universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Realisirung der optischen Abbildung A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen (Fundamentaleigenschaften der Linsen und Linsensysteme)

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Für uns ist es im Augenblick genügend, überhaupt festgestellt zu haben, dass und in welcher Weise etwa sich die wesentlichen Bestimmungsstücke einer zusammengesetzten Abbildung berechnen lassen aus denen der sie formirenden Einzelabbildungen..

Literatur.

Die Theorie der optischen Bilder ist, wie mehrfach hervorgehoben, fast stets unter specielleren Voraussetzungen hergeleitet, als wir oben benützt haben. Die wichtigsten Arbeiten für die Entwickelung dieser Lehre sind, ausser den im Text bereits angeführten von MOEBIUS, GAUSS, BESSEL, LISTING, MAXWELL, HELMHOLTZ, CASORATI, FERRARIS, MATTHIESSEN u. A. noch aus der Zeit vor GAUSS:

KEPLER, Dioptrice, Augsb. 1611, (ohne Kenntniss des richtigen Brechungsgesetzes, auf der erfahrungsmässigen Thatsache homocentrischer Strahlenvereinigung beruhend!).

COTES in R. SMITH, System of Opticks, Cambr. 1738, 2, pag. 76.

L. EULER, Dioptrice, Petersb. 1769—71.

LAGRANGE, Nouv. mém. acad. Berlin pour 1778, pag. 162. 1780.

PIOLA, Effemer. astron. di Milano 1821.

BIOT, Traité d'Astron. phys. 3 ed. Paris 1841, Bd. 1 u. 2.

Von neueren Darstellungen sind noch zu erwähnen:

K. L. BAUER, Zur Theorie dioptr. Instrum., München 1866.

V. v. LANG, Wien. Sitzber. 63, pag. 686. 1871, POGG. Ann. 149, pag. 353. 1873.

F. NEESEN, Abbildg. v. leucht. Obj. in einem nicht centr. Linsensyst., Diss. Bonn 1871.

F. PAROW, Durchg. d. Lichts d. belieb. brech. Flächen, Diss., Bonn 1876.

CH. PENDLEBURY, Lenses and systems of lenses treated after the manner of GAUSS, Cambr. 1884.

P. ZECH, Math. natw. Mitth., Tübingen 1887.

S. CZAPSKI.

Realisirung der optischen Abbildung
A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen.

(Fundamentaleigenschaften der Linsen und Linsensysteme.)

Wir haben bisher immer nur angenommen, dass eine »optische Abbildung« zu Stande komme, ohne uns darum zu kümmern oder Voraussetzungen darüber zu machen, in welcher Weise des näheren dies geschehe. Wir nahmen es als durch die tägliche Erfahrung feststehend an, dass optische Abbildungen thatsächlich vorkommen und untersuchten darauf hin zunächst die allgemeinen Gesetze, denen eine jede solche Abbildung, kraft ihrer Entstehung durch punktweise Vereinigung gradliniger Strahlen nothwendig unterliegen muss, auf welche Weise sie auch immer zu Stande gekommen sein mag.

In dem Folgenden sollen einige besonders wichtige Verwirklichungs-Arten von Abbildung näher untersucht werden. Es soll gezeigt werden — und dies ist, wie wir früher bereits ausführten, nunmehr das einzige was zu zeigen noch übrig bleibt — unter welchen physischen Bedingungen in gegebenen Fällen eine Abbildung zu Stande kommt, welchen Beschränkungen dieselbe gegenüber der vorher von uns angenommenen unendlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel in praxi immer unterliegt, wie Objekt- und Bildraum zu einander liegen und wie sich die Hauptbestimmungsstücke der Abbildung, d. h. die Brennweiten und die Oerter der Brennpunkte aus den Daten des Falles selbst berechnen lassen.

Da wir nach dem letzten Abschnitt eine wie auch immer zusammengesetzte Abbildung stets zerlegen können in die combinirte Wirkung successiver Theilabbildungen, so können wir uns hier darauf beschränken, die einfachsten möglichen Fälle von Abbildung zu untersuchen, d. h. die Abbildung durch Spiegelung oder Brechung von Lichtstrahlen an einer einzelnen, zwei verschiedene Medien trennenden Fläche. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf die Untersuchung sphärischer Flächen, welche, wie wir ebenfalls schon einmal hervorhoben, für die Theorie der optischen Instrumente allein von Bedeutung sind. Ein Büschel homocentrischer Lichtstrahlen falle auf eine solche Fläche und werde an ihr gebrochen.

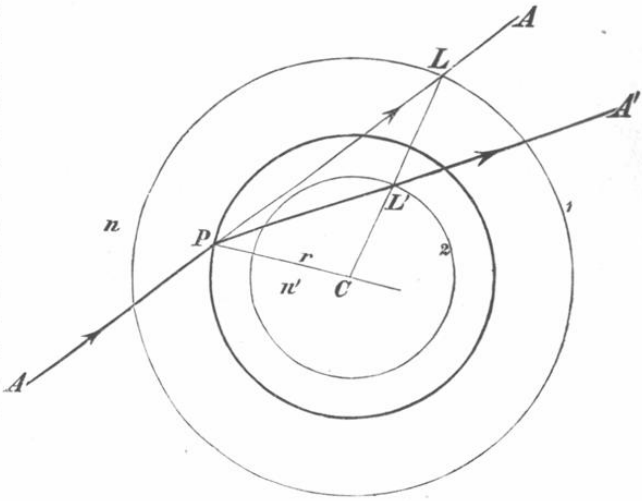
Eine brechende Fläche.

Weg eines Strahls. Sei zunächst nur ein Strahl des Büschels betrachtet. Er falle in einem Medium vom Brechungsindex n auf eine Kugel vom Index n', mit dem Radius r und dem Mittelpunkt C. Die durch den einfallenden Strahl AP und C gelegte Ebene — die der Zeichnung — ist dann Einfallsebene, da der Radiusvector CP Einfallsloth ist; sie enthält daher auch den gebrochenen Strahl PA'. Die Richtung dieses ist bestimmt durch das Brechungsgesetz, d. h. durch die Gleichung

$n \sin CPA = n' \cdot \sin CPA'$

oder

$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$.



(Ph. 315.)

Graphisch lässt sich der gebrochene Strahl wohl am einfachsten durch folgende, wie es scheint zuerst von WEIERSTRASS[1]) angegebene Construktion ermitteln (Fig. 315). Man schlage um C Kreise resp. Kugeln mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$ und $r_2 = \frac{n}{n'} \cdot r$. Den Punkt L, wo der erstere Kreis vom auffallenden Strahl zum zweiten Mal getroffen wird verbinde man mit C, den Schnittpunkt von LC und Kreis 2, L' mit P. Dann ist PL' der gebrochene Strahl. Denn da nach Construktion $CL' : CP = CP : CL$, so ist $\Delta CPL' \infty CL'P$; daher $\angle PLC = L'PC$. In ΔCPL ist aber $\sin CPL : \sin PLC = CL : CP = n' : n$. Folglich ist $\angle CPL'$ der zu CPL gehörige Brechungswinkel i'.

Eine andere Construktion giebt REUSCH an (Construktionen zur Lehre etc., Leipzig 1870, pag. 1).

