

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über technische Mechanik

in sechs Bänden

Dynamik

Föppl, August

1909

VORLESUNGEN
ÜBER
TECHNISCHE MECHANIK

VON
DR. AUGUST FÖPPL
PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

IN SECHS BÄNDEN

VIERTER BAND:

D Y N A M I K

MIT 71 FIGUREN IM TEXT

DRITTE, STARK VERÄNDERTE AUFLAGE



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort zur dritten Auflage.

Im Jahre 1899 ist die erste Auflage dieses Bandes erschienen und im Jahre 1901 die zweite. Mit den anderen Bänden des ganzen Werkes, die eine größere Verbreitung fanden, hat der Absatz dieses Bandes nicht ganz gleichen Schritt zu halten vermocht. Ich habe geglaubt, daraus den Schluß ziehen zu müssen, daß der Inhalt dieses Bandes in seiner früheren Gestalt seinem Zwecke weniger gut entsprochen hat, als bei den anderen Bänden. Deshalb habe ich mich für die Neuauflage zu einer vollständigen Umarbeitung entschlossen.

Kaum die Hälfte von dem Inhalte der zweiten Auflage ist mit geringen Änderungen auch wieder in die Neuauflage übernommen worden. Dagegen ist anderenteils vieles neu zugefügt worden, was mir zur besseren Ausgestaltung des behandelten Lehrstoffes notwendig erschien. Immerhin überwiegen aber dem Umfange nach die Streichungen; die Seitenzahl hat sich daher gegen früher erheblich vermindert. Auch die Vorreden zu den beiden ersten Auflagen lasse ich, um an Raum zu sparen, nicht wieder abdrucken.

Der erste Abschnitt hat sich gegen früher am wenigsten verändert. In ihm hat die Lehre von den Schwingungen starke Erweiterungen erfahren, während die Planetenbewegung gestrichen wurde. Den früheren zweiten Abschnitt habe ich jetzt in drei Abschnitte zerlegt mit vielen Erweiterungen und Zusätzen. Die dahin gehörige Dynamik des starren Körpers und insbesondere die Kreiseltheorie habe ich vollständig umgearbeitet. Auch der frühere dritte Abschnitt hat viele Änderungen erfahren; zur besseren Erläuterung der vorgetragenen Lehren habe ich ihm auch einige Aufgaben neu zugefügt. Der ehemalige vierte Abschnitt ist bis auf die an anderer Stelle untergebrachte

Lehre von der mechanischen Ähnlichkeit ganz weggefallen und der fünfte Abschnitt, der die Hydrodynamik behandelte, wurde auf einen viel engeren Raum zusammengedrängt, wobei jedoch auch hier auf eine bessere Hervorhebung der grundlegenden Betrachtungen Bedacht genommen wurde.

Aus dieser gedrängten Übersicht erkennt man schon, daß diese Neuauflage zum großen Teile ein ganz neues Buch darstellt, das die frühere Auflage nicht vollständig zu ersetzen vermag. Denn viele Dinge, die früher eine ausführliche Besprechung gefunden hatten, sind jetzt ohne jeden Ersatz weggefallen, während der Rest allerdings, der beibehalten wurde, beträchtlich erweitert und, wie ich annehmen darf, auch verbessert wurde. Wer sich daran gewöhnt hat, bei schwierigen Fragen Rat in meinem Lehrbuch zu suchen, wird nun freilich zuweilen genötigt sein, auch ferner noch auf die ältere Auflage zurückzugreifen. Erst wenn der in Vorbereitung befindliche sechste Band des ganzen Werkes erschienen ist, wird dies nicht mehr nötig sein, da in ihm die jetzt fortgefallenen Gegenstände eine ausführliche Darstellung finden sollen.

Auch in seiner neuen Gestalt wird das Buch ohne Zweifel den Anhängern einer Richtung, zu der insbesondere die Herren Weingarten und Heun gehören, Anlaß genug zu Beanstandungen und zu Tadel geben. Das muß ich hinnehmen. Ein Lehrbuch der Technischen Mechanik, das praktisch brauchbar sein soll, muß auf den Beifall dieser Herren von vornherein verzichten. Um so mehr aber hoffe ich, daß es mir gelungen sein möge, durch die Neubearbeitung ein Lehrbuch zu schaffen, das den berechtigten Anforderungen der Technik besser als das frühere entspricht.

München, im August 1908.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Erster Abschnitt. Dynamik des materiellen Punktes . . .	1—122
§ 1. <i>Einleitung</i>	1
§ 2. <i>Der Flächensatz</i>	4
Drall	6
Zentralbewegung	11
Sektorengeschwindigkeit	13
§ 3. <i>Das Potential</i>	13
Wirbelfreie und Wirbelfelder	15
Perpetuum mobile	16
Potentialunterschied	18
Potentialgefäll.	21
Kraftlinien	23
Geoid.	24
§ 4. <i>Die einfache harmonische Schwingung</i>	26
Schwingungsdauer	31
Elliptische Schwingung	31
§ 5. <i>Andere Fälle der harmonischen Schwingungen</i>	34
Torsionsschwingungen	34
Gekoppelte Schwingungen	37
§ 6. <i>Gedämpfte Schwingungen</i>	43
Aperiodische Bewegung	47
Schwingungsdauer der gedämpften Schwingungen	49
Logarithmisches Dekrement	51
§ 7. <i>Dämpfung durch gewöhnliche Reibung</i>	52
Dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung	57
§ 8. <i>Erzwungene Schwingungen</i>	58
Phasenunterschied	64
Resonanz	66
§ 9. <i>Allgemeine Lösung der Differential-Gleichung für die erzwungenen Schwingungen</i>	67
Schwebungen	70
§ 10. <i>Kritische Geschwindigkeiten</i>	72
Fouriersche Reihen	75
§ 11. <i>Näherungstheorie für das einfache Pendel</i>	77

	Seite
§ 12. <i>Genauere Theorie der ebenen Pendelschwingungen</i>	80
Elliptische Integrale	83
Genauere Näherungsformel	85
§ 13. <i>Schwingungen auf der Zykloide</i>	86
Brachistochrone	89
Rücklauf bei Kegelbahn	97
§ 14. <i>Anwendung des Seilpolygons auf die Dynamik des materiellen Punktes</i>	99
Beispiel	102
Aufgaben zum ersten Abschnitt	106—122
Vial (4. Aufg.)	108
Fadenspannung vom Pendel (8. Aufg.)	115
Drehschwingungen eines gefederten Wagens (9. Aufg.)	115
Gekoppelte Schwingungen von zwei Eisenbahnwagen	117
Zweiter Abschnitt. Dynamik des Punkthaufens	123—163
§ 15. <i>Das Prinzip von d'Alembert</i>	123
Trägheitskräfte	126
§ 16. <i>Festigkeitsberechnungen für bewegte Körper</i>	130
§ 17. <i>Das physische Pendel</i>	132
Reduzierte Pendellänge	135
§ 18. <i>Schwerpunkts- und Flächensätze für den Punkthaufen</i>	137
Drall eines Punkthaufens, dessen Schwerpunkt ruht	141
Unveränderliche Ebene	142
§ 19. <i>Einfache Anwendungen des Flächensatzes</i>	145
Umdrehung einer Katze beim Fallen	146
§ 20. <i>Massenausgleich bei Schiffsmaschinen nach Schlick</i>	153
§ 21. <i>Anwendung des Flächensatzes auf die Turbinentheorie</i>	162
Dritter Abschnitt. Dynamik des starren Körpers	164—260
§ 22. <i>Das Trägheits-Ellipsoid</i>	164
§ 23. <i>Drall und Drallellipsoid</i>	169
§ 24. <i>Die freien Achsen</i>	179
§ 25. <i>Wirkung eines Kräftepaares auf einen freien starren Körper</i>	184
Drehstoß	187
§ 26. <i>Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äußere Kräfte</i>	188
Polodie und Herpolodie	191
§ 27. <i>Die stabilen Drehachsen</i>	192
§ 28. <i>Die Eulerschen Gleichungen</i>	195
§ 29. <i>Ein einfaches Beispiel</i>	200
§ 30. <i>Stöße am starren Körper</i>	204
Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten	206
Prinzip von d'Alembert für Stöße	212

	Seite
§ 31. Satz von Carnot über den Verlust von lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper	213
§ 32. Die Kreiselbewegung	222
§ 33. Die pseudoreguläre Präzession	225
Nutation	230
§ 34. Einwirkung eines Stoßes auf den schnell rotierenden Kreisel	231
§ 35. Die strenge Lösung des Kreiselproblems für den symmetrischen schweren Kreisel	234
Hauptgleichung des Kreiselproblems	237
§ 36. Die reguläre Präzession	238
§ 37. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis	242
Drehung von Schwungradenebene	243
Bumerang	248
Seitenablenkung von Geschossen	249
Rollendes Rad	251
Billardball	255
§ 38. Ebene Bewegung des starren Körpers	256
Vierter Abschnitt. Schwingungen elastischer Körper	261—313
§ 39. Biegungsschwingungen von Stäben mit gleichförmig ver- teilter Masse	261
Grundschiwingung und Oberschwingungen	266
§ 40. Allgemeiner Lösung der Schwingungsgleichung	267
§ 41. Biegungsschwingungen von Schiffen	271
§ 42. Torsionsschwingungen von langen Wellen	275
Ungleichförmigkeitsgrad von Maschinen	277
§ 43. Biegungsschwingungen von schnell umlaufenden Wellen	283
§ 44. Mechanische Ähnlichkeit; Theorie der Modelle	302
Aufgaben zum 2., 3. und 4. Abschnitte	313—342
Biegungsbeanspruchung von Pleuelstangen (12. Aufg.)	316
Reversionspendel (16. Aufg.)	320
Festigkeitsberechnung von Glockenstuhl (17. Aufg.)	321
Biegungsbeanspruchung von Pendel (18. Aufg.)	323
Trägheitsmomente von Kegel (21. Aufg.)	325
Schief aufgekeilter Schwungring (24. Aufg.)	328
Drehstoß an Ring (25. Aufg.)	331
Gyroskop (28. Aufg.)	334
Bifilare Aufhängung (30. Aufg.)	337
Rollbewegung von Schiffen (31. Aufg.)	338
Fünfter Abschnitt. Die Relativbewegung	343—362
§ 45. Vorbemerkungen	343
§ 46. Der Satz von Coriolis	345

	Seite
§ 47. <i>Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung</i>	348
Fallender Stein	350
Südliche Ablenkung	354
Aufgaben zum fünften Abschnitte	356—362
Harmonische Schwingungen relativ zu einer rotierenden Scheibe (35. und 36. Aufg.).	358
Sechster Abschnitt. Hydrodynamik	363—408
§ 48. <i>Die Ansätze der Hydrodynamik</i>	363
Mischbewegung.	365
Zähigkeit	366
§ 49. <i>Die Darstellungsmittel der Hydrodynamik</i>	367
§ 50. <i>Die hydrodynamischen Gleichungen von Euler</i>	370
§ 51. <i>Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung</i>	379
Satz von Lagrange	381
Geschwindigkeitspotential	384
Maß für den Wirbel	386
§ 52. <i>Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfreie Bewegung</i>	387
§ 53. <i>Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit</i> .	390
§ 54. <i>Strömung in Röhren; Zähigkeit</i>	400
Kritische Geschwindigkeit	403
Poiseuillesches Gesetz.	406
Einfacher Ansatz für die Berücksichtigung der Misch- bewegung.	407
Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	409—419
Sachverzeichnis	420—422

Erster Abschnitt.

Dynamik des materiellen Punktes.

§ 1. Einleitung.

Die einfachsten Lehren der Dynamik sind schon im ersten Bande dieses Werkes zugleich mit denen der Statik besprochen worden. Sie bilden die Grundlage, auf der wir hier weiter zu arbeiten haben. Und zwar soll in diesem Bande einerseits das theoretische Rüstzeug ergänzt werden, das sich zur Lösung von Aufgaben aus der Dynamik eignet und andererseits soll dessen Handhabung an einer Reihe von Untersuchungen gelehrt werden, die schon an sich von erheblicher Bedeutung für die Technik sind.

Die Rücksicht auf den zulässigen Umfang dieses Bandes verbietet es von vornherein, in ihm einen annähernd vollständigen Abriß der ganzen Wissenschaft der Dynamik geben zu wollen. Selbst jene Teile dieser Wissenschaft, die für ein Lehrbuch der technischen Mechanik hauptsächlich in Betracht kommen, können hier nicht vollständig besprochen werden. Deshalb beabsichtige ich, zur Ergänzung dieses Bandes später noch einen sechsten Band des ganzen Werkes folgen zu lassen, der es dann möglich machen wird, die Dynamik in dem ganzen für den Ingenieur wünschenswerten Umfange vollständig zum Abschlusse zu bringen.

Indessen wird man auch mit dem Stoffe, der in diesem Bande behandelt ist, schon ziemlich weit reichen und über die meisten zur Dynamik gehörigen Fragen, die in der Technik eine wichtige Rolle spielen, ausreichende Belehrung darin finden können. Überhaupt möchte ich hervorheben, daß gerade die einfacheren Lehren der Dynamik zugleich auch als die für die praktische Anwendung besonders wichtigen anzusehen sind.

Das gilt auch schon von den im ersten Bande behandelten grundlegenden Sätzen, mit denen man sich daher vor allem möglichst gut vertraut gemacht haben muß, ehe man mit Aussicht auf Erfolg an das Studium der hier vorzutragenden Lehren herantreten kann. Wegen dieser Vorbedingung wird es gut sein, wenn ich hier zunächst noch einmal eine kurze Zusammenstellung der von früher her bekannten Sätze gebe, auf die ich mich in diesem Abschnitte hauptsächlich stützen muß. Wenn der Leser finden sollte, daß ihm von diesen Sätzen irgend etwas noch nicht ganz klar geworden ist, kann ich ihm nur dringend raten, die betreffenden Ausführungen des ersten Bandes nachzusehen. Dort ist alles ausführlich genug besprochen, um jeden Zweifel heben zu können.

In erster Linie steht hier das Trägheitsgesetz, das in der Form

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{P} = 0$$

angeschrieben werden kann, wenn \mathbf{v} die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, \mathfrak{P} die etwa an ihm angreifende äußere Kraft bedeutet. Hieran schließt sich unmittelbar die dynamische Grundgleichung in einer der Formen

$$\mathfrak{P} = m\mathbf{b} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2},$$

wobei m die Masse, \mathfrak{s} die gerichtete Entfernung des materiellen Punktes von einem festen Anfangspunkte, \mathbf{b} die Beschleunigung ist. Bei Zerlegung in Komponenten wird daraus

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dann kommt das Parallelogrammgesetz in der Form

$$\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P},$$

wenn \mathfrak{R} die Resultierende der \mathfrak{P} ist, das sich ebenfalls wieder in Komponentengleichungen zerlegen läßt. Ferner sind zu erwähnen die wichtigen Begriffe der Arbeit A und des statischen Momentes \mathfrak{M} einer Kraft

$$A = \mathfrak{P}\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = V \mathfrak{P}\mathfrak{r},$$

von denen A als das innere Produkt des Weges \mathfrak{s} mit der Kraft \mathfrak{P} und \mathfrak{M} als das äußere Produkt aus Kraft und Hebelarm \mathfrak{r} dargestellt wurde. Die eigentliche Bedeutung dieser Begriffe für die Mechanik liegt in der Gültigkeit der geometrischen Multiplikationssätze

$$\mathfrak{M}\mathfrak{s} = \Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad V \mathfrak{M}\mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r}$$

unter der Voraussetzung $\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{P}$.

Wenn die \mathfrak{P} und \mathfrak{M} Kräfte sind und \mathfrak{s} einen virtuellen Weg bedeutet, spricht die erste Gleichung das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für den einzelnen materiellen Punkt und die zweite den Momentensatz in bezug auf einen beliebig gewählten Momentenpunkt aus. Die in diesem vorkommenden Momente sind gerichtete Größen und das Summenzeichen schreibt eine geometrische Summierung vor. Projiziert man dagegen alle Glieder der Gleichung auf eine durch den Momentenpunkt gehende, beliebig gerichtete Achse, so erhält man die Momente der Kräfte in bezug auf diese Achse und die Gleichung geht in die Momentengleichung für diese Achse als Momentenachse über. Die geometrische Summierung vereinfacht sich dabei zu einer algebraischen. Wie man die Momente von Kräften in bezug auf eine Achse am einfachsten bilden kann, ist früher ausführlich besprochen worden.

Schließlich erinnere ich noch an den Satz vom Antriebe und an den Satz von der lebendigen Kraft. Der erste folgte aus der dynamischen Grundgleichung durch eine Integration nach der Zeit in der Form

$$\int \mathfrak{P} dt = m\mathfrak{v} - m\mathfrak{v}_0$$

und der andere wird durch eine Verbindung der dynamischen Grundgleichung

$$\mathfrak{P} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

mit der Gleichung

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v} dt$$

gewonnen, indem nach Multiplikation beider Gleichungen mit einander

$$\mathfrak{P} d\mathfrak{s} = m\mathfrak{v} d\mathfrak{v} = m d \frac{\mathfrak{v}^2}{2}$$

entsteht, woraus durch Integration

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = \frac{m \mathfrak{v}^2}{2} - \frac{m \mathfrak{v}_0^2}{2}$$

oder, wenn \mathfrak{s} geradlinig und \mathfrak{P} konstant ist,

$$\mathfrak{P} \mathfrak{s} = \frac{m \mathfrak{v}^2}{2} - \frac{m \mathfrak{v}_0^2}{2}$$

folgt. — Fürs erste genügt es, diese Sätze in die Erinnerung zurückzurufen. In den folgenden Abschnitten treten dann noch besonders die Lehre von der Bewegung des starren Körpers und der Kräftezusammensetzung an ihm und die Lehre vom Schwerpunkt hinzu.

§ 2. Der Flächensatz.

An allgemeiner Bedeutung und vielfacher Verwendbarkeit steht den vorher von neuem angeführten Sätzen der Flächensatz, zu dessen Ableitung ich jetzt übergehen will, kaum nach. Er ist auch an sich einfach und leichtverständlich genug, so daß er recht wohl mit unter die ersten Elemente hätte aufgenommen werden können. Das ist aber nicht üblich und ich habe es ebenfalls nicht getan, weil dieser Satz nur von beschränktem Nutzen für die Dynamik eines einzelnen materiellen Punktes ist und seine volle Bedeutung erst bei der Dynamik der starren Körper und der Punkthaufen hervortritt, also bei Untersuchungen, die erst in diesem Bande ausführlicher dargestellt werden können. Dagegen muß ich den Satz jetzt schon in diesem Abschnitte, in dem er noch wenig Verwendung finden wird, zur Sprache bringen, um damit die späteren Untersuchungen hierüber auf eine feste Grundlage zu stellen.

Auch der Flächensatz geht aus einer einfachen Umformung der dynamischen Grundgleichung hervor und er reiht sich damit eng an die beiden vorher erwähnten Sätze vom Antriebe und von der lebendigen Kraft an. Man denke sich nämlich einen festen Anfangspunkt gewählt, von dem aus ein Radiusvektor \mathfrak{r} nach dem bewegten materiellen Punkte gezogen wird. Dann ist \mathfrak{r} mit der Zeit veränderlich und man hat für die Geschwindigkeit \mathfrak{v}

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Erfolgt nun die Bewegung des materiellen Punktes unter dem Einflusse der Kraft \mathfrak{P} , so ist nach der dynamischen Grundgleichung

$$\mathfrak{P} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung seien mit dem Radiusvektor \mathfrak{r} , den wir in diesem Zusammenhange auch als einen Hebelarm bezeichnen können, auf äußere Art multipliziert. Wir erhalten dann

$$\mathcal{V} \mathfrak{P} \mathfrak{r} = m \mathcal{V} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{r}. \quad (1)$$

Es bedarf jetzt nur noch einer kleinen Umformung der rechten Seite dieser Gleichung, um zum Flächensatze zu gelangen. Bildet man nämlich außerdem das äußere Produkt, aus $m\mathfrak{v}$ und \mathfrak{r} , also mit anderen Worten das statische Moment der Bewegungsgröße und bestimmt dessen Änderung in der Zeit, differenziert es also nach t , so findet man

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathcal{V} m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \cdot \mathfrak{r} + \mathcal{V} m \mathfrak{v} \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Für das letzte Glied auf der rechten Seite kann man aber wegen $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ auch

$$\mathcal{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}$$

schreiben, und dies wird zu Null, weil beide Faktoren des äußeren Produkts gleich gerichtet sind, also keine äußeren Komponenten zueinander besitzen. Die vorausgehende Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathcal{V} m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \cdot \mathfrak{r} = m \mathcal{V} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{r},$$

indem der richtungslose Faktor m auch vor das Zeichen \mathcal{V} gestellt werden darf. Hiermit sind wir aber genau zu dem Ausdrucke gelangt, der auf der rechten Seite von Gl. (1) stand. Es ist damit bewiesen, daß man diese Gleichung auch durch die mit ihr identische

$$\mathcal{V} \mathfrak{P} \mathfrak{r} = \frac{d}{dt} \mathcal{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} \quad (2)$$

ersetzen kann, und diese Gleichung spricht bereits den Flächen-

satz für den einzelnen materiellen Punkt in seiner allgemeinsten Form aus. Es ist auch leicht, die Formel in Worten wiederzugeben, denn die in der Gleichung vorkommenden Ausdrücke haben schon früher bestimmte Bezeichnungen erhalten. Links steht das statische Moment der Kraft \mathfrak{P} , die die Änderung der Geschwindigkeit oder der Bewegungsgröße $m\mathbf{v}$ hervorbringt und rechts steht die zeitliche Änderung des statischen Moments dieser Bewegungsgröße, bezogen auf denselben Momentenpunkt. Während also nach der dynamischen Grundgleichung einfach die Kraft \mathfrak{P} der zeitlichen Änderung der Bewegungsgröße gleich gesetzt wird, spricht der Flächensatz aus, daß eine solche Gleichung auch zwischen den statischen Momenten von beiden erfüllt ist. Man kann daher sagen, daß der Flächensatz aus der Verbindung der dynamischen Grundgleichung mit dem Momentenbegriffe hervorgeht.

