Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Geometrische Theorie der optischen Abbildung (Nach Abbe)

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Unter den zahlreichen sonstigen Gesammtdarstellungen der geometrischen Optik (Katoptrik und Dioptrik) sind aus früherer Zeit als die bedeutendsten zu nennen:

R. SMITH, A compleat System of Opticks. 2 Bde. Cambridge 1738. Ein Theil dieses Werks ist übersetzt (»aus dem Englischen ins Deutsche und aus dem synthetischen Vortrage in den analytischen«) von

A. G. KÄSTNER. Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755.

L. EULER, Dioptrice. 3 Bde. Petrop. 1769—71. Ein Auszug und Umarbeitung dieser ist

G. S. KLÜGEL, Analytische Dioptrik. Leipz. 1778.

J. F. W. HERSCHEL, Light. Encycl. Metrop. 1827, übers. v. J. C. E. SCHMIDT, Stuttgart 1831.

H. CODDINGTON, Treatise on the refraction of light. London 1829.

H. LLOYD, Treatise on Light and Vision. London 1831.

R. POTTER, An Elementary Treatise on Optics London, pt. I. 1847 (3. Aufl. 1865), pt. II. 1851.

S. PARKINSON, A. Treatise on Optics. London 1859, 4. Aufl., 1884.

Alle diese Werke ausser dem von HEATH behandeln nur specielle Probleme der Dioptrik. Die Literatur über die durch GAUSS angebahnte neue Richtung der Optik sowie die hervorragenderen Werke und Abhandlungen über besondere Gebiete werden betreffenden Orts angegeben werden.

Die ältere Literatur bis ca. 1830 ist ziemlich vollständig aufgeführt am Schlusse von LITTROW's Dioptrik. Wien 1830 und in der »Litteratur der Optik« (o. O. u. J.) v. H. W. DOVE.

S. CZAPSKI.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.

(Nach ABBE.)

Stellung des Problems.

Mit dem im vorangehenden Kapitel Gegebenen ist dasjenige in der Lehre von der Spiegelung und Brechung des Lichts, was ein unmittelbares physikalisches Interesse besitzt, ziemlich erschöpft. Der weitere Inhalt unserer Darstellung kann sich nunmehr nur noch auf die Anwendungen dieser Lehre beziehen. Diese begreifen einerseits die Erklärung gewisser — meist meteorischer — Naturerscheinungen in sich, andererseits liefern sie die Principien für die Construktion bezw. das Verständniss der sogen. optischen Instrumente, die ihrerseits namentlich als Hilfsmittel der Forschung in- und ausserhalb des physikalischen Gebietes eine grosse Bedeutung besitzen.

Wir wenden uns zuerst den letzteren zu.

Es handelt sich bei diesen in letzter Linie stets darum, dass durch Vermittelung von Reflexionen oder Brechungen (oder Combinationen beider) an geeignet geformten und zusammengestellten optischen Medien Bilder äusserer Gegenstände (oder Bilder solcher Bilder) hervorgebracht werden, und zwar besteht das Zustandekommen dieser Bilder stets darin, dass ein Theil der von je einem Punkte A des Gegenstandes ausgehenden Strahlen durch die Reflexionen und Brechungen, welche er erfährt, so modificirt wird, dass er wieder nach einem Punkte, dem Bildpunkte, A', convergirt.

Man hat nun die Gesetze, welche zwischen den Bildern und ihren Objekten bestehen, bis in die neueste Zeit fast ausnahmslos in der Weise studirt, dass man die besonderen Fälle, in welchen eine Wiedervereinigung von homocentrisch divergirenden Strahlenbüscheln stattfindet, näher untersuchte, und nur auf Grund solcher specieller Untersuchungen gelangte man schliesslich durch Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate zu gewissen allgemeineren Beziehungen. Auch GAUSS, dem der grösste und wichtigste Fortschritt auf dem Wege solcher Verallgemeinerung der speciellen Theoreme zu verdanken ist, ging in seinen berühmten »Dioptrischen Untersuchungen«[1]) von den besonderen Voraussetzungen centrirter Kugelflächen, eines fadenförmigen axialen Strahlen- und Abbildungsraumes, sowie von der Giltigkeit des Brechungsgesetzes selbst aus und liess nur die bis dahin stets gemachte Einschränkung auf den Fall unendlich dünner in Contakt befindlicher Linsen, d. h. mit den Scheiteln coincidirender sphärischer Flächen vollständig fallen. Ihn leitete offenbar — und ausgesprochener Maassen — das Bestreben, die Gesetze der Abbildung durch beliebig zusammengesetzte Linsensysteme zurückzuführen auf gleich einfache Formen, wie sich bei einer einzelnen brechenden Fläche oder einer einzigen Linse verschwindender Dicke ergeben. Wiewohl er nun zeigte, dass in diesen Gesetzen die ursprünglichen Bestimmungsstücke des Systems (Radien, Dicken, Brechungsindices) eine sehr beiläufige Rolle spielten, dass die Abbildung vielmehr von gewissen Constanten viel allgemeinerer Art abhänge, so entging doch auch ihm anscheinend die Erkenntniss, dass alle Annahmen über die besondere Art der Verwirklichung einer optischen Abbildung den Kern der Frage, d. h. deren allgemeine Gesetze überhaupt nicht tangirten. Es war aber schon damals bekannt und ist später noch öfters gezeigt worden, dass es noch andere Fälle dioptrischer Abbildung von sehr verschiedener Art giebt, wie: durch die Brechung (oder Reflexion) schiefer Büschel (s. später) oder durch die Brechung axialer Büschel an nicht centrirten Systemen von Kugelflächen, auch durch Brechung von Büscheln beider Art an anderen als sphärischen Flächen, endlich auch durch eine Art von Strahlenvereinigung, die gar nicht mehr rein dioptrischer Natur ist[2]) — in allen diesen Fällen konnte und musste immer erst besonders gezeigt werden, dass auch sie schliesslich zu ganz gleichartigen Grössen- und Lagenbeziehungen zwischen Objekt und Bild führen, wie sie von GAUSS für den von ihm betrachteten Fall gefunden waren.

Wenn nichts anderes, so müsste diese Uebereinstimmung in den allgemeinen Resultaten von Untersuchungen, die theilweise auf so verschiedener Basis angestellt waren, den Gedanken nahelegen, dass die gedachten Beziehungen überhaupt gar nicht von den besonderen Voraussetzungen abhängen, auf Grund deren sie jedesmal von Neuem abgeleitet worden sind, sondern dass sie eine Folge sind der bereits erwähnten viel allgemeineren und rein geometrischen Voraussetzung, von der naturgemäss Alle in erster Linie ausgehen: von der Voraussetzung nämlich, dass eine Abbildung durch Strahlen überhaupt stattfinde. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass sich dies in der That so verhält.

MÖBIUS hat, wie es scheint, zuerst[3]) darauf hingewiesen, dass die »axiale« Abbildung durch eine einzelne brechende sphärische Fläche die Verhältnisse der collinearen Verwandtschaft zum Ausdruck bringt, und dass in Folge dessen alle Theoreme über die Wirkung auch beliebig zusammengesetzter Systeme brechender und spiegelnder Flächen nichts als eine einfache und direkte Abfolge dieser durch eine Brechung involvirten Beziehung von Objekt und Bild seien. Ihm sind in der Darstellung Mehrere gefolgt[4]), seine Theorie unter Zuhilfenahme

---

[1]) Göttingen 1841. Abh. Gött. Ges. d. Wiss. I. 1838—43. Werke Bd. 5, pag. 243. 1867.

[2]) S. z B. S. EXNER, PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. 38, pag. 274. 1886.

[3]) Sitzber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1855, pag. 8.

[4]) LIPPICH, Mitth. d. natw. Vers. Steiermark 2, pag. 1. 1871. — BECK, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18, pag. 588. 1873. — H. HANKEL, Elemente der projectiv. Geometrie. Leipzig 1875, pag. 146.

der Betrachtungen der neueren Geometrie weiter ausbauend und begründend, ohne aber die Voraussetzung aufzugeben, welche auch er noch festgehalten hatte: dass zur Verwirklichung der collinearen Beziehung eine gewisse Art der dioptrischen Wirkung nöthig sei. Hiernach scheinen immer noch die gefundenen Gesetze optischer Bilder abhängig von den physikalischen Vorgängen, durch deren Vermittelung sie entstehen.

Erst Abbe hat ohne Kenntniss der Moebius'schen Arbeit (seit Anfang der 70 er Jahre in seinen Universitätsvorlesungen) den letzten noch übrigbleibenden Schritt gethan: bei der Ableitung der allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung alle Voraussetzungen über die Verwirklichung der letzteren zunächst ganz bei Seite zu lassen. Das einigermaassen überraschende Resultat dieser Untersuchung ist dies: dass alle die Sätze, welche die Lagen- und Grössenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten Begriffe (der Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Cardinalelemente) ihrem **Wesen** nach gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; dass sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch nothwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehungen zu einander treten, dass eine optische Abbildung des einen in den anderen stattfindet.

Unter optischer Abbildung ist dabei wie oben eine punktweise Abbildung vermittels gerader Strahlen verstanden, also eine Abbildung, bei welcher jedem Punkte des einen Raums ein, und nur ein Punkt des anderen entspricht und der Strahlengruppe, welche durch den ersteren Punkt geht, im anderen Raume Strahlen entsprechen, die sämmtlich durch den Bildpunkt gehen.

Diese beiden Merkmale sind ausreichend, um den Begriff einer bestimmten Art von Abbildung festzulegen, und es sind zugleich die einzigen wesentlichen Merkmale, durch welche die Abbildungsweise charakterisirt wird, welche durch Lichtstrahlen unter Vermittelung spiegelnder oder brechender Flächen irgendwann zu Stande kommt. Von den speciellen geometrischen und physikalischen Umständen der Abbildung hängt nichts weiter ab als einerseits die numerischen Werthe der Constanten, welche in den allgemeinen Abbildungsgleichungen auftreten, und dort, mangels einer besonderen Voraussetzung, natürlich unbestimmt bleiben müssen; zweitens die Bestimmung darüber, in welchem begrenzten Raumgebiet, bezw. unter welchen sonstigen Einschränkungen der allgemeine Fall der Abbildung in dem betrachteten Sonderfall verwirklicht ist und drittens endlich die geometrische Lokalisirung der in einander abgebildeten Räume und ihre Lagebeziehung gegen die Grenzen der angewandten physischen Mittel.

Es scheint aber keineswegs überflüssig, diese Auffassung, d. h. diese Scheidung dessen, was schon aus dem allgemeinen Begriffe der optischen Abbildung folgt und dessen was erst Folge der speciellen dioptrischen Voraussetzungen ist, in der Theorie der optischen Instrumente möglichst streng durchzuführen. Denn für jede verständige Anwendung einer Lehre ist die richtige Bestimmung der zureichenden und nothwendigen Voraussetzungen derselben ein wesentliches Erforderniss. Bei der üblichen Darstellungsweise aber wird diese Bestimmung zum mindesten ausser Acht gelassen, wenn nicht geradezu falsch getroffen. Hierdurch wird die theoretische Erörterung vieler concreter Fragen in eine falsche Bahn gewiesen, und die zutreffende Anwendung der Theorie oft genug verhindert oder doch erschwert. Dies gilt z. B. namentlich in Bezug auf die oft discutirten Fragen, welche die Grenzen der Leistungsfähigkeit der optischen Werkzeuge (auch in dioptrischer Beziehung) betreffen.

Unter Zuhilfenahme der Lehren und Betrachtungsweisen der neueren Geometrie ist der hier zu erbringende Nachweis sehr schnell zu geben. Da aber die uns mit in erster Reihe interessirenden Maassbeziehungen auf dem synthetischen Wege stets etwas umständlicher abzuleiten sind und im Interesse der Allgemeinverständlichkeit dieser sehr elementaren Beziehungen geben wir dem analytischen Wege in der Entwicklung derselben den Vorzug.

Die allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung.

Nehmen wir also — aller besonderen Voraussetzungen uns zunächst entschlagend — an, dass eine »optische Abbildung« stattfinde, d. h. wie oben definirt, eine Abbildung eines Raumgebietes in ein anderes mittels geradliniger Strahlen in der Art, dass den durch einen Punkt P des Raumes R (des Objektraumes) gehenden Strahlen, im Raume R' (dem Bildraum) Strahlen entsprechen, die sämmtlich wieder durch einen Punkt P', das Bild des Punktes P, gehen. Aus dieser, der oberflächlichsten Erfahrung über die faktische Entstehung optischer Bilder zu entnehmenden Charakteristik der Abbildungsweise folgen dann alle weiteren wesentlichen Merkmale derselben.

Zunächst 1) ist aus ihr zu schliessen, dass die gedachte Abbildung eindeutig ist — da die Strahlen als geradlinige sich paarweise nur in je einem Punkte schneiden, also auch zu einem Objektpunkte geometrisch wie physisch nur einen conjugirten oder Bildpunkt zur Folge haben können.

2) Den Punkten auf einer geraden Linie im einen Raume entsprechen als Bilder Punkte im anderen Raume, die wieder auf einer Geraden liegen. Denn dem Strahle S, welcher durch die auf einer geraden Linie gelegenen Punkte $P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht, entspricht laut Annahme ein Strahl S' im Bildraum, der nach unserer Grundannahme durch jeden der drei jenen $P_1 P_2 P_3$ conjugirten Punkte $P_1' P_2' P_3'$ hindurchgeht, und da der Strahl geradlinig ist, so liegen $P_1' P_2' P_3'$ auf einer geraden Linie. (Ueber die Punktfolge auf conjugirten Geraden ist hierdurch natürlich noch nichts bestimmt; dieselbe ergiebt sich erst später).

