

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelman, Adolph

1894

Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen (Theorie der
sphärischen Aberrationen)

Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

(Theorie der sphärischen Aberrationen.)

Im Vorangehenden ist gezeigt, dass und in wie weit durch Brechung dünner Büschel an Kugelflächen eine Abbildung zu Stande kommt. Unter den gemachten Annahmen zeigte sich diese Abbildung als eine relativ sehr beschränkte: bei centraler Brechung war es nur ein fadenförmiger, die Axe des Systems umgebender Raum, in welchem allein eine »Abbildung« in unserem Sinne stattfand, und dieselbe kam nur zu Stande durch Büschel von unendlich kleiner Winkelöffnung. Die Strahlenvereinigung war dann von der zweiten Ordnung.

Bei schiefer Brechung war das Bereich der Abbildung noch mehr eingengt; man konnte von einer solchen nur reden, wenn man jeweilig gewisse ebene (zweidimensionale) Büschel in Betracht zog. Die Strahlenvereinigung war für die eine Art von Büscheln sogar nur von der ersten Ordnung; um eine gleiche Genauigkeit der Strahlenvereinigung zu haben wie im anderen Fall, müsste die Oeffnung dieser Büschel also entsprechend noch mehr eingengt werden. Das räumliche Büschel gab bei schiefer Einfall eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen zweier Raumgebiete eigentlich überhaupt nicht mehr. Diese, gewissermaassen eo ipso stattfindende Abbildung wäre nun für alle praktischen Zwecke gänzlich unzureichend. Die Bilder, welche sie ergiebt, sind ja einerseits unendlich klein bzw. es wird von einem gegebenen Objekt nur ein der Theorie nach unendlich kleiner Theil deutlich abgebildet. Andererseits können wir — unter Voraussetzung dieser später näher zu definirenden und zu erörternden Begriffe — auch schon jetzt schlechthin feststellen, dass die von »unendlich dünnen« Büscheln entworfenen Bilder unendlich lichtschwach wären und dass die »Bildpunkte« so enger Büschel, gemäss der Wellentheorie, als die Beugungswirkung entsprechend eng begrenzter Wellenflächen aufgefasst, statt Punkte vielmehr unendlich grosse Scheiben wären. Die von benachbarten Punkten des Objekts herrührenden Bildscheiben würden sich überdecken, statt eines scharfen Bildes, statt eines punktweisen Entsprechens würde also eine völlige Confusion entstehen, in welcher keinerlei Detail mehr erkennbar wäre.

Wenn wir andererseits die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel ohne weiteres steigerten, so würde, wie wir früher bereits flüchtig angedeutet haben, die Strahlenvereinigung im geometrischen Sinne mehr und mehr unvollkommen und aus diesem Grunde die Abbildung aufgehoben.

Aus diesem Dilemma zwischen anscheinend einander widersprechenden Anforderungen helfen wir uns auf drei, zum Theil zusammengehenden, Wegen. Der eine beruht auf der Unempfindlichkeit, d. h. beschränkten Sehschärfe unserer Augen, der zweite darauf, dass nach den Normen der physischen Optik die Grenzen der Beschränktheit für die eo ipso statthabende Abbildung füglich um ein beträchtliches Stück hinausgeschoben werden dürfen, der dritte und wichtigste endlich in der Möglichkeit, durch geeignete Combination optischer Systeme solche zu erhalten, an denen die früher constatirten Beschränkungen der

Abbildung zum Theil — und unter Umständen bis zu einem sehr erheblichen Grade — beseitigt sind.

ad 1) Alle Bilder sind in letzter Linie dazu bestimmt, dem Auge dargeboten zu werden. Dieses — selbst ein optischer Apparat, dessen nähere Einrichtung wir an späterer Stelle beschreiben werden — ist vermöge dieser seiner physikalischen und ebenso vermöge seiner anatomischen und physiologischen Natur auch seinerseits in seinen Leistungen mannigfach beschränkt. Unter anderem ist — unabhängig von aller weiteren Kenntniss seines Baues und seiner Funktionen — leicht die Thatsache festzustellen, dass das Unterscheidungsvermögen des Auges gewisse, wenn auch individuell etwas schwankende, Grenzen nicht übersteigt. Objekte — seien es selbst- oder mittelbarleuchtende, seien es ihrerseits optische Bilder, — welche dem Auge unter einem Schinkel dargeboten werden, der eine gewisse untere Grenze nicht erreicht, vermag es weder ihrer Form noch der Grösse nach von einander, also auch nicht von idealen »Punkten« zu unterscheiden¹⁾.

Die genannte Grenze mag ausser von dem Individuum noch von verschiedenen anderen Umständen (Helligkeit, Farbe des Objekts u. dergl.) abhängen — dies ist für uns hier ohne Belang — genug, es existirt eine solche. Ihr Vorhandensein aber entbindet uns von der Verpflichtung, behufs optischer Abbildung ideale Punkte herbeizuführen; wir können uns damit begnügen, das Bild aus Flecken bestehen zu lassen, deren Grösse nur unterhalb jener — wie gesagt von mehreren Umständen abhängigen — Grenze liegt.

Diese Erleichterung werden wir verschieden auslegen, je nachdem wir uns auf den Standpunkt der physischen oder der rein geometrischen Optik stellen. Gemäss letzterem würde hiernach eine Abbildung auch dann noch praktisch genügend sein, wenn die Strahlen nicht genau homocentrisch vereinigt werden, sondern statt eines Kegels ein Conoid bilden, dessen engste Einschnürung ein gewisses Maass nicht überschreitet. Statt des Bildpunktes würde dann der Querschnitt jener engsten Einschnürung, der »Kreis der kleinsten Verundeutlichung« functioniren. Demgemäss würde es erlaubt sein, bei jeder durch Brechung an sphärischen Flächen vermittelten Abbildung die Oeffnungen der wirklichen Büschel bis zu einer gewissen — von den Umständen des einzelnen Falls abhängigen — Grösse ohne weiteres zu vermehren.

Gemäss der Undulationstheorie würden diesem Schlusse Bedenken entgegenstehen. Denn bei ihm ist stillschweigend angenommen, dass auch in dem endlichen Querschnitt nicht homocentrischer Strahlen eine Lichtwirkung entstehe, ganz ebenso als wenn jeder Strahl schlechthin Träger von Licht sei. Diese Annahme, welche gewissen Untersuchungen in ganz ungerechtfertigter Ausdehnung zu Grunde gelegt ist, können wir aber durchaus nicht ohne weiteres anerkennen. Es bedarf besonderer, nach den Methoden der Diffraktionstheorie angestellter Untersuchung darüber, welcher Art die Lichtwirkung nicht homocentrischer Strahlen, d. h. nicht sphärischer Wellen auf irgend eine Einstellungsebene ist. Wir verdanken solche Untersuchungen AIRY²⁾ und mit besonderer Berücksichtigung der uns hier interessirenden Frage LORD RAYLEIGH³⁾. Dieselben sind noch lange

¹⁾ S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. das von HELMHOLTZ, 2. Aufl., § 18.

²⁾ Cambridge Phil. Trans., vol. VI. 1838.

³⁾ Phil. Mag. 9, pag. 410. 1879.

nicht so weit geführt, als für die Beantwortung dieser Frage nöthig wäre, indem sie sich auf die Bestimmung der Helligkeit des axialen Bildpunktes beschränken, die hier in erster Linie stehende Frage nach der Helligkeitsvertheilung ausserhalb der Axe aber noch ganz offen lassen. Sie führen uns jedoch mit einer wenig geänderten Auslegung ihrer Resultate auf dem zweiten der eingangs angeführten Wege zu einer zulässigen Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

ad 2) Statt nämlich nach der Helligkeit zu fragen, die eine Wellenfläche von gegebener Abweichung gegen die Kugelgestalt im Krümmungscentrum von deren Scheitel ergibt, können wir umgekehrt nach der Deformation der austretenden Wellenfläche fragen, welche zulässig ist, wenn jene Helligkeit einen gewissen Bruchtheil der normalen nicht unterschreiten soll. In dieser Form hat in der That RAYLEIGH diese Frage behandelt. Er findet, dass die Deformation der Wellenfläche gegen die sphärische nicht mehr betragen darf, als $\frac{1}{4}\lambda$ Abstand am Rande bei Coincidenz der Scheitel, wenn die Helligkeit nicht geringer als ca. 0.8 der normalen sein soll.

Ist nun ein optisches System vollständig gegeben, so lässt sich, z. B. durch trigonometrische Verfolgung mehrerer vom Objektpunkt aus divergirender Strahlen durch dasselbe (gemäss den Formeln pag. 68—69), deren Wellenfläche als Normale zu diesen Strahlen construiren und obige Regel von RAYLEIGH führt dann zu einer Bestimmung über die Oeffnung, welche man dem System d. h. den es durchsetzenden Strahlenbüscheln geben darf, ohne eine merkliche Verschlechterung des Bildes gewärtigen zu müssen.

Die Frage nach der seitlichen Ausbreitung des Lichts bleibt hierbei, wie bemerkt, ausser Acht, ebenso wie die nach dem wahren, d. h. günstigsten Einstellungsort auf der Axe offen bleibt. Immerhin giebt obige Regel doch einen ziemlich guten Anhalt für die Beurtheilung der Verhältnisse im Grossen und Ganzen. RAYLEIGH berechnet, dass $df = \frac{\lambda}{\alpha^2}$, wenn df die Längsaberration, α die vom Bildpunkt aus gemessene halbe angulare Oeffnung des Systems und λ die Wellenlänge des wirksamen Lichts ist und findet in Uebereinstimmung damit, dass eine einfache planconvexe Linse von ca. 1 m Brennweite gegenüber parallel auf die convexe Seite fallendem Lichte noch merklich gute Bilder giebt, wenn das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite bei ihr nicht grösser als 1 : 18 ist; ein sphärischer Spiegel sogar, wenn dasselbe Verhältniss nicht grösser als 1 : 14.

In der That kann man ja für manche Zwecke ohne erheblichen Nachtheil optische Instrumente benützen, die ohne besondere Wahl aus »einfachen« Linsen und Spiegeln zusammengesetzt sind, ohne deren Oeffnungen übermässig einengen zu müssen. Und man hat sich ihrer Jahrhunderte lang bedient, ehe man die künstlichen Mittel zur Vervollkommnung derselben erfunden hatte.

ad. 3. Diese Vervollkommnung zu erreichen ermöglicht uns nun der dritte und letzte der oben erwähnten Auswege: Wir können optische Systeme so combiniren, dass, wiewohl jedes einzelne — im geometrisch-optischen Sinne — nur die gewöhnliche ganz beschränkte Abbildung ergibt, bei dem resultirenden System jene Grenzen dennoch nach der einen oder der anderen Richtung hin, oder auch nach mehreren zugleich erheblich erweitert sind; sodass also ein System entsteht, welches homocentrische Abbildung entweder durch mehr oder minder weit

geöffnete Strahlenbüschel oder die eines grösseren Objektes durch relativ enge Büschel vermittelt.

Es mag aber gleich hier bemerkt werden, dass wir auch bei den nach dieser Richtung hinielenden Bestrebungen auf Grenzen stossen, die unüberschreitbar sind. Je weiter wir versuchen, in der einen Richtung die Beschränkungen der Abbildung zurückzuschieben, um so enger sind sie dann stets in anderen Richtungen. Je weiter die Oeffnung der abbildenden Büschel sein soll, desto enger wird, nach der Seite und in der Tiefe, das Gebiet des gleich vollkommen abbildbaren Raumes, desto mehr ist die Abbildung beschränkt auf singuläre Stellen des Raumes und umgekehrt. Die Bemühungen der Theorie und Praxis können dahin gehen, sich diesen durch die Natur der Brechung und der Kugelflächen gesetzten Grenzen möglichst zu nähern, aber es ist — das kann mit Sicherheit ausgesprochen werden — auch theoretisch unmöglich, mit den Mitteln der Dioptrik Abbildungen herzustellen, welche von jener idealen Vollkommenheit sind, die wir in unseren Betrachtungen über die allgemeine collineare Abbildung voraussetzten — Abbildungen eines beliebig grossen Raumes durch beliebig weite Büschel. Es sei denn, dass wir, auf jeden eigentlichen optischen Effekt verzichtend, uns mit einer blossen Umlagerung des Bildraumes gegen den Objektraum begnügen, ohne jede weitere Veränderung desselben. Diesen letzteren Effekt liefert uns, wie wir früher sahen, die Spiegelung an Ebenen, ohne Einschränkungen irgend welcher Art.

Die Erweiterung der Abbildung kann, wie schon bemerkt, nach zwei Richtungen hin geschehen: erstens dahin, dass die Oeffnung der abbildenden Büschel eine möglichst weite wird; zweitens dahin, dass möglichst grosse Objekte abgebildet werden. Die erstere Aufgabe kommt ersichtlich darauf hinaus, die von ein- und demselben Punkte ausgehenden, innerhalb eines endlichen Raumwinkels liegenden centralen und schiefen Elementarbüschel durch geeignet angeordnete Spiegelungen oder Brechungen so zu modificiren, dass sie sämtlich zuletzt wieder nach demselben (Bild-) Punkte convergiren. Bei der letzteren wird es sich zunächst nur darum handeln, in den einzelnen relativ engen Büscheln, die von verschiedenen Punkten eines Objekts ausgehen, wenigstens den Astigmatismus aufzuheben, um überhaupt eine eindeutige scharfe Abbildung mittels räumlicher Büschel zu erhalten. Diesen Anforderungen werden wir jedoch alsbald noch weitere nothwendig zu erfüllende beigesellen müssen.

Wir wenden uns der näheren Betrachtung dieser beiden Aufgaben zu. Um ihre Lösbarkeit zu übersehen müssen wir, namentlich den erstgenannten Punkt noch genauer studiren, als wir es bei der früheren Gelegenheit gethan haben; nämlich die im Allgemeinen mangelnde Homocentricität der von einem axialen Punkte innerhalb eines endlichen Winkelraums ausgehenden Strahlen nach der Spiegelung oder Brechung an centrirten Kugelflächen, den sogen. »Kugelgestaltfehler« oder die

Sphärische Aberration für Axenpunkte.

Wir haben früher gesehen, wie der Weg eines Strahls analytisch bei der Brechung an einer Kugelfläche zu bestimmen ist. Wir fanden (pag. 69) zwischen den Abständen s, s' des Objekt- und Bildpunkts vom Scheitel S der brechenden Fläche und denen vom Einfallspunkt P, p und p' die Beziehung

$$n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p}, \quad (1)$$

welche nichts anderes war als eine Transformation der optischen Invariante

$$Q = n \cdot \sin i = n' \sin i'.$$

Hierin ist

$$p^2 = (s - r)^2 + r^2 + 2r(s - r) \cos \varphi,$$

ebenso

$$p'^2 = (s' - r)^2 + r^2 + 2r(s' - r) \cos \varphi,$$

wenn φ der (halbe) Oeffnungswinkel der brechenden Fläche, d. h. ihr Centriwinkel ist. Tragen wir diese Werthe oben ein, so wird

$$\frac{n'(s' - r)}{\sqrt{(s' - r)^2 + r^2 + 2r(s' - r) \cos \varphi}} = \frac{n(s - r)}{\sqrt{(s - r)^2 + r^2 + 2r(s - r) \cos \varphi}}. \quad (2)$$

Entwickeln wir hier die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und den $\cos \varphi$ in die äquivalente Potenzreihe, so erhalten wir schliesslich nach geeigneten Reductionen s' , die Schnittweite des gebrochenen Strahls auf der Axe ausgedrückt durch eine nach den Potenzen von φ fortschreitende Reihe; und da gleichen aber entgegengesetzten Werthen von φ offenbar gleiche Werthe von s' entsprechen, so enthält diese Reihe nur die geraden Potenzen von φ . Sie ist also von der Form

$$s' = s_0' + A\varphi^2 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + \dots \quad (3)$$

Hätten wir in der ursprünglichen Gleichung φ durch u ersetzt oder durch irgend eine andere den Einfallspunkt des auffallenden Strahls bestimmende Grösse, so hätten wir analoge Entwicklungen nach diesen Grössen erhalten, etwa nach u' die Reihe

$$s' = s_0' + a'u'^2 + b'u'^4 + c'u'^6 + \dots \quad (4)$$

oder dergl.

Die Coëfficienten dieser Reihen sind nach obiger Anweisung zu entwickeln. Diese Arbeit ist eine ziemlich umständliche, aber wiederholt ausgeführt. Wir wollen hier nur die Coëfficienten der zweiten Potenzen herleiten, welche noch durch relativ sehr einfache Ausdrücke dargestellt sind und daher eine gewisse Uebersicht der von ihnen abhängigen Momente gestatten. Bei Systemen von relativ geringer Oeffnung, wie den Fernrohren ist das deren Quadrat proportionale Glied natürlich auch das numerisch bedeutendste, daher an sich von besonderem Interesse. Bei Systemen von sehr grosser Oeffnung, wie den Mikroskopobjektiven, gewährt die Betrachtung dieses zweiten Gliedes der Reihe allerdings geradezu gar keinen Anhalt zu irgend welchen Schlüssen. In diesem Falle, in welchem z. B. u oft nahe $= 90^\circ$ ist, gewährt aber die Reihenentwicklung überhaupt keinen Nutzen, während für die Theorie anderer Instrumente allerdings das dritte und auch das vierte Glied der Reihe fast stets noch mit herangezogen werden muss. Betreffs der Entwicklung dieser letzteren verweisen wir auf die vorhandene Literatur¹⁾.

¹⁾ Folgt am Schlusse dieses Abschnitts.

Das erste Glied der sphärischen Aberration auf der Axe.

Methode. Gehen wir nochmals auf den veränderten Ausdruck für die optische Invariante Q bei einer Brechung unter beliebigem endlichem Winkel zurück, den wir noch beiderseits durch r dividiren, also

$$Q = \frac{n(s-r)}{p \cdot r} = \frac{n'(s'-r)}{p' r}. \quad (1)$$

Diese Invariante muss sich auch ihrerseits als eine Potenzreihe darstellen lassen, mit irgend einer, die Einfallshöhe des Strahls bestimmenden Grösse, z. B. dem Oeffnungswinkel φ der brechenden Kugel, als Variablen. Das constante Glied dieser Reihe muss in jedem Falle $= Q_0$ sein, d. i. gleich der Invariante für paraxiale Strahlen. Die Coëfficienten der Potenzreihe selbst werden das eine Mal die Elemente des einfallenden, das andere Mal die des gebrochenen Strahls enthalten und zwar in genau gleichartiger Weise.

