universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Encyklopaedie der Naturwissenschaften

Optik

Winkelmann, Adolph

1894

Geometrische Optik

urn:nbn:at:at-ubi:2-7838

Lichtes beim schiefen Durchgang durch eine planparallele Platte untersuchte. Da diese Drehung vom Brechungsexponenten abhängt, also von der Lichtgeschwindigkeit, muss sie verschieden ausfallen, je nachdem das durchfallende Licht mit der Erde oder gegen diese sich bewegt. Die Beobachtungen ergaben in der That die Drehung stets grösser, wenn um die Mittagszeit der Apparat gegen Westen als wenn er gegen Osten gerichtet war, und die Zahlen stimmten mit dem nach der FRESNEL'schen Annahme zu erwartenden nahezu überein.

Hiernach besteht ein Widerspruch zwischen FIZEAU's und MICHELSON's Resultaten, insofern nach jenen der Aether fast gar nicht, nach diesen fast vollständig mit der Erde fortschreitet, und es muss diese Frage daher noch für offen gelten.

Schliesslich sei auf die zahlreichen theoretischen Diskussionen hingewiesen, welche diese Frage theils an sich, theils hinsichtlich ihrer Folgen für die Theorie der Aberration des Lichtes, der Bewegung des Sonnensystems durch den Weltraum u. s. w. hervorgerufen hat[1]). F. AUERBACH.

Geometrische Optik.

Einleitung.

Die Gesammtheit der uns bekannten Erscheinungen des Lichts hat zu der Annahme geführt, dass das Licht in transversalen Schwingungen eines sehr feinen, sehr elastischen und überall verbreiteten Mediums, des sogen. Lichtäthers bestehe. Auf Grund dieser Vorstellung gelingt es, von den meisten Erscheinungen des Lichts ziemlich vollständig Rechenschaft zu geben.

Es giebt aber ein grosses Gebiet von Lichterscheinungen — und darunter befinden sich gerade solche in grosser Zahl, welche sich im gewöhnlichen Leben am häufigsten darbieten, und eine weitgende praktische Anwendung gefunden haben — die in ihrem wesentlichen Theile nicht von der genannten näheren Natur des Lichts abhängen, sondern die auf gewissen allgemeineren Eigenschaften der Lichtbewegung beruhen, — Eigenschaften, die an sich sehr einfach sind und die auch für sich, ohne Berücksichtigung, ja selbst ohne Kenntniss der

---

[1]) STOKES, Phil. Mag. (3) 27, pag. 9. 1846 u. s. w. (Nachweis, dass die Fortpflanzung des aus dem Weltraume kommenden Lichts in der Atmosphäre krummlinig werden muss, und somit die gewöhnliche Erklärung der Aberration nicht mehr gilt.) — CHALLIS, ebenda, pag. 321. (Einwände dagegen, die STOKES widerlegt.)

FAYE, Compt. rend. 49, pag. 870. (Einwände gegen FIZEAU.) — TESSAN, ebenda, pag. 980. (Widerlegung derselben). —

S. TOLVER PRESTON, Nat. 19, pag. 178. 1879. (Ohne Kenntniss der Thatsachen und der Literatur geschrieben.)

KLINKERFUES, Versuche üb. d. Bew. d. Erde u. d. Sonne im Aether, Gött. Nachr. 1870, pag. 226. (Von KETTELER in der oben citirten Abh. z. Thl. widerlegt.)

VELTMANN, POGG. Ann. 150, pag. 497. 1870. (Ueber die FRESNEL'sche Hypothese.)

PUSCHL, Wien. Ber. (2) 68, pag. 446. 1874. — Rep. d. Phys. 10, pag. 171. 1874. (Ersatz der Mitbewegung des Aethers durch die Bewegung der Körpermolekeln, wobei nahezu ebenfalls die FRESNEL'sche Beziehung herauskommt).

GOUY, Ann. Chim. Phys. (6) 16, pag. 262. 1889. (Allgem. Ableitung der Gleichung für Lichtstrahlen u. s. w.)

näheren Natur des Lichts zur Grundlage der hierher gehörigen Untersuchungen genommen werden können und — in früheren Zeiten ebensowohl, als in der Gegenwart — mit Erfolg genommen worden sind.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Lichtbewegung lassen sich aus den Grundvorstellungen über die Natur desselben unter Zuhilfenahme einiger durch die Erfahrung dargebotener Hilfsprinzipien mathematisch streng ableiten und dadurch tiefer begründen. Sie lassen sich aber auch ohne weiteres als durch die Erfahrung gegeben ansehen und zum selbständigen Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen.

Es sind dies die Gesetze 1) der geradlinigen Ausbreitung des Lichts; 2) der Unabhängigkeit der Theile eines Lichtbündels von einander; 3) das Gesetz der regelmässigen Zurückwerfung, Spiegelung, Reflexion und 4) das Gesetz der regelmässigen Brechung (Refraction) des Lichts.

Alle vier Gesetze beziehen sich nur auf die Richtung der Lichtbewegung, also eine rein geometrische Eigenschaft derselben. Die Anwendung dieser Gesetze auf die in der Natur sich darbietenden oder künstlich herstellbaren Combinationen bildet den Gegenstand der »geometrischen Optik«.

Die eigentlich so genannte geometrische Optik erstreckt sich jedoch nicht auf alle Erscheinungen des Lichts, soweit in ihnen blos Richtungsänderungen in Frage sind, sondern sie beschränkt sich auf diejenigen Fälle, in welchen die wirkenden Medien isotrop, unkrystallinisch, sind.

Wenn nun aber auch die genannten Gesetze genügen, um auf ihnen ein sehr vollständiges System aufzubauen, d. h. ein solches, welches die beobachtbaren Erscheinungen sehr annähernd wiedergiebt, und gestattet, noch nicht beobachtete Erscheinungen richtig vorauszusagen, so werden wir doch der näheren Vorstellungen über die Natur des Lichts und deren Consequenzen auch im Verfolge des hier ins Auge gefassten beschränkteren Untersuchungsgebietes nicht entrathen können. Es hat öfters zu Irrthümern geführt, dass man die Gesetze der geometrischen Optik über diejenigen Grenzen hinaus, in welchen sie durch die Erfahrung bestätigt oder durch die strengere Theorie gestützt waren, anwandte; namentlich eine vollständige Theorie der optischen Instrumente und der meteorologisch-optischen Erscheinungen lässt sich nur durch Rückgreifen auf die Begriffe der Undulationstheorie gewinnen; und es wird in jedem Falle gut sein, sich zu vergewissern, wie weit die aus den einfachen Vorstellungen gezogenen Folgerungen in der strengen Theorie noch eine Stütze finden, wenn man die geometrische Optik als physikalische Disciplin und nicht als ein blosses Uebungsfeld der Mathematik behandeln will.

Diesem Standpunkte gemäss sollen des weiteren auch im Folgenden ausser den allgemeinen Beziehungen, welche aus den Grundgesetzen abgeleitet worden sind, nur solche Consequenzen derselben behandelt werden, welche entweder zum Verständniss wichtiger Naturerscheinungen oder dem der optischen Instrumente nöthig sind. —

Das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in geraden Strahlen ist ebensowenig, als eines der anderen Grundgesetze der Physik, aus einzelnen, eigens hierzu angestellten Beobachtungen geschlossen worden, noch ist es durch solche überhaupt streng beweisbar. Es nimmt seine Gewissheit, gerade so wie die Grundgesetze anderer physikalischer Disciplinen, aus der Uebereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung. Ueberall im gewöhnlichen Leben, und in aller Strenge in der praktischen Astronomie und Geoäsie, wird auf die unbedingte Giltigkeit dieses Gesetzes gebaut und wird umgekehrt

die Geradlinigkeit einer Strecke aus der Thatsache der Bewegung des Lichtes in ihr gefolgert; und stets haben sich die hieraus weiter gezogenen Schlüsse mit der ursprünglichen Annahme vollkommen vereinen lassen. Diese zahllosen, zum Theil so kritischen Bestätigungen des Gesetzes haben demselben eine Sicherung und allgemeine Annahme verschafft, wie kaum einem anderen Naturgesetze.

Trotzdem ist, wie seit hundert Jahren wohlbekannt ist, das Gesetz nicht unbedingt, und in der gewöhnlich ausgesprochenen Form überhaupt nicht richtig.

Wenn man daran geht, es einer möglichst strengen Prüfung durch das Experiment zu unterziehen; wenn man, um es als Elementargesetz nachzuweisen, möglichst mit den elementaren Bestandtheilen des Lichts, den »Strahlen« selbst zu operiren versucht, also durch Schirme mit sehr engen Oeffnungen aus einem grösseren Lichtbündel solche »Strahlen« heraushebt und ihren Weg verfolgt, so bemerkt man, dass die Ausbreitungsrichtung des Lichts desto unbestimmter, vieldeutiger, und damit die Existenz isolirt darstellbarer »Lichtstrahlen« überhaupt desto zweifelhafter wird, je mehr man sie zu erreichen strebt. Denn je enger man die fragliche Oeffnung macht, desto weiter breitet sich das durch sie getretene Licht, statt in einer einzigen Richtung weiterzugehen, in ein Büschel von variabler Helligkeit aus; einen je kleineren Schirm man in den Weg eines Lichtbündels stellt, desto weniger ist der auf einem gegenübergestellten Schirm entworfene Schatten dem schattenwerfenden Körper blos geometrisch ähnlich, desto mehr tritt an die Stelle dessen, was wir als Schatten zu bezeichnen gewohnt sind, eine ganz andere Erscheinung; und ähnliches mehr. Wir brauchen uns bei einer näheren Beschreibung solcher Versuche nicht aufzuhalten; denn wir gelangen auf diesem Wege zu nichts anderem, als zu dem, was als ein besonderes, wichtiges Erscheinungsgebiet der Optik Diffraction, Beugung des Lichts genannt und genau studirt worden ist. (S. das betreffende Capitel des vorliegenden Werkes.)

Trotzdem hiernach das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in Strahlen nur eingeschränkte Giltigkeit hat, verliert es doch kaum an Bedeutung, auch auf dem Boden der strengeren Theorie des Lichts, welche die oben erwähnten Erscheinungen völlig zu erklären vermag. Jene Theorie[1]) zeigt vielmehr, übereinstimmend mit der Erfahrung, dass bis zu einem erheblichen Grade der Annäherung in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, d. h. überall da, wo wir es mit Lichtbüscheln von endlichem Querschnitt zu thun haben, diese Büschel sich in vielen Beziehungen so verhalten als seien sie aus einzelnen Strahlen zusammengesetzt, welche sich unabhängig von einander in geraden Linien fortbewegen. Nur in den, meist ziemlich subtilen Fällen, welche in der Lehre von der Interferenz und Beugung des Lichts betrachtet werden, und auch da oft nur bei besonderer Aufmerksamkeit, sind die Ausnahmen von dieser Regel wahrzunehmen, wiewohl die Regel in aller Strenge niemals gilt.

Auch an den Grenzen von Büscheln endlichen Querschnitts verhält sich das Licht abweichend von den Grundgesetzen der geometrischen Optik; aber alsdann ist die Menge des abweichenden Lichts verschwindend gegen die des, in diesem Sinne, regulären, kann also gegenüber jener für viele Zwecke vernachlässigt werden.

Die anderen beiden Grundgesetze der geometrischen Optik sind, wie die strenge Theorie des Lichts und ebensolche experimentelle Prüfung zeigen, bis

---

[1]) S. z. B. Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzber. Berl. Ak. 1882; Wied. Ann. 18, pag. 663 (1883).

zu demselben Grade der Annäherung richtig, wie die beiden ersten, das heisst in allen Fällen wo, und in so weit, man gemäss den vorliegenden äusseren Bedingungen berechtigt ist, überhaupt von »Strahlen« zu sprechen. Hiervon weiter unten mehr.

Wiewohl also die angenommenen Grundgesetze der geometrischen Optik nicht unbedingt richtig sind, und zum Theil sogar keine eigentlich reale Bedeutung haben, so verliert doch diese Disciplin nicht ihre Berechtigung; vielmehr hat sie eine solche immer noch auch in dem strengeren Systeme der Wissenschaft als formale Unterdisciplin, welche gestattet, aus wesentlich einfacheren und der gemeinen Erfahrung zugänglicheren Annahmen als die strenge Theorie, einen grossen und praktisch sehr wichtigen Theil von deren Resultaten abzuleiten, mit wesentlich geringeren Mitteln, als jene es vermag und doch mit einer, für sehr viele Fälle hinreichenden Annäherung an die Wirklichkeit.