Dieses gegenseitige eindeutige Entsprechen von Punkten und Geraden bezeichnet die Geometrie bekanntlich als »Collineation« oder »collineare Verwandtschaft«. Es ist also im Vorangehenden bereits bewiesen, dass jede optische Abbildung die beiden Abbildungsräume in collineare Verwandtschaft setzt.

Da die Beziehung zwischen den beiden Räumen dem Gesagten zufolge eine vollständig gleichwerthig-gegenseitige ist, so dient die Bezeichnung des einen als Objekt-, des anderen als Bildraum nur zur Erleichterung des Ausdrucks, ohne dass dem einen im Verhältniss zum anderen unter dem hier vertretenen Gesichtspunkte irgend welche ausgezeichneten Eigenschaften zukommen.

Zur Entwickelung der weiteren Eigenschaften der gedachten Abbildung bedienen wir uns am bequemsten einer dritten, ebenfalls unmittelbar aus 2) sich ergebenden Folgerung, nämlich

3) Einer Ebene E im Objekt Raum entspricht auch wieder eine Ebene E' im Bildraum. Denn die Ebene ist definirt durch zwei sich schneidende Gerade; zwei solchen a, b im einen Raum entsprechen aber nach 2) zwei ebensolche a', b' im anderen Raum. Jeder weiteren in der ersteren Ebene enthaltenen Geraden c, die also die zuerst angenommenen beiden Geraden schneidet entspricht nun im Bildraum eine Gerade c', welche nach der ursprünglichen Annahme den einen wie den anderen der beiden dort gelegenen Strahlen schneiden muss, welche also in dieselbe Ebene fällt.

Dieses Merkmal der Abbildung von Ebenen in Ebene wollen wir also den analytischen Entwickelungen als fundamentales zu Grunde legen. Aus ihm folgt sofort rückwärts die Abbildung von Geraden in Gerade und von Punkten in Punkte jeweilig als der Schnitte je zweier Ebenen bezw. Geraden.

Nehmen wir, um den Zusammenhang der beiden Rähme R und R' näher zu untersuchen, in ihnen je ein, zunächst beliebig orientirtes, rechtwinkliges Parallel-Coordinatensystem an. Die Coordinaten eines Punktes P im einen, dem Objektraum seien x, y, z; die seines conjugirten Punktes im Bildraum, P', seines Bildes x', y', z'; dann ist die Beziehung zwischen den Punkten P und P' mathematisch formulirt, indem wir

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \chi(x, y, z) \\ z' &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

setzen.

Die Beziehung der beiden Räume wäre (analytisch) bekannt, wenn die Funktionen φ, χ, ψ vermittelt wären. Von diesen Funktionen wissen wir nur, dass sie nach 1) stetig und eindeutig sind.

Einer Ebene E' im Bildraum, die durch die Gleichung

$$A'x' + B'y + C'z' + D' = 0 \tag{2}$$

bestimmt ist, entspricht ferner nach 3) eine Ebene E im Objektraum, deren Gleichung wir analog

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

schreiben können.

Vermöge (1) entspricht aber der durch (2) bestimmten Ebene des Bildraums im Objectraum das geometrische Gebilde

$$\Psi(x, y, z) \equiv A'\varphi(x, y, x) + B'\chi(x, y, z) + C'\psi(x, y, z) + D' = 0. \tag{4}$$

Da $\Psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer mit E identischen Ebene sein soll, so muss $\Psi(x, y, z)$ für alle durch (3) definirten Punkte und nur für diese selbst verschwinden. Es muss sich daher Ψ identisch umformen lassen in die Gestalt

$$\Psi(x, y, z) \equiv (Ax + By + Cz + D)\Phi(x, y, z), \tag{5}$$

worin Φ den Bedingungen unterworfen ist

a) Φ darf nie $= \infty$ werden für Werthsysteme (x, y, z), welche die Gleichung (3) erfüllen — damit nicht für Punkte der Ebene (3) $\Psi \gtreqless 0$ werde, d. h. der Fall eintrete, dass zu einem Punkte der Ebene (2) kein entsprechender Punkt durch die Gleichung $\Psi = 0$ festgelegt werde — was gegen die Grundannahme eines durchgängigen Entsprechens der beiden Ebenen wäre.

b) Φ darf nie $= 0$ werden, wenn Gleichung (3) nicht erfüllt ist, weil dies involviren würde, dass es Punkte in der Ebene $\Psi = 0$ gebe, die mit Punkten ausserhalb der Ebene E coincidirten — was gegen die Annahme der eindeutigen Abbildung von Ebenen in Ebenen wäre; und drittens

c) nur wenn $Ax + By + Cz = \infty$ ist, darf $\Phi = 0$ werden; denn den unendlich fernen Punkten der Objektebene brauchen nicht nothwendig unendlich ferne Punkte der Bildebene zu entsprechen; zu einer Annahme hierüber ist bis jetzt noch keine Handhabe gegeben, und es hängt von dem besonderen Werthe der sich dann darbietenden Terms $0 \cdot \infty$ ab, ob es der Fall ist oder nicht.

Unter diesen Einschränkungen für die Werthe der Funktion Φ ergiebt im übrigen die Identität der Gleichungen (4) und (5)

$$A'\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right) + B'\left(\frac{\chi}{\Phi}\right) + C'\left(\frac{\psi}{\Phi}\right) + D'\left(\frac{1}{\Phi}\right) \equiv Ax + By + Cz + D. \tag{6}$$

Die linke Seite von (6) kann aber nur dann identisch auf einen linearen Ausdruck führen, wenn die Faktoren von $A'B'C'$ und D' selbst lineare Formen sind, also wenn

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi}{\Phi}&=a_1x+b_1y+c_1z+d_1\\ \frac{\chi}{\Phi}&=a_2x+b_2y+c_2z+d_2\\ \frac{\psi}{\Phi}&=a_3x+b_3y+c_3z+d_3\\ \frac{1}{\Phi}&=ax+by+cz+d\end{aligned}\right|\quad \begin{aligned}\text{oder}\quad \varphi&=\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{ax+by+cz+d}=x'\\ \chi&=\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{ax+by+cz+d}=y'\\ \psi&=\frac{a_3x+b_3y+c_3z+d_3}{ax+by+cz+d}=z'\\ \text{und}\quad \Phi&=\frac{1}{ax+by+cz+d}.\end{aligned} \tag{7}$$

Hiermit sind aber die gesuchten Funktionen φ, χ und ψ, welche den gestellten Bedingungen genügen, gefunden. (Man überzeugt sich leicht, dass dies bei Φ auch der Fall ist). Es sind Quotienten linearer Ausdrücke mit gleichem Nenner. Die Abbildung ist also aus den gemachten Voraussetzungen in der That analytisch vollständig bestimmt und zwar durch 16 oder — wenn man überall mit d dividirt — durch 15 Coëfficienten. Wir wollen uns diese Division durch d vorgenommen denken, für die neuen, d mal kleineren, Coëfficienten aber die vorige Bezeichnung beibehalten.

Wir haben nun die geometrischen Eigenschaften der so bestimmten Abbildung zu entwickeln und werden dieselben dann gleich benützen, um durch entsprechende Wahl der Coordinatensysteme in den beiden Räumen die Zahl der Coëfficienten der Abbildung zu reduciren und so die Ausdrücke für φ, χ und ψ erheblich zu vereinfachen.

Reduktion der Abbildungsgleichungen auf die einfachsten Grundformen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst die

a) Beziehungen zwischen den Oertern conjugirter Ebenen. Gemäss den Gleichungen (7) entspricht die Ebene E' des Bildraumes, deren Gleichung (2) $A'x'+B'y'+C'z'+D'=0$ ist, im Objektraum dem Gebilde

$$\begin{aligned}o=\frac{1}{ax+by+cz+1}&(A'a_1+B'a_2+C'a_3+D'a)x+(A'b_1+B'b_2+C'b_3+D'b)y\\ &+(A'c_1+B'c_2+C'c_3+D'c)z+A'd_1+B'd_2+C'd_3+D',\end{aligned} \tag{8}$$

dessen Gleichung wie verlangt von der Form

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{ax+by+cz+1} \tag{9}$$

ist. Es ist also auch

$$(2)\ A'x'+B'y'+C'z'+D'\equiv\frac{Ax+By+Cz+D}{ax+by+cz+1}\,(9).$$

Einem Nullwerden von (2) entspricht nun im Allgemeinen ein Nullwerden des Zählers von (9), d. h. der Ebene E', deren Gleichung (2) ist, entspricht im Allgemeinen im Objektraum die Ebene E, deren Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$, ist, worin die Coëfficienten — vermöge der Identität von (8) und (9) — mit denen der Abbildung und denen von E' verbunden sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}A&=A'a_1+B'a_2+C'a_3+D'a\\ B&=A'b_1+B'b_2+C'b_3+D'b\\ C&=A'c_1+B'c_2+C'c_3+D'c\\ D&=A'd_1+B'd_2+C'd_3+D'd.\end{aligned} \tag{10}$$

Endlichen Werthen von x', y', z' entsprechen daher im Allgemeinen auch endliche Werthe von x, y, z und umgekehrt.

Man sieht aber aus der Form des Ausdruckes (9), dass es ein System von Werthen x', y', z' giebt, denen unendlich grosse Werthe von x', y', z' entsprechen, nämlich diejenigen, welche der Gleichung

$$ax + by + cz + 1 = 0 \tag{11}$$

genügen, d. h. in einer gewissen Ebene F liegen. Das Bild dieser im Endlichen gelegenen Ebene F des Objektraumes liegt im Unendlichen. Die Abbildung erleidet daher an ihr eine Unstetigkeit und zwar ist dieses die **einzige** Unstetigkeitsstelle jenes Raumes.

Eine analoge Ebene existirt, wie schon aus der Gegenseitigkeit aller Beziehungen in den beiden Räumen folgt, auch im Bildraum. In der That wenn $A = B = C = 0$ ist — was gewisse Beziehungen zwischen den wesentlichen Coëfficienten $\frac{A'}{B'} \frac{B'}{D'}$ und $\frac{C'}{D'}$ der Ebene E' und denen der Abbildung involvirt, d. h. eine bestimmte Ebene F' determinirt — so kann das Nullwerden von (9) nur noch eintreten durch Unendlichwerden des Nenners, d. h. im Allgemeinen durch Unendlichwerden von x, y, z. Der durch die Bedingungen $A = B = C = 0$ bestimmten Ebene F' des Bildraumes entspricht also eine unendlich ferne im Objektraum; sie ist daher die Discontinuitätsebene des Bildraumes[1]). Diese in der Anwendung so wichtigen Ebenen — bekanntlich Brennebenen genannt — nehmen daher auch vom rein geometrischen Gesichtspunkte eine ganz besondere Bedeutung in Anspruch.

Es giebt jedoch eine Art von Abbildung, bei welcher keine Unstetigkeit der Abbildung vorhanden ist: wenn nämlich $a = b = c = 0$ ist. In diesem singulären Fall der Abbildung, welcher in einer Klasse von optischen Instrumenten verwirklicht ist, entsprechen offenbar im Endlichen gelegene Ebenen des Bildraumes stets im Endlichen gelegenen Ebenen des Objectraumes und vice versa. Wir werden uns mit diesem Fall noch näher zu beschäftigen haben. Er heisst (aus später ersichtlichen Gründen) der Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Wir wollen nun durch weitere Discussion unserer Abbildungsgleichungen zweitens

b) die Beziehungen zwischen den Richtungen conjugirter Ebenen ableiten und aus diesen eine erste Vereinfachung jener Gleichungen gewinnen.

Orientirung der yz-Ebenen. Die Richtungscoëfficienten A, B, C einer Ebene E im Objektraum hängen, wie (10) zeigt, nicht nur von den Richtungscoëfficienten A', B', C' der conjugirten Ebene E' ab, sondern auch von deren Lagecoëfficient D'. Einer Parallelverschiebung von E' (welche blos eine Aenderung von D' involvirt) entspricht daher im Allgemeinen eine Verschiebung und gleichzeitige Richtungsänderung von E und umgekehrt. Dies ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn A, B, C von D' unabhängig sind, also 1) wenn $a = b = c = 0$ ist, d. h. in dem singulären Fall der teleskopischen Abbildung; alsdann entsprechen parallelen Ebenen im einen Raum überall parallele Ebenen im andern. 2) Wenn in der Gleichung

[1]) Auch die Schnitte der Ebene F mit dem durch das Nullwerden der Zähler von φ, χ und ψ definirten Ebenen machen keine Ausnahme von obiger Bestimmung. Die ihnen entsprechenden Linien im Bildraum sind resp. der x'-, y'-, z'-Axe parallel, und nehmen allerdings für diese Coordinate alle Werthe an, liegen aber auch im Unendlichen, indem immer bezw. y' und z', x' und z', x' und $y' = \infty$ sind. Ebenso gewisse Linien im Bildraum.

der Objektebene (8) auf andere Weise den Faktor D' enthaltende Theil des Ausdruckes von x, y, z unabhängig wird, also wenn $(ax + by + cz + 1) = const$ ist, d. h. wenn die Ebene im Objektraum der Discontinuitätsebene F derselben parallel ist. Dieser Schaar von parallelen Ebenen — und im Allgemeinen nur dieser einen — im Objektraum entsprechen auch parallele im Bildraum.

