und dem Umfang der Behandlung nach. Das sonst vortreffliche Werk von

O. F. MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici. Pisa 1859, fusst noch ganz auf den Arbeiten von LAGRANGE, SANTINI und BIOT, ohne Kenntniss selbst derer von GAUSS. Ferner

H. ZINKEN-SOMMER, Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme, Braunschweig 1870.

P. A. HANSEN, Dioptr. Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Kugelgestalt. Abh. Leipz. Akad. 10, pag. 697—784. 1874.

W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern etc. Leipzig 1874 (bes. § 4).

W. SCHEIBNER, Dioptr. Unters. insbes. über das HANSEN'sche Objectiv, Abh. Leipz. Akad. 11, pag. 541—620. 1876.

K. MOSER, Die Grundformeln der Dioptrik für den prakt. Gebrauch entwickelt. Sitzber. böhm. Akad., Prag 1881, insbes. pag. 22—28 (sehr aphoristisch, aber erschöpfend und elegant in der Entwickelung). Ergänzungen in dess. Verf. Die einfache achrom. Linse als Landschaftsobjektiv. EDER's Jahrb. f. Photogr. 1889, und Ueber Fernrohrobjektive, Zeitschr. f. Instrkde. 7, insbes. pag. 225—238. 1887.

L. BILLOTTI, Teoria degli strumenti ottici con applic. ai telesc. ed alla fotogr. celeste. Publ. del R. Osserv. di Brera. Milano 1883, insbes. pag. 87 ff.

A. KRAMER, Theorie der zwei- und dreitheiligen astron. Fernrohrobjektive, Berlin 1885 (schwerfällig).

Einen wesentlichen Beitrag zu dem Gegenstande des vorstehenden Kapitels lieferte jüngst

M. THIESEN, Beiträge zur Dioptrik. Sitzber. Berl. Akad. 35, pag. 799. 1890 (Bestimmung des Weges eines Lichtstrahls direkt aus dem Princip der schnellsten Ankunft. Resultate übereinstimmend mit den von SEIDEL erhaltenen, dessen Arbeiten auch TH. nicht gekannt zu haben scheint.)

S. CZAPSKI.

Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie.

In den vorangehenden beiden Abschnitten ist immer von dem Brechungsexponenten eines Mediums schlechthin die Rede gewesen, als wenn derselbe eine eindeutige Constante des betreffenden Mediums wäre. Thatsächlich ist aber, wie bei früherer Gelegenheit bereits kurz erwähnt (pag. 23) der Brechungsexponent aller bisher untersuchten Substanzen von der Wellenlänge des Lichts abhängig gefunden worden, $n = f(\lambda)$. Die Auseinandersetzungen der vorigen Abschnitte darüber, auf welche Weise die geometrisch mögliche allgemeine optische Abbildung in Systemen centrirter Kugelflächen realisirt werden könne, sei es von selbst, sei es — in erweitertem Gebiete — durch geeignete Anordnung der wirksamen Flächen, sind daher erschöpfend nur für den besonderen Fall rein katoptrischer Systeme; denn bei der Reflexion ist $n' = -n$, also $n'/n = const$ für jedes λ. In dem allgemeinen Falle aber, dass Brechungen und Spiegelungen combinirt und auch in dem, dass nur erstere allein in dem betrachteten System wirksam sind, wird durch die Variabilität der Brechungsexponenten mit der Wellenlänge eine entsprechende Variation aller Faktoren der Abbildung

mit der Wellenlänge (Farbe) des angewandten Lichts bedingt. Ebensowohl die Grundfaktoren der Abbildung durch eine, und in Folge dessen auch durch beliebig viele brechende Flächen (pag. 73 ff.) — also die Lage der Brennebenen und die Grössen der Brennweiten jedes Systems — zeigten sich uns früher abhängig von den Brechungsexponenten der Medien, als auch die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Ausdrücke für die verschiedenen Bildfehler. Beide sind also in dioptrischen Systemen Functionen der Wellenlänge. Infolgedessen werden, wie schon NEWTON, der Entdecker der Dispersion, für die einfachsten Fälle nachwies[1]), von einem Objekte, welches zu gleicher Zeit Licht verschiedener Wellenlänge ausstrahlt, durch ein dioptrisches System Bilder entworfen, deren Lage auf der Axe, Vergrösserung und qualitative Eigenschaften im Allgemeinen sämmtlich mit der Farbe variiren.

Man bezeichnet diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge als chromatische Aberrationen oder Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung.

Dieselben bilden für den wesentlichen Zweck der optischen Systeme: deutliche Bilder zu erzeugen, ein ebenso grosses und unter Umständen sogar ein vergleichsweise noch stärkeres Hinderniss, als z. B. die Variation der Schnittweiten etc. der von einem Objektpunkt ausgegangenen Strahlen mit der Oeffnung des Büschels oder mit seiner Neigung gegen die Axe, d. h. als die im vorigen Abschnitt unter dem Gesammtnamen »sphärische Aberrationen« (oder Abweichungen wegen der Kugelgestalt der abbildenden Flächen) zusammengefassten Bildfehler. Und jener Zweck der optischen Instrumente würde offenbar bei allen dioptrischen Systemen nur sehr unvollkommen erreicht, wenn es nicht möglich wäre, durch geeignete Anordnung und Wahl der das System constituirenden Einzelelemente diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge zu compensiren — ganz analog und insbesondere auch gleichzeitig mit den entsprechenden Variationen der Strahlen von einerlei Farbe mit Apertur und Neigung des Büschels. Man bezeichnet die Ausführung dieser Compensation als Achromatisirung und ihr Ergebniss als »Achromasie«.

Da alle Eigenschaften eines Linsensystems, einschliesslich der sogen. Aberrationen, mit von dessen Medien und daher auch von der Wellenlänge abhängen, so kann in Bezug auf sie alle Achromasie erstrebt bezw. hergestellt werden. In diesem Sinne kann man, wie von den chromatischen Fehlern, so auch von einer Achromasie der Bildorte, der Vergrösserung, der Brennweiten und ebenso der Verzerrung, Bildwölbung etc. sprechen. Es ist aber — aus Gründen, die im Verlaufe der weiteren Darstellung von selbst hervortreten werden — die Herstellung aller dieser verschiedenen Arten der Achromasie für die Erzeugung deutlicher, d. h. anscheinend von dem Einflusse der Chromasie befreiter Bilder keineswegs gleich wichtig, geschweige denn stets die gleichzeitige Erreichung aller Arten von Achromasie erforderlich. Man kann sich vielmehr praktisch stets mit einer theilweisen Achromasie begnügen, welche sich nur auf gewisse — je nach den sonstigen Bedingungen des Falles verschiedene — Bildeigenschaften erstreckt. Die chromatischen Variationen einiger Bildeigenschaften, wie die der Wölbung, des Coma, des Astigmatismus sind z. B. bisher stets ausser Acht gelassen worden, d. h. man hat sich stets damit begnügt, den betreffenden Bildfehler nur für eine Farbe aufzuheben.

Die Vermehrung der Zahl der Flächen, aus welchen das System zusammengesetzt werden

[1]) Optice lib. I, pars 1, prop. 7. Lect. opt. 261.

müsste, um auch diese Eigenschaften zu achromatisiren, würde mit der durch sie bedingten Lichtschwächung (durch Reflexionen und Absorptionen), Gewichtserhöhung etc. viel unangenehmer werden, als jene relativ wenig bemerkbaren Fehler es sind.

Wir betrachten zuerst die

Variation der Fundamentaleigenschaften von Linsensystemen mit der Wellenlänge des Lichts und die Bedingungen ihrer Compensation (Achromasie.)