Wir können also ein Mal

$$Q = Q_0 + q\varphi^2 + \dots,$$

das andere Mal

$$Q = Q_0 + q' \cdot \varphi^2 + \dots$$

setzen.

Da wir uns hier auf die quadratischen Glieder beschränken wollen, so brechen wir die Entwicklung bei diesen ab. Alsdann folgt aber aus der Identität der linken Seiten beider Gleichungen, dass auch $q = q'$ sein muss.

Auf diesem Wege, welcher auch für die Berechnung aller anderen »Aberrationen« sehr vortheilhaft ist, gelangen wir in relativ einfacher Weise zu Invarianten für die höheren Glieder der Reihenentwicklung.

Entwicklung. Wir schreiben (1) in der Form

$$Q = n \frac{s}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \frac{s'}{p'} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{s'} \right), \quad (1a)$$

und entwickeln p gemäss dem eben angegebenen Ausdruck nach φ . Vernachlässigen wir hierbei alle Grössen, welche mit höheren Potenzen von φ als der zweiten multiplicirt auftreten, so erhalten wir

$$p = s \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{n s_0} Q_0 \varphi^2 \right),$$

worin s_0 der Grenzwert von s für paraxiale Strahlen ist, welcher der für diese geltenden Gleichung

$$Q_0 = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0} \right), \quad (1*)$$

genügt.

Hiernach ist die gesuchte Grösse

$$\frac{s}{p} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{n s_0} Q_0 \cdot \varphi^2.$$

Ganz analog muss

$$\frac{s'}{p'} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{n' s_0} Q_0 \cdot \varphi^2$$

sein.

Es sind nun noch s und s' selber in eine Reihe nach φ zu entwickeln. Denken wir uns zu dem Zwecke diese Grössen erst nach u bzw. u' entwickelt, also

$$\begin{aligned}s &= s_0 + \alpha \cdot u^2 + \dots \\ s' &= s_0' + \alpha' u'^2 + \dots,\end{aligned}$$

worin u selbst mit r , p und φ durch die Gleichung

$$\sin u = \left(\frac{r}{p}\right) \cdot \sin \varphi$$

zusammenhängt, so ergibt letztere, unter Vernachlässigung von dritten Potenzen der Variablen

$$u = \left(\frac{r}{p}\right) \varphi$$

und, unter Vernachlässigung von Gliedern, die mit der vierten und höheren Potenzen von φ multiplicirt sind, folgt hieraus

$$u^2 = \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \cdot \varphi^2,$$

also

$$s = s_0 + \alpha \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \varphi^2 = s_0 \left(1 + \alpha \frac{r^2}{s_0^3} \cdot \varphi^2\right),$$

endlich

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \alpha \frac{r^2}{s_0^4} \varphi^2$$

und ganz ebenso

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \alpha' \frac{r'^2}{s_0'^4} \cdot \varphi^2.$$

Demnach erhalten wir Q nach einigen Reductionen in den beiden Formen,

$$Q = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n} \cdot \frac{r^2}{s_0} + n \alpha \frac{r^2}{s_0^4}\right] \varphi^2$$

und

$$Q = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0'^2}{n'} \frac{r'^2}{s_0'^4} + n' \alpha' \frac{r'^2}{s_0'^4}\right] \varphi^2,$$

woraus wir gemäss der eingangs angestellten Ueberlegung folgern

$$\frac{2n\alpha}{s_0^4} + \frac{Q_0^2}{ns_0} = \frac{2n'\alpha'}{(s_0')^4} + \frac{Q_0'^2}{n's_0'},$$

oder in unserer früher benützten Schreibweise

$$\Delta \left(\frac{2n\alpha}{s_0^4}\right) = -Q_0^2 \Delta \left(\frac{1}{ns_0}\right). \quad (5)$$

Bei dieser Entwicklung ist ausdrücklich angenommen, dass auch das einfallende Büschel bereits mit sphärischer Aberration behaftet sei; andernfalls wäre $\alpha = 0$ und obige Gleichung ergäbe ohne Weiteres den Werth von α' . In ihrer jetzigen Form könnte sie nur auf indirektem Wege dazu dienen,

aus den gegebenen Elementen des einfallenden Strahls — zu welchen auch α gehört — die des austretenden, also α' , zu berechnen.

Die Werthe und Vorzeichen von α und von α' sind, wie aus ihren Einführungs-
gleichungen hervorgeht, ganz besonders charakteristisch für Art und Grösse der
sphärischen Aberration. Es ist $\alpha = \frac{s - s_0}{u^2}$ und ebenso $\alpha' = \frac{s' - s_0'}{u'^2}$. Bei gleichem
Oeffnungswinkel u des Büschels ist, also α ein unmittelbarer Ausdruck für die
Differenz der Schnittweiten vom Rand- und Axenstrahl des Büschels, die sogen.
Längs- oder Longitudinalaberration.

Bei einer einzelnen nach dem Lichte zu convexen Fläche und ebenso bei
relativ dünnen Collectivlinsen ist, für parallel einfallendes Licht wenigstens stets,
 $s' < s_0'$. Man spricht dann von sphärischer »Untercorrection«. Umgekehrt bei
einer nach dem Lichte zu concaven Fläche oder dünnen Dispersivlinse.

Das einfallende Büschel mag homocentrisch sein oder in irgend welchem
Grade selbst unter- bzw. übercorrigirt, durch eine einmalige collective Brechung
wird es — bei parallelem Einfall wenigstens stets — nach der Richtung der
Unter correction, durch eine einmalige dispansive Brechung nach der Richtung der
Ueber correction verändert.

Das Vorzeichen von α bzw. α' lässt nun unmittelbar erkennen, ob das be-
treffende Büschel unter- oder übercorrigirt ist. Denn mag der Vereinigungspunkt
des Büschels reell oder virtuell sein, ein negativer Werth von α bzw. α'
bedeutet Unter-, ein positiver Werth Ueber correction.

Denkt man sich die Gesammtheit der Strahlen des betr. Büschels gezeichnet,
etwa wie in Fig. 304, pag. 32, so erhält man als Einhüllende sämmtlicher Strahlen
ein Stück von deren Brennfläche. Diese Brennfläche bildet nun, wie man sich
leicht überzeugt, bei negativem Werthe von α (sphärischer Unter correction) einen
nach dem einfallenden Lichte hin offenen Kelch $>$, bei positivem α (Ueber-
correction) einen umgekehrt gelegenen $<$.

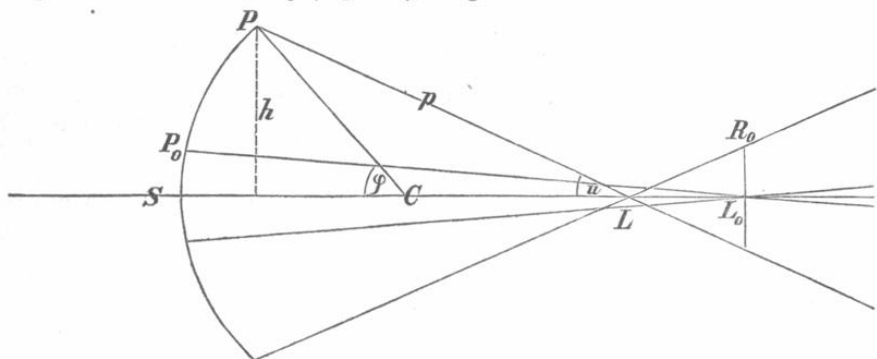
Seitliche Aberration. Zerstreuungskreis. Bei einem nicht homocen-
trischen Büschel ist es innerhalb ziemlich weiter Grenzen a priori ganz ungewiss,
an welche Stelle der Axe das eigentliche Bild zu verlegen sei, d. h. welche
Stelle der Axe bei der Beobachtung faktisch als Bildort aufgefasst werde. Hier-
über sind wohl mehrfache Hypothesen aufgestellt und mit mehr oder minder
ansprechenden Wahrscheinlichkeitsgründen gestützt worden¹⁾, aber weder ist eine
genügend exakte experimentelle Prüfung derselben erfolgt, noch sonst eine
Einigkeit in diesem Punkte herbeigeführt worden.

Wie ich schon früher hervorhob ist nach meiner Meinung die theoretische
Lösung auch dieser Frage überhaupt nicht auf dem Boden der geometrischen,
sondern dem der physischen Optik anzustreben, was bisher meines Wissens nir-
gends geschehen ist. Mir scheint gerade als sicher, dass nicht schlechthin die
engste Einschnürung des austretenden Lichtbüschels als Bild aufgefasst wird,
sondern dass es — wie wohl zuerst GAUSS hervorgehoben hat (s. weiter unten
»Aberration höherer Ordnung«) — auf die Vertheilung der Intensität inner-

¹⁾ S. die in der Literaturübersicht angeführten Werke. Die meisten Autoren verlegen die
Bildebene in die engste Einschnürung des Strahlenconoids. Vergl. auch CZAPSKI, Zeitschr. f.
Instrkde. 8, pag. 203. 1888.

halb des Lichtflecks ankommt, welcher hier an Stelle eines Bildpunktes auftritt. Man nennt diesen Lichtfleck bekanntlich »Zerstreuungskreis«. Ohne weiteres zuzugeben ist nur, dass *cæteris paribus* die Grösse desselben das in letzter Linie entscheidende Maass für die in einem Büschel vorhandene sphärische Aberration bildet. Denn je grösser diese Lichtflecke sind, desto grösser ist, wenn ich so sagen darf, das Mosaik, als welches jedes Bild annähernd aufgefasst werden kann, d. h. desto weniger Detail ist im Bilde wiedergegeben. Auf die Wiedergabe des im Objekte vorhandenen Detail sind aber ganz vornehmlich die optischen Konstruktionen gerichtet.

Indem wir nun darauf verzichten, die wahre Grösse des Zerstreuungskreises bei gegebenem Gange der sphärischen Aberration eines Büschels zu bestimmen, begnügen wir uns vielmehr damit, ein Maass für dessen relative Grösse zu statuiren, indem wir die Fiction machen, das Bild werde im Vereinigungspunkte der paraxialen Strahlen, L_0 (Fig. 324), aufgefasst. Der sich bei dieser Annahme



(Ph. 324.)

ergebende Zerstreuungskreis, der Schnitt der in L_0 zur Axe senkrechten Ebene mit den äussersten Randstrahlen (dessen Halbmesser in der Figur $= R_0 L_0$ ist) übertrifft sicher den faktisch wahrnehmbaren, vielleicht um das doppelte oder vierfache¹⁾. Immerhin bietet er — oder auch ein gewisser festgesetzter Bruchtheil desselben — ein durchweg vergleichbares Maass für die Grösse der Aberration und gerade zu seiner Berechnung ist unsere Formel besonders geeignet.

Wir haben nämlich für den Durchmesser z des Zerstreuungskreises in einem Büschel von der Winkelöffnung $2u$

$$\frac{1}{2}z = (s_0 - s)u = -\alpha u^3,$$

also

$$\frac{2n\alpha}{s^4} = -\frac{nz}{u^3 s^4} = -\frac{nu \cdot z}{u^4 s^4} = -\frac{(nu) \cdot z}{h^4};$$

demnach wird unsere Aberrationsgleichung

$$\Delta(nu \cdot z) = h^4 Q_0^2 \Delta\left(\frac{1}{ns_0}\right). \quad (6)$$

(Den Index 0, welcher darauf hinweisen sollte, dass sich die betreffenden Grössen für paraxiale Strahlen verstünden, können wir fortan wohl wieder weglassen ohne ein Missverständniss befürchten zu müssen.)

Das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Oeffnungswinkels eines Büschels (welcher letztere für kleine Winkel mit dem Winkel selbst identisch

¹⁾ Manche Autoren haben das eine, manche das andere angenommen, was bei einer Vergleichung der unten folgenden Zahlen mit den von Jenen erhaltenen zu beachten ist.

ist) hat ABBE die numerische Apertur des Büschels genannt. Dasselbe ist eine der wichtigsten Grössen in der Theorie der optischen Instrumente. Bezeichnen wir es mit a , so haben wir in obiger Gleichung ein Mittel zur Berechnung der Veränderung, welche das Produkt aus Apertur und Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration bei irgend einer, durch die Werthe von n , r , s und h gegebenen Brechung eines Büschels erfährt.

Objektives Maass der Bildverschlechterung durch Aberration. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung der sphärischen Aberration eines Systems ist nun aber nicht so sehr auf die Grösse des Zerstreuungskreises im Bilde gerichtet, noch weniger auf dessen Grösse in irgend einem Zwischenstadium der Bilderzeugung, wie es hier ermittelt ist. Sondern was namentlich zu wissen interessirt ist: der Einfluss den die mit irgend einer Brechung verbundene Aenderung der Aberration auf das Erkennen der Details des Objectes ausübt.

Der Zerstreuungskreis, in dem von k brechenden Flächen hervorgebrachten Bilde nimmt in diesem einen gewissen Raum ein. In welchem Grade dieser Zerstreuungskreis die Deutlichkeit des Bildes beeinflusst, erfahren wir, indem wir nach derjenigen Grösse im Objecte fragen, deren Bild nach denselben k Brechungen gleich dem Zerstreuungskreis wäre (also faktisch von diesem verdeckt wird), wenn diese Brechungen ohne Aberrationen erfolgten, aplanatische Abbildung ergäben.

Nach dem LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Satze ist nun (s. pag. 77) immer für kleine Winkel

$$n' u' y' = n u y,$$

auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn n , y und u sich auf das auf die erste Fläche einfallende Büschel beziehen, n' , y' und u' auf das aus der letzten austretende. Demgemäss haben wir für die Grösse des Objectes z_0 , dessen Bild nach der k ten Brechung $= z_k'$ ist

$$n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 z_0 = a_1 z_0,$$

wenn n_1 und u_1 Brechungsexponent des ersten Mediums und halbe Winkelöffnung des einfallenden Büschels sind.

Die früher betrachtete Brechung sei die k te in irgend einem System; alsdann wird durch die angegebene Substitution

$$\Delta(z_0) = \frac{1}{a_1} h_k^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \quad (7)$$

der Ausdruck für die durch die k te Brechung herbeigeführte Verundeutlichung des Bildes, gemessen am Object selber.

Derselbe wird bequem berechenbar, wenn wir ihn durch Erweiterung mit h_1^4 auf die Form bringen

$$\Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n}\right)^4 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \quad (8)$$

indem nämlich, wie leicht zu sehn, mit genügender Annäherung für die Verhältnisse der Höhen, in welchen der äusserste Randstrahl eines ziemlich engen

Büschels die einzelnen Flächen schneidet, dieselben für einen paraxialen Strahl geltenden Verhältnisse gesetzt werden können, also

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{s_k}{s'_{k-1}},$$

demnach

$$\frac{h_k}{h_1} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \cdot \frac{s_{k-1}}{s'_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{s_2}{s'_1}.$$

Um die Verundeutlichung des Objektes zu finden, welche durch alle k Flächen zusammen hervorgebracht, also nach der k ten Brechung thatsächlich vorhanden ist, hat man nur einfach die einzelnen Bild deteriorationen zu summieren, also

$$Z_0^{(k)} = \sum \Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^4 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \quad (8a)$$

Dieser Ausdruck ist im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahls ausserordentlich bequem zu berechnen. Derselbe gilt ohne jede Einschränkung auf gegenseitigen Abstand oder Zahl der brechenden Flächen.

Hervorzuheben ist, dass der Einfluss der sphärischen Aberration auf die Deutlichkeit der Abbildung mit der dritten Potenz der numerischen Apertur des einfallenden Büschels wächst.

Unendlich ferne Objekte. Bei solchen kann die Bildverschlechterung füglich nicht mehr in linearem, sondern muss in ihrem angularen Betrage angegeben werden. Für diesen, $\zeta_0 = \frac{z_0}{s_1}$, ergibt sich leicht aus Gleichung (8) für jede Brechung

$$\Delta(\zeta_0) = h_1^3 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \quad (9)$$

also nach k Brechungen

$$\zeta_0^{(k)} = \sum \Delta(\zeta_0) = h_1^3 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \quad (9a)$$

Der Einfluss der sphärischen Aberration zweiter Potenz ist also bei teleskopischem Sehen, dem Cubus der linearen Oeffnung des Systems bezw. des einfallenden Büschels proportional.

Der zu summierende Theil der rechten Seite in (9a) ist, wie man sich leicht überzeugt, umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite des Gesamtsystems¹⁾. Bezeichnen wir also den Werth, den diese Summe für die Brennweite 1 des Gesamtsystems hat mit K , so ist

$$\zeta = \left(\frac{h_1}{f}\right)^3 \cdot K.$$

Die vom ersten Gliede der axialen sphärischen Aberration abhängige Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also proportional der dritten Potenz der relativen Oeffnung des Systems. Der Faktor K hängt von der

¹⁾ Wenn wir voraussetzen, dass das System nicht selbst ein »teleskopisches« sei, gemäss unserer früheren Definition, sondern etwa nur ein Theil eines solchen, z. B. das Objectivsystem eines Fernrohrs.

spezifischen Zusammensetzung des Systems ab, d. h. von den besonderen Werthen der Krümmungen, Brechungsverhältnisse, Abstände.

Der Winkelwerth des durch die sphärische Aberration verursachten Zerstreuungskreises ist, wie aus (9a) weiterhin zu schliessen ist, unabhängig von der absoluten Grösse der Brennweite des Systems bei gegebenem Constructionstypus.

Wenn daher die Optiker für Fernrohrobjektive des gleichen Typus die relative Oeffnung, d. h. das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite ($2h:f$) bei kleinen Dimensionen bis zu $\frac{1}{5}$ steigern, während sie es auf $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{20}$ einschränken bei den grossen Teleskopen, so sind die Gründe hierfür anderwärts zu suchen.