Die ausführliche Bezeichnung „statisches Moment der Bewegungsgröße“ für das äußere Produkt aus $m\mathbf{v}$ und \mathbf{r} , mit dem wir uns in der Folge noch sehr häufig zu befassen haben werden, ist freilich etwas schwerfällig. Um zu einer kürzeren Fassung zu gelangen, die sich an manchen Stellen als sehr erwünscht herausstellen wird, werde ich dafür gewöhnlich das Wort „Drall“ gebrauchen. Wem das Wort nicht gefällt, möge es sich überall durch die daneben auch noch beibehaltene umständlichere Bezeichnung „statisches Moment der Bewegungsgröße“ ersetzt denken.

Als ein statisches Moment bezieht sich der Drall entweder auf einen bestimmten Momentenpunkt oder auf eine Momentenachse. Im ersteren Falle, mit dem wir es gewöhnlich zu tun haben, ist der Drall eine gerichtete Größe, die hier stets mit dem Buchstaben \mathfrak{B} bezeichnet werden soll. Der Drall für eine Momentenachse entsteht durch Projektion von \mathfrak{B} auf diese durch den Momentenpunkt gezogene Achse. Mit diesen Festsetzungen läßt sich Gl. (2) auch in der Form

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V\mathfrak{P}\mathbf{r} \quad (3)$$

wiedergeben und in Worten dahin aussprechen, daß für jeden

Momentenpunkt die zeitliche Änderung des Dralls (oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls) gleich dem statischen Momente der Kraft ist.

Die Wichtigkeit des Satzes läßt es erwünscht erscheinen, den Beweis, wenn auch mit einiger Abkürzung, noch einmal nach der Koordinatenmethode zu wiederholen, damit auch jene ein festeres Vertrauen zu ihm gewinnen können, die sich in das Rechnen mit gerichteten Größen noch nicht hinreichend eingelebt haben. In der Tat ist zu diesem Zwecke nur nötig, die vorigen Betrachtungen sinngemäß zu wiederholen, nachdem zuvor die dynamische Grundgleichung in ihre Komponenten zerlegt ist. Man gehe also aus von

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Als Momentenpunkt ist hier der Koordinatenursprung zu wählen. Man beachte nun, daß die X -Komponente des statischen Moments der Kraft X, Y, Z oder, wie man auch sagen kann, das statische Moment dieser Kraft in bezug auf die X -Achse nach Gl. (54), Bd. I, S. 94 den Wert

$$M_1 = Yz - Zy$$

hat. Setzt man nun hier für Y und Z ihre Werte aus der dynamischen Grundgleichung ein, so erhält man

$$Yz - Zy = m \left(\frac{d^2y}{dt^2} z - \frac{d^2z}{dt^2} y \right).$$

Die rechte Seite ist aber, wie die Ausführung der Differentiation lehrt, gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} z - m \frac{dz}{dt} y \right),$$

und hiernach wird

$$Yz - Zy = \frac{d}{dt} (m v_2 z - m v_3 y), \quad (4)$$

wenn v_2, v_3 die betreffenden Komponenten von \mathbf{v} sind. Diese Gleichung heißt in Worten: Das statische Moment der Kraft \mathfrak{P} für die X -Achse ist gleich der zeitlichen Änderung des statischen Moments der Bewegungsgröße

für die gleiche Achse. Natürlich läßt sich für die beiden anderen Koordinatenachsen Gleiches nachweisen. Gl. (4) ist daher nur eine der Komponentengleichungen, in die Gl. (2) jederzeit zerlegt werden kann. Die allgemeinere Fassung des Flächensatzes, die die oben angegebene als besonderen Fall mit enthält, lautet daher, wenn zugleich die Bezeichnung „Drall“ dabei eingeführt wird:

Das statische Moment der einen materiellen Punkt beschleunigenden Kraft in bezug auf einen beliebig gewählten Momentenpunkt oder auch in bezug auf eine beliebig gewählte Momentenachse ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Dralls für denselben Momentenpunkt oder für dieselbe Momentenachse.

In etwas geänderter Form läßt sich der Flächensatz auch noch darstellen, wenn man Gl. (2) mit dt multipliziert und hierauf integriert. Man erhält dann

$$\int V \mathfrak{P} \mathbf{r} dt = V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - V m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0, \quad (5)$$

oder in Worten: Das statische Moment des Antriebs der Kraft ist gleich der dadurch bewirkten Änderung des statischen Moments der Bewegungsgröße, wobei die Wahl des Momentenpunkts oder der Momentenachse wiederum freisteht. Bei dieser Fassung des Satzes ist freilich zu beachten, daß der Hebelarm \mathbf{r} , der zu einem Elementarantriebe $\mathfrak{P} dt$ gehört, nicht während der ganzen Dauer des Vorgangs konstant ist, und daß daher das statische Moment des Antriebs nicht dadurch berechnet werden kann, daß man den ganzen Antrieb mit einem Hebelarme multipliziert, sondern daß dieses Moment nur aus der Summe der Momente der Elementarantriebe berechnet werden kann. Wenn freilich die beschleunigende Kraft \mathfrak{P} nur während einer sehr kurzen Zeitdauer einwirkt, in der keine merkliche Verschiebung des materiellen Punktes zustande kommt, wie bei den Stoßvorgängen, läßt sich Gl. (5) auch in der einfacheren Form

$$V \int \mathfrak{P} dt \cdot \mathbf{r} = V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - V m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}$$

anschreiben, die aber gegenüber dem Satze vom Antriebe kaum etwas Neues lehrt, da sie aus diesem durch äußere Multiplikation aller Glieder mit demselben Hebelarm \mathbf{r} hervorgeht.

Ich habe bisher noch nicht erklärt, woher die Bezeichnung des Flächensatzes stammt, denn nach dem, was bis jetzt darüber

vorgetragen wurde, würde es viel näher liegen, ihn den Satz von den statischen Momenten der Bewegungsgrößen oder auch den Satz vom Dralle zu nennen. In der Tat ist diese Bezeichnung eigentlich die zutreffendere, denn die Bezeichnung des Flächensatzes rührt nur von einer einzelnen Anwendung des Satzes her, und ich muß auch hinzufügen, daß viele Schriftsteller unter dem Flächensatze gerade nur diese spezielle Anwendung und nicht die vorher abgeleitete allgemeine Aussage verstehen. Ein so ungemein wichtiger Satz, wie der, um den es sich hier handelt, muß aber eine kurze Bezeichnung erhalten, die nicht wie die vorher erwähnte, eine Umschreibung der gesamten Aussage des Satzes zu geben sucht, sondern von der es vollständig genügt, wenn sie nur an irgendeine kennzeichnende Eigenschaft des Satzes kurz erinnert. Deshalb gebrauche ich die Bezeichnung Flächensatz für die allgemeinste Aussage des Satzes ebenso, wie für den besonderen Fall, in dem er in der Tat zur Betrachtung von Flächen führt.

Der besondere Fall, von dem ich hier sprach, tritt ein, wenn das statische Moment der Kraft \mathfrak{P} zu Null wird, sei es nun, weil \mathfrak{P} selbst verschwindet, sei es, weil die Richtungslinie der Kraft \mathfrak{P} fortwährend durch den Momentenpunkt geht. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gl. (2).

$$\sum m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \mathfrak{C}, \quad (6)$$

worin \mathfrak{C} eine konstante gerichtete Größe, nämlich den anfänglichen Wert des Dralls bedeutet. Gl. (6) spricht zunächst aus, daß die Bewegung im vorliegenden Falle in einer Ebene erfolgt, nämlich in jener Ebene, die rechtwinklig zu \mathfrak{C} durch den Momentenpunkt gezogen ist, wie aus der Definition des statischen Momentes von \mathbf{v} oder $m \mathbf{v}$ hervorgeht. Ferner hat das statische Moment von \mathbf{v} (auf den konstanten Faktor m in Gl. (6) kommt es hier nicht weiter an) nach dieser Gleichung auch stets denselben Absolutwert. Früher habe ich aber auseinandergesetzt, daß der Absolutwert eines statischen Moments durch die Fläche eines Momentendreiecks zur Darstellung ge-

bracht werden kann. Denken wir uns also an verschiedenen Stellen der Bahn die an diesen eintretenden Geschwindigkeiten \mathbf{v} in irgendeinem Maßstabe nach Größe und Richtung aufgetragen, so sind die Dreiecke, die diese Strecken als Grundlinien und den Momentenpunkt zur Spitze haben, alle inhaltsgleich. Einfacher wird diese Betrachtung noch, wenn man Gl. (6) nach Division mit m mit dt multipliziert, so daß

$$\int \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{r} = \frac{\mathcal{C}}{m} dt \quad (7)$$

entsteht. Unter dt möge dabei eine sehr kleine Zeitdauer verstanden werden, die ein für allemal während der ganzen Betrachtung denselben bestimmt gewählten Wert behält. Dann ist $\mathbf{v} dt$ der Weg $d\mathbf{s}$, der während dt zurückgelegt wird, und das statische Moment dieses Weges ist ohne weiteres gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks, dessen Grundlinie $d\mathbf{s}$ und dessen Spitze der Momentenpunkt ist. Die Gleichung sagt hiernach aus, daß zu gleichen dt während des ganzen Bewegungsvorgangs gleiche Dreiecksflächen gehören.

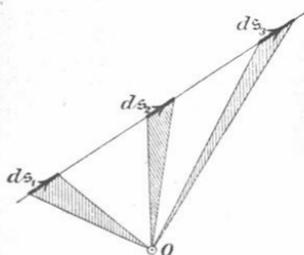


Abb. 1.

Der größeren Deutlichkeit wegen möge dies auch noch in einer Zeichnung zum Ausdrucke gebracht werden, wobei freilich die unendlich kleinen Wege $d\mathbf{s}$ durch endliche Strecken angedeutet werden müssen. In Abb. 1 ist vorausgesetzt, daß $\mathcal{P} = O$ ist. In diesem Falle bewegt sich der materielle Punkt in einer

geraden Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Alle $d\mathbf{s}$, die zu gleichen dt an verschiedenen Stellen der Bahn gehören,

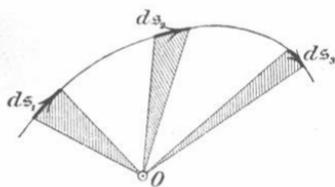


Abb. 2.

sind einander gleich, und daraus folgt auch schon aus einfachen planimetrischen Sätzen die Gleichheit der durch Schraffierung hervorgehobenen Dreiecke. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig. — In Abb. 2 ist da-

gegen angenommen, daß die Kraft \mathfrak{P} nicht verschwindet, daß vielmehr der materielle Punkt eine gekrümmte Bahn durchläuft, daß aber die Kraft \mathfrak{P} , wie es die besondere Voraussetzung verlangt, von der wir bei diesen Betrachtungen ausgingen, stets durch den Momentenpunkt O geht. In diesem Falle sind die zu gleichen Zeiten dt gehörigen Wege $d\mathfrak{s}$ an verschiedenen Stellen der Bahn verschieden groß. Dagegen sind auch hier nach Gl. (7) alle Dreiecke, die man von O aus über den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ errichten kann, von gleichem Flächeninhalte.

Der durch Abb. 1 erläuterte Fall hat kein weiteres Interesse; der Flächensatz wird bei ihm, wie man sagt, trivial. Anders ist es aber mit dem durch Abb. 2 dargestellten Falle, der für viele Betrachtungen von besonderer Bedeutung ist. Eine Bewegung von der hier in Frage kommenden Art wird als eine Zentralbewegung bezeichnet. Dabei wird der zum Momentenpunkte gewählte Punkt O in diesem Falle auch das Zentrum der Bewegung genannt, weil die am bewegten Punkte wirkende Kraft nach Voraussetzung stets durch O geht und daher auch als von O ausgehend angesehen werden kann.

Besonders hervorzuheben ist übrigens in diesem Zusammenhange, daß alle zu den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ gehörigen Dreiecksflächen auch umgekehrt nur dann unter sich gleich sein können, wenn das Moment von \mathfrak{P} verschwindet, wie aus der allgemeineren Gl. (2) oder (3) sofort geschlossen werden kann. Wenn also die Bewegung eines materiellen Punktes (z. B. eines Himmelskörpers) betrachtet wird, und es zeigt sich, daß sie erstens in einer Ebene erfolgt, und daß zweitens die zu gleichen Zeitteilchen dt gehörigen und von irgendeinem Punkte O aus gezogenen Dreiecke gleiche Flächen haben, so folgt daraus mit Notwendigkeit, daß an dem bewegten materiellen Punkte eine Kraft angreift, die stets durch O hindurchgeht, und von der wir daher auch sagen können, daß sie von O ausgeht. In der Tat kann nur auf Grund solcher Anwendungen des Flächensatzes z. B. behauptet werden, daß die Erde bei ihrer Planetenbewegung von der Sonne angezogen wird, denn wir

besitzen kein anderes Mittel, die physikalische Existenz dieser Kraft zu erkennen, als die Beobachtung der tatsächlich im Sonnensystem vor sich gehenden Bewegungen.

Für die in den Abb. 1 und 2 schraffierten Dreiecke kann man übrigens noch eine andere sehr treffende Bezeichnung einführen. Die Flächen dieser Dreiecke werden nämlich von dem Radiusvektor, der vom Momentenpunkte O aus nach dem bewegten Punkte gezogen ist, während der Bewegung vollständig bestrichen. Man kann daher den Satz auch in der Form aussprechen:

Bei der Zentralbewegung beschreibt der vom Anziehungszentrum nach dem bewegten materiellen Punkte gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Umgekehrt kann jede ebene Bewegung als eine Zentralbewegung aufgefaßt werden, wenn man in der Bewegungsebene einen Punkt so anzugeben vermag, daß die von ihm gezogenen Radienvektoren in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben. Jener Punkt ist dann das Anziehungs- (oder Abstoßungs-) Zentrum.

Bei der Aussage dieser Sätze ist nur von gleichen Zeiten die Rede, ohne daß wie vorher die Beschränkung hinzugefügt wurde, daß diese Zeiten unendlich klein sein sollten. Man sieht nämlich leicht ein, daß die Übertragung auf endliche Zeiten ohne weiteres möglich ist. Versteht man unter n eine sehr große Zahl, so daß das Produkt ndt einen endlichen Wert erlangt, so werden n Elementardreiecke, die alle von gleicher Größe sind, während dieser Zeit ndt beschrieben. Alle diese Dreiecke bilden zusammen genommen einen Sektor mit dem Zentrum O , der zu dem vom bewegten Punkte inzwischen durchlaufenen Bogen gehört. Daraus folgt, daß auch irgend zwei Sektoren denselben Inhalt haben, falls sie nur gleich viel Elementardreiecke enthalten, d. h. falls sie zu gleichen Zeiten ndt gehören. Umgekehrt vermag man bei einer Zentralbewegung, die etwa die in Abb. 3 angegebene Bahn $ABCD$ durchläuft, sofort zu sagen, daß die zum Durchlaufen von AB erforder-

liche Zeit ebenso groß ist, als die zu CD gehörige, wenn man weiß, daß die Sektoren AOB und COD gleichen Inhalt haben. Es folgt daraus z. B. sofort, daß sich die Erde in ihrer Planetenbewegung um die Sonne am langsamsten bewegt, wenn sie den größten Abstand von der Sonne hat, im sogenannten Aphel, und am schnellsten im Perihel, d. h., wenn sie der Sonne am nächsten steht.

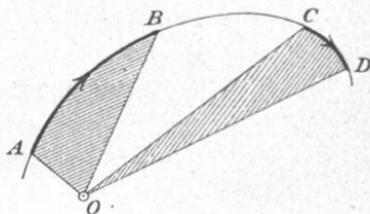


Abb. 3.

Man kann schließlich noch einen anderen, sehr bezeichnenden Ausdruck für diese Gesetzmäßigkeiten wählen, indem man den Begriff der Sektorengeschwindigkeit einführt. Man versteht darunter die Fläche des Sektors, den der vom Bewegungszentrum O gezogene Radiusvektor während der Zeiteinheit überstreicht. Die Aussage des Flächensatzes lautet dann in unserem Falle einfach: Die Sektorengeschwindigkeit ist bei der Zentralbewegung konstant.

In allen jetzt besprochenen Fällen ist die Bezeichnung „Flächensatz“ offenbar sehr gut gewählt; ich erinnere aber nochmals daran, daß in der Folge auch der allgemeinere Satz unter dieser Bezeichnung verstanden werden soll, der angibt, wie sich das statische Moment der Bewegungsgröße oder mit anderen Worten, wie sich die Sektorengeschwindigkeit oder die in der Zeiteinheit übertriebene Fläche ändert, wenn das statische Moment der äußeren Kraft für den gewählten Momentenpunkt von Null verschieden ist.

§ 3. Das Potential.

Der Begriff des Potentials, zu dessen Erläuterung ich jetzt übergehe, ist zuerst in der Mechanik der Himmelskörper eingeführt worden, um die Untersuchungen über gravitierende Massen zu erleichtern. Später wurde dieser Begriff auch auf andere Gebiete, namentlich auf die Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus übertragen. Gerade hier hat er sich so nützlich erwiesen, daß er aus den höheren Theorien, in denen er ur-

sprünglich allein vorkam, allmählich bis in die elementarsten Darstellungen übergegangen ist. Über einen aus der Mechanik hervorgegangenen Begriff, der sich auf ein so weit umfassendes Anwendungsgebiet zu erstrecken vermochte, kann ein Lehrbuch der Mechanik nicht allzu flüchtig hinweggehen, wenn auch die unmittelbaren Anwendungen, die hier davon gemacht werden sollen, nicht gerade sehr zahlreich sind.

Das Potential wird zur Untersuchung von Kraftfeldern verwendet. Man stelle sich etwa vor, daß irgendwelche Massen in beliebiger Verteilung über den Raum gegeben seien, von denen Kräfte nach irgendeinem bekannten und der Zeit nach konstanten Gesetze auf einen sich in diesem Raume bewegendem materiellen Punkt übertragen werden. Das einfachste Beispiel ist, wie schon erwähnt, das Gravitationsproblem, bei dem diese Massen den bewegten Punkt nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Das ganze Gebiet, innerhalb dessen sich die Wirkung dieser Massen noch bemerklich macht, wird das Kraftfeld genannt. In dem genannten Beispiele kann die Kraft in jedem Punkte des Feldes als die Resultierende von Elementarkräften angesehen werden, die von den einzelnen Massenelementen ausgehen und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind. Solche Kräfte, die im einzelnen von festen Anziehungs- oder Abstoßungszentren ausgehen und als Funktionen des Abstandes gegeben sind, bezeichnet man in diesem Zusammenhange ganz allgemein als Zentralkräfte.

Das Gravitationsproblem sollte übrigens hier nur als ein besonderes Beispiel angeführt werden, während wir es jetzt weiterhin ganz dahingestellt sein lassen wollen, auf welche Weise das Kraftfeld, dessen allgemeine Eigenschaften wir zu untersuchen beabsichtigen, in Wirklichkeit zustande kommt. Vor allem sei nun darauf hingewiesen, daß der Potentialbegriff nicht bei allen beliebig gegebenen Kraftfeldern verwendbar ist, oder daß, wie man sich ausdrückt, nicht alle Kraftfelder ein Potential zulassen, oder nach einer anderen Ausdrucksweise, daß nicht alle aus einem Potentiale abgeleitet werden können. Dieser Umstand gibt den wichtigsten Einteilungsgrund für

die verschiedenen Kraftfelder ab, mit denen man sich in der theoretischen Physik zu befassen hat. Jene, die ein Potential zulassen, werden hiernach als wirbelfreie von den übrigen unterschieden, die man im Gegensatze dazu als Wirbelfelder bezeichnet.

Das allgemeine Kennzeichen dafür, daß ein Kraftfeld innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, besteht darin, daß für jede geschlossene Kurve, die man innerhalb dieses Bezirks ziehen mag, das über sie erstreckte Linienintegral der Kraft des Feldes gleich Null ist, oder in Zeichen

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, daß man sich einen beweglichen Punkt längs der ganzen Kurve herumgeführt denkt, und für jedes Wegelement $d\mathfrak{s}$, das er hierbei beschreibt, das innere Produkt aus diesem Wege und der dort auftretenden Kraft \mathfrak{P} des Feldes berechnet, worauf die Summierung über alle Linienelemente der ganzen Kurve zu erstrecken ist. Nun ist aber $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nichts anderes, als die von der Kraft des Feldes bei der gedachten Bewegung geleistete Arbeit. Gl. (8) läßt sich daher auch dahin aussprechen, daß für das wirbelfreie Kraftfeld die algebraische Summe der an dem bewegten Punkte geleisteten Arbeiten für jede geschlossene Kurve zu Null wird.

Wenn $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ von Null verschieden und etwa positiv wäre, könnte man dadurch, daß man die betreffende Bahn wiederholt von dem bewegten Punkte in dem konstanten Kraftfelde durchlaufen ließe, beliebig große Arbeitsmengen gewinnen, d. h. man wäre im Besitze eines Perpetuum mobile. Wäre $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ negativ, so brauchte man nur den Umlaufssinn entgegengesetzt zu wählen, womit sich die Vorzeichen aller Arbeiten $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ umkehrten, und man hätte dann ebenfalls ein Perpetuum mobile vor sich.