Die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems lässt sich (nach pag. 67 u. 76) bestimmen aus der Wirkung bezw. den Grundfaktoren der einfachsten Partialsysteme, in welche es zerlegt gedacht werden kann, also schliesslich der einzelnen, je zwei Medien trennenden Flächen (von manchen Autoren »einfache Diopter« genannt). Dementsprechend kann auch die Variation der Wirkung des gesammten Systems mit der Farbe berechnet werden aus den Variationen, welche an den einzelnen Dioptern stattfinden. Man hat nur die a. a. O. gefundenen Ausdrücke für die Brennweiten und Brennpunktsorte nach den n zu variiren. Die Variationen der Brennweiten und Brennpunktsabstände der einzelnen Diopter aber ergeben sich einfach zu

$$\frac{df}{f} = \frac{ds_F}{s_F} = \frac{dn}{n} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}$$

und

$$\frac{df'}{f'} = \frac{ds_{F'}}{s_{F'}} = \frac{dn'}{n'} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}. \qquad (1)$$

wenn der der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Brechungsexponent dies- und jenseits der brechenden Fläche mit $n + dn$ bezw. $n' + dn'$ bezeichnet wird. Hat man auf diese Weise[1]) die Grössen df/f und df'/f' für das ganze System bestimmt, dann ist das der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Bild eines Objektes, welches vom vorderen Brennpunkte des Systems für λ, F_λ, um x, von dem für $\lambda + d\lambda$, $F_{\lambda+d\lambda}$, um $x + dx$ absteht, von dem der letzteren Wellenlänge entsprechenden hinteren Brennpunkte des Systems $F'_{\lambda+d\lambda}$, um die Strecke $x' + dx'$ entfernt, wobei dx' sich aus der Fundamentalformel

$$x \cdot x' = ff'$$

ergiebt zu

$$dx' = x'\left(\frac{df}{f} + \frac{df'}{f'} - \frac{dx}{x}\right). \qquad (1a)$$

Die Vergrösserungen des Systems in Richtung zur und senkrecht zu der Axe sowie das Convergenzverhältniss in konjugirten Punkten für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ lassen sich dann ebenso einfach mit den Werthen derselben Grössen für die Wellenlänge λ in Beziehung setzen durch Variation der anderen unter (I) auf pag. 54 zusammengestellten Grundgleichungen. Wenn

$$\alpha_{\lambda+d\lambda} = \alpha + d\alpha; \quad \beta_{\lambda+d\lambda} = \beta + d\beta \quad \text{und} \quad \gamma_{\lambda+d\lambda} = \gamma + d\gamma$$

gesetzt wird, so findet man

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= \frac{dx'}{x'} - \frac{dx}{x} \\ \frac{d\beta}{\beta} &= \frac{df}{f} - \frac{dx}{x} = \frac{dx'}{x'} - \frac{df'}{f'} \\ \frac{d\gamma}{\gamma} &= \frac{dx}{x} - \frac{df'}{f'} = \frac{df}{f} - \frac{dx'}{x'}. \end{aligned} \qquad (1b)$$

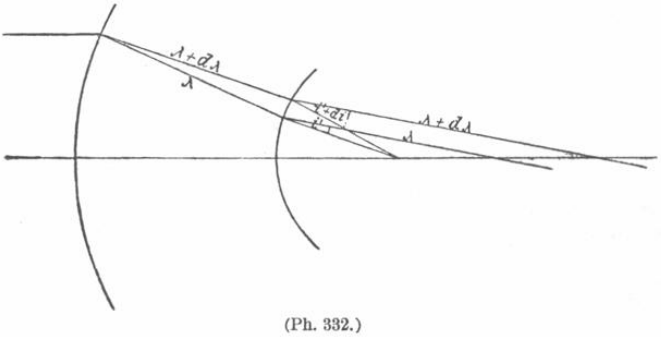
[1]) Interessante graphische Behandlungen dieser und verwandter Aufgaben von F. Kessler, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 1. 1884.

Diese Gleichungen geben den Einfluss an, den die relativen Variationen der Brennweiten und der x, x' d. h. indirekt auch der Brennpunktsorte auf die entsprechenden der Grössen α, β, γ haben.

Schon bei einem zweifachen Diopter z. B. einer beiderseits von Luft begrenzten Linse endlicher Dicke (vergl. pag. 79) bietet sich die Möglichkeit einer Achromatisirung der Brennweiten oder der Brennpunktsorte dar — und bei einer solchen sogar unabhängig von der Dispersion ihrer Substanz — da in den beiden Radien und der Dicke genügend Elemente gegeben sind, um eine der Gleichungen

$$\frac{df}{f} = \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_2}{f_2}\frac{d\Delta}{\Delta} = 0$$
$$d(f_1 - \sigma) = df_1 - d\sigma = df_1 - \sigma\left(\frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1'}{f_1'} - \frac{d\Delta}{\Delta}\right) = 0 \qquad (2)$$

oder eine der entsprechenden für zweite Brennweite und zweiten Brennpunkt geltenden zu erfüllen. Durch graphische Darstellung kann man sich dies der verbreiteten Meinung widerstreitende Ergebniss[1]) leicht veranschaulichen. Ein zur Axe paralleler weisser Strahl (Fig. 332) wird durch Brechung z. B. an einer convexen Fläche in ein dichteres Medium nach der Axe zu gebrochen und zwar desto mehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Es kann nun — wie man sich leicht überzeugt — Lage und Krümmung einer darauf folgenden Fläche so gewählt werden, dass die Strahlen sie unter desto geringeren Incidenzwinkeln treffen, je brechbarer sie sind und dies in solchem Verhältniss, dass die austretenden Strahlen verschiedener Wellenlänge entweder einander parallel austreten, wie in Fig. 332, (Gleichheit der Brennweiten), oder nach demselben Punkte hin convergiren (Achromasie in Bezug auf die Brennpunkte).



(Ph. 332.)

Statt einer einzigen dicken Linse in Luft wählt man zu demselben Zwecke vortheilhafter zwei dünne, durch einen grösseren Abstand getrennte Linsen. Im Grenzfalle, bei unendlich dünnen Linsen, fanden wir (pag. 81)

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - D\varphi_1\varphi_2,$$

worin D der Linsenabstand (bei etwas dickeren Linsen der Abstand der einander zugewandten Hauptpunkte) ist. Bei einer einzigen dünnen Linse in Luft war

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) = (n-1)k \qquad \text{und} \qquad \frac{df}{f} = \frac{dn}{n-1} = \frac{1}{\nu},$$

wenn wir die Grösse $\frac{n-1}{dn}$, das Reciproke des sogen. Zerstreuungsverhältnisses der Linsensubstanz, mit ν bezeichnen; daher ergiebt sich als Bedingung für die Constanz von φ oder f in Bezug auf λ nach einigen Umformungen die, dass

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, ist dasselbe schon von Kessler (a. a. O.) gefunden worden.

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_2 + \nu_1}, \tag{3}$$

sei, also bei gleichem Material (ν) der beiden Linsen einfach

$$D = \frac{f_2 + f_1}{2} \tag{3a}$$

Dies ist die Bedingung, welcher, wie wir später sehen werden, die aus einfachen Linsen bestehenden Oculare in erster Linie genügen müssen.

Sind die beiden dünnen Linsen ganz aneinander gerückt, so dass $D = 0$ gesetzt werden kann, so ist die Brennweite (hier zugleich Brennpunktsabstand) des ganzen Systems gegeben durch

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2;$$

soll nun (4)

$$d\varphi = dn_1 k_1 + dn_2 k_2 = 0$$

sein, so müssen die Krümmungsdifferenzen der Linsenflächen

$$k_1 = \rho_1' - \rho_1'' \quad \text{und} \quad k_2 = \rho_2' - \rho_2''$$

den Bedingungen genügen

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{dn_2}{dn_1} \quad \text{oder} \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{4a}$$

und zwar bestimmt sich aus den beiden obigen Bedingungsgleichungen (4) (denen des »Maasstabs« und der Achromasie)

$$k_1 = \frac{1}{f}\,\frac{1}{dn_1}\,\frac{1}{\nu_1 - \nu_2}; \qquad k_2 = -\frac{1}{f}\,\frac{1}{dn_2}\,\frac{1}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{4b}$$

Es lässt sich also in diesem Falle eine Achromasie der Grundfaktoren der Abbildung nur dann erreichen, wenn ν_1 nicht gleich ν_2, d. h. die Zerstreuungsverhältnisse der Linsensubstanzen von einander verschieden sind. Erst die durch Chester More Hall (1729) vorbereitete, dann durch Klingenstierna (1754) und Dollond (1757) sicher gestellte Erkenntniss, dass dies bei vielen Substanzen thatsächlich der Fall sei — was Newton und anfangs auch Euler in Abrede gestellt hatten — gab die Unterlage dafür, eine Achromasie überhaupt zu erstreben[1]).