Es wurde schon oben daran erinnert, dass die Wissenschaft — und dies mit sehr gutem Rechte und bestem Erfolge — auch bei anderen Disciplinen der Physik ganz ebenso verfährt. So sind wir gegenwärtig von der Discretheit der Materie vollkommen überzeugt, fahren aber doch fort, in einer grossen Zahl von Untersuchungen die Continuität derselben anzunehmen. So geht neben den Forschungen nach dem tieferen Wesen der Elektricität die alte, auf der Annahme der beiden elektrischen »Fluida« basirte Elektrostatik unbeirrt ihren Weg weiter. So ist in noch grösserer Aehnlichkeit mit dem vorliegenden Fall, die Elektrodynamik Ampère's auf die Annahme von Elementarwirkungen gegründet, von denen Niemand glaubt und ebensowenig postulirt, dass sie als solche Realität hätten — genau ebenso wie von den »Lichtstrahlen«. Aber wiewohl Strom»elemente« und deren Wirkung auf einander niemals beobachtet worden sind, so ist die Einführung ihres Begriffs und die Annahme eines Wirkungsgesetzes von solchen dennoch eine äusserst fruchtbare gewesen, in so fern sie gestattet, die Wirkung endlicher geschlossener Ströme auf einander, mit einer, ebenfalls in vielen Fällen sehr weitreichenden Annäherung an die beobachtbare Wirklichkeit zu berechnen.

Eine gleiche didactische und methodische Berechtigung, wie die Loslösung der geometrischen Optik von der physikalischen Lehre des Lichts hat innerhalb dieser noch die weitere Scheidung in phoronomische Optik (Undulationstheorie) und mechanische Optik (Theorie des Aethers).

Verhalten des Lichts an der Grenze zweier verschiedener Medien.

So lange sich das Licht in einem völlig homogenen Mittel bewegt, thut es dies, mit den angegebenen Einschränkungen in geradlinigen Strahlen. Gelangt es an die Grenze eines Mittels von anderer optischer Beschaffenheit, so spaltet es sich in zwei Theile, die sich von der getroffenen Stelle der Grenzfläche aus mit, im allgemeinen plötzlich, veränderter Richtung fortbewegen:

a) Ein Theil des Lichts bleibt im ersten Medium — zurückgeworfenes, reflectirtes Licht.

b) Der übrige Theil des Lichts geht in das zweite Medium über und pflanzt sich zunächst in ihm fort — gebrochenes Licht.

Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, dass diese scharfe Scheidung niemals eintritt. Auch der Theil des Lichtes, welcher in das erste Mittel zurückkehrt, war vorher bis zu einer gewissen, sehr geringen Tiefe in das zweite Mittel eingedrungen. Die natürlichen Farben der Körper haben in der bei dieser Gelegenheit vor sich gegangenen selectiven Absorption des Lichts ihren Entstehungsgrund, wie an anderer Stelle auseinandergesetzt wird (s. Absorption). In welchem Maasse und bis zu welcher Tiefe ein solches Eindringen des sogen. reflectirten

Lichtes stattfindet, hängt ausser von der Natur der aneinandergrenzenden Mittel, auch noch in hohem Grade von der Beschaffenheit der Grenzfläche ab; z. B. davon, ob der zweite Körper in festem oder etwa pulverisirtem Zustande vorliegt, ob seine Oberfläche im ersteren Falle rauh oder polirt ist. (S. Artikel Diffusion des Lichts.)

Auf die nähere Natur der hier in Frage stehenden Vorgänge kann nur in der physikalischen Theorie des Lichts eingegangen werden.

Die Richtung des reflectirten Lichts hängt nach dem dritten Grundgesetz der geometrischen Optik in einer bald näher anzugebenden Weise nur von der Neigung des einfallenden Lichtstrahls gegen das von ihm getroffene Element der Grenzfläche ab. Und in der That, wenn diese Fläche mathematisch regelmässig und vollkommen glatt polirt ist, so findet die Bewegung des Lichts fast ausschliesslich in den, jenem Gesetze entsprechenden Richtungen statt. Die Reflexion an solchen Flächen heisst daher regelmässige Reflexion.

Je mehr aber die Trennungsfläche unregelmässig ist, in der Art, dass ihre Elemente schon auf kleinem Gebiete oft und stark ihre Richtung ändern, d. h. je mehr die Fläche rauh, matt ist, desto weniger findet jenes Grundgesetz auf die Reflexion des Lichtes an ihr Anwendung. Die Anordnung der Elemente ist bei solchen Flächen wohl nie näher angebbar, so dass für eine Berechnung ihrer Wirkung nach dem Reflexionsgesetz schon die nöthige Unterlage fehlt. Es ist dann aber auch die Grösse der verschiedentlich wirkenden Flächenstücke eine so geringe, dass die Regeln der geometrischen Optik, wie in der Einleitung hervorgehoben, überhaupt nicht ohne weiteres auf das Verhalten des Lichts an ihnen anwendbar sind. Endlich wird in einem solchen Falle, wie leicht ersichtlich, das in eine geringe Tiefe des zweiten Mittels eingedrungene Licht mit wirksam sein müssen und die Erscheinung beeinflussen. Von dem, z. B. auf eine ebene Fläche in einer Richtung auffallenden Licht werden dann Theile, in stetig variirender Intensität, nach allen Richtungen zerstreut — diffuse Reflexion.

Gerade durch den Umstand, dass die diffus reflectirenden Flächen sich in ihren kleinsten Theilen verschieden gegen das Licht verhalten, werden uns diese, und damit die Fläche selbst, als discrete Ausgangspunkte von Lichtbewegungen sichtbar, während durch Reflexion an vollkommen glatten Flächen — wie wir später sehen werden — nur Bilder der äusseren, ihrerseits entweder selbst leuchtenden oder diffus reflectirenden Gegenstände entstehen, die reflectirenden Flächen selbst aber durchaus unsichtbar bleiben. In der Wirklichkeit wird diese Unsichtbarkeit freilich meist durch die unvermeidlichen Kratz- oder Sprungstellen, Stäubchen u. dergl. mehr oder minder aufgehoben. Denn in der Wirklichkeit giebt es keine Grenzflächen, die dem einen oder dem anderen Falle vollkommen entsprechen, so dass wir es immer nur mit einer mehr oder minder grossen Annäherung an das im Idealfalle stattfindende Verhalten zu thun haben.

In Bezug auf das gebrochene Licht gelten zum Theil dieselben Bemerkungen, wie sie in Bezug auf das reflectirte eben gemacht wurden. Wenn die Grenzfläche der beiden Medien glatt ist, so hängt die Richtung des gebrochenen Lichts gemäss dem bald anzugebenden vierten Grundgesetz der geometrischen Optik nur von der Richtung des einfallenden Strahls gegen das getroffene Flächenelement und der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien ab. Ist die Trennungsfläche aber matt, rauh, so wird das in das zweite Medium eindringende Licht diffus gebrochen, in ganz analoger Weise, wie das in das erste Medium zurücktretende Licht diffus reflectirt wird.

Innerhalb des zweiten Mediums kann das Licht verschiedene Modifikationen erfahren. Stets geht ein Theil des Lichts als solches verloren und wird in andere

Formen von Energie — Wärme, Electricität, chemische Energie — verwandelt, absorbirt (s. Artikel Absorption). Oft ändert das Licht auch nur seine Art, Farbe, innerhalb des neuen Mittels, und bietet dann die interessanten Erscheinungen der Fluorescenz (s. diese) dar. Jenachdem durch eine Schicht von gegebener Dicke ein grösserer oder geringerer Theil des auf sie gefallenen Lichtes hindurchgelassen wird, nennt man den Körper mehr oder weniger »durchsichtig«. Ein Mittel kann für verschiedene Farben verschiedene Absorption und daher auch verschiedenen Grad der Durchsichtigkeit besitzen.

Wenn das Medium, in welchem sich das Licht bewegt, vollkommen homogen ist, so kann man durch hinreichend dünne Schichten desselben andere Objecte, wenn auch in verringerter Helligkeit, so doch in vollkommen unverminderter Schärfe sehen. Medien, welche in homogener Masse Partikel anderer optischer Eigenschaft zerstreut enthalten, wie dies z. B. bei der Milch, dem Blut, dem Porzellan, der feuchten atmosphärischen Luft der Fall ist, heissen trübe Medien. Die in ihnen vorhandenen Partikel verursachen eine innere diffuse Reflexion[1]), deren Natur nur nach den Vorstellungen der physikalischen Lichttheorie näher definirbar ist. Im durchgehenden Lichte lassen diese trüben Medien die äusseren Gegenstände nur unscharf erkennen, weshalb sie auch durchscheinend genannt werden. Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass es in der Natur absolut durchsichtige Medien nicht giebt, sondern nur ein gradueller Unterschied der Trübheit vorhanden ist, welcher allerdings so gross ist, dass er zu einer Verschiedenheit der allgemeinen Bezeichnung vollauf berechtigt. Ebenso ist bekannt, dass es in der Natur keine ganz undurchsichtigen Mittel giebt, sondern in hinreichend dünnen Schichten alle Medien durchsichtig oder wenigstens durchscheinend werden. Doch beziehen sich diese Bemerkungen schon nicht mehr auf das Verhalten des Lichts an der Grenze zweier Medien, sondern auf seinen Verlauf innerhalb je eines Mittels.

In dem Folgenden werden alle Medien, welche das Licht trifft, als vollkommen durchsichtig, homogen, und als durch vollkommen glatte Flächen begrenzt angenommen, oder vielmehr es wird das Verhalten des Lichts an ihnen nur in so weit, als es von jenen Eigenschaften bedingt ist, untersucht.

Entsprechend dem Zwecke und Character der geometrischen Optik wird von allen Eigenschaften des Lichtes, welche nicht zu Aenderungen geometrischer Verhältnisse Anlass geben, in dem Vortrag derselben abgesehen. Also wird keine Rücksicht darauf genommen, ob das Licht von einem selbstleuchtenden oder diffus strahlenden Körper ausgeht, oder von Brennpunkten, die erst durch besondere optische Veranstaltungen aus jenen hervorgegangen sind; ferner ob das Licht intensiv oder schwach, ob natürliches oder in irgend einem Polarisationszustande befindliches ist. Hingegen liegt es ganz im Sinne der geometrischen Optik, als einer Hilfsdisciplin der physikalischen Optik, und einer selbst physikalischen Disciplin, nicht den Schnittpunkt irgend welcher »Strahlen« verschiedenen Ursprungs als »Brennpunkt« des betreffenden Büschels aufzufassen, sondern als solchen nur den Vereinigungspunkt cohärenter Strahlen gelten zu lassen, d. h. von Strahlen, welche ursprünglich von ein und demselben leuchtenden Punkte ausgingen; oder — wie die Definition des Lichtstrahls in der Aus-

[1]) RAYLEIGH, Illumination in a Fog., Phil. Mag., pag. 443. 1885; CHWOLSON, Photometrische Untersuchungen über die innere Diffusion des Lichts. Mél. phys. et chim. 12, pag. 475. 1886, und Grundzüge einer mathem. Theorie ders., ibid. 13, pag. 83. 1889, abgedruckt in EXNER's Repert. 23, pag. 139 u. 211. 1878; 26, pag. 364 u. 385. 1890.

drucksweise der Wellentheorie lautet — nur solche, welche Normalen derselben Wellenfläche sind was wir schon hier betonen wollen.

Um der Sicherheit der Terminologie willen stellen wir den weiteren Ausführungen folgende Definitionen voran.

Das von irgend einer — gleichgiltig ob selbst- oder indirekt leuchtenden — Fläche sich ausbreitende Licht denken wir uns zusammengesetzt aus den Antheilen, die von je einem Element der Fläche ausgehen. Das von einem solchen Flächenelement ausgehende Licht bildet ein physikalisches Lichtbüschel.