Aus der Eindeutigkeit dieser und der Gleichwerthigkeit aller Beziehungen zwischen den beiden Räumen folgt dann, dass jene Ebenen im Bildraum parallel der Discontinuitätsebene F' desselben sind. Dies folgt aber auch direkt, wenn man die unter sich parallelen Ebenen des Bildraumes sucht, denen eine Schaar unter sich parallelen Ebenen im Objektraum entspricht. Für letztere muss $A:B:C$ unabhängig von D' sein. Da nun $A = M + D'a$; $B = N + D'b$; $C = P + D'c$, so musste $M:N:P = a:b:c$ sein. Wir können daher setzen $A = a(K + D')$; $B = b(K + D')$; $C = c(K + D')$. Die Grössen A, B, C dürfen jeden mit a, b, c proportionalen Werth annehmen, ohne mit der gestellten Bedingung in Widerspruch zu treten. Es kann also auch $K = -D'$ werden, daher $A = B = C = 0$. Die durch diese Bedingung bestimmten Ebene des Bildraumes ist nun, wie wir oben gesehen haben, in der That dessen Discontinuitätsebene.

Ebenen, die der Discontinuitätsebene des einen Raumes parallel sind, entsprechen also im anderen Raum Ebenen die der Discontinuitätsebene dieses parallel sind, und dies sind im Allgemeinen die einzigen conjugirten Schaaren von Parallelebenen.

Wir nehmen nun Ebenen, die den Unstetigkeitsebenen in den beiden Räumen parallel sind, zu Coordinatenebenen und zwar zur yz- resp. $y'z'$-Ebene; die x- und x'-Axen senkrecht dazu. Dann kann x' nur noch Funktion von x sein, also reducirt sich die Gleichung für x' in (7) auf

$$x' = \frac{a_1 x_1 + d_1}{ax + 1}$$

und da alle drei Coordinaten nothwendig gleichen Nenner haben, so vereinfachen sich auch diese in

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{ax + 1}$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{ax + 1}.$$

Wahl der Hauptaxen. Die Abscissenaxen x' und x selbst sind bisher noch nicht zu einander conjugirt (wenn $y = z = 0$ ist noch nicht $y' = z' = 0$). Um dies zu erreichen, suchen wir diejenigen zur x-Axe parallelen, d. h. zur Discontinuitätsebene F senkrechten Geraden, deren Bilder im anderen Raum zur x'-Axe parallel, zur F'-Ebene senkrecht sind. Seien die Coordinaten einer solchen Geraden im jetzigen System $y = y_0$ und $z = z_0$, so müssen die Coordinaten ihres Bildes, also

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{ax + 1},$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{ax + 1}$$

von x unabhängig sein. Dies ist der Fall wenn

$$\frac{b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{a_2} = \frac{1}{a}$$

und auch

$$\frac{b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{a_3} = \frac{1}{a}.$$

Diese beiden linearen Gleichungen für y_0 und z_0 haben im Allgemeinen nur eine Lösung. Es giebt also im Allgemeinen auch nur je eine Gerade von der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen diese charakteristischen Hauptaxen der Abbildung zur x- resp. x'-Achse. Dann muss für $y=0$ und $z=0$ auch $y'=0$ und $z'=0$ sein, also im Zählen der Ausdrücke für y' und z' kein x enthaltendes und kein constantes Glied mehr vorkommen. Demnach werden die Abbildungsgleichungen — unbeschadet ihrer Allgemeinheit — reducirt auf die Form

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z}{ax+1} \qquad z' = \frac{b_3 y + c_3 z}{ax+1}.$$

Wahl der Nebenaxen. Zur weiteren Vereinfachung dieser benützen wir den Satz:

Es giebt in jedem Raum ein — und im Allgemeinen nur ein — Paar von auf einander senkrechten durch die Hauptaxe gehenden (Meridian-) Ebenen, denen ebensolche im anderen Raum conjugirt sind.

In der That: Eine im Objektraum durch die x-Axe gelegte Ebene I bilde mit der x-y-Ebene den Winkel u, dessen trigonometrische Tangente $tg\,u = \frac{z}{y} = m$ ist. Eine andere Meridianebene II bilde mit der xy-Ebene (resp. mit der y-Axe) den Winkel v. Wenn nun I und II senkrecht auf einander stehen, so ist $tg\,v = \frac{1}{m}$. Das Bild von I bildet aber mit der y'-Axe den Winkel u', dessen Tangente nach den Abbildungsgleichungen sich darstellt als

$$tg\,u' = \frac{z'}{y'} = \frac{b_3 y + c_3 m y}{b_2 y + c_2 m y} = \frac{b_3 + c_3 m}{b_2 + c_2 m}.$$

Das Bild von II bildet mit y' den Winkel v', so dass analog

$$tg\,v' = \frac{b_3 - \frac{1}{m} c_3}{b_2 - \frac{1}{m} c_2}$$

ist. Soll $u' - v' = \frac{\pi}{2}$ sein, so muss $tg\,v' = -\frac{1}{tg\,u'}$ sein, also

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)(c_2 b_2 - b_3 c_3) = b_3^2 + c_3^2 - (b_2^2 + c_2^2).$$

Diese Gleichung wird entweder durch die Coëfficienten der Abbildung selbst erfüllt, indem der Faktor von $m - \frac{1}{m}$ und die rechte Seite der Gleichung einzeln gleich Null sind, was auf $b_2 = c_2 = b_3 = c_3$ führt, und dann besteht sie eo ipso für jeden Werth von m und damit von u. Oder die Gleichung hat praktisch nur eine Lösung; denn wenn $m = r$ eine Lösung ist, so ist zwar $m = -\frac{1}{r}$ ebenfalls eine solche; dies führt aber bei uns auf die zugehörige Ebene II. Es giebt also im Allgemeinen nur ein Paar Ebenen von der verlangten Eigenschaft im einen wie anderen Raum.

Diese Ebenen benützen wir abermals zur Orientirung unseres Coordinatensystems, indem wir die y- und z- resp. y'- und z'-Axen in die durch sie in der yz resp. $y'z'$-Ebene fixirten Richtungen hineinverlegen und zwar natürlich derart, dass die $x'y'$-Ebene das Bild der xy-Ebene wird und die $x'z'$-Ebene das Bild der xz-Ebene. Es darf dann y' und z' ausser von x nur von y bezw. z abhängen; es erhalten also die Abbildungsgleichungen schliesslich die Form

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{ax+1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{ax+1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{ax+1}.$$

Hauptformen der Abbildungsgleichungen. Aus den allgemeinen Bedingungen der Transformation von Coordinatensystemen ist zu schliessen, dass diese Gleichungen, welche noch 6 Constanten enthalten, weiter reducibel sein müssen. In der That haben wir noch über den bisher willkürlichen Anfangspunkt der x- und x'-Coordinatenzählung zu verfügen. Hierfür bieten sich zwei Festsetzungen als besonders einfach, charakteristisch und für die Anwendung wichtig dar.

1) Zu Anfangsebenen werden die Unstetigkeitsebenen F und F' gewählt, Dann werden die Abbildungsgleichungen, wie man sich leicht überzeugt, von der Form

$$x' = \frac{\mathfrak{a}}{x}; \quad y' = \frac{\mathfrak{b}\, y}{x}; \quad z' = \frac{\mathfrak{c}\, z}{x}, \tag{12}$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gewisse mit den früheren einfach zusammenhängende Constanten sind.

2) Zu Nullebenen werden conjugirte Ebenen gewählt.

Die Form der Gleichungen in diesem Falle wird

$$x' = \frac{a_1 x}{a x + 1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{a x + 1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{a x + 1}, \tag{13}$$

hierbei bleibt eine Constante noch verfügbar für die specielle Wahl der conjugirten Ebenen.

Diese Gleichungen werden im Fall der teleskopischen Abbildung, d. i. $a = 0$ (b und c sind bereits $= 0$), noch einfacher, nämlich

$$x' = p x; \quad y' = q y; \quad z' = r z, \tag{14}$$

wenn die Constanten schlechthin mit p, q, r bezeichnet werden.

Der allgemeine hier behandelte Fall der Abbildung ist also charakterisirt durch mindestens 3 Constanten. Die Abbildung ist um die x-Axe nicht symmetrisch, wie es die meisten realen Abbildungen sind. Die x-Axe unseres Coordinatensystems stellt sich als eine Hauptaxe der Abbildung dar, die wie vorangehend bestimmten y- und z-Axen als Nebenaxen derselben. Im singulären Fall der teleskopischen Abbildung sind die 3 Axen gleichwerthig. Auch in diesem Falle, in welchem parallelen Ebenen im einen Raume stets parallele im anderen entsprechen, giebt es im Allgemeinen nur eine rechtwinklige Ecke, welche als ebensolche abgebildet wird, was also zu einer bestimmten Wahl des Coordinatensystems führt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals darauf hinzuweisen, dass die Lagenbeziehung der beiden Abbildungsräume zu einander hier eine ganz willkürliche ist. Diese wird erst durch die speciellen Umstände der Abbildung gegeben.

Um diese rein geometrische Abbildung zur physischen bequemer in Beziehung setzen zu können, wollen wir nur dies noch annehmen, dass die Richtung der positiven x zusammenfalle, d. h. übereinstimmend gewählt werde in beiden Räumen mit der der Lichtbewegung — was natürlich keine Einschränkung bedeutet.

Der geometrische Charakter der durch die Gleichungen (12) bezw. (13) und (14) bestimmten Abbildung ist ein in der Mathematik wohlbekannter; ihre näheren Eigenschaften sind eingehend studirt. Eine Discussion jener Gleichungen ergiebt dieselben in einfachster Weise. Wir beschränken uns hier auf einige Hinweise.

Bei der durch (14) definirten teleskopischen Abbildung sind die beiden Räume nach der Bezeichnung der modernen Geometrie »affin«. Ein räumliches

Gebilde des einen Raumes erscheint im anderen als eins gleicher Gattung, nur in den 3 Dimensionen im Allgemeinen verschieden vergrössert. In dem durch (12) resp. (13) definirten Fall der allgemeineren Abbildung herrscht nur noch in jedem einzelnen zur x-Axe senkrechten Paar conjugirter Ebenen Affinität, aber für die verschiedenen Ebenenpaare sind die Affinitätsconstanten verschieden, nämlich von x abhängig.

Das Verhältniss conjugirter Strecken in den beiden Räumen heisst die »Vergrösserung«. Im speciellen heisst das Verhältniss von auf der Hauptaxe gelegenen conjugirten Strecken Longitudinal-, Axial- oder Tiefenvergrösserung.

Halten wir uns an die auf die Unstetigkeitsebenen bezogenen Abbildungsgleichungen (12), so ist das Verhältniss unendlich kleiner conjugirter Strecken

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = -\frac{\mathfrak{a}}{x^2} = -\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}. \tag{12a}$$

Dasselbe variirt, wie man sieht, mit x, resp. x' selber.

Für endliche axiale Strecken ist

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathfrak{a}}{x_1 x_2} = -\frac{x_1' \cdot x_2'}{\mathfrak{a}}.$$

Das Verhältniss von Strecken senkrecht zur x-Axe heisst Lateralvergrösserung, oder auch Vergrösserung schlechthin. Dasselbe variirt in dem allgemeinen Fall der 3-axigen Abbildung von Azimut zu Azimut. In der praktischen Anwendung haben wir es fast ausschliesslich mit dem Sonderfall einer um die x-Axe symmetrischen Abbildung zu thun. Wir wollen uns daher weiterhin mit diesem allein beschäftigen.

Wir haben dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ zu setzen, also zwischen y und z nicht weiter zu unterscheiden. Jedes Paar zu einander senkrechter Meridianebenen wird dann in ebensolche abgebildet. Die Lateralvergrösserung, die wir mit β bezeichnen wollen, ist jetzt für jede zur x-Axe senkrechte Ebene constant

$$\beta = \frac{dy'}{dy} = \frac{y'}{y} = \frac{\mathfrak{b}}{x} = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) x' \tag{12b}$$

unabhängig von y und y' selber.

Zur x-Axe senkrechte ebene Figuren werden also in ähnliche abgebildet.

Die Vergleichung von (12a) und (12b) zeigt, dass

$$\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \beta^2.$$

Die Tiefenvergrösserung ist an jeder Stelle proportional dem Quadrat der Lateralvergrösserung[1]), und es ist das Verhältniss

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}},$$

also bei einer gegebenen Abbildung selbst für jede Stelle des Raumes constant.

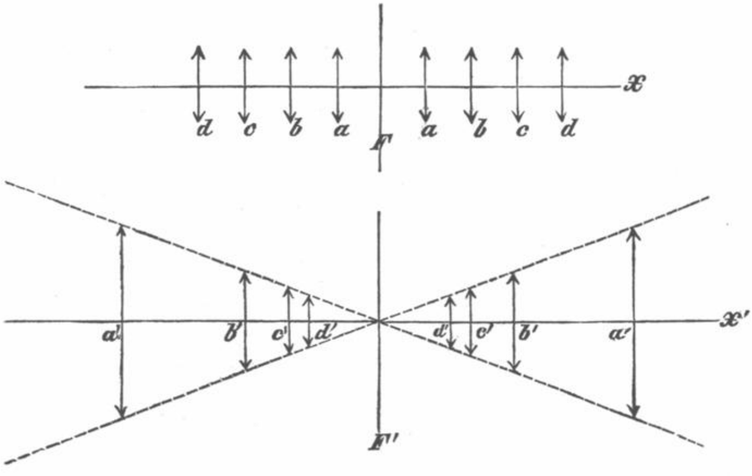
Die Tiefenvergrösserung ist proportional dem Quadrat des reciproken Objektabstandes von der F-Ebene oder dem direkten Quadrat des Bildabstandes von der F'-Ebene.