Man kann aus den Formeln (8a) und (9a), wenn dies ein Interesse bietet, auch leicht die im Bilde vorhandene Längsaberration berechnen, d. h. die Differenz der Schnittweiten, welche zwischen dem nach k Brechungen austretenden äussersten Rand- und dem Axenstrahl vorhanden wäre, wenn die Aberration nur der zweiten Potenz der Oeffnung proportional wäre. Man hat hierzu nur die Einführungsgleichung für den Zerstreuungskreis $\frac{1}{2}z = (s_0 - s)u$ zu berücksichtigen und den auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreis, gemäss der LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Gleichung $u'u'y' = nu y$ wieder in das Bild zu projiciren.

Es wird bei Objekten in endlicher Entfernung

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'} \right)^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1} \right) Z_0^{(k)} = -\frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1} \right) Z_0^{(k)}; \quad (8b)$$

bei unendlich entfernten Objekten

$$(s' - s_0')_k = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{h} \right) f \zeta_0^{(k)}. \quad (9b)$$

Die Formel (8a) wie (9a) haben eine praktische Bedeutung nur dann, wenn die Apertur der wirksamen Büschel eine so geringe ist, dass das erste Glied der sphärischen Aberration die den höheren Potenzen der Apertur proportionalen an Grösse erheblich übertrifft. Dies ist bei den Teleskopobjektiven gewöhnlich der Fall, weshalb auf diese Anwendung findende Formeln schon vor langer Zeit — wenn auch anfänglich unter einschränkenden Voraussetzungen — entwickelt und zur Berechnung solcher Objektive benützt worden sind.

In der Gestalt, welche wir oben diesen Formeln gegeben haben, gestatten dieselben, wie bereits bemerkt, besonders bequem, wenn man rechnerisch ein paraxiales Büschel durch ein System hindurch verfolgt, daneben den Einfluss jeder einzelnen Brechung auf die Grösse der Aberration zu verfolgen und auf diese Weise die Faktoren kennen zu lernen, von denen dieselbe in den verschiedenen möglichen Fällen vorzüglich abhängt. Dieser Vorzug geht verloren, wenn man die unter dem Summenzeichen angedeuteten Operationen ausführt und auf diese Weise eine Reihe bildet, deren Glieder aus den Radien, Brechungsverhältnissen und Scheitel-Abständen der brechenden Flächen zusammengesetzt sind. Doch gewährt eine solche Reihenentwicklung bei Systemen einfacherer Art wiederum den Vortheil, dass man die Wirkung des ganzen Systems mathematisch besser discutiren kann.

Aberration in einfachen Sonderfällen.

Die durch eine einzige Brechung hervorgerufene Aberration ist nach (8) dargestellt durch

$$\Delta(z_0) = (nu)^3 \left(\frac{s}{n}\right)^4 n^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right). \quad (10)$$

Dieselbe ist also gleich Null 1) wenn $s = 0$ ist, woraus auch $s' = 0$ folgt, also Objekt und Bild im Scheitel zusammenfallen. 2) Wenn $s = r$ ist, demnach auch $s' = r$ also Objekt und Bild im Mittelpunkt der brechenden Fläche

zusammenfallen, und 3) wenn $n's' = ns$, woraus folgt $s = r + \frac{n'}{n} r$; $s' = r + \frac{n}{n'} r$,

d. i. in den aplanatischen Punkten der Kugelfläche. In diesem Falle, ebenso wie in den beiden vorangehenden sind auch die Aberrationen höherer Ordnung gleich Null, wie wir früher (pag. 68) bereits gefunden haben.

Im übrigen hängt das Vorzeichen der Aberration von dem des Faktors $\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right)$ ab, welchen wir auf die Form bringen können

$$\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} = \frac{n' - n}{n'^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{n' + n}{n} \frac{1}{s}\right).$$

Eine nähere Discussion zeigt, dass sowohl bei einer collectiven als bei einer dispansiven Brechung die Aberration je nach der Lage des leuchtenden Punktes positiv oder negativ, d. h. unter- oder übercorrigirt ist. Nur für ein unendlich entferntes Objekt ist $\Delta(z_0)$ bei einer collectiven Brechung stets positiv, bei einer dispansiven Brechung stets negativ.

Hat man es mit zwei durch einen endlichen Abstand getrennten Flächen zu thun, so werden die Verhältnisse schon etwas schwerer zu übersehen. Wir verzichten hier auf ein näheres Eingehen; wir wollen nur beiläufig darauf hinweisen, dass man sowohl unter Benützung der aplanatischen Punkte der beiden Flächen als auch unter Berücksichtigung des Umstandes, dass, wie eben bemerkt, die Aberration derselben Fläche je nach der Lage des Objektpunktes verschiedenes Vorzeichen hat, zwei Flächen so zusammensetzen kann, dass die Aberration des Gesamtsystems — etwa einer beiderseits an Luft grenzenden Linse — bei gegebener endlicher Brennweite gleich Null sei.

Die Aberration einer beiderseits an dasselbe Medium grenzenden Linse von verschwindender Dicke, deren Vorderfläche die Krümmung ρ , deren Hinterfläche die Krümmung ρ' und deren Substanz den relativen Index n gegen das umgebende Medium hat, für unendlich fernen Objektpunkt ergibt sich aus (9a), gemessen durch den objektseitigen Winkelwerth des Zerstreuungskreises zu

$$\zeta = h^3 \left[\frac{n+2}{n} \varphi \rho^2 - \frac{2n+1}{n-1} \varphi^2 \rho + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \varphi^3 \right], \quad (11)$$

wenn $\varphi = (n-1)(\rho - \rho')$ die Stärke der Linse ist. Dieselbe wird also, in Funktion von ρ durch eine Parabel dargestellt, deren Axe senkrecht zur Axe der ρ -Werthe ist.

Damit die Brennweite oder Stärke der Linse bei gegebenem n dieselbe bleiben, muss $\rho - \rho' = k$ constant sein. Wenn man also ρ variirt, so ist vorausgesetzt, dass ρ' im gleichen Sinne und um den gleichen Betrag geändert werde, man bezeichnet eine solche gleichartige Variation von ρ und ρ' oft als »Durchbiegen« der Linse.

Die Aberration einer einfachen dünnen Linse ist ein Minimum für

$$\rho_{min} = + \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n-1} \frac{n}{n+2} \cdot \varphi$$

und beträgt dann

$$\zeta_{min} = (h\varphi)^3 \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2 4(n+2)}.$$

In der folgenden Tabelle sind für $n=1.5$ und $n=2.0$ die Werthe, die ζ bei verschiedener Form der Linse annimmt, zusammengestellt.

Gestalt der Linse:	$n=1.5$			$n=2.0$		
	ρ/φ	ρ^1/φ	$\zeta'/(h\varphi)^3$	ρ/φ	ρ^1/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$
Ebene Vorderfläche . . .	± 0	-2	$+9$	± 0	-1	$+4$
Gleichseitig	$+1$	-1	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$
Ebene Hinterfläche . . .	$+2$	± 0	$+\frac{7}{3}$	$+1$	± 0	$+1$
Günstigste Form (Aberration = Minimum)	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{15}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{8}$

Wie man sieht, nehmen die Aberrationen unter sonst gleichen Umständen mit wachsendem n rasch ab.

Wenn der Objektpunkt anders gelegen wäre, als oben angenommen, so würde die Aberration im wesentlichen dasselbe Gesetz befolgen. Nur würde z. B. das Minimum der Aberration dann bei einer anderen Gestalt stattfinden.

Indem wir die Discussion dieses Falles dem Leser anheimgeben, wollen wir nur noch die Aberration in einem System von beliebig vielen in Contact befindlichen Linsen von zu vernachlässigender Dicke besprechen. Die Brennweiten der Linsen seien gegeben durch deren Reciproken, die »Stärken« $= \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k \dots \varphi_p$. Die Krümmungen der dem Lichte zugewandten Flächen seien $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_k \dots \rho_p$ die Brechungsindices der Linsen gegen das sie umgebende Mittel, (etwa Luft¹⁾) $= n_1, n_2 \dots n_k \dots n_p$.

Bei unendlicher Entfernung des Objekts ist dann die Aberration gemäss (9a)

$$\zeta_0^{(p)} = h_1^3 \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{n_k+2}{n_k} \varphi_k \rho_k^2 - \frac{2n_k+1}{n_k-1} \varphi_k^2 \rho_k - \frac{4n_k+1}{n_k} \varphi_k \rho_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l \right. \\ \left. + \left(\frac{n_k}{n_{k-1}} \right)^2 \varphi_k^3 + \frac{3n_k+1}{n_k-1} \varphi_k^2 \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l + \frac{3n_k+2}{n_k} \varphi_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l^2 \right]. \quad (12)$$

¹⁾ Die Fiction, dass alle Linsen sich in Luft befinden, ist auch dann erlaubt, wenn in Wirklichkeit zwei Medien verschiedenen Indicis aneinanderstossen, da man sich diese durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt denken kann, ohne an der Wirkung etwas zu ändern.

Wie man sieht besteht die ganze Summe aus lauter Gliedern von der Form $G_k = A_k \rho_k^2 + B_k \rho_k + C_k$. Das erste Glied dieser Art stellt die Aberration der ersten Linse gegenüber parallel einfallendem Lichte dar, die wir oben näher betrachtet haben. Das k te Glied stellt den Zuwachs der Aberration dar, den die k te Linse verursacht, auf welche die Strahlen aus der Entfernung $c_k = 1 : \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_i$ einfallen, nämlich aus dem hinteren Brennpunkt des aus den voranstehenden $(k-1)$ Linsen gebildeten Systems. Die Coefficienten dieser Glieder hängen daher ausser von n_k , ρ_k und φ_k auch noch von $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ ab.

Der durch jede einzelne Linse bewirkte Zuwachs der Aberration wird also unter den gegebenen Umständen in Funktion ihrer Vorderkrümmung ebenfalls durch je eine Parabel dargestellt, deren Axe zur (Abscisse) Axe der ρ senkrecht steht, aber für die verschiedenen Linsen verschiedene Lage hat. Denkt man sich die Gesammtheit der Aberrationswerthe jeder Linse in dieser Weise graphisch dargestellt, so gewinnt man am besten einen Ueberblick über die Möglichkeit und die Bedingungen der Aufhebung der Aberration des Gesamtsystems durch gegenseitige Compensation.

Im Falle zweier Linsen z. B. ist nothwendig, dass die Aberration der zweiten Linse für die aus der Entfernung $\frac{1}{\varphi_1}$ einfallenden Strahlen entgegengesetzt gleich sei der der ersten Linse für parallel einfallende Strahlen. Dies wird im allgemeinen nur dann möglich sein, wenn die ersten Brennweiten der beiden Linsen entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die eine Linse collectiv, die andere dispansiv ist, während das Verhältniss der absoluten Grössen der Brennweiten ein beliebiges endliches sein kann. Alsdann aber ist die Aufhebung der Aberration auf unendlich viele Arten möglich, denn von dem grösseren der beiden Minimalwerthe der die Aberrationen darstellenden Parabeln an kommt jeder Ordinatenwerth in jeder Parabel zwei Mal vor. Von da an können daher zu jedem Aberrationswerth, d. h. jeder Form der einen Linse zwei Formen der anderen Linse angegeben werden, in welchen sie die Aberration der ersteren aufhebt.

Analytisch ist die Bedingung der aufzuhebenden Aberration 1. Ordnung in einem aus zwei Linsen bestehenden System, gemäss (12) dargestellt durch eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten.

Wir müssen uns ein näheres Eingehen auf diesen für die Theorie der Fernrohrobjective wichtigen Fall wegen Mangel an Raum leider versagen, ebenso die Discussion der in Combinationen von 3 und 4 Linsen auftretenden Möglichkeiten.

Ausser einer vollständigen Aufhebung der Aberration durch gegenseitige Compensation kann man durch Anwendung mehrerer Linsen auch schon eine erhebliche Verminderung dieser Aberration bewirken. Ersetzt man z. B. eine einfache Linse von der Stärke $\Phi = (n-1)(P-P')$ durch k Linsen gleicher Substanz, gleicher Form (etwa alle gleichseitig oder dergl.) und gleicher Gesamtbrennweite, so dass also $\sum \varphi_k = \Phi$, so wird die Aberration der letzteren dargestellt durch einen Ausdruck von der Form $M \frac{1}{k^2} + N \frac{1}{k}$, worin M und N von der Substanz und Form der Linsen abhängen. Die Aberration des Gesamtsystems nimmt also mit wachsendem k schnell ab.

Wenn die Dicken der Linsen gegen deren Radien endlich, oder die Linsen durch grössere Intervalle getrennt sind, so erfahren alle diese Sätze erhebliche Modifikationen.

Ganz ebenso wie für einen unendlich fernen Punkt lässt sich aus Gleichung (8) bzw. (8a) für einen in endlichem Abstand gelegenen ein geschlossener Ausdruck für die Aberration ableiten, wenn das System gegeben ist. Dieser Ausdruck wird ganz gleichartig jenem, nur dass in seinen Coëfficienten ausser den das System als solches bestimmenden Grössen auch jene Entfernung s des Objektpunktes von der ersten brechenden Fläche auftritt. Für ein System dünner Linsen wird er also ebenso wie Gleichung (12) in einer Summe von Gliedern der Form $G_k' = A_k' \rho_k^2 + B_k' \rho_k + C_k' \rho_k$ bestehen. Durch ein System zweier Linsen von gegebener Brennweite lässt sich daher — analytisch wenigstens — der Bedingung genügen: die sphärische Aberration erster Ordnung für zwei Punkte auf der Axe zu heben. Es ergeben sich vier Lösungen, von denen natürlich noch fraglich ist, welche reell sind. Um die Aberration für drei Punkte zu heben, bedarf es mindestens dreier Variablen, also bei gegebenen Werthen von n und φ dreier Linsen u. s. f. Um die Aberration erster Ordnung für ein endliches Stück der Axe gleichzeitig zu heben, müsste man demnach unendlich viele Linsen anwenden, mit anderen Worten: es ist praktisch unmöglich, auch nur diesen, relativ geringen Grad dioptrischer Vervollkommenung in einem endlichen Raumgebiet zu erreichen.

Wir begegnen also schon hier einer der Grenzen, auf welche wir pag. 99 hingewiesen haben. —

Die höheren Glieder der sphärischen Aberration auf der Axe. Das dem Quadrat der Apertur proportionale, erste Glied des Ausdrucks für die sphärische Aberration wird die letztere im Allgemeinen nur dann einigermaassen vollständig darstellen, wenn die Apertur im Verhältniss zu den Radien der brechenden Flächen sehr klein ist. Da aber aus mehreren Gründen das Bestreben der Constructeure von optischen Apparaten darauf gerichtet sein muss, die Apertur möglichst gross zu machen, so sind für eine Berechnung der Aberration in solchen Systemen auch die höheren Glieder der Entwicklung noch zu berücksichtigen.

Wie bereits früher erwähnt (pag. 100) hat die Darstellung der Aberration durch eine nach Potenzen der Einfallshöhe, des Einfallswinkels oder dergl. fortschreitende Potenzreihe einen Sinn und Werth überhaupt nur dann, wenn diese Variable relativ klein ist, da bei grösseren Werthen entsprechend hohe Potenzen berücksichtigt werden müssten. Die Coëfficienten derselben werden aber bald so complicirt und enthalten zugleich so hohe Potenzen der verfügbaren Elemente (Radien und Dicken), dass an eine analytische Behandlung derselben kaum zu denken ist. Einer solchen Behandlung hat sich nur noch das der vierten Potenz der Apertur proportionale zweite Glied der Reihe zugänglich erwiesen, auf dessen Entwicklung wir jedoch hier aus Mangel an Raum auch verzichten, indem wir auf die Literatur verweisen (s. unten). Man erreicht natürlich eine vollkommene Strahlenvereinigung, wenn man gleichzeitig mit dem ersten Gliede das zweite durch geeignete Wahl der Linsen-Krümmungen zum Verschwinden bringt.

In einem System aus zwei Linsen ist dies bei den verfügbaren Werthen der Brechungsindices meist unmöglich; und auch dann, wenn mehr Linsen zur Verfügung stehen, ist es nicht von vornherein als das Beste zu erachten, wenn das erste und zweite Glied der Aberration ganz auf Null gebracht wird, ohne dass man die höheren Glieder mit berücksichtigt, da diese dann unter Umständen einen um so schädlicheren Einfluss ausüben können. Im Allgemeinen ist man vielmehr bei dieser, wie bei allen ähnlichen Aufgaben, welche auf eine Erweiterung der Abbildungsgrenzen gerichtet sind, gezwungen, ein gewisses Ausgleichungsverfahren anzuwenden: Man verzichtet darauf, den betreffenden Bildfehler in

aller Strenge aufzuheben, und sucht vielmehr zu erreichen, dass derselbe innerhalb des gegebenen Gebietes überall möglichst klein werde. Dabei kommen die im Eingange dieses Abschnittes genannten beiden Momente zu statten: die beschränkte Schärfe des Auges, welche es überflüssig macht, den »Bildpunkt« unter eine gewisse Grösse zu vermindern und die, wenn auch kleine, so doch endliche Länge der Lichtwellen, welche eine Summirung der Lichtstärke ergiebt, auch bei Elementarwellen, die um geringe Beträge gegen einander verzögert sind. Von diesem Ausgleichungsverfahren dürfte, in der Anwendung auf den vorliegenden Fall, die übersichtliche Darstellung von GAUSS eine Idee geben, welche dieser in einem Briefe an BRANDES niedergelegt hat. Wir geben dieselbe daher hier wörtlich wieder (nach GEHLERS, Physikal. Wörterb., Leipzig 1831, Art. Linsenglas, Bd. 6, pag. 437)¹⁾.