Das in Oeffnungswinkel und Querschnitt kleinste physikalische Büschel, welches praktisch noch von dem übrigen Licht getrennt und isolirt weiteren Veränderungen unterworfen werden kann, ist ein physikalischer Lichtstrahl (Newton).

In der streng geometrischen Optik bildet man die Fiction, dass das Licht von den einzelnen Punkten einer Fläche ausgehe. Dieser Punkt heisst dann der Brennpunkt des Lichtbüschels oder kurzweg der leuchtende Punkt. Wenn die Winkelöffnung und der Querschnitt des Büsches verschwindend klein ist, so nennt man das Büschel ein Elementarbüschel. (Wo nicht die entgegengesetzte Annahme ausdrücklich gemacht ist, denken wir uns die Form des Elementarbüschels als die eines geraden Kegels bezw. Cylinders). Die Büschel denkt man sich als Aggregate von Lichtstrahlen, welche letztere als mathematische gerade Linien behandelt werden.

Jeder Strahl eines Elementarbüschels kann als seine Axe angesehen werden.

Des näheren oft, und bei endlichen Büscheln durchaus heisst Axe oder Hauptstrahl des Büschels derjenige Strahl, welcher der, durch den Brennpunkt gehenden Schwerpunktslinie des Büschels — dieses als homogenen Körper gedacht — entspricht; also bei cylindrischen und conischen Büscheln die geometrische Axe, Symmetrielinie des Kegels bezw. Cylinders. Die Axe ist der Repräsentant der Richtung des Büschels.

Ein Büschel heisst convergent oder divergent, je nachdem wir es an einer Stelle betrachten, die im Sinne der gedachten Lichtbewegung vor oder hinter dem Vereinigungspunkte der Strahlen, dem Brennpunkte, liegt. Der Grad der Con- oder Divergenz von Büscheln wird durch ihren Oeffnungswinkel, bei Elementarbüscheln durch ihre relativen Oeffnungswinkel, in der Ebene oder im Raume, gemessen.

Der Brennpunkt eines Büschels heisst reell, wenn die Strahlen sich in Wirklichkeit in ihm schneiden oder nur durch die Dazwischenkunft eines fremden Körpers daran gehindert werden, dies in ihrem weiteren Verlaufe zu thun, d. h. wenn sie in der Richtung ihrer Bewegung verlängert, sich in ihm schneiden würden. Der Brennpunkt heisst virtuell, wenn die Strahlen nur in ihrer Verlängerung nach rückwärts — entgegen der Lichtbewegung — sich in ihm schneiden.

Convergente Büschel können daher nur reelle Brennpunkte haben; divergente Büschel aber beide Arten. Ursprünglich ist ein Büschel immer divergent und sein Brennpunkt reel. Durch die Wirkung der optischen Instrumente oder sonstige Reflexionen und Brechungen kann es in ein Büschel der anderen beiden Arten verwandelt werden.

Der Raum, in welchem sich das Licht bewegt, ganz gleich ob derselbe mit wägbarer Materie erfüllt ist, oder nicht, heisst das Medium oder Mittel. Der Brennpunkt eines Büschels wird stets in demjenigen Mittel liegend angenommen in welchem thatsächlich die Strahlen verlaufen, deren reeller oder virtueller Ver-

einigungspunkt er ist, auch wenn dieser dem Orte nach in ein anderes Mittel fällt.

Der Unterschied zwischen reellen und virtuellen Brennpunkten wird nur wegen der praktischen Consequenzen, die er mit sich bringt, statuirt und festgehalten.

Wenn durch irgend welche optischen Mittel die von einem leuchtenden Punkte ausgegangenen Strahlen zum Theil wieder in einen Punkt vereinigt werden, so nennt man diesen das optische Bild des ursprünglichen Punktes. Je nachdem das Bild ein reeller oder virtueller Brennpunkt ist, heisst es selbst reell oder virtuell. Die zur Vereinigung gebrachten Strahlen können dabei ein endliches oder auch ein unendlich dünnes (Elementar-) event. auch nur ebenes Partialbüschel bilden.

Virtuelle Brennpunkte geben nicht unmittelbar Bilder z. B. auf einer Tafel, sondern müssen durch optische Mittel erst in reelle verwandelt werden (z. B. durch das Auge). Diese reellen Brennpunkte haben dann gemäss demselben Satze wieder die Eigenschaft, die Strahlen mit gleicher Phase zu vereinigen, sodass sie nunmehr in der That Bilder jener virtuellen geben.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege (pag. 23) können Objekt und Bildpunkt ihre Function vertauschen, d. h. jeder Bildpunkt als Objekt Strahlen aussendend in den Richtungen, in welchen solche in ihm zur Vereinigung kamen, wird durch dieselben optischen Mittel genau im vorherigen Objektpunkt abgebildet. Statt zu sagen, ein Punkt sei das Bild eines anderen, nennt man daher beide in Bezug auf die betreffenden optischen Mittel »conjugirte« Punkte.

Was von einem einzelnen Punkte gilt, trifft auch auf mehrere zu, welche ein mehr oder weniger ausgedehntes Objekt und Bild formiren.

Ein Unterschied zwischen einem selbstleuchtenden Objekt und einem optischen Bild ist der, dass ersteres von allen Seiten, letzteres aber im allgemeinen nur innerhalb beschränkter Raumgebiete sichtbar ist.

Historische Anmerkung. EUCLIDES (300 v. Chr.), dem Begründer der wissenschaftlichen Geometrie, ist auch die erste Grundlegung der geometrischen Optik zuzuschreiben. Er nimmt die Lichtstrahlen geradlinig an, aber, ebenso wie die griechischen Philosophen, als vom Auge ausgehend, und zwar in gleichen Entfernungen von einander. Auf dieser Grundlage entwickelt er die Perspektive. In seiner »Katoptrik« folgert er das richtige Reflexionsgesetz ganz treffend aus der symmetrischen Gleichheit von Objekt und Bild bei ebenen Spiegeln. HERO von Alexandrien 200 (?) v. Chr. leitete dasselbe Gesetz aus dem »Oeconomie-Princip« der Natur ab. Aber erst der Araber ALHAZEN (um 1100 n. Chr.) stellte fest, dass das Licht von den gesehenen Gegenständen ausgehe und bestimmte das Reflexionsgesetz näher durch die Feststellung, dass die Ebene, in welcher der einfallende und reflectirte Strahl verliefen, senkrecht auf der reflectirenden Ebene stünden. (ALHAZENI, Opticae thesaurus libri VII; item VITTELLONIS, libri X, Basel 1572). Die Anfänge der Lehre von der Brechung des Lichts (»Dioptrik« von KEPLER genannt, als Pendant zu der »Katoptrik« des Euclid) sind auf PTOLEMÄOS zurückzuführen (2. Jahrhundert n. Chr.), welcher Refractionstafeln von anerkennenswerther Genauigkeit veröffentlichte. (GOVI, L'Ottica di Claudio Tolomeo, Turin 1885). Nächst ihm wurde die geometrische Optik, nach fast tausendjährigem Stillstand, erst wieder von den Arabern zu studiren begonnen (ALHAZEN). Durch diese und die späteren, ROGER BACON, MAUROLYCUS, VITTELIO, PORTA und namentlich KEPLER wurden manche qualitative Eigenschaften der Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen gefunden, das Entstehen der Bilder im Auge, sowie die Ursache der Kurz- und Weitsichtigkeit angegeben, die sphärische Aberration entdeckt und die Grundzüge einer Theorie der Fernröhre geliefert. CARTESIUS hat dann neben werthvollen Specialuntersuchungen z. B. über Regenbögen, dem von WILLIBROD SNELLIUS (Anfang des 17. Jahrhunderts) gefundenen Brechungsgesetze die jetzt übliche bequemere Form gegeben (Dioptrice, enth. in Principia philosophiae. Amstelod 1672) und NEWTON endlich erwies, dass der Brechungsindex caet. par. eine Function der Farbe sei.

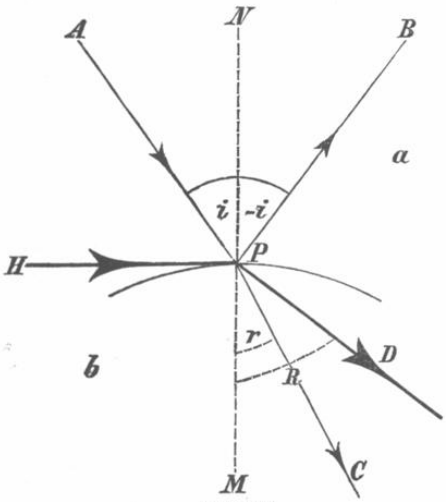
An einer auf neueren Forschungen beruhenden pragmatischen Geschichte der Anfänge der Optik fehlt es. Sehr verdienstlich ist auch jetzt noch als Quellenwerk WILDE, Geschichte der Optik. Berlin 1838—43.

Grundgesetze.

Die Richtung, welche der regelmässig zurückgeworfene und der ebenso gebrochene Theil des Lichts im Verhältniss zu dem einfallenden einschlagen, wird durch die folgenden Gesetze bestimmt (drittes und viertes Grundgesetz der geometrischen Optik).

Definitionen. Der spitze Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der im Einfallspunkte auf der Trennungsfläche der beiden Medien errichteten Normalen, — der Einfallsnormalen, — bildet heisst der Einfalls-, Incidenzwinkel. Der spitze Winkel, welchen der reflectirte bezw. gebrochene Strahl mit derselben Normalen bildet, heisst der Reflexions- bezw. Brechungswinkel. Die Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale liegen heisst die Einfallsebene. Es gilt dann:

1) Der reflectirte und der gebrochene Strahl liegen in der Einfallsebene und auf der entgegengesetzen Seite des Einfallslots, wie der einfallende Strahl.



(Ph. 299.)

2) (Grundgesetz der Reflexion.) Der reflectirte Strahl bildet mit dem Einfallslot den gleichen Winkel, wie der einfallende Strahl: $< APN = BPN = i$ (Fig. 299).

3) Grundgesetz der Brechung. Der Sinus des Brechungs-Winkels steht zu dem Sinus des Einfallswinkels in einem Verhältniss, welches nur von der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien a und b und der Art (Wellenlänge) des wirksamen Lichts, aber nicht von der Grösse des Einfallswinkels abhängig ist: $\sin CPM / \sin APN = \sin r / \sin i = n_{a,b} = const\ (i)$.

Die Verhältniszahl $n_{a,b}$ heisst der Brechungsindex des Mediums a gegen das Medium b für die betreffende Lichtart.

Ueber die erfahrungsmässige Begründung dieser Grund-Gesetze gilt das in der Einleitung gesagte. Die Ableitung derselben aus den Voraussetzungen der physikalischen Theorie des Lichts wird bei dem Vortrag dieser an späterer Stelle dieses Werkes gegeben. Zur Demonstration des Reflexions- und Brechungsgesetzes sind vielfach Apparate construirt worden, s. u. A. TYNDALL, Das Licht, pag. 12 u. 17. WEINHOLD, Physik. Demonstr. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. an versch. Stellen. Die genaueste Bestätigung hat das Reflexionsgesetz durch astronomische Beobachtungen erfahren, bei welchen die Höhe eines Sterns einerseits direkt durch Einstellung auf ihn mit dem Meridianinstrumente, andererseits indirekt durch Messung der Tiefe seines Spiegelbildes in einem Quecksilberhorizont bestimmt wird. Die auf diese Art beobachtete Tiefe wird immer genau der Höhe gleich gefunden, bei jedem Betrage der letzteren. Dergleichen Messungen sind aber einer sehr grossen Genauigkeit fähig, so dass sie eine ebenso genaue Prüfung der Consequenzen des fraglichen Gesetzes repräsentiren.

Das Brechungsgesetz wird am schärfsten auf die Probe gestellt durch Bestimmungen des Brechungsverhältnisses selber (s. das betr. Cap.) und durch die Uebereinstimmung der unter seiner Annahme berechneten optischen Constructionen, wenn dieselben exakt ausgeführt sind, mit der Rechnung.