Man sieht aus Gleichung (4) und (4a) ferner, dass die beiden zu einem achromatischen System combinirten Linsen stets Brennweiten von entgegengesetzten Vorzeichen erhalten müssen; die eine Linse muss eine collektive (positives f), die andere eine dispansive (negatives f) sein. Soll z. B. die Brennweite des ganzen Systems positiv sein, so muss die der sie constituirenden positiven Linse natürlich kürzer sein als die der dazu gehörigen negativen und als diejenige des Gesammtsystems. Das Zerstreuungsvermögen der negativen Linse muss dann das grössere sein, so dass durch diese Linse trotz ihrer geringeren Stärke die Dispersion der anderen compensirt wird, ohne dass zugleich deren collektive Fundamentalwirkung mit aufgehoben wird; bei negativer Gesammtbrennweite umgekehrt. Je verschiedener die Zerstreuungsvermögen der Linsensubstanzen sind, mit desto geringeren Krümmungen lässt sich *caet. par.* die Achromasie eines Systems von gegebener Brennweite erreichen. —

---

[1]) Näheren Bericht über die sehr merkwürdige Geschichte der Achromasie geben Priestley Geschichte etc. der Optik. Uebers. von Klügel, Leipzig 1776, pag. 243, 520. Barlow und Brewster in ihren Artikeln »Optics« in der 7. u. 8. Aufl. der Encypl. Brit. pag. 408, bezw. pag. 175. 1823. Letzterer auch in seinem Leben Newton's, übers. v. Goldberg, Leipz. 1833, pag. 19 u. pag. 45—56. Man sehe ferner Wilde, Gesch. d. Optik, Bd. 2, pag. 71. Littrow, Dioptrik, pag. 457 und Löwenherz, Zeitschr. f. Instrkde. 2, pag. 275. 1882.

Handelt es sich darum, in einem System nicht für einzelne oder alle Grundfaktoren Achromasie herbeizuführen, sondern nur für eine bestimmte Lage des Objektes und Bildes, so kann man hier, ganz analog wie für die Berechnung der einer Wellenlänge entsprechenden Elemente zwei Wege einschlagen: Entweder man ermittelt die in dem Gesammtsystem stattfindende Variation der Grundfaktoren der Abbildung und hieraus nach den Formeln (1) bis (1b) die Variation der in Frage stehenden besonderen Grössen — oder man ermittelt diese letztere Variation direkt aus den Gleichungen, welche die gesuchten Grössen selbst (Bildpunkte, Vergrösserungs-, Convergenzverhältniss) für die besondere Lage des Objektes zu berechnen gestatten. Die hierzu dienenden Gleichungen schliessen die früheren, zur Ermittelung der Variation der Grundfaktoren dienenden, als besonderen Fall ein (in welchem $s = \infty$); sie sollen daher hier entwickelt werden und zwar wollen wir wiederum die Verundeutlichung des Bildes feststellen, welche durch die chromatische Aberration — und zwar zunächst der paraxialen Strahlen — verursacht wird.

Die Schnittweiten s, s' vor und nach der Brechung an einer Fläche vom Radius r, welche beiderseits von Medien begrenzt ist, deren Brechungsindices für die Wellenlänge λ bezw. n und n' sind, stehen bei paraxialen Strahlen i dem Zusammenhang, dass (pag. 71)

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)=Q$$

ist. Ihre Variationen beim Uebergang von der Wellenlänge λ zur Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ werden daher durch Variation von Q nach λ erhalten. Es ist nun

$$[dQ]_\lambda=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)dn+\frac{n}{s^2}\,ds=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)dn'+\frac{n'}{s'^2}\,ds'$$

oder

$$Q\,\frac{dn}{n}+\frac{n}{s^2}\,ds=Q\,\frac{dn'}{n'}+\frac{n'}{s'^2}\,ds'$$

also

$$Q\Delta\left(\frac{dn}{n}\right)=-\Delta\left(\frac{n}{s^2}\,ds\right). \qquad (5)$$

Ueber den Ort, an welchem ein chromatisches Bild aufgefasst wird und daher auch über die Grösse des durch die chromatische Aberration hervorgerufenen Zerstreuungskreises, welcher an Stelle eines scharfen Bildpunktes auftritt, befindet man sich in einer ähnlichen Unsicherheit, wie bei dem der sphärischen Aberration (vergl. pag. 103). Da die Farben, in welche weisses Licht durch Dispersion zerlegt wird, physiologisch einen sehr ungleichen, ja sogar mit der Intensität der Lichtquelle und auch individuell erheblich schwankenden Effekt haben, so sind dieselben für die thatsächliche Auffassung des Bildortes und die Beurtheilung der Grösse des Zerstreuungskreises sehr ungleichwerthig — analog der Ungleichwerthigkeit der unter verschiedener Axenneigung nach dem Bilde convergirenden Strahlen von einerlei Farbe bei der sphärischen Aberration[1]). Für ihre Bewerthung sind die Unterlagen nur durch experimentelle Vergleiche der physiologischen Eindruckstärken verschiedenwelligen Lichts zu beschaffen. Solche Untersuchungen wurden zuerst von FRAUNHOFER[2]) ausgeführt und in neuerer Zeit

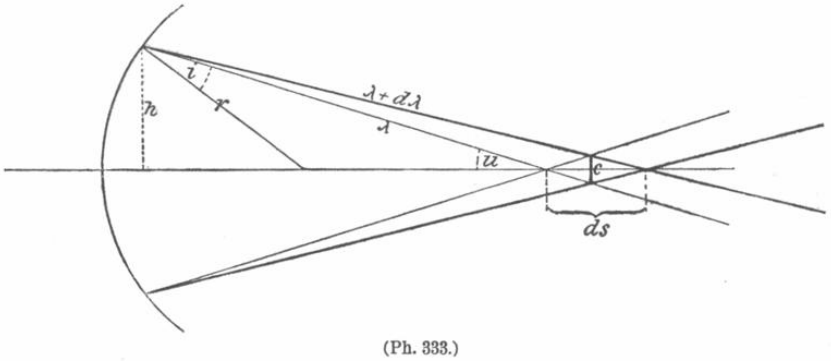
[1]) S. HELMHOLTZ, Physiol. Optik 1. Aufl., pag. 132.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. (für 1814/15) pag. 213. 1817. Ges. Schriften Münch. 1888 pag. 18, vergl. auch C. A. STEINHEIL und L. SEIDEL, Abh. Münch. Akad. 5, pag. 1, abgedruckt in A. STEINHEIL und E. VOIT, Handb. d. angew. Optik Leipz. 1891, pag. 248.

von VIERORDT[1]), E. BRODHUN[2]) und A. KÖNIG[3]). Wir werden auf dieselben bald zurückzukommen haben. Für den Augenblick können wir diese Details unberücksichtigt lassen, indem wir nur die beiden einzelnen Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ beachten, von denen wir annehmen wollen, dass sie physiologisch gleichwerthig seien und den Zerstreuungskreis berechnen, welcher von ihnen allein verursacht wird. Die geringste Einschnürung des nach dem Bilde eines Punktes zu convergirenden Lichtbüschels findet dann (s. Fig. 333) in der Mitte zwischen den beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Bildpunkten statt und ihr Durchmesser c ist bis auf Grössen von höherer als der zweiten Ordnung

$$c = \pm\, ds \cdot u \qquad \text{bezw.} \qquad c' = ds' \cdot u',$$

wenn u bezw. u' der halbe Oeffnungswinkel des nach dem Objekt- bezw. Bildpunkte hin convergirenden Büschels ist. Das Vorzeichen von c ist an sich willkürlich. Wir



(Ph. 333.)

wollen es, wie bei der sphärischen Aberration, so wählen, dass es bei einer collektiven Brechung positiv wird, also, indem λ als unabhängige Variable gedacht wird, oben das positive Vorzeichen annehmen.

Wie früher auf das Objekt zurückbezogen, ist vor und nach der betrachteten $k$ten Brechung

$$n_k u_k c_k = n_1 u_1 (c_0)_k \qquad \text{und} \qquad n_k' u_k' c_k' = n_1 u_1 (c_0)_k,$$

daher, da

$$u_k = \frac{h_k}{s_k} \qquad \text{und} \qquad u_k' = \frac{h_k}{s_k'},$$

$$ds_k = \frac{c_k}{u_k} = (c_0)_k \frac{n_1 u_1}{n_k u_k^2} = (c_0)_k (n_1 u_1) \frac{s_k^2}{n_k h_k^2}$$

und ebenso

$$ds_k' = \frac{c_k'}{u_k'} = (c_0)_k' \frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'^2} = (c_0)_k' (n_1 u_1) \frac{s_k'^2}{n_k' h_k^2}$$

Tragen wir diese Werthe von ds_k und ds_k' in (5) ein, so wird nach einigen Umformungen

$$\Delta (c_0)_k = - \frac{h_k^2}{n_1 u_1} Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k$$

oder für die Rechnung bequemer

$$\Delta (c_0)_k = - (n_1 u_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k, \qquad (6)$$

---

[1]) POGG. Ann. 137, pag. 200. 1869. Die Anwendung des Spectralapparates etc. Tübingen 1871, pag. 45 ff.