... »Ich finde nämlich jetzt durch eine tiefer eindringende Untersuchung, dass die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrücke für die Längen-Abweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Axe abhängt, den möglichst kleinsten Total-Einfluss hat, wenn man das Objectiv so construirt dass diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Axe einfallen, und diejenigen, die in einiger Entfernung $= R \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$ auffallen würden, (wö R = Radius des Objectivs ist,) in einem Punkte A sich vereinigen, wobei das Okular dann so steht, dass man denjenigen Punkt der Axe, wo die Strahlen, die in der Entfernung $= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6}\right)} R$ und $= \sqrt{\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6}\right)} R$ von der Axe aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken Sie sich nämlich durch diesen Punkt eine auf die Axe senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je grösser der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objectes auf das Objectivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, dass die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muss. Hierbei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte für das zweckmässigste, hier nach denselben Principien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nämlich ds ein Element dieses Kreises, ρ die Entfernung des Elementes von A und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, dass $\int i \rho^2 ds$ als das Maass der Total-Undeutlichkeit zu betrachten sei, und mache dieses zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1) Construirte man das Objectiv so, dass dasjenige Glied der Längen-Abweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Axe abhängt, $= 0$ wird, und setzte das Ocular so, dass A dahin fällt, wo die der Axe unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Werth dieses Integrals $= E$. 2) Stellte man aber bei derselben Einrichtung das Ocular so, dass das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann, (wobei A der Vereinigungspunkt der in der Entfernung $= R\sqrt{\frac{1}{2}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4}E$; 3) dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vortheilhaftesten Stellung des Oculars das Integral $= \frac{1}{10}E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, dass nämlich mit dem Vereinigungspunkte der der Axe unendlich nahen Strahlen ein blos fingirtes Bild (von Strahlen aus grösserer Distanz von der Axe als der Halbmesser des Objectivs) vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste so genannte Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Axe) ist nämlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität; viel wichtiger ist, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objectivs unter sich besser zusammen gehalten werden, was bei jener Einrichtung

¹⁾ Siehe auch Werke 5, pag. 509.

am besten erreicht wird. Es thut mir leid, dass die Grenzen eines Briefes jetzt grössere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Calcül lässt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonement übersieht man leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

Allgemein finde ich, dass immer bei der vortheilhaftesten Stellung des Oculars jenes Integral $= \frac{1}{4}E(1 - \frac{8}{5}\mu^2 + \frac{8}{5}\mu^4)$ wird, wenn das Objectiv so construirt ist, dass Strahlen aus der Entfernung μR von der Axe sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dieses ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{6}{5}}$ und ist dann $= \frac{1}{100}E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60}E$ und für $\mu =$ unendlich klein $= \frac{1}{4}E$.

Eine Ausführung der von GAUSS angedeuteten Rechenoperationen veröffentlichte J. C. E. SCHMIDT¹⁾. Zu dem gleichen Resultate wie GAUSS kam BESSEL²⁾ und SCHEIBNER³⁾; vergl. auch SCHLEIERMACHER⁴⁾. In anderer Weise bestimmten die Lage und Grösse des sphärischen Zerstreuungskreises KERBER⁵⁾ und von HOEGH⁶⁾.

Wir haben wiederholt hervorgehoben, dass es zwecklos ist, Speculationen in dieser Richtung zu weit zu treiben, so lange man nicht auch auf die Phase der den Zerstreuungskreis schneidenden »Strahlen« d. h. Elementarwellen Rücksicht nimmt. Die Aufgabe, die Helligkeitsvertheilung in irgend einer Einstellungsebene eines mit sphärischer Aberration behafteten Systems zu bestimmen, kommt in Wahrheit darauf hinaus: die Diffractionswirkung einer nicht sphärischen, sondern nach bestimmtem Gesetze paraboloidischen, begrenzten Wellenfläche festzustellen, gehört also eigentlich nicht in das Gebiet der geometrischen, sondern der physischen Optik. Die erstere kann nur die Unterlagen für die weitere Behandlung liefern.

Bei Systemen von relativ grosser Oeffnung, wie den photographischen (Porträt-) Objectiven und namentlich den Mikroskopen genügt auch die Entwicklung des zweiten und dritten Gliedes der sphärischen Aberration nicht, um die thatsächlichen Verhältnisse selbst nur annähernd wiederzugeben. Eine Reihenentwicklung bis zu noch höheren Gliedern — und bei Mikroskopen würde sich dieselbe bis zu sehr hohen erstrecken müssen — würde aber ganz unverhältnissmässig complicirte Resultate liefern⁷⁾, die keinerlei Uebersicht mehr gestatteten. In diesen Fällen ist man daher darauf angewiesen, sich von der Art der Strahlenvereinigung in einem gegebenen System dadurch zu überzeugen, dass man auf trigonometrischem Wege, gemäss den pag. 68/69 angegebenen Formeln eine genügende Anzahl der vom Objektpunkte aus divergirenden Strahlen durch die einzelnen Flächen verfolgt und so ihre Schnittpunkte mit der Axe nach der letzten Brechung bestimmt.

Die Einsicht, welche man auf diesem, gewissermaassen empirischen Wege in die Wirkungsweise der einzelnen Flächen und der Combinationen von solchen gewinnen kann, lässt sich natürlich sehr schwer weiter mittheilen, so dass

¹⁾ Lehrb. der analytischen Optik hrsg. v. GOLDSCHMIDT, Göttingen 1834, pag. 514 ff.

²⁾ Astron. Unters., Königsberg 1841, Bd. I.

³⁾ Abh. d. Leipz. Akad. 11, pag. 559. 1876.

⁴⁾ Analytische Optik, Darmstadt 1842, Bd. 1, pag. 14 u. 378 ff.

⁵⁾ Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 8, pag. 145. 1887; 10, pag. 147. 1889.

⁶⁾ Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 117. 1888; vergl. dagegen CZAPSKI, *ibid.*, pag. 203, und MOSER, pag. 223.

⁷⁾ Vergl. z. B. PETZVAL, Bericht über opt. Unters., Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857, welcher zur Berechnung des nach ihm benannten photographischen Porträtobjectives die Reihenentwicklung bis zum neunten Grade trieb.

schliesslich Jeder darauf angewiesen bleibt, sich dieselbe durch eigene Erfahrung anzueignen. Auch sind die Resultate im einzelnen von wenig Interesse für weitere Kreise, sondern gehen fast ausschliesslich Diejenigen an, welche sich mit der rechnerischen Construction von optischen Systemen befassen.

Von Wichtigkeit ist nur — namentlich in praktischer Hinsicht — das allgemeine Ergebniss, welches solche Bemühungen geliefert haben: dass es möglich ist, auch in Büscheln von sehr grossem Oeffnungswinkel durch geeignete Combination einer relativ geringen Anzahl von brechenden Flächen die sphärische Aberration praktisch aufzuheben, d. h. auf ein so geringes Maass zu reduciren, dass ihr Einfluss auf die Bildschärfe unmerklich ist und jedenfalls geringer wird, als der anderer Faktoren, welche eine beliebige Steigerung der Bildschärfe ohnedies verhindern.

Bei Mikroskopen speciell kann der Oeffnungswinkel der vom Objekt divergirenden Strahlen nahezu 180° sein und er kann dies selbst in einem höher brechenden Medium als Luft — wodurch ja, wie ohne weiteres ersichtlich und später noch näher dargelegt werden soll, der dioptrische Werth des Büschels entsprechend gesteigert wird. Trotzdem ist eine durchaus befriedigende Aurbhebung der sphärischen Aberration in solchen Systemen durch Combination von nicht mehr als 15 Brechungen, d. h. brechenden Flächen, möglich, mit welchen zugleich noch mehreren anderen wichtigen Bedingungen Genüge geleistet werden kann. Bei Systemen, deren Oeffnungswinkel nicht 180° in Luft übersteigt, genügen hierzu bereits 10—12 Brechungen.

II. Abbildung eines zur Axe senkrechten Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel.

Bedingung des Aplanatismus.

Mit der Aufhebung der sogen. sphärischen Aberration auf der Axe, d. h. mit der Einrichtung eines Systems brechender oder spiegelnder Flächen, dass die von einem auf der Axe gelegenen Punkte ausfahrenden Strahlen wieder in einem auf der Axe gelegenen Punkte — oder sehr kleinen Scheibchen — vereinigt werden, ist geometrisch und physisch (letzteres gemäss dem Satze vom kürzesten Lichtweg, pag. 30) die Abbildung des einen Punktes in den anderen gegeben. Da alle Functionen eines Linsensystems sich stetig ändern, so wird bei einem System von geringer Oeffnung mit der Abbildung eines auf der Axe gelegenen Punktes jedenfalls auch die — wenn auch entsprechend weniger scharfe — Abbildung eines ihm seitlich benachbarten und damit die eines zur Axe senkrechten den ersteren Punkt enthaltenden Flächenelements durch ebenso weit geöffnete Büschel *co ipso* gegeben sein. In Systemen von erheblicher endlicher Oeffnung jedoch ist dies, wie eine nähere Betrachtung zeigt, durchaus nicht der Fall; es muss dann vielmehr in den Büscheln, welche die Abbildung des Axenpunktes vermitteln, eine ganz bestimmte Beziehung unter den conjugirten Strahlen vor und nach dem Durchgang durch das System bestehen, damit die Abbildung auch nur eines unendlich kleinen axialen Flächenstücks ermöglicht werde.

Von allgemeineren Fragen ausgehend, als uns hier beschäftigen, hatte CLAU-SIUS in seiner bekannten Abhandlung über »die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung«¹⁾ nachgewiesen, dass, wenn die gesammte Energie, welche von einem Flächenelemente dq in einem Medium

¹⁾ POGG. Ann. 121, pag. 1. 1864 Mech. Wärmetheorie, 3. Aufl. I, pag. 315. 1887.

vom Brechungsindex n , innerhalb des unendlich kleinen Raumwinkels $d\omega$ ausgestrahlt wird, übertragen wird auf ein Element dq' , in einem Medium vom Index n' , dann die Beziehung stattfindet

$$\frac{n^2 \cos u \, d\omega}{n'^2 \cos u' \, d\omega'} = \frac{dq'}{dq}.$$

Hierin ist $d\omega'$ der unendlich kleine Raumwinkel, innerhalb dessen die Strahlung auf das Element dq' stattfindet, u und u' sind die Winkel, welche die Axen der Strahlenbündel mit den zugehörigen Flächennormalen bilden.

Für die Ableitung dieser Gleichung ist nur von dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und einigen anderen Beziehungen ganz allgemeiner Natur Gebrauch gemacht. Auch gilt dieselbe für einen viel allgemeineren Fall als den hier betrachteten, nämlich ganz unabhängig davon, durch welche Mittel die von dq ausgehenden Strahlen auf dq' concentrirt werden, ob dies z. B. durch continuirliche oder abrupte Aenderung der Strahlenwege geschieht, unabhängig auch von der gegenseitigen Lage der Elemente dq und dq' u. s. w. Es stellt diese Gleichung daher die allgemeinste Beziehung dar, welche zwischen den in sie eintretenden Grössen unter den angegebenen Umständen besteht und ebenso ist auch ihre Herleitung bei CLAUSIUS auf die denkbar allgemeinste Grundlage gestellt.

Angewandt auf ein optisches System mit einer Symmetriaxe, zu welcher dq und dq' senkrecht stehen, ergibt die Gleichung als Bedingung für die Abbildung eines Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel die Beziehung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta = \text{const},$$

welche wir alsbald auf einem anderen Wege herleiten wollen.

Direkter bewies denselben Satz v. HELMHOLTZ¹⁾ auf photometrischer Grundlage als Bedingung der Erhaltung der Leuchtkraft bei der Strahlung von dq innerhalb eines Kegelraums von der Oeffnung u auf dq' innerhalb der Oeffnung u' . Endlich hat auch HOCKIN²⁾ einen Beweis geliefert, den kürzesten und einfachsten wohl, welcher möglich ist, indem er die Bedingung dafür aufsuchte, dass die optischen Längen zwischen conjugirten Punkten für zwei seitlich benachbarte Paare von Punkten auf allen innerhalb eines endlichen Winkelraums möglichen Weg je einander bis auf unendlich kleine Grössen gleich seien.

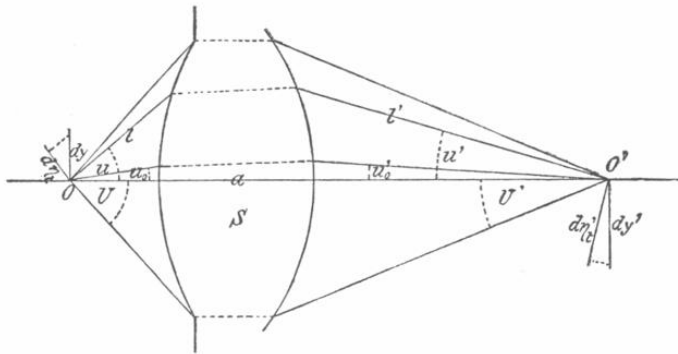
So werthvoll alle diese Herleitungen sind, namentlich durch die allgemeinere Bedeutung, welche sie dem Satze geben, so will ich mich doch damit begnügen, auf sie hingewiesen zu haben, den Satz selbst aber auf einem anderen Wege beweisen, welcher die uns hier in erster Linie interessirende dioptrische Bedeutung desselben deutlicher kenntlich macht, die bei jenen Ausführungen wohl fast ganz versteckt bleibt. Die Giltigkeit des Satzes zeigt sich auch unter diesem Gesichtspunkte als eine so weitgehende, dass er als eines der allgemeinsten Theoreme der Dioptrik bestehen bleibt.

Wir setzen auch unsererseits nichts weiter voraus, als dass ein optisches System ganz beliebiger Zusammensetzung vorliege, welches eine Symmetriaxe besitzt, »centrirt« ist, und in welchem für die Punkte O und O' der Axe die sphärische Aberration aufgehoben ist. Ein bei O zur Axe senkrecht Flächenelement dq werde (Fig. 325) durch die der Axe unendlich nahe verlaufenden Strahlen in das bei O' ebenfalls zur Axe senkrechte Element dq' abgebildet, so dass die lineare Lateralvergrößerung in diesen Elementen $\frac{dy'}{dy} = \beta_0$ ist. Die abbildenden Strahlen

¹⁾ Pogg. Ann., Jubelbd., pag. 557. 1874.

²⁾ Journ. R. Micr. Soc. Ser. 2, Vol. 4, pag. 337. 1884.

seien durch eine auf der Axe senkrechte kreisförmige Blende so begrenzt, dass überall nur Strahlen von der Maximalneigung U gegen die Axe in das System



(Ph. 325.)

ein- und solche von der Maximalneigung U' aus ihm austreten können. Die Bedingung dafür, dass das Element dq durch alle von ihm innerhalb dieser Grenzen ausfahrenden Strahlen in dq' hinreichend deutlich abgebildet werde, kann dann offenbar auch

so gefasst werden, dass diese Elemente durch alle Partial-Büschel, deren Axen bei der Incidenz irgend eine Neigung zwischen 0 und U haben — wenigstens bis auf unendlich kleine Abweichungen — mit gleicher Vergrößerung in einander abgebildet werden.

Wie wir wissen (pag. 94), repräsentirt nun jeder ein System unter endlichen Einfallswinkeln durchsetzender Strahl die Axe zweier räumlich und metrisch verschiedener collinear Abbildungen: einer in der Einfallsebene des Strahls, im Meridianschnitt, und einer senkrecht dazu, im Sagittalschnitt verlaufenden. Beide sind auf unendlich schmale Streifen nahe der Axe beschränkt, in Bezug auf die abbildenden wie die zur Abbildung gelangenden Elemente. Wir sahen ferner, dass in einem centrirten optischen System sich dieses Verhältniss entlang dem gebrochenen Weg, den der Hauptstrahl durch dasselbe nimmt, fortsetzt. Innerhalb jeder Gruppe werden Linienelemente dy senkrecht zum einfallenden Hauptstrahl abgebildet in Linienelemente, welche unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von der zweiten Ordnung senkrecht auf dem gebrochenen Hauptstrahl stehen, wobei im Besonderen innerhalb jeder Partial-Abbildung die Beziehung fortbestehen bleibt

$$\beta \cdot \gamma = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{du'}{du} = \frac{n}{n'}.$$

Wir betrachten einen von O unter dem Winkel u gegen die Axe geneigt ausfahrenden Strahl l , welchem der unter dem Winkel u' gegen die Axe geneigte nach O' zielende Strahl l' entspricht. Wenn keine weiteren Annahmen gemacht werden als bisher geschehen, so kann u' jede beliebige stetige Function $f(u)$ von u sein, mit der einzigen Bedingung, dass sie für $u=0$ selbst verschwindet, also dass $f(0)=0$. Von den beiden Abbildungen, deren Objektaxe l und deren Bildaxe l' ist, werden sowohl Linienelemente, die zu l und l' , als auch solche, die zur Axe a des ganzen Systems bei O senkrecht stehen, im Allgemeinen mit verschiedener Vergrößerung wiedergegeben, so dass also ein bei O zu a oder l senkrechter Kreis als eine zu a oder l' senkrechte Ellipse dargestellt wird.