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie könnte es hiernach scheinen, als wenn solche Kraftfelder überhaupt physikalisch unmöglich wären. In der Tat hat man diesen

Schluß früher zuweilen gezogen; er wird aber hinfällig, wenn man bedenkt, daß die an dem bewegten Punkte gewonnene Arbeit recht wohl durch eine Energiezufuhr von anderer, nicht mechanischer Form aufgewogen werden kann. Das schlagendste Beispiel dafür ist ein gewöhnlicher elektrodynamischer Motor. Wir sehen, wie sich der Anker einer als Motor betriebenen Dynamomaschine fortwährend umdreht und dabei Arbeit nach außen abgibt, während das Kraftfeld, in dem er rotiert, konstant bleibt. Wenn man sich hier ausschließlich auf den Boden der Mechanik stellen und die elektromagnetischen Energieströme, die daneben herlaufen, außer acht lassen wollte, hätte man in der Tat ein Perpetuum mobile mit allen mechanischen Eigenschaften vor sich, wie sie die alten Erfinder von einem solchen erwarteten. Wir wissen nun zwar, daß das Gesetz von der Erhaltung der Energie oder von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile im neueren Sinne hierdurch nicht umgestoßen wird; aber wir müssen doch diesem Beispiele die Lehre entnehmen, daß in der Tat Kraftfelder vorkommen, für die $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nicht gleich Null ist, die also nicht als wirbelfreie zu bezeichnen sind.

Dagegen läßt sich zeigen, daß alle Kraftfelder, die auf Zentralkräfte zurückgeführt werden können, im ganzen Raume wirbelfrei sind. Um dies zu beweisen, nehme man zunächst an, daß nur ein einziges Anziehungszentrum vorhanden sei. Wir denken uns um dieses Zentrum eine Kugelfläche von beliebigem Halbmesser beschrieben. Solange sich der angezogene Punkt nur auf der Oberfläche dieser Kugel bewegt, ist die von der Kraft \mathfrak{P} des Feldes geleistete Arbeit stets gleich Null, denn \mathfrak{P} fällt in jedem Augenblicke in die Richtung des Radius und steht daher senkrecht zu jedem Wege, den der bewegte Punkt auf der Kugelfläche beschreiben mag. Läßt man dagegen den Punkt auf eine konzentrische Kugelfläche übertreten, deren Halbmesser etwa um dr größer ist, so ist die von \mathfrak{P} geleistete Arbeit gleich $-P dr$, wie auch der Übergang gewählt werden möge, denn von dem beschriebenen Wege kommt immer nur die Projektion dr auf die Richtung des Radius in

Betracht. Daraus folgt, daß auch immer dieselbe Arbeit geleistet wird, wenn man den bewegten Punkt von dem Abstände r_1 zum Abstände r_2 vom Anziehungszentrum überführt, ohne Rücksicht auf den Weg, der hierbei im übrigen eingeschlagen wird. Für einen Weg, der wieder zum Ausgangspunkte zurückführt, hebt sich hiernach die Summe aller $\mathfrak{P}ds$ hinweg. — Dies gilt zunächst für ein einzelnes Anziehungszentrum. Hat man beliebig viele Kraftzentren, so beachte man, daß sich \mathfrak{P} als die Resultierende aller von diesen ausgehenden Elementarkräfte auffassen läßt, und daß die Arbeit der Resultierenden bei jeder beliebigen Bewegung gleich der algebraischen Summe aller Einzelarbeiten ist. Hiernach zerfällt $\int \mathfrak{P}ds$ in ebensoviele Glieder als Kraftzentren vorhanden sind und jedes dieser Glieder ist nach dem vorhergehenden Beweise für sich gleich Null. Wir können hiernach in der Tat allgemein behaupten, daß alle Kraftfelder wirbelfrei sind, die aus Zentralkräften zusammengesetzt sind, und daß es ein ganz vergebliches, früher freilich oft versuchtes Bemühen ist, solche nicht wirbelfreie Kraftfelder, wie das, in dem z. B. der Anker einer Dynamomaschine rotiert, auf Zentralkräfte zurückzuführen.

Weiterhin möge nun angenommen werden, daß das Kraftfeld in der Tat wenigstens innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, während es außerhalb dieses Bezirks immer noch ein Wirbelfeld sein könnte. Ganz allgemein folgt dann aus Gl. (8), daß die Arbeit, die von der Kraft des Feldes geleistet wird, wenn der bewegliche Punkt von einem Punkte O nach einem Punkte A des Bezirks verschoben wird, unabhängig von dem dabei durchlaufenen Wege ist (falls dieser nur ganz innerhalb des Bezirkes selbst liegt).

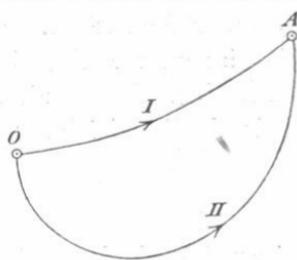


Abb. 4.

Denkt man sich nämlich etwa den Weg I in Abb. 4 im Sinne von O nach A und hierauf den Weg II im umgekehrten Sinne durchlaufen, so entsteht eine geschlossene

Kurve, für die nach Gl. (8)

$$\int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^I + \int_A^0 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^{II} = 0$$

ist. Die Umkehrung des Bewegungssinnes hat einen Wechsel im Vorzeichen der Arbeitsbeträge zur Folge; hiernach ist

$$\int_A^0 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^{II} = - \int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^I,$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt, folgt in der Tat

$$\int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^I = \int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}^I, \quad (9)$$

was zu beweisen war. Es ist hiernach entbehrlich, den Integrationsweg durch ein besonderes Kennzeichen hervorzuheben, wie es in diesen Formeln geschehen war; im wirbelfreien Kraftfelde hat vielmehr schon der unbestimmter gelassene Ausdruck

$$\int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

einen eindeutigen Wert. Der durch ihn angegebene Arbeitsbetrag heißt der Potentialunterschied zwischen den Punkten O und A . Hierbei muß ich noch erwähnen, daß keine allgemeine Übereinstimmung über die Wahl des Vorzeichens dieser Größe besteht. Um deutlicher hervortreten zu lassen, wie dies zu verstehen ist, gehe ich sofort zu den Potentialen selbst über. Ich definiere hiernach das Potential V_A im Punkte A durch die Gleichung

$$V_A = V_0 - \int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}. \quad (10)$$

Hierin ist V_0 das Potential im Anfangspunkte O , dem man sich einen beliebigen Wert gegeben denken mag. Bis auf die Konstante V_0 , die willkürlich bleibt, ist hiermit jedem Punkte A des Bezirkes ein eindeutig bestimmter Wert, den man das Potential nennt, zugeordnet. Manche Schriftsteller wählen nun anstatt

des vor dem Linienintegrale stehenden Minuszeichens ein Pluszeichen und definieren damit eine von der vorigen abweichende Größe, die ebenfalls als Potential oder Potentialfunktion oder auch als Kräftefunktion von ihnen bezeichnet wird. Sehr erheblich ist der Unterschied zwar nicht; immerhin hat aber die Vorzeichenwahl, der ich mich angeschlossen habe, einen nicht unerheblichen Vorzug vor der entgegengesetzten. Die Größe

$$-\int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

gibt nämlich den Arbeitsbetrag an, der von außen her (durch eine der Feldkraft entgegengesetzte Kraft $-\mathfrak{P}$) aufgewendet werden muß, um den beweglichen materiellen Punkt entgegen der Kraft des Feldes von O nach A zu verschieben oder auch, wenn das Vorzeichen des Ausdruckes nach der vollständigen Ausrechnung negativ bleibt, den Arbeitsbetrag, der nach außen hin während der Bewegung abgegeben werden kann. Hiernach wird V_A kleiner als V_0 , wenn bei der Lagenänderung Energie nach außen hin abgegeben, die Energie des Feldes selbst also — falls Energieströme von nicht mechanischer Art ausgeschlossen sind — vermindert wird. Nach unserer Wahl des Vorzeichens kann hiernach unter der Voraussetzung, daß die Konstante V_0 den Einzelbedingungen des besonderen Falles entsprechend gewählt wird, die Größe V_A selbst geradezu als das Maß der potentiellen Energie des Feldes angesehen werden, die dadurch bedingt wird, daß sich der bewegte materielle Punkt gerade im Punkte A des Feldes befindet. Die Bezeichnung Potential stellt sich hiernach als eine Abkürzung für die Bezeichnung potentielle Energie heraus.

Durch Umkehrung der Integrationsgrenzen läßt sich übrigens ohne Änderung der hiermit getroffenen Vereinbarung auch ein positives Vorzeichen in Gl. (10) einführen, denn die Gleichung

$$V_A = V_0 + \int_A^0 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

ist offenbar mit der früheren identisch.

Der Vorteil, den man mit der Einführung des Potentials in die Untersuchung der Kraftfelder erzielt, besteht darin, daß das Potential als ein Energiebetrag eine Größe ohne Richtung ist. Mit diesen richtungslosen Größen läßt sich leichter rechnen als mit den Kräften des Feldes selbst. Dabei geht diese Vereinfachung der Rechnung keineswegs auf Kosten der Vollständigkeit der Resultate, die man ableiten will, denn sobald das Potential überall im Felde bekannt ist, kennt man damit

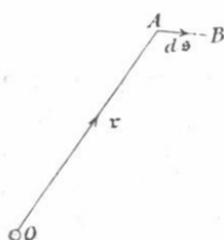


Abb. 5.

zugleich auch die Kraft an jeder Stelle des Feldes nach Größe und Richtung, wie ich sofort zeigen werde.

Man denke sich nämlich den beweglichen Punkt von der Stelle A aus, in der er sich vorher befand, nach irgendeinem Nachbarpunkte B (Abb. 5) verschoben. Dann ist das Potential V_B im Punkte B nach der vorher dafür gegebenen Definition

$$V_B = V_O - \left[\int_O^A \mathfrak{P} ds + \int_A^B \mathfrak{P} ds \right] = V_A - \mathfrak{P} ds,$$

denn für das Linienintegral längs des Weges AB kann, da dieser sehr klein sein sollte, einfach das Element $\mathfrak{P} ds$ gesetzt werden, wenn hierbei unter ds die Strecke AB selbst verstanden wird. Bezeichnet man ferner die Änderung, die das Potential V erfährt, wenn man von A nach B übergeht, mit dV , so kann die vorige Gleichung auch in der Form

$$dV = - \mathfrak{P} ds$$

angeschrieben werden. Aus dieser kann aber in der Tat sofort auf die Größe der in die Richtung von AB fallenden Komponente von \mathfrak{P} geschlossen werden, wenn man weiß, wie groß die zu ds gehörige Änderung von V ist. Bezeichnet man jene Feldkomponente, also die Projektion von \mathfrak{P} auf ds mit P' , so ist nämlich auch

$$dV = - P' ds \quad \text{und daher} \quad P' = - \frac{dV}{ds}. \quad (11)$$

Hiermit allein ist nun zwar \mathfrak{P} noch nicht bestimmt; man

beachte aber, daß diese Beziehungen für jede beliebige Verschiebungsrichtung AB gültig bleiben, und daß man daher die Projektion der gesuchten Kraft \mathfrak{P} auf jede beliebige Richtungslinie anzugeben vermag, womit auch \mathfrak{P} selbst gefunden werden kann. Am einfachsten ist es, die Projektionen von \mathfrak{P} auf drei rechtwinklig zueinander stehende Koordinatenachsen der xyz nach Gl. (11) zu berechnen. Man erhält dann für die drei Komponenten von \mathfrak{P}

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad P_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (12)$$

und \mathfrak{P} selbst wird als geometrische Summe dieser Komponenten, also mit Benutzung der Richtungsfaktoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ in der Form

$$\mathfrak{P} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (13)$$

gefunden. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, \mathfrak{P} anzugeben, wenn V überall bekannt ist und man sieht, daß hierzu nur eine Ausführung von Differentiationen erforderlich ist, die keine besonderen Schwierigkeiten verursachen kann.

Der mit dem negativen Vorzeichen versehene Differentialquotient $-\frac{\partial V}{\partial x}$ gibt an, um wieviel V in der Richtung der X -Achse auf die Längeneinheit des Weges bezogen an der betreffenden Stelle des Feldes abnimmt. Man bezeichnet diese Größe kürzer als das Potentialgefälle und faßt dann die Gl. (11) und (12) in der Aussage zusammen:

Die Komponente der Kraft in irgendeiner gegebenen Richtung ist gleich dem Potentialgefälle in dieser Richtung.

Auch die Richtung der Kraft \mathfrak{P} selbst läßt sich mit Hilfe dieser Bezeichnung in einfacher Weise angeben. Offenbar wird nämlich die Komponente von \mathfrak{P} am größten für eine Richtung, die mit \mathfrak{P} zusammenfällt. Hieraus folgt in Verbindung mit der vorigen Aussage:

Die Kraft des Feldes geht in der Richtung des größten Potentialgefälles und ihr Absolutbetrag ist gleich diesem Gefälle.

Schließlich erwähne ich noch, daß man Gl. (13) zweckmäßig in die abgekürzte Schreibweise

$$\mathfrak{P} = - \nabla V \quad (14)$$

zusammenfassen kann, in der ∇ ein „räumlicher Differentialoperator“ ist, nämlich an die Stelle von

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

tritt und hiermit jene Operation durch ein einziges Symbol kennzeichnet, durch die das Gefäll der Größe V gefunden wird. Als zweckmäßig ist übrigens diese Bezeichnung nicht etwa bloß deshalb anzusehen, weil Gl. (14) mit weniger Schriftzeichen geschrieben wird als Gl. (13) oder der damit gleichwertige Verein der Gl. (12), sondern weil es die Einheit der Vorstellung fördert, wenn einem an sich einfachen Begriffe, der selbst sprachlich durch ein einziges Wort („Potentialgefäll“ oder vielmehr noch kürzer „Gefäll“ überhaupt) wiedergegeben werden kann, auch in der Rechnung durch ein einfaches und nicht weiter zusammengesetztes Zeichen Ausdruck gegeben wird.

Zur besseren Veranschaulichung der vorausgehenden Betrachtungen dient eine sehr bekannte geometrische Konstruktion. Von einem Punkte des Kraftfeldes ausgehend, sucht man nämlich alle Nachbarpunkte auf, in denen das Potential den gleichen Wert besitzt. Alle diese Punkte liegen auf einem Flächenelemente, das senkrecht zur Feldkraft \mathfrak{P} gestellt ist, denn nur für eine Verschiebung $d\mathfrak{s}$ senkrecht zu \mathfrak{P} wird das zugehörige $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ und hiermit dV zu Null. Geht man hierauf in derselben Weise nach allen Seiten hin weiter fort, so erhält man eine Fläche, die jene Punkte des Feldes miteinander verbindet, für die das Potential denselben Wert V besitzt. Eine solche Fläche wird als eine Äquipotentialfläche oder kürzer als eine Niveaufläche bezeichnet.

Wir wollen annehmen, daß eine ganze Schar von solchen Niveauflächen im Felde konstruiert sei, und zwar derart, daß sich das Potential von je zwei aufeinanderfolgenden Flächen immer um den gleichen Betrag unterscheidet. Man kann dann

jede dieser Niveauflächen als eine Stufenfläche und die Schar aller Stufenflächen als eine Potentialtreppe bezeichnen. Je steiler diese Treppe ist, d. h. je dichter die Stufenflächen aufeinander folgen, um so größer ist an der betreffenden Stelle die Kraft des Feldes, die ja, wie wir aus Gl. (14) wissen, gleich dem Potentialgefälle ist. Hiernach kann man aus einer Zeichnung der Potentialtreppe alle Eigenschaften des Kraftfeldes ableiten. Der Abstand aufeinanderfolgender Stufenflächen gibt ein der unmittelbaren Abschätzung bequem zugängliches Maß für die Größe der Kraft, und die Richtung der Kraft wird durch die Normale zur Stufenfläche angegeben.

Häufig gibt man, um die Richtung der Kraft des Feldes besser hervortreten zu lassen, an Stelle der Potentialtreppe oder auch neben dieser die Kraftlinien an. Das sind Linien, die von irgendeinem Punkte des Feldes ausgehend, weiterhin überall der Richtung von \mathfrak{P} folgen. Die Richtung der Kraft an irgendeiner Stelle wird hiernach durch die Tangente an die Kraftlinie angegeben. Die Kraftlinien schneiden alle Niveauflächen rechtwinklig.

Aus dem Begriffe der Kraftlinie geht auch der Begriff der Kraftröhre hervor. Man versteht darunter den röhrenförmigen Raum, der von allen unmittelbar aufeinanderfolgenden Kraftlinien abgegrenzt wird, die man durch sämtliche Punkte des Umfangs irgendeines auf einer Niveaufläche enthaltenen Flächenstücks legen kann. Dieses Flächenstück bildet hiernach einen Querschnitt der Kraftröhre. Der Querschnitt bleibt im allgemeinen nicht konstant, sondern zu jeder folgenden Niveaufläche gehört ein anderer Querschnitt. Unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen (nämlich dann, wenn keine „Quellen des Kraftflusses“ in der Kraftröhre enthalten sind) ist die Kraft des Feldes an jeder Stelle dem Querschnitte der Kraftröhre umgekehrt proportional. In solchen Fällen kann man die Größe der Feldkraft auch danach abschätzen, wie dicht die Kraftlinien an der betreffenden Stelle zusammenrücken. Der Beweis der letzteren Behauptungen würde mich weiter führen, als es hier meine Absicht sein kann; ich erlaube mir

•

daher, den Leser, der sich mit diesen knappen Andeutungen nicht begnügen möchte, auf die im Jahre 1897 von mir veröffentlichte kleine Schrift „Die Geometrie der Wirbelfelder“ zu verweisen.

Das Kraftfeld, mit dem man es in der Mechanik gewöhnlich zu tun hat, ist das Schwerefeld der Erde. Innerhalb eines kleinen Raumes, etwa innerhalb eines Zimmers, kann die Schwerkraft nach Größe und Richtung gewöhnlich als konstant angesehen werden, obwohl ich nicht unerwähnt lassen möchte, daß man besondere Beobachtungsmethoden ausgedacht hat, die selbst die Änderungen des Feldes innerhalb so kleiner Räume erkennen lassen. Sehen wir aber davon ab, oder betrachten wir, wie man auch sagt, das Feld als homogen, so sind die Kraftlinien unter sich parallel; ihre Richtung ist die der Lotlinie. Die Niveauflächen sind horizontale Ebenen und jeder kommt ein Potential zu, das um so größer ist, je höher sie liegt. Die Potentialtreppe ist hier überall gleich steil, da die einzelnen Stufenflächen in gleichen Abständen übereinander liegen.

In einem größeren Bezirke macht sich aber die Krümmung der Niveauflächen bemerkbar. Streng wissenschaftlich gesprochen versteht man unter der Gestalt der Erde nichts anderes, als die Gestalt jener Fläche gleichen Potentials, die über dem Meere unter normalen Umständen mit der Wasseroberfläche zusammenfällt. Daraus erklärt sich auch die Bezeichnung der Niveauflächen. Jene praktisch besonders wichtige Niveaufläche wird auch als das Geoid bezeichnet. — Hier möge von diesen Dingen nur noch erwähnt werden, daß der Begriff des Höhenunterschiedes zweier Punkte der Erdoberfläche (z. B. die Höhe einer Bergspitze über dem Meere) in der gewöhnlichen Fassung einer strengeren Kritik nicht Stand hält. Eindeutig bestimmbar ist vielmehr nur der Potentialunterschied beider Punkte. In der Tat wird auch der Höhenunterschied der Punkte, wenn er in gewöhnlicher Weise durch ein genaues Nivellement bestimmt wird, etwas verschieden gefunden (auch abgesehen von den unvermeidlichen Beobach-

tungsfehlern), je nach dem Wege, längs dessen das Nivellement erfolgte. Man macht sich am einfachsten auf folgende Weise klar, daß dies gar nicht anders erwartet werden kann. Man denke sich durch beide Punkte, etwa A und B , Abb. 6, deren Höhenunterschied ermittelt werden soll, je eine Niveaufläche gelegt. Ein denkbarer Weg für die Ausführung des Nivellements würde dann darin bestehen, daß man zuerst von B



Abb. 6.

senkrecht in die Höhe steigt, bis B' die Erhebung BB' mißt und dann stets horizontal von B' nach A fortschreitet. Der Höhenunterschied von A und B würde dann gleich BB' gefunden.

Man sieht aber nun sofort, daß man anstatt dessen auch von B längs der Niveaufläche bis A' fortschreiten und dann erst von hier nach A hinaufsteigen könnte. Im letzten Falle würde der Höhenunterschied gleich AA' gefunden. Im allgemeinen sind aber AA' und BB' keineswegs gleich miteinander; wenn die Fallbeschleunigung zwischen A und A' kleiner ist, als zwischen B und B' , muß, weil $\int \mathfrak{P} ds$ für beide Strecken gleich ist, die Höhe AA' im selben Verhältnis größer sein, als die bei B gefundene Höhe BB' . — Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen gehört der höheren Geodäsie an.

Die Kraftlinien dürfen übrigens, wie ich hier noch besonders betonen möchte, nicht mit den Bahnen verwechselt werden, die ein im Kraftfelde frei beweglicher materieller Punkt einzuschlagen vermag. Wenn der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit in das Feld gebracht wird, fängt er zwar im ersten Augenblicke seine Bewegung in der Richtung der Kraftlinie an. Aber nur dann, wenn die Kraftlinie gerade ist (wie es genau genug bei der gewöhnlichen Fallbewegung zutrifft), vermag der Punkt ihr dauernd zu folgen; im anderen Falle biegt er aus leicht verständlichen Gründen alsbald von ihr ab.