Beiläufig ergiebt sich aus dieser Construktion, dass alle von dem Punkte L der Hilfskugel 1 auf die brechende Kugel fallenden Strahlen, in jeder Neigung und jedem Azimut, nach dem Punkte L' hin gebrochen werden, in welchem

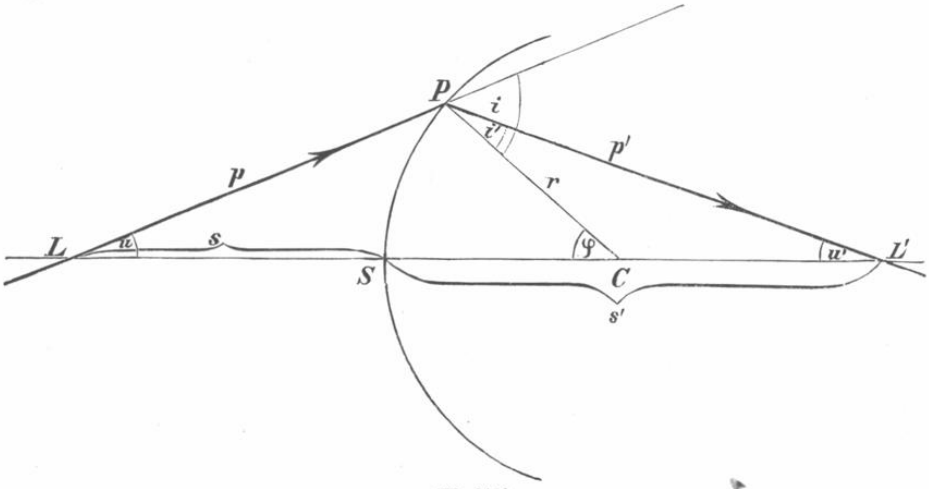
[1]) Nach SCHELLBACH, Z. f. phys. u. chem. Unt. 2, pag. 135. 1889, von W. schon im Tageblatt der Naturf. Vers. zu Wien 1858 mitgetheilt. Später unabhängig von LIPPICH, Denkschr. d. Kais. Ak. d. Wiss. z. Wien 38, pag. 8, 1877, gefunden.

die Grade LC die Hilfskugel 2 schneidet und umgekehrt die von L' ausgehenden nach L hin.

Wegen dieser wichtigen Eigenschaft heissen Punktepaare, die in den Abständen $(n'/n)\,r$ und $(n/n')\,r$ auf je einer Centralen der in einem Medium vom Index n befindlichen Kugel vom Index n' und Radius r liegen »aplanatische Punktepaare«. Dieselben haben eine grosse praktische Wichtigkeit in der Construktion der starken Mikroskopobjektive, welche seit Amici wesentlich mit auf deren Anwendung beruht.

Ausser diesen giebt es nur noch zwei Schaaren von Punkten gleicher Eigenschaft: jeder Punkt der Kugelfläche und ihr Mittelpunkt sind sich selbst offenbar in gleicher Uneingeschränkheit conjugirt. Die auf diese Weise vermittelten Abbildungen fallen jedoch — da sie sich nur auf Punkte beziehen, die in einem Paar von Flächen liegen — ausserhalb der gesetzmässigen Beziehungen, die wir auf Grund unserer allgemeinen Betrachtungen ableiteten.

Ausser in diesen Fällen findet eine Abbildung durch endliche Büschel im Allgemeinen nur noch in so weit statt, als die sie vermittelnden Büschel flächenhaft (nicht räumliche) sind. Bei der Kugel — wie bei jeder Rotations-



(Ph. 316.)

fläche — fallen alle Strahlen welche den Mantel eines Kegels mit der Centralen (bezw. Rotationsaxe) als Axe bilden unter gleichem Winkel ein, werden daher auch unter gleichem Winkel gebrochen und bilden folglich nach der Brechung einen Kegelmantel mit derselben Axe wie die einfallenden Strahlen.

Analytisch ist der Weg eines Strahls und die Abbildung von Punkten durch solche auf axialen Kegelmanteln gelegene Strahlengruppen in folgender Weise zu bestimmen (Fig. 316).

Ist die Entfernung eines Punktes L des Strahls vom Einfallspunkte P, $PL = p$, vom Scheitel S der brechenden Kugel $SL = s$ und von deren Mittelpunkt C, $CL = c = s - r$, die Neigung des Strahls gegen die Centrale $PLC = u$ wird der Einfallswinkel CPL wieder mit i bezeichnet und die entsprechenden Grössen für das gebrochene Strahlenbüschel mit denselben aber gestrichenen Buchstaben, so haben wir in ΔCLP

$$CL : CP = \sin CPL : \sin CLP \quad \text{oder} \quad c = r \cdot \frac{\sin i}{\sin u},$$

welche Gleichung gestattet, aus c, r und u i zu berechnen. Für den gebrochenen

Strahl haben wir analog $c' = r \cdot \frac{\sin i'}{\sin u'}$. Hierin ist i' durch die Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$ bestimmt und u' alsdann durch die Beziehung $\varphi = u - i = u' - i'$ oder $u' - u = i' - i$. Also giebt uns obige Gleichung den Werth von c'. Die Scheitelabstände s und s' sind dann einfach $s = c + r$; $s' = c' + r$. Die Strahllängen p und p' sind analog zu bestimmen, wie die Mittelpunktsabstände durch die sich ebenso ergebende Gleichung

$$\frac{p'}{p} = \frac{\sin u}{\sin u'},$$

wo zur Berechnung von u' dieselben Zwischenbeziehungen zu benutzen sind wie oben. Es sind also in einfachster Weise alle Bestimmungsstücke eines gebrochenen Strahls berechenbar aus denen des einfallenden. Nebenbei ergiebt sich aus obigen Beziehungen, dass

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{c'}{c} \quad \text{oder} \quad n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p}. \tag{1}$$

Die Vorzeichen sind hier wie in allen folgenden und den vorhergehenden Entwickelungen nach dem in der analytischen Geometrie üblichen Schema bestimmt. Wir rechnen Strecken auf der Axe oder auf Strahlen von den angenommenen Fixpunkten aus im Sinne des einfallenden Lichts (von links nach rechts), und solche senkrecht zur Axe von ihr aus nach oben als positiv. Die Vorzeichen der Winkelgrössen ergeben sich hieraus von selbst.

Den Radius einer brechenden (oder spiegelnden) Kugel rechnen wir als positiv, wenn dieselbe dem einfallenden Lichte ihre convexe Seite zukehrt.

Die für die Reflexion geltenden Gleichungen ergeben sich aus den abgeleiteten, wie immer, indem man $n' = -n$ setzt. Wir unterlassen ein näheres Eingehen auf die Besonderheiten dieses Falls an dieser Stelle.

Die angegebene Construction des gebrochenen Strahls und die Formeln für die analytische Verfolgung seines Weges reichen für den Fall beliebig vieler aufeinanderfolgender Brechungen nur dann aus, wenn alle Einfallsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Mittelpunkte aller Kugeln auf einer Geraden liegen, die selbst in der ersten Einfallsebene liegt, die also bei genügender Verlängerung den einfallenden Strahl schneidet. Man nennt in diesem Falle die Kugeln centrirt. Man hat dann stets $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ und $u_k = u'_{k-1}$, wenn d_{k-1} die Entfernung des $k$ten Kugelscheitels vom $k-1$ten bedeutet, und s_k, s'_{k-1}, u_k, u'_{k-1} für die $(k-1)$te resp. $k$te Fläche dieselbe Bedeutung haben wie die gleichen Buchstaben ohne Zeiger für die oben allein betrachtete.

Sind die Flächen aber nicht centrirt, oder ist ihre gemeinsame Centrale, die Axe des Systems, windschief gegen den einfallenden Strahl, so genügen die angegebenen Formeln nicht mehr und auch die graphische Construktion ist nur noch in Gedanken, nicht mehr auf dem Papiere in gleicher Weise ausführbar. Es sind dann statt ebener Dreiecke, wie vorher, die entsprechenden sphärischen aufzulösen. Rechnungsvorschriften für diesen Fall sind wohl zuerst von L. Seidel[1]) veröffentlicht.

Normal einfallendes endliches Büschel. Aberration.