[2]) Beiträge z. Farbenlehre, Inaug. Diss. Berlin 1887.

[3]) Beitr. z. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. Festschrift für v. HELMHOLTZ, Leipzig. 1891, auch separat u. d. T. Ueber den Helligkeitswerth der Spektralfarben bei verschied. absol. Intensität. S. auch v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 2. Aufl., pag. 428 ff. (daselbst weitere Literaturangaben).

die durch die Brechung an der $k$ten Fläche bewirkte Zunahme des auf die Objektseite bezogenen chromatischen Zerstreuungskreises.

Seine ganze Grösse nach der $p$ten Brechung ist, wenn er vor der ersten Brechung = Null war

$$c_0^{(p)} = \sum \Delta(c_0)_k = -(n_1 u_1)\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)_k . \qquad (6\,a)$$

In angularem Maasse, bei unendlich fernem Objekt in Luft, beträgt derselbe

$$\gamma_0^{(p)} = \sum \Delta(\gamma_0)_k = +h_1 \sum Q_k \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)_k \qquad (7)$$

oder, wenn wir den Werth, welchen die rechtsstehende Summe für eine Brennweite des Gesammtsystems = 1 annimmt, mit G bezeichnen

$$\gamma_0^{(p)} = +\left(\frac{h_1}{f}\right) \cdot G. \qquad (7\,a)$$

Die durch die Chromasie bewirkte Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also bei gegebener Construction eines Systems dem Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite einfach proportional und — wie die durch sphärische Aberration bewirkte — in ihrem Winkelwerth von der Grösse der Brennweite selbst unabhängig.

Man kann aus dem gemäss (6a) oder (7) berechneten Zerstreuungskreis, ebenso wie bei der sphärischen Aberration, auch wieder rückwärts die nach der $k$ten Brechung vorhandene Längsaberration berechnen, nämlich

$$ds_p' = (s'_{\lambda+d\lambda} - s_\lambda')_p = -\left(\frac{n_1 u_1}{n_p' u_p'}\right)^2 \left(\frac{n_p'}{n_1 u_1}\right) c_0^{(p)} = -\frac{n_p'}{n_1 u_1} \beta^{(p)2} c_0^{(p)}.$$

Bei unendlich fernem Objekt ist diese Längsaberration zugleich die Variation des Brennpunkts und zwar

$$ds_p' = ds_F' = +\left(\frac{f'}{h_1}\right) f' \cdot \gamma_0^{(p)}.$$

Wie wir vorhin sahen, lässt sich die chromatische Aberration für den Axenpunkt schon bei einem zweifachen Diopter aufheben; bei einem aus drei und mehr Flächen zusammengesetzten Systeme ist man daher im Allgemeinen im Stande, die chromatische und sphärische Aberration für Axenpunkte durch geeignete Wahl der Krümmungen jener Flächen gleichzeitig aufzuheben.

Noch einfacher als die Variation des Bildortes mit der Farbe lässt sich die der Lateral- und Angularvergrösserung bestimmen.

Die Lateralvergrösserung bei der Brechung an einer einzelnen, der $k$ten, Fläche ist nach pag. 76

$$\frac{y_k'}{y_k} = \beta_k = \frac{n_k s_k'}{n_k' s_k},$$

also für ein System von p Flächen

$$\beta^{(p)} = \frac{y_p'}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{y_2'}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_k'}{y_k} \cdot \ldots \cdot \frac{y_p'}{y_p}$$

oder

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_p'} \left(\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(\frac{s_2'}{s_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{s_k}{s_k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{s_p'}{s_p}\right),$$

daher

$$\frac{d\beta}{\beta} = \sum \Delta\left(\frac{ds}{s}\right)_k + \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_p'}{n_p'} = \sum \Delta\left(\frac{ds}{s} - \frac{dn}{n}\right)_k = \sum \Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right)_k . \qquad (8)$$

In gleicher Weise ist das Convergenzverhältniss für ein System von p Flächen

$$\frac{u_p'}{u_1} = \frac{u'}{u} = \gamma^{(p)} = \left(\frac{s_1}{s_1'}\right) \cdot \left(\frac{s_2}{s_2'}\right) \cdot \ldots \left(\frac{s_k}{s_k'}\right) \cdot \ldots \left(\frac{s_p}{s_p'}\right),$$

daher

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -\sum \left(\frac{ds}{s}\right)_k, \tag{9}$$

eine Gleichung, die auch schon in Verbindung mit (8) aus $\beta\gamma = -(n/n')$ folgt.

Für die praktische Anwendung der vorstehenden Gleichungen (6) bis (9) ist vorausgesetzt, dass ein paraxialer Strahl der Weltenlänge λ von dem gegebenen Objektpunkte aus durch wiederholte Anwendung der Grundformel $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$ und $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ auf die einzelnen Flächen des Systems durch dieses verfolgt sei.

Verfolgt man in derselben Weise einen aus ∞ (parallel zur Axe) einfallenden Strahl durch das System, so erhält man aus den Schnittweiten vor und nach der Brechung an den einzelnen Flächen die Brennweite des Bildraums, wie leicht ersichtlich, zu

$$f' = \frac{h}{tg\, u'} = \frac{h_1}{(h_p/s_p')} = \left(\frac{s_1'}{s_2}\right) \cdot \left(\frac{s_2'}{s_3}\right) \cdot \ldots \ldots \left(\frac{s'_{p-1}}{s_p}\right) \cdot s_p';$$

daher die Variation der hinteren Brennweite mit der Farbe aus den analogen Variationen der Einzelschnittweiten

$$\frac{df'}{f'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k \tag{10}$$

und ganz ebenso die relative Variation der vorderen Brennweite df/f aus den Elementen, die sich bei der Durchrechnung eines in entgegengesetzter Richtung, von der Bildseite her, durch das System tretenden Strahls ergeben.

Sekundäres Spectrum.

Die bisherigen Erörterungen fussen auf der Thatsache, dass der Brechungsexponent n jedes Mediums eine Function der Wellenlänge sei, ohne weiter auf die Natur dieser Function Rücksicht zu nehmen. Die genaue Beschaffenheit derselben ist trotz der zahlreichen, seit NEWTON über sie angestellten experimentellen und speculativen Untersuchungen noch nicht endgültig festgestellt (s. den. Art. Dispersion). Von ihr hängen nun gewisse Erscheinungen sekundärer Natur ab, welche mit jeder Art von Achromasie verbunden sind, und deren allgemeiner Charakter sich auch schon auf Grund desjenigen, was bisher über die Gesetze der Dispersion bekannt ist, mit genügender Sicherheit kennzeichnen lässt.

Während nämlich NEWTON und u. A. auch noch WOLLASTON annahmen, dass die relative Dispersion verschiedener Substanzen in allen Theilen des Spectrums eine constante sei, haben schon CLAIRAUT, BLAIR, dann durch eine Reihe kritischer Experimente BOSCOVICH[1]) und schliesslich, entsprechend seiner exakten Beobachtungsmethode ganz unwiderleglich, FRAUNHOFER[2]) erwiesen, dass dies nicht der Fall sei: dass vielmehr bei Spectren, welche mit Prismen verschiedener Substanz entworfen werden, die Ausdehnung der einzelnen Farbenbezirke in einem sehr variablen Verhältniss zur Gesammtausdehnung stehe, oder genauer: dass das Verhältniss der Dispersionen (Differenzen der Brechungsexponenten für verschiedene Wellenlängen) in verschiedenen Theilen des Spectrums von Substanz zu Substanz erheblich variire. So zeigte FRAUNHOFER[3]), dass das Verhältniss der Disper-

[1]) Ueber diese drei vergl. BREWSTER, Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 300 und 353.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. für 1814/15, pag. 209. Ges. Schriften pag. 14.