Durch Verbindung der Gleichung der lebendigen Kraft mit der Definitionsgleichung für das Potential gelangt man schließlich noch für den im Felde frei beweglichen Punkt zu einem einfachen Resultate. Für die Bewegung von einer

Stelle 1 des Feldes nach irgendeiner anderen Stelle 2 hat man beim frei beweglichen Punkte nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$\int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = L_2 - L_1,$$

wobei zur Abkürzung die lebendige Kraft mit L bezeichnet wurde. Andererseits ist aber nach Gl. (10)

$$V_2 = V_1 - \int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s},$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen miteinander folgt

$$V_2 + L_2 = V_1 + L_1, \quad (15)^*$$

d. h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie bleibt während der Bewegung konstant.

§ 4. Die einfache harmonische Schwingung.

Ein materieller Punkt sei einer Zentralkraft unterworfen, die der Entfernung vom Anziehungszentrum direkt proportional ist. Solange er mit dem Anziehungszentrum selbst zusammenfällt, fehlt jeder Anlaß zu einer Bewegung. Sobald er aber durch irgendeine äußere Ursache aus dieser Gleichgewichtslage entfernt und hierauf sich selbst überlassen wird, führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, die man als einfache harmonische oder auch als Sinusschwingungen bezeichnet und deren Gesetze hier näher untersucht werden sollen.

Vorher möge indessen noch darauf hingewiesen werden, daß die Bedingungen für das Eintreten solcher Bewegungen sehr häufig gegeben sind. Vor allem sind es elastische Kräfte, unter deren Einfluß harmonische Schwingungen zustande kommen. Denkt man sich etwa einen Körper, der als materieller Punkt aufgefaßt werden kann, durch elastische Bänder an einer bestimmten Stelle festgehalten, so vermag man ihn immer noch ein wenig aus dieser Ruhelage zu entfernen. Dabei werden die elastischen Bänder, durch die er festgehalten war,

etwas angespannt und diesen Formänderungen entsprechen elastische Kräfte, die unter Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes der Verschiebung des materiellen Punktes proportional und nach dem Anfangspunkte hin gerichtet sind. Hiermit ist also in der Tat das Auftreten einer der Entfernung direkt proportionalen Zentralkraft physikalisch verwirklicht.

Gewöhnlich kann man freilich einen Körper, von dem man sagt, daß er harmonische Schwingungen ausführe, nicht ohne weiteres als materiellen Punkt ansehen. Vielmehr treten unter den verschiedensten Umständen Schwingungen auf, die ihren Wirkungsgesetzen nach vollständig mit den harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes zusammenfallen und die man daher auch selbst als harmonische bezeichnet. Dies trifft z. B. bei den sehr häufig vorkommenden Dreh-schwingungen eines Körpers um eine festliegende Achse, also etwa eines Körpers zu, der am unteren Ende eines Drahtes aufgehängt ist und unter dem Einflusse der Torsionselastizität des Drahtes schwingt (Torsionspendel, Drehwage). Auch selbst Vorgänge, die ganz außerhalb des Bereichs der Mechanik liegen, bezeichnet man als harmonische Schwingungen, weil sie den gleichen zeitlichen Verlauf nehmen, so daß die in der Dynamik des materiellen Punktes dafür abgeleiteten Formeln bei entsprechender Deutung der darin vorkommenden Buchstaben-größen ohne weiteres auf jene Fälle angewendet werden können. Dies trifft namentlich bei gewissen elektrischen Schwin-gungen zu. So kommt es, daß die harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes nur das einfachste Beispiel für eine Reihe verschiedener Schwingungsvorgänge bilden, bei deren Untersuchung von den hier durchzuführenden Betrachtungen mit geringen Änderungen immer wieder Gebrauch ge-macht wird.

Nach diesen Bemerkungen, die mir erforderlich schienen, um die große Tragweite hervorzuheben, die ihm zukommt, wende ich mich jetzt zur Behandlung des einfachen Falles, um den es sich hier handelt. Dabei möge zunächst außerdem noch angenommen werden, daß die Schwingungen gerad-

linig erfolgen. Dies wird sicher geschehen, wenn der materielle Punkt etwas aus der Gleichgewichtslage verrückt und hierauf ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen wurde, denn Kraft und Geschwindigkeit sind dann während der ganzen Bewegung stets längs derselben Geraden gerichtet, auf der die Bewegung erfolgt.

Es wird nützlich sein, über das Kraftfeld, in dem sich die Schwingung vollzieht, einige Erörterungen vorzuschicken, die mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffen zusammenhängen. Die Kraftlinien sind hier sämtlich geradlinig und nach dem Anfangspunkte gerichtet. Die Niveauflächen sind konzentrische Kugelflächen. Die Stufenflächen der Potentialtreppe liegen um so enger zusammen, je weiter man sich vom Anfangspunkte entfernt. Wählt man die Konstante V_0 in Gl. (10), wenn O den Anfangspunkt bedeutet, gleich Null, so wird das Potential V_A im Abstände a nach jener Gleichung

$$V_A = \int_0^a cx \cdot dx = c \frac{a^2}{2}.$$

Hierbei ist nämlich die Kraftlinie als Integrationsweg gewählt; c ist ein Proportionalitätsfaktor, durch dessen Multiplikation mit x die Kraft im Abstände x gefunden wird, also mit anderen Worten die Stärke des Feldes im Abstände 1 vom Anfangspunkte. Das in Gl. (10) vor dem Integrale stehende Minuszeichen fällt hier weg, denn in unserem Falle ist \mathfrak{P} nach dem Anfangspunkte gerichtet und $d\mathfrak{s}$ ist, weil wir von O nach A hin integrieren, entgegengesetzt gerichtet. Für $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ erhält man daher hier $-cx \cdot dx$.

Der Ausdruck für das Potential V gibt zugleich die elastische Formänderungsarbeit jener Bänder oder Teile an, die den materiellen Punkt in die Ruhelage zurückzuführen suchen. In der Tat ist im vorliegenden Falle das Potential nur eine andere Bezeichnung für die in der Festigkeitslehre unter dem Namen Formänderungsarbeit so häufig benutzte Größe.

Je weiter wir uns vom Anfangspunkte entfernen, desto größer wird V . Im Verlaufe der Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes bleibt aber nach Gl. (15) die gesamte Energie $V + L$ konstant. Daraus folgt, daß der Punkt immer innerhalb jener kugelförmigen Niveaulfläche bleiben muß, deren Potential gerade gleich dieser Gesamtenergie ist. Schon hieraus folgt, daß die Bewegung jedenfalls in einer Schwingung bestehen muß.

Die dynamische Grundgleichung liefert sofort die Differentialgleichung der Bewegung. Ich wähle die Gerade, längs der die Schwingung erfolgt, zur X -Achse, bezeichne die Masse des materiellen Punktes mit m , den Proportionalitätsfaktor, der die Stärke des Feldes beschreibt und der als gegeben zu betrachten ist, wie vorher schon mit c ; dann lautet die Gleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx. \quad (16)$$

Durch das Minuszeichen ist dem Umstande Rechnung getragen, daß die Kraft nach dem Ursprunge geht, während die Abszisse x nach außen hin wächst. — Von Gl. (16) kennt man die allgemeinste, also mit zwei Konstanten versehene Lösung; sie lautet

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \quad (17)$$

worin A und B die willkürlichen Integrationskonstanten bedeuten, α aber eine Konstante ist, die aus Gl. (16) gefunden wird. Differentiiert man nämlich x zweimal nach t , so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t),$$

also vom Minuszeichen abgesehen, das α^2 -fache von x . Nach Gl. (16) soll dagegen $\frac{d^2x}{dt^2}$ das $-\frac{c}{m}$ -fache von x sein. Daraus folgt, daß jedenfalls

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (18)$$

gesetzt werden muß. Wenn dies geschieht, befriedigt aber Gl. (17) die Differentialgleichung (16) identisch.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Integrationskonstanten A und B aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Zu diesem

Zwecke möge festgesetzt werden, daß die Zeit t von einem Augenblicke an gerechnet werden soll, in dem x gleich Null war. Dazu muß nach Gl. (17) das den Kosinus der Zeit enthaltende Glied verschwinden, also $B = 0$ sein. Es bleibt hiernach

$$x = A \sin \alpha t \quad (19)$$

und die hier noch vorkommende Integrationskonstante A hat eine einfache und leicht ersichtliche Bedeutung. Sie stellt nämlich den größten Wert dar, den x im Verlaufe der Zeit periodisch immer wieder annimmt, wenn der Sinus gleich der Einheit wird. Hiernach ist A der größte Schwingungsausschlag oder die Amplitude der Schwingung. Diese muß entweder direkt gegeben sein oder sie muß sich aus den Anfangsbedingungen, die bekannt sein müssen, wenn man imstande sein soll, den weiteren Verlauf der Bewegung vorauszusagen, berechnen lassen. Wäre z. B. die Geschwindigkeit v_0 bekannt, mit der der Punkt zu Anfang der Zeit durch den Gleichgewichtspunkt ging, so hätte man aus Gl. (19)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t, \quad \text{also} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha A$$

und hieraus folgte

$$A = \frac{v_0}{\alpha} \quad \text{und schließlich} \quad x = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Der Wert x in Gl. (19) nimmt öfters wieder die früheren Werte an. Dies geschieht jedenfalls immer dann wieder, wenn der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um eine volle Umdrehung oder um 2π gewachsen ist. Auch in der Zwischenzeit nimmt der Sinus noch einmal den anfänglichen Wert an. Je nach der Lage, von der man hierbei ausgeht, dauert es aber bis dahin verschieden lang. Man achtet daher nicht auf diese erste Wiederkehr des Punktes in die vorige Lage, sondern erst auf die folgende, die stets nach Zuwachs des Winkels αt um 2π erfolgt und von der ab sich nachher beim weiteren Verlaufe der Zeit der Bewegungsvorgang genau wieder in derselben Weise wiederholt. Man nennt die Zeit, die währenddessen verstreicht, also jene Zeit, die einem

Anwachsen von αt um 2π entspricht, die Dauer einer vollen Schwingung. Wählt man dafür den Buchstaben T , so hat man

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (20)$$

Besonders zu beachten ist hierbei, daß T ganz unabhängig von A , also von der Amplitude der Schwingung ist. Die Schwingungsdauer hängt vielmehr nur von der Masse des schwingenden Punktes und von der durch den Faktor c ausgedrückten Stärke der elastischen Kraft ab, die ihn nach der Gleichgewichtslage hinzieht. Man nennt solche Schwingungen, deren Dauer unabhängig von der Größe des Schwingungsausschlags ist, *isochron*, und die hiermit ausgedrückte Eigenschaft ist als die wichtigste der harmonischen Schwingungen zu betrachten.

Zuweilen zieht man es vor, die Schwingung nur während der Zeit zu betrachten, in der die ganze Schwingungsbahn einmal in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird, also die Rückkehr des Punktes gar nicht abzuwarten und als Schwingungsdauer nur jene Zeit zu rechnen, in der $\sin \alpha t$ von -1 bis $+1$ wächst. Dabei nimmt der Winkel αt um π zu und diese einfache Schwingungsdauer, wie man sie zum Unterschiede von der vorigen nennt, ist genau die Hälfte von T .

Bisher war nur von der geradlinigen harmonischen Schwingung die Rede. Der allgemeinere Fall, zu dem ich jetzt übergehe, läßt sich aber in ganz ähnlicher Weise erledigen. Er liegt immer dann vor, wenn der bewegliche Punkt zu irgendeiner Zeit einmal eine Geschwindigkeit hatte, deren Richtungslinie nicht durch den Anfangspunkt ging, und weiterhin ohne äußere Einwirkung den Kräften des Feldes überlassen wurde. In Abb. 7 bedeutet O das Kraftzentrum (oder die Gleichgewichtslage des beweglichen Punktes), A die Lage, die der Punkt zur Zeit t einnimmt und v die Geschwindigkeit. Die elastische Kraft kann hier nach Größe und Richtung durch den Ausdruck

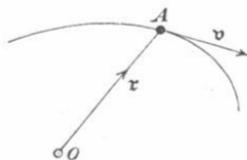


Abb. 7.

$$- cr$$

dargestellt werden, wenn c dieselbe Bedeutung hat wie vorher. Durch das Minuszeichen wird ausgedrückt, daß die Kraft dem Radiusvektor \mathbf{r} entgegengesetzt gerichtet ist. Die dynamische Grundgleichung lautet jetzt

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -c \mathbf{r}$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{r} = \mathfrak{A} \sin \alpha t + \mathfrak{B} \cos \alpha t,$$

wenn wiederum \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die Integrationskonstanten bedeuten, die aber jetzt als gerichtete Größen aufzufassen sind, während α dieselbe Bedeutung wie vorher hat, also gleich dem durch Gl. (18) angegebenen Werte zu setzen ist. In der Tat überzeugt man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung leicht, daß diese durch ihn für jede beliebige Wahl von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} erfüllt ist. — Zu Anfang der Zeit t möge \mathbf{r} gleich \mathbf{a} und die Geschwindigkeit \mathbf{v} gleich \mathbf{v}_0 gewesen sein. Hierdurch bestimmen sich die Integrationskonstanten zu

$$\mathfrak{B} = \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathbf{v}_0}{\alpha},$$

so daß nach Einsetzen des Wertes von α die vollständig bestimmte Lösung lautet

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + \mathbf{a} \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (21)$$

Auch diese Bewegung ist eine periodische, denn sobald der Winkel $t \sqrt{\frac{c}{m}}$ um 2π gewachsen ist, wiederholen sich in derselben Reihenfolge wieder alle Werte des Radiusvektors \mathbf{r} von neuem. Der bewegliche Punkt durchläuft demnach in steter Reihenfolge unbegrenzt oft eine in sich geschlossene Kurve. Die Zeit, die er zu einem vollen Umlaufe braucht, nennen wir wieder die Dauer einer vollen Schwingung und bezeichnen sie wiederum mit T . Dabei wird T aus der Bedingung

$$T \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi, \quad \text{also} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

gefunden. Dieser Wert stimmt aber genau mit dem in Gl. (20) für die geradlinige Schwingung gefundenen überein. Wir erkennen hieraus, daß die Schwingungen auch noch im allgemeinsten Falle isochron sind, d. h., daß die Schwingungsdauer nicht nur von der Größe des Ausschlags, sondern auch von der besonderen Gestalt der Bahn unabhängig ist.

Es fragt sich jetzt noch, welche Form die Bahn besitzt. Auch diese Frage kann mit Hilfe von Gl. (21) sofort beantwortet werden. Diese Gleichung bildet nämlich in der Sprache der Vektorenrechnung schon von selbst die Gleichung der Bahn, und zwar stellt sie die Gleichung einer Ellipse dar, deren Mittelpunkt mit dem Kraftzentrum O zusammenfällt. Da aber die analytische Geometrie heutzutage an Stelle der Vektoren stets mit deren Komponenten oder Koordinaten rechnet, bleibt mir noch übrig, Gl. (21) in zwei Komponenten zu zerlegen, um damit auf die übliche Darstellungsform zu kommen. Um diesen Übergang auf möglichst einfache Art bewirken zu können, nehme ich an, daß als Anfangspunkt der Zeitrechnung, auf den sich auch die zusammengehörigen Werte von \mathbf{a} und \mathbf{v}_0 beziehen, ein Augenblick gewählt worden sei, in dem sich der bewegliche Punkt gerade im größten oder auch im kleinsten Abstände vom Kraftzentrum befand. Dann steht in diesem Augenblicke die Bewegungsrichtung rechtwinklig zum Radiusvektor, d. h. es ist $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{a}$. Hiermit entsprechen die beiden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (21) schon von selbst den beiden rechtwinkligen Komponenten von \mathbf{r} . Wenn wir dann noch die Richtung von \mathbf{a} zur Richtung der X -Achse wählen und die Y -Achse in die Richtung von \mathbf{v}_0 legen, erhalten wir aus Gl. (21) für die Komponenten x und y von \mathbf{r} , d. h. für die Koordinaten des beweglichen Punktes die Gleichungen

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin t \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir den veränderlichen Winkel mit Hilfe einer sehr bekannten Umformung, indem wir

$$\sin^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} + \cos^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{-y}{v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}}\right)^2 = 1$$

setzen. Damit sind wir aber in der Tat zu der gewöhnlichen Form der Mittelpunktsleichung einer Ellipse gelangt, deren Halbachsen gleich a und gleich $v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}$ sind. Diese Ellipse bildet die gesuchte Bahn des beweglichen Punktes.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, daß auch bei der harmonischen Schwingung der vom Kraftzentrum gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, da diese Eigenschaft, wie früher bewiesen wurde, allen Zentralbewegungen zukommt.

§ 5. Andere Fälle der harmonischen Schwingungen.

Schon vorher wurde bemerkt, daß die Lehre von der

harmonischen Schwingung eines einzelnen materiellen Punktes mit geringen Änderungen auch auf die Behandlung von vielen anderen Fällen übertragen werden kann, bei denen harmonische Schwingungen auftreten. Wenn es nun auch nicht möglich ist, eine größere Zahl von solchen Fällen hier im einzelnen zu besprechen, so soll dies doch mit zwei der einfachsten und wichtigsten geschehen, während einige andere noch unter den Aufgaben am Schlusse des Abschnittes zur Sprache kommen werden.

Der erste Fall, um den es sich hier handelt, betrifft die einfachen Drehschwingungen eines starren Körpers unter dem Einflusse der Torsionselastizität eines Stabes, durch den er festgehalten ist oder, wie man sie zur Abkürzung oft nennt, die Torsionsschwingungen. Abb. 8 bezieht sich auf ein Beispiel dafür. Eine kreisförmige Scheibe A , die in

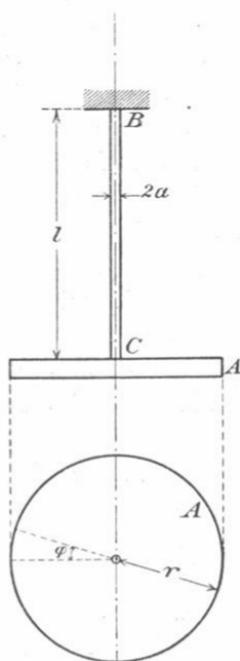


Abb. 8.

Aufriß und Grundriß gezeichnet ist, sei am unteren Ende C eines senkrecht herabhängenden Stabes (einer Welle oder eines Drahtes) BC befestigt, dessen oberes Ende bei B eingeklemmt ist. Läßt man an der Scheibe in ihrer horizontalen Ebene ein Kräftepaar angreifen, so wird der die Scheibe tragende Stab BC auf Verdrehen beansprucht. Dadurch entsteht eine elastische Formänderung, durch die die Scheibe um den Verdrehungswinkel φ des Stabes aus ihrer Gleichgewichtslage gedreht wird. Entfernt man hierauf das Kräftepaar wieder, so schwingt die Scheibe nach der Gleichgewichtslage zurück, geht dann, wegen der lebendigen Kraft, die sie inzwischen erlangt hat, über die Gleichgewichtslage hinaus und führt darauf harmonische Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, die ohne Hinzutreten einer Dämpfung unbegrenzt lange fort dauern würden.

Mit den Schwingungen des materiellen Punktes stehen die Torsionsschwingungen in einem besonders einfachen Zusammenhang. Dieser rührt davon her, daß für die Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse eine Gleichung gilt, die sich an die dynamische Grundgleichung für die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes aufs engste anschließt. Schon in Band I (S. 200, Gl. (81) d. 3. Aufl.) ist diese Gleichung abgeleitet worden und sie lautet

$$\Theta \frac{du}{dt} = Pp,$$

worin Pp das Moment des die Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ der Drehbewegung hervorbringenden Kräftepaares und Θ das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment des starren Körpers bedeutet.

Während der Körper die Schwingung ausführt, wirkt auf ihn nur das durch die Verdrehungselastizität des Stabes hervorgerufene Kräftepaar ein, dessen Moment dem augenblicklichen Werte des Verdrehungswinkels φ proportional ist und vorläufig gleich $c\varphi$ gesetzt werden kann, wenn unter c eine Konstante verstanden wird, deren Wert später noch ermittelt werden soll. Für die Winkelbeschleunigung $\frac{d\varphi}{dt}$ kann man

auch $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ schreiben und die Differentialgleichung der Bewegung geht hiermit über in

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c\varphi. \quad (22)$$

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite rührt davon her, daß das Torsionsmoment den Körper stets in die Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, also bei einem positiven Wert des Winkels φ eine negative und bei einem negativen Werte von φ eine positive Winkelbeschleunigung hervorbringt.

Gl. (22) stimmt der Form nach genau mit der Differentialgleichung (16) der geradlinigen Schwingung des materiellen Punktes überein. An Stelle des Weges ist hier nur der Winkelweg φ und an Stelle der Masse m das Trägheitsmoment Θ getreten. Auch die aus Gl. (16) hervorgegangenen Folgerungen, nämlich die Gleichungen (17) bis (20) können daher hierher sofort übernommen werden, indem man dieselben Buchstabenvertauschungen damit vornimmt. Insbesondere erhält man für die Dauer einer vollen Schwingung nach Gl. (20)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{c}}. \quad (23)$$

Den Wert der Konstanten c endlich kann man aus den Formeln der Festigkeitslehre entnehmen, insbesondere für den Fall, daß der Stab BC einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser a hat, aus Gl. (225) von Bd. III (S. 309 d. 3. Aufl.).

$$\Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}.$$

Beachtet man, daß an Stelle von $\Delta\varphi$ hier kürzer φ geschrieben wurde, so ist dies gleichbedeutend mit

$$M = \frac{\pi a^4 G}{2l} \cdot \varphi,$$

und da wir das Verdrehungsmoment M vorher gleich $c\varphi$ gesetzt hatten, folgt daraus für c

$$c = \frac{\pi a^4 G}{2l}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (23) ein, so erhalten wir die Schwingungsdauer in der weiter ausgerechneten Form

$$T = \frac{2}{a^2} \sqrt{\frac{2\pi l \Theta}{G}}. \quad (24)$$

In dieser Form gilt die Gleichung nicht nur für eine scheibenförmige Gestalt des schwingenden Körpers, sondern für irgendeinen Umdrehungskörper. Für die zahlenmäßige Ausrechnung von T muß zuvor dessen Trägheitsmoment Θ ermittelt werden. Dieses läßt sich auf jeden Fall auch in der Form

$$\Theta = \frac{Q}{g} i^2.$$

darstellen, wenn unter Q das Gewicht des schwingenden Körpers, unter $\frac{Q}{g}$ dessen Masse und unter i sein Trägheitshalbmesser verstanden wird. Hiermit geht Gl. (24) über in

$$T = \frac{2i}{a^2} \sqrt{\frac{2\pi l Q}{gG}}. \quad (25)$$

Für eine Scheibe, also für eine zylindrische Gestalt des schwingenden Körpers ist

$$i = \frac{r}{2} \sqrt{2}.$$

wenn der Halbmesser mit r bezeichnet wird, wie schon aus der Lösung von Aufg. 21 des 3. Bandes (S. 204 d. 3. Aufl.) hervorgeht. Für diesen besonderen Fall geht daher Gl. (25) über in

$$T = \frac{2r}{a^2} \sqrt{\frac{\pi l Q}{gG}}. \quad (26)$$

Unter l ist in diesen Formeln die Länge des Stabes und unter G der Schubelastizitätsmodul zu verstehen.