Gegen die brechende Kugelfläche SP mit dem Mittelpunkt C falle ein Büschel ein, dessen »Hauptstrahl« (in dem früher angegebenen Sinne) durch C

[1]) Trigonometr. Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichts an centrirten sphärischen Flächen. Sitzber. Münch. Akad. 1866, pag. 263, abgedruckt in Steinheil und Voit, Angewandte Optik. Leipzig 1891, pag. 259; auch Hansen, Abh. d. Sächs. Akad. 10, pag. 95 bis 202. 1871.

geht, dessen Divergenzpunkt L ist. Es genügt dann, um den Verlauf aller Strahlen des Büschels zu erhalten, die in einem Hauptschnitt, etwa der Zeichenebene, gelegenen Strahlen zu betrachten. Die gebrochenen Strahlen liegen ja in diesem Falle in derselben Ebene, und alle Strahlenkegel werden erhalten durch Rotation der in einer Ebene gelegenen um die Axe LC. Die Gesammtheit aller einfallenden Strahlen lässt sich gruppiren in Strahlenkegel mit der gemeinsamen Spitze L; die Gesammtheit aller gebrochenen Strahlen daher gemäss der Bemerkung pag. 68 in Kegel mit der gleichen Axe LC, aber mit im allgemeinen verschiedenen Spitzen L'.

LP sei einer der einfallenden Strahlen des Büschels, PL' der entsprechende gebrochene. Wir haben bereits gesehen, wie sich die Elemente des letzteren (Scheitelabstand, Neigungswinkel gegen die Axe, Strahllänge) berechnen lassen aus denen des einfallenden. Schon aus den zu dieser Berechnung dienenden Formeln liesse sich schliessen, dass zu gleichem s und r, aber verschiedenem Neigungswinkel u im Allgemeinen auch verschiedene Entfernung s' der Spitze des gebrochenen Strahlenkegels gehört.

Noch deutlicher tritt diese Thatsache und die Beziehung zwischen den fraglichen Grössen hervor, wenn wir beachten, dass in

$$n' \frac{(s'-r)}{p'} = \frac{n(s-r)}{p}, \tag{1}$$

$$p^2 = (s-r)^2 + r^2 + 2r(s-r)\cos\varphi$$

ist und ebenso

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\varphi.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass zu gleichen Werthen von s, r, n und n' verschiedene Werthe von s' gehören je nach der Grösse von φ, dem Oeffnungswinkel der Kugelfläche. Diese Verschiedenheit der Lage der gebrochenen Kegelspitzen bezeichnet man als »sphärische Aberration« oder »Kugelabweichung«. (s. den nächsten Artikel). Wie wir früher gesehen haben (pag. 30) kann man Flächen anderer Gestalt angeben, welche die Eigenschaft haben ein homocentrisches Büschel von gegebener Lage und beliebiger Oeffnung durch Brechung wieder in ein homocentrisches überzuführen (»aplanatische Flächen«). Die Kugel gehört zu denselben insofern sie, wie oben gezeigt, Büschel von bestimmter Lage ebenfalls homocentrisch vereinigt. —

Normal einfallendes Elementarbüschel. Axenpunkte.

Entwickelt man $\cos\varphi$ nach Potenzen von φ, so sieht man weiterhin, dass für solche Werthe von φ, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können gegen die erste, d. h. gegen φ selber $p = s$ und $p' = s'$ ist, also

$$\frac{n(s-r)}{s} = \frac{n'(s'-r)}{s'}. \tag{2}$$

Innerhalb eines Strahlenkegels von dem angegebenen Oeffnungswinkel findet also eine eindeutige Beziehung zwischen s und s' statt, d. h. homocentrische Vereinigung der gebrochenen Strahlen und damit zunächst wenigstens für die auf der Axe gelegenen Punkte eine »Abbildung« in dem von uns früher gebrauchten Sinne.

Die Strahlenvereinigung bei der Brechung eines normal einfallenden Büschels an einer Kugelfläche ist von »zweiter Ordnung«, wie man zu sagen pflegt um auszudrücken, dass es die zweite Potenz von φ (oder u) ist, welche man vernachlässigen musste um die Eindeutigkeit der Beziehungen zu erhalten. Da übrigens unter Vernachlässigung der Grössen von dieser Ordnung die Kugel zusammen-

fällt mit jeder sie im Scheitel berührenden Rotationsfläche anderer Gestalt, so gilt das gefundene Resultat mit gleicher Annäherung auch für solche und es bezeichnet dann in der Formel (2) r den Krümmungshalbmesser der betreffenden Fläche im Scheitel.

Anmerkung. Nebenbei mag darauf hingewiesen werden, dass Gleichung (1) welche ja für jedes Paar von Punkten auf der Axe gilt, für zwei solche Paare L_1L_1' und L_2L_2' geschrieben werden kann in den Formen

$$\frac{c_1'}{c_1} : \frac{p_1'}{p_1} = \frac{n}{n'},$$
$$\frac{c_2'}{c_2} : \frac{p_2'}{p_2} = \frac{n}{n'}.$$

welche besagen, dass die Punkte L_1SCL_1' projectivisch sind zu L_2SCL_2'; ebenso sind sie es zu L_3SCL_3' etc. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich die Gesetze der Abbildung durch Brechung enger Büschel an centrirten Kugelflächen in sehr eleganter Form entwickeln, wenn man sich auf die ersten Elemente der projectivischen Geometrie stützt. Dies ist der von Möbius, Lippich, Beck und Hankel eingeschlagene Weg. S. die oben (pag. 38) citirten Abhandlungen derselben.

Die Gleichung (2), welche die Beziehung zwischen conjugirten Punkten auf der Axe darstellt ist, wie man sich leicht überzeugt, nichts anderes als der Werth, den die Ausdrücke $n \cdot \sin i$ resp. $n' \cdot \sin i$, d. h. die »optische Invariante« für unendlich kleine Winkel φ annehmen, beide dividirt durch $\sin \varphi$. Dividirt man noch mit r, so erhält man die »Invariante der Brechung« (s. pag. 23) für axiale Elementarbüschel in den für die Rechnung bequemen Formen

$$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right), \tag{2a}$$

oder

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}, \tag{2b}$$

Bezeichnen wir die Differenz der Werthe eines Ausdrucks vor und nach der Brechung an einer Fläche durch ein vorgesetztes Δ, so können wir kürzer schreiben

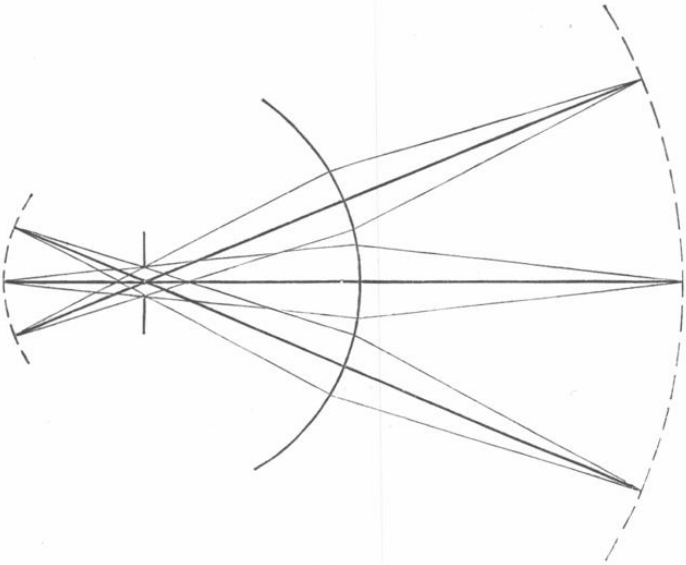
$$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r}\Delta(n). \tag{2c}$$

Abbildung von ausseraxialen Punkten und von Flächen durch genau normal einfallende Elementarbüschel.