[3]) a. a. O. Tab. IV.

sionen zweier Gläser am rothen Ende des Spectrums (von Linie *B* bis Linie *C*) zu demjenigen am violetten Ende (Linie *G* bis Linie *H*) variiren könne von 1·9 zu 2·3 oder etwa wie 1:1·2; die gleichen Verhältnisse bei Glas und Wasser von 2·6 zu 3·7 oder fast wie 1:1·5 u. dergl. mehr.

Daraus folgt, dass, wenn man n als Function von λ darstellen will — etwa als eine Potenzreihe — in dieser jedenfalls $dn/d\lambda$ noch Function von λ bleiben muss. Eine genauere Discussion des über Dispersion vorliegenden Beobachtungsmaterials führt dazu[1]) — wenn überhaupt — dann eine Potenzreihe mit wenigstens drei Coëfficienten zur vollständigen Darstellung der Dispersion aller Substanzen anzunehmen, wenn auch die vieler Substanzen durch eine zweiconstantige Reihe bereits sehr vollkommen dargestellt wird[2]).

Die Form des betreffenden Ausdrucks ist gewöhnlich (nach Cauchy und Briot)

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \ldots . \qquad (11)$$

Die Achromasie — sei es der Brennpunkte oder Brennweiten, Bildpunkte oder Convergenzverhältnisse, welche mit einem Paar Linsen bewirkt wird deren Substanzen nicht zufällig proportionale Coëfficienten b, c, d besitzen, ist nun in Folge der Abhängigkeit der Differentialquotienten $dn/d\lambda$ oder dn/dl (wo $l = 1/\lambda^2$) von λ bezw. l, stets eine unvollständige. Ihr Charakter ist im allgemeinen der, dass die Achromasie (Identität) des fraglichen Elementes immer nur für je zwei Wellenlängen vorhanden ist; von der Stelle λ an, für welche die Variation = Null gemacht und daher ein (Maximum oder) Minimum ist, ist paarweise nach beiden Seiten des Spectrums hin für je eine Stelle der einen Spectralhälfte das betreffende Abbildungselement identisch mit dem für eine Stelle der andern Spectralhälfte. Dieser besondere Charakter der Unvollkommenheit der Achromasie — von Blair »secundäres Spectrum« genannt — entspringt allein der zufälligen besonderen Beschaffenheit des Dispersionsverlaufs in den bekannten Substanzen, namentlich in den Gläsern, und ist kein naturnothwendiger Es giebt vielmehr im Gegentheil auch Glasarten und andere Substanzen, deren Combination einen wesentlich anderen Gang des secundären Spectrums herbeiführt; so die neuen Borat- und Phosphatgläser, welche das Jenaer Glaswerk seit 1884 fabrikatorisch herstellt[3]).

Ich habe a. a. O. eine einfache Methode angegeben, um die Grösse des secundären Spectrums, d. h. der Focusdifferenz zweier zu einem System combinirter unendlich dünner Linsen aus den Dispersionswerthen zu berechnen, wenn festgesetzt ist, für welche Wellenlängen das System gleiche Brennweiten (und Brennpunkte) haben soll.

Ist nämlich das System so construirt, dass die Brennweite für die Wellenlänge λ_a gleich ist der für die Wellenlänge λ_b, so haben wir nach Gleichung (4) mit ein wenig veränderter Bezeichnung

$$\varphi_a = \frac{1}{f_a} = (n_a' - 1)k' + (n_a'' - 1)k'' = \varphi_b = \frac{1}{f_b} = (n_b' - 1)k' + (n_b'' - 1)k'',$$

woraus sich

$$k' = (\rho_1' - \rho_2') \quad \text{und} \quad k'' = (\rho_1'' - \rho_2'')$$

berechnen zu

---

[1]) Czapski, Zeitschr. f. Instrkde. 6, pag. 341 1886.

[2]) vergl. z. B. Wüllner, Lehrb. d. Exper. Physik 2, pag. 156, Leipz. 1882 u. W. Schmidt, Die Brechung des Lichts in Gläsern, Leipz. 1874, § 1.

[3]) Vergl. Czapski a. a. O. und das Productionsverzeichniss des Jenaer Glaswerks.

$$k' = \frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n'}\,\frac{1}{\nu' - \nu''} \qquad \text{und} \qquad k'' = -\frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n''}\,\frac{1}{\nu' - \nu''},$$

wenn hier

$$\Delta n' = n_b' - n_a'; \qquad \Delta n'' = n_b'' - n_a''$$

$$\nu' = \frac{n' - 1}{\Delta n'} \qquad \text{und} \qquad \nu'' = \frac{n'' - 1}{\Delta n''}$$

bedeutet. Die Brennweite der Combination für eine andere Wellenlänge λ_x ist dann gegeben durch

$$\varphi_x = \frac{1}{f_x} = (n_x' - 1)k' + (n_x'' - 1)k''.$$

Demnach

$$\varphi_a - \varphi_x = (n_a' - n_x')k' + (n_a'' - n_x'')k''$$

$$\varphi_b - \varphi_x = (n_b' - n_x')k' + (n_b'' - n_x'')k''$$

oder

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{n_a' - n_x'}{\Delta n'} - \frac{n_a'' - nx''}{\Delta n''}\right) = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{a,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{a,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right)$$

und

$$\frac{f_x - f_b}{f} = \frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{b,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{b,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right). \qquad (12)$$

A. a. O. habe ich die Grösse des nach diesen Formeln berechneten sekundären Spectrums für mehrere Combinationen von Glasarten angegeben und z. Th. graphisch dargestellt. Es ist z. B. bei der Combination eines Silicat-Crownglases englischer Art mit einem mittelschweren Flintglas ($\nu' = 60{\cdot}2$, $\nu'' = 36{\cdot}2$, wenn $\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$) bei der Brennweite 1 und einer solchen Achromatisirungsweise, dass $f_F = f_C$:

$$f_{G'} - f_F = f_{G'} - f_C = +\,0{\cdot}00179$$

$$f_D - f_F = f_D - f_C = -\,0{\cdot}00046$$

$$f_{A'} - f_F = f_{A'} - f_C = +\,0{\cdot}00113.$$

Mit Hilfe einer Dispersionsformel wie (11) erhält man für einige Jenaer Glasarten folgende Tabelle der Abweichungen:

Werthe der Differenzen $f_\lambda - f_{0{\cdot}55\,\mu}$ in Tausendteln von $f_{0{\cdot}55\,\mu}$.

λ in Mikron	0·77	0·73	0·69	0·65	0·61	0·57	0·53	0·49	0·45	0·41
S. 60 — O. 103	+ 1·79	+ 1·39	+ 0·98	+ 0·58	+ 0·25	+ 0·03	+ 0·04	+ 0·44	− 1·51	+ 3·70
S. 30 — S. 7	+ 0·88	+ 0·69	+ 0·48	+ 0·29	+ 0·12	+ 0·02	+ 0·03	+ 0·21	+ 0·71	+ 1·69
S· 30 — S. 8	− 0·04	− 0·02	− 0·01	± 0·00	± 0·00	± 0·00	+ 0·01	+ 0·04	+ 0·21	+ 0·79

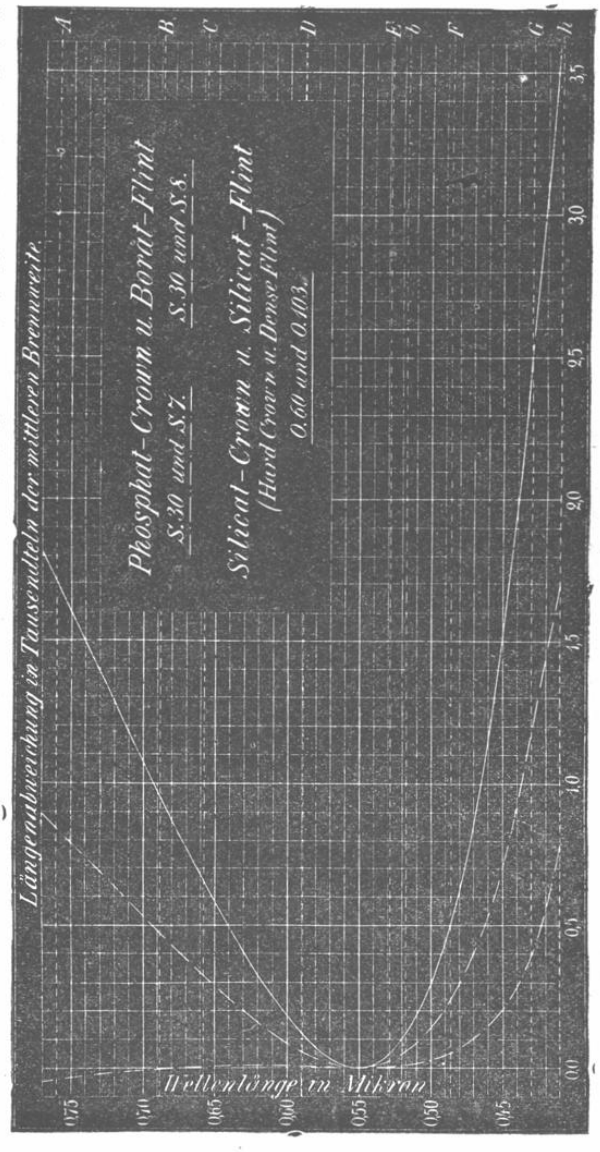
Fig. 334 veranschaulicht den Verlauf der Focusdifferenzen bei diesen drei Combinationen.