Der andere Fall harmonischer Schwingungen, der hier besprochen werden soll, wird durch Abb. 9 erläutert. Ein Stab, der an

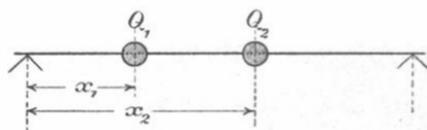


Abb. 9.

beiden Enden unterstützt ist, trage an den Stellen x_1 und x_2 zwei Massen von den Gewichten Q_1 und Q_2 , die sich als

materielle Punkte ansehen lassen und denen gegenüber die Masse des Stabes als verschwindend klein betrachtet werden soll. Wenn der Stab einen beliebigen Anstoß erlitten hat, vermag er Biegungsschwingungen auszuführen, wobei wir uns damit begnügen wollen, nur ebene Schwingungen in Betracht zu ziehen, so zwar, daß die Schwingungsebene durch eine Hauptträgheitsachse des Stabquerschnittes geht, obschon auch der allgemeinere Fall in ähnlicher Weise behandelt werden könnte. Die beiden punktförmigen Massen führen dann geradlinige Schwingungen aus, die aus einer Übereinanderlagerung von je zwei einfachen harmonischen Schwingungen bestehen. Daß sich hier der ganze Bewegungsvorgang aus zwei Einzelschwingungen zusammensetzt, hat darin seinen Grund, daß die Bewegung jeder Masse Durchbiegungen des ganzen Stabes mit sich bringt, die zugleich auf die Bewegung der anderen Masse einwirken. Die Schwingungen der beiden Massen sind, wie man sich ausdrückt, miteinander gekoppelt.

Die Lasten Q_1 und Q_2 werden schon im Ruhezustande eine gewisse Durchbiegung des Stabes hervorbringen, um die wir uns aber jetzt nicht zu kümmern brauchen. Bei den Schwingungen kommt es nur auf die Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage an. Zu irgendeiner Zeit t seien diese mit y_1 und y_2 bezeichnet. Der Stab hat dann zu dieser Zeit eine entsprechende Verbiegung angenommen. Vom Biegungszustande hängen aber die Kräfte ab, die der Stab auf Q_1 und Q_2 ausübt. Im Gleichgewichtszustande sind diese Kräfte gleich den Gewichten Q_1 und Q_2 und entgegengesetzt gerichtet. Wenn die Biegungspfeile aber um y_1 und y_2 vermehrt werden, wachsen auch die Kräfte, und der Überschuß bringt eine entsprechende Beschleunigung der Massen hervor. Nach Gl. (102) S. 179 d. 3. Aufl. von Band III können wir

$$y_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 \quad \text{und} \quad y_2 = \alpha_{22}P_2 + \alpha_{21}P_1$$

setzen, wenn die zugehörigen Kräfte mit P und die Einflußzahlen mit α bezeichnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Masse des Stabes als verschwindend klein vorausgesetzt wurde und daher andere Kräfte, als die zur Beschleunigung

der Massen von Q_1 und Q_2 dienenden für die augenblickliche Biegunsgestalt des Stabes nicht in Betracht kommen, abgesehen natürlich von den durch P_1 und P_2 hervorgerufenen Auflagerkräften.

Löst man die vorstehenden Gleichungen nach P_1 und P_2 auf, so erhält man

$$P_1 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_2,$$

$$P_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_2 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_1,$$

wobei zu beachten ist, daß nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ gesetzt werden kann. Zur Abkürzung mag hier vorläufig geschrieben werden

$$P_1 = \beta_1 y_1 - \gamma y_2; \quad P_2 = \beta_2 y_2 - \gamma y_1.$$

Die dynamische Grundgleichung liefert jetzt sofort die Bewegungsgleichungen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_1}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -(\beta_1 y_1 - \gamma y_2), \\ \frac{Q_2}{g} \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -(\beta_2 y_2 - \gamma y_1). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Das sind zwei simultane Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten y_1 und y_2 , aus denen wir die eine leicht eliminieren können. Lösen wir nämlich die erste nach y_2 auf und setzen den Wert in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir, wenn zur Abkürzung m an Stelle von $\frac{Q}{g}$ geschrieben wird

$$m_1 m_2 \frac{d^4 y_1}{dt^4} + (m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\beta_1 \beta_2 - \gamma^2) y_1 = 0, \quad (28)$$

und genau dieselbe Gleichung muß auch für y_2 erfüllt sein, wie sich ergibt, wenn man umgekehrt y_1 eliminiert. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist von der Form

$$y_1 = A_1 \sin \lambda_1 t + B_1 \cos \lambda_1 t + C_1 \sin \lambda_2 t + D_1 \cos \lambda_2 t, \quad (29)$$

worin $A_1 B_1 C_1 D_1$ die vier willkürlichen Integrationskonstanten sind, an deren Stelle in der sonst gleichlautenden Lösung für y_2 vier andere Konstanten $A_2 B_2 C_2 D_2$ treten, während die Konstanten λ_1 und λ_2 aus der „charakteristischen“ Gleichung gefun-

den werden, nämlich aus der Gleichung, die sich ergibt, wenn man eins der vier Glieder, aus denen sich y_1 zusammensetzt, in die Differentialgleichung einsetzt. Man findet dann die Gleichung

$$m_1 m_2 \lambda^4 - (m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1) \lambda^2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma^2 = 0. \quad (30)$$

Diese Gleichung liefert zwei positive und zwei ebenso große negative reelle Wurzeln, von denen es aber nur auf die beiden positiven ankommt, die die gesuchten Werte der Konstanten λ_1 und λ_2 angeben. Man findet nach einfacher Umrechnung

$$\lambda^2 = \frac{1}{2 m_1 m_2} \left\{ (m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1) \pm \sqrt{(m_1 \beta_2 - m_2 \beta_1)^2 + 4 m_1 m_2 \gamma^2} \right\}$$

oder auch, wenn man die β und γ wieder in den Einflußzahlen α ausdrückt,

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 \pm \sqrt{(\alpha_{11} m_1 - \alpha_{22} m_2)^2 + 4 m_1 m_2 \alpha_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}. \quad (31)$$

An Stelle der Einflußzahlen kann man auch die statischen Durchbiegungen $f_{11} f_{12}$ usf. einführen, die von den Lasten Q_1 und Q_2 in den beiden Querschnitten hervorgerufen werden, wenn die eine oder andere dieser Lasten allein angebracht wird. Dann ist z. B.

$$m_1 \alpha_{11} = \frac{Q_1}{g} \alpha_{11} = \frac{f_{11}}{g}$$

zu setzen usf. Man muß nur beachten, daß jetzt f_{12} und f_{21} im allgemeinen nicht mehr gleich untereinander sind, wie das von den zugehörigen Einflußzahlen zutrif. Die Gleichung geht hiermit über in

$$\lambda^2 = g \frac{f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} - f_{22})^2 + 4 f_{12} f_{21}}}{2 (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})}. \quad (32)$$

Je nachdem man das obere oder untere Wurzelvorzeichen nimmt, erhält man daraus λ_1 oder λ_2 . Nachdem diese bekannt sind, findet man auch die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der beiden einfachen harmonischen Schwingungen, aus denen sich die ganze Bewegung y_1 nach Gl. (29) zusammensetzt. Die beiden ersten Glieder durchlaufen nämlich jedesmal die ganze

Wertreihe wieder von neuem, wenn der Winkel $\lambda_1 t$ um 2π angewachsen ist, woraus die entsprechende Zeitdauer T_1

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \text{und ebenso} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

folgt. Die beiden Schwingungsdauern sind demnach nur von den statischen Durchbiegungen f_{11} usf. abhängig, die von den Lasten hervorgebracht werden, dagegen von der Art des Anstoßes und der dadurch bewirkten Schwingungsamplitude jeder einzelnen der beiden Schwingungen vollständig unabhängig.

Die Formeln umfassen natürlich auch den einfacheren Fall, daß der Stab nur eine Masse trägt, denn um darauf zu kommen, braucht man in der vorhergehenden Entwicklung nur überall Q_2 oder m_2 gleich Null zu setzen. Damit werden auch f_{12} und f_{22} zu Null, während f_{11} und f_{21} von Null verschieden bleiben.

Setzt man in Gl. (28) $m_2 = 0$, so geht sie in eine Differentialgleichung 2. Ordnung, d. h. in die Differentialgleichung der einfachen harmonischen Schwingung über, wobei nur an Stelle der in Gl. (16) eingeführten Konstanten c der hier zutreffende besondere Wert tritt. Hieraus folgt dann die Schwingungsdauer. Man kann diese aber auch aus Gl. (31) entnehmen. Setzt man nämlich in dieser $m_2 = 0$, so folgt $\lambda_1 = \infty$, während λ_2 in der Form $\frac{0}{0}$ gefunden wird. Der erste Wert hat keine Bedeutung, da er zu einer Schwingungsdauer $= 0$ führt; der andere dagegen kann nach den gewöhnlichen Vorschriften der Differentialrechnung ermittelt werden, indem man Zähler und Nenner des Bruches nach m_2 differenziert und hierauf erst m_2 gleich Null setzt. Führt man dies aus, so erhält man für die Schwingungsdauer nach einfacher Umrechnung

$$T = 2\pi\sqrt{\alpha_{11} m_1},$$

wofür man auch unter Einführung des Biegungs Pfeiles f_{11}

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f_{11}}{g}} \quad (33)$$

schreiben kann.

Die in Gl. (29) vorkommenden Integrationskonstanten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für die allgemeine Lösung der Aufgabe sind aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Diese können z. B. darin bestehen, daß für den Anfangszustand, also für die Zeit $t = 0$, sowohl die Lage als die Geschwindigkeit beider Massen, also die Werte von y_1 , y_2 , $\frac{dy_1}{dt}$ und $\frac{dy_2}{dt}$ gegeben sind. Um aus diesen Bedingungen die Konstanten zu ermitteln, muß man beachten, daß die Konstanten $A_2 B_2 C_2 D_2$ in der Lösung von y_2 durch die Werte von $A_1 B_1 C_1 D_1$ schon mitgegeben sind. Setzt man nämlich y_1 aus Gl. (29) in die erste der Differentialgleichungen (27) ein, so erhält man für y_2

$$y_2 = \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_1^2}{\gamma} (A_1 \sin \lambda_1 t + B_1 \cos \lambda_1 t) \\ + \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_2^2}{\gamma} (C_1 \sin \lambda_2 t + D_1 \cos \lambda_2 t).$$

Bezeichnet man die Anfangswerte durch Anhängen des Zeigers 0, so hat man demnach zur Ermittlung der Integrationskonstanten die vier Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} B_1 + D_1 &= (y_1)_0, \\ A_1 \lambda_1 + C_1 \lambda_2 &= \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0, \\ \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_1^2}{\gamma} B_1 + \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_2^2}{\gamma} D_1 &= (y_2)_0, \\ \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_1^2}{\gamma} \lambda_1 A_1 + \frac{\beta_1 - m_1 \lambda_2^2}{\gamma} \lambda_2 C_1 &= \left(\frac{dy_2}{dt}\right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

die man leicht nach den Unbekannten auflösen kann, wenn es sich um ein Zahlenbeispiel handelt.

Um das Anschreiben von zu langen Formeln zu vermeiden, möge die Rechnung in Buchstabengrößen nur noch für den besonderen Fall weiter durchgeführt werden, daß Q_1 und Q_2 eine symmetrische Belastung des Balkens bilden, d. h. daß $Q_1 = Q_2$ und zugleich $x_1 + x_2$ gleich der Spannweite l des Balkens ist. Dann vereinfachen sich alle Formeln wesentlich, indem auch $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist, womit Gl. (31) übergeht in

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_{11} \pm \alpha_{12}}{m(\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)}.$$

Man hat daher

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{m(\alpha_{11} - \alpha_{12})}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{m(\alpha_{11} + \alpha_{12})}},$$

und die Gleichungen (34) gehen über in

$$\begin{aligned} B_1 + D_1 &= (y_1)_0, \\ A_1 \lambda_1 + C_1 \lambda_2 &= \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0, \\ -B_1 + D_1 &= (y_2)_0, \\ -A_1 \lambda_1 + C_1 \lambda_2 &= \left(\frac{dy_2}{dt}\right)_0, \end{aligned}$$

deren Auflösung liefert

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\lambda_1} \left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dy_2}{dt}\right)_0 \right), \\ B_1 &= \frac{1}{2} \left((y_1)_0 - (y_2)_0 \right), \\ C_1 &= \frac{1}{2\lambda_2} \left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)_0 \right), \\ D_1 &= \frac{1}{2} \left((y_1)_0 + (y_2)_0 \right). \end{aligned}$$

Führt man noch an Stelle der Einflußzahlen die Ordinaten der elastischen Linie im Gleichgewichtszustande f_{11} und f_{12} ein, so erhält man für die Schwingungsdauern der beiden sich übereinander lagernden einfachen harmonischen Schwingungen

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{11} - f_{12}}{g}} \quad \text{und} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{11} + f_{12}}{g}}. \quad (35)$$

Die Durchsenkungen f_{11} und f_{12} sind in bekannter Weise nach den Lehren von Band III aus der Gleichung der elastischen Linie zu berechnen.

Durch die vorstehenden Formeln ist der ganze Schwingungsvorgang vollständig beschrieben.

§ 6. Gedämpfte Schwingungen.

Die bisher untersuchten Schwingungsbewegungen müßten, wenn sie einmal angeregt wären und dann vor allen äußeren Störungen geschützt werden könnten, unbegrenzt lange andauern, ohne jemals zu erlöschen oder sich auch nur irgendwie zu verändern. In Wirklichkeit beobachten wir aber stets, daß

eine einmal angeregte Schwingung allmählich „abklingt“, d. h. daß die Schwingungsauslässe allmählich immer kleiner werden, bis sie sich zuletzt jeder Wahrnehmung entziehen. Der Grund dafür ist in besonderen Bewegungswiderständen, wie Reibung, Luftwiderstand, unvollkommene Elastizität usw. zu suchen, die bisher vernachlässigt wurden. Um uns dem wirklichen Vorgange mehr zu nähern, wollen wir jetzt annehmen, daß außer der elastischen Kraft des Feldes auch noch ein „dämpfender Widerstand“ von irgendeiner Art auf den beweglichen Punkt einwirke, der in jedem Augenblicke der Bewegung des Punktes entgegenwirkt. Zugleich müssen wir aber, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, noch eine nähere Voraussetzung über das Wirkungsgesetz dieses Widerstandes einführen. Es steht nun zwar frei, die Rechnung unter verschiedenen Annahmen dieser Art durchzuführen und sich im gegebenen Falle dann für jenes Widerstandsgesetz zu entscheiden, bei dessen Wahl die Rechnungsergebnisse am besten mit der Beobachtung übereinstimmen. Man begnügt sich aber gewöhnlich mit der einfachsten Annahme, die sich machen läßt, nämlich, daß der Widerstand in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sei. Wenn der dämpfende Widerstand in der Hauptsache im Luftwiderstande besteht und die Geschwindigkeiten der Schwingungsbewegung nicht sehr erheblich sind, trifft diese Annahme, wie aus der Übereinstimmung der daraus abgeleiteten Formeln mit den Beobachtungen zu schließen ist, in der Tat ziemlich genau zu. Noch besser ist die Voraussetzung erfüllt, wenn die Dämpfung etwa dadurch erfolgt, daß ein Magnet in der Nähe einer Kupfermasse schwingt, wobei die elektrischen Ströme, die durch die Bewegung in dem Kupferkörper induziert werden, einen sehr kräftigen dämpfenden Widerstand auf die Schwingungsbewegung ausüben. Dieser Fall liegt bei vielen physikalischen Meßinstrumenten vor.

Setzen wir jetzt voraus, daß diese Annahme genau genug zutrefte und beschränken wir uns außerdem der Einfachheit wegen zunächst auf die Untersuchung einer geradlinigen Schwin-

gung, so nimmt die dynamische Grundgleichung hier die Gestalt an

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - k \frac{dx}{dt}. \quad (36)$$

Sie unterscheidet sich von der früheren nur dadurch, daß das Glied $k \frac{dx}{dt}$ auf der rechten Seite neu hinzugetreten ist. Dieses Glied entspricht aber seinem Baue nach der Annahme, die wir für den dämpfenden Widerstand machten, denn es stellt das Produkt aus einem konstanten Faktor k , der die Größe der Dämpfung im gegebenen Falle mißt und der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ dar. Wenn man $k = 0$ setzt, geht die Gleichung wieder in jene für die ungedämpfte harmonische Schwingung über.

Das negative Vorzeichen, mit dem das Dämpfungsglied in die Gleichung eingeführt ist, rechtfertigt sich damit, daß für einen positiven Wert von $\frac{dx}{dt}$, wenn sich also der Punkt, wie man sagen kann, auf der Ausreise befindet, der Widerstand sich dieser Bewegung widersetzt, also nach dem Koordinatenursprunge hin oder entgegengesetzt zur Richtung der positiven x gerichtet ist. Bei der Rückreise des Punktes ist $\frac{dx}{dt}$ an sich negativ; damit wird das Dämpfungsglied positiv und es zeigt eine Kraft an, die im Sinne der positiven x geht, die sich also auch hier der Bewegung widersetzt. Man erkennt hieraus, daß die Gleichung in der angeschriebenen Form in der Tat jederzeit die Bedingungen der Bewegung richtig wiedergibt.

Um Gl. (36) zu integrieren, setze man

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung ein, so geht sie über in

$$m(\alpha^2 Ae^{\alpha t} + \beta^2 Be^{\beta t}) + c(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}) + k(A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige Werte von A und B identisch erfüllt sein soll, zerfällt sie in die beiden Gleichungen

$$Ae^{\alpha t}(m\alpha^2 + c + k\alpha) = 0,$$

$$Be^{\beta t}(m\beta^2 + c + k\beta) = 0,$$

die für jeden Wert von t und für beliebige Werte von A und B erfüllt sein müssen. Hiernach müssen, wenn der für x angegebene Ausdruck die richtige Lösung der Gl. (36) bilden soll, α und β so bestimmt werden, daß die beiden Klammerwerte zu Null werden, d. h. α und β sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$mz^2 + c + kz = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung liefert

$$z = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}},$$

also, wenn wir den hierin vorkommenden Wurzelwert zur Abkürzung mit γ bezeichnen,

$$\alpha = -\frac{k}{2m} + \gamma; \quad \beta = -\frac{k}{2m} - \gamma.$$

Die Werte von α und β könnten zwar auch miteinander vertauscht werden, womit aber an der allgemeinen Form des Ausdruckes von x nichts geändert würde, da auch A und B vorläufig nur zwei ebenfalls miteinander vertauschbare Symbole für ganz beliebig zu wählende Werte sind. — Die allgemeine Lösung von Gl. (36) ist demnach von der Form

$$x = Ae^{-\frac{k}{2m}t} e^{\gamma t} + Be^{-\frac{k}{2m}t} e^{-\gamma t}. \quad (37)$$

Hier sind nun zwei wesentlich voneinander verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem der mit γ bezeichnete Wurzelwert reell oder imaginär ist. Im ersten Falle, den wir zunächst voraussetzen wollen, kann die Lösung in der Form von Gl. (37) unmittelbar beibehalten werden. Diese Lösung stellt aber überhaupt keine Schwingung mehr dar, weil x hier als eine nichtperiodische Funktion der Zeit gefunden ist. Nehmen wir, um die fernere Untersuchung zu vereinfachen, an, daß zu Anfang der Zeit t der Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 durch den Ursprung gegangen sei, so erhalten wir für die Konstanten A und B die beiden Grenzbedingungen

$$0 = A + B \quad \text{und} \quad v_0 = A\left(-\frac{k}{2m} + \gamma\right) + B\left(-\frac{k}{2m} - \gamma\right),$$

woraus man durch Auflösen nach A und B findet

$$A = \frac{v_0}{2\gamma} \quad \text{und} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma}.$$

Durch Einsetzen der hiermit bestimmten Werte in Gl. (37) geht diese über in

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}), \quad (38)$$

wofür auch, unter Benutzung des schon in Band II bei der Untersuchung der Kettenlinie eingeführten Begriffes des hyperbolischen Sinus kürzer

$$x = \frac{v_0}{\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t} \sinh \gamma t \quad (38a)$$

geschrieben werden kann.