Die Lateralvergrösserung ist einfach proportional dem reciproken Objektabstande von der F-Ebene oder dem direkten Bildabstande von der F'-Ebene. Beide können stets alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Den Zusammenhang der Lateralvergrösserung und Axialvergrösserung unter einander und mit

[1]) Für die dioptrische Abbildung schon von Töpler bemerkt. Pogg. Ann. 142, pag. 232. 1871.

den Werthen von x resp. x' veranschaulicht man sich am besten durch folgende graphische Construction (Fig. 307).

Man zeichne eine Anzahl äquidistanter, gleich grosser Ordinaten y, deren Endpunkte also auf einer zur x-Axe parallelen Geraden liegen. Die zugehörigen



(Ph. 307.)

Werthe von y' liegen auf einer durch den Punkt $x' = 0$ gehenden, d. h. die x'-Axe in F' schneidenden Geraden und liegen desto näher aneinander je näher sie an F' kommen.

Umgekehrt entsprechen einer Schaar von äquidistanten y', deren Spitzen auf einer unter einem gewissen Winkel gegen x' geneigten durch F' gehenden Geraden liegen, im Objektraum gleich grosse y, die desto näher an einander stehen, je näher sie der Ebene F sind u. s. w. (Einem Kreise um den Brennpunkt im einen Raum entspricht eine Hyperbel im anderen. Einer Schaar concentrischer Kreise vom Radius r eine Schaar von Hyperbeln von constanter Nebenaxe b, und verschiedener Hauptaxe $\left.\frac{a}{r}\right)$.

Das Hervorstechendste und Wichtigste bei solchen Constructionen ist der anschauliche Hinweis auf die Bedeutung der Brennebenen. Dieselben theilen die betreffenden Räume in zwei symmetrische Hälften, welche auf eine ganz gleichartige Weise abgebildet werden, d. h. einander paarweise entsprechen.

Charakteristik der verschiedenen Gattungen von Abbildung resp. von abbildenden Systemen.

Da unsere Abbildung nur noch durch 2 Constanten bestimmt ist, so kann eine irgend wesentliche Unterschiedlichkeit derselben nur noch in dem verschiedenen Vorzeichen dieser Constanten begründet sein. Nehmen wir als Charakteristika der Abbildung die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so kann jede derselben $>$ oder < 0 sein, woraus vier verschiedene Gattungen von Abbildung resultiren.

1) Je nachdem $a < 0$ oder > 0 ist die Abbildung rechtläufig oder rückläufig. Einer Bewegung des Objeks z. B. im Sinne der Lichtbewegung entlang der x-Axe enspricht eine Bewegung des Bildes, im einen Falle ebenfalls im Sinne der Lichtbewegung, im anderen Falle entgegengesetzt zu ihr. Es mag hier vorausgenommen werden, dass der erstere Fall vorliegt, wenn die Abbildung verwirklicht wird durch lauter Brechungen oder durch eine gerade Zahl von

Reflexionen oder durch Combination von Brechungen mit einer geraden Zahl von Spiegelungen. Wir wollen diese Abbildung schlechthin die »dioptrische« nennen. Der andere Fall liegt vor, wenn die Abbildung durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen zu Stande kommt oder durch Combination von Brechungen mit solchen. Wir wollen ihn kurz als den Fall der »katoptrischen« Abbildung bezeichnen.

Wie man aus (12a) sieht, entspricht ein positives α einem negativen a und umgekehrt. Wir haben daher gemäss Gleichung (12) folgende Bestimmungen:

Bei der rechtläufigen (dioptrischen) Abbildung entspricht der in Bezug auf x positive (rechte) Theil des Objektraumes — gerechnet von der Unstetigkeitsebene F an — dem negativen (linken) Theil des Bildraumes — also diesen gerechnet von F' an, der negative (linke) Theil dieses, der positiven (rechten) Hälfte jenes.

Bei der rückläufigen (katoptrischen) Abbildung entspricht die positive (rechte) Hälfte des Objektraumes dem positiven (rechten) Theil des Bildraumes, die negative (linke) dieses, der negativen jenes.

Man kann sich auch diese Verhältnisse graphisch sehr gut veranschaulichen indem man die Bilder eines in der Objektaxe gelegenen und die Brennebene durchsetzenden Pfeils in den beiden Fällen construirt. (S. a. f. S. Fig. 308.)

Es mag dem Leser überlassen bleiben, diese Verhältnisse weiter zu discutiren.

2) Was nun zweitens das Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ anbetrifft, so ist sein Einfluss auf die Art der Abbildung der, dass, wie aus (12b) folgt, bei

$$\text{positivem } \mathfrak{b} \begin{array}{l} \text{positiven Werthen von } x \text{ aufrechte} \\ \text{negativen} \quad ,, \qquad ,, \quad ,, \text{ umgekehrte} \end{array} \text{Bilder,}$$

entsprechen, d. h. es wird die rechte Hälfte des Objektivraumes aufrecht, die linke verkehrt abgebildet.

$$\text{Bei negativem } \mathfrak{b} \begin{array}{l} \text{negativen Werthen von } x \text{ aufrechte} \\ \text{positiven} \quad ,, \qquad ,, \quad ,, \text{ verkehrte} \end{array} \text{Bilder,}$$

d. h. es wird die linke Hälfte des Objektraums aufrecht, die rechte verkehrt abgebildet.

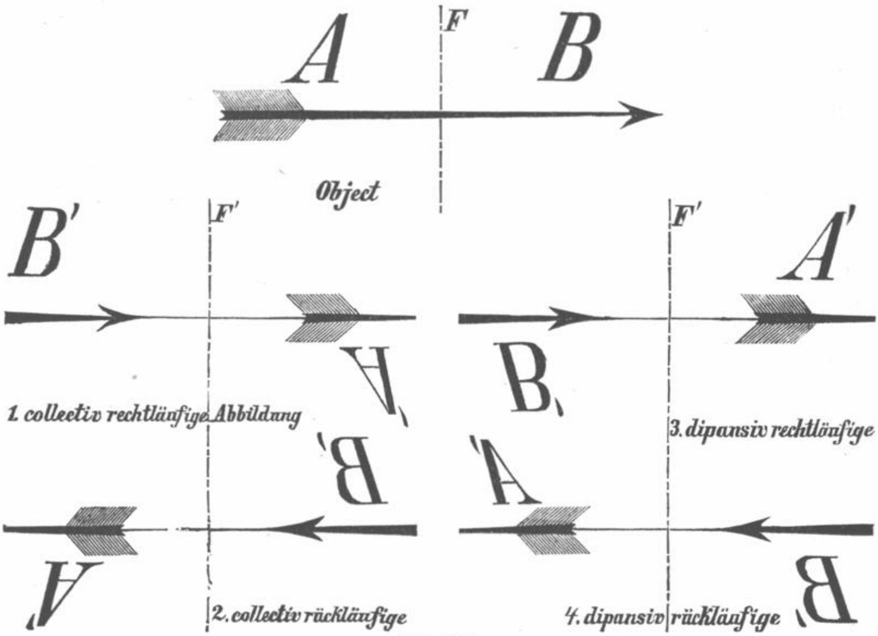
Der erste Fall ist verwirklicht in den sogen. collektiven Systemen, der zweite in den dispansiven, wie wir später sehen werden. Jede Art der Abbildung ergiebt an sich sowohl aufrechte als verkehrte Bilder und nur obiger Unterschied der Beziehung zu den beiden Raumhälften findet statt. Von ganz untergeordneter Bedeutung ist unter dem hier festgehaltenen allgemeinen Gesichtspunkt die Frage nach der Reellität oder Virtuellität der Bilder und danach, wann die einen oder anderen aufrecht bezw. verkehrt sind.

Durch Combination der beiden ad 1) betrachteten Fälle mit den ad 2) unterschiedenen ergeben sich die vier Hauptgattungen optischer Abbildung und demzufolge die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Systeme

$$\overbrace{\text{collektive, dispansive}}^{\text{dioptrische}} \qquad \overbrace{\text{collektive, dispansive}}^{\text{katoptrische}}.$$

Alle anderen Unterscheidungen betreffen entweder nur die Grössenwerthe der Constanten, also die Maassverhältnisse der Abbildung oder die zufällige gegenseitige Lage der beiden Abbildungsräume, sind also unwesentlich.

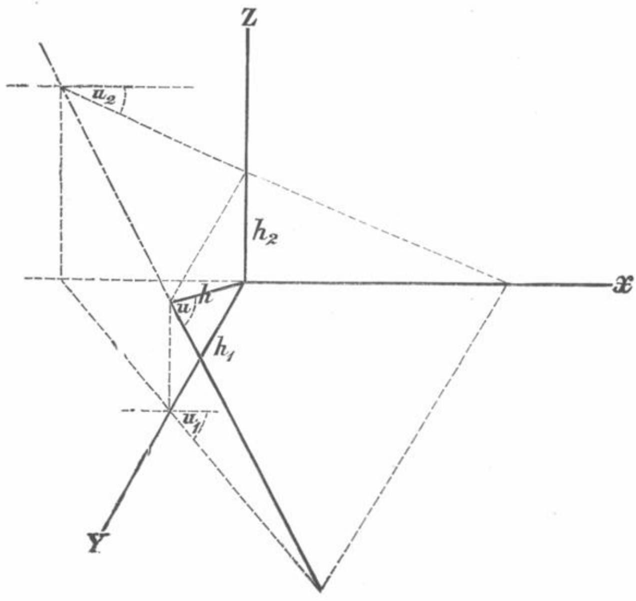
Das Eigenthümliche dieser vier Fälle kann man sich ebenfalls graphisch gut veranschaulichen, etwa indem man die jeweilig resultirenden Bilder schräg liegender Lettern A, B, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen Hälfte des Objektraumes liegt, zeichnet (Fig. 308).



(Ph. 308.)

Gegenseitiges Entsprechen von Geraden und Büscheln.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verhältniss von conjugirten Geraden in den beiden Räumen, da jede Gerade ja auch als Strahl aufgefasst werden kann, die Abbildung von Geraden in einander daher den eigentlichen Process, das Zustandekommen der punktweisen Abbildung näher erläutert.



(Ph. 309.)

Sei ein beliebiger gegen die x-Axe windschiefer Strahl durch seine Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Meridianebenen gegeben. Die Gleichung der einen Projection sei

$$y_1 = h_1 + x \cdot tg\, u_1,$$

die der andern

$$y_2 = h_2 + x \cdot tg\, u_2,$$

u_1 und u_2 sind darin die Winkel der Spuren gegen die x-Axe; h_1 und h_2 die Höhen, in welchen diese Spuren die Unstetigkeitsebene F schneiden (Fig. 309).

Der Strahl selbst bildet dann mit der x-Axe einen Winkel u, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{tg\, u_1^2 + tg\, u_2^2 + 1}}$$

und schneidet die Unstetigkeitsebene in der Entfernung $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ von der x-Axe.

Das Bild dieser Geraden, also der dem einfallenden conjugirte Strahl, sei ebenfalls bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Meridianebenen und zwar auf diejenigen, welche selbst die Bilder der im Objektraum angenommenen 1 und 2 sind und die x' seien von der Ebene F' an gezählt. Alsdann sind die Spuren des Strahls im Bildraum auch selbst wieder die Bilder der Spuren des Strahls im Objektraum. Ihre Gleichungen

$$y_1' = h_1' + x' \cdot tg\, u_1',$$
$$y_2' = h_2' + x' \cdot tg\, u_2',$$

— in denen h_1', h_2' und u_1', u_2' analoge Bedeutung haben, wie oben — reduciren sich daher vermöge der Abbildungsgleichungen (12) und (12b) auf

$$y_1' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_1 + x \cdot tg\, u_1) = b \cdot tg\, u_1 + b\frac{h_1}{a} \cdot x'$$

und

$$y_2' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_2 + x\, tg\, u_2) = b \cdot tg\, u_2 + \frac{b}{a} h_2 x'.$$

Der Vergleich mit den voranstehenden ergiebt, dass

$$h_1' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_1; \quad h_2' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_2;$$
$$tg\, u_1' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_1; \quad tg\, u_2' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_2$$

ist. Der Neigungswinkel u', den das Bild des ursprünglichen Strahles mit der x'-Axe einschliesst, ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$\cos u' = \frac{1}{\sqrt{tg^2(u_1') + tg^2(u_2') + 1}}.$$

Die Entfernung von der x'-Axe, in welcher der Strahl die F'-Ebene schneidet ist gegeben durch $h' = \sqrt{h_1^{2\prime} + h_2^{2\prime}}$.