Bei der senkrecht zur Einfallsebene sich vollziehenden Abbildung nämlich ist das Convergenzverhältniss conjugirter Strahlen in O und O' , $\gamma_s = \frac{dv'}{dv}$, in folgender Weise zu bestimmen. Wir denken uns die Fig. 325 um den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ um die Axe a gedreht; dann sind die Winkel, welche

die Strahlen l und l' in ihrer neuen Lage mit den früheren einschliessen die in Betracht kommenden dv und dv' , und es ist leicht zu sehen, dass

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{\sin u'}{\sin u}.$$

Die im Sagittalschnitt bei O und O' zu l und l' (und zur Zeichenfläche) senkrecht stehenden Linienelemente $d\eta_s$, $d\eta_s'$ ferner stehen auch senkrecht zu a , gehören also den Flächenelementen dq bzw. dq' an und sind folglich identisch mit dy bzw. dy' . Daher ist gemäss der Fundamentalgleichung $\beta\gamma = n/n'$ hier

$$\beta_s = \left(\frac{d\eta'}{d\eta}\right)_s = \left(\frac{dy'}{dy}\right)_s = \frac{n \sin u}{n' \sin u'}. \quad (1)$$

Es variirt also die Vergrößerung der Linienelemente im Sagittalschnitt mit dem Winkel u wie das Verhältniss $\sin u / \sin u'$. Damit β_s für alle Winkel u das gleiche sei, muss $\sin u / \sin u' = \text{const}$ sein, innerhalb der Grenzen 0 und U und da für $u = 0$, $dy'/dy = \beta_0$ ist, so ergibt sich als Bedingung der Abbildung eines Paares zur Axe senkrechter Linienelemente durch sagittale Büschel verschiedener endlicher Axenneigung, dass

$$\beta_s = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = \text{const} \quad (2)$$

sei, also

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0. \quad (2a)$$

Die in der Einfallsebene (im Meridianschnitt) gelegenen, zu l und l' bei O und O' senkrechten Linienelemente $d\eta_t$, $d\eta_t'$ sind nicht identisch mit den in diesem Schnitt gelegenen Elementen dy_t , dy_t' der Flächenelemente dq , dq' , sondern bilden mit diesen bzw. die Winkel u , u' . Für erstere ist nach der Gleichung $\beta\gamma = n/n'$

$$\left(\frac{d\eta'}{d\eta}\right)_t = \frac{n du}{n' du'},$$

wo $du'/du = f'(u)$ die Derivirte von $u' = f(u)$ ist. Die zur Hauptaxe a senkrechten Elemente sind aber

$$dy_t = \frac{d\eta_t}{\cos u}, \quad dy_t' = \frac{d\eta_t'}{\cos u'};$$

daher für diese¹⁾ das Vergrößerungsverhältniss

¹⁾ Genau genommen ist das Bild eines zu a senkrechten, also gegen l unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - u$ geneigten Linienelements nicht wieder ein zu a senkrechtes, d. h. gegen l' unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - u'$ geneigtes, sondern gemäss den Gesetzen der innerhalb dieses beschränkten Gebietes vorhandenen collinearen Abbildung eine Linie, welche der Bedingung genügt

$$\frac{n \operatorname{tg} u'}{n' \operatorname{tg} u} = \frac{dy_t'}{dy_t} \left(\text{statt } \frac{n \operatorname{tg} u}{n' \operatorname{tg} u'} = \frac{dy_t'}{dy_t} \right).$$

Dem gegenüber ist aber daran zu erinnern, dass einerseits die Strahlenvereinigung in Meridianschnittbüscheln überhaupt nur von der ersten Ordnung ist, d. h. dass von der Abbildung eines Elements in ein anderes nur in soweit die Rede sein kann, als man Zerstreuungskreise vernachlässigt, welche unendlich klein sind gegen die Dimensionen des abzubildenden Elementes selbst (vergl. pag. 86 u. 92). Mit derselben Annäherung muss man sich also bei der Lösung der ganzen Aufgabe begnügen, wenn dieselbe allgemein bleiben soll. Mit dieser Annäherung kann aber, wie leicht ersichtlich als Bild des zu a senkrechten Elements dy_t durch Meridionalbüschel entlang l das wie oben bestimmte ebenfalls zu a senkrechte Element dy_t angenommen werden. Die von den einzelnen Punkten von dy ausgehenden Strahlen durchstossen dy in Punkten, welche von der durch die oben angegebenen Beziehungen bestimmten Mittellage nicht weiter entfernt sind als bis auf Abweichungen, welche gegen die Grössen dy , dy' selber unendlich klein sind. Mit dieser Annäherung müssen wir uns hier begnügen.

$$\beta_t = \left(\frac{dy'}{dy} \right)_t = \frac{n \cos u \, du}{n' \cos u' \, du'} = \frac{n d(\sin u)}{n' d(\sin u')}. \quad (3)$$

Damit β_t unabhängig von u und für $u = 0$ gleich β_0 , d. i. gleich dem Vergrößerungsverhältniss für paraxiale Strahlen sei, muss wiederum

$$\beta_t = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = \text{const}, \quad (4)$$

also

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0$$

sein. Die Bedingung der Abbildung eines Paares von Linienelementen durch Büschel verschiedener endlicher Neigung zur Axe ist also für meridionale Büschel die gleiche wie für sagittale: Das Verhältniss der Sinus conjugirter Axenwinkel muss für die von den conjugirten Axenpunkten ausgehenden Strahlen innerhalb des betreffenden Winkelraums ein constantes sein. Der Werth der Constanten ist die Vergrößerung der paraxialen Strahlen β_0 multiplicirt mit dem Verhältniss der Brechungsexponenten des Objekt- und Bildmediums.

ABBE¹⁾, welcher zuerst den Sinussatz als die dioptrische Bedingung der Abbildung von Flächenelementen durch Büschel endlicher Oeffnung hingestellt hat, will den Begriff des »Aplanatismus« überhaupt eingeschränkt haben auf Punktepaare, welche neben der Bedingung der Strahlenvereinigung auch noch der obigen des constanten Sinusverhältnisses genügen. In diesem Sinne bleiben die früher (pag. 68) sogen. aplanatischen Punktepaare der Kugel, nämlich die im Scheitel, die im Mittelpunkt coincidirenden und die von letzterem in den Entfernungen $c = \frac{n}{n'} r$ und $c' = \frac{n'}{n} r$ gelegenen als solche bestehen, während z. B. die Brennpunkte des Ellipsoids, sowie der des Paraboloids und der unendlich ferne (für reflektirte Strahlen) diese Eigenschaft nicht besitzen.

Liegt der Objekt- oder Bildpunkt in unendlicher Entfernung, so wird die Bedingung des Aplanatismus, d. h. Erzeugung mässig ausgedehnter Bilder, wenn sphärische Aberration in der Axe aufgehoben ist,

$$\frac{h}{\sin u'} = \text{const} = f_0' \quad \text{bezw.} \quad \frac{h'}{\sin u} = \text{const} = f_0, \quad (4a)$$

wenn h und h' die Einfallshöhen von Strahlen bedeuten, welche parallel zur Axe einfallen bzw. austreten, u' und u die Neigungswinkel der ihnen conjugirten Strahlen, f_0 und f_0' die Brennweiten der paraxialen Strahlen. Wie man sich leicht überzeugt, ist dann die Brennweite der Partialbüschel im Meridianschnitt $f_t = f_0 / \cos u$, also variabel mit u , während dieselbe im Sagittalschnitt $f_s = f_0 = \text{const}$ ist.

Die genaue Erfüllung der Sinusbedingung ist natürlich desto kritischer, je grösser der Winkel U oder U' und damit der Spielraum der überhaupt möglichen Abweichungen des Sinusverhältnisses von der Constanz ist. Bei Mikroskop-objektiven grösserer Apertur können diese Abweichungen bis zu 50% und selbst mehr des Normalwerthes gehen. Um ebenso viel variirt dann die Vergrößerung durch die betreffenden Zonen des Objektivs. Unter solchen Umständen ist aber das brauchbare Sehfeld fast gleich Null, die Zerstreuungskreise eines Punktes ausser der Axe bei gleichzeitiger Abbildung durch auseinanderliegende Theile der Oeffnung werden von gleicher Grössenordnung wie seine Entfernung von der Axe, d. h. wie die Bildgrösse selbst.

ABBE hat (l. c., pag. 310) ein frappantes experimentelles Kriterium für die

¹⁾ Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 420. 1873; und Rep. f. Exp. Physik 16, pag. 303. 1881.

Constanz des Sinusverhältnisses angegeben. Mittels desselben konnte er feststellen, dass in allen in Gebrauch befindlichen Mikroskopsystemen grösserer Oeffnung, woher sie auch stammen mochten, diese Bedingung sehr nahe erfüllt war, trotzdem sie damals den Optikern noch durchaus unbekannt war und diese sämtlich ihre Systeme nur durch Tatonnement, — empirisch unter Controle des Auges — und nicht nach bewussten Regeln construirten. So unerlässlich ist ihre Erfüllung für eine befriedigende Wirkung in solchen Fällen.

Die Erfüllung der Sinusbedingung gewährleistet die Abbildung eines Paares von Flächenelementen. Ihre Erfüllung führt nicht die Abbildung ausgedehnter Flächen herbei, wenn die Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel sehr gross sind, und sie ist im Widerspruch mit der Abbildung mehr als eines Paares von Flächenelementen an verschiedenen Stellen der Axe.

Denn was das erstere betrifft, so ist daran zu erinnern, dass wir uns von vornherein auf eine nur angenähert scharfe Abbildung beschränkt hatten, nämlich auf eine solche, bei welcher die Zerstreuungskreise unendlich klein von der ersten Ordnung gegen die Dimensionen des Bildes selbst sind. Mit wachsender Bildgrösse nehmen daher auch die Zerstreuungskreise zu und erreichen bei entsprechend grosser Oeffnung der abbildenden Büschel bald die für deutliches Sehen zulässige Grösse, auch wenn constantes Sinusverhältniss herrscht.

In Systemen geringerer Oeffnung kann das brauchbare Bildfeld entsprechend grösser sein.

Es ist andererseits unmöglich, dass ein System

für zwei benachbarte Stellen der Axe zugleich aplanatisch sei. Hierzu müsste ja zunächst die sphärische Aberration für zwei solche Punktepaare aufgehoben sein, und diese Anforderung führt bereits auf eine Bedingung, welche der des Aplanatismus für eine Stelle der Axe widerspricht.

Zu ihrer Herleitung folgen wir dem sehr einfachen Gedankengange, mittelst dessen HOCKIN¹⁾ die letztere herleitete (Fig. 326). Wenn in dem Systeme S , sowohl für die Punkte $O O'$ als $O_1 O_1'$ die sphärische Aberration aufgehoben sein soll, so muss die optische Länge der von O und O_1 unter dem beliebigen Winkel u ($< U$) austretenden Strahlen bis O' bzw. O_1' die gleiche sein, als die der entsprechenden paraxialen Strahlen; es muss also zugleich

$$[O P O'] = [O S O'] \text{ und } [O_1 P_1 O_1'] = [O_1 S O_1']$$

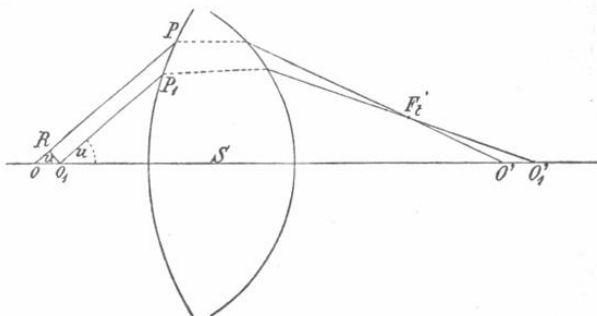
sein. Beachten wir, dass von F_1' dem (ersten) Brennpunkt des unter dem Winkel u einfallenden Parallelstrahlenbüschels $O P O_1 P$ die optischen Längen bis zu jedem dieses Büschel normal schneidenden Ebene $O_1 R$ gleich sind, so ergibt die Zerlegung der fraglichen Lichtwege in einzelne Abschnitte und die Subtraction der beiden obigen Gleichungen von einander

$$[O R] + [F O'] - [F O_1'] = [O O_1] - [O' O_1']$$

oder, wenn $O O_1 = dx$, $O' O_1' = dx'$ gesetzt werden,

$$n dx \sin^2 \frac{u}{2} = n' dx' \sin^2 \frac{u'}{2}.$$

¹⁾ l. c., pag. 340.



(Ph. 326.)

Nun ist für die paraxialen Strahlen

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = \frac{n'}{n} \beta^2.$$

Damit also für jeden Einfallswinkel u das Verhältniss dx'/dx dasselbe, d. h. die sphärische Aberration in den beiden Punktpaaren O, O' und O_1, O_1' zugleich aufgehoben sei, muss

$$\frac{n \sin(u/2)}{n' \sin(u'/2)} = \beta_0 = \text{const} \quad (5)$$

sein; es müssen dann also die Sinus der halben Axenwinkel in constantem Verhältnisse stehen — was im Widerspruch steht mit der durch (4) ausgedrückten Bedingung.

Man kann nach den Gleichungen (2) resp. (4) und (5) berechnen, welche Aberration in einem aplanatischen System — unabhängig von jeder weiteren Annahme über die Zusammensetzung und sonstigen Eigenschaften desselben — eintritt, wenn der Objektpunkt auf der Axe verschoben wird und andererseits, wie die Lateral-Vergrößerung eines für zwei benachbarte Axenpunkte aberrationsfreien Systems in beiden Hauptschnitten nach dem Rande hin variirt.

Ein solche Untersuchung ergibt für den ersteren Fall, also für ein System, welches der Gleichung (4) genügt, dass, wenn der Objektpunkt auf der Axe im Sinne der Lichtbewegung verschoben wird, dann in dem conjugirten Bildpunkte stets sphärische Ueberscorrection eintritt, wofern der Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel auf der Objektseite der grössere ist — und umgekehrt. Bezeichnet dx_0' die Verschiebung des Bildpunktes, welche der Verschiebung dx des Objektpunktes für paraxiale Strahlen entspricht, dx' dieselbe Verschiebung für Strahlen der Neigung u zur Axe, so findet man

$$dx' = dx_0' \left(\frac{\cos u'}{\cos u} - 1 \right).$$

Für grosse u und kleine u' kann daher dx' ein Vielfaches von dx_0' werden und es ist bei Werthen von $u > 57^\circ$ der Zerstreuungskreis der so eingetretenen Aberration am Orte des Bildes der paraxialen Strahlen sogar grösser als der Zerstreuungskreis, welcher aus der blossen Focusdifferenz entspringt, wenn das Objekt im aplanatischen Objektpunkt verbleibt, das Bild aber in einer anderen als der conjugirten Ebene aufgefangen wird oder wenn das Objekt um dx verschoben und sein Bild in der ursprünglichen Ebene beobachtet wird.

Diese Erwägungen sind namentlich für die Theorie des Mikroskops von Belang, dessen stärkere Systeme in Folge dieser Verhältnisse nur bei einer bestimmten Bildentfernung (*Tubuslänge*) gute Bilder geben.

In einem Systeme andererseits, welches für zwei benachbarte Paare von Axenpunkten aberrationsfrei ist, welches also der Gleichung (5) genügt, wächst die Lateralvergrößerung eines zur Axe senkrechten Linielements mit dem Neigungswinkel u des einfallenden Hauptstrahls im Sagittalschnitt nach der ebenfalls unschwer abzuleitenden Gleichung

$$\beta_s = \beta_0 \frac{\cos(u/2)}{\cos(u'/2)}$$

und in der Einfallsebene, im Meridionalschnitt, nach der Gleichung

$$\beta_t = \beta_0 \frac{\cos(u'/2)}{\cos(u/2)} \cdot \frac{\cos u}{\cos u'}.$$

Für den beim Mikroskop vorliegenden Fall, dass u' klein gegen u (β sehr gross) ist, wird annähernd

$$\beta_s = \beta_0 \cos(u/2); \quad \beta_t = \beta_0 \frac{\cos u}{\cos(u/2)}$$

und

$$\frac{\beta}{\beta_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos u} + 1 \right).$$

Die Vergrößerung nimmt dann in beiden Hauptschnitten mit wachsendem u ab, jedoch in ungleichem Grade, so dass β_t im Verhältniss zu β_s immer kleiner wird. Einem Punkt der Objektebene, welcher in der seitlichen Entfernung dy von einem der aberrationsfreien Axen-

punkte sich befindet, entspricht in der Bildebene der paraxialen Strahlen eine Ellipse, deren Dimensionen bei endlicher Grösse von u auch in endlichem Verhältniss zu den Dimensionen des von den paraxialen Strahlen entworfenen Bildes selbst ($dy' = \beta_0 dy$) stehen. Die Halbmesser dieser Zerstreuungsellipse ρ_s , ρ_t stehen zu der Bildgrösse z. B. für $u = 60^\circ$ in dem Verhältniss

$$\frac{\rho_t}{dy'} = 0.42 \quad \frac{\rho_s}{dy'} = 0.13.$$

Bei einem Oeffnungswinkel von 0.1 hingegen (Fernrohe) ist die Differenz der Vergrösserungen auf dem Axen- und Randstrahl nur 0.1% .

Das Resultat dieser Betrachtungen gipfelt also darin, dass gänzlich unabhängig von der Zusammensetzung eines optischen Systems und kraft der allgemeinen Gesetze, denen jede mit den Mitteln der Dioptrik hervorgebrachte Strahlenänderung und somit auch Strahlenvereinigung unterworfen ist, mit beliebig weit geöffneten Büscheln, entweder nur ein zur Axe senkrechtes Flächenelement oder ein unendlich kleines Stück der Axe selbst in ein entsprechendes scharf abgebildet werden kann. Die eine Anforderung steht im Widerspruch mit der anderen, und beide stehen im Widerspruch mit den Bedingungen collinearer Abbildung endlicher Räume bei endlichen Divergenzwinkeln. Denn für diese hatten wir gefunden (pag. 53/54)

$$\frac{\tan u}{\tan u'} = \frac{n'y'}{ny} = \text{const.}$$

Diese letztere Beziehung lässt sich andererseits als die geometrisch nothwendige Bedingung für die Abbildung auch nur zweier endlicher Ebenen in zwei entsprechende unter endlichen Divergenzwinkeln nachweisen, und es lässt sich dann weiter zeigen, dass wenn diese gegeben ist, mit Nothwendigkeit die Abbildung des ganzen unendlichen Raumes in einen entsprechenden, nach den Gesetzen der Collinearität folgt. Mit den Mitteln der Dioptrik jedoch ist, wie wir eben gesehen haben, die scharfe Abbildung auch nur eines unendlichen kleinen nach drei Dimensionen ausgedehnten Objektraumstücks unter grossen Divergenzwinkeln eine Unmöglichkeit.

Es bleibt uns der andere Theil des hier vorliegenden Problems zu behandeln übrig, nämlich wie weit es möglich ist, die von selbst gegebenen Grenzen der Abbildung dahin zu erweitern, dass mittelst enger (elementarer) Büschel endliche Flächen- oder Raumtheile abgebildet werden.

III. Abbildung ausgedehnter Flächen durch unendlich enge Büschel.

In Bezug auf diese fehlt es uns an Sätzen von gleicher Allgemeinheit als die Sinusbedingung für den vorher betrachteten Fall einer ist. Wir können daher nicht viel mehr thun als die Bedingungen zu formuliren, die man an eine solche Abbildung stellen muss.

1) Astigmatismus. In erster Linie ist erforderlich, dass in den abbildenden Büscheln, auch wenn dieselben als unendlich dünne angenommen werden, der Astigmatismus gehoben sei. Andernfalls findet ja eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen von Objekt- und Bildpunkten überhaupt nicht statt, sondern jedem Objektpunkte entsprechen zwei getrennte, zu einander und zur Büschelaxe senkrechte Linien, deren Grösse der Oeffnung des nach dem Bilde zu convergirenden Büschels und ihrer gegenseitigen Entfernung proportional ist.