In Bezug auf letzteres Gesetz hat die Erfahrung weiterhin zu erkennen gegeben, dass — was bei der Reflexion eo ipso statt hat — der einfallende und der gebrochene Strahl stets mit einander vertauscht werden können, so dass, wenn irgendwo ein unter dem Winkel i im Medium a einfallender Strahl unter dem Winkel r in das Medium b gebrochen wird, derselbe unter dem Einfallswinkel r im Medium b einfallend genau unter dem Winkel i in das Medium a gebrochen würde. Mit anderen Worten: wenn $n_{ab} = \sin r / \sin i$ der Brechungsexponent des Mediums a gegen das Medium b ist, so ist $n_{ba} = \sin i / \sin r = 1/n_{ab}$ der Brechungsexponent des Medium b gegen das Medium a; also $n_{ab} = 1/n_{ba}$.

Wir schliessen hieraus: wenn ein Strahl nach irgend welchen Reflexionen und Brechungen so auf eine Fläche fällt, dass er senkrecht reflectirt wird, so durchläuft er genau seinen vorherigen Weg, nur in umgekehrter Richtung — Princip der Umkehrbarkeit der Strahlenwege. —

Und endlich hat die Messung zahlreicher Brechungsverhältnisse gezeigt, dass das Brechungsverhältniss n_{ab} eines Mediums a gegen b vollständig besimmt ist, wenn die Brechungsverhältnisse n_{ac}, n_{bc} der Medien a und b gegen irgend ein anderes Medium c bekannt sind, und zwar, dass $n_{ab} = \frac{n_{ac}}{n_{bc}}$. Der relative Brechungsexponent eines Mediums a gegen das Medium b ist also gleich dem Verhältniss der relativen Brechungsexponenten der Medien a und b gegen ein drittes Medium c. Hierdurch wird die Zahl der möglichen Brechungsexponenten, welche sonst gleich der Zahl der Combinationen aller Medien mit einander wäre, in eindeutiger Weise auf eine einzige Reihe zurückgeführt, nämlich auf die der Brechungsexponenten aller Medien gegen ein einziges. Als das letztere wird vornehmlich der leere Raum genommen. Die Brechungsverhältnisse gegen den leeren Raum heissen darum absolute, oder Brechungsindices schlechthin. Das Vacuum selbst hat gemäss dieser Bestimmung den Brechungsindex 1; die bekannten durchsichtigen Medien haben alle Brechungsindices > 1; nur einige Metalle, in Prismen von sehr geringer Dicke untersucht (Kundt) haben Indices < 1 ergeben. (S. später: Bestimmung des Brechungsexponenten.)

Vermöge dieser Beziehungen lässt sich die Gleichung, welche das Brechungsgesetz ausspricht, in einer symmetrischen Form schreiben, welche wir künftig oft anwenden werden. Wir haben $\sin r = n_{ab} \cdot \sin i$. Da nun $n_{ab} = n_a / n_b$ ist, wenn Raum n_a, n_b die Brechungsexponenten der Medien a und b gegen den leeren wir mit bezeichnen, so wird

$$n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r,$$

oder das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des Winkels (Strahl-Normale) ändert sich bei je einer Brechung nicht. Wir wollen dieses Produkt die »optische Invariante« nennen.

Man erkennt ferner, dass die Reflexion durch dieselbe Gleichung wie die Brechung dargestellt wird, indem für sie nur $n_a : n_b$ den speciellen Werth -1 erhält. Wir werden daher in dem Folgenden oft nur die Probleme der Brechung direkt behandeln und das für die Reflexion geltende Resultat ohne weiteres aus jenem durch die Substitution $n_a : n_b = -1$ gewinnen.

Dispersion des Lichts. Wie schon bemerkt hängt die durch Brechung herbeigeführte Richtungsänderung des Lichts an der Grenze zweier Medien, also

der relative Brechungsexponent derselben nicht nur von der Beschaffenheit dieser Medien ab (für welche er umgekehrt ein wesentliches Charakteristikum ist) sondern auch von der Art (Farbe, Wellenlänge) des wirksamen Lichts; n ist eine Function von λ. Die Natur dieser Function, soweit sie aus den vorhandenen Beobachtungen und der Theorie des Lichts hat erschlossen werden können, wird in einem eigenen späteren Abschnitt (s. Dispersionstheorie) eingehender discutirt werden. Vorläufig genügt uns die von NEWTON zuerst erfahrungsmässig festgestellte Thatsache an sich. Wie eine solche Verschiedenheit der Brechungsexponenten für verschiedene Farben in Erscheinung treten muss, können wir auf Grund des bisher Abgeleiteten schon angeben. Denn ist der Brechungsexponent eines Mediums gegen den leeren Raum (oder auch gegen ein anderes Medium) für eine gewisse Farbe $= n$, so gilt für diese $\sin i = n \cdot \sin r$. Ist der Brechungsexponent für eine benachbarte Farbe (Wellenlänge) $= n + dn$, so wird ein Strahl von der betreffenden Farbe, welcher unter demselben Winkel i einfällt, wie der erste, unter einem Winkel $r + dr$ gebrochen, welcher von r verschieden ist, gemäss

$$n \cdot \cos r \cdot dr + \sin r \cdot dn = 0$$

oder

$$dr = -(dn/n)\, tg\, r.$$

Unter demselben Winkel einfallende Strahlen verschiedener Wellenlänge werden also schon durch eine einzige Brechung (und noch mehr durch zwei solche geeignet angeordnete) in verschiedene Richtungen gelenkt. NEWTON schloss umgekehrt aus der ungleichen Ablenkung verschiedener Farben durch Prismen auf die verschiedene Brechbarkeit des verschieden farbigen Lichts und auf die Zusammensetzung des weissen Sonnenlichts aus verschiedener Farbe. (S. Spectralanalyse.) Die Art der Auffindung dieses Factums durch NEWTON (im J. 1666) gilt noch heute für ein Muster inductiver Forschung und die von ihm gegebene Darstellung seiner Untersuchung für eins der lesenswerthesten Dokumente der älteren Physik S. Letter to Oldenburg dd. Cambridge Feb. 10, 1671 (abgedruckt in TAIT, Light Edinb. 1884, pag 78 ff.) und OPTICKS, London 1704, (3. ed. 1721). Book I, Prop. 1—7.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass der Brechungsexponent der Medien im allgemeinen desto grösser ist, je kleiner die Wellenlänge des betreffenden Lichts ist, dass er also im sichtbaren Theil des Spectrums von dem rothen Ende nach dem blauen hin stetig wächst. Doch giebt es eine Klasse von Körpern, welche eine Ausnahme von dieser Regel bilden, in welchen also entweder das ganze sichtbare Spectrum oder Theile desselben den umgekehrten Zusammenhang zwischen Brechungsexponent und Wellenlänge aufweisen. Man nennt diese Art von Dispersion darum anomale. Auch von dieser wird weiter unten noch näher die Rede sein.

Man glaubte früher, dass die Grösse des Brechungsexponenten stets Hand in Hand ginge mit der Dichte der Körper. Wenn sich nun auch dieser Zusammenhang nach den späteren Untersuchungen als ein keineswegs durchgängiger erwiesen hat, so findet er doch sehr oft Statt und man hat den einmal eingeführten Begriff der »optischen Dichte« zur Abkürzung der Ausdrucksweise beibehalten. Der Ausdruck, ein Medium sei optisch dichter als ein anderes, soll daher nichts weiter besagen, als, es habe einen grösseren Brechungsexponenten als jenes. —

Totalreflexion. Wir haben die Beziehung zwischen Brechungs- und Einfallswinkel durch die Gleichung ausgedrückt $n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r$. Wenn $n_a < n_b$,

also $n_{ab} < 1$ ist, so bestimmt sich gemäss dieser Gleichung zu jedem Einfallswinkel i der Brechungswinkel r. Da der grösste Einfallswinkel $i_{max} = J = \pi/2$ ist, so ist der grösste Brechungswinkel unter diesen Umständen bestimmt durch die Gleichung $sin\,(r_{max} = R) = n_a/n_b$. Allen einfallenden Strahlen entsprechen also gebrochene, die in einem Kegel von der Halböffnung $arc\,(sin = n_a/n_b)$ enthalten sind. Betrachten wir umgekehrt den Uebergang des Lichts aus dem Medium b in das Medium a, oder, was dasselbe ist, nehmen wir an, es sei $n_a > n_b$, also $n_{ab} > 1$, dann giebt es aus der Gleichung $n_a \cdot sin\, i = n_b \cdot sin\, r$ reelle Brechungswinkel r nur zu Einfallswinkeln i, deren sin kleiner ist als n_b/n_a oder kleiner als $1/n_{ab}$, entsprechend dem grössten möglichen Brechungswinkel $r = \frac{\pi}{2}$. Strahlen, welche unter einem grösseren Winkel i einfallen, als dem dieser Gleichung entsprechenden, können gar nicht mehr gebrochen werden, sondern — wenn auch genaue Untersuchungen gezeigt haben, dass auch hier das Licht zum Theil in das zweite Medium eindringt, so geschieht dies doch nur bis zu sehr geringer Tiefe, und auch dieser Theil des Lichts kehrt seine Bewegungsrichtung um und — alles eingefallene Licht wird in das erste Medium reflectirt. Man nennt diese Art von Reflexion daher Totalreflexion und den Einfallswinkel, von welchem an dieselbe beginnt, welcher also der Gleichung genügt, $sin\, J = n_b/n_a = 1/n_{ab} = n_{ba}$, den »kritischen Winkel« oder Winkel der Totalreflexion.

Beiläufig mag bemerkt werden, dass bei durchsichtigen Medien die relative Menge des reflectirten Lichts überhaupt mit dem Einfallswinkel wächst, so dass sie von dem, senkrechter Incidenz entsprechenden Minimum bis zur Totalreflexion stetig wächst.

Der Winkel der Totalreflexion hängt nur von den Brechungsexponenten der beiden an einander grenzenden Medien ab. Er ist daher auch im allgemeinen von der Wellenlänge, Farbe des betrachteten Lichts abhängig. Der Winkel der Totalreflexion in einem Medium, welches an das Vacuum grenzt, bestimmt in einfachster Weise dessen absoluten Brechungsexponenten $sin\, J = 1/n$.

Hilfssätze. Aus dem Reflexions- und Brechungsgesetze lassen sich einige Hilfssätze ableiten, welche uns in der Folge manchmal nützlich sein werden, und die wir daher hier voranstellen. In Bezug auf die Reflexionen folgt aus deren Gesetz: 1) dass der einfallende und der reflectirte Strahl gleiche Winkel auch mit jeder durch den Einfallspunkt gehenden zur Einfallsnormalen senkrechten Geraden bilden, und 2) dass die Projectionen des einfallenden und zurückgeworfenen Strahls auf irgend eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene ebenfalls das Reflexionsgesetz befolgen. Der Beweis dieser Sätze liegt auf der Hand. Wir wollen daher nur die entsprechenden für die Brechung geltenden Sätze beweisen, aus welchen sich die ersteren ja auch ergeben, wenn $n_a = -n_b$ oder $n = -n'$ gesetzt wird. Hier gilt:

1) Die Cosinus der Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit irgend einer durch den Fusspunkt der Einfallsnormalen zu dieser senkrechten, d. h. in der Tangentialebene der brechenden Fläche gelegenen Geraden bilden, stehen ebenfalls im umgekehrten Verhältniss der Brechungsexponenten.

2) In demselben Verhältniss stehen die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit einer durch die Normale gelegten Ebene bilden.

3) Für die Projectionen des einfallenden nnd des gebrochenen Strahls auf eine durch die Normale gelegte Ebene gilt das Brechungsgesetz mit einem Brechungsindex, welcher von der Neigung der Strahlen gegen jene Ebene abhängt.