Dieser Ausdruck kann sein Vorzeichen bei wachsendem t nicht ändern, denn $e^{-\gamma t}$ ist für ein positives t immer ein echter Bruch, während $e^{\gamma t}$ stets größer als Eins bleibt. Der Punkt bleibt also, wenn er diese Bewegung ausführt, vom Augenblicke $t = 0$ an stets auf derselben Seite der Koordinatenachse. Für $t = \infty$ liefert Gl. (38) wieder $x = 0$, denn aus der Definition von γ folgt, daß $\frac{k}{2m}$ jedenfalls größer ist als γ . Der größte Ausschlag, den der Punkt erreicht, und die Zeit, zu der dies geschieht, kann nach der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima aus Gl. (38) ermittelt werden, womit ich mich aber jetzt nicht aufhalten will. Jedenfalls ist durch die bisherigen Auseinandersetzungen der allgemeine Verlauf der Bewegung bereits hinreichend gekennzeichnet. Eine solche Bewegung heißt eine aperiodische; sie ist dann zu erwarten, wenn die Dämpfung sehr stark ist (z. B. beim sogenannten ballistischen Galvanometer). Jedenfalls muß der Dämpfungsfaktor k mindestens den Wert

$$k = 2\sqrt{mc}$$

erhalten. Sobald k kleiner ist, wird der mit γ bezeichnete Wurzelwert imaginär und dann treten wieder Schwingungen ein, die wir jetzt weiter untersuchen wollen.

In diesem Falle ist die Wurzel

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

ein reeller Wert und für γ können wir in den vorausgehenden Entwicklungen

$$\gamma = i\gamma'$$

setzen. Hiermit geht Gl. (38) über in

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma't} - e^{-i\gamma't}}{2i}.$$

Nach einer bekannten Formel der Analysis ist aber für den hier als letzter Faktor auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck kürzer $\sin \gamma't$ zu setzen. Wir erhalten so für die gedämpften Schwingungen die fertige Lösung

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \gamma't. \quad (39)$$

Übrigens steht es auch frei, wenn man diesen Übergang von den imaginären zu den reellen Werten vermeiden will, die Richtigkeit von Gl. (39) unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung (36) und Vergleich mit den vorgeschriebenen Grenzbedingungen nachzuweisen.

Der Hauptunterschied zwischen Gl. (39) und der die ungedämpften harmonischen Schwingungen darstellenden Gl. (19)

$$x = A \sin \alpha t$$

besteht in dem Hinzutreten der Exponentialfunktion $e^{-\frac{k}{2m}t}$ als Faktor. Solange noch wenig Zeit von Beginn der Bewegung an verstrichen ist, unterscheidet sich dieser Faktor nur wenig von der Einheit; die Bewegung erfolgt bis dahin fast ebenso wie eine ungedämpfte. Wenn die Dämpfung k sehr klein ist, kann schon eine ganze Anzahl von Schwingungen verstreichen, bevor sich eine Änderung des Schwingungsschlags bemerklich macht. Sobald aber t einmal so groß geworden ist, daß der Exponentialfaktor erheblich von 1 verschieden ist, nimmt dann innerhalb Zeiten, die mit dieser vergleichbar sind, der Schwingungsausschlag sehr schnell ab. War z. B. für eine

gewisse Zeit t_1 der Exponentialfaktor gleich $\frac{1}{2}$, so ist er nach $2t_1$ gleich $\frac{1}{4}$, nach $3t_1$ gleich $\frac{1}{8}$ und nach $10t_1$ schon gleich $\frac{1}{1024}$, also in den meisten Fällen schon ganz unmerklich geworden. Dieses rapide Erlöschen ist ja überhaupt die hervorstechendste Eigenschaft der mit Hilfe einer Exponentialfunktion beschriebenen physikalischen Gesetzmäßigkeiten.

Die Definition einer vollen Schwingung muß hier anders gefaßt werden, als bei der ungedämpften Bewegung. Wir wollen darunter eine Bewegung aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite, die Rückkehr von da, dann den Ausschlag nach der anderen Seite, bis schließlich der Punkt abermals in der Gleichgewichtslage angelangt ist, verstehen. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß auch die gedämpfte Schwingung isochron ist. In die Gleichgewichtslage ist nämlich der Punkt immer dann wieder zurückgekehrt, wenn $\sin \gamma' t$ zu Null wird. Dies trifft zu, wenn der Winkel $\gamma' t$ wieder um π oder ein Vielfaches davon gewachsen ist. Zur Dauer T einer vollen Schwingung gehört demnach ein Zuwachs des Winkels um 2π und daraus folgt

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}}. \quad (40)$$

Dieser Ausdruck ist in der Tat ganz unabhängig von der Zeit, die seit Beginn der Bewegung verstrichen ist oder von dem Werte, auf den sich der Schwingungsausschlag seitdem vermindert hat. Wenn die Schwingungsausschläge kleiner werden, nehmen auch die Geschwindigkeiten entsprechend ab, so daß zum Durchlaufen der kleineren Wege immer noch ebensoviel Zeit gebraucht wird als bei den größeren.

Dagegen ist die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung größer als die der ungedämpften. — Wenn man $k = 0$ setzt, geht Gl. (40) wieder in Gl. (20) über.

Die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes folgt aus Gl. (39) durch Differentiation nach der Zeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t \right).$$

Die Geschwindigkeit wird jedesmal zu Null bei einer Umkehr aus einer Bewegungsrichtung in die andere. Für die Umkehrzeiten hat man daher die Bedingung

$$\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma' t = \frac{2m\gamma'}{k} = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{k}.$$

Diesen Wert nimmt die Tangente von $\gamma' t$ immer von neuem wieder an, wenn der Winkel $\gamma' t$ um π , 2π , 3π usw. gewachsen ist. Daraus folgt aber, daß die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten immer gleich groß und, wie aus Gl. (40) hervorgeht, gleich der Hälfte einer vollen Schwingungsdauer ist.

Aus der $\operatorname{tg} \gamma' t$ berechnen wir zunächst $\sin \gamma' t$ nach der goniometrischen Formel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

also in unserem Falle nach Einsetzen des für $\operatorname{tg} \gamma' t$ gefundenen Wertes

$$\sin \gamma' t = \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}}. \quad (41)$$

Wir brauchen nur diesen Wert in Gl. (39) einzusetzen, um danach die Größe des Schwingungsausgangs oder x_{\max} zu berechnen. Diese Schwingungsamplitude sei mit a bezeichnet und ferner, um sie mit den vorausgegangenen oder den folgenden vergleichen zu können, mit a_n , wobei n angeben soll, der wievielte Schwingungsausgang seit Beginn der Zeit t gerade vorliegt. Wir erhalten dann

$$a_n = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}},$$

oder, wenn man hier außerdem noch den Wert von γ' einführt,

$$a_n = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m}t}. \quad (42)$$

Den genaueren Wert von t muß man sich aus Gl. (41) berechnen und in den Exponentialfaktor eingesetzt denken. Beim

nächsten Schwingungsausschlage, der nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wird ebenso

$$a_{n+1} = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m} t'}$$

gefunden, denn die Bedingung (41) für die Zeiten der Bewegungsumkehr gilt für alle Schwingungsausschläge in derselben Weise. Geändert hat sich daher in a_{n+1} gegenüber a_n nur der Exponentialfaktor, indem an Stelle von t die Zeit t' getreten ist. Nun ist aber, wie vorher schon bemerkt wurde,

$$t' = t + \frac{T}{2} = t + \frac{2\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}},$$

hiernach kann a_{n+1} auf einfache Weise aus a_n abgeleitet werden, indem man

$$a_{n+1} = a_n \cdot e^{-\frac{k}{4m} T} = a_n \cdot e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}}} \quad (43)$$

setzt. Das Verhältnis $a_{n+1} : a_n$ ist hiernach konstant, d. h. die aufeinanderfolgenden Schwingungsamplituden bilden eine geometrische Reihe. Geht man zu den natürlichen Logarithmen über, so erhält man aus (43)

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{kT}{4m}. \quad (44)$$

Die Logarithmen aufeinanderfolgender Schwingungsausschläge unterscheiden sich demnach immer um den gleichen Wert. Dieser wird das logarithmische Dekrement der Schwingung genannt. Es kann gewöhnlich leicht durch unmittelbare Beobachtung der Bewegung ermittelt werden und Gl. (44) dient dann dazu, den Dämpfungsfaktor k zu berechnen.

Beobachtet man nur Ausschläge, die nach derselben Seite gehen, so ist das logarithmische Dekrement, wie aus Gl. (44) sofort folgt, doppelt so groß als dort angegeben. Ferner kann man anstatt der Ausschläge auch die Längen der aufeinanderfolgenden ganzen Schwingungsbahnen miteinander vergleichen. Für ein solches Verhältnis hat man nach der Bedeutung von a den Ausdruck

$$\frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2} + a_{n+3}}.$$

Bezeichnet man nun vorübergehend zur Abkürzung das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen mit μ , so wird $a_{n+1} = \mu a_n$ usf., und für den vorausgehenden Bruch erhält man

$$\frac{1 + \mu}{\mu^2 + \mu^3} = \frac{1}{\mu^2},$$

d. h. das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungsbahnen ist ebenso groß als das Verhältnis von zwei nach derselben Seite hin gehenden Ausschlägen und das logarithmische Dekrement ist hierfür doppelt so groß, als der in Gl. (44) dafür angegebene Wert.

Der Vergleich dieses Gesetzes der Abnahme der Schwingungsweiten mit der Beobachtung bietet ein einfaches Mittel, um die über den dämpfenden Widerstand gemachte Annahme auf ihre Richtigkeit oder ihre Genauigkeit in einem gegebenen Falle zu prüfen.

Anmerkung. Schließlich sei noch bemerkt, daß man auch die krummlinige gedämpfte Schwingung in ganz ähnlicher Weise behandeln kann, indem man an Stelle von Gl. (36) allgemeiner

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -c \mathbf{r} - k \frac{d \mathbf{r}}{dt}$$

setzt. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet wiederum

$$\mathbf{r} = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} \cdot e^{\beta t},$$

wobei für α und β dieselben Werte wie im früheren Falle einzusetzen sind. Auch sonst lassen sich die früheren Betrachtungen sinngemäß wiederholen, was als nützliche Übung hier empfohlen werden möge.

§ 7. Dämpfung durch gewöhnliche Reibung.

Während vorher angenommen war, daß die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit gesetzt werden könne, wollen wir jetzt noch den Fall betrachten, daß sie von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Wenn die Dämpfung von einer gewöhnlichen Reibung zwischen festen Körpern herrührt, kommt man nämlich mit dieser Annahme dem wirklichen Verhalten des schwingenden Körpers näher als mit der anderen, obschon ja aus der Besprechung der Reibung in Band I schon bekannt

ist, daß auch bei der Reibung zwischen festen Körpern die Geschwindigkeit nicht ganz ohne Einfluß ist. Davon wollen wir aber hier absehen.

In Abb. 10 sei O das Anziehungszentrum und die dadurch gezogene horizontale Gerade die Schwingungsbahn des materiellen Punktes von der

Masse m , dessen augenblickliche Lage durch die in dieser Richtung positiv gezählte Abszisse x angegeben werden soll. Wir wollen ferner zu-

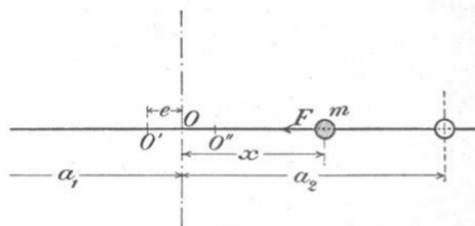


Abb. 10.

nächst annehmen, daß $\frac{dx}{dt}$ positiv sei. Die Reibung von dem konstanten Betrage F wirkt der Bewegung entgegen, also hier in negativer Richtung. An Stelle von Gl. (36) des vorigen Paragraphen tritt dann die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - F. \quad (45)$$

In dieser Form gilt die Gleichung aber nur für den zunächst angenommenen Fall, daß sich m in positiver Richtung bewegt. Dagegen ist es gleichgültig, ob x selbst positiv oder negativ ist, d. h. die Gleichung gilt für das einmalige Durchlaufen der Schwingungsbahn von dem Ausschlage a_1 auf der linken Seite (in der Zeichnung) bis zur Erreichung des Ausschlages a_2 auf der rechten Seite.

Bei der darauffolgenden Bewegung im umgekehrten Sinne hat dagegen die Reibung das Vorzeichen gewechselt, da sie jederzeit der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet ist und die vorige Gleichung ist daher zu ersetzen durch

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + F. \quad (46)$$

Hierdurch wird ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem früheren Falle herbeigeführt, in dem die Reibung als proportional mit der Geschwindigkeit vorausgesetzt wurde. In Gl. (36) wechselte nämlich das die Reibung darstellende Glied

$k \frac{dx}{dt}$ mit $\frac{dx}{dt}$ von selbst das Vorzeichen, so daß die Gl. (36) zu jeder Zeit unverändert in derselben analytischen Form beibehalten werden konnte, während wir hier dem Vorzeichenwechsel der Reibung in anderer Weise Rechnung tragen müssen. Es mag noch erwähnt werden, daß man in derselben Weise zu verfahren hätte, wenn man eine Dämpfung in Betracht ziehen wollte, die mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional wäre. Denn in diesem Falle würde die Dämpfung durch ein Glied von der Form $k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ in der Bewegungsgleichung darzustellen sein, das ebenfalls von selbst keinen Vorzeichenwechsel erfährt, wenn man die Bewegungsrichtung umkehrt. Man würde daher gleichfalls zwei Bewegungsgleichungen anzuschreiben haben, die abwechselnd für die Bewegungen in entgegengesetzten Richtungen gültig sind.

Bleiben wir bei der Untersuchung von Gl. (45) stehen, so können wir diese dadurch vereinfachen, daß wir an Stelle von F eine Strecke e einführen, die sich aus

$$e = \frac{F}{c} \quad (47)$$

berechnen läßt. Gl. (45) lautet hiermit

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c(x + e).$$

Da e konstant ist, kann dafür auch

$$n \frac{d^2(x + e)}{dt^2} = -c(x + e)$$

geschrieben werden. Das ist aber genau übereinstimmend mit der Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung, die unter dem Einflusse eines Anziehungszentrums O' erfolgt, das von O aus um die Strecke e nach links hin liegt. Die Lösung lautet genau entsprechend Gl. (17)

$$x + e = A \sin at + B \cos at, \quad (48)$$

wobei a und hiermit die Schwingungsdauer denselben Wert behalten wie früher. Hiernach fällt auch O' genau in die Mitte der ganzen Schwingungsbahn, die wir jetzt betrachten.

Dagegen ist O um e aus der Mitte verschoben, d. h. wir haben

$$a_2 = a_1 - 2e. \quad (49)$$

Nun können wir zur Untersuchung der Bewegung in der entgegengesetzten Richtung schreiten, wobei wir natürlich genau in derselben Weise verfahren können. Gl. (46) läßt sich in der Form

$$m \frac{d^2(x-e)}{dt^2} = -c(x-e)$$

schreiben, deren Lösung sich zu

$$x - e = A' \sin at + B' \cos at$$

ergibt. Auch diese Bewegung erfolgt wieder genau so, als wenn gar keine Reibung vorhanden, dafür aber das Anziehungszentrum von O um den Betrag e nach rechts, also nach O'' verschoben wäre. Der nächstfolgende Ausschlag a_3 nach links hin folgt daher aus a_2 wiederum durch Subtraktion von $2e$, d. h.

$$a_3 = a_2 - 2e. \quad (50)$$

Übrigens wäre es gar nicht einmal nötig gewesen, dieses Ergebnis von neuem aus Gl. (46) abzuleiten, denn Gl. (45) gilt auch sofort für die Bewegung in jeder Richtung, wenn man sich nur vorbehält, jedesmal die Richtung der positiven x mit der Bewegungsrichtung umzukehren. Gl. (50) ist dann schon eine notwendige Folge von Gl. (49). Allgemein hat man daher für zwei aufeinander folgende Schwingungsausschläge

$$a_{n+1} = a_n - 2e. \quad (51)$$

Die Ausschläge bilden daher hier eine arithmetische Reihe, während sie in dem häufiger vorkommenden Falle, der im vorigen Paragraphen behandelt wurde, eine geometrische Reihe bildeten. Ferner erlöschen hier die Schwingungen nicht dadurch, daß sie schließlich unbegrenzt klein werden, sondern sie brechen plötzlich ab. Wenn nämlich ein Schwingungsausschlag kleiner geworden ist, als $2e$, so hört weiterhin die Gültigkeit von Gl. (51), in der die a nur positive Größen bedeuten können, auf. Ist dieser Wert von a zugleich kleiner als e , so ist damit die Bewegung überhaupt beendet, da die elastische Kraft die Reibung nicht mehr

überwinden kann; der schwingende Körper bleibt einfach auf der Strecke zwischen O' und O'' liegen. Wenn dagegen der letzte nach Gl. (51) berechnete Wert a größer als e und kleiner als $2e$ ist, so erfolgt noch ein letzter Schwingungsweg, der aber den Punkt nicht mehr über die Gleichgewichtslage O hinauszuführen vermag. Der Punkt bleibt dann in einem Abstände a_m von O liegen, der sich aus

$$a_m = 2e - a_{m-1}$$

berechnet, wobei a_{m-1} den letzten nach Gl. (51) berechneten Ausschlag a bedeutet.

Besonders hervorzuheben ist noch, daß auch die durch eine konstante Reibung gedämpften Schwingungen isochron sind. Dabei ist aber die Schwingungsdauer nicht wie in dem früheren Falle durch die Dämpfung vergrößert, sondern sie bleibt genau so groß, als wenn die Schwingungen ganz ungedämpft wären.

Erste Anmerkung. Die krummlinige Schwingung, die durch eine konstante Reibung gedämpft wird, ist hier bedeutend schwieriger zu behandeln, als in dem entsprechenden Falle des vorigen Paragraphen. Dazu wären die folgenden simultanen Differentialgleichungen zu lösen

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -c(\mathbf{r} + \mathbf{e}),$$

$$\mathbf{V} \mathbf{e} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}^2 = e^2,$$

worin e dieselbe Bedeutung hat wie vorher, also eine Konstante angibt, während die Richtung von \mathbf{e} veränderlich ist, und zwar so, daß sie, wie die zweite Gleichung ausspricht, mit der Geschwindigkeit jederzeit in dieselbe Gerade fällt. Hätte man die allgemeine Lösung der Gleichungen gefunden, so wäre nachträglich noch bei der Bestimmung der Integrationskonstanten Rücksicht darauf zu nehmen, daß \mathbf{e} der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet ist.

Daß eine Lösung der Gleichungen möglich sein muß, folgt aus der physikalischen Bedeutung, die ihnen zukommt. Sie wird aber nicht leicht zu finden sein und ich glaube nicht, daß sie bereits gelungen wäre. Praktisch hätte die Lösung übrigens ohnehin keinen großen Wert.

Zweite Anmerkung. Endlich mag hier noch die geradlinige Schwingung besprochen werden, die gegen eine mit dem Quadrate

der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung erfolgt. Auch in diesem Falle gelangt man zur Lösung, indem man für jede Bewegungsrichtung eine besondere Gleichung aufstellt. Für die Bewegung im Sinne der positiven x lautet die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + cx = 0.$$

Gegenüber Gl. (36) im vorigen Paragraphen ist nur das Quadrat der Geschwindigkeit an Stelle der ersten Potenz getreten; dem entsprechend hat hier auch k eine etwas andere Bedeutung. Für die Bewegung im entgegengesetzten Sinne ist das Vorzeichen des Gliedes $k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ umzukehren.

Betrachtet man $\frac{dx}{dt}$ als die unbekannte Veränderliche, so läßt sich die Gleichung für diese integrieren, und zwar findet man

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{cm}{2k^2} \left(1 - \frac{2k}{m}x + Ce^{-\frac{2k}{m}x} \right)}.$$

Dabei ist C die willkürliche Integrationskonstante. Von der Richtigkeit der Lösung überzeugt man sich leicht durch Einsetzen des Wertes in die Differentialgleichung.

Zu Anfang des betrachteten Schwingungsweges war die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ gleich Null und $x = -a_0$, wenn a_0 den zugehörigen Schwingungsausschlag bezeichnet, der jedenfalls nach der negativen Richtung hin erfolgte. Aus dieser Grenzbedingung erhält man

$$C = -e^{-\frac{2k}{m}a_0} \left(1 + \frac{2k}{m}a_0 \right),$$

womit die vorige Gleichung übergeht in

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{cm}{2k^2} \left\{ 1 - \frac{2k}{m}x - e^{-\frac{2k}{m}(x+a_0)} \left(1 + \frac{2k}{m}a_0 \right) \right\}}.$$

Am Ende des Schwingungsweges wird $\frac{dx}{dt}$ wieder zu Null und $x = a_1$, wenn der jetzt in der positiven Richtung gehende Ausschlag mit a_1 bezeichnet wird. Man erhält daher a_1 aus der Lösung der transzendenten Gleichung

$$1 - \frac{2k}{m}a_1 = \left(1 + \frac{2k}{m}a_0 \right) e^{-\frac{2k}{m}(a_1+a_0)},$$

die sich im allgemeinen Falle nur durch Probieren auflösen läßt.

Wenn dagegen k ziemlich klein ist, genügt es, die Exponentialfunktion durch eine auf wenige Glieder erstreckte Reihenentwicklung zu ersetzen und dadurch eine brauchbare Näherungsformel abzuleiten.