Die Abbildung, welche wir bisher statuirt haben, betrifft nur die Punkte je einer Kugelcentralen. Die betreffenden Beziehungen gelten nun für jede solche Centrale mit gleichem Rechte und in gleicher Weise. Führt man also — sei es in Gedanken, sei es thatsächlich (was ganz gut ausführbar wäre) — eine solche Beschränkung der wirksamen Strahlenkegel ein, dass deren Axen sämmtlich durch C gehen und ihre Oeffnungen unendlich klein sind, so würde durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche mit der angegebenen Näherung eine Abbildung des ganzen unendlichen Raumes vom Index n vor der Kugel in den, theils hinter der brechenden Fläche vorhandenen theils vor ihr liegenden ideellen Raum vom Index n' gegeben sein (Fig. 317).

Aber auch diese Abbildung würde nicht in die Rubrik der unter dem allgemeineren Gesichtspunkt betrachteten Arten fallen. Dies kennzeichnet sich schon äusserlich dadurch, dass, wie leicht einzusehen, bei derselben um C concentrische Kugelflächen des Objektraums in eben solche des Bildraums abgebildet werden unter Wahrung der Aehnlichkeit und bei perspektivischer Lage von Figuren auf den Kugelflächen. (Die Radien der conjugirten Kugeln c und c' sind dabei einfach durch die Gleichungen 2a bis 2c in Verbindung mit $c = s - r$, $c' = s' - r$ bestimmt). Bei der von uns früher betrachteten collinearen Abbildung

kommt aber ein solcher Fall unter keinen Umständen vor. Im vorliegenden Falle werden andererseits Ebenen niemals in Ebenen abgebildet und eine Hauptaxe ist nicht zu constatiren.



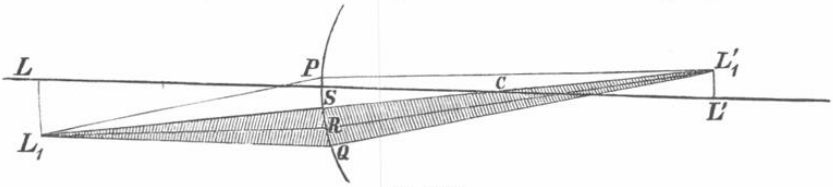
(Ph. 317.)

In der That treffen auch die im Falle der collinearen Abbildung gemachten Voraussetzungen hier nicht ganz zu. Zum Beweise unserer allgemeinen Gleichungen wurde die Voraussetzung gemacht und benützt, dass alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch wieder vereinigt würden; der Beweis der Collinearität der Abbildung beruhte auf der Annahme, dass die durch irgend welche 3 Punkte gehende Gerade betrachtet werden dürfe als abbildender Strahl jedes der von diesen 3 Punkten ausgehenden Büschel. Diese Bedingung ist aber im vorliegenden Falle nicht erfüllt; derselbe unterliegt daher besonderen Gesetzen, wie den zum Theil oben angegebenen.

Die vorliegende Abbildung — welche sich übrigens auch nicht auf mehr als eine brechende Fläche ausdehnen liesse — zerfällt vielmehr, wie wir nunmehr zeigen wollen, in ein Aggregat von unendlich vielen einzelnen Abbildungen (mit den Centralen als Hauptaxen), von welchen jede die Bedingungen der Collinearität in einem der Axe unendlich nahe benachbarten Raume erfüllt.

Beschränkung auf den Fall paraxialer Punkte. Collineare Abbildung.

Betrachten wir eine dieser rein axialen Abbildungen und daneben die eines der Axe unendlich nahe gelegenen Punktes L_1 (Fig. 318). Das diesen Punkt abbildende Büschel mag nun ein streng centrales sein, wie L_1PQ oder auch nur



(Ph. 318.)

annähernd ein solches wie L_1SQ, d. h. seine Axe L_1R mag nur überhaupt unendlich wenig gegen die anfänglich angenommene LCL' geneigt (sein im letzteren Falle kann man das Büschel als Theil eines streng centralen mit L_1C als Axe ansehen), so wird doch dieser Punkt L_1 mit derselben Genauigkeit der Strahlenvereinigung abgebildet, wie L selber. Dies gilt für jeden der ursprünglichen Axe

unendlich nahen Punkt und für jedes von einem solchen ausgehende Strahlenbüschel, dessen Axe seinerseits gegen die ursprüngliche unendlich wenig geneigt ist und welches eine unendlich kleine Oeffnung hat.

In einem solchen »fadenförmigen« Raum und für Strahlenbüschel, die ganz in ihm verlaufen, findet dann die Beziehung der Collinearität statt. Denn wenn auch nicht alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch vereinigt werden, so ist doch die Lage jedes Punktes schon als Schnittpunkt je zweier völlig bestimmt und wenn demgemäss für Punkte, die auf einer beliebigen der Axe nahen, einer »paraxialen« Geraden liegen, bewiesen ist, dass ihre Bilder ebenfalls auf einer Geraden liegen, so gilt dies in dem betreffenden Raum eben allgemein. Erstere Voraussetzung trifft aber, wie ohne weiteres zuzugestehen ist, im vorliegenden Falle zu; denn paraxiale Gerade können durchweg als abbildende Strahlen angesehen werden.

Durch Brechung paraxialer unendlich dünner Strahlenbüschel an einer Kugel wird also eine collineare Abbildung des um die betreffende Centrale gelegenen fadenförmigen Raums bewirkt. Auf diese können wir daher ohne weiteres unsere allgemeinen Resultate anwenden.

Wir haben absichtlich oben diesem Falle einer collinearen Abbildung solche von nicht collinearer, wenn auch sonst zum Theil weniger eingeschränkter Abbildung vorangeschickt, um an diesen Beispielen zu zeigen, wann die im vorigen Capitel abgeleiteten allgemeinen Gesetze Anwendung finden und wie ihr Geltungsbereich zu bestimmen ist.

Grundfaktoren der Abbildung durch eine brechende Fläche.

Die Axe des Objektraums wie Bildraums fällt hier zusammen mit der Kugelcentralen, also fallen auch der Richtung und dem Orte nach hier beide Axen mit einander zusammen. Denn erstens erfüllt diese Centrale die Bedingung, sich selbst conjugirt zu sein (ein senkrecht im Scheitel einfallender Strahl geht ungebrochen weiter). Zweitens werden Ebenen (elemente) senkrecht zu dieser Linie abgebildet in ebensolche. In der That haben wir ja gesehen, dass bei der nicht collinearen Abbildung durch beliebige »centrale« Büschel, pag. 72, um den Kugelmittelpunkt concentrische Kugelflächen abgebildet werden in ebensolche. Für den einer Axe unendlich nahen Raum sind nun beide Abbildungsweisen, die oben und die zuletzt betrachtete, dem Abbildungs-Vorgange und daher auch dem Resultate nach identisch. In diesem beschränkten Gebiete aber kann die zur Axe normale Kugelfläche identificirt werden mit dem zu ihr senkrechten Ebenenelement. Jeder Punkt des Abbildungsraums (des Raums nahe der Axe) kann angesehen werden als Punkt des Objekt- wie des Bildraums — ein Verhältniss, welches wohl im ideellen Falle aber durchaus nicht bei jeder Verwirklichungsweise optischer Abbildung besteht. Je nach seiner Lage zur brechenden Fläche ist jeder Punkt aber »reeller« oder »virtueller« Brennpunkt eines Büschels, und zwar enthält der Raum vor der brechenden Fläche die reellen Objektpunkte der Raum hinter ihr die reellen Bildpunkte und vice versa.

Auf Grund dieser Ueberlegung und der schon abgeleiteten Beziehung für conjugirte Abscissen lassen sich nunmehr auf inductivem Wege für die betrachtete Art von Abbildung an einer Fläche sowohl als an beliebig vielen die allgemeinen Abbildungsgesetze ableiten, welche wir im vorigen Abschnitt deductiv hergeleitet haben. Dies ist der von GAUSS und HELMHOLTZ und seitdem von der überwiegenden Mehrzahl der Autoren eingeschlagene Weg. Wir unsererseits sind bereits im Besitz der allgemeinen Resultate und wenden dieselben nur durch Specifikation auf den vorliegenden Fall an.