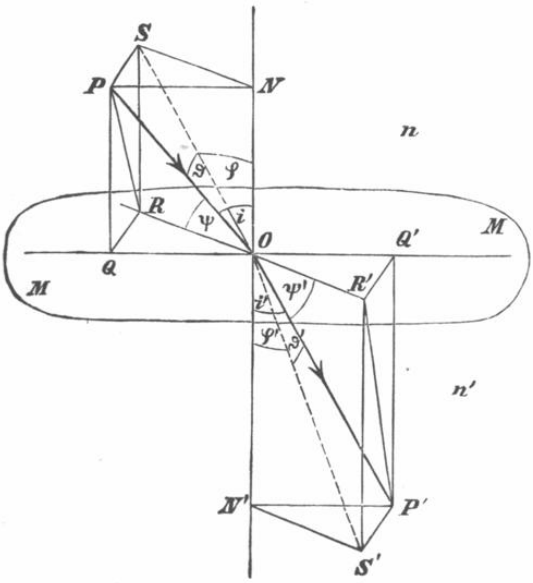
Sei, zum Beweise dessen, ON (Fig. 300) die Einfallsnormale, MM die brechende Ebene oder Tangentialebene zur brechenden Fläche, PO der einfallende, OP' der gebrochene Strahl. Dann gilt

$$n \cdot sin(PON = i) = n' \cdot sin(P'ON' = i');$$

daher auch

$$n \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i = POQ\right) = n' \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i' = P'OQ'\right).$$

Mache ich die Länge von OP und OP' proportional zu resp. n und n', so ist hiernach, wenn Q und Q' die Fusspunkte der von P und P' auf die Ebene MM gefällten Lothe sind, $OQ = OQ'$. Ziehe ich nun durch O in der Ebene MM irgend eine andere Gerade, ROR' und fälle von P und P' Senkrechte auf sie, nach R und R', so sind die Verbindungslinien QR und $Q'R'$ auch senkrecht auf ROR'. Daher auch $OR = OR'$. Es ist aber $OR = OP \cdot cos\, POR$; $OR' = OP' \cdot cos\, P'OR'$, folglich in der That $n \cdot cos\, POR = n' \cdot cos\, P'OR'$ (1. Satz).



(Ph. 300.)

Denke ich mir nun durch ON und die (beliebige) Gerade RR' eine Ebene gelegt und von den, wie vorher bestimmten Punkten P und P' Senkrechte auf diese Ebene gefällt, nach S und S', so ist $PS = QR$ und $P'S' = Q'R'$, also auch $PS = P'S'$, da ja $QR = Q'R'$. Aber $PS = OP \cdot sin\, POS$; $P'S' = OP \cdot sin\, P'OS'$, folglich $sin\, POS : sin\, P'OS' = OP' : OP = n' : n$ (2. Satz).

Endlich ist $SO \cdot sin\, SON = SN = S'O\, sin\, S'ON' = S'N'$. Aber $SO = PO \cdot cos\, POS$; $S'O = P'O\, cos\, P'OS'$, folglich $n \cdot sin\, SON \cdot cos\, SOP = n' \cdot sin\, S'ON' \cdot cos\, S'OP'$ oder $sin\, SON : sin\, S'ON' = n' \cdot cos\, S'OP' : n\, cos\, SOP$ (3. Satz).

Bei der Bezeichnung der Figur gilt also, neben der Fundamentalgleichung, $n \cdot sin\, i = n' \cdot sin\, i'$ oder $sin\, i : sin\, i' = n' : n$ noch $cos\, \psi : cos\, \psi' = n' : n$; $sin\, \vartheta : sin\, \vartheta' = n' : n$ und $sin\, \varphi : sin\, \varphi' = \frac{n'}{n}(cos\, \vartheta' : cos\, \vartheta) = n'\, cos\, \vartheta' : n\, cos\, \vartheta$.

Characteristisch für die Natur der Brechung — im Gegensatze zur Reflexion — ist folgende Eigenschaft: Die durch Brechung bewirkte Ablenkung eines Strahls von der Einfallsrichtung wächst mit zunehmendem Einfallswinkel immer schneller — während sie bei der Reflexion diesem proportional ist (stets $= \pi - 2i$).

In der That folgt aus $n \cdot sin\, i = n' \cdot sin\, i'$ zunächst $di/tg\, i = di'/tg\, i'$. Ist nun $n' > n$, so ist $i' < i$, daher auch $tg\, i' < tg\, i$ und, da im selben Verhältniss stehend, $di' < di$. Die Ablenkung γ ist aber $= i - i'$ Diese nimmt also, da $d(i - i') > 0$ ist mit i jedenfalls zu.

Des Näheren ist

$$\frac{di - di'}{di} = \frac{d\gamma}{di} = 1 - \frac{tg\, i'}{tg\, i}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\gamma}{di^2} = -\frac{d}{di}\left(\frac{tg\, i'}{tg\, i}\right).$$

Nun nimmt aber $tg\, i'/tg\, i$ mit i ab; denn

$$\frac{d}{di}\left(\frac{tg\, i'}{tg\, i}\right) = \frac{d}{di}\left(\frac{sin\, i'}{sin\, i}\,\frac{cos\, i}{cos\, i'}\right) = \frac{n}{n'}\,\frac{d}{di}\left(\frac{cos\, i}{cos\, i'}\right) = -\frac{n}{n'}\,\frac{sin\gamma}{cos^2 i'}$$

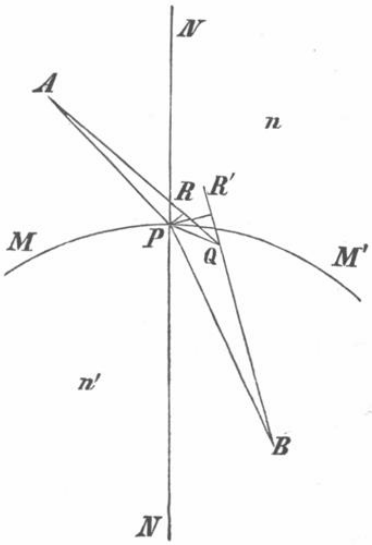
und γ ist, wie eben bewiesen, selbst > 0; also ist $\frac{d^2\gamma}{di^2} = +\frac{n}{n'}\,\frac{sin\gamma}{cos^2 i'}$ stets positiv, $\frac{d\gamma}{di}$ nimmt mit wachsendem i (oder i') zu, d. h. die durch Brechung bewirkte Ablenkung wächst immer schneller.

Wenn $n' < n$, so erfolgt die Ablenkung nach der anderen Seite des Strahls (von der Normalen weg); im übrigen bleiben alle Schlussfolgerungen dieselben.

Einen eleganten rein geometrischen Beweis dieses nützlichen Satzes hat TAIT gegeben (LIGHT, pag. 90), s. auch HEATH, l. c., pag. 23.

Allgemeine Theoreme über die Reflexion und Brechung.

Satz vom kürzesten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte A nach einem Punkte B gelangt, so ist die Summe der Produkte aus Brechungsexponent je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke, Σnl, ein Grenzwerth, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle dem thatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also $\delta \Sigma nl = 0$. Jenes Produkt wird »Lichtweg«, »reducirter Weg« oder »optische Länge« des Strahls genannt.



(Ph. 301.)

Sei, um den Satz zunächst für eine einzelne Brechung (und damit auch Reflexion) zu beweisen, MM' in (Fig. 301) eine brechende Fläche; der Weg eines das Brechungsgesetz befolgenden Strahls führe von A nach B über P, so dass $n \cdot sin\, APN = n' \cdot sin\, BPN$ erfüllt ist. Sei Q ein dem Punkte P unendlich benachbarter Punkt der Fläche MM', so ist zu beweisen, dass $n \cdot AP + n' PB$ bis auf Grössen der zweiten oder höherer Ordnung $= n\, AQ + n'\, QB$ ist.

In der That ist mit eben dieser Annäherung, wenn ich mir mit AP um A und mit BP um B Bögen geschlagen denke, welche resp. AQ in R und BQ in R' treffen

$$AQ = AR + RQ = AP + PQ \cdot sin\, RPQ = AP - PQ\, cos\, APQ,$$

ebenso $\quad BQ = \qquad\qquad\qquad\qquad BP + PQ\, cos\, BPQ,$

also $\quad nAQ + n'BQ = nAP + n'BP + PQ\,(n\, cos\, APQ - n'\, cos\, BPQ).$

Wir haben aber pag. 26 bewiesen, dass die in der Klammer stehende Grösse unter den gemachten Annahmen $= 0$ ist (1. Satz); folglich sind in der That die Lichtwege von A nach B über P und Q bis auf Grössen zweiter Ordnung einander gleich: $\delta\,(n\, AP + n'\, PB) = 0$.

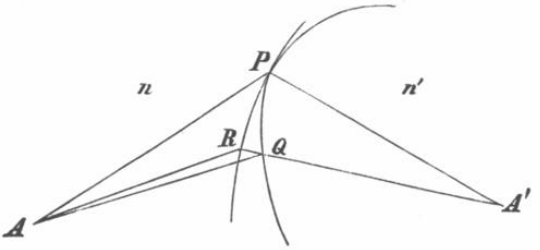
Nach dem Princip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta \Sigma nl = 0$ für eine einzelne Reflexion und Brechuug sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler. Bei stetiger Aenderung des Brechungsexponenten folgt ebenso $\delta \int n\, dl = 0$.

(Der zweite und die höheren Differentiale können grösser oder kleiner oder auch gleich Null sein. Die gewöhnliche Fassung des Satzes, dass jene Summe ein Minimum sei, ist daher nicht correkt, sondern nur historisch überkommen.)

Für ebene Trennungsflächen ist der optische Weg immer ein Minimum, wie für die Reflexion schon HERO v. Alexandrien, für die Brechung FERMAT zuerst bewiesen hat[1]), wir wollen uns daher der Kürze wegen für den allgemeinen Fall desselben Ausdrucks bedienen.

Wichtig ist, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, nämlich, dass sich der Bedingung $\delta \Sigma n l = 0$ für den Weg eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten bei gegebenen reflectirenden und brechenden Flächen nur durch das Reflexions- und Brechungsgesetz genügen lässt. Wegen des Beweises sei auf HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., Leipzig 1867, pag. 239, und Wissensch. Abh., Leipzig 1883, Bd. 2, pag. 147, verwiesen.

Ob in einem speciellen Falle der Weg ein Minimum oder Maximum oder was sonst ist, davon kann man sich, wenn die Gestalt der Grenzfläche gegeben ist, folgendermaassen überzeugen. Sei PQ (Fig. 302) ein Stück der Grenzfläche und PA' der nach dem Brechungsgesetz zu AP gehörige Strahl. Um zu erfahren, ob APA' ein kürzester oder ein längster Weg zwischen A und A' sei, denke ich mir die Fläche $n \cdot AP + n'A'P = const$ construirt, die sogen. aplanatische Fläche (s. u.); PR sei ein Stück derselben. Diese Fläche muss die brechende in P jedenfalls berühren, weil dort für beide $\delta(nAP + n' \cdot A'P) = 0$ ist. Ist nun die brechende Fläche in P nach dem dünneren Medium (n) zu stärker convex als die aplanatische, so ist für jene der Weg APA' ein Maximum, anderenfalls ein Minimum.



(Ph. 302.)

In der That, sei Q ein P unendlich benachbarter Punkt der brechenden Fläche, so ist der Lichtweg von A nach A' über Q, $[Q] = n \cdot AQ + n'A'Q$. Der über R durch die aplanatische Fläche, $[R] = nAR + n'RQ + n'QA'$, wenn R der Schnittpunkt von $A'Q$ mit der aplanatischen Fläche ist. Also ist

$$[Q] - [R] = n(AQ - AR) - n'RQ.$$

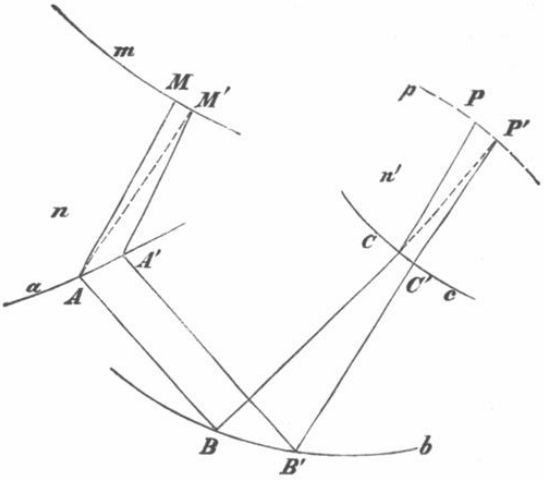
Nun ist $AQ - AR < RQ$ als Seiten eines Dreiecks, daher, wenn $n < n'$, a fortiori $n(AQ - AR) < n'RQ$, also der Weg über Q kleiner, als der über R. Letzterer ist aber gleich dem über P, folglich ist unter diesen Umständen der Weg über P ein Maximum. In ganz analoger Weise lässt sich erkennen, dass wenn die brechende Fläche nach dem optisch dünneren Medium weniger convex ist, also die aplanatische, der Lichtweg über P ein Minimum ist.