Eine allgemeingiltige Bedingung für die Aufhebung des Astigmatismus in Büscheln, die von den verschiedenen Punkten eines endlichen Objektes ausgehen, ist meines Wissens noch nicht mathematisch formulirt worden. Praktisch

Bezeichnet wieder $(\delta_0)_k$ bzw. $(\delta_0')_k$ den Durchmesser des Kreises im Objekt, dessen Bild gemäss den Fundamentalformeln nach Ort und Grösse der tatsächliche Zerstreuungskreis vor bzw. nach der Brechung des Büschels an der betrachteten (k ten) Fläche des Systems ist, so haben wir wie früher (pag. 105)

$$n_k' u_k' \delta_k' = n_1 u_1 (\delta_0)_k'$$

und

$$n_k u_k \delta_k = n_1 u_1 (\delta_0)_k,$$

also

$$\Delta(\delta_0) = \frac{h^2}{n_1 u_1} \Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right). \quad (1)$$

Den rechter Hand stehenden zweiten Faktor fanden wir aber früher (pag. 88) streng

$$\Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right) = (n \sin i)^2 \Delta \left(\frac{1}{nt} \right).$$

In der hier berücksichtigten Näherung kann auf der rechten Seite

$$\sin i = i = w - \varphi = y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r} \right)$$

und t kann gleich s gesetzt werden, wo unter s auch die Schnittweite SL_0 eines von dem Axenpunkte desselben ursprünglichen Objekts ausgehenden paraxialen Büschels verstanden werden darf. Wir erhalten demnach

$$\Delta(\delta_0)_k = \frac{h_k^2}{n_1 u_1} y_k^2 \left[n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) \right]_k^2 \Delta \left(\frac{1}{ns} \right)_k \quad (2)$$

und wenn wir wie früher mit h_1^2 , und y_1^2 , erweitern und die Invariante der Brechung für die Axenschnittpunkte des Hauptstrahls mit Q_x bezeichnen, also

$$Q_x = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'} \right),$$

so wird schliesslich

$$\Delta(\delta_0)_k = \frac{h_1^2 y_1^2}{n_1 u_1} \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 Q_x^2 \Delta \left(\frac{1}{ns} \right)_k. \quad (2a)$$

Hierin ist $\frac{y_k}{y_1}$ in ganz derselben Weise aus den $x_1 \dots x_k'$ zu berechnen, wie $\frac{h_k}{h_1}$ aus den $s_1 \dots s_k'$ (pag. 106).

Bei unendlich entfernten Objekten und $n_1 = 1$ ist der angulare Werth des auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreises

$$\Delta(\delta_0)_k = h_1 y_1^2 \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 Q_k^2 \Delta \left(\frac{1}{ns} \right)_k \quad (2b)$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\delta_0)_k = 0 \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\delta_0)_k = 0$$

wird die Bedingung für die Beseitigung des Astigmatismus in einem aus p Flächen bestehenden optischen System.

Ist der Astigmatismus in dieser Weise nicht nur für die der Axe nahen Theile des Objekts sondern für dessen ganze Ausdehnung gehoben, so ist damit eine Abbildung desselben innerhalb der hier gewählten Beschränkung (nämlich auf enge Büschel) erreicht. Doch pflegt man an diese Abbildung noch zwei weitere Forderungen zu stellen, welche allerdings keine unbedingten sind und auch nicht immer gleich stark urgirt werden, sondern sich zum Theil nach dem Zwecke des Instruments richten, zum Theil bloss der Bequemlichkeit dienen.

Man wünscht nämlich oft noch

- 2) dass einem ebenen Objekte ein ebenes Bild entspreche und
- 3) dass das Bild in allen seinen Theilen dem Objekte ähnlich sei.

2) Wölbung des Bildes. Bedingungen der (annähernden) Bildebenung. Das durch die Brechung unendlich dünner Büschel in einem beliebigen optischen System hervorgebrachte Bild einer endlichen Ebene kann eine irgendwie gestaltete Rotationsfläche sein mit gleicher Axe als das System selbst und zwar entspricht, wenn der Astigmatismus in den wirksamen Büscheln nicht aufgehoben ist, den sagittalen und den tangentialen ebenen Partialbüscheln je eine besondere Bildfläche. Im Scheitel berühren beide Flächen einander und die Ebene des idealen Bildes. Von den Krümmungen, welche die Bildflächen in diesem Scheitel besitzen, lässt sich eine einfache Beziehung nachweisen.

Ein gegebenes System entwerfe von einer zur Axe senkrechten Ebene im Objektraume ein Bild, dessen Krümmungsradius im Scheitel $= \rho_0'$ sei. Analog sei ρ_0 der Krümmungsradius der Objektfläche, deren an der gleichen Stelle der Axe von demselben System entworfenen Bild eine Ebene ist, d. h. wenigstens im Scheitel die Krümmung Null hat. ρ und ρ' seien die Krümmungsradien eines beliebigen anderen Paares conjugirter Flächen, deren Scheitel an den gleichen Stellen der Axe liegen. Dann gilt

$$\Delta \left(\frac{1}{n\rho} \right) = \frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n\rho} = \frac{1}{n'\rho_0'} = - \frac{1}{n\rho_0}, \quad (3)$$

wenn n und n' die Brechungsindices des Objekt- und Bildraumes sind.

Der Beweis ergibt sich daraus, dass der Abstand einer Objekt- oder Bildfläche von der sie berührenden Ebene an irgend einer Stelle bis auf Glieder, die von den vierten und höheren Potenzen dieses Abstandes abhängen, gleich ist dem halben Quadrate der Entfernung dieser Stelle von der Axe dividirt durch den Krümmungsradius der betreffenden Fläche. Andererseits sind die der Axe parallelen Tangentialabstände zusammengehöriger Flächenpaare dioptrisch einander conjugirt gemäss der Formel für die Tiefenvergrößerung $\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2$, worin α das Verhältniss der eben genannten Axenentfernungen ist.

Es ist somit die Grösse $\pm \frac{1}{n\rho_0}$ oder $\mp \frac{1}{n'\rho_0'}$ das richtige Maass für das was man »Bildkrümmungsvermögen« eines Systems in Bezug auf zwei conjugirte Axenpunkte nennen könnte.

Jede Ebene, also auch diejenige, welche die Bildflächen im Scheitel berührt, schneidet aus den abbildenden unendlich dünnen Strahlenbüscheln, wie wir früher gesehen haben, Ellipsen heraus, deren Axen aber bei geringen Neigungswinkeln der Büschel als gleich gross angesehen werden können. Wenn man das Bild auf jener Ebene auffinge, so würden diese Schnitte die Zerstreuungskreise sein, als welche in Folge der Bildkrümmung die Bilder ausseraxialer Punkte in ihr erscheinen. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Zunahmen, welche der Durchmesser dieser Zerstreuungskreise bei einer Brechung erfährt, wenn man sie wie früher (pag. 105) auf die Objektseite zurückbezieht, einerseits proportional sind dem Bildkrümmungsvermögen und ausserdem proportional der numerischen Apertur und dem Quadrate der linearen Oeffnung h_0 des einfallenden Büschels. Nämlich

$$\Delta(\sigma_0)_k = n_0 u_0 h_0^2 \Delta \left(\frac{1}{n\rho_0} \right)_k = - n_0 u_0 h_0^2 \left(\frac{1}{n'\rho_0'} \right)_k, \quad (4)$$

wenn u_0 die halbe anguläre Oeffnung des einfallenden Büschels ist.

Was nun endlich den Werth dieses Bildkrümmungsvermögens anbelangt, so hängt derselbe von den Elementen des Linsensystems in folgender Weise ab (vergl. Fig. 327).

Wenn der Radius der brechenden Fläche, wie früher mit r , die Indices der an sie grenzenden Medien mit n und n' bezeichnet werden, wenn ferner die Axen der einfallenden Büschel die Axe des Systems in der Entfernung x vom Scheitel schneiden, die der gebrochenen in der Entfernung x' welche letztere mit x natürlich in der Beziehung steht, dass

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0} \right) = Q_x = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'_0} \right),$$

wenn endlich die Scheitel der Objektfläche von dem der brechenden um s_0 , der der Bildfläche von derselben um s'_0 entfernt ist, wobei wieder

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0} \right) = Q_s = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'_0} \right),$$

so ist die durch die betreffende Brechung bewirkte Krümmungszunahme für die im Aequatorealschnitt gelegenen Strahlen

$$\Delta \left(\frac{1}{n \rho_s} \right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n} \right) - \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} \right)^2 \Delta \left(\frac{1}{n s_0} \right); \quad (5)$$

für die im Meridianschnitt gelegenen

$$\Delta \left(\frac{1}{n \rho_t} \right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n} \right) - 3 \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} \right)^2 \Delta \left(\frac{1}{n s_0} \right). \quad (6)$$

Die Bildkrümmung hängt also ausser von den die Brechung selbst bedingenden Elementen n , n' , r , s noch wesentlich mit von der Lage des Punktes ab, in welchem sich die Hauptstrahlen der abbildenden Büschel kreuzen.

Zur Ableitung dieser Gleichungen kann man ebenso verfahren, wie wir oben bei der Betrachtung der sphärischen Aberration (pag. 101 ff.) ausführlich auseinandergesetzt haben. Man entwickelt die Werthe der beiden Abschnitte in die ein Hauptstrahl s durch die Axe des Systems getheilt wird, nach Potenzen der Kugelöffnung φ und zerlegt dann die Ausdrücke für die Invarianten der Brechung schiefer sagittaler bzw. tangentialer Büschel nämlich

$$Q_s = \frac{n}{s} - \frac{n \cos i}{r} = \frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos i'}{r} \quad (\text{pag. 85})$$

und

$$Q_t = \frac{n \cos^2 i}{t} - \frac{n \cos i}{r} = \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos i'}{r} \quad (\text{pag. 86})$$

in den constanten und den von φ^2 abhängigen Theil unter steter Vernachlässigung aller von noch höheren Potenzen von φ abhängigen Glieder. Die Gleichsetzung der Factoren von φ^2 führt nach einigen Reductionen auf die obigen Gleichungen.¹⁾ Der Vergleich der Formeln (5) und (6) — welche gemäss dem oben angeführten mit (4) zu combiniren sind — mit denjenigen, welche durch die sphärische Aberration in der Axe hervorgerufene Verundeutlichung des Objekts angeben, zeigt den nahen Zusammenhang beider Grössen. (Die pag. 105 mit Q_k bezeichnete Grösse ist der Werth, den die hier mit Q_s bezeichnete an der k ten Fläche hat.)

Die Bedingungen dafür, dass ein System centrirter brechender Flächen von einem in gegebener Lage befindlichen ebenen Objekt mittelst Strahlenbüschel beider Art, deren Axen sich an gegebener Stelle kreuzen, ein in erster Näherung, d. h. im Scheitel, ebenes (und damit zugleich anastigmatisches) Bild entwerfe, zerfällt also analytisch in die beiden Gleichungen

¹⁾ Zu denselben gelangte ZINKEN-SOMMER, Unters. über die Dioptrik der Linsen-Systeme. Braunschweig 1870 pag. 51 ff., auf anderem Wege, nachdem er schon vorher (POGG. Ann. 122, pag. 563. 1864) die für den ersten Hauptschnitt gültige Gleichung abgeleitet und die beschränkte Gültigkeit der von PETZVAL als allgemein hingestellten erwiesen hatte.

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad (5a)$$

und

$$\sum \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} \right)^2 \Delta \left(\frac{1}{ns} \right) = 0, \quad (6a)$$

wo die Summation über alle brechenden Flächen zu erstrecken ist¹⁾.

Bei einem System in Contact befindlicher Linsen von kleiner, zu vernachlässigender Dicke (vergl. pag. 109), in deren gemeinsamem Scheitel sich die Hauptstrahlen der wirksamen Büschel kreuzen — wie ein solches in erster Näherung durch das Objectiv eines astronomischen Fernrohrs repräsentirt wird — werden alle $x = 0$, der Ausdruck $\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} = 1$, demnach die Bedingungen der Ebenheit

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad (5^*)$$

und

$$\sum \Delta \left(\frac{1}{ns} \right) = 0. \quad (6^*)$$

Der Ausdruck $\Delta \left(\frac{1}{ns} \right)$ lässt sich transformiren in

$$\Delta \left(\frac{1}{ns} \right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n} \right) - Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right);$$

Gleichung (6*) geht daher in Verbindung mit (5*) über in

$$\sum Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0. \quad (6^*)$$

Denkt man sich, wie pag. 109, die Linsen alle in Luft befindlich und werden die Reciproken ihrer Brennweiten wieder mit φ , die Brechungsindices der Linsensubstanzen mit n bezeichnet, so lassen sich die Gleichungen (5*) und (6*) weiter transformiren in

$$\sum \left(\frac{1}{n} \varphi \right) = 0^* \quad \text{und} \quad \sum \left(1 + \frac{1}{n} \right) \varphi = 0, \quad (5^{**})$$

welche letztere in Verbindung mit (5**) schliesslich in

$$\sum \varphi = \Phi = 0 \quad (6^{**})$$

übergeht (wo Φ die Gesamtstärke des Systems bezeichnet).

Die letztere zeigt, dass unter den angenommenen Verhältnissen die Ebenung des Bildes sich nur bei einem, wie eine Planparallelplatte wirkenden System von der Brennweite ∞ erreichen lässt.

Der Betrag der Krümmung des von den Sagittalstrahlen herrührenden Bildes eines ebenen Objekts ist bei einem solchen System in Contact befindlicher dünner Linsen

$$\rho_s' = \sum \Delta(\rho_s') = - \sum \frac{n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{n+1}{n} \varphi, \quad (7)$$

in dem von den Tangentialstrahlen herrührenden Bilde

$$\rho_t' = \sum \Delta(\rho_t') = - \sum \frac{3n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{3n+1}{n} \varphi, \quad (8)$$

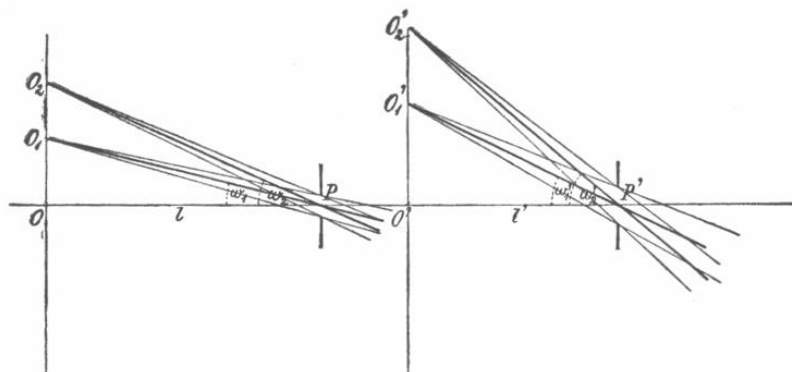
also beide unabhängig vom Orte des Objekts und Bildes.

3) Verzerrung (Distortion) des Bildes. Bedingung der Orthoskopie. Dafür, ob das Bild eines Objectes diesem in allen seinen Theilen ähnlich sei,

¹⁾ J. PETZVAL, Bericht über opt. Unters., Sitzber. Wien. Akad. 24, pag. 97. 1857, glaubte in Gleichung (5a) allein die nöthige Bedingung gefunden zu haben. S. vor. Anm.

lässt sich ein Kriterium angeben, welches — wie der Sinussatz ohne Einschränkung mit Bezug auf die Grösse der wirksamen Büschelöffnungen — dasselbe in Bezug auf die Ausdehnung des Bildes und Objektes, welches also in voller Allgemeinheit giltig ist (Fig. 328).

Nehmen wir wieder den Fall an, der, wie wir später sehen werden fast in allen Arten optischer Instrumente verwirklicht ist, — dass die Hauptstrahlen (Axen) der vom Objekt OO_1O_2 ausgehenden Strahlenkegel sich in einem Punkte P der Axe des Systems schneiden, die der bildformirenden Büschel ebenfalls in einem solchen Punkte P' . Die Entfernung der Objektebene von P , OP sei $=l$, die des Bildes bzw. einer es im Scheitel berührenden Ebene von P' , $O'P' = l'$.



(Ph. 328.)

Sind dann O_1O_2 zwei, von der Axe verschieden weit entfernte Punkte des Objekts, $O_1'O_2'$ die entsprechenden Punkte des Bildes bzw. deren Central-Projektionen von P' auf eine das Bild in O' berührende Ebene, dann ist

$$\begin{aligned} OO_1 = y_1 = l \operatorname{tg} w_1 & & O'O_1' = y_1' = l' \operatorname{tg} w_1' \\ OO_2 = y_2 = l \operatorname{tg} w_2 & & O'O_2' = y_2' = l' \operatorname{tg} w_2'. \end{aligned}$$

Damit nun die Vergrößerung in den beiden betrachteten Ebenen constant, d. h. unabhängig von der Bild- und Objektgrösse selbst seien, muss

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} = \text{etc.}$$

sein; also

$$\frac{\operatorname{tg} w_1'}{\operatorname{tg} w_1} = \frac{\operatorname{tg} w_2'}{\operatorname{tg} w_2} = \text{etc.} \dots = \text{const.}, \quad (9)$$

d. h. das Verhältniss der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche entsprechende Hauptstrahlen im Bild und Objekt mit der Axe des Systems einschliessen, muss ein constantes sein. Ist dies der Fall, so heissen P und P' , die Kreuzungspunkte der betreffenden Hauptstrahlen, die »orthoskopischen Punkte« des Systems.