Die Brennebenen sind nach unserer Definition die Bilder der unendlich entfernten Ebenen. Ihre Lage zum Scheitel der brechenden Fläche erhalten wir,

indem wir in einem der Ausdrücke 2^a bis ^{c} das eine Mal s', das andere Mal $s = \infty$ setzen. Nämlich

$$\left.\begin{aligned} SF &= -\frac{nr}{n'-n} \\ SF' &= +\frac{n'r}{n'-n} \end{aligned}\right\} \text{ als Scheitelabstände der Brennpunkte.}$$

Die Brennweiten sind nach einer unserer Definitionen gleich dem Verhältniss der Höhe eines zur Axe parallelen Strahls zur Tangente seines Neigungswinkels nach der Brechung. Im vorliegenden Fall sind die Tangenten und Sinus von Strahl-Axenwinkeln einander und dem Bogen selbst gleich zu setzen, und, wie ohne weiteres ersichtlich, ist dann die Brennweite des Objekt- bezw. Bildraums direkt gleich dem negativ genommenen Abstand des betreffenden Brennpunkts vom Scheitel. (Dieser Umstand erklärt die Einführung des Worts »Brennweite« für eine Grösse, die sich uns nur als das Verhältniss zweier Grössen darbot.)

Es ist also

$$f = +\frac{nr}{n'-n}; \quad f' = -\frac{n'r}{n'-n} \quad \text{und} \quad f : f' = -n : n'.$$

Hieraus ergiebt sich, dass bei der betrachteten (dioptrischen) Abbildung 1) die Brennweiten stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen und 2) dass ihr Verhältniss, — von dem wir bereits wissen, dass es constant ist, — gleich dem der Medien ist, auf welche sie sich beziehen. Die erstere Folgerung reiht die hier betrachtete, dioptrische Abbildung in die früher unterschiedene Hauptgattung der rechtläufigen. In der That kann man aus der Natur der Brechung (auch wenn dieselbe ein anderes als das SNELLIUS'sche Gesetz befolgte) unmittelbar schliessen, dass die durch sie vermittelten Abbildungen stets rechtläufig sein müssen, nämlich wofern und weil der gebrochene Strahl auf derselben Seite des Einfallsloths liegt (mit ihm einen Winkel von gleichem Vorzeichen bildet) als der einfallende und der Brechungswinkel mit dem Einfallswinkel stetig wächst.

Weiterhin kann man aus den für f und f' abgeleiteten Ausdrücken schliessen, dass bei der Reflexion an einer Fläche, für welche wir $n' = -n$ zu setzen haben $f = f' = -\frac{r}{2}$ ist, also $f : f' = +1$; f und f' haben also stets gleiches Vorzeichen, woraus folgt, dass diese Abbildung rückläufig ist. Auch dies lässt sich unmittelbar aus der Entstehungsweise der Bilder bei der Reflexion entnehmen, nämlich insofern und weil diese durch Strahlen erfolgt, die beim Einfall und Rücktritt auf entgegengesetzten Seiten der Einfallsnormalen liegen und deren Einfalls- und Reflexionswinkel gleichzeitig ab- und zunehmen.

Ferner ergiebt sich aus den Ausdrücken für f, in welchen Fällen die Abbildung durch eine Fläche eine »collective«, in welchen sie eine »dispansive« in dem früher gebrauchten Sinne ist. Nämlich die Abbildung durch einfache Brechung ist, wenn

$$\left.\begin{aligned} n' > n \quad &\text{und} \quad r > 0 \\ n' < n \quad &\text{und} \quad r < 0 \end{aligned}\right\} \text{ eine collective,}$$

umgekehrt wenn

$$\left.\begin{aligned} n' > n \quad &\text{und} \quad r < 0 \\ n' < n \quad &\text{und} \quad r > 0 \end{aligned}\right\} \text{ eine dispansive.}$$

Die Abbildung durch einfache Reflexion ist eine collective, wenn $r < 0$, eine dispansive wenn $r > 0$.

Die Ausdrücke »collectiv«, »dispansiv« finden ihre anschaulichste Begründung in der Modifikation, die jedes einzelne Strahlenbüschel in dem einen oder anderen

Falle erleidet. Denn wie man sich leicht überzeugt, wird ein Strahlenbüschel durch Brechung oder Reflexion an einer collectiven Fläche stets convergenter, durch die einer dispansiven stets divergenter.

Bedenkt man, dass $i = u - \varphi$; $i' = u' - \varphi$ und für unendlich kleine Einfallswinkel $ni = n'i'$ ist, so hat man $n'u - nu = (n' - n)\varphi$ unabhängig von der Entfernung der conjugirten Punkte als ein Maass der Divergenzänderung, wenn nicht die Aenderung des Oeffnungswinkels selber, sondern die seines dioptrischen Werthes in Anschlag gebracht wird. φ ist positiv für negatives r, negativ für positives. Die »optische Divergenzänderung« wie HELMHOLTZ sie nennt[1]), ist also für unendlich kleine Winkel proportional der Oeffnung der brechenden Kugel, welche von den Strahlen benützt ist. Die Divergenz wird vermehrt, wenn das stärker brechende Medium an der convexen Seite der Kugel liegt und umgekehrt.

Für die Reflexion hat man noch einfacher

$$u' - u = -2\varphi$$

in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, d. h. Convexspiegel zerstreuen, Concavspiegel sammeln die Strahlen homocentrischer Büschel, welche auf sie fallen[2]).

Alle anderen Maassbestimmungen der Abbildung durch eine einfache Brechung oder Spiegelung liessen sich zwar aus den gemachten Annahmen speciell für den vorliegenden Fall ableiten; sie folgen für uns aber, wie gesagt, unmittelbar aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen, die hier ohne weiteres anwendbar sind. Man hat nur für f und f' die oben gefundenen Werthe einzutragen und die Lage von F und F' zu berücksichtigen.

Man sieht dann u. A., dass im Scheitel der brechenden Fläche beide Hauptpunkte zusammenfallen, im Mittelpunkt derselben beide Knotenpunkte.

Die Discussion der Abbildung durch einfache Brechung hat insofern ein besonderes Interesse, als für GAUSS, wie wir bereits an anderer Stelle erwähnten, bei Aufstellung seiner Theorie ersichtlich und ausgesprochener Maassen das Bestreben leitend war, die Abbildung durch ein beliebiges System von brechenden und spiegelnden Flächen möglichst vergleichbar zu machen und durch ähnliche Ausdrücke darzustellen, wie die durch eine einzige solche Fläche.

Den Fall der einfachen Spiegelung an einer sphärischen Fläche haben wir bereits erwähnt. Es ist dann $f = f' = -\frac{r}{2}$. Beide Brennpunkte fallen im Halbirungspunkte des nach dem Scheitel gerichteten Radiusvector zusammen; es fallen daher auch Objekt- und Bildraum genau aufeinander, jedoch unter Wahrung der Art gegenseitigen Entsprechens, welche nach den allgemeinen Gleichungen für diesen Fall der »rückläufigen« Abbildung stattfindet.

Wenn $r = \infty$, d. h. die brechende bezw. spiegelnde Fläche eben ist, so werden auch die Brennweiten $= \infty$, wir haben es dann also mit einer »teleskopischen« Abbildung zu thun. Im Falle der Brechung an einer Ebene folgt aus (2b) als Beziehung zwischen conjugirten Scheitelabständen

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} \cdot s,$$

also einfache Proportionalität des Objekt- und Bildabstandes von der brechenden Ebene für alle Werthe und bei stets gleichseitiger Lage in Bezug auf die Ebene.

---

[1]) Physiol. Optik. 2. Aufl., pag. 64.