Princip der schnellsten Ankunft. Nach den Experimenten von FOUCAULT und in Uebereinstimmung mit der Undulationstheorie des Lichts stehen die Brechungsexponenten zweier Medien im umgekehrten Verhältniss der Geschwindigkeiten der Lichtbewegung in ihnen, also $n/n' = v'/v$, oder allgemein $n = k/v$; $n' = k/v'$; $n'' = k/v''$ etc. Unter Benützung dieser Beziehung geht die Gleichung $\delta \Sigma n l = 0$ über in $\delta \Sigma (l/v) = 0$. Da aber die Geschwindigkeit $v = l/t$ ist, wenn t die zur Durchlaufung der Strecke l vom Licht gebrauchte Zeit bedeutet, so

[1]) HUYGHENS, Traité de la Lumière. Leyden 1690, pag. 39 ff.

wird schliesslich $\delta \Sigma t = 0$, d. h. die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von einem Punkte A unter beliebig vielen Reflexionen und Brechungen nach einem anderen Punkte B zu gelangen, ist für den Weg, welchen der Strahl gemäss dem Reflexions- und Brechungsgesetz einschlägt, um unendlich kleine Grössen der zweiten oder höheren Ordnung verschieden von der für die diesem unendlich benachbarten Wege.

Unter Benützung dieses Satzes lässt sich der folgende wichtige Satz von MALUS[1]) beweisen. Derselbe lautet: Ein System von Strahlen, welches ein Mal senkrecht zu einer Fläche ist, bleibt dies auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen. Da die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen senkrecht stehen auf jeder Kugel um diesen Punkt als Mittelpunkt, so würde für solche der MALUS'sche Satz besonders gelten. Nach der Wellentheorie drückt derselbe etwas Selbstverständliches aus, da gemäss dieser die Strahlen nichts anderes sind, als die Normalen zur Wellenfläche. Auf Grund unserer elementaren Voraussetzungen lässt sich der Satz folgendermaassen beweisen (nach RAYLEIGH)[2]). Seien $MABCP$, $M'A'B'C'P'$ . . . (Fig. 303). Strahlen, welche auf der Fläche m bezüglich in M, M' normal stehen und in ihrem weiteren Verlauf an den Flächen a, b, c, bezüglich in A, A' . . . B, B' . . ., C, C', . . Reflexionen oder Brechungen erfahren haben.



(Ph. 303.)

Ich kann dann nach irgend einer dieser Reflexionen oder Brechungen, z. B. nach der an Fläche c stattgehabten, auf den betreffenden Strahlen jedenfalls Punkte P, P' . . . so bestimmen, dass die Summe der reducirten Wege von M bis P, M' bis P' etc. die gleiche wird. Die durch die Punkte P, P' . . . gehende Fläche isi dann die gesuchte Orthogonalfläche der Strahlen. Verbinde ich zum Beweise dessen M' mit A und C mit P', so ist bei genügender Nähe von M an M' $(M'ABCP')$ nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als MM' verschieden von $(M'A'B'C'P')$. Laut Annahme ist aber $(M'A'B'C'P') = (MABCP)$; daher, nach Subtraction der gemeinsamen Wegstrecken, wenn der erste Brechungsexponent mit n, der letzte mit n' bezeichnet wird, im Grenzfalle $n \cdot MA + n' \cdot CP = n \cdot M'A + n'CP'$. Nach der Voraussetzung, dass die Strahlen ursprünglich auf m senkrecht stehen, ist aber $lim \cdot M'A = MA$; bis auf unendlich Kleine von wenigstens zweiter Ordnung; folglich auch ebenso nahe $lim \cdot CP' = CP$, d. h. CP steht auf p in P senkrecht, und ebenso die anderen Strahlen $C'P'$ etc.

Analytische Beweise des MALUS'schen Theorems s. ausser in der Originalabhandlung bei HELMHOLTZ, Physiolog. Optik, 1. Aufl., pag. 241, Wissensch. Abh., Bd. 2, pag. 147, und HEATH, l. c., pag. 102.

Optische Länge zwischen conjugirten Brennpunkten. Aus dem

[1]) Journ. de l'Ec. Polyt. 14, pag. 1 u. 84 (1808).

[2]) Encyclop. Brit. 9. ed. Art. Optics.

FERMAT'schen in Verbindung mit dem MALUS'schen Satze können wir einen wichtigen Schluss ziehen; nämlich: wenn durch irgend welche Reflexionen und Brechungen alle in einem gegebenen Winkelraum enthaltenen von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt werden, so ist für sie die optische Länge vom Ausgangs- bis zum Vereinigungspunkt die gleiche. Denn in der That, weil dann von Strahl zu Strahl $\delta \Sigma nl = 0$ ist, so ist $\Sigma nl = const$ innerhalb des betreffenden Winkelraums. Strahlen (Elementarwellen), welche von einem Punkte (Flächenelement) mit gleicher Phase ausgehen, kommen also bei homocentrischer Vereinigung im neuen Brennpunkt auch wieder mit gleicher Phase wieder an. (Phasenverzögerungen, welche etwa bei der Reflexion oder Brechung eintreten, treffen alle Strahlen gleichmässig, wofern dieselben nicht etwa von dem Einfallswinkel abhängen — was, so viel bekannt, nicht der Fall ist — beeinträchtigen also die Giltigkeit dieses Satzes nicht.) In solchen Vereinigungspunkten müssen sich die Strahlen also auch gemäss der Undulationstheorie verstärken, und es kommt daselbst zur Erzeugung eines sich in dem betreffenden Winkelraum selbst wie ein leuchtender Punkt verhaltenden Oscillationscentrums. Hierauf beruht die Möglichkeit einer Abbildung durch optische Mittel.

Aplanatische Flächen. Die Aufgabe, eine Fläche so zu bestimmen, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sämmtlich wieder in einen Punkt gebrochen (oder reflectirt) werden, ist nach dem Voranstehenden mathematisch einfach so formulirbar, dass $nl + n'l'$ für alle Punkte der gesuchten Fläche denselben Werth haben solle, wenn l vom leuchtenden, l' vom Vereinigungspunkt aus gemessen wird. Die Lösung dieser Aufgabe bietet keine besonderen Schwierigkeiten und ist an mehreren Stellen zu finden[1]). Da sie andererseits auch kein besonderes physikalisches oder praktisches Interesse besitzt, so begnügen wir uns mit der Anführung einiger Resultate und weisen nur darauf hin, dass in diesen Fällen für den reducirten Weg des Lichtes zwischen den beiden Punkten wie überhaupt stets bei homocentrischer Strahlenvereinigung auch der zweite und alle höheren Differentialquotienten des Ausdruckes Σnl ebenfalls verschwinden.

Im Falle einer Reflexion ist $l + l' = const$ bekanntlich die Bipolar-Gleichung eines Rotationsellipsoids, dessen Brennpunkte der leuchtende und der Vereinigungspunkt sind, wie auch aus der bekannten Eigenschaft eines solchen Ellipsoids geschlossen werden kann, dass die Radii vectores gegen die Normale des betreffenden Flächenpunktes gleich geneigt sind, also dem Reflexionsgesetz genügen. Rückt der eine Punkt ins Unendliche, so wird die Fläche ein Rotationsparaboloid mit dem anderen Punkt als Brennpunkt und einer zu der Strahlenrichtung parallelen Axe.

Im Falle einer Brechung führt die Gleichung $nl + n'l' = const$ auf die sogen. Cartesischen Ovale. In dem Specialfall, dass wieder der eine, z. B. der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt, ist es eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren einer Brennpunkt auch der der Strahlen ist. Für eine besondere andere, später anzugebende Lage der beiden Punkte zur Fläche ist dieselbe eine Kugel.

Ganz ähnlich sind die Ergebnisse, wenn man die Wiedervereinigung der Strahlen statt durch eine einzige Fläche, durch mehrere solche bewirken will.

Von den aplanatischen Flächen kann man theoretisch Gebrauch machen, um für eine gegebene Lage zweier Punkte und gegebene Gestalt einer, zwei

[1]) S. z B. MEISEL, Geometrische Optik. Halle 1886, pag. 148.

Medien trennenden Fläche diejenigen Stellen der letzteren zu bestimmen, über welche durch Reflexion oder Brechung ein Strahl von dem einen Punkte nach dem anderen gelangen kann. Je nachdem die beiden Punkte in demselben oder in verschiedenen Medien (auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Fläche) liegen, construirt man um sie die Schaar der Flächen $l + l' = const$ oder $nl + nl' = const.$ Jede Stelle der Trennungsfläche, wo sie von einer dieser aplanatischen Flächen berührt wird, hat die gesuchte Eigenschaft, weil für sie eben $\delta \Sigma nl = 0$ ist.

Wir werden den Begriff des »Aplanatismus« übrigens später noch strenger zu fassen haben, wenn wir seine specielle Bedeutung in der Theorie der optischen Instrumente behandeln.

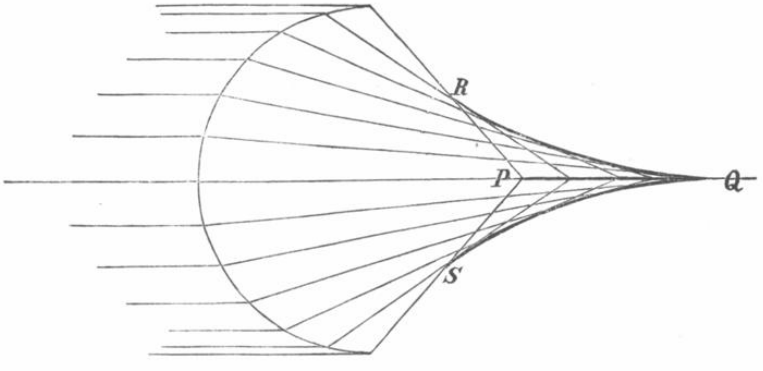
Das Problem der aplanatischen Flächen ist im Uebrigen, wie schon bemerkt, von sehr geringem und mehr negativem praktischen Interesse; letzteres insofern, als die Untersuchung zeigt, dass die Kugel im Allgemeinen keine aplanatische Fläche ist; ersteres weil weder die Natur uns die anderen Arten aplanatischer Flächen darbietet, noch künstlich solche exact genug hergestellt werden können, ausser mit sehr bedeutender Mühe und nur in Fällen, wo die Abweichung der aplanatischen Fläche von der Kugel äusserst gering ist, wie bei den astronomischen Reflectoren oder irrelevant, wie bei den sogen. Scheinwerfern. Wir sind praktisch auf die Anwendung sphärischer Flächen angewiesen und haben es bei Naturprodukten (z. B. den Augen) meist mit Rotationsflächen von schwer genau angebbarer Art zu thun. Bei der Reflexion und Brechung an diesen werden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen im Allgemeinen und streng nicht wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt.

Allgemeines optisches Strahlenbüschel, Caustiken; (Brennflächen). Da als optisches Strahlenbüschel, wie in der Einleitung hervorgehoben, nur ein solches angesehen werden kann, welches in letzter Instanz auf einen selbstleuchtenden Punkt (Oscillationscentrum) zurückgeführt werden kann, so hat ein solches gemäss dem Satz von Malus auch stets ein System von Orthogonalflächen, eben die Wellenflächen, in welchen gleiche Phase der Oscillation herrscht. »Jedem optischen Büschel, wie auch immer es entstanden sei, werden daher die Eigenschaften zukommen, welche die Normalen stetig gekrümmter Flächen besitzen. Die Theorie der letzteren lehrt aber, dass, wenn wir uns durch einen beliebigen Strahl a eine Ebene gelegt denken, welche die Fläche in einer Curve schneidet, und diese Ebene um den Strahl drehen, die Curve im Allgemeinen im Schnittpunkte mit a verschiedene Krümmung besitzt und dass die Ebene der grössten Krümmung der Schnittcurve senkrecht steht auf der Ebene ihrer kleinsten Krümmung. Von den dem Strahl a unendlich nahen Normalen der Wellenfläche — welche also benachbarte Strahlen sind — schneiden daher diejenigen, deren Fusspunkte in der Linie grösster oder kleinster Krümmung liegen, den Strahl a in dem Mittelpunkte bezüglich des grössten oder kleinsten Krümmungskreises; die anderen dagegen schneiden den Strahl a gar nicht. Auf jedem Strahle giebt es also im Allgemeinen zwei Brennpunkte, in denen er von benachbarten Strahlen geschnitten wird, welche Punkte den Mittelpunkten der grössten und kleinsten Krümmung im Fusspunkte des Strahles der Wellenfläche entsprechen. Nur wenn die Krümmung der Wellenfläche in dem Fusspunkte des Strahles nach allen Richtungen gleich gross ist, wird der Strahl von allen, ihm unendlich benachbarten in einem Punkte geschnitten« (Helmholtz).