Tragen wir hierin die oben gefundenen Werthe für h_1', h_2', u_1', u_2' ein, so wird

$$\cos u' = 1 : \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2 (h_1^2 + h_2^2) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h\right)^2}},$$

woraus folgt

$$tang\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h.$$

Diese Gleichung $tg\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h$ besagt, dass Strahlen, welche im Objektraum die Unstetigkeitsebene in g l e i c h e r E n t f e r n u n g v o n d e r H a u p t a x e schneiden, im Bildraum conjugirt sind Strahlen, die d e n s e l b e n W i n k e l m i t d e r H a u p t a x e derselben einschliessen. Im Speciellen sind nun Strahlen, die durch d e n s e l b e n P u n k t der Unstetigkeitsebene im Objektraum gehen, ja conjugirt Strahlen, die durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene gehen, die also einander p a r a l l e l sind; obige Gleichung giebt alsdann den Zusammenhang zwischen der Schnitthöhe des einfallenden Strahls mit der Unstetigkeitsebene im Objektraum und dem Neigungswinkel des austretenden Strahls gegen die Hauptaxe im Bildraum an.

Wir haben ferner

$$h'^2 = \mathfrak{b}^2 (tg^2 u_1 + tg^2 u_2) = \mathfrak{b}^2 tg^2 u,$$

also

$$h' = \pm\, \mathfrak{b} \cdot tg\, u.$$

Dies besagt, dass den Strahlen, die im einen Raum gleiche Winkel u mit der x-Axe bilden, im anderen Raum Strahlen entsprechen, welche die Unstetigkeitsebene derselben in gleicher Entfernung h' von der x-Axe schneiden. Strahlen die im Objektraum nicht nur gleiche Winkel mit der x-Axe bilden, sondern auch untereinander parallel sind, gehen durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene. Dieser ist die Unstetigkeitsebene des Bildraums conjugirt. Die Bilder dieser Strahlen gehen daher sämmtlich durch einen und denselben Punkt dieser Ebene und obige Gleichung giebt die Beziehung zwischen dem Winkel, den ein einfallender Strahl mit der Hauptaxe des Objektraumes bildet und der Entfernung von der Hauptaxe des Bildraums, in welcher der austretende Strahl die Brennebene dieses Raumes schneidet.

Die Brennweiten. Diese Sätze geben eine neue wichtige Eigenschaft der Unstetigkeitsebene an und ebenso erhalten die Constanten der Abbildung eine weitere Bedeutung. Es ist $\mathfrak{b} = \frac{h'}{tg\,u}$ das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Bildraum dessen Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein conjugirter Strahl im Objektraum mit dessen Hauptaxe einschliesst. $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = \frac{h}{tg\,u'}$ ist umgekehrt das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Objektraum die Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Winkels unter dem sein conjugirter Strahl im Bildraum gegen dessen Hauptaxe geneigt ist.

Es sind also, wie hieraus — und auch schon aus den Abbildungsgleichungen selbst — geschlossen werden muss, die Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht gleichwerthig, $\mathfrak{b}$ eine Länge, $\mathfrak{a}$ das Quadrat einer solchen. Es ist daher schon aus diesem Grunde vortheilhaft, diese Constanten durch die oben sich darbietenden gleichartigen $\mathfrak{b}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ zu ersetzen. Wir wollen $b = f$; $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = f'$ setzen. Die Grössen f und f', welche in der Theorie der optischen Instrumente als Charakteristika für die Abbildungsweise angenommen sind, heissen die Brennweiten — aus Gründen, die sich aus dem historischen Entwicklungsgang der geometrischen Optik ergaben, mit dem Wesen der Sache aber eigentlich nicht sehr nahe zusammenhängen. Ihre Definition ergiebt sich sachgemäss nur aus den Gleichungen

$$f = \frac{h'}{tg\,u}; \quad f' = \frac{h}{tg\,u'}; \tag{15}$$

ihr Zusammenhang mit den Eigenschaften der durch sie charakterisirten Abbildung aus den Gleichungen, die nunmehr an die Stelle der früheren treten, nämlich

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x} \quad \text{oder} \quad x\,x' = f \cdot f',$$

$$y' = \left(\frac{f}{x}\right) y = \left(\frac{x'}{f'}\right) y$$

oder

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} \, .$$

Für die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Abbildung ergiebt sich gemäss diesen Gleichungen und den früheren Betrachtungen die Bestimmung, dass $\begin{matrix}\text{gleiches}\\ \text{entgegengesetztes}\end{matrix}$ Vorzeichen von f und f' $\begin{matrix}\text{rückläufige (katoptrische)}\\ \text{rechtläufige (dioptrische)}\end{matrix}$ Abbildungen bedeutet und dabei $\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}$ f die früher näher angegebenen Eigenschaften der Abbildung durch $\begin{matrix}\text{collektive}\\ \text{dispansive}\end{matrix}$ Systeme bestimmt.

Der Anschauung am nächsten kommt und praktisch am besten anwendbar ist die, sich aus den obigen Bestimmungsgleichungen ohne weiteres ergebende Definition der Brennweiten von GAUSS.

Die erste Brennweite (die des Objektraums) ist das Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Bildraums gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines unendlich entfernten Objekts und analog: die zweite Brennweite gleich dem Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Objektraums gelegenen Objekts zur scheinbaren Grösse seines (unendlich entfernten) Bildes.

Die Vorzeichen von f und f' geben hierbei zugleich an, ob die betreffenden Bilder aufrecht oder umgekehrt sind, indem in jeder Meridianebene auch $f = \frac{h'}{tg\,u}$ und $f' = \frac{h}{tg\,u'}$ ist, also bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positivem}}{\text{negativem}}$ f sich Werthe $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleichen}}{\text{entgegengesetzten}}$ Vorzeichens von h' und u entsprechen; ebenso bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positivem}}{\text{negativem}}$ f' Werthe $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleichen}}{\text{entgegengesetzten}}$ Vorzeichens von h und u'.

Das Convergenzverhältniss. Kehren wir zu der Betrachtung der Abbildung einer Geraden in eine andere zurück und beschränken wir uns auf den Fall, dass die Gerade in einer Meridianebene liegt, also die Axe schneidet, dann liegt ihr Bild in einer Meridianebene des Bildraums und nennen wir nun wieder u und u' die Winkel, unter welchen die Axe im Objekt und Bildraum geschnitten wird, h resp. h' die Schnitthöhen in den Unstetigkeitsebenen, dann ist, wie ersichtlich (vergl. Fig. 309)

$$h = -x\,tg\,u \qquad h' = -x' \cdot tg\,u.$$

Es war aber

$$h = f' \cdot tg\,u' \qquad h' = f \cdot tg\,u.$$

Es folgt hieraus das Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahl-Axen-Winkel in jeder Meridianebene

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x},$$

also unabhängig von u resp. u', daher constant für das Paar conjugirter Axenschnittpunkte, deren Abscissen x und x' sind.

Wir bezeichnen dieses für die Theorie der optischen Systeme ebenfalls sehr wichtige Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahlaxenwinkel als das Convergenzverhältniss oder die Angularvergrösserung.

Anmerkung. Gegenüber manchen Darstellungen, die von der Betrachtung der speciellen dioptrischen Abbildung ausgehen und diese dann verallgemeinern, mag hervorgehoben werden: 1) Dass, wie oben von selbst ersichtlich, es das Verhältniss der Tangenten und nicht der Sinus ist, welches für conjugirte Axenpunkte constant ist. Für unendlich kleine Winkel fallen natürlich beide zusammen. 2) Dass in Folge dessen das Verhältniss der Tangenten und ebenso anderer trigonometrischer Function der Winkel, welche zwei Strahlen mit einander bilden, nicht mehr in gleich einfacher Weise bestimmbar ist, wie das der Strahlen gegen die Axe weder für Strahlen, die ihren Divergenzpunkt auf der Axe noch für solche, die ihn ausserhalb derselben haben, sondern dass dieses Verhältniss von den Winkeln der einzelnen Strahlen gegen die Axe abhängt. Man kann daher nicht von einem Convergenzverhältniss in conjugirten Ebenen schlechthin sprechen, wie von einem Vergrösserungsverhältniss in solchen. Die vorangegangenen Entwicklungen beweisen vielmehr indirekt, dass die Constanz des Convergenzverhältnisses in conjugirten Ebenen im Widerspruch steht mit der Möglichkeit der Abbildung endlicher Räume durch homocentrische Strahlenvereinigung. Nur für sehr kleine Winkel u und u' kann man, unter Vernachlässigung von Grössen, die dem Quadrat dieser Winkel proportional sind, das Convergenzverhältniss der Winkel conjugirter Strahlen als constant hinstellen für Divergenzpunkte innerhalb eines Paares conjugirter Ebenen.

Beziehungen zwischen den drei Vergrösserungen. Die Vergleichung der Formeln, welche wir für β und γ hergeleitet haben, zeigt sofort den einfachen Zusammenhang, welcher zwischen diesen beiden Grössen besteht, nämlich

$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'}.$$

Das Produkt des Vergrösserungsverhältnisses in zwei conjugirten Ebenen und des Convergenzverhältnisses der Strahlen in den Axenpunkten dieser Ebenen ist constant für eine gegebene Abbildung (gegebenes optisches System).

Je nachdem f und f' $\begin{matrix}\text{gleiches}\\ \text{entgegengesetztes}\end{matrix}$ Vorzeichen haben, d. h. die Abbildung $\begin{matrix}\text{katoptrisch}\\ \text{dioptrisch}\end{matrix}$ ist, entspricht eine positive Vergrösserung $\begin{matrix}\text{negativem}\\ \text{positivem}\end{matrix}$ Convergenzverhältniss und eine negative Vergrösserung $\begin{matrix}\text{positivem}\\ \text{negativem}\end{matrix}$ Convergenzverhältniss, mit anderen Worten: *bei der katoptrischen (rückläufigen) Abbildung werden aufrechte Bilder zu Stande gebracht durch Strahlen, die in Objekt und Bild entgegengesetzt gegen die Axe geneigt sind, umgekehrte Bilder durch gleichseitig geneigte; bei der dioptrischen (rechtläufigen) Abbildung findet das umgekehrte Verhältniss statt.*

Die bisher abgeleiteten, auf die Unstetigkeitsebenen in beiden Räumen bezogenen Formeln sind, in Kürze zusammengestellt:

Für Brennpunktsabstände conjugirter Axenpunkte

$$x \cdot x' = f \cdot f',$$

für die Tiefenvergrösserung

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{f \cdot f'}{x^2} = -\frac{x'}{x},$$

für die Lateralvergrösserung (I)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'},$$

für das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'}.$$

Durch Combination dieser mit einander erhalten wir:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{f'}{f} \cdot \beta = \frac{1}{\gamma}$$
$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'} \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \alpha = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma^2}, \qquad \text{(I*)}$$

daher auch noch

$$\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = 1.$$

Dieses sind die Beziehungen, welche für *jede* durch geradlinige Strahlen vermittelte punktweise Abbildung zweier endlichen Räume in einander gelten.

Die Cardinalpunkte eines optischen Systems.

Wie diese Formeln aufs einfachste zeigen, können sowohl die Grössen α, β und γ selbst, als auch ihre Verhältnisse zu einander jeden Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, wenn x und x' beliebig variirt werden dürfen.

Einige von diesen Werthen sind von ausgezeichneter Bedeutung, sei es für die Vereinfachung von später abzuleitenden Formeln, sei es für die praktische Beobachtung; es sind dies im besonderen die Stellen der Axe, wo

1) die Tiefenvergrösserung den Werth $+1$ oder -1 hat. In jedem optischen System giebt es zwei Paar Punkte, wo das eine oder das andere (je nachdem das System recht- oder rückläufig ist) statt hat, d. h. einer unendlich kleinen Verschiebung des Objekts auf der Axe eine gleichgrosse und gleich- oder entgegengesetzte Verschiebung des Bildes entspricht. Diese Punkte haben, soviel Verfasser bekannt, keine besondere Benennung erhalten.

2) die Punkte der Axe, wo die Lateralvergrösserung $= +1$ und die, wo dieselbe $= -1$ ist, d. h. Objekt und Bild gleich gross und gleich oder verkehrt gelegen sind. Erstere sind von GAUSS[1]) »Hauptpunkte«, die durch sie gehenden zur Axe senkrechten Ebenen »Hauptebenen« genannt worden; letztere, von TÖPLER[2]) hinzugefügt, von ihm analog als »Hauptpunkte bezw. Hauptebenen der zweiten Art« negative Hauptpunkte bezw. Hauptebenen bezeichnet.

3) Die Stellen der Axe, wo das Convergenzverhältniss $= +1$ bezw $= -1$ ist, d. h. Punkte von der Beschaffenheit, dass einem Strahl, der im Objektraum nach dem einen hinzieht, im Bildraum ein Strahl entspricht, der unter gleichem resp. entgegengesetztem Winkel gegen die Axe von dem conjugirten Punkte ausgeht. Diese Punkte sind, die ersteren von LISTING[3]) eingeführt und Knotenpunkte genannt, die letzteren von TÖPLER[2]) hinzugefügt und wieder als negative Knotenpunkte von den ersteren unterschieden.

In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werthe von α, β, γ, x und x' aufgeführt. Dieselbe zeigt, dass die Knotenpunkte zugleich diejenigen Stellen der Axe sind, in welchen $\alpha = \beta$ ist, d. h. in welchen eine zur Axe senkrechte Schicht in allen drei Dimensionen ähnlich abgebildet wird; und dass in den Punkten wo $\alpha = \pm 1$ 1 ist, $\beta = \pm \gamma$ ist.