Schreibt man vorübergehend an Stelle von $\frac{2k}{m}a_0$ zur Abkürzung z_0 usf., so lautet die Gleichung

$$1 - z_1 = (1 + z_0) \left(1 - (z_0 + z_1) + \frac{(z_0 + z_1)^2}{2} - \frac{(z_0 + z_1)^3}{6} + \dots \right).$$

Läßt man alle Glieder weg, die eine höhere Potenz von z_0 oder z_1 als die dritte enthalten, so kommt man auf eine quadratische Gleichung für z_1 , nämlich

$$z_1^2 - z_1(3 + z_0) = 2z_0^2 - 3z_0.$$

Löst man diese auf, entwickelt die Wurzel und läßt die höheren Potenzen von z_0 weg, so erhält man für z_1 den Näherungswert

$$z_1 = z_0 \left(1 - \frac{2}{3} z_0 \right),$$

oder wenn man wieder zur früheren Bezeichnung zurückkehrt,

$$a_1 = a_0 \left(1 - \frac{4k}{3m} a_0 \right).$$

Dieselbe Formel kann natürlich auch dazu verwendet werden, um den nächstfolgenden Ausschlag a_2 aus a_1 zu berechnen usf. Aus der Formel folgt, daß die Abnahme des Ausschlags während einer einfachen Schwingung einen um so kleineren Bruchteil des Ausschlags ausmacht, je kleiner der Ausschlag selbst wird.

Für die Schwingungsdauer erhält man

$$T = 2 \int_{-a_0}^{+a_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{cm}{2k^2} \left\{ 1 - \frac{2k}{m}x - \left(1 + \frac{2k}{m}a_0 \right) \cdot e^{-\frac{2k}{m}(x+a_0)} \right\}}}.$$

Im allgemeinen Falle ist man auf eine mechanische Auswertung des Integrals angewiesen. Für ein kleines k kann indessen auch hier in derselben Weise wie vorher eine Näherungsformel abgeleitet werden. Die Schwingungen sind in diesem Falle nicht mehr isochron.

§ 8. Erzwungene Schwingungen.

Bisher war zuerst angenommen worden, daß die elastische Kraft oder die „Kraft des Feldes“ allein auf den beweglichen Punkt einwirke und dann, daß neben ihr noch ein dämpfender

Widerstand zu berücksichtigen sei. Jetzt wollen wir unsere Betrachtung noch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, daß außerdem zugleich noch eine andere, unmittelbar gegebene Kraft an dem materiellen Punkte angreife. Die in diesem Falle zustande kommenden Schwingungen werden als „erzwungene“ bezeichnet, im Gegensatze zu den „freien“ oder, wie man gewöhnlich sagt, zu den „Eigenschwingungen“ des Punktes.

Die Lehre von den erzwungenen Schwingungen ist, wie ich zuvor bemerken möchte, nach verschiedenen Richtungen hin von großer Bedeutung für die Erklärung physikalischer Vorgänge. Dabei handelt es sich freilich auch hier wieder meist um Fälle, bei denen das einfache Bild des materiellen Punktes zur vollständigen Beschreibung des Vorgangs nicht genügt. Das hindert aber nicht, daß sich der zeitliche Verlauf der Schwingungen in allen wesentlichen Punkten mit jenem deckt, der bei einem einzelnen materiellen Punkte zu erwarten wäre. Um mit dem Gegenstande vertraut zu werden, tut man daher am besten, diese Schwingungserscheinungen unter Voraussetzung möglichst einfacher Verhältnisse, also am einzelnen materiellen Punkte zu studieren. Man kann sich dabei immerhin vorbehalten, das Anwendungsgebiet dieser Betrachtungen unter entsprechender Berücksichtigung der Besonderheiten des einzelnen Falles später weiter auszudehnen. So ist es auch zu verstehen, wenn ich jetzt zur Erläuterung der physikalischen Bedeutung der uns hier beschäftigenden Untersuchung einige Fälle erzwungener Schwingungen als Beispiele anführe.

Wenn man zwei Stimmgabeln von ungefähr gleicher Tonhöhe auf einem Tische aufstellt und die eine anschlägt, gerät auch die andere ins Tönen. In diesem Falle sind es die von der ersten Stimmgabel ausgehenden Schallwellen, die beim Auftreffen auf die zweite Stimmgabel an dieser periodisch wechselnde Kräfte ausüben, die zu den elastischen Kräften dieser Stimmgabel selbst und zu ihrem dämpfenden Widerstande hinzutreten und eine Schwingungsbewegung zuerst einleiten und deren weiteren Verlauf regeln. In solchen Fällen

nennt man die Bewegung der zweiten Stimmgabel auch oft ein „Mitschwingen“ und die ganze Erscheinung führt den Namen „Resonanz“. In anderen Fällen wird der erste Körper, von dem der Anstoß ausgeht, als der „Erreger“, der andere als der „Empfänger“ bezeichnet. So kommt bei den bekannten Hertz'schen Versuchen mit elektrischen Schwingungen und bei der daraus hervorgegangenen drahtlosen Telegraphie ein Erreger oder „Oszillator“ vor, von dem die elektrischen Wellen ausgesendet werden, und ein Resonator oder Empfänger, in dem erzwungene Schwingungen entstehen, die durch die an ihnen beobachteten Erscheinungen einen Rückschluß auf die Wellenzüge im Luftraume zulassen.

Als ferneres Beispiel führe ich die Schwingungen eines Schiffes an. Wenn dieses im ruhigen Wasser aus der Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst überlassen wird, führt es pendelnde Bewegungen aus, die im großen ganzen den für die gedämpften Schwingungen abgeleiteten Gesetzen folgen. Sobald nun das Wasser selbst in Wellenbewegungen begriffen ist, kommen hierzu äußere Anstöße, die zu erzwungenen Schwingungen führen. Diese können sehr gefährlich werden, wenn die Schwingungsdauer der Wasserwellen zufällig ziemlich genau mit der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen des Schiffes zusammenfällt. In diesem Falle spricht man wieder von einer Resonanz der Schwingungen, womit hiernach ein besonderer Fall der erzwungenen Schwingungen gekennzeichnet wird. — Auch im ruhigen Wasser kann übrigens das Schiff in erzwungene Schwingungen versetzt werden, wenn eine Maschine in ihm umläuft, deren Massen nicht so ausgeglichen sind, das periodisch wechselnde Anstöße auf den Schiffskörper vermieden werden. Hierher gehören ferner auch die durch taktmäßiges Marschieren einer Menschenmasse über eine Brücke hervorgerufenen erzwungenen Schwingungen¹⁾ und noch manche andere Erscheinungen von verwandter Art.

1) Diese Aufgabe ist von Prof. H. Reißner ausführlich behandelt worden; zuerst auf Grund einer ungenaueren Annahme, durch die die Schwingungen von Brückenträgern auf erzwungenen Schwingungen eines

Um die erzwungenen Schwingungen näher untersuchen zu können, muß man natürlich zuvor wissen, welchem Gesetze die äußere Kraft folgt, die diese Schwingungen hervorbringt. Wie aus den zuvor angeführten Beispielen hervorgeht, handelt es sich dabei um periodisch der Richtung nach wechselnde Kräfte. Das einfachste Gesetz eines solchen periodischen Wechsels wird durch eine Sinus- (oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, durch eine Kosinus-) Funktion der Zeit ausgesprochen. Ich werde daher jetzt annehmen, daß auf den beweglichen materiellen Punkt außer der elastischen Kraft und dem dämpfenden Widerstande noch eine Kraft von außen her einwirkt, die gleich

$$P \sin \eta t$$

ist, worin P , d. h. der größte Absolutbetrag dieser Kraft, ebenso wie die Konstante η , von der die Schwingungsdauer der Erregungsschwingung abhängt, beliebig gegeben sein mögen.

An Stelle von Gl. (36) ist mit Berücksichtigung des neu hinzutretenden Gliedes jetzt zu schreiben

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx + k \frac{dx}{dt} = P \sin \eta t, \quad (52)$$

und alle Eigenschaften der erzwungenen Schwingungen sind aus dem Integrale dieser Differentialgleichung abzuleiten.

Die allgemeine Lösung der Gl. (52) ist bekannt, sie setzt sich aus drei Gliedern zusammen, von denen die beiden ersten mit den willkürlichen Integrationskonstanten behaftet, aber von P und η unabhängig sind. Diese beiden Glieder bleiben übrig, wenn man P gleich Null setzt, d. h. sie entsprechen für sich genommen, den Eigenschwingungen des Punktes. Dazu kommt dann noch ein drittes Glied, das P und η , aber keine willkürliche Integrationskonstante enthält. Dieses Glied bleibt übrig, wenn die Integrationskonstanten infolge der Anfangsbedin-

einzelnen materiellen Punktes zurückgeführt wurden in der Abhandlung „Zur Dynamik des Fachwerks“, Zeitschr. f. Bauwesen 1899, S. 478 und hierauf strenger in einer zweiten Abhandlung „Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks“ in derselben Zeitschrift 1903, S. 137. Die strengere Lösung erfordert freilich sehr umständliche Rechnungen.

ungen gleich Null sind, d. h. es bildet ein partikuläres Integral der Gl. (52).

Es erleichtert die Übersicht über die Rechnungen, wenn man dieses dritte Glied, das hiernach für sich genommen, die Gleichung schon befriedigen muß, für sich betrachtet. Es möge mit x_2 bezeichnet werden; dann läßt sich setzen¹⁾

$$x_2 = C \sin(\eta t - \varphi), \quad (53)$$

worin aber nun die beiden neu eingeführten Konstanten C und φ nicht willkürlich sind, sondern durch Einsetzen von x_2 in die Gl. (52) so bestimmt werden müssen, daß diese Gleichung erfüllt wird. Man hat aus (53)

$$\frac{dx_2}{dt} = C\eta \cos(\eta t - \varphi),$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -C\eta^2 \sin(\eta t - \varphi),$$

und Gl. (52) liefert daher beim Einsetzen dieser Werte

$$\begin{aligned} -mC\eta^2 \sin(\eta t - \varphi) + cC \sin(\eta t - \varphi) \\ + kC\eta \cos(\eta t - \varphi) = P \sin \eta t. \end{aligned}$$

Diese Gleichung soll für beliebige Werte der Veränderlichen t erfüllt sein. Das ist aber nur möglich, wenn zwischen den Konstanten gewisse Beziehungen bestehen, zu deren Ableitung wir den Sinus und den Kosinus der Winkelsumme nach bekannten goniometrischen Formeln entwickeln. Bei passender Zusammenfassung der Glieder nimmt dann die Gleichung die Form an

$$\begin{aligned} \sin \eta t \{ -mC\eta^2 \cos \varphi + cC \cos \varphi + kC\eta \sin \varphi - P \} \\ + \cos \eta t \{ +mC\eta^2 \sin \varphi - cC \sin \varphi + kC\eta \cos \varphi \} = 0. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für jeden Wert von t bestehe, muß jeder der beiden in den geschweiften Klammern stehenden Aus-

1) In den früheren Auflagen hatte ich $x_2 = C \sin(\eta t + \varphi)$ gesetzt. Das kommt, da φ eine nach Größe und Vorzeichen zunächst unbekannte Konstante bedeutet, im wesentlichen auf dasselbe hinaus, wie der jetzt gewählte Ansatz. Dieser empfiehlt sich aber aus praktischen Gründen, da dann weiterhin, wenn φ in dieser Weise eingeführt wird, die beiden Konstanten φ und C immer positiv gefunden werden.

drücke, die nur konstante Größen enthalten, für sich gleich Null sein. Damit haben wir die beiden Bedingungsgleichungen gewonnen, aus denen die Konstanten C und φ berechnet werden können. Setzt man zunächst die zweite Kammer gleich Null, so folgt (da C nicht gleich Null sein kann, wenn P von Null verschieden ist) zunächst für φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{c - m\eta^2}. \quad (54)$$

Hiermit ist φ als bekannt anzusehen. Aus der Bedingung, daß auch die erste Klammer verschwinden muß, folgt für C

$$C = \frac{P}{\cos \varphi (c - m\eta^2) + k\eta \sin \varphi}, \quad (55)$$

worin der Winkel φ auf Grund der vorhergegangenen Bestimmung als gegeben zu betrachten ist, und zwar so, daß er aus Gl. (54) stets als ein positiver spitzer oder stumpfer Winkel zu entnehmen ist. Schreibt man Gl. (55) zunächst in der Form

$$C = \frac{P \cos \varphi}{(c - m\eta^2) \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{k\eta}{c - m\eta^2} \sin \varphi \cos \varphi \right\}}$$

und beachtet hierauf Gl. (54) so wird der Wert in der geschweiften Klammer gleich Eins und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$C = \frac{P \cos \varphi}{c - m\eta^2}. \quad (56)$$

Wenn $(c - m\eta^2)$ positiv ist, wird φ aus Gl. (54) als ein spitzer Winkel gefunden, da k und η auf jeden Fall positiv sind. Dann ist auch $\cos \varphi$ positiv. Ist dagegen $(c - m\eta^2)$ negativ, so erhält man aus Gl. (54) einen stumpfen Winkel φ und $\cos \varphi$ wird ebenfalls negativ. Daraus folgt, daß C nach Gl. (56) stets einen positiven Wert erhält.

Mit diesen Werten von C und φ stellt Gl. (53) eine mögliche Form der erzwungenen Schwingungen dar, die auch zur wirklichen wird, wenn die Anfangsbedingungen passend gewählt werden. Da außerdem die beiden anderen Glieder, die in der allgemeinen Lösung noch hinzutreten, für sich dem

Fälle $P = 0$ entsprechen, also als Eigenschwingungen gedeutet werden können, die sich den durch Gl. (53) angegebenen hinzufügen, so beansprucht gerade diese partikuläre Lösung unser besonderes Interesse und sie soll daher zunächst weiter erörtert werden.

Gl. (53) stellt eine einfache ungedämpfte harmonische Schwingung dar. Ihre Schwingungsdauer ist nur von η abhängig, also unabhängig von der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen und auch unabhängig von der Masse des beweglichen Punktes, von der Größe der elastischen Kraft und der Größe des dämpfenden Widerstandes. Der größte Ausschlag tritt aber nicht zur selben Zeit ein, in der die erregende Kraft ihren größten Wert P annimmt, sondern erst etwas später, denn x hängt nach Gl. (53) von $\sin(\eta t - \varphi)$ anstatt von $\sin \eta t$ ab. Im übrigen durchläuft aber $\sin(\eta t - \varphi)$ dieselbe Wertereihe wie $\sin \eta t$, wobei zu gleichen Werten immer derselbe Zeitunterschied von der Größe $\frac{\varphi}{\eta}$ gehört. Man drückt dies dahin aus, daß zwischen der erzwungenen und der sie erregenden Schwingung des Wertes von P ein Phasenunterschied besteht. Der zugehörige Winkel φ , der aus Gl. (54) zu ermitteln ist, wird der Phasenverschiebungswinkel genannt.

Wie φ von η abhängt, ist aus Gl. (54) leicht zu entnehmen. Ein kleiner Wert von η , der einer großen Schwingungsdauer der erregenden Ursache, also langsamen Schwingungen entspricht, hat einen positiven und ebenfalls kleinen Wert von $\operatorname{tg} \varphi$ zur Folge. Bei sehr langsamen Schwingungen ist daher der Phasenverschiebungswinkel sehr klein. Läßt man jetzt η zunehmen, geht also zu immer schnelleren Schwingungen über, so bleibt vorläufig $\operatorname{tg} \varphi$ immer noch klein, falls k sehr klein ist, wie es bei den Schwingungen mit geringer Dämpfung zutrifft, die man gewöhnlich vor sich hat. In diesem Falle vermag $\operatorname{tg} \varphi$ nach Gl. (54) erst dann größere Werte anzunehmen, wenn $m\eta^2$ nahezu so groß wie c , der Nenner des Bruchs daher nahezu gleich Null geworden ist. Erreicht $m\eta^2$ den Wert c , so wird $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ und der Phasenverschiebungs-

winkel zu einem rechten. Wenn η hierauf noch weiter wächst, die Schwingungen also immer schneller werden, so wird $\operatorname{tg} \varphi$ negativ und sinkt bald wieder auf kleine Werte herab, nachdem η nur wenig zugenommen hat. Der Phasenverschiebungswinkel ist dann nahezu gleich zwei Rechten geworden und er nähert sich dieser Grenze um so mehr, je schneller die Schwingungen werden.

Besonders hervorzuheben ist noch, daß der Phasenverschiebungswinkel dann zu einem rechten wird, wenn

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (18) in § 4, so erkennt man, daß η in diesem Falle gleich der dort mit α bezeichneten Größe wird, d. h. daß die erregende Schwingung gleiche Schwingungsdauer mit der Eigenschwingung des beweglichen Punktes ohne Dämpfung hat.

Man kann daher die vorhergehenden Betrachtungen auch dahin zusammenfassen, das für eine Schwingungsdauer der erregenden Ursache, die kleiner ist als die Eigenschwingungsdauer des Punktes, die erzwungenen Schwingungen bei geringer Dämpfung im allgemeinen nur wenig hinter der erregenden Ursache in der Phase zurückbleiben. Erst wenn die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung größer gewählt wird, so daß sie der Eigenschwingungsdauer des beweglichen Punktes nahe rückt, fängt der Winkel φ plötzlich stark zu wachsen an, bis er für $\eta = \alpha$ zu einem rechten geworden ist. Wird die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung noch größer gewählt, so wird der Phasenverschiebungswinkel ein stumpfer, und er nähert sich bei hinreichenden Unterschieden zwischen η und α rasch einem gestreckten.

Schon aus dieser Betrachtung erkennt man die große Bedeutung des besonderen Falles, daß η gleich oder nahezu gleich mit α wird. Sie tritt aber noch mehr hervor, wenn wir uns jetzt zur Besprechung der Konstanten C wenden, die nach Gl. (53) die Amplitude der erzwungenen Schwingung darstellt. Zunächst lehrt Gl. (55), daß unter sonst gleichen Um-

ständen C proportional mit P , der Schwingungsausschlag also proportional der erregenden Kraft wächst. Außerdem hängt aber C auch von der Größe des Nenners und hiermit ganz wesentlich von η , also von der Schwingungsdauer der erregenden Kraft ab.

Für $\eta = \alpha$ wird der Winkel φ , wie wir gesehen haben, zu einem rechten, $\sin\varphi$ also gleich der Einheit und $\cos\varphi$ gleich Null. Für C erhält man daher nach Gl. (55)

$$C_{\eta=\alpha} = \frac{P}{k\eta} = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (57)$$

Dies wird aber für den Fall eines hinreichend kleinen Dämpfungsfaktors k ein sehr großer Wert und wir sind damit zur Erklärung der bekannten Erfahrungstatsache gelangt, daß sehr große Schwingungen namentlich dann erzwungen werden, wenn die erregende Ursache genau oder nahezu in denselben Intervallen periodisch auftritt, wie sie den Eigenschwingungen des erregten Körpers entsprechen. Man sagt dann, daß beide Schwingungen miteinander in Resonanz stehen. Auch dann, wenn η nicht genau gleich α ist, wird C noch verhältnismäßig groß sein. Bei einem größeren Unterschiede zwischen η und α wird aber C bald sehr viel kleiner; auf diese weitere Diskussion der Formeln kann ich jedoch verzichten. Es mag nur bemerkt werden, daß C ein Maximum wird für

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{2m^2}},$$

also nicht genau für $\eta = \alpha$ oder für den Fall der Resonanz. Bei einem kleinen Werte von k , den wir voraussetzen müssen, um überhaupt sehr große Werte der Amplitude C zu ermöglichen, ist aber der Unterschied gegenüber $\eta = \alpha$ nur unbedeutend, so daß man gewöhnlich davon absehen kann. In der Tat wird auch mit dem vorstehenden Werte von η

$$C_{\max} = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{m}{c - \frac{k^2}{4m}}}, \quad (58)$$

also etwas, aber bei kleinem k nur wenig größer als $C_{\eta=\alpha}$ nach

Gl. (57) gefunden. Diese Formeln erhält man leicht, indem man in Gl. (56) $\cos \varphi$ in $\operatorname{tg} \varphi$ ausdrückt, hierfür den Wert aus Gl. (54) einsetzt, dann nach η differenziert und den Differentialquotienten gleich Null setzt.

§ 9. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die erzwungenen Schwingungen.

Ich komme jetzt zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung (52), also zum allgemeinsten Falle der erzwungenen geradlinigen Schwingungen. Jene Glieder, die zur partikulären Lösung x_2 in Gl. (53) hinzutreten, um die allgemeine Lösung für die geradlinige Schwingung herzustellen, seien zu x_1 zusammengefaßt, so daß also

$$x = x_1 + x_2$$

zu setzen ist. Um zu erkennen, welche Bedingungen von x_1 erfüllt werden müssen, setze ich $x_1 + x_2$ an Stelle von x in die Differentialgleichung (52) ein. Diese geht dann über in

$$\left[m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + cx_1 + k \frac{dx_1}{dt} \right] + \left[m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + cx_2 + k \frac{dx_2}{dt} - P \sin \eta t \right] = 0.$$

Da aber x_2 die Differentialgleichung schon selbst erfüllte, fallen die in der zweiten Klammer zusammengefaßten Glieder gegeneinander fort und man behält

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + cx_1 + k \frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Differentialgleichung (36) für die gedämpften Eigenschwingungen vollständig überein und es ist damit die schon vorher aufgestellte Behauptung bewiesen, daß der Bewegungsanteil, der durch x_1 dargestellt wird, aus Eigenschwingungen besteht.