Die Strahlen, deren Fusspunkte in einer Krümmungslinie der Wellenfläche liegen, schneiden einander bei endlicher Ausdehnung jener Linie in successive

verschiedenen Punkten. Sie sind daher die Einhüllenden einer Curve, die aus lauter Brennpunkten unendlich benachbarter Strahlen gebildet ist. Dieselbe heisst daher Brenncurve oder Caustik. Die aufeinander folgenden Krümmungslinien einer Wellenfläche geben ebenso viele Brennlinien, welche insgesammt eine Fläche, die Brennfläche des Strahlensystems, bilden. Da es zwei Schaaren von Krümmungslinien giebt, so giebt es im Allgemeinen zu jeder Orthogonalfläche auch zwei Brennflächen, und jeder Strahl ist gemeinsame Tangente beider Flächen.

Besonders einfach ist der Fall, wo die Wellenfläche eine Rotationsfläche ist. Die eine Schaar von Krümmungslinien sind dann die Meridiancurven der Fläche und die ihnen entsprechende Caustik ist eine Fläche, welche durch Rotation der Evolute der Meridiancurve um die Symmetrieaxe entsteht. Die andere Schaar von Krümmungslinien entspricht den Breitenkreisen der Erdkugel, d. h. es sind parallele Kreise, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieaxe liegen. Die zu ihnen gehörigen Normalen bilden je einen geraden Kreiskegel und schneiden die Axe je in einem Punkt. Die zweite Brennfläche ist daher reducirt auf ein Stück der Axe. Den Charakter einer solchen Brennfläche veranschaulicht Fig. 304 im Meridianschnitt. Hier ist RQS die Erzeugende der einen Brenn-



(Ph. 304.)

fläche; PQ die Gerade, in welche die andere Brennfläche hier degenerirt ist. (Die Figur stellt den Fall der Brechung eines parallelstrahligen Büschels an einer Kugel von höherem Index dar.)

Mit der Aufgabe, die Gestalt der Caustiken in besonderen Fällen zu bestimmen, wollen wir uns hier abermals nicht weiter beschäftigen, da sich auch an diese mehr ein mathematisches, als ein physikalisches oder praktisches Interesse knüpft[1]).

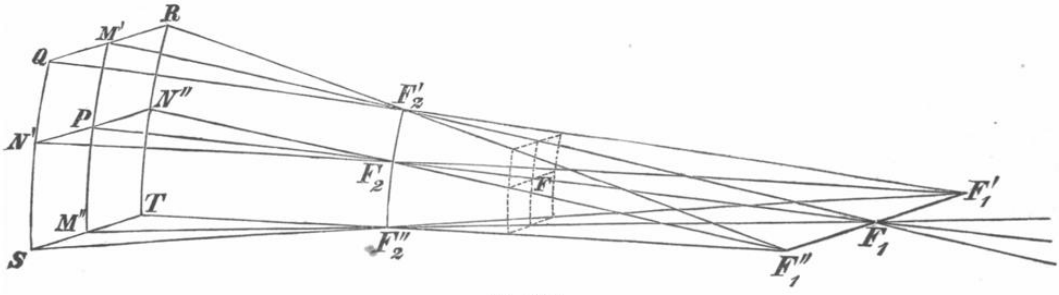
Bemerkt werden muss, dass Untersuchungen über die Intensität in den Punkten einer Caustik und namentlich über die Intensitätsvertheilung in Schnittebenen mit solchen, auf dem Boden der geometrischen Optik allein angestellt[2]),

[1]) Man findet die Literatur über Caustiken ziemlich vollständig sammt der über »Strahlenbüschel« in VERDET, die Wellentheorie des Lichtes, übersetzt von EXNER. Braunschweig 1881, Bd. 1, pag. 7 u. 8. Wir fügen zu dieser nur die Angabe einiger besonders werthvoller Abhandlungen, nämlich CAYLEY, Phil. Trans. 1857 u. 1867, und PASCH, CRELLE's Journ. 1872. Ausserdem kommen für diese Probleme die Lehrbücher der geometrischen Optik in Betracht, namentlich die von CODDINGTON, LOYD, MEISEL und HEATH. S. auch SCHELLBACH, Zeitschr. f. Physik u. Chem. Unt. 1887. Vortreffliche Zeichnungen in dessen in ENGEL's »Darstellende Optik«, Halle 1878, in welchen aber stets nur auf den Meridianschnitt Rücksicht genommen ist.

[2]) S. z. B. S. FINSTERWALDER, Ueber Brennflächen und die räumliche Vertheilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Inaug.-Diss. Tübingen 1886.

einen sehr beschränkten Werth haben und meist ganz illusorisch sind. Denn die Brennpunkte, welche die Caustik formiren, sind solche von unendlich dünnen Büscheln, würden also für sich allein (wegen des weitgehenden Diffractionseffects so schmaler Wellenzüge) fast gar nicht mehr den Regeln der geometrischen Optik folgen. In benachbarten Brennpunkten kommt aber das Licht mit stetig verschiedener Phase an und die Helligkeit sowohl in den Punkten der Caustik selbst, als in denen einer Schnittebene von den Phasen der sie treffenden Elementarwellen in hohem Grade abhängt. Wenn daher auch die nach den Reflexions- und Brechungsgesetzen berechnete Caustik im Grossen und Ganzen die Stellen hervorstechender Lichtconcentration richtig angiebt, in so fern sie eben aus wirklichen Brennpunkten gebildet ist, so kann doch näheres über die Lichtvertheilung eines optischen Büschels nur mit Hülfe der Undulationstheorie, nämlich des Intereferenzprincips ermittelt werden. Eine auf dieser Grundlage stehende Untersuchung, wie sie z. B. Airy[1]) mit specieller Rücksicht auf den Regenbogen geführt hat, giebt auch Rechenschaft von den in der Nähe jeder Caustik beobachtbaren, lichtschwächeren Wiederholungen derselben (den überzähligen Bögen), für welche die geometrische Optik gar keine Erklärung zu liefern vermag.

Allgemeine Constitution eines unendlich dünnen, optischen Strahlenbüschels. Es ist schon oben bemerkt, dass ein beliebiger Strahl des Büschels im Allgemeinen nur von den in zwei bestimmten Ebenen ihm un-



(Ph. 305.)

endlich benachbarten Strahlen geschnitten wird, nämlich von den in der Ebene der grössten und der kleinsten Krümmung seiner Orthogonalflächen gelegenen, also von denjenigen, deren Fusspunkte die Elemente jener Krümmungs-Kreise selbst bilden. Suchen wir eine nähere Vorstellung von der Lagenbeziehung der Strahlen, welche ein unendlich dünnes Büschel bilden, zu gewinnen. Denken wir uns zu diesem Zwecke durch einen Punkt P der Wellenfläche die Bögen grösster und kleinster Krümmung gelegt, $M'M''$ und $N'N''$, welche auf einander in P senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Bögen, also die Brennpunkte des durch P gehenden Strahles seien F_1 und F_2; wir wollen sie kurz ersten und zweiten Brennpunkt nennen. Den durch P gehenden Strahl bezeichnen wir als »Hauptstrahl« des ganzen Büschels; derselbe ist zugleich Hauptstrahl der ebenen Partial-Büschel $M'F_1M''$ und $N'F_2N''$. Die Bögen der grössten und kleinsten Krümmung in einem, P benachbarten Punkt, z. B. M', stehen ebenfalls auf einander senkrecht. Es wird aber auch wegen der Kleinheit des betrachteten Elements der Wellenfläche, also des Bogens $M'P$, bis auf unendlich kleine Abweichungen der Bogen $N'N''$, QR parallel sein dem entsprechenden Bogen der zweiten Hauptkrümmung in M' und der durch M' gehende Bogen der ersten Hauptkrümmung

[1]) Trans. of the Soc. of Cambr. 6, pag. 379. 1838.

coincidiren mit $M'M''$. Der Brennpunkt des ebenen Büschels $QM'R$ wird nun jedenfalls auf dem Hauptstrahl desselben liegen, d. i. auf dem durch M' gehenden Strahl. Dieser geht aber als Strahl des Büschels $M'M'$ durch F_1. Folglich verläuft das jetzt betrachtete ebene Büschel gänzlich in der Ebene QRF_1, und ebenso die durch andere zu $M'M''$ senkrechte Bögen gehenden Strahlen in den durch F_1 und diese Bögen gelegten Ebenen. Wo auch ihre Brennpunkte F_2', F_2'' etc. liegen mögen, so müssen alle diese Strahlenebenen, weil auf $F_1M'M''$ senkrecht und durch F_1 gehend, sich in einer durch F_1 gehenden auf der Ebene $M'M''$ und daher auf dem Hauptstrahl PF_1 senkrechten Linie $F_1'F_2''$ schneiden. Wir nennen dieselbe die erste Brennlinie.

Genau dieselbe Betrachtung ist auf die zu $M'M''$ parallelen Bögen der ersten Hauptkrümmung QS, RT, etc. anwendbar. Die Hauptstrahlen dieser ebenen Partialbüschel gehen, als Strahlen des Partialbüschels $N'PN''$, sämmtlich durch den Brennpunkt dieses F_2. Alle diese ebenen Partialbüschel stehen ausserdem auf der Ebene der zweiten Hauptkrümmung $F_2N'N''$ senkrecht; sie schneiden sich also in einer auf $F_2N'N''$ und damit auf dem Hauptstrahl PF_2 senkrechten Linie $F_2'F_2''$, welche wir zweite Brennlinie nennen wollen. Halten wir diese beiden Systeme ebener Partialbüschel zusammen, so ist klar, dass letztere Brennlinie nichts anderes repräsentirt, als die Brennpunkte der zuerst betrachteten ebenen Partialbüschel, und ebenso $T_1'T_1''$ die der jetzt betrachteten.

Wir haben also das Resultat: Die Gesammtheit der Strahlen eines unendlich dünnen, optischen Büschels schneidet sich in zwei geraden Linien, den Brennlinien, welche in den beiden Brennpunkten des Hauptstrahles bezüglich auf diesem senkrecht stehen und in zu einander senkrechten Ebenen (den Hauptkrümmungsebenen der betreffenden Wellenfläche) liegen. In der durch den ersten Brennpunkt gehenden Brennlinie liegen die Brennpunkte der zur ersten Hauptkrümmungsebene senkrechten ebenen Partialbüschel, d. h. derjenigen zweiter Art und umgekehrt (STURM'scher Satz)[1]).

Man sieht, dass aus den beiden Brennlinien und dem Hauptstrahl das ganze Büschel construirbar ist. Man hat nur jeden Punkt der einen Brennlinie mit jedem der anderen zu verbinden und hierbei stets unendlich nahe dem Hauptstrahl zu bleiben.

Die Constitution des Büschels ist aber auch bestimmt aus vier von seinen Strahlen, von denen nicht mehr als zwei durch je einen Punkt einer Brennlinie gehen.

Ebenen senkrecht zum Hauptstrahl schneiden das Büschel in Figuren von verschiedener Gestalt, je nach dem Ort des Schnitts und je nach der Begrenzung des Büschels auf der brechenden Fläche bezw. der Wellenfläche. An einer leicht anzugebenden Stelle F zwischen den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 ist der Schnitt des Büschels etc. ähnlich seiner anfänglichen Begrenzung (Stelle der geringsten Confusion genannt).

Für die Herleitung des Vorstehenden war wesentlich die Annahme, dass die gleichnamigen Hauptkrümmungsebenen in benachbarten Punkten eines unendlich kleinen Flächenelements einander merklich parallel seien. Dies findet aber nicht streng, sondern im Allgemeinen nur bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung statt. Daher gelten die abgeleiteten Beziehungen auch nur mit derselben Annäherung.