[2]) Manche englischen Darstellungen räumen nach dem Vorgange von CODDINGTON und namentlich wohl von LLOYD den Divergenzveränderungen der Büschel durch optische Systeme den ersten Rang bei deren Studium ein.

Das Convergenzverhältniss γ ist für eine einfache Brechung stets $\gamma = \frac{s}{s'}$, also hier $\gamma = \frac{n}{n'}$; die Lateralvergrösserung $\beta = \frac{ns'}{n's} = +1$.

Im Falle der Spiegelung an einer ebenen Fläche ist $s' = -s$; $\gamma = -1$; $\beta = +1$, also Objekt und Bild liegen stets symmetrisch zur spiegelnden Fläche und sind einander congruent.

In diesem letzteren Falle ist, wie eine ganz einfache Betrachtung lehrt, die Abbildung weder in Bezug auf das Gebiet noch in Bezug auf die wirksamen Strahlen auf den fadenförmigen Raum beschränkt, der um je eine zur Fläche senkrechte Gerade herum gelegen ist, sondern sie findet in jeder beliebigen Ausdehnung in gleicher Weise statt und wird durch beliebig weite Strahlenbüschel in aller Strenge verwirklicht. Es ist dies der einzige Fall, in welchem eine Abbildung von solcher Ausdehnung stattfindet. Da er aber für die Abstufung der Lage- und Maassbeziehungen der beiden Abbildungsräume gar keinen Spielraum offen lässt, so ist er natürlich nur von beschränktem Nutzen für den Zweck, welchem die »optischen Instrumente« überhaupt dienen. Die Spiegelung an einer (oder mehreren) Ebenen ist ein Mittel, um ein Object oder ein von anderen optischen Systemen entworfenes Bild in unveränderter Gestalt an eine andere Stelle des Raums zu versetzen. Das von einer ungeraden Anzahl ebener Spiegel gelieferte Bild ist dabei symmetrisch gleich, das von einer geraden Anzahl gelieferte congruent dem Objekt, wie sich aus dem obigen von selbst ergiebt[1]).

Viele brechende Flächen (centrirtes optisches System).

Die Abbildung durch Brechung oder Spiegelung centraler Elementarbüschel an einer beliebigen Zahl von sphärischen Flächen, welche die Grenzen von Medien verschiedener Brechungsexponenten sind, folgt aus der durch je eine solche Fläche bewirkten und unseren allgemeinen Gesetzen der collinearen Abbildung und Combination von solchen Abbildungen. Wenn auf die betrachtete erste Fläche eine zweite folgt, deren Mittelpunkt innerhalb des fadenförmigen Raums liegt, in welchem allein jene eine collineare Abbildung zu Stande bringt, so kann der Bildraum der ersten Fläche angesehen werden als Objektraum der zweiten; denn die Axen und Strahlen aller einfallenden Büschel bilden dann sehr kleine Winkel auch mit der Centralen dieser Fläche; u. s. f. für beliebig viele aufeinander folgende Flächen. Wenn die Mittelpunkte dieser Flächen nicht nur innerhalb des für die erste Fläche in Betracht kommenden fadenförmigen Raums liegen, sondern sämmtlich auf derselben Geraden, so nennt man die Flächen centrirt. Die betreffende Gerade ist dann, wie aus den früheren Betrachtungen ohne weiteres folgt, selbst die Hauptaxe der Abbildung, auch »Axe des Systems« genannt.

Die Lage der Brennpunkte eines solchen Systems lässt sich unschwer berechnen, sei es durch successive Anwendung einer der Formel (2a) bis (2b), sei es, indem man diese in Form eines Kettenbruchs bringt, sei es endlich, indem man auch hier von den Determinanten Gebrauch macht. Gleiches gilt für die Berechnung der Brennweiten des zusammengesetzten Systems. Wir wollen uns

[1]) Näheres über die durch mehrfache Spiegelung (sogen. Winkelspiegel) entworfenen Bilder siehe in den früher aufgeführten Lehrbüchern der geometrischen Optik von Lloyd, Parkinson, Meisel, Heath u. A. Die specielle Literatur citirt H. Maurer, Grunert's Archiv (2) 9, pag. 1. 1890, gelegentlich der Discussion einiger besonders interessanter Fragen, die sich an dieses Instrument knüpfen.

aber hierbei nicht aufhalten, da wir diese Aufgabe im Princip schon im vorigen Abschnitt pag. 64 ff. gelöst haben und verweisen hier nochmals auf die daselbst citirte Litteratur, welche das betreffende Problem mehr unter dem speciellen Gesichtspunkte behandelt, unter welchem es sich uns hier darbietet, als unter dem allgemeineren, von dem aus wir es damals betrachteten.

Von Interesse ist uns hier im wesentlichen nur eine Folgerung, betreffend das Verhältniss der beiden Brennweiten nach beliebig vielen Brechungen oder Spiegelungen. Von diesem hat LAGRANGE[1]) für einen speciellen Fall, HELMHOLTZ[2]) allgemein bewiesen, dass es stets gleich dem Verhältniss der Medien des Objekt- bezw. Bildraums sei — wie wir im Falle einer einzigen Brechung durch direkte Ausrechnung fanden.

HELMHOLTZ zeigt, dass die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'}, \quad \text{also} \quad \beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'},$$

welche bei jeder einzelnen Brechung gelten, durch Multiplication zu dem gleichen Ausdruck $\beta\gamma = (n/n')$ für beliebig viele Brechungen führen. Nach unseren allgemeinen Gleichungen ist aber $\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$, folglich bei jeder dioptrischen Abbildung auch $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$.

Wir unsrerseits können den Beweis ohne weiteres darauf stützen, dass wie bereits pag. 65 die Brennweiten eines aus conaxialen beliebig zusammengesetzten Systems gefunden haben, ausgedrückt durch die der einzelnen Systeme wie folgt

$$f = \frac{(-1)^{k-1} f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_k}{N_k}; \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \cdots \cdot f_k'}{N_k},$$

worin N_k ein gewisser von den Constanten und Lagebeziehungen der einzelnen Systeme abhängiger Ausdruck war. Also ist

$$\frac{(-1)^{k-1} f'}{f} = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \cdots \cdot f_k'}{f_1 f_2 \cdot \cdots \cdot f_k} = \left(\frac{f_1'}{f_2}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \cdots \left(\frac{f_k'}{f_k}\right).$$

Die Verhältnisse der Einzelbrennweiten aber sind, wie wir gesehen haben, gleich dem negativen Verhältniss der Brechungsindices des Objekt- und Bildraums und offenbar ist der Index des Bildraums des $p$ten Systems gleich dem des Objektraums des $(p+1)$ten, folglich ist

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{(2k-1)} \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \cdots \frac{n_{k+1}}{n_k} = -\frac{n'}{n}.$$

Im Falle der rein katoptrischen Abbildung (durch lauter Spiegelungen) ist jedes einzelne

$$\frac{f_k'}{f_k} = +1,$$

also

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{k-1},$$

d. h. $+1$ oder -1 je nachdem die Zahl der Spiegelungen eine ungerade oder gerade ist.

Ist die Abbildung durch Spiegelungen und Brechungen bewirkt, »katadioptrisch«, so wird $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ oder $= +\frac{n'}{n}$, je nachdem die hierbei eingetretenen Spiegelungen gerade oder ungerade an Zahl sind.

---

[1]) Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin. Classe math. 1803, pag. 1.

[2]) Handbuch der physiologischen Optik 1867, pag. 50.

Dies sind also die Bedingungen, unter welchen eine solche Abbildung »rechtläufig« oder »rückläufig« ist, wie wir sie pag. 48 bereits antecipirt hatten.