Die Constanten der hier angenommenen Gläser sind nach dem Productions-Verzeichniss der Jenaer Glasschmelzerei folgende:

Fabr. No.	Chemische Charakter	n_D	$n_F - n_C$	$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \nu$	$n_D - n_{A'}$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
O. 60	Calcium-Silicat-Crown	1·5179	0·00860	60·2	0·00553 0·643	0·00605 0·703	0·00487 0·566
O. 103	Gewöhnl. Silicat-Flint	1·6202	0·01709	36·2	0·01034 0·605	0·01120 0·714	0·01041 0·609
S. 30	Schweres Barium-Phosphat-Crown . . .	1·5760	0·00884	65·2	0·00570 0·644	0·00622 0·703	0·00500 0·565
S. 7	Borat-Flint	1·6086	0·01375	44·3	0·00864 0·628	0·00974 0·708	0·00802 0·583
S. 8	Borat-Flint	1·5736	0·01129	50·8	0·00728 0·645	0·00795 0·704	0·00644 0·571

Mit A' ist die rothe Kalilinie ($\lambda = 0{\cdot}7677$), mit G' die blaue Wasserstofflinie H_γ ($\lambda = 0{\cdot}4341$) bezeichnet. Die in kleiner Schrift unter die Beträge der partiellen Dispersion gesetzten Zahlen sind die Verhältnisse dieser partiellen Dispersionen zur gesammten ($n_F - n_C$).

Obige Tabelle giebt ein Bild von der Grösse und dem Gange des secundären Spectrums bei binären Combinationen aus älteren Gläsern und von der Veränderung seiner Grösse und seines Ganges, die durch Anwendung mancher von den neuerdings hergestellten Glasarten möglich geworden ist. Ihr Inhalt stimmt im wesentlichen überein mit den Resultaten, welche H. C. VOGEL[1]), HASSELBERG[2]), M. WOLF[3]) u. A. durch direkte Messungen der Focusdifferenzen von Fernrohrobjektiven erhalten haben.



(Ph. 334.)

Da, wie wir oben bemerkten, die verschiedenen Theile des Spectrums sehr verschiedene Helligkeit besitzen, so ist es sehr wichtig, die Achromasie, d. h. das sekundäre Spectrum, so zu gestalten, dass es möglichst wenig störend wirkt, also die hellsten Strahlen in einem möglichst engen Raum vereinigt werden. Ein rationelles Verfahren hierzu gab bereits FRAUNHOFER an; doch führte dasselbe nicht zu befriedigender Uebereinstimmung mit der praktischen Erfahrung, vielleicht in Folge der Ungenauigkeit seiner Bestimmung der relativen Helligkeiten der Spectralbezirke. Er schlug nämlich vor, alle Dispersionsverhältnisse *pro rata* ihrer Lichtmenge (Produkt aus Helligkeit und Ausdehnung des betreffenden Spectralbezirks) in Rechnung zu ziehen. Ein ähnliches Verfahren wandten STEINHEIL und SEIDEL an (a. a. O.). In besserer Uebereinstimmung mit der Erfahrung

[1]) Monatsber. Berl. Akad. 1880, pag. 433. Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 22, pag. 142. 1888.

[2]) Mél. math. et astr. de l'Acad. de Petersb. 6, pag. 669. 1888.

[3]) WIED. Ann. 33, pag. 212. 1888. Ausführliche Referate über diese Arbeiten dieser drei Forscher in Ztschr. f. Instkde. 8, pag. 246; 9, pag. 16.

ist der von SCHEIBNER[1]) gewählte Modus: das Verhältniss dn'/dn als Grenzwerth (Differentialquotienten) aus empirischen Dispersionsformeln der beiden Substanzen abzuleiten und zwar für die Wellenlänge der hellsten Stelle des Spectrums $\lambda =$ ca. $0{\cdot}55\ \mu$[2]). Dies ist in obiger Tabelle geschehen. Fast dasselbe Ergebniss wird erhalten, wenn man die Identität der zu achromatisirenden Grösse (Bildort, Bildgrösse etc.) für die C- und F-Linie (rothe und grüne Wasserstofflinie H_α, H_β) herstellt.

Die letzteren Regeln gelten für Instrumente, deren Bilder direkt vom Auge wahrgenommen werden sollen (dessen Chromasie natürlich mitbestimmend ist). Sollen die Bilder in anderer Weise wirken, z. B. auf photographische Platten so ist deren Empfindlichkeit nach Wellenlänge und Intensität in analoger Weise zu berücksichtigen.

Eine Achromasie höherer Ordnung, bei welcher also statt für je zwei für je drei Wellenlängen Identität der Bilder nach Ort oder Grösse vorhanden ist, lässt sich bei binären — aus zwei Linsen zusammengesetzten — Systemen, wie bemerkt, nur erreichen durch Anwendung einiger von den neuen Jenaer Glasarten[3]); unter Benutzung der gewöhnlichen Glasarten nur dadurch, dass man das System aus mindestens drei Linsen zusammensetzt, deren Substanzen hinreichend verschiedene Dispersionsverhältnisse besitzen[4]). Es ergeben sich die entsprechenden Krümmungsmaasse der (als verschwindend dünn und in Contakt befindlich vorausgesetzten) drei Linsen k', k'', k''' einfach durch Auflösung der drei Gleichungen, welche hier an Stelle der oben betrachteten zwei Bedingungsgleichungen für die Achromasie treten. Es ist wohl kaum nöthig, dieselben hier aufzuführen. Ich will nur bemerken, dass man zu relativ sehr grossen Krümmungsmaassen kommt, wenn man die Dispersionsverhältnisse der drei Substanzen nicht angemessen auswählt[5]).

Die durch das secundäre — oder im letzteren Falle tertiäre und bei noch weiter gehender Achromatisirung quaternäre etc. — Spectrum hervorgerufenen Zerstreuungskreise sind, ebenso wie die des primären Spectrums der relativen Oeffnung (Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite) des Systems proportional. Von erheblich grösserem Einfluss auf die Achromasie der Bilder als diese von den höheren Gliedern der Dispersionsformeln abhängigen Fehler ist schon bei mässigen relativen Oeffnungen (des Systems) die

Variation der von der Kugelgestalt herrührenden (sphärischen) Aberrationen mit der Wellenlänge,

insbesondere der schlechthin so genannten »sphärischen Aberration«, nämlich derjenigen für Axenpunkte. Wenn diese Aberration für eine bestimmte Wellenlänge λ_0 aufgehoben ist, so wird sie es im allgemeinen nicht zugleich auch für

[1]) Abh. Sächs. Akad. 11, pag. 565. 1876.

[2]) Nach den Messungen von A. KÖNIG wandert das Maximum der Helligkeit im Sonnenspectrum bei zunehmender Gesammtintensität desselben von $\lambda = 0{\cdot}53\ \mu$ bis $\lambda = 0{\cdot}61\ \mu$.

[3]) Früher wurde in Ermangelung geeigneter fester Körper wiederholt die Anwendung von Flüssigkeiten zwischen gekrümmten Platten oder Glaslinsen vorgeschlagen und versucht von S. BLAIR, Trans. Edinb. Soc. 3, pag. 3. 1791. BARLOW, Phil. Trans. 1828, pag. 105, 313, auch ibid. 1829, 1831, 1833.