α	β	γ	x	x'
$+1$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-f\cdot f'}$	$\mp\sqrt{-f\cdot f'}$
-1	$\pm\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\mp\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$
$-\frac{f'}{f}$	$+1$	$-\frac{f}{f'}$	$+f$	$+f'$
$-\frac{f'}{f}$	-1	$+\frac{f}{f'}$	$-f$	$-f'$
$-\frac{f}{f'}$	$-\frac{f}{f'}$	$+1$	$-f'$	$-f$
$-\frac{f}{f'}$	$+\frac{f}{f'}$	-1	$+f'$	$+f$

Ausser diesen conjugirten Punktpaaren haben manche Autoren noch andere theils ebenfalls conjugirte, theils auch nur analog gelegene Paare von Punkten

[1]) Dioptr. Unters. pag. 13. Bemerkt und hervorgehoben wurden sie schon von MÖBIUS, CRELLE's Journ. 5, pag. 113. 1830, für einen specielleren Fall (unendlich dünne Linsen).

[2]) l. c.

[3]) Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Art. Dioptrik des Auges in R. WAGNER's Handwörterbuch der Physiologie. Braunschweig 1853. Bd. 4, pag. 451.

eingeführt[1]). Wir finden unsererseits keinerlei Nutzen in der Anwendung derselben, wohl aber eine Verminderung der ohne sie bestehenden Uebersichtlichkeit der Verhältnisse. Wir werden auch von den meisten der oben charakterisirten Punkte nur selten Anwendung zu machen haben. Hingegen werden wir später Veranlassung haben, weitere Punktpaare einzuführen und zu benützen, welche von einem anderen Gesichtspunkte aus, als dem der allgemeinen Abbildung, ein Interesse und praktische Bedeutung haben.

Graphische Constructionen.

Jedes optische System ist, wie wir gesehen haben, durch vier Bestimmungsstücke, nämlich durch die Orte der Brennebenen und die Werthe der Brennweiten vollständig bestimmt. Es wird auch durch zwei von den oben angeführten Paaren von Cardinalpunkten oder durch eins von diesen in Verbindung mit einem der soeben genannten Elemente eindeutig bestimmt, wie wir noch näher sehen werden. Die sogen. Cardinalpunkte bieten die Möglichkeit, auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise zu einem Punkt oder Strahl den conjugirten Punkt oder Strahl zu ermitteln.

Diese Constructionen, welche vom geometrischen Gesichtspunkte aus ganz interessant sind, haben für uns eine untergeordnete Bedeutung. Es sei desshalb auf die einschlägige Literatur verwiesen[2]) und hier nur die eine Aufgabe behandelt: »Zu einem Punkte den conjugirten finden, wenn die Brennebenen und Brennweiten gegeben sind«. Mit den Brennebenen und Brennweiten sind ja indirekt (gemäss der Tabelle auf voriger Seite) auch die beiden Paare von Hauptpunkten gegeben — indem man nur von F aus beiderseits die Strecke f, von F' aus f' abzutragen hat, und ebenso die beiden Paare von Knotenpunkten — indem man von F aus beiderseits f', von F' aus f auf der Axe abträgt — und damit ist die Möglichkeit gegeben, gleich deren Eigenschaften zur Construction mit zu benützen und umgekehrt. Denken wir uns auf diese Weise z. B. die (positiven) Hauptebenen gezeichnet, so lassen wir vom gegebenen Punkte P einen Strahl parallel zur x-Axe ausgehen; er schneidet die Hauptebene H in der Entfernung h. Der conjugirte Strahl schneidet dann die Hauptebene H' in derselben Höhe und geht durch den zweiten Brennpunkt F', ist also völlig bestimmt. Ein zweiter Strahl gehe von P durch F und schneide H in der Entfernung $h' (= f \cdot tg\, u)$. Der conjugirte Strahl schneidet H' in gleicher Höhe und ist der Axe x' parallel, also ebenfalls bestimmt. P' liegt im Schnittpunkte dieser beiden Strahlen.

---

[1]) Siehe DREWS, EXNERS's Rep. d. Phys. 25, pag. 707. 1889, wo die einschlägige Literatur theilweise citirt wird.

[2]) Ausser den bereits angeführten Abhandlungen von GAUSS, LISTING, LIPPICH, BECK und TÖPLER die meisten Darstellungen dieser sogen. GAUSS'schen Theorie; insbesondere

CL. MAXWELL, On the general laws of optical instruments. Phil. Mag. 1856 und Quart Journ. 2, pag. 233. 1858.

GAVARRET, Des images par réflexion et par réfraction. Rev. des cours scientif. Paris 1866.

C. NEUMANN, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes. Leipzig 1866.

A. MARTIN, Interprétation géométrique et continuation de la théorie des Centilles de GAUSS. Thèses prés. à la Fac. des Sci. de Paris 1867. Ann. de Chim. et de Phys. (4) 10. 1867.

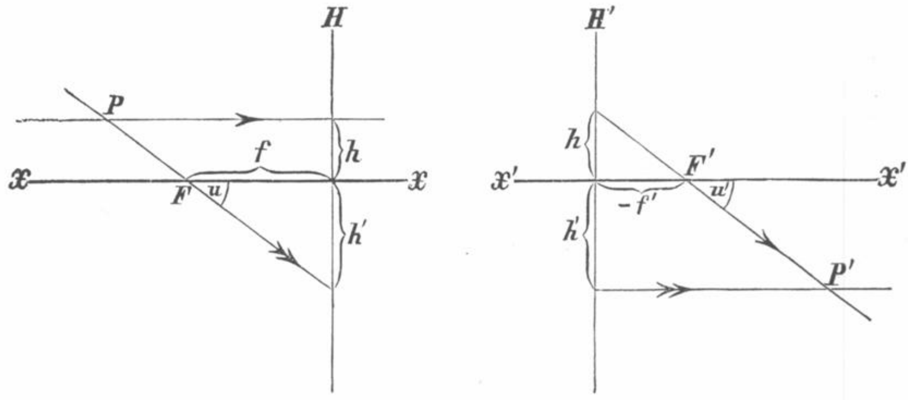
E. REUSCH, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig 1870.

G. FERRARIS, die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Turin 1877. Uebersetzung von LIPPICH. Leipzig 1879.

KESSLER, Beiträge zur graphischen Dioptrik. Jahresb. Gewerbeschule Bochum 1880.

C. M. GARIEL, Etudes d'optique géométrique. Paris 1889.

Die analogen Aufgaben werden meist in ähnlicher Weise gelöst.



(Ph. 310.)

Die Abbildungsgleichungen bezogen auf conjugirte Punkte.

Wir haben zuletzt stets von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht, in welchen die Abscissen beider Räume von den Unstetigkeitsebenen derselben an gemessen sind. Schon um den singulären Fall der teleskopischen Abbildung behandeln zu können, dann aber auch aus praktischen Gründen wollen wir die vorher gewonnenen Resultate auch auf die Form (13) der Abbildungsgleichungen anwenden, in welchen die Abscissen von einem Paar conjugirter Punkte an gemessen sind.

Um nicht alle Betrachtungen in wenig veränderter Form noch einmal bei diesen Gleichungen (13) wiederholen zu müssen, gehen wir vielmehr von den schon eingeführten Beziehungen und Gleichungen aus und verschieben nur die Coordinatensysteme entsprechend in Richtung der x-Axe. Seien die Abscissen eines Paares conjugirter Punkte — der neuen Anfangspunkte — bezogen auf die Brennebenen x_0 und x_0', die eines beliebigen anderen Paares bezogen auf dieselben Ebenen x und x', dann sind die Abscissen der letzteren, bezogen auf die ersteren als Anfangspunkte, $\xi = x - x_0$ und $\xi' = x' - x_0'$, und wir haben die Beziehungen zwischen diesen Grössen und den Brennweiten

$$x_0 \cdot x_0' = f \cdot f'$$

und

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

oder

$$(x_0 + \xi)(x_0' + \xi') = f \cdot f',$$

was unter Benützung der ersteren Gleichung übergeht in

$$x_0' \xi + x_0 \xi' + \xi \xi' = 0$$

oder

$$\frac{x_0'}{\xi'} + \frac{x_0}{\xi} + 1 = 0. \tag{II}$$

Diese Gleichung drückt die Abscissen der conjugirten Punkte bezogen auf ein Grundpaar von solchen aus durch die Entfernung der Grundpunkte von den Brennebenen (bei HELMHOLTZ[1]) und Anderen, umgekehrt durch die Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die Grundpunkte; daher die Verschiedenheit der Vorzeichen in dem constanten Gliede hier und bei jenen).

[1]) Physiol. Optik. Hamburg u. Leipzig, 1. Aufl. 1867, 2. Aufl. 1888, § 9, u. Wissensch. Abhandlungen. Leipzig 1883, 2, pag. 94, 98.

Die Gleichung für die Vergrösserung wird ohne weiteres aus der früher abgeleiteten

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x_0' + \xi'}{f'} = \frac{f}{x_0 + \xi};$$

ebenso das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x_0 + \xi}{f'} = -\frac{f}{x_0' + \xi'}.$$

Um von den Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die neuen Coordinatenanfangspunkte ganz unabhängig zu werden, können wir statt derselben die Brennweiten f und f', und die in den Grundpunkten bestehende Vergrösserung $\beta_0 = \frac{x_0'}{f'} = \frac{f}{x_0}$ einführen. Es wird dann die Abscissengleichung:

$$\frac{f'}{\xi'}\beta_0 + \frac{f}{\xi}\frac{1}{\beta_0} + 1 = 0,$$

die Ordinatengleichung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f'\beta_0 + \xi'}{f'} = \frac{f\beta_0}{f + \xi\beta_0} \tag{II*}$$

und das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{(f + \xi\beta_0)}{f'\beta_0} = -\frac{f}{f'\beta_0 + \xi'}.$$

Diese Gleichungen erhalten eine besonders einfache Form, wenn man als Grundpunkte solche wählt, in denen β_0 einen geeigneten Werth hat. Die wichtigste derselben ist die auf die Hauptpunkte bezogene, in welchen $\beta_0 = +1$ ist; nämlich es wird dann

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} + 1 = 0, \\ \beta &= \frac{y'}{y} = \frac{f}{f + \xi} = \frac{f' + \xi'}{f'}, \\ \gamma &= \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{f}{f' + \xi'} = -\frac{f + \xi}{f}. \end{aligned}\right\} \tag{II**}$$

Um Verwechslungen mit den von anderen Autoren, z. B. HELMHOLTZ abgeleiteten Gleichungen zu vermeiden, sei nochmals daran erinnert, dass hier die Abscissen in beiden Räumen von den betreffenden Punkten in gleichem Sinne, nämlich in der Richtung der Lichtbewegung als positiv gerechnet sind.

Bezieht man die Abscissen auf die negativen (TÖPLER'schen) Hauptebenen, in welchen $\beta_0 = -1$ ist, so erhält man entsprechend

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} - 1 = 0$$

und

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - \xi} = \frac{\xi' - f'}{f'} \text{ etc.,}$$

also gleiche Ausdrücke wie HELMHOLTZ für die positiven Hauptebenen erhält indem er ξ' entgegengesetzt misst wie ξ und die Vorzeichen der Brennweiten umgekehrt bestimmt, wie wir es thaten.

Aehnlich liesse sich statt β_0, γ_0 einführen und einfache Gleichungen herleiten welche bezogen sind auf die Knotenpunkte, in welchen $\gamma_0 = \pm 1$ ist. Doch haben solche Gleichungen Werth nur in speciellen Fällen.

Teleskopische Abbildung.

Die im letzten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen behalten ihre Anwendbarkeit auch in dem Falle der teleskopischen Abbildung. Das Charakteristische desselben ausgedrückt durch die neuen Constanten f und f' ist, wie der Vergleich mit den Einführungsgleichungen für diese lehrt, dies, dass in ihm die Brennweiten beide unendlich gross werden, aber constantes endliches Verhältniss behalten.

Bringt man durch Division mit f bezw. f' die Gleichungen (II*) auf eine Form, in welcher theils $\frac{f'}{f}$ theils f oder f' allein als Faktoren bezw. Divisoren auftreten und setzt dann f und $f' = \infty$, so wird die Abscissengleichung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\beta_0^2\left(\frac{f'}{f}\right) = const\,(\xi', \xi),$$

ferner

$$\beta = \frac{y'}{y} = \beta_0 = const\,(\xi', \xi)$$

entsprechend den früher für diesen Fall abgeleiteten Gleichungen (14).

Im Falle der teleskopischen Abbildung hat das Convergenzverhältniss γ eine besondere praktische Bedeutung; denn bei der Abbildung eines unendlich entfernten Objektes in ein unendlich entferntes Bild kann man ja nur noch von diesem, d. i. der Angularvergrösserung, reden.

Gemäss den allgemein giltigen Gleichungen (I*) ist $\gamma = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\beta_0}$, also ebenfalls constant $= \gamma_0$.