Da aber für sehr kleine Winkel w , für welche die Bedingungen collinearer Abbildung erfüllt sind, nothwendig

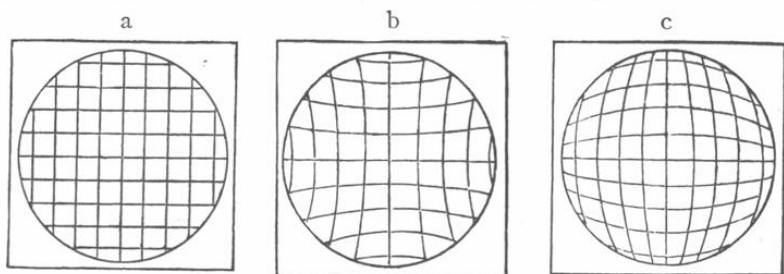
$$\frac{\operatorname{tg} w_0'}{\operatorname{tg} w_0} = \Gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B},$$

wo Γ das in den Punkten P und P' bestehende Convergenz-, B das in ihnen bestehende lineare Vergrößerungsverhältniss bezeichnet, so ist auch allgemein in den Punkten P, P'

$$\frac{\operatorname{tg} w_k'}{\operatorname{tg} w_k} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B}. \quad (9a)$$

Wenn die Vergrößerung eines Instruments im ganzen Sehfeld constant ist so erscheint ein quadratisches Netz wie Fig. 329 a. Wächst die Vergrößerung nach dem Rande des Sehfelds, so wird das Aussehen des Bildes das von Fig. 329 b, nimmt sie mit wachsendem Parameter ab, so wird es das von Fig. 329 c.

Wie hieraus ersichtlich, können orthoskopische Punkte niemals zugleich »aplanatische« in dem hier angewandten Sinne sein. Bei der allgemeinen collinearen Abbildung dagegen sind alle conjugirten Punktepaare der Axe orthoskopische und aplanatische zugleich.



(Ph. 329.)

Auch für die Bedingung der Orthoskopie lassen sich Näherungsformeln angeben, welche für die nahe der Axe gelegenen Theile des Objectes und Bildes gelten und die Abweichung vom orthoskopischen Verhältniss, den »Faktor der Anorthoskopie« (Distortion) im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahles bequem zu berechnen gestatten. Doch gilt für die Distortion ebenso-wohl als für die Bildkrümmung eine Bemerkung analog zu derjenigen, welche wir bezüglich der sphärischen Aberration für Axenpunkte zu machen hatten (pag. 111): Wenn es sich darum handelt, Bilder von merklich grosser Ausdehnung zu erzeugen, so ist es von geringem Werthe, die Krümmung oder Distortion derselben nahe der Axe, in der Mitte des Sehfeldes, aufzuheben. Denn da die Entfernung einer Kugel von der sie berührenden Ebene proportional ist dem Quadrat des Abstandes von der Berührungsstelle, und da ebenso Disproportionalitäten der Vergrößerung, wenn ihr Grad der gleiche bleibt, desto mehr in Erscheinung treten, je weiter von der Mitte des Bildes man dasselbe betrachtet, so muss man vielmehr suchen, beide Arten von Fehlern, — wenn man sie nicht ganz heben kann — so über das ganze Bild zu vertheilen, dass sie möglichst wenig störend wirken, d. h. auffallen. Es kann dann sehr wohl eintreten, dass die gemäss den oben angegebenen Formeln berechnete Krümmung des Bildes oder die Disproportionalität der Vergrößerung nahe der Axe relativ gross ist, aber aus dem angegebenen Umstande trotzdem wenig erkennbar wird zu Gunsten entfernterer Stellen des Bildes, wo ein an sich geringer Grad von Krümmung oder Distortion auf die grösseren Bildmasse wirkend und dadurch gewissermaassen mit einem grossen Faktor multiplicirt, sehr auffallend in die Erscheinung treten würde.

Ein solches systematisches Ausgleichungsverfahren, ähnlich dem von GAUSS bei der sphärischen Aberration angewandten, wurde von SCHLEIERMACHER¹⁾ für die ersten Glieder der Reihenentwicklung aller Arten von Aberrationen durchgeführt. In der Praxis ist es jedoch einfacher und sicherer, auf die trigonometrische Durchrechnung der wirksamen Büschel zu recurriren.

Bei Instrumenten, die nur zu Messungen dienen, ist es noch vortheilhafter, die vorhandenen Abweichungen von der richtigen Orthoskopie möglichst regelmässig zu gestalten und rechnerisch oder am fertigen Instrument empirisch

¹⁾ Analyt. Optik, Darmstadt 1842.

genau festzustellen, damit man sie bei den Messungen bequem in Rechnung ziehen könne.

IV. Abbildung ausgedehnter Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung.

Wir haben bisher das eine Mal diejenige Erweiterung der Abbildungsgrenzen betrachtet, welche durch Zusammenfügen der Partialabbildungen mehrerer von demselben Punkte der Axe ausgehender und wieder nach einem Punkte der Axe convergirender Elementarbüschel erreichbar ist. Die andere entsprechende Aufgabe war die, die Abbildungen solcher Elementarbüschel zusammenzusetzen, deren Hauptstrahlen sich zwar ebenfalls vor und nach der Brechung durch das System in einem Punkte seiner Axe schneiden, deren Spitzen aber auf einer von diesen Kreuzungspunkten um einen beliebigen endlichen Abstand entfernten Fläche liegen. Im ersteren Falle handelte es sich darum, die Abbildung eines — im Grenzfalle unendlich kleinen — Flächenelements durch beliebig weitgeöffnete Büschel herbeizuführen; im zweiten Falle wurden die Bedingungen gesucht, unter welchen die Abbildung eines endlichen Flächenstücks möglich ist, hier aber durch Büschel, die — *in thesi* — ihrerseits unendlich eng sind.

Dem praktischen Bedürfniss bei der Construction optischer Instrumente würde nun durch eine, an sich noch so vollständige Lösung weder des einen noch des andern Problems genügt werden. In der Wirklichkeit könnte man natürlich weder mit den — durch noch so weite Büschel vermittelten — Bildern von wirklichen Flächenelementen etwas anfangen, noch mit Bildern, die beliebig ausgedehnt aber durch unendlich enge Strahlenbüschel hervorgebracht wären. Es handelt sich hier vielmehr immer darum, Bilder endlicher Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung zu erzielen und nur der Nachdruck, welcher auf den einen oder andern dieser beiden Faktoren gelegt wird, variirt innerhalb sehr weiter Grenzen von Fall zu Fall, je nach dem Zwecke und Charakter des Instruments von den Mikroskopobjektiven hoher Apertur auf der einen Seite durch die photographischen und Fernrohrobjektive hindurch bis zu den Lupen und Ocularen auf der andern Seite.

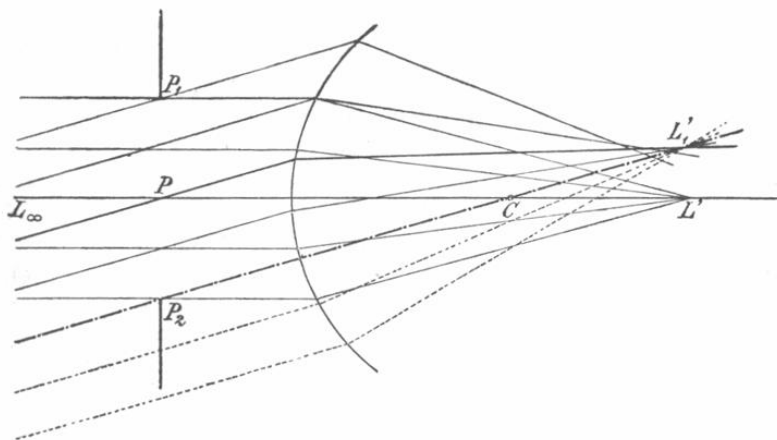
Hier finden nun von vornherein zunächst ähnliche Betrachtungen Anwendung wie die, mit welchen wir am Eingange dieses Abschnitts (pag. 96/97) die von selbst stattfindende Erweiterung der Abbildungsgrenzen nach beiden in Betracht kommenden Richtungen hin erläutert haben. Von selbst wird in Folge der dort aufgeführten beiden Momente — physiologische Unempfindlichkeit des beobachtenden Auges gegen mangelhafte Bildschärfe und Wellennatur des Lichtes — die genügend scharf abgebildete Fläche stets eine, wenn auch kleine, so doch endliche Ausdehnung haben, falls die Sinusbedingung erfüllt ist, und ohne weiteres wird man die Oeffnung der eine grössere Fläche abbildenden Büschel, wenn auch sehr eng, so doch endlich wählen dürfen, wenn die Bedingungen für die Abbildung derselben Fläche durch unendlich enge Büschel erfüllt sind; von selbst endlich wird man im letzteren Falle auch noch die jener ursprünglichen Fläche auf der Axe benachbarten hinreichend scharf abgebildet finden.

Um noch weiter zu gehen, um die Abbildung etwas grösserer Flächen durch relativ weite Büschel zu erzielen — wie sie z. B. Zweck und Aufgabe mehrerer zur Photographie dienender Systeme ist — ist man wieder fast ganz auf den Weg empirischen Suchens der hierzu geeigneten Linsencombinationen angewiesen, sei es, dass dieses auf dem Papiere, durch trigonometrische Verfolgung der wirksamen Strahlengruppen, sei es, dass es experimentell, durch systematische

Beobachtung des Endeffekts geschieht, den wirklich ausgeführte Versuchslinsen verschiedener Construction ergeben. Nur noch einen Schritt weiter hat die mathematische Theorie auf diesem Wege geführt.

Sphärische Aberration 1. Ordnung in schiefen Büscheln (COMA).

Vergegenwärtigt man sich nämlich die Hinweise, welche aus den oben entwickelten Eigenschaften der Aberrationen bereits zu entnehmen sind, so ist folgendes einzusehen: wenn in einem, von einem Axenpunkte aus divergirenden Büschel die dem Quadrat der Oeffnung proportionale sphärische Aberration aufgehoben ist, so wird ein zur Axe schwach geneigt einfallendes Büschel im allgemeinen keinen gleich scharfen Bildpunkt ergeben. Es wird ein solches Büschel, wie früher bereits wiederholt hervorgehoben, zunächst astigmatisch sein, selbst wenn es unendlich eng ist. Wenn aber auch der Astigmatismus gemäss Formel (2) pag. 123, aufgehoben wäre, so würde die Abbildung des ein wenig seitlich von der Axe gelegenen Punktes mittelst eines Büschels von der Oeffnung des axialen doch eine unvollkommene sein. Unterscheiden wir wieder die beiden



(Ph. 330.)

Strahlengruppen, welche in der Einfallsebene des (die Axe kreuzenden) Hauptstrahls und senkrecht zu ihr verlaufen. Für die letzteren wird bei geringer Neigung des Hauptstrahls die Strahlenvereinigung annähernd von derselben Vollkommenheit sein wie im Axenpunkte, weil sie im allgemeinen den gleichen Charakter hat wie die dort stattfindende (Symmetrie zum Hauptstrahl, vergl. das pag. 84 unten gesagte). Im ersten Hauptschnitt hingegen wird sich schon bei relativ geringer Neigung des Hauptstrahls die Deformation des Büschels bemerklich machen, welche der von vornherein niedrigeren Ordnung der Strahlenvereinigung in diesem Schnitte (vergl. pag. 86) entspricht.

Sei, um dies näher zu erläutern, L' (Fig. 330) das Bild eines Axenpunktes, erzeugt durch ein System, in welchem die Aberration 2. Ordnung für diesen Axenpunkt aufgehoben ist. Ganz grob schematisch können wir uns dies so vorstellen, als würden dann Strahlen, die von dem Objektpunkt innerhalb eines gewissen Winkelraumes ausgehen oder deren Büschelschnitt — bei unendlich fernem Objekt — unter einem gewissen Betrage bleibt, in L' zur strengen Vereinigung gebracht; in den diesen Winkelraum überschreitenden aber wäre diejenige sphärische Aberration vorhanden, welche den höheren Potenzen der Oeffnung entspricht. An irgend einer Stelle der Axe befinde sich die zu ihr concentrische Blende $P_1 P_2$, die gemäss ihrer Lage und Grösse die nöthige Abblendung des einfallenden

Büschels bewirkt. Ein Strahlenbüschel, welches von einem seitlichen Punkte des Objekts ausgehend diese Blende passirt, hat dann schon gegenüber der ersten und ebenso weiter gegenüber allen folgenden Flächen einen anderen Charakter als das der Axe parallele. Würde sein Hauptstrahl in Folge der besonderen Lage der Blende zufällig den Krümmungsmittelpunkt C der ersten Fläche passiren, so würde es durch diese Fläche allerdings noch ganz ebenso modificirt werden als das vorher betrachtete axiale. Dies würde sich dann aber schon an der nächsten Fläche anders verhalten, wenn nicht etwa alle Flächen concentrisch zur Blendenmitte sind. Im allgemeinen wird das seitliche Büschel schon die erste Fläche so treffen, dass sein Hauptstrahl nicht durch dessen Centrum geht. Ein dem Hauptstrahl parallel durch dieses Centrum gezogener Strahl $P_2 C$ (welcher unter Umständen dem wirklichen Büschel gar nicht angehört) markirt dann diejenige Axe symmetrisch, zu welcher — schematisch gesprochen — das einfallende seitliche Büschel die gleiche Ausdehnung haben dürfte wie das axiale, wenn die Strahlenvereinigung in dem durch diese Fläche hervorgebrachten Bilde des seitlichen Punktes den gleichen Charakter haben sollte wie im Axenpunkte. That- sächlich fallen daher Strahlen ein, welche die Oeffnung dieses ideellen Büschels nach der einen Seite jedenfalls überschreiten, Strahlen also, auf welche die Aberrationen höherer Ordnung an der betreffenden Fläche anderen Einfluss haben, als auf dieses.

An jeder folgenden Fläche ist — je nach der Lage dieser Fläche, d. h. ihres Mittelpunkts zu der die Strahlen begrenzenden Blende — das Verhältniss der Oeffnung des für diese Fläche construirbaren ideellen Büschels zu der des thatsächlich herausgeblendeten ein anderes; aber an allen Flächen sind diese Verhältnisse im allgemeinen von einander verschieden und an jeder wird daher das schiefe Büschel anders modificirt als das axiale.

Wir haben also das Resultat, dass das von einem seitlichen Objektpunkte ausgehende, durch irgend eine Blende beschränkte Büschel im ersten Hauptschnitt einen anderen Charakter hat, als bei gleicher Apertur das von dem axialen Objektpunkte und auch als das von demselben seitlichen Punkte ausgegangene sagittale Büschel. Die Aberrationen höherer Ordnung haben auf seine Constitution nach der einen Seite seines Hauptstrahls hin höheren Einfluss, als in jenen Büscheln und als in ihm selbst nach der anderen Seite hin. Das Büschel wird also durch diese Brechungen unter schiefer Incidenz innerhalb des ersten Hauptschnitts unsymmetrisch. Seine Constitution wird im Allgemeinen diejenige sein, welche man erhält, wenn man in einem endlichen Büschel allgemeiner Art (Fig. 304) durch einen der Axe parallelen Schnitt einen Theil absondert. Der übrig gebliebene Theil kann die Axe selbst, d. h. die Spitze der Kaustik enthalten oder auch nicht; das hängt von den thatsächlichen Verhältnissen ab. Im Allgemeinen aber wird jedenfalls das durch meridionale Strahlen erzeugte Bild eines seitlichen Objektpunktes statt eines Punktes das Stück einer kaustischen Curve sein.

Dieses Curvenstück — von manchen Optikern »Coma« genannt — wird gebildet durch die ersten Bildpunkte der successive auf einander folgenden Elementarbüschel, in welche man sich das grössere Büschel zerlegt denken kann. Wir haben nun früher (pag. 85) die Orte der Bildpunkte dieser Elementarbüschel dadurch gefunden, dass wir die Gleichung $n \sin i = n' \sin i' = Q$, welche den Zusammenhang zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahls angiebt, nach dem Centriwinkel der brechenden Kugelfläche, φ , variirten. Die Gleichsetzung der von $d\varphi$ unabhängigen Glieder in dem Ausdruck für $dQ/d\varphi$ vor und nach der Brechung

ergab die, bis auf Grössen von der Ordnung $d\varphi$ genauen Gleichungen (3), (3a) und (3b) pag. 86, welche den Zusammenhang zwischen t und t' einerseits, den Constanten der brechenden Fläche r , n , n' und denen des Hauptstrahls i , i' andererseits feststellen. Um jetzt die Beschaffenheit des fraglichen Stückes der kaustischen Curve in erster Näherung zu ermitteln, liegt es nahe, die Variation der Grössen t , t' selber mit dem Winkel φ oder mit den Oeffnungswinkeln der ein- und austretenden Büschel u , u' zu bestimmen. Man erhält diese in consequenter Fortsetzung jenes zur Ermittlung der Grundbeziehung zwischen t und t' selber angewandten Verfahrens, indem man $dQ/d\varphi$ nochmals nach φ variirt und in den Endgleichungen nur Grössen von der Ordnung $d\varphi$ berücksichtigt.

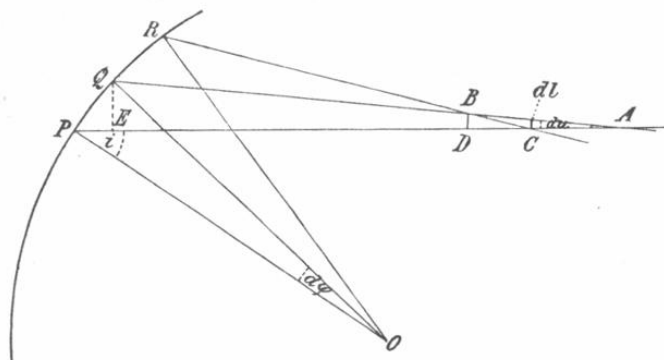
Setzen wir vorübergehend

$$\frac{1}{r} \frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r} \right) = Q^*, \quad (1)$$

dann ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{1}{r} \frac{dQ^*}{d\varphi} = Q^{**} = -Q \left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r} \right)^2 + Q Q^* \frac{1}{nt} + \frac{n \cos^3 i}{t^3} \frac{dt}{du}. \quad (2)$$

Sei in Fig. 331 $PA = t$; der Schnittpunkt des dem Strahl PA benachbarten



(Ph. 331.)