Unter Benützung der hier festgestellten Beziehungen zwischen f und f' lassen sich nun alle früher abgeleiteten Gleichungen entsprechend modificiren. Eine besonders einfache Form nehmen dieselben in dem sehr häufigen Falle an, dass erstes und letztes Medium gleich, also $f' = \pm f$ ist. Doch überlassen wir die Discussion der besonderen Verhältnisse, welche dieser speciellen Annahme entsprechen, späteren Gelegenheiten.

Die einfache geometrische Bedeutung, welche die »Brennweiten« im Falle der Brechung an einer einzelnen Fläche — und auch im Falle der an beliebig vielen, wenn diese nach verschwindendem Zwischenraum auf einander folgen — hatte, nämlich gleich dem negativen Abstand des Brennpunkts von dem betreffenden brechenden Fläche zu sein, geht bei einem System von Flächen mit endlichen Zwischenräumen natürlich ganz verloren. Die Brennpunkte und alle anderen früher betrachteten Cardinalpunkte können dann gegen die brechenden Flächen und gegen einander selbst jede Lage einnehmen, unter Wahrung nur der früher hergeleiteten allgemeinen Gesetzmässigkeiten, z. B. müssen immer, wenn $n' = n$ ist, also $f' = \pm f$ die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammenfallen etc.[1])

Linsen.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist der Fall eines aus 2 brechenden Flächen bestehenden Systems, welches beiderseits ein Medium von gleichem Index (den wir $= 1$ setzen können) hat; denn die künstlich hergestellten optischen Instrumente bestehen fast durchgängig aus solchen binären Systemen und auch alle anderen lassen sich jedenfalls in Gedanken immer in solche zerlegen. Man nennt dieselben bekanntlich Linsen.

Je nach der Krümmung der die Linse begrenzenden Flächen nach aussen unterscheidet man dieselben als biconvexe, biconcave, planconvexe, planconcave und concav-convexe. Oft wird bei der Bezeichnung auch die Stellung der Linse zu den einfallenden Strahlen mit angedeutet, indem der Krümmungssinn der ersten Fläche in dem Namen vorangestellt, also zwischen planconvexen, und convex-planen, concav-convexen und convex-concaven Linsen unterschieden wird.

Bezeichnen wir die erste und zweite Fläche mit den Indices 1 und 2, so ist, wenn wir den relativen Brechungsexponenten der Linsensubstanz gegen das äussere Medium mit n bezeichnen, den Scheitelabstand der beiden Linsenflächen mit d (»Dicke« der Linse)

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \qquad f_1' = -\frac{n r_1}{n-1}$$

$$f_2 = -\frac{n r_2}{n-1} \qquad f_2' = \frac{r_2}{n-1}.$$

Die Abstände der Brennpunkte der einzelnen Flächen von denselben sind gleich den negativ genommenen bezüglichen Brennweiten. Die Grösse $\Delta = F_1' F_2$ in den Formeln für die Zusammensetzung zweier conaxialen Abbildungen (der Abstand des vorderen Brennpunkts des zweiten Systems vom hinteren der ersteren) wird daher im vorliegenden Falle

$$\Delta = f_1' - f_2 + d.$$

---

[1]) Man sehe u. A. die Discussionen von MATTHIESSEN, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 32, pag. 170. 1887, und BROCKMANN, Inaug.-Diss., Rostock 1887, über die in katadioptrischen Systemen auftretenden Sonderverhältnisse.

Trägt man hierin obige Werthe ein, so findet man die Brennweiten der Linse

$$f = -\frac{f_1' f_2}{\Delta} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)R}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = -f,$$

und nach den Formeln

$$\sigma = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \qquad \sigma' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta},$$

ebenso die Abstände der Linsenbrennpunkte von den zugewandten Flächenbrennpunkten; hieraus dann weiter die Lage der Linsenbrennpunkte und anderen Cardinalpunkte zu den Scheiteln der brechenden Fläche. Nämlich der Abstand des vorderen Brennpunkts vom Scheitel der ersten Fläche ist

$$s_F = \sigma - f_1 = -\frac{r_1(n r_1 + R)}{(n-1)R};$$

der Abstand des hinteren Brennpunkts vom Scheitel der zweiten Fläche

$$s_F' = \sigma' - f_2' = +\frac{r_2(n r_2 - R)}{(n-1)R},$$

worin überall $R = n(r_2 - r_1) + (n-1)\,d$.

Die Abstände der Hauptpunkte von den zugewandten Linsenscheiteln sind

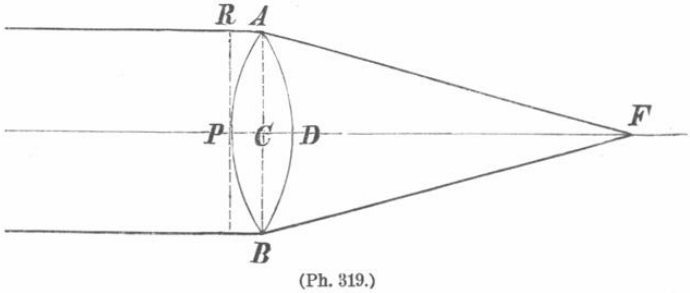
$$s_H = s_F + f = -\frac{(n-1)\,r_1 d}{(n-1)R}$$

$$s_H' = s_F' + f' = -\frac{n-1)\,r_2 d}{(n-1)R}.$$

Oft hat man es mit dem Reciproken der Brennweite zu thun, wie wir später sehen werden, der sogen. »Stärke« der Linse $\frac{1}{f} = \varphi$; diese drückt sich durch die Reciproken der Radien, die Krümmungen $\frac{1}{r_1} = \rho_1$ und $\frac{1}{r_2} = \rho_2$ nach obigem, wie folgt aus:

$$\varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n-1)^2}{n}\, d\, \rho_1 \rho_2.$$

RAYLEIGH[1]) leitet eine Formel für die Brennweite einer Convex-Linse, als Funktion ihrer freien Oeffnung, Dicke und des Brechungsexponenten direkt aus dem Princip der gleichen optischen Längen her. Wenn die ebene Welle RPQ mit gleicher Phase nach F übergeführt werden soll, so muss (Fig. 319) der Lichtweg $[PDF] = [RAF]$ sein. Nun ist



(Ph. 319.)

$$[PDF] = DF + n \cdot PD = DF + n \cdot d = PC + CF + (n-1)d,$$

CF aber ist bei einer dünnen Linse stets sehr nahe $= f$, also

$$[PDF] = PC + f + (n-1)\,d.$$

Andrerseits ist $[RAF]$, wenn dies der Weg des den scharfen Rand der Linse passirenden Strahls ist

$$[RAF] = RA + AF = PC + \sqrt{f^2 + y^2} = PC + f\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f^2} + \ldots\right),$$

also, wenn höhere Potenzen von $\frac{y}{f}$ als die zweite vernachlässigt werden,

[1]) Phil. Mag. (5) 8, pag. 480. 1879. S. auch ibid. 20, pag. 354. 1885.

$$[RAF] = PC + f + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f}.$$

Damit also $[RAF] = [PDF]$ sei, muss

$$(n-1)\,d = \frac{1}{2}\frac{y^2}{f} \quad \text{sein, daher} \quad f = \frac{1}{2}\frac{y^2}{(n-1)\,d}.$$

Bei Glas von Index $n = 1{\cdot}5$ ist dann die halbe Oeffnung der Linse die mittlere Proportionale zwischen Dicke und Brennweite — eine bekannte Regel der älteren Optik.

Endigt die Linse nicht in einen scharfen Rand, so ist für d die Differenz der Linsendicken am Rand und in der Mitte zu setzen.

Die Vorzeichen von f bezw. φ hängt nicht nur von denen der Radien ab, sondern auch von der Dicke der Linse. Z. B. bei einer biconvexen Linse ist $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ also f_1 und f_2 beide > 0; daher $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ positiv, so lange

$$d < \frac{n\,(r_1 - r_2)}{n-1};$$

wenn d diesen Grenzwerth überschreitet ist $f < 0$, das System wird dispansiv, trotzdem es aus zwei collectiven zusammengesetzt ist. Wenn $d = \frac{n\,(r_1 - r_2)}{n-1}$, also $\Delta = 0$ und $f = \infty$, so ist die Linse ein teleskopisches System.