---

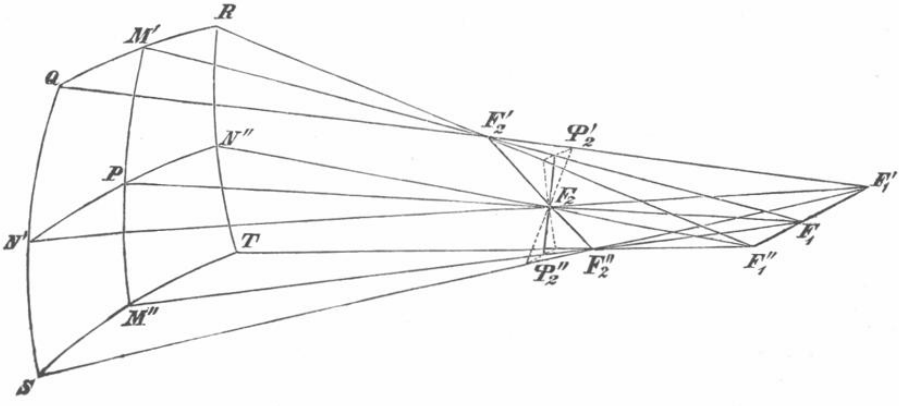
[1]) Journ. de Lionville 3, pag. 357. 1838; übers. in POGG. Ann. 65, pag. 116, 374. 1845. Compt. rend. 20, pag. 554, 761, 1238. 1845.

Genau genommen[1]) kann man jeder Wellenfläche eine andere Fläche, als den Scheitel des vorhin angenommenen elliptischen Paraboloids, näher anschmiegen und sind dann deren Hauptkrümmungen der Betrachtung zu Grunde zu legen. Die ebenen Partialbüschel, z. B. der ersten Hauptkrümmungen, schneiden dann die zum Hauptstrahl gehörige Ebene der zweiten successive in verschiedenen Linien, welche in jener Ebene mit dem Hauptstrahl alle beliebigen Winkel einschliessen können, und desgleichen im Allgemeinen die Partialbüschel der zweiten Hauptkrümmung die Ebene der ersten Krümmung. Mit Berücksichtigung der Grössen der zweiten Ordnung gehen durch die beiden Brennpunkte des Hauptstrahls also keine Brennlinien, sondern Brennflächenstücke. Im Besonderen kann dann auch der Fall eintreten, dass diese Brennflächenstücke in Linien degeneriren, welche aber oft gegen den Hauptstrahl merklich anders als senkrecht geneigt sind, wofür gerade die Brechung eines homocentrischen Büschels an einer Rotationsfläche ein Beispiel giebt. Und wenn in Folge der vorliegenden geometrischen Verhältnisse ein Büschel von endlicher Dicke im wesentlichen dieselbe Constitution hat, wie ein solches unendlich dünnes, — was sehr wohl der Fall sein kann — so werden die Abweichungen von dem vorhin statuirten auch der Beobachtung zugänglich werden können. Aber diese Ueberlegung kann den STURM'schen Satz als solchen natürlich nicht aufheben, da dieser Giltigkeit ja nur innerhalb der angezeigten Genauigkeitsgrenzen beansprucht.

Im Allgemeinen ist ja die Strahlenvereinigung in den Brennpunkten bezw. Brennlinie selbst nur eine solche von erster Ordnung. Es können daher der Natur der Sache nach Sätze, welche sich auf die allgemeinen Eigenschaften optischer Strahlenbündel beziehen, keine Beziehung auf die Grössen der zweiten Ordnung enthalten und umgekehrt Sätze, welche auf diese Grössen Rücksicht nehmen, nicht ebenso allgemein sein, wie der STURM'sche Satz.

Dies hat neuerdings MATTHIESSEN unter Berufung auf eine bezügliche Abhandlung von WEINGARTEN[2]) auch zugestanden[3]).

Dass auch in den Fällen, wo strenggenommen, bis auf Abweichungen von höherer als der 2. Ordnung spitzwinklig gegen den Hauptstrahl geneigte Brenn-



(Ph. 306.)

[1]) MATTHIESSEN, Münch. Sitzber. Bd. 13, pag. 44. 1883. Acta mathem. IV, 2, pag. 185. 1884, und SCHLÖMILCH's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

[2]) CRELLE's Journ. 98, pag. 281. 1885.

[3]) Berlin-Eversbusch, Zeitschr. f. vergl. Augenheilk. 6, pag. 106. 1889.

linien vorhanden sind, eine durch einen der Brennpunkte senkrecht zum Hauptstrahl gelegte Ebene mit dem Büschel nirgend einen Querschnitt von weniger als der zweiten Ordnung (im Vergleich mit der Breite des betrachteten Wellenflächenstücks) hat, also der STURM'sche Satz richtig bleibt, zeigt eine einfache Ueberlegung (Fig. 306). Ein z. B. durch F_2 gelegter senkrechter Querschnitt hat bei den in der Figur angenommenen besonders ungünstigen Verhältnissen seinen grössten Querschnitt im Durchschnitt mit den äussersten ebenen Partialbüscheln QRF_2' und STF_2'' (bei rundlicher Begrenzung des Elements der Wellenfläche, an einer zwischen F_2 und Φ_2' gelegenen Stelle). Dieser Querschnitt q ist aber, wenn wir $F_2\Phi_2' = dr$, d. i. gleich der Differenz der zweiten Hauptkrümmungsradien in M' und P und die mittlere Länge eines Hauptkrümmungsbogens zweiter Art wie $N'N'' = ds$ setzen $q = ds \cdot dr/r$ — also im Allgemeinen unendlich klein gegen ds[1]).

Das hier betrachtete unendlich dünne Strahlenbündel ist eine specielle Art des allgemeinen geradlinigen Strahlenbüschels, welches nicht mehr die Eigenschaft hat, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen. Ein solches wird in der Natur z. B. durch die irregulär in doppeltbrechenden Medien gebrochenen Strahlen repräsentirt. Die Eigenschaften dieses allgemeinen Büschels, deren Studium natürlich auch auf die des speciellen ein Licht wirft, insofern es zeigt, welche von den Eigenschaften dieses letzteren in seiner blossen Geradlinigkeit, welche auf den besonderen Annahmen beruhen, hat besonders HAMILTON[2]) studirt; nach ihm KUMMER[3]), MÖBIUS[4]), MEIBAUER[5]) u. A. (s. die Literaturangaben in VERDET, l. c.).

Nach den voranstehenden Festsetzungen kann als die Aufgabe der Dioptrik unendlich dünner Büschel, allgemein gefasst, die ausgesprochen werden: wenn die Brechungsexponenten zweier Medien n und n', die Gestalt der sie trennenden Fläche $f(x, y, z) = 0$, die Richtung eines einfallenden Strahls und die Orte der Brennpunkte und Lagen der Brennlinien auf ihm gegeben ist, letztere drei Bestimmungsstücke auch für den gebrochenen bezw. reflectirten Strahl zu finden. C. NEUMANN[6]) hat eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe mitgetheilt unter der Annahme der Giltigkeit des STURM'schen Satzes; MATTHIESSEN[7]) ohne die letztere. Hier sei auf diese Darstellungen nur hingewiesen, die Aufgabe selbst werden wir später in einer Anzahl besonderer Fälle behandeln.

Literatur.

Als die beste neuere Gesammtdarstellung der geometrischen Optik (der speciellen Katoptrik und Dioptrik und allgemeinen Theorie der optischen Instrumente) muss das Buch von R. S. HEATH bezeichnet werden: A Treatise on Geometrical Optics. Cambridge 1887. Elementary Treatise, ibid. 1888. Doch ist der Standpunkt des Verfassers mehr der des Mathematikers; so dass gegenüber der vorliegenden Darstellung vieles ausführlicher behandelt ist, vieles aber wiederum weit kürzer oder auch gar nicht. Eine Uebersetzung dieses Werks ins Deutsche ist vorbereitet.

---

1) S. auch CZAPSKI, Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in dünnen optischen Büscheln. WIED. Ann. 42, pag. 332. 1891.

2) Trans. Irishr. Acad. 15, pag. 69. 1828; 16, pag. 1, 94. 1830/31; 17, pag. 87. 1837. Auch POGG. Ann. 28, pag. 633. 1833; 29, pag. 324. 1834.

3) CRELLE's Journ. 57, pag. 189. 1859; Berl. Monatsber. 1860, pag. 469; Abh. Berl. Akad. 1866.

4) Sitzb. Sächs. Akad. 14, pag. 1. 1862.

5) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8, pag. 369. 1863. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Berlin 1864.

6) Sitzber. Sächs. Akad. 1880, pag. 42.

7) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

Unter den zahlreichen sonstigen Gesammtdarstellungen der geometrischen Optik (Katoptrik und Dioptrik) sind aus früherer Zeit als die bedeutendsten zu nennen:

R. SMITH, A compleat System of Opticks. 2 Bde. Cambridge 1738. Ein Theil dieses Werks ist übersetzt (»aus dem Englischen ins Deutsche und aus dem synthetischen Vortrage in den analytischen«) von

A. G. KÄSTNER. Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755.

L. EULER, Dioptrice. 3 Bde. Petrop. 1769—71. Ein Auszug und Umarbeitung dieser ist

G. S. KLÜGEL, Analytische Dioptrik. Leipz. 1778.

J. F. W. HERSCHEL, Light. Encycl. Metrop. 1827, übers. v. J. C. E. SCHMIDT, Stuttgart 1831.

H. CODDINGTON, Treatise on the refraction of light. London 1829.

H. LLOYD, Treatise on Light and Vision. London 1831.

R. POTTER, An Elementary Treatise on Optics London, pt. I. 1847 (3. Aufl. 1865), pt. II. 1851.

S. PARKINSON, A. Treatise on Optics. London 1859, 4. Aufl., 1884.

Alle diese Werke ausser dem von HEATH behandeln nur specielle Probleme der Dioptrik. Die Literatur über die durch GAUSS angebahnte neue Richtung der Optik sowie die hervorragenderen Werke und Abhandlungen über besondere Gebiete werden betreffenden Orts angegeben werden.

Die ältere Literatur bis ca. 1830 ist ziemlich vollständig aufgeführt am Schlusse von LITTROW's Dioptrik. Wien 1830 und in der »Litteratur der Optik« (o. O. u. J.) v. H. W. DOVE.

S. CZAPSKI.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.
(Nach ABBE.)

Stellung des Problems.

Mit dem im vorangehenden Kapitel Gegebenen ist dasjenige in der Lehre von der Spiegelung und Brechung des Lichts, was ein unmittelbares physikalisches Interesse besitzt, ziemlich erschöpft. Der weitere Inhalt unserer Darstellung kann sich nunmehr nur noch auf die Anwendungen dieser Lehre beziehen. Diese begreifen einerseits die Erklärung gewisser — meist meteorischer — Naturerscheinungen in sich, andererseits liefern sie die Principien für die Construktion bezw. das Verständniss der sogen. optischen Instrumente, die ihrerseits namentlich als Hilfsmittel der Forschung in- und ausserhalb des physikalischen Gebietes eine grosse Bedeutung besitzen.

Wir wenden uns zuerst den letzteren zu.

Es handelt sich bei diesen in letzter Linie stets darum, dass durch Vermittelung von Reflexionen oder Brechungen (oder Combinationen beider) an geeignet geformten und zusammengestellten optischen Medien Bilder äusserer Gegenstände (oder Bilder solcher Bilder) hervorgebracht werden, und zwar besteht das Zustandekommen dieser Bilder stets darin, dass ein Theil der von je einem Punkte A des Gegenstandes ausgehenden Strahlen durch die Reflexionen und Brechungen, welche er erfährt, so modificirt wird, dass er wieder nach einem Punkte, dem Bildpunkte, A', convergirt.

Man hat nun die Gesetze, welche zwischen den Bildern und ihren Objekten bestehen, bis in die neueste Zeit fast ausnahmslos in der Weise studirt, dass man die besonderen Fälle, in welchen eine Wiedervereinigung von homocentrisch divergirenden Strahlenbüscheln stattfindet, näher untersuchte, und nur auf Grund solcher specieller Untersuchungen gelangte man schliesslich durch Verallge-