[4]) Dies wohl zuerst von BOSCOVICH hervorgehoben, Diss. quinque ad dioptric. pertin. Wien 1764.

[5]) Ueber solche und verwandte Bestrebungen speciell auf dem Gebiete der Fernrohroptik hat A. SAFARIK, Vierteljahrschr. d. astr. Ges. 17, pag. 13. 1882, über eben solche auf dem Gebiete der Mikroskopoptik E. ABBE, Ber. über die 1876er Ausstellung wiss. App. in London, Braunschweig 1878, Bd. 1., pag. 415, zusammenfassend berichtet.

andere Wellenlängen sein. Gewöhnlich besteht dann vielmehr wegen der stärkeren Dispersion bei den (dispansiven) Flintgläsern in dem System sphärische Uebercorrection für kürzere und sphärische Untercorrection für grössere Wellenlängen als λ_0. Diese »chromatische Differenz der sphärischen Aberration« (nach der Bezeichnung ABBE's) ist nun, wie leicht einzusehen, gleichbedeutend mit einer »sphärischen Differenz der chromatischen Aberration«, d. h. einer Variation der letzteren von Zone zu Zone. In dem vorgedachten Falle würde bei richtiger chromatischer Correction der centralen Zone eine nach dem Rande der Oeffnung hin wachsende chromatische Uebercorrection eintreten (Schnittweite der kurzwelligen Strahlen grösser als die der langwelligen). Bei Systemen von erheblicher Oeffnung kann diese Uebercorrection — und die sphärische Differenz der chromatischen Aberration über haupt — so stark werden, dass in manchen Zonen gar keine paarweise Coincidenz der Bildpunkte mehr eintritt, so dass der Charakter der Aberration dort ganz der einer einfachen uncorrigirten Linse wird. Bei mässiger Oeffnung tritt nur eine mit der Distanz der betrachteten Zone von der bestcorrigirten wachsende Verschiebung des Minimums der Bildweite gegen den Rand des Systems hin nach den langwelligen (Uebercorrection) gegen die centrale Zone hin nach den kurzwelligen Strahlen (Untercorrection) ein.

Die auf diese Weise eintretende chromatische Aberration kann, wie bemerkt, schon bei mässigen Oeffnungen von erheblich grösserer Bedeutung werden als die secundäre Aberration in Folge der Disproportionalität der Zerstreuungsverhältnisse in verschiedenen Theilen des Spectrums. Um sie möglichst unschädlich zu machen, muss man, wenn man sie nicht ganz beseitigen kann, die beste chromatische Correction nicht in die centrale Zone des Systems legen, sondern in eine passend zwischen dieser und dem Rande gelegene — so nämlich, dass der Zerstreuungskreis, welcher durch die dann nach der Mitte hin zunehmende Untercorrection hervorgerufen wird, etwa von gleicher Grösse (aber entgegengesetztem Charakter) wird, als der, von der nach dem Rande zu wachsenden chromatischen Uebercorrection herrührende[1]). Die maximale Grösse dieser entgegengesetzt gleichen und sich überdeckenden Zerstreuungskreise bleibt dann erheblich unter derjenigen, welche bei centraler chromatischer Correction eintreten würde — da ja die sphärische Aberration für je eine Wellenlänge, welche ihre Ursache ist, selbst bei kleinen Oeffnungsverhältnissen schon mit der dritten Potenz der Apertur wächst.

Diese Verhältnisse, auf welche ich hier nicht noch näher eingehen will, kann man sich durch graphische Darstellung (Fig. 335a und b, Taf. I) veranschaulichen[2]).

[1]) S. z. B. KERBER, Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 7, pag. 157. 1886, welcher findet dass die chromatische Correctur in der Zone $h = 0{\cdot}866\,h$ stattfinden müsse.

[2]) In diesen beiden Figuren sind der Deutlichkeit wegen die (langwelligen) rothen Strahlen nur auf der einen Seite der Axe angegeben, die (kurzwelligen) blauen nur auf der anderen Seite. Beide stellen Systeme vor, welche sphärisch für eine mittlere Wellenlänge — etwa Grüngelb, als der optisch intensivsten Stelle des Spectrums — corrigirt sind, für roth aber sphärisch unter-, für blau übercorrigirt. Chromatisch ist jedoch das System Fig. 335a in der centralen Zone (Axe) corrigirt; Fig. 335b für die Randzone. Im ersteren Falle haben die Randstrahlen, im letzteren Falle die nach der Axe zu gelegenen eine unverhältnissmässig grosse chromatische Längsabweichung ($c \cdot a$; $c' \cdot a'$) und bewirken einen ihrer Axenneigung entsprechenden Zerstreuungskreis. Der letztere wird am kleinsten bei chromatischer Correctur in einer mittleren Zone. Man kann z. B. offenbar die Oeffnung des Systems Fig. 335b so weit vermehren, dass seine Randstrahlen einen Zerstreuungskreis von gleicher Grö sse und Lage hervor bringen, als seine Axenstrahlen, ohne die chromatische Correction des gesammten Systems gegen vorher zu verschlechtern.

Die sphärische Aberration sucht man natürlich, wenn sie nur für eine Wellenlänge erreicht werden kann, für diejenige herzustellen, welche — je nach der Bestimmung des Instruments physiologisch, thermisch oder chemisch — den intensivsten Eindruck macht.

GAUSS[1]), welcher auf diese Umstände besonders nachdrücklich hinwies, gab auch bereits eine Construction für Fernrohrobjektive an, bei welcher die sphärische Aberration für zwei Wellenlängen und die chromatische für mindestens zwei Zonen des Systems gehoben ist. (Erster Vorschlag hierzu von D'ALEMBERT. Seitdem ist diese Construction und ähnliche mehrfach Gegenstand der Diskussion und Neuberechnung gewesen[2]), insbesondere ist eine analoge auch für Mikroskopobjektive angewandt worden[3]), bei welchen sie, entsprechend deren grösserer Apertur, auch überwiegende Vortheile gewährt, zumal, wenn gleichzeitig durch geeignete Wahl der Glasarten auch das secundäre Spectrum beseitigt ist[4]).

Variation des Aplanatismus mit der Wellenlänge. Damit neben der durch die Aufhebung der sphärischen Aberration herbeigeführten Abbildung eines axialen Objektpunkts noch die eines ihm seitlich benachbarten, d. h. die eines zur Axe senkrechten Flächenelements stattfinde, musste bei Systemen grosser Apertur der Bedingung genügt sein (pag. 118), dass für das betreffende Paar von Axenpunkten

$$\frac{n_1 \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const$$

sei. Damit bei solchen Systemen die Abbildung eines Flächenelements für mehrere Wellenlängen zugleich stattfinde, muss für diese auch die entsprechende Constanz der Sinusverhältnisse conjugirter Strahlen gleichzeitig bestehen. Soll z. B. Aplanasie für zwei unendlich benachbarte Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ vorhanden sein, so muss zu obiger Gleichung für λ noch die durch deren Variation nach λ sich ergebende hinzutreten:

$$\frac{du}{tang\, u} + \frac{dn}{n} = \frac{du'}{tang\, u'} + \frac{dn'}{n} + \frac{d\beta}{\beta} \qquad (13)$$

oder

$$\Delta\left(\frac{du}{tang\, u}\right) = -\Delta\left(\frac{dn}{n}\right) - \frac{d\beta}{\beta}.$$

ABBE[5]) hat Systeme, welche frei von sekundärem Spectrum und zugleich aplanatisch für mehrere Farben sind, als »apochromatische« bezeichnet und solche auf mehreren Gebieten praktisch realisirt.