Durch den Werth dieser Angularvergrösserung ausgedrückt wird demnach das Verhältniss conjugirter Abscissen, gemessen von einem Paare conjugirter Punkte an,

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \alpha_0$$

und das Verhältniss conjugirter Ordinaten (III)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0} = \beta_0.$$

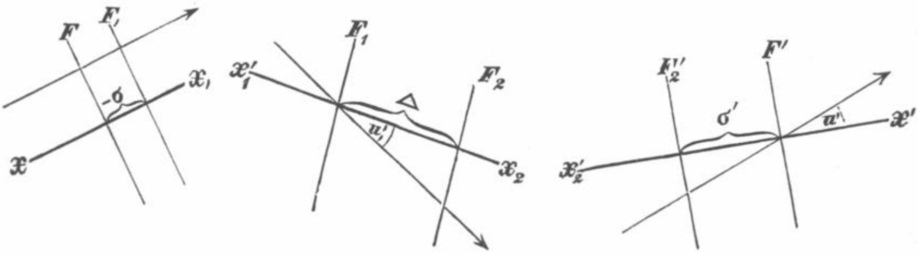
Gesetze der Combination optischer Systeme.

Der Bildraum einer gegebenen ersten Abbildung kann Objektraum einer zweiten sein u. s. f. Den Effekt dieser zwei (oder mehr) successiven Abbildungen kann man als eine einzige Abbildung auffassen, deren Bestimmungsstücke der Lage und Richtung bezw. Grösse nach von den Bestimmungsstücken der einzelnen Abbildungen und deren gegenseitiger Lage abhängen. Dies ist ein praktisch sehr wichtiges Moment. Denn physisch wird eine Abbildung fast stets durch eine Reihe successiver Einzelabbildungen vermittelt. Die Gesammtheit der physikalischen Agentien, durch welche die von den Punkten eines Objektraumes divergirenden Lichtstrahlen in Punkten des Bildraums vereinigt werden und so das zu Stande bringen, was wir eine »optische Abbildung« genannt haben, heisst das »optische« oder »abbildende System«. Das optische System ist der reale Träger der Abbildung, und die Bestimmungsstücke, welche wir bisher vom rein geometrischen Standpunkte aus einer »Abbildung« zusprachen, können wir in concreterer Ausdrucksweise dem optischen System zuertheilen, welches die betr. Abbildung zu Stande bringt. Ein optisches System ist fast stets zusammengesetzt aus Partialsystemen, die jedes für sich ebenfalls eine Abbildung herbeiführen. Wenn wir studirt haben, wie die Abbildung des Gesammtsystems sich berechnet aus den Abbildungsconstanten und der gegenseitigen Lage der Partialsysteme, so wird es weiterhin genügen, die speciellen Abbildungsweisen der letzten Elementarsysteme zu studiren, in die man ein gegebenes zerlegen kann, um mit Hilfe jener vorher erhaltenen Combinationsgesetze die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems vollständig berechnen zu können.

Zusammensetzung zweier Abbildungen (zweier optischer Systeme).

a) Zusammensetzung zweier endlicher Abbildungen zu einer endlichen.

Machen wir die beschränkende — in Praxi aber stets sehr annähernd erfüllte — Annahme, dass die Axe des Bildraums des ersten Systems zusammenfalle mit der Axe des Objektraums des zweiten Systems[1]). (Gewöhnlich wird die unnöthige Annahme gemacht, dass alle 4 Axen zusammenfallen.) Seien dann F_1, F_1' die Brennebenen, f_1, f_1' die Brennweiten des ersten



(Ph. 311.)

Systems; F_2, F_2', f_2, f_2' ebenso die Brennebenen und Brennweiten des zweiten Systems, wobei Ebene $F_2 \parallel F_1'$, und sei endlich die Lage der beiden Systeme gegen einander gegeben durch den (im Sinne der Lichtbewegung gemessenen) Abstand der Objekt-Brennebene des zweiten Systems (F_2) von der Bild-Brennebene des ersten (F_1') also $F_1' F_2 = \Delta$.

Dann ist die Abbildung des ganzen aus den Systemen I und II zusammengesetzten Systems bestimmt, wenn die Lage seiner Brennebenen F, F' und die Grösse seiner Brennweiten f, f' ermittelt ist.

Zunächst 1) geht aus den gemachten Annahmen hervor, dass die Brennebene F parallel ist F_1 und F' parallel F_2'; denn den zur Ebene F_1 parallelen Ebenen entsprechen im Bildraum von I Ebenen, die zu F_1' parallel sind, also laut Annahme auch zu F_2. Letzteren aber entsprechen Ebenen, die zu F_2' parallel sind, also schliesslich den zu F_1 $\parallel$ Ebenen solche, die zu F_2 $\parallel$ sind. Ferner

2) Die Objektaxe des ersten Systems ist Objektaxe des ganzen Systems, die Bildaxe des zweiten Systems Bildaxe des ganzen. Denn diese Axen sind, wie leicht ersichtlich, Bilder von einander und gemäss unseren allgemeinen Betrachtungen pag. 44—45 giebt es nur ein Paar zu den Brennebenen senkrechter Geraden, die zu einander conjugirt sind, welche Geraden wir zu Hauptaxen der Abbildung wählten.

3) Die Orte der Brennebenen F und F' ergeben sich aus der Ueberlegung, dass F', als die der unendlich fernen Ebene des Objektraums in Bezug auf das ganze System conjugirte Ebene, conjugirt sein muss der Ebene F_1' in Bezug auf das System II. Bezeichnen wir den — wieder im Sinne der Lichtbewegung ge-

[1]) Wenn die Objektaxe des zweiten Systems nicht coincidirt mit der Bildaxe des ersten, so sind auch die Objekt- und Bildaxen des ganzen Systems im Allgemeinen der Lage und Richtung nach verschieden von denen des ersten bezw. zweiten Systems. Doch müssen wir auf ein näheres Eingehen auf diesen Fall hier verzichten.

messenen Abstand der F' von F_2' mit σ', so ist σ' der in Bezug auf II conjugirte Brennpunktsabstand zu der Strecke $F_2 F_1' = -\Delta$, also

$$\sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz analog erhält man $\sigma = +\frac{f_1 f_1'}{\Delta}$, den Abstand der Ebene F von F_1, im gleichen Sinne gemessen, wenn F als die in Bezug auf System I zu F_2 conjugirte Ebene betrachtet wird.

4) Um die Grössen der Brennweiten zu finden, gehen wir auf deren Definitionsgleichungen zurück

$$f = \frac{h'}{tg\, u} \qquad f' = \frac{h}{tg\, u'}.$$

Ein parallel zur Objekt-Axe des ersten — also auch des ganzen Systems in der Höhe h über dieser Axe einfallender Strahl schneidet nach Durchsetzung des Systems I die Bildaxe desselben (= Objektaxe des zweiten Systems) im Punkte F_1' und unter einem Winkel u_1', der sich bestimmt aus der Definitionsgleichung $f_1' = \frac{h}{tg\, u_1'}$. Unterliegt dieser Strahl nunmehr der Abbildung durch das zweite System, so wissen wir bereits, dass er dessen Bildaxe in F' schneidet, in der vorhin angegebenen Entfernung σ' von F_2' und unter einem Winkel u', der sich bestimmt aus der Gleichung für das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten, nämlich hier

$$\frac{tg\, u'}{tg\, u_1'} = -\frac{x_2}{f_2'} = +\frac{\Delta}{f_2'}.$$

Diese Gleichung combinirt mit der für u_1' ergiebt

$$f' = \frac{h}{tg\, u'} = +\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz ebenso erhält man durch Verfolgung eines zur Bildaxe des zweiten (und ganzen) Systems parallel austretenden Strahls nach rückwärts

$$f = \frac{h'}{tg\, u} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}.$$

Durch diese 4 Grössen σ, σ', f, f', und die gemachten Lagenbestimmungen ist die Abbildung des ganzen Systems vollständig definirt.

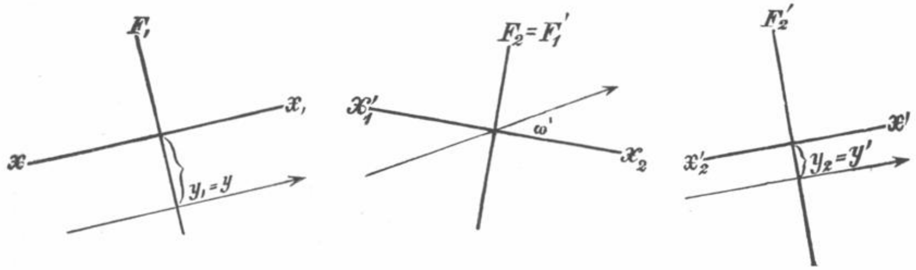
Die angegebenen Formeln gestatten, in sehr einfacher Weise zu übersehen, wie die Lagen der resultirenden Brennebenen und die Grössen und Vorzeichen der resultirenden Brennweiten abhängen von den Brennweiten der Partialsysteme und der Grösse Δ, dem »optischen Abstand« derselben. Indem wir diese Discussion für später aufsparen, wo wir sie an concrete Fälle anknüpfen können, weisen wir hier nur im Allgemeinen auf die durch die Variabilität von Δ gegebene grosse Variabilität der Endgrössen bei gegebenen f_1, f_2, f_1', f_2' hin.

b) Zusammensetzung zweier endlicher Systeme zu einem teleskopischen.

Im Besonderen kann der Fall eintreten, dass $\Delta = 0$ ist, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems zusammenfällt mit dem hinteren Brennpunkt des ersten. Alsdann wird $f = \infty$ und auch $f' = \infty$, also die Abbildung eine teleskopische. Das Verhältniss von f zu f' jedoch bleibt ein endliches, wie schon daraus hervorgeht, dass gemäss den obigen Formeln

$$\frac{f'}{f} = m = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_2} = -\left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \text{ ist.}$$

Um in diesem Falle die Constanten der Abbildung, aus denen der Partialsysteme zu berechnen, genügt die einfache Betrachtung, dass ein parallel zur Axe eintretender Strahl durch den gemeinsamen Brennpunkt beider Partialsysteme gehen und parallel der Axe aus dem zweiten wieder austreten muss. Das Vergrösserungsverhältniss $\frac{y'}{y} = \beta$, welches für alle Punkte der Axe constant ist, ist nun



(Ph. 312.)

$= \frac{y'}{tg\, w} : \frac{y}{tg\, w}$, wenn w den Winkel bezeichnet, unter dem ein in der Höhe y parallel zur Axe einfallender Strahl zwischen beiden Systemen die Axe schneidet. Also ist

$$\frac{y'}{y} = \beta_0 = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Hiernach die Angularvergrösserung

$$\gamma = \frac{tg\, u'}{tg\, u} = \gamma_0 = -\frac{1}{m\beta_0} = +\frac{f_1}{f_2'}$$

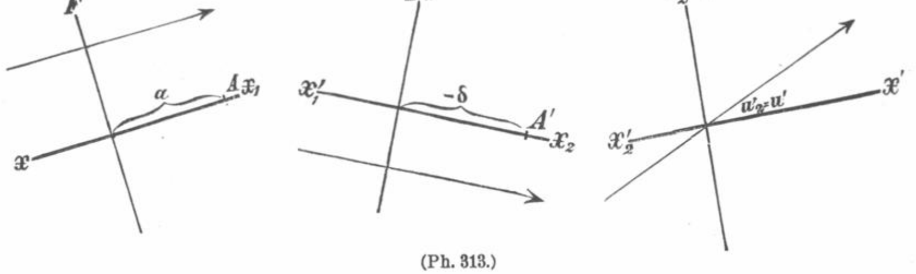
und das Verhältniss conjugirter Abscissen in unserer früheren Bezeichnung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -m\beta_0^2 = +\frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Die Lage eines Paars conjugirter Punkte muss besonders bestimmt werden. Ein solches Paar sind aber offenbar hier (wie immer) der vordere Brennpunkt des ersten Systems und der hintere des zweiten.

c) Combination zweier Systeme, von denen das eine ein teleskopisches ist.

Sei das erste ein teleskopisches und durch den Werth von β_1 oder γ_1, sowie durch die Lage zweier conjugirter Punkte A, A' und das Verhältniss von $f_1' : f_1$



(Ph. 313.)

$= m_1$ bestimmt. Das zweite sei durch F_2, F_2', f_2, f_2' bestimmt, und die gegenseitige Lage der beiden Systeme durch den Abstand von F_2 gegen den Punkt A', $A'F_2 = \delta$. Die Bildaxe des vorderen Systems coincidire wieder mit der Objektaxe des hinteren. Dann ist der hintere Brennpunkt des zweiten Systems auch der des ganzen Systems, da parallel zur Axe einfallende Strahlen zwischen beiden

Systemen parallel zur Axe verlaufen, also auch ebenso auf das zweite System auffallen. Der vordere Brennpunkt des ganzen Systems ist leicht zu berechnen, als der in Bezug auf das vordere (teleskopische System) zum vorderen Brennpunkt des zweiten Systems conjugirte. Sein Abstand a von A berechnet sich gemäss (III) zu

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2} \quad \text{oder} \quad a = -m_1 \delta \cdot \gamma_1^2.$$

Die Brennweite des Bildraums ist

$$f' = \frac{h}{tg\, u'} = \frac{y_1}{y_1'} \cdot \frac{y_1'}{tg\, u'} = \frac{1}{\beta_1} \cdot f_2' = -m_1 \gamma_1,$$

die des Objektraums

$$f = \frac{h'}{tg\, u} = \frac{h'}{tg\, w} \cdot \frac{tg\, w}{tg\, u} = f_2 \cdot \gamma_1 = -\frac{1}{m_1 \beta_1} \cdot f_2.$$

Die Bedeutung der hier benützten Zwischengrössen y_1, y_1', w ist aus ihrer Bezeichnung wohl ohne weiteres ersichtlich.