In ähnlicher Weise kann man die Werthe und Vorzeichen studiren, welche die Brennweite einer einfachen Linse bei anderen Formen und Dicken annimmt.

Verschwindend dünne Linsen.

Als einfachster Fall hebt sich derjenige heraus, wenn die Dicke der Linse sehr klein ist gegen ihre Brennweite, so dass man den Einfluss der Dicke auf die Brennweite vernachlässigen kann. Alsdann ist

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}; \quad \varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2).$$

Die Stärke der Linse ist dann also einerseits proportional dem um 1 verminderten Brechungsindex, anderseits der Differenz der beiden dem einfallenden Lichte zugewandten Krümmungen. Letztere allein bestimmen das Vorzeichen von f und φ. Je nachdem die nach aussen gerichtete Convex- oder Concavkrümmung der Linse die stärkere ist, wirkt die Linse als collectives oder dispansives System.

Die Theorie solcher Linsen von verschwindender Dicke allein wär es, welche vor den Untersuchungen von Gauss eine einigermaassen übersichtliche und genaue Darstellung gefunden hatte.

Da in manchen Fällen für eine vorläufige, ungefähre Veranschlagung der Wirkungen eines optischen Systems die Linsen derselben in erster Näherung als verschwindend dünn betrachtet werden können, so wollen wir auf die Theorie derselben auch hier kurz eingehen.

Die Brennweiten einer solchen Linse sind offenbar gleich den Abständen der Linse selbst von den Brennpunkten. Die Theorie der dünnen Linse wird hierdurch sehr ähnlich der einer einzelnen brechenden Fläche; nur dass die Brennweiten gleiche Grösse haben, also die Brennpunkte symmetrisch zur Linse liegen und sowohl die Haupt- als auch die Knotenpunkte als am Ort der Linse selbst zusammenfallend zu betrachten sind. Für die Entfernungen conjugirter Punkte von der Linse a, b ergiebt sich die einfache Formel

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f},$$

wenn wieder die Entfernungen a, b von der Linse aus im Sinne der Lichtbewegung als positiv gerechnet werden.

Die Vergrösserung $\beta = \frac{y'}{y}$ wird $= \frac{b}{a}$.

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten,

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{a}{b}.$$

Befinden sich mehrere unendlich dünne Linsen in Contakt und kann man auch die Gesammtdicke dieses Systems gegen seine Brennweite vernachlässigen (was natürlich immer nur bei einer sehr geringen Anzahl von Linsen genügend annähernd der Fall ist), so ergiebt sich die »Stärke« des ganzen Systems

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2} + \ldots \frac{1}{f_k} = \Sigma \frac{1}{f_k} = \Sigma \varphi_k,$$

d. i. gleich der Summe der Stärken der Einzellinsen oder, durch die einzelnen Radien und Brechungsindices ausgedrückt

$$\varphi^{(k)} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) + \ldots\ldots,$$

$$\varphi^{(k)} = \Sigma (n_k - 1)(\rho_k - \rho_k'),$$

wenn erste und zweite Fläche jeder Linse durch hochgestellten, die Linsen selbst durch den unteren Index unterschieden werden.

Wenn die dünnen Linsen nicht im Contakt befindlich, sondern durch endliche Intervalle getrennt sind, so werden die Ausdrücke für die Brennweite complicirter und der Brennpunktsabstand ist dann besonders zu berechnen. Diese Aufgabe ist aber ganz analog derjenigen, die Bestimmungsstücke eines Systems zu berechnen, dessen einzelne brechende Flächen gegeben sind und sei deshalb hier nur auf die betr. Orts citirte Literatur verwiesen.

Von Interesse ist vielleicht nur noch eine kurze Discussion der möglichen Combinationen zweier getrennter dünner Linsen.

Ist ihre Entfernung $= d$, so ist ihr optisches Intervall wie bei einer einzelnen Linse von endlicher Dicke

$$\Delta = f_1' - f_2 + d, \quad \text{also hier} \quad -\Delta = f_1 + f_2 - d.$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d},$$

daher

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2.$$

1) Sind f_1 und f_2 beide > 0, also beide Linsen collectiv, so sieht man, dass die Brennweite des zusammengesetzten Systems ihren kleinsten positiven Werth hat, wenn $d = 0$ ist, die Linsen sich berühren. Mit wachsendem d nimmt f zu und es wird $f = \infty$, wenn $d = f_1 + f_2$; das System ist dann ein teleskopisches. Bei noch grösserem d erhält f einen grossen negativen Werth und dieser nimmt mit weiter wachsendem d unbegrenzt ab.

2) Sind f_1 und f_2 beide < 0, also beide Linsen dispansiv, so hat f für $d = 0$ seinen grössten und zwar negativen Werth. Bei wachsendem d nimmt f an Grösse ab, bleibt aber stets negativ.

3) Ist die eine Linse collectiv, die andre dispansiv, z. B. $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, so ist bei $d = 0$ die Brennweite des zusammengesetzten Systems positiv oder negativ, je nachdem f_1 dem absoluten Werthe nach kleiner oder grösser als f_2 ist.

a) Wenn $[f_1] > [f_2]$, also hier $f_1 + f_2 > 0$, so nimmt mit wachsendem d f wachsende negative Werthe an und wird bei $d = f_1 + f_2$ unendlich, d. h. das System wird wieder teleskopisch. Bei noch weiterer Steigerung von d durchläuft f abnehmende positive Werthe

b) Wenn $[f_1] < [f_2]$ also $f_1 + f_2 < 0$, so hat f im Falle des Contakts beider Linsen seinen grössten positiven Werth. Bei wachsendem d wird f kleiner, bleibt aber stets positiv. Im Falle wo $d = f_1 + f_2$, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems coincidirt mit dem hinteren der ersten und eine teleskopische Abbildung resultirt, sind die Maassverhältnisse der letzteren, wie wir früher fanden, (pag. 62) gegeben durch die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f_2}{f_1}; \quad \gamma = \frac{tang\, u'}{tang\, u} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Die wichtigsten Werke der ausserordentlich umfangreichen für den Gegenstand dieses Abschnitts vorhandenen Literatur sind schon in den beiden vorangehenden Artikeln namhaft gemacht worden. Es sei daher auf diese verwiesen. Eine bis in die neuere Zeit reichende Zusammenstellung, die jedoch bei weitem nicht erschöpfend ist, hat MATTHIESSEN versucht. Grundriss etc., pag. 272, und PFLÜGER's Arch. f. Physiol. 19, pag. 553. 1879.

S. CZAPSKI.

Realisirung der optischen Abbildung
B. durch schiefe Elementarbüschel.
(Astigmatische Brechung.)

Der vorher betrachtete Fall der Brechung von Elementarbüscheln, deren Axen der gemeinsamen Centrale von Kugelflächen unendlich nahe sind, ist nicht der einzige, in welchem eine collineare Abbildung zu Stande kommt. Von Bedeutung für die Theorie der optischen Instrumente ist noch der andere Fall, dass die abbildenden Büschel zwar auch unendlich eng, elementar, ihre Axen aber nicht der gemeinsamen Centralen, sondern einem unter endlichem Winkel gebrochenen, das System durchsetzenden Strahl unendlich nahe sind. Allerdings wird die Preisgabe der einen Beschränkung hier durch andere neu einzuführende compensirt; aber es bleibt, wie wir zeigen wollen, dennoch eine Abbildung bestehen, welche in ihrem engen Bereich den Bedingungen unserer allgemein behandelten genügt und darum auch ihren Gesetzen unterworfen ist.