Strahls QA mit seinem nächsten Nachbar RC sei B , also $QB = t + dt$. Daher $dt = QB - PA$ und dies in genügender Annäherung $-(PE + DA)$, wenn D und E die Schnittpunkte der um A mit AB und AQ geschlagenen Bögen mit dem Strahl PA sind. Weiter ist

$PE = r \sin i d\varphi$ und DA genügend nahe $= 2d\tau$, wenn wir CA mit $d\tau$ bezeichnen. Also

$$dt = -2d\tau - r d\varphi \sin i$$

$$\frac{dt}{du} = -2 \frac{d\tau}{du} - r \frac{d\varphi}{du} \sin i = -2 \frac{d\tau}{du} - \frac{t \sin i}{\cos i}.$$

Hiernach wird schliesslich nach einigen Zusammenziehungen

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3Q Q^* \frac{1}{nt} - 2n \frac{\cos^3 i}{t^3} \frac{d\tau}{du} \quad (2a)$$

und ganz entsprechend kann man ohne weiteres auch

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3Q Q^* \frac{1}{n't'} - 2n' \frac{\cos^3 i'}{t'^3} \frac{d\tau'}{du'} \quad (2b)$$

setzen. Daher

$$\Delta \left(n \frac{\cos^3 i}{t^3} \frac{d\tau}{du} \right) = \frac{3}{2} Q Q^* \Delta \left(\frac{1}{nt} \right) \quad (3)$$

für jede beliebige endliche Neigung der Hauptstrahlen, d. h. für jeden Betrag der Grössen i und i' . (Die in dieser Gleichung auftretende Grösse $d\tau/du$ hat bekanntlich die einfache geometrische Bedeutung, dass sie gleich dem Krümmungsradius der kaustischen Curve an der betrachteten Stelle C ist.)

Wenn in dieser Weise ein Büschel von der Oeffnung $PCR = 2du$ wirksam wäre, so würde es als Bild eines Punktes eine im ersten Hauptschnitt liegende Linie liefern. Als dieses Bild wollen wir die engste Einschnürung des wirk- samen Büschels, bei C , ansehen. Seine Grösse ist

$$dl = d\tau \cdot du.$$

Bezeichnet man die Länge PQ des durch das einfallende Büschel in An- spruch genommenen Bogens der Kugelfläche mit dh (wo dann mit genügender Annäherung $PR = 2dh$ ist), so hat man weiterhin

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r d\varphi} = \frac{du}{dh},$$

was in Verbindung mit

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2}$$

ergiebt

$$\Delta \left(n \frac{\cos^3 i}{t^3} \frac{d\tau}{du} \right) = \Delta \left[n \left(\frac{du}{dh} \right)^3 \frac{dl}{du^2} \right] = \frac{1}{dh^3} \Delta (n du dl).$$

Werden jetzt wieder mit $(dl_0)_k$ und $(dl_0)_k'$ die Grössen bezeichnet, welche vor und nach der k ten Brechung vorhandenen Zerstreuungslinien, auf das Objekt zurückbezogen besitzen, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (3)

$$\frac{n_1 du_1}{dh_k^3} \Delta (dl_0)_k.$$

Daher ist schliesslich

$$\Delta (dl_0)_k = \frac{3}{2} (n_1 du_1)^2 \left(\frac{dh_k}{n_1 du_1} \right)^3 Q_k Q_k^* \Delta \left(\frac{1}{nt} \right)_k \quad (4)$$

oder, da

$$du_1 = \frac{dh_1 \cos i_1}{t_1}$$

$$\Delta (dl_0)_k = \frac{3}{2} (n_1 du_1)^2 \left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1} \right)^3 \left(\frac{dh_k}{dh_1} \right)^3 Q_k Q_k^* \Delta \left(\frac{1}{nt} \right)_k, \quad (4a)$$

worin

$$\frac{dh_k}{dh_1} = \frac{\cos i_1'/t_1'}{\cos i_2/t_2} \cdot \frac{\cos i_2'/t_2'}{\cos i_3/t_3} \cdot \dots \cdot \frac{\cos i_{k-1}'/t_{k-1}'}{\cos i_k/t}, \quad (5)$$

ebenfalls für jede endliche Neigung des Büschels.

Lassen wir, wie früher, das Zeichen d weg, welches andeuten soll, dass die betreffenden Grössen unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so lautet der Ausdruck für die durch die k te Brechung hervorgerufene Aenderung der auf das Objekt zurückbezogenen Grösse der Zerstreuungslinie l_0

$$\Delta (l_0)_k = \frac{3}{2} (n_1 u_1)^2 \left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1} \right)^3 \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^3 Q_k Q_k^* \Delta \left(\frac{1}{nt} \right)_k. \quad (6)$$

Liegt das Objekt in unendlicher Entfernung, so ist die Winkelgrösse λ der auf dasselbe bezogenen Zerstreuungslinie gegeben durch

$$\Delta (\lambda_0)_k = \frac{3}{2} h_1^2 \left(\frac{1}{\cos i_1} \right)^3 \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^3 Q_k Q_k^* \Delta \left(\frac{1}{nt} \right)_k \quad (7)$$

und die lineare oder angulare Grösse der durch alle p Brechungen zusammen hervorgerufenen Zerstreuungslinie, $l_0^{(p)}$ bzw. $\lambda_0^{(p)}$ wird wie früher erhalten, indem man über $\Delta (l_0)_k$ bzw. $\Delta (\lambda_0)_k$, von $k = 1$ bis $k = p$ summirt.

Wenn die wirksamen Büschel mit der Axe des Systems nur geringe Winkel bilden, ihre Hauptstrahlen wieder vor und nach der Brechung an der k ten Fläche die Axe in der Entfernung x bzw. x' vom Scheitel dieser Fläche unter dem

Winkel w bzw. w' und die Fläche selbst in der Höhe y über der Axe schneiden, so hat man wie früher

$$Q = n \sin i = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) y = y Q_x$$

und

$$Q^* = n \cos i \left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r} \right) = -n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right) = -n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$$

zu setzen, wo s die Schnittweite des vom Axenpunkte des Objekts ausgehenden Strahls vor der k ten Brechung ist, also in unserer früheren Bezeichnung hier $im\ Q^* = -Q_s$.

Daher wird schliesslich unter Weglassung des Index k

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2} (n_1 u_1)^2 y_1 \left(\frac{s_1}{n_1} \right)^3 \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \left(\frac{y}{y_1} \right) Q_x Q_s \Delta \left(\frac{1}{n s} \right) \quad (8)$$

oder auch

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2} (n_1 u_1)^2 (n_1 w_1) \left(\frac{s_1}{n_1} \right)^3 \left(\frac{x}{n_1} \right) \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \left(\frac{y}{y_1} \right) Q_x Q_s \Delta \left(\frac{1}{n s} \right) \quad (8a)$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für $\Delta(\lambda_0)$.

Dieselben zeigen die Abhängigkeit des fraglichen Fehlers von der Apertur und Neigung des einfallenden Büschels und weisen ihrer mathematischen Form nach wieder auf die nahe Verwandtschaft mit den anderen bisher betrachteten Aberrationen hin.

In dem wiederholt betrachteten Sonderfalle, dass die Dicken und Entfernungen aller Linsen zu vernachlässigen sind und dass die Hauptstrahlen der Büschel durch den nahezu gemeinsamen Scheitel der Linsen gehen, ist

$$Q_x = n w = \dots = n_1 w_1 = n_2 w_2 = \dots = n_k w_k,$$

daher

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2} (n_1 w_1) (n_1 u_1)^2 \left(\frac{s_1}{n_1} \right)^3 \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 Q_s \Delta \left(\frac{1}{n s} \right) \quad (9)$$

$$\Delta(\lambda_0) = -\frac{3}{2} (n_1 w_1) h_1^2 \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 Q_s \Delta \left(\frac{1}{n s} \right). \quad (10)$$

Es ist ausser von ABBE selbst noch von verschiedenen Anderen¹⁾ gezeigt worden, dass die Erfüllung der Bedingung $\Sigma \Delta(l_0) = 0$ in einem Linsensystem nichts anderes ist, als die Sinusbedingung für geringe Oeffnungen der abbildenden Büschel, dementsprechend auf algebraische Form gebracht.

Literatur.

Dass homocentrische Büschel die Eigenschaft der Homocentricität durch Reflexion an einer Kugelfläche verlieren, hat wohl zuerst ROGER BACON um d. J. 1600 (Tractatus de speculis, vergl. WILDE, Gesch. d. Optik I, pag. 99) klar ausgesprochen und erwiesen; in Bezug auf sphärische Linsen KEPLER (Dioptrice 1611, Prop. 59), welcher darum auch bereits paraboloidische Flächen vorschlug, um diesem Mangel zu begegnen. Weitere Ausbildung der Lehre von der Abweichung wegen der Kugelgestalt — meist beschränkt auf die Betrachtung von Axenpunkten — durch die älteren Forscher:

IS. BARROW, Lectiones opticae, London 1649,

J. GREGORY, Optica promota, London 1663,

J. NEWTON, Opticks. London 1704, lib. I, pars I, prop. 7, Lect. opt. pag. 165,

CHR. HUYGHENS, Dioptrica. Op. posth. II, Amstelod. 1728,

R. SMITH u. KÄSTNER's früher citirte Werke (s. pag. 37).

¹⁾ L. SEIDEL, nach S. FINSTERWALDER's. Literatur. K. MOSER, Zeitschr. f. Instrkde. 7, pag. 320. 1887, ganz neuerdings nochmals von A. KERBER, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 12, pag. 121. 1891.

Ferner in besonderer Anwendung auf die Objective von Fernröhren durch:

- L. EULER, Mém. Ac. Berlin von 1757, 1761, 1762, 1766 (mehrere Abhandlungen),
 CLAIRAUT, Mém. Ac. Paris von 1756, 1757, 1762 (dto.),
 KLINGENSTIERNA, Tentamen de defin. et corrig. aberrat. rad. lum. Petrop. 1762,
 D'ALEMBERT, Opusc. math. IV. Paris 1764. Mém. Ac. Paris von 1764, 1765, 1767.
 BOSCOVICH, Dissert. 5 ad Dioptricam pertinentes, Vindob. 1767,
 BÉGUELIN, Mém. Ac. Berlin von 1762, 1763, 1769 und schliesslich
 L. EULER, Dioptrice Petrop. 1769—71, 3 Bde.

Von den Leistungen aller dieser giebt eine übersichtliche Darstellung:

S. KLÜGEL in der Vorrede zu seiner Analytischen Dioptrik, Leipzig 1778, welche eine Bearbeitung des sehr umfangreichen EULER'schen Werkes ist. S. auch PRIESTLEY, Geschichte der Optik übers. v. KLÜGEL. Leipzig 1776.

Gleichzeitig mit KLÜGEL's Werk erschien eine wichtige Abhandlung über diesen Gegenstand von LAGRANGE, Théorie des lunettes, Mém. Ac. Berlin 1778.

In den ausserordentlich zahlreichen, diesem Jahrhundert angehörigen Bearbeitungen des vorliegenden Gegenstandes, wie auch schon bei EULER, CLAIRAUT u. A., wird meistens die sphärische Aberration in und ausser der Axe in Verbindung mit den im folgenden Capitel zu behandelnden chromatischen Abweichungen erörtert. Die wichtigsten dieser Abhandlungen und Werke sind:

J. F. W. HERSCHEL, On the aberration of compound lenses and object glasses. Phil. Trans. von 1821, pag. 222, theilweise reproducirt in dess. Verf. On Light. Encycl. Metrop. 1827. D. Uebers. v. SCHMIDT, Stuttg. 1831, pag. 115. (Aberration für Axenpunkte unter Vernachlässigung der Linsendicken und -abstände. Resultat: Gleichung 12, pag. 109.)

G. SANTINI, Teoria degli strumenti ottici. Padova 1828, Bd. I, pag. 114—138 u. 235—242.

S. STAMPFER, Ueber die Theorie der achromat. Objective bes. der FRAUNHOFER'schen Jahrb. d. k. k. polyt. Inst. 13, pag. 52. 1828 und Unters. der v. Hrn. ROGER vorgeschlagenen Verbess. in der Constr. achrom. Fernröhre, ibid. 14, pag. 108. 1829.

J. J. LITROW, Zeitschr. f. Phys. u. Math. von BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN, Bd. 3 u. 4 (mehrere Abhdlgn.), und Dioptrik, Wien 1830, pag. 50—70 (daselbst ausführl. Literaturverzeichniss am Schlusse).

G. W. BRANDES, Art. Linsenglas in GEHLER's Physik. Wörterbuch, Bd. 6, Leipzig 1831.

L. J. SCHLEIERMACHER giebt in POGG. Ann. 14, pag. 1. 1828, eine Uebersicht, in BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. f. Phys. u. Math. 9, pag. 1, 161, 454; 10, pag. 171, 329, den Anfang desjenigen, was er in seiner »analytischen Dioptrik«, Darmstadt 1842 (nur Bd. 1 erschienen) fortgesetzt und ausgeführt hat. (Dies ist eine der vollständigsten Untersuchungen, welche jemals über diesen Gegenstand angestellt worden sind; sie überragt in der Tiefe der Problemstellung fast alle späteren Publikationen. Die analytischen Entwicklungen leider sehr schwerfällig und daher unübersichtlich; keine allgemeinen Resultate.)

I. A. GRUNERT, Optische Untersuchungen, Bd. 2, Leipz. 1847. (Discussion der versch. mögl. Fernrohrbektivconstructionen.)

J. PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptr. Unters., Pesth 1843, desgl. Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857; 26, pag. 33. 1858 (s. oben pag. 126).

L. SEIDEL, Zur Theorie der Fernrohrbektive. Astr. Nachr. 35, pag. 302. 1852. (Sphär. Aberr. 1. Ordnung in der Axe ausgedrückt durch neue Variable: die relativen Neigungswinkel und Schnitthöhen eines paraxialen Strahls). Ders. Zur Dioptrik, Entwicklung aller Glieder dritter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahls durch ein System brechender Flächen bestimmen. Astr. Nachr. 43, pag. 289. 1855. (Vollständigste Darstellung aller Aberrationen dritter Ordnung: axiale Aberration, Coma, Astigmatismus, Bildwölbung, Verzerrung durch algebraische Formeln. Einheitliche strenge Behandlung. Dies wohl neben den Untersuchungen von ABBE und HELMHOLTZ über den Aplanatismus bei weitgeöffneten Büscheln die wichtigste auf diesem ganzen Gebiete). Auf ihr fussen

G. A. KELLER, Entwickelg. der Glieder 5. Ordng. Gekr. Preisschrift. München 1865 (Beschränkung auf die 1. Hauptebene), und aus neuester Zeit

S. FINSTERWALDER, Die von opt. Syst. grösserer Oeffnung u. Gesichtsfeldes erzeugten

Bilder. Abh. Münch. Akad. 17, pag. 519—587. 1891 (Untersuchg. der Brennfläche der von einem ausseraxialen Objektpunkt ausgehenden Strahlen nach dem Durchgang durch ein centr. System. Zusammenhang der Durchstossungspunkte in der Diaphragmenebene mit denen in einem das Bild auffangenden Schirm. Intensitätsvertheilung im Zerstreuungsbilde bei verschiedener Lage der Blenden und der Schirmebene).

Die übrigen auf SEIDEL's Publikationen folgenden Abhandlungen nehmen merkwürdigerweise auf diese keinen Bezug und stehen ihr grösstentheils in der Schärfe und dem Umfang der Behandlung nach. Das sonst vortreffliche Werk von

O. F. MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici. Pisa 1859, fusst noch ganz auf den Arbeiten von LAGRANGE, SANTINI und BIOT, ohne Kenntniss selbst derer von GAUSS. Ferner

H. ZINKEN-SOMMER, Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme, Braunschweig 1870.

P. A. HANSEN, Dioptr. Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Kugelgestalt. Abh. Leipz. Akad. 10, pag. 697—784. 1874.

W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern etc. Leipzig 1874 (bes. § 4).

W. SCHEIBNER, Dioptr. Unters. insbes. über das HANSEN'sche Objectiv, Abh. Leipz. Akad. 11, pag. 541—620. 1876.

K. MOSER, Die Grundformeln der Dioptrik für den prakt. Gebrauch entwickelt. Sitzber. böhm. Akad., Prag 1881, insbes. pag. 22—28 (sehr aphoristisch, aber erschöpfend und elegant in der Entwicklung). Ergänzungen in dess. Verf. Die einfache achrom. Linse als Landschafts-objectiv. EDER's Jahrb. f. Photogr. 1889, und Ueber Fernrohrobjektive, Zeitschr. f. Instrkde. 7, insbes. pag. 225—238. 1887.

L. BILLOTTI, Teoria degli strumenti ottici con applic. ai telesc. ed alla fotogr. celeste. Publ. del R. Osserv. di Brera. Milano 1883, insbes. pag. 87 ff.

A. KRAMER, Theorie der zwei- und dreitheiligen astron. Fernrohrobjektive, Berlin 1885 (schwerfällig).

Einen wesentlichen Beitrag zu dem Gegenstande des vorstehenden Kapitels lieferte jüngst

M. THIESEN, Beiträge zur Dioptrik. Sitzber. Berl. Akad. 35, pag. 799. 1890 (Bestimmung des Weges eines Lichtstrahls direkt aus dem Princip der schnellsten Ankunft. Resultate übereinstimmend mit den von SEIDEL erhaltenen, dessen Arbeiten auch TH. nicht gekannt zu haben scheint.)

S. CZAPSKI.

Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie.

In den vorangehenden beiden Abschnitten ist immer von dem Brechungsexponenten eines Mediums schlechthin die Rede gewesen, als wenn derselbe eine eindeutige Constante des betreffenden Mediums wäre. Thatsächlich ist aber, wie bei früherer Gelegenheit bereits kurz erwähnt (pag. 23) der Brechungsexponent aller bisher untersuchten Substanzen von der Wellenlänge des Lichts abhängig gefunden worden, $n = f(\lambda)$. Die Auseinandersetzungen der vorigen Abschnitte darüber, auf welche Weise die geometrisch mögliche allgemeine optische Abbildung in Systemen centrirter Kugelflächen realisiert werden könne, sei es von selbst, sei es — in erweitertem Gebiete — durch geeignete Anordnung der wirklichen Flächen, sind daher erschöpfend nur für den besonderen Fall rein katoptrischer Systeme; denn bei der Reflexion ist $n' = -n$, also $n'/n = \text{const}$ für jedes λ . In dem allgemeinen Falle aber, dass Brechungen und Spiegelungen combinirt und auch in dem, dass nur erstere allein in dem betrachteten System wirksam sind, wird durch die Variabilität der Brechungsexponenten mit der Wellenlänge eine entsprechende Variation aller Faktoren der Abbildung