Es würde nach Erfüllung von (13) jedoch noch eine für alle Zonen constante Verschiedenheit der Vergrösserung bestehen (Fig. 336, Taf. I), welche nach dem Rande des Sehfeldes zu wachsend in Geltung tritt. Soll auch diese in Wegfall kommen, so muss $d\beta = 0$ sein, und wenn $du = 0$ gesetzt, d. h. ein originäres oder sonst aberrationsfreies Objekt vorausgesetzt wird, so geht (13) in die Bedingung über

$$\frac{du'}{tang\, u'} = \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'}. \qquad (13a)$$

Die Grösse $\frac{du'}{tg\, u}$ und die chromatische Längsabweichung kann aus den Elementen, welche den Weg eines beliebig geneigten Strahls im Hauptschnitt eines centrirten Systems bestimmen,

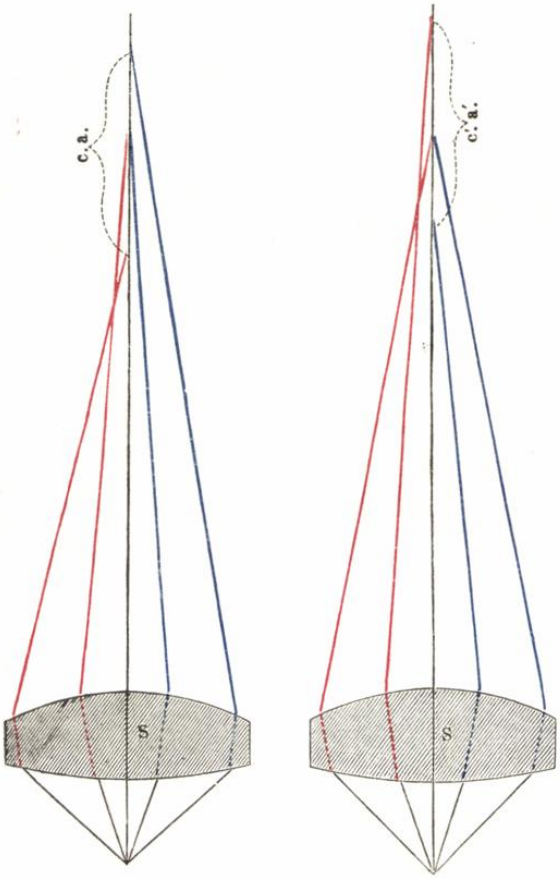
[1]) Zeitschr. f. Astronomie v. LINDENAU 4, pag. 345, Werke 5, pag. 507.

[2]) Eine (nicht ganz einwandsfreie) Zusammenstellung der Ergebnisse nebst Literaturnachweisen gab H. KRÜSS, Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 7, 53, 83. 1888.

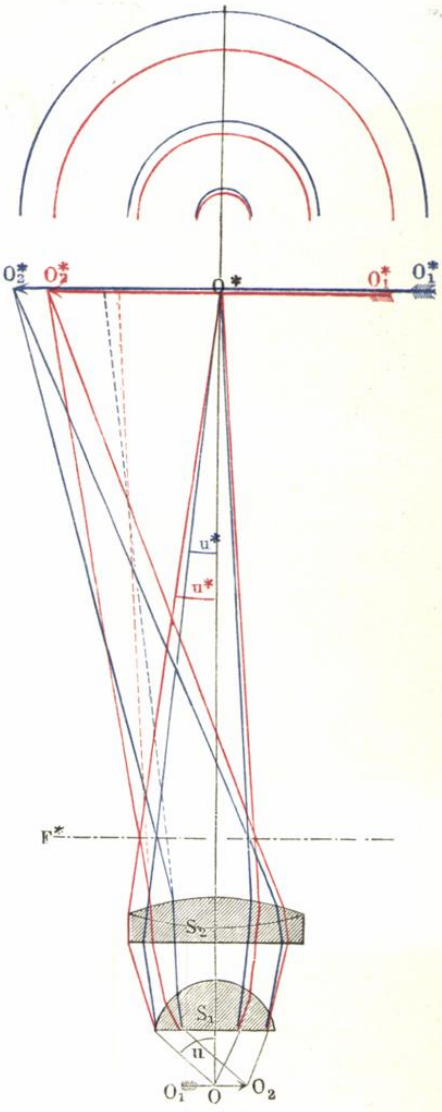
[3]) E. ABBE, Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 812. 1879.

[4]) E. ABBE, Sitzber. med. naturw. Ges. Jena f. 1887, pag. 107.

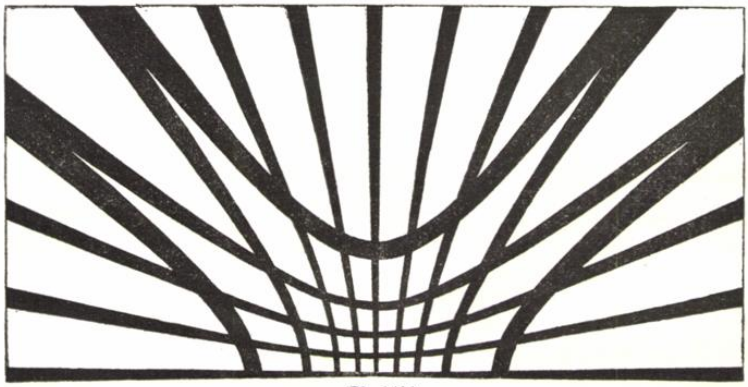
[5]) l. c. pag. 114.



(Ph. 335.)
zu pag. 149.



(Ph. 336.)
zu pag. 150.



(Ph. 343.)
zu pag. 175.

bequem von Fläche zu Fläche berechnet werden, so dass man nicht nöthig hat, die ganze Durchrechnung für jede Wellenlänge besonders auszuführen. Man hat nämlich zur Verfolgung eines Strahls beliebiger Wellenlänge durch irgend eine Fläche gemäss pag. 68/69 das Schema

(a)	$\frac{s-r}{r} \cdot \sin u = \sin i$	woraus	$\frac{du}{\operatorname{tang} u} + \frac{ds}{s-r} = \frac{di}{\operatorname{tang} i}$	(a')
(b)	$\frac{n}{n'} \sin i = \sin i'$	„	$\frac{di}{\operatorname{tang} i} + \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} = \frac{di'}{\operatorname{tang} i'}$	(b')
(c)	$u + (i' - i) = u'$	„	$du + di' - di = du'$	(c')
(d)	$\frac{r \sin i'}{\sin u'} = s' - r$	„	$\frac{di'}{\operatorname{tang} i'} - \frac{du'}{\operatorname{tang} u'} = \frac{ds'}{s'-r}$	(d')

daher schliesslich $\Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right) = -\Delta\left(\frac{du}{\operatorname{tang} u}\right) - \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)$

folgt. Ist also du und ds gegeben und der Strahl von der Wellenlänge λ festgelegt, so werden nach dem rechtstehenden Schema ds' und du' sehr einfach berechnet.

Die chromatischen Variationen der übrigen Kugelgestaltfehler: der Bildkrümmung, des Astigmatismus und der Orthoskopie sind selten Gegenstand der Untersuchung, bezw. ihre Aufhebung Gegenstand der Bemühungen gewesen. Allein die letztere, die Orthoskopie, muss bei manchen Gattungen von Instrumenten von der Variation mit der Wellenlänge unabhängig gemacht werden. Die Bedingung hierfür folgt ohne weiteres aus der entsprechenden Grundbedingung. $\frac{n \operatorname{tang} w}{n' \operatorname{tang} w'} = B$ (pag. 127).

Die Literatur über diesen Abschnitt ist theils im Text, theils in der dem vorigen Abschnitt angehängten Uebersicht mit aufgeführt worden. Da die sphärischen und chromatischen Fehler dem Zweck der optischen Instrumente, scharfe Bilder zu erzeugen, gleich hinderlich sind, so sind dieselben auch meistens im Connex mit einander behandelt worden. S. Czapski.

Prismen und Prismensysteme.

Der Specialfall, dass die die verschiedenen brechenden Medien trennenden Flächen sämmtlich die Krümmung Null haben, Ebenen sind, bietet ein hervorragendes praktisches Interesse und soll daher im Folgenden besonders diskutirt werden.

I. Weg eines einzelnen Strahls.

Derselbe ist innerhalb der Einfallsebene durch das Brechungsgesetz und durch die pag. 25 und 26 abgeleiteten Hilfssätze auch in Bezug auf eine beliebig anzunehmende andere Grundebene völlig bestimmt. Sind ϑ und φ die Winkel, welche die Projection eines Strahles auf eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene mit dem Strahl selbst bezw. mit jener Normalen bildet, ϑ' und φ' dieselben für die Projection des gebrochenen Strahls, i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so war ausser der Grundgleichung

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

noch

$$n \cdot \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \qquad (1)$$

und

$$n \cdot \sin \varphi \cos \vartheta = n' \sin \varphi' \cos \vartheta',$$

daher aus ϑ und φ auch ϑ' und φ' ohne weiteres berechenbar.