Ganz analog ist die Betrachtung, wenn das vordere System endlich, das hintere teleskopisch ist.

d) Combination zweier teleskopischer Abbildungen.

Jede sei durch die Werthe von β oder γ, und die Lage eines Paars conjugirter Punkte A_1, A_1'; A_2, A_2', sowie die Verhältnisse $m_1 = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right)$; $m_2 = \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)$ gegeben; die gegenseitige Lage durch den Abstand $A_1' A_2 = \delta$.

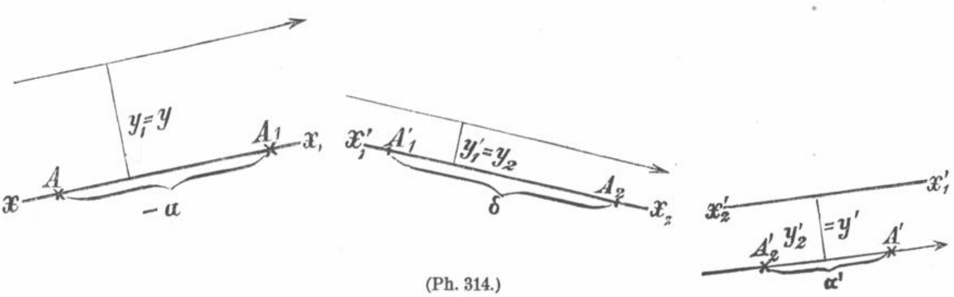
Die resultirende Abbildung ist, wie leicht einzusehen, ebenfalls teleskopisch. Ihr Vergrösserungsverhältniss $\beta = \frac{y'}{y}$, sowie ihr Convergenzverhältniss γ je gleich dem Produkt der betreffenden Verhältnisse der Einzelsysteme. Denn

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \beta_2 \cdot \beta_1$$

ebenso

$$\gamma = \frac{tg\, u'}{tg\, u} = \frac{tg\, u'}{tg\, w} \cdot \frac{tg\, w}{tg\, u} = \gamma_2 \cdot \gamma_1.$$

Die Lage eines, und sogar zweier Paare conjugirter Punkte ist ebenfalls leicht ermittelt, denn der zu A_1' in Bezug auf System 2 conjugirte Punkt A' liegt von



(Ph. 314.)

A_2' in der Entfernung $a' = -m_2 \delta \cdot \beta_2^2$ und ist offenbar in Bezug auf das ganze System conjugirt zu A_1. Ebenso ist der zu A_2 in Bezug auf System 1 conjugirte Punkt A von A_1 um eine Strecke a entfernt (im Sinne des Lichteinfalls!), die gegeben ist durch

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2}.$$

Wir haben also im Ganzen das Resultat: Durch Combination zweier endlicher Systeme entsteht im Allgemeinen eine endliche, *nur in einem Falle eine teleskopische Abbildung. Durch Zusammensetzung zweier teleskopischer Abbildungen entsteht immer eine teleskopische; durch Zusammentritt einer endlichen und einer teleskopischen Abbildung immer eine endliche.*

Umgekehrt lässt sich nach denselben Betrachtungen und Formeln eine gegebene endliche Abbildung immer in zwei endliche oder in eine endliche und eine teleskopische Theil-Abbildung zerlegen; eine gegebene teleskopische Abbildung entweder auch in zwei endliche (mit den zugewandten Brennpunkten coincidirende) oder in zwei teleskopische. —

Unsere Formeln gestatten ohne weiteres die Ausdehnung auf beliebig viele Systeme, wobei wir uns auf den *Fall lauter endlicher Systeme* beschränken wollen.

Zusammensetzung beliebig vieler endlicher Systeme.

Der Abstand der vorderen Brennebene des Gesammtsystems von der vorderen des ersten Systems sei wieder mit σ, der Abstand der hinteren Brennebene des Gesammtsystems von der des letzten Einzelsystems mit σ' bezeichnet; die Brennweiten der Einzelsysteme mit f_1, f_1'; $f_2, f_2' \ldots f_k \cdot f_k'$, die des ganzen mit f und f'.

In Bezug auf die Richtung der Brennebenen, die Lage der Hauptaxen und des ganzen Systems gelten dieselben Betrachtungen wie vorher: dieselben fallen bezw. zusammen mit der Objektbrennebene und Objektaxe des ersten, sowie der Bildbrennebene und der Bildaxe des letzten Einzelsystems.

Um die Lage der Brennebenen und die Grösse der Brennweiten des Gesammtsystems zu berechnen aus denen der einzelnen Systeme, seien die Abstände der einander zugewandten Brennpunkte, je zweier aufeinander folgender Systeme

$$F_1' F_2 = \Delta_1, \quad F_2' F_3 = \Delta_2, \quad F'_{k-1} F_k = \Delta_k.$$

Die hintere Brennebene des Gesammtsystems ist das Bild der hinteren Brennebene des ersten Systems, welches successive von den darauffolgenden Systemen entworfen wird. Bezeichnet man den Abstand der hinteren Brennebene des aus den p ersten Systemen gebildeten Systems von der des $p$ten mit σ_p', so hat man, wie leicht ersichtlich, zur Bestimmung von $\sigma' = \sigma_k'$ folgendes System von Gleichungen:

$$\sigma_2' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad \sigma_3' = -\frac{f_3 \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'} \text{ etc.};$$

$$\text{allgemein } \sigma_p' = -\frac{f_p \cdot f_p'}{\Delta_{p-1} - \sigma'_{p-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich σ' zunächst in Form eines Kettenbruchs.

$$\sigma' = -\cfrac{f_k \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{\Delta_{k-2} + \cfrac{\vdots}{\Delta_2 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_1}}}}.$$

Ganz ebenso erhält man

$$\sigma = +\cfrac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta_1 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_2 + \cfrac{\vdots}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} f'_{k-1}}{\Delta_{k\ 1}}}}}$$

Um die **Brennweiten des Gesammtsystems** zu finden, haben wir ganz ebenso wie bei der Zusammensetzung zweier Systeme successive das Convergenzverhältniss in den Punkten zu suchen, in welche F_1', der Reihe nach abgebildet wird und alle diese Verhältnisse mit einander und mit f' zu multipliciren. Das Resultat ist

$$\frac{h}{tg\,u_1'} \cdot \frac{tg\,u_1'}{tg\,u'_2} \cdot \frac{tg\,u_2'}{tg\,u_3'} \cdots \frac{tg\,u_{k-1}'}{tg\,u_k'} = \frac{h}{tg\,u'} = f'.$$

Wir erhalten auf diese Weise, wenn wir die Brennweite des aus den ersten p-Systemen gebildeten mit $f'_{1,p}$ bezeichnen, successive

$$f'_{1,2} = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad f'_{1,3} = \frac{f'_{1,2} \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'}; \quad \ldots \quad f'_{1,k} = f' = \frac{f'_{1,k-1} \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1}}.$$

Also

$$f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot f_3' \cdots f_k'}{\Delta_1 (\Delta_2 - \sigma_2') \cdot (\Delta_3 - \sigma_3') \cdots (\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1})}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist nach den oben für σ_p' aufgestellten Formeln ohne weiteres zu berechnen. Bezeichnen wir ihn mit N_k, so ist aus obiger Herleitung ersichtlich, dass N_k mit den vorangehenden Werthen N_{k-1}, N_{k-2} etc. in der Weise zusammenhängt, dass

$$N_k = \frac{\Delta_{k-1} N_{k-1} + f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{N_{k-1}}$$

ist u. s. f. Mit Hilfe dieser Beziehung ist N_k noch leichter zu berechnen. Man kann das Resultat dieser Rechnung auch unmittelbar in Kettenbruchform angeben oder andere Schemata zu Hilfe nehmen. Doch wollen wir diese rein formelle Seite der Frage hier nicht weiter erörtern, sondern verweisen auf die einschlägige Literatur, in welcher die »dioptrischen Kettenbrüche« wiederholt behandelt worden sind[1]).

Man erhält analog für f

$$f = (-1)^{k-1} \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_k}{N_k},$$

wo N_k dieselbe Grösse ist, wie in dem Ausdruck für f_1.

Wenn statt der Brennpunkte und Brennweiten, sowie der Brennpunktsabstände (Δ) andere Grössen zur Bestimmung der Abbildungsweise und gegenseitigen Lage der Einzelsysteme gegeben sind, so erhält man durch analoge Verfahren wie wir sie oben angewendet haben, die entsprechenden für das zusammengesetzte System. Wir unterlassen die Ausführung dieser Rechnung hier unter Verweis auf die oben citirte Literatur, in welcher sie zu finden ist und werden auch hierauf nur gelegentlich in speciellen Fällen Veranlassung haben, zurückzukommen.

[1]) A. F. MOEBIUS, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften von Linsengläsern. CRELLE's Journ. 5, pag. 113. 1830, und Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, ibid. 6, pag. 215. 1830.

F. W. BESSEL, Ueber die Grundformeln der Dioptrik, Astr. Nachr. 18, pag. 37. 1840.

L. MATTHIESSEN, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877, § 21 ff. Einführung der Determinanten in dies Problem von

F. CASORATI, Le propietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati, Milano 1872, pag. 101. Weitere Ausarbeitungen auf diesem Wege von

G. FERRAFIS, Atti R. Acc. di Torino 16, pag. 7. 1880.

F. MONOYER, Séanc. Soc. Franc. de Phys. 1883, pag. 148, übers. in EXNER's Repert. 21, pag. 58. 1885.

L. MATTHIESSEN, SCHLÖM. Zeitschr. 29, pag. 343. 1884, ibid. 32, pag. 170. 1887.

Alle diese Arbeiten behandeln das Problem unter Voraussetzung der speciellen Verhältnisse mit denen sich der nachfolgende Artikel beschäftigt.

Für uns ist es im Augenblick genügend, überhaupt festgestellt zu haben, dass und in welcher Weise etwa sich die wesentlichen Bestimmungsstücke einer zusammengesetzten Abbildung berechnen lassen aus denen der sie formirenden Einzelabbildungen..

Literatur.

Die Theorie der optischen Bilder ist, wie mehrfach hervorgehoben, fast stets unter specielleren Voraussetzungen hergeleitet, als wir oben benützt haben. Die wichtigsten Arbeiten für die Entwickelung dieser Lehre sind, ausser den im Text bereits angeführten von MOEBIUS, GAUSS, BESSEL, LISTING, MAXWELL, HELMHOLTZ, CASORATI, FERRARIS, MATTHIESSEN u. A. noch aus der Zeit vor GAUSS:

KEPLER, Dioptrice, Augsb. 1611, (ohne Kenntniss des richtigen Brechungsgesetzes, auf der erfahrungsmässigen Thatsache homocentrischer Strahlenvereinigung beruhend!).

COTES in R. SMITH, System of Opticks, Cambr. 1738, 2, pag. 76.

L. EULER, Dioptrice, Petersb. 1769—71.

LAGRANGE, Nouv. mém. acad. Berlin pour 1778, pag. 162. 1780.

PIOLA, Effemer. astron. di Milano 1821.

BIOT, Traité d'Astron. phys. 3 ed. Paris 1841, Bd. 1 u. 2.

Von neueren Darstellungen sind noch zu erwähnen:

K. L. BAUER, Zur Theorie dioptr. Instrum., München 1866.

V. v. LANG, Wien. Sitzber. 63, pag. 686. 1871, POGG. Ann. 149, pag. 353. 1873.

F. NEESEN, Abbildg. v. leucht. Obj. in einem nicht centr. Linsensyst., Diss. Bonn 1871.

F. PAROW, Durchg. d. Lichts d. belieb. brech. Flächen, Diss., Bonn 1876.

CH. PENDLEBURY, Lenses and systems of lenses treated after the manner of GAUSS, Cambr. 1884.

P. ZECH, Math. natw. Mitth., Tübingen 1887.

S. CZAPSKI.

Realisirung der optischen Abbildung
A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen.

(Fundamentaleigenschaften der Linsen und Linsensysteme.)

Wir haben bisher immer nur angenommen, dass eine »optische Abbildung« zu Stande komme, ohne uns darum zu kümmern oder Voraussetzungen darüber zu machen, in welcher Weise des näheren dies geschehe. Wir nahmen es als durch die tägliche Erfahrung feststehend an, dass optische Abbildungen thatsächlich vorkommen und untersuchten darauf hin zunächst die allgemeinen Gesetze, denen eine jede solche Abbildung, kraft ihrer Entstehung durch punktweise Vereinigung gradliniger Strahlen nothwendig unterliegen muss, auf welche Weise sie auch immer zu Stande gekommen sein mag.

In dem Folgenden sollen einige besonders wichtige Verwirklichungs-Arten von Abbildung näher untersucht werden. Es soll gezeigt werden — und dies ist, wie wir früher bereits ausführten, nunmehr das einzige was zu zeigen noch übrig bleibt — unter welchen physischen Bedingungen in gegebenen Fällen eine Abbildung zu Stande kommt, welchen Beschränkungen dieselbe gegenüber der vorher von uns angenommenen unendlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel in praxi immer unterliegt, wie Objekt- und Bildraum zu einander liegen und wie sich die Hauptbestimmungsstücke der Abbildung, d. h. die Brennweiten und die Oerter der Brennpunkte aus den Daten des Falles selbst berechnen lassen.