Die allgemeine Lösung von Gl. (36) wurde in Gl. (37) in Exponentialform angegeben. Da aber der Exponent γ in unserem Falle als imaginär zu betrachten ist, führt man die Exponentialfunktionen besser sofort auf trigonometrische Funktionen zurück. Mit Hilfe der Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{und} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

erhält man aus Gl. (37)

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{k}{2m}t} \{A(\cos\gamma't + i\sin\gamma't) + B(\cos\gamma't - i\sin\gamma't)\} \\ &= e^{-\frac{k}{2m}t} \{(A+B)\cos\gamma't + (A-B)i\sin\gamma't\}. \end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck reell wird, muß man sich unter den willkürlichen Konstanten A und B jetzt zwei komplexe Werte denken, deren reelle Bestandteile gleich und deren imaginäre Bestandteile von gleicher Größe aber entgegengesetztem Vorzeichen sind. An Stelle der Summe und der mit i multiplizierten Differenz von beiden führt man dann besser zwei neue Bezeichnungen A_1 und B_1 ein, die zwei neue ganz willkürliche reelle Konstanten bedeuten. Für x_1 hat man dann

$$x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t} \{A_1 \sin\gamma't + B_1 \cos\gamma't\}, \quad (59)$$

und hiermit wird auch die vollständige Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bekannt, nämlich

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} \{A_1 \sin\gamma't + B_1 \cos\gamma't\} + C \sin(\eta t - \varphi). \quad (60)$$

Daß diese Lösung vollständig ist, geht daraus hervor, daß sie die beiden willkürlichen Integrationskonstanten A_1 und B_1 enthält, womit man die Bewegung jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anzupassen vermag.

Aus Gl. (60) ist nun sofort ein wichtiger Schluß zu ziehen. Man denke sich den Anfangszustand beliebig gegeben und bestimme hiernach A_1 und B_1 . Dann wird beim weiteren Fortschreiten der Zeit der Einfluß des ersten Gliedes wegen des Faktors $e^{-\frac{k}{2m}t}$, mit dem es behaftet ist, immer kleiner, während die Beiträge, die das letzte Glied zu den Ausschlägen liefert, konstant bleiben, da sich C nicht ändert, so lange die erregende Ursache unverändert bestehen bleibt. Man erkennt hieraus, daß wegen der Dämpfung die Eigenschwingungen allmählich abklingen, und daß der Punkt, nachdem er dem Einflusse der erregenden Ursache hinreichend lange überlassen war, schließlich nur noch die durch das partikuläre Integral x_2 angegebene Bewegung ausführt.

Wir wollen ferner noch den Fall ins Auge fassen, daß der Punkt zur Zeit $t = 0$ in Ruhe war und erst von da an durch die erregende Ursache zum Schwingen gebracht wurde. Die Integrationskonstanten A_1 und B_1 sind dann aus den Bedingungen zu bestimmen, daß für $t = 0$, sowohl x als $\frac{dx}{dt}$ gleich Null zu setzen sind. Die erste Bedingung liefert die Gleichung

$$0 = B_1 - C \sin \varphi.$$

Für $\frac{dx}{dt}$ hat man ferner

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \sin \gamma' t \left(\frac{k}{2m} A_1 + \gamma' B_1 \right) + \cos \gamma' t \left(\frac{k}{2m} B_1 - \gamma' A_1 \right) \right\} + C\eta \cos(\eta t - \varphi),$$

und für $t = 0$ hat man daher die Bedingung

$$0 = -\frac{k}{2m} B_1 + \gamma' A_1 + C\eta \cos \varphi.$$

Die Auflösung nach den beiden Unbekannten liefert

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{C}{\gamma'} \left(\frac{k}{2m} \sin \gamma - \eta \cos \varphi \right) \\ B_1 &= C \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (60) kann man aus dieser sämtliche Erscheinungen des Schwingungsverlaufs ableiten. Um nicht zu weitläufig zu werden, möchte ich dies jetzt nur unter der Voraussetzung tun, daß die Dämpfung sehr gering ist, so daß sie für den ersten Anfang vernachlässigt werden kann. Mit $k = 0$ vereinfacht sich dann Gl. (60) nach Einsetzen von A_1 und B_1 aus Gl. (61) zu

$$x = C \left\{ -\frac{\eta}{\gamma'} \cos \varphi \sin \gamma' t + \sin \varphi \cos \gamma' t + \sin(\eta t - \varphi) \right\}.$$

Zugleich ist aber für den Fall $k = 0$ unter der Voraussetzung, daß wir uns nicht allzu nahe bei dem Falle der Resonanz befinden, aus den Gleichungen (54) und (55) zu entnehmen

$$\text{tg } \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0 \quad \text{und} \quad C = \frac{P}{c - m\eta^2}.$$

Setzt man auch diese Werte ein, so wird

$$x = \frac{P}{c - m\eta^2} \left\{ -\frac{\eta}{\gamma'} \sin \gamma' t + \sin \eta t \right\}. \quad (62)$$

Beachtet man noch, daß für $k = 0$

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

gesetzt werden kann und führt man für diesen Wert wieder die frühere Bezeichnung α ein, so erhält man

$$x = \frac{P}{m(\alpha^2 - \eta^2)} \left\{ \sin \eta t - \frac{\eta}{\alpha} \sin \alpha t \right\}.$$

Die Bewegung setzt sich hiernach aus zwei einfachen harmonischen Schwingungen zusammen, von denen die eine in der Schwingungsdauer mit den Eigenschwingungen, die andere mit den erregenden Schwingungen übereinstimmt. Die beiden einfachen Schwingungen interferieren, wie man sich ausdrückt, miteinander.

Wenn sich η und α nicht viel voneinander unterscheiden, so jedoch, daß wir von dem genauen Zusammenfallen beider immer noch weit genug entfernt sind, erhalten die beiden Glieder in der geschweiften Klammer in längeren Zeiträumen abwechselnd gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen und ungefähr gleiche Absolutwerte. Je nachdem tritt ein Anschwellen oder eine Verminderung der Schwingungsausschläge ein. In der Akustik werden diese Schwankungen in der Tonstärke der erzwungenen Schwingungen als „Schwebungen“ bezeichnet.

Für den Fall der Resonanz dagegen hat man

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad C = \frac{P}{k\eta}$$

zu setzen, womit die Gl. (61) übergehen in

$$A_1 = \frac{P}{2m\eta\gamma'} \quad \text{und} \quad B_1 = \frac{P}{k\eta}.$$

Aus Gl. (60) findet man dann

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} \frac{P}{\eta} \left\{ \frac{\sin \gamma' t}{2m\gamma'} + \frac{\cos \gamma' t}{k} \right\} - \frac{P}{k\eta} \cos \eta t. \quad (63)$$

Das gilt zunächst für einen beliebigen Wert von k . Wenn

aber k sehr klein ist, kann man für nicht zu große Werte von t näherungsweise dafür auch schreiben (indem man $\eta = \alpha$ setzt)

$$x = \frac{P}{k\alpha} (\cos \gamma' t - \cos \alpha t).$$

Wollte man hierin auch $\gamma' = \alpha$ setzen, so erhielte man $x = 0$, d. h. es wird längere Zeit dauern, bis überhaupt ein merklicher Ausschlag zustande kommt. Man muß daher auf den geringen Unterschied zwischen γ' und α Rücksicht nehmen, wobei man

$$\gamma' = \alpha - \frac{k^2}{8m^2\alpha}$$

setzen kann. Für x erhält man damit bei nicht zu großem t den Näherungswert

$$x = \frac{k}{8mc} Pt \sin \alpha t.$$

Die Ausschläge wachsen daher anfänglich mit der Zeit immer mehr an. Sobald aber t so groß geworden ist, daß es einen merklichen Bruchteil des Wertes $\frac{m}{k}$ bildet, muß man auf die genauere Formel (63) zurückgehen.

Anmerkung. Auch für den Fall der erzwungenen Schwingungen kann man (ebenso wie am Schlusse von § 6 bei den gedämpften Schwingungen) von der geradlinigen Schwingung, die hier vorläufig überall vorausgesetzt wurde, ohne weiteres zu den Schwingungen in krummlinigen Bahnen übergehen. Die Differentialgleichung der Schwingung geht dann in eine Vektorgleichung über, ohne daß sich sonst etwas Wesentliches änderte. An Stelle von Gl. (52) hat man hier

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + c \mathbf{r} + k \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \mathfrak{P} \sin \eta t$$

zu schreiben und die partikuläre Lösung x_2 in Gl. (53) geht über in

$$\mathbf{r}_1 = \mathfrak{C} \sin (\eta t - \varphi),$$

wobei für φ ebenfalls der Wert in Gl. (54) einzusetzen, \mathfrak{C} dagegen als gerichtete Größe aufzufassen ist, die parallel zu \mathfrak{P} geht und deren absoluter Wert mit dem früheren C in Gl. (55) übereinstimmt.

Ebenso tritt an Stelle von x_1 hier \mathbf{r}_1 , und zwar in Übereinstimmung mit der Lösung für die krummlinige gedämpfte Schwingung

$$\mathbf{r}_1 = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{\beta t},$$

wobei \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die als gerichtete Größen auftretenden Integrationskonstanten bedeuten. Natürlich kann man bei kleiner Dämpfung, die zu imaginären Werten von α und β führt, wieder von den Exponentialfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen übergehen.

Ferner erkennt man aus der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2,$$

daß die Bahn der krummlinigen erzwungenen Schwingung im allgemeinen eine Kurve von doppelter Krümmung bildet. Nur wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{P}$ zufällig in eine Ebene fallen, ist die Bahn eine ebene Kurve. Nach Erlöschen der Eigenschwingungen geht aber die erzwungene Schwingung auch in diesem allgemeineren Falle in eine geradlinige über.

§ 10. Kritische Geschwindigkeiten.

Die Lehre von den erzwungenen Schwingungen ist für die Technik hauptsächlich wegen der Gefahren von Wichtigkeit, die durch große Schwingungen für die davon betroffenen Baukonstruktionen, Maschinenteile usw. herbeigeführt werden, oder auch wegen der Belästigungen, die damit häufig verbunden sind. Das Hauptbestreben geht bei der Anwendung dieser Lehre darauf hinaus, unzulässig große Schwingungen durch passende Anordnung der Massen, geeignete Wahl der Geschwindigkeiten usw. zu vermeiden. Um dies mit Sicherheit zu erreichen, muß man natürlich vor allem wissen, unter welchen Umständen große Schwingungsauslässe zu erwarten sind.

Für den einfachsten Fall ist diese Frage durch die vorhergehenden Betrachtungen bereits entschieden. Unveränderlich wirkende Kräfte können keine Schwingungen hervorrufen, sondern nur periodisch wechselnde. In dieser Hinsicht besteht aber der einfachste Fall darin, daß die äußere Kraft eine Sinusfunktion der Zeit ist. In anderer Hinsicht besteht er darin, daß sich der Körper, dessen Schwingungen untersucht werden sollen, als ein materieller Punkt ansehen läßt. Wir fanden, daß in diesem Falle besonders große Schwingungen nur dann zu erwarten sind, wenn erstens die Dämpfung klein ist, was in den meisten Fällen, mit denen man sich in der Praxis zu beschäftigen hat, von vornherein zutrifft, und wenn sich zweitens zugleich die Schwingungsdauer der erregenden Ursache nur

wenig von der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen unterscheidet. Man braucht daher, um größere Schwingungsauslässe zu vermeiden, nur durch geeignete Wahl der vorkommenden Geschwindigkeiten jener Körper, durch die Schwingungen erregt werden können, dafür zu sorgen, daß jene ungefährere Übereinstimmung zwischen den Schwingungsdauern nicht vorkommen kann, d. h. man muß vermeiden, daß nahezu eine Resonanz eintritt. Jene Geschwindigkeit, die hauptsächlich gefährlich ist und der man sich auch nicht zu sehr nähern darf, bezeichnet man gewöhnlich als eine kritische Geschwindigkeit. Im einfachsten Falle hat man es daher nur mit einer einzigen kritischen Geschwindigkeit zu tun und es steht frei, die Geschwindigkeit der bewegten Körper im übrigen nach Belieben größer oder kleiner zu wählen, wenn sie nur der kritischen nicht zu nahe kommt.

Bei den Anwendungen hat man es aber meistens mit erheblich verwickelteren Fällen zu tun. Zunächst läßt sich gewöhnlich oder doch sehr häufig die periodisch wechselnde Kraft, die die Schwingungen hervorruft, nicht als eine einfache Sinusfunktion der Zeit genau genug darstellen, sondern sie befolgt ein verwickelteres Gesetz. Außerdem aber läßt sich der die Schwingungen ausführende Körper sehr häufig nicht als ein einzelner materieller Punkt ansehen, sei es nun, daß er nicht nur Translationsbewegungen, sondern zugleich auch Drehbewegungen ausführt, oder sei es, daß bei den Schwingungen elastische Formänderungen auftreten, so daß sich die einzelnen Teile des Körpers dabei in ganz verschiedener Weise bewegen. Mit solchen Fällen werden wir uns in den folgenden Abschnitten noch näher zu beschäftigen haben.

Hier läßt sich zunächst ein sehr häufig vorkommender Fall leicht auf den vorher besprochenen zurückführen, nämlich der Fall der einfachen Torsionsschwingungen. In § 5 wurde schon gezeigt, daß die Differentialgleichung der Torsionsschwingungen aus der für die geradlinigen Schwingungen eines materiellen Punktes durch bloße Buchstabenvertauschungen hervorgeht, indem man nämlich den Ausschlag α durch den

Drehungswinkel φ , die Masse m durch das Trägheitsmoment Θ ersetzt und der Feldstärke c die ihr in diesem Falle zukommende Bedeutung beilegt. Das bleibt auch noch gültig, wenn es sich um gedämpfte oder um erzwungene Schwingungen handelt. Unter $k \frac{d\varphi}{dt}$ und unter P sind dann nicht mehr Kräfte, sondern statische Momente von Kräftepaaren zu verstehen, die in einem Falle dämpfend, im anderen Falle erregend auf die Drehbewegung einwirken. Sofern es sich nur um die Drehbewegungen eines einzigen Körpers, etwa eines Schwungrades, handelt, lassen sich daher die Formeln der beiden vorhergehenden Paragraphen mit dieser Deutung der darin vorkommenden Buchstaben sonst ohne jede Änderung darauf anwenden. Diese Bemerkung ist deshalb von Wichtigkeit, weil gerade die Torsionsschwingungen im Maschinenbetriebe häufig vorkommen und leicht gefährlich oder wenigstens unbequem werden können. Es mag noch hinzugefügt werden, daß sich auch die in § 5 im Anschlusse an Abb. 9 besprochenen gekoppelten Schwingungen von zwei Massen Q_1 und Q_2 , die sich als materielle Punkte ansehen ließen, sinngemäß in derselben Weise auf die Torsionsschwingungen übertragen lassen, die von zwei an verschiedenen Stellen einer Welle aufgekeilten Schwungrädern ausgeführt werden können. Auf einen Fall dieser Art wird übrigens später noch zurückgekommen werden (vgl. § 42).

Ferner kann hier auch sofort der Fall erledigt werden, daß sich die schwingungserregende Ursache nicht als eine einfache Sinusfunktion der Zeit ansehen läßt. Man nehme z. B. an, daß sie sich in der Form

$$P_1 \sin \eta_1 t + P_2 \sin \eta_2 t$$

darstellen lasse, also aus zwei sich übereinander lagernden, einem einfachen Sinusgesetze folgenden Teilen bestehe. An Stelle von Gl. (52) tritt dann

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx + k \frac{dx}{dt} = P_1 \sin \eta_1 t + P_2 \sin \eta_2 t,$$

und deren Lösung ergibt sich aus der früheren, indem man

an Stelle von Gl. (53)

$$x_2 = C_1 \sin(\eta_1 t - \varphi_1) + C_2 \sin(\eta_2 t - \varphi_2)$$

setzt. Das geht daraus hervor, daß die Differentialgleichung linear ist. Für die beiden φ und die beiden C gelten ohne weiteres die früher dafür aufgestellten Gleichungen (54) und (55), wenn man darin zu η und P die Zeiger 1 oder 2 beifügt. Hier hat man daher auch zwei Fälle der Resonanz oder der kritischen Geschwindigkeit zu unterscheiden, die dann eintreten, wenn entweder η_1 oder η_2 gleich α wird. Entsprechendes gilt auch, wenn sich die schwingungserregende Ursache in drei oder noch mehr Sinusglieder zerlegen läßt.

In der Theorie der Fourierschen Reihen, die einen der praktisch wichtigsten Teile der höheren Mathematik bildet, wird aber gelehrt, daß man jede beliebige periodische Funktion durch eine Reihe darstellen kann, die nach den Sinus und Kosinus der Vielfachen der unabhängigen Veränderlichen, also hier der Zeit t fortschreitet. Im allgemeinsten Falle muß diese Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt werden; in den praktisch vorkommenden Fällen genügt aber gewöhnlich schon eine Darstellung durch wenige Glieder, da die später folgenden gering werden und daher nicht mehr viel ändern.

Bei einer mehrzylindrigen Dampfmaschine hat man es z. B. mit einem auf die Welle übertragenen Drehmomente zu tun, das eine periodische Funktion der Zeit bildet, so nämlich, daß sich nach jeder vollen Umdrehung der Maschine dieselbe Wertreihe von neuem wiederholt, während innerhalb einer Umdrehung Schwankungen in dem Drehmomente auftreten, die von der besonderen Anordnung der Zylinder und der Steuerungen abhängen. Wie diese Schwankungen beschaffen sind, kann man etwa aus der Abnahme von Indikatordiagrammen an den einzelnen Zylindern schließen und den Befund graphisch darstellen. Wie das so gewonnene Diagramm aber auch aussehen möge, jedenfalls läßt es sich analytisch durch eine Reihe von der Form

$$P_0 + P_1 \sin \eta t + P_2 \sin 2\eta t + P_3 \sin 3\eta t + \dots \\ + Q_1 \cos \eta t + Q_2 \cos 2\eta t + Q_3 \cos 3\eta t + \dots$$

darstellen, wenn

$$\eta = \frac{2\pi}{T}$$

ist und unter T die Zeit eines vollen Umlaufs der Maschine verstanden wird. Die Koeffizienten P und Q sind nach den in der Theorie der Fourierschen Reihen aufgestellten Formeln oder nach einem der darauf begründeten graphischen Verfahren zu ermitteln. Man bezeichnet diese Zerlegung als die harmonische Analyse des periodisch wechselnden Vorgangs.

Wirkt nun das veränderliche Drehmoment auf einen schwingungsfähigen Körper, z. B. auf ein Schwungrad ein, das auf der Welle sitzt, so entstehen erzwungene Schwingungen, die sich aus einer entsprechenden Zahl von Gliedern von der Form

$$C_n \sin(n\eta t - \varphi_n)$$

zusammensetzen. Sobald nun die Maschine mit solcher Geschwindigkeit umläuft, daß für irgendein ganzzahliges n

$$n\eta = \alpha$$

ist, wobei α die frühere Bedeutung hat, sich also auf die Eigenschwingungen bezieht, so tritt eine Resonanz ein, die zu einem großen Werte von C_n führen kann. Ob dies wirklich zutrifft, hängt freilich auch noch davon ab, ob die Koeffizienten P_n und Q_n , die bei der harmonischen Analyse des Drehmoments gefunden werden, nicht gerade sehr klein ausfallen. Mit diesem Vorbehalte kann man daher sagen, daß z. B. bei einer Umdrehungszahl der Maschine von 100 in der Minute große Schwingungen dann zu befürchten sind, wenn die Schwingungsdauer der Eigenschwingungen des in Schwingung versetzten Körpers nahezu 100 oder 200 oder allgemein $n \cdot 100$ vollen Schwingungen in der Minute entspricht. Für ein großes n werden übrigens die Koeffizienten P_n und Q_n in den praktisch vorkommenden Fällen so klein, daß das zugehörige C_n auch im Falle der Resonanz nicht mehr von Bedeutung ist.

Umgekehrt gehört zu jeder gegebenen Eigenschwingungsdauer eine Anzahl von Umlaufgeschwindigkeiten der Maschine, bei denen eine Resonanz zu befürchten ist. Diese Geschwindig-

keiten werden dann als die kritischen Geschwindigkeiten bezeichnet.

Es mag noch bemerkt werden, daß bei der harmonischen Analyse des Drehmomentes mehrzylindriger Maschinen gewöhnlich das mit $\sin 3\eta t$ oder $\cos 3\eta t$ behaftete Glied besonders groß ausfällt, und daß daher für den Fall $3\eta = \alpha$ besonders große Schwingungsausschläge zu befürchten sind.

§ 11. Näherungstheorie für das einfache Pendel.

An einem Faden, der als gewichtslos und unausdehnbar betrachtet werden kann, hänge ein kleiner, schwerer Körper herab, den man als materiellen Punkt ansehen kann. Man soll die Bewegung angeben, die dieser Punkt unter dem Einflusse der Schwere, aber ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes und anderer Nebenumstände ausführt, wenn er aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und nach Erteilung einer mit den Bedingungen der Aufhängung verträglichen, sonst aber beliebigen Geschwindigkeit sich selbst überlassen wird.

Auch das durch die erwähnten Voraussetzungen vereinfachte Problem der Pendelbewegung macht noch erhebliche Schwierigkeiten. Diese verringern sich aber bedeutend, wenn man sich ferner noch auf die Untersuchung unendlich kleiner Pendelschwingungen beschränkt. Wirklich unendlich kleine Schwingungen können nun freilich keinen Gegenstand der Beobachtung bilden und überhaupt keinen Anspruch auf physikalische Bedeutung machen. Sehr häufig sind aber die Schwingungsbahnen wenigstens ziemlich klein gegenüber der Länge des Aufhängefadens, und man gelangt dann zu einer angenäherten Lösung der Aufgabe, die um so besser zutrifft, je kleiner jenes Verhältnis in Wirklichkeit ist. Deshalb sollen die Schwingungen hier unter der Voraussetzung untersucht werden, daß sie als unendlich klein angesehen werden könnten.

Schließlich soll zunächst außerdem noch angenommen werden, daß die Pendelschwingungen in einer durch den Aufhängepunkt gelegten lotrechten Ebene erfolgen. Daß eine solche Bewegung überhaupt möglich ist, sieht man sofort ein;

sie muß immer dann zustande kommen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes in der durch den Faden gelegten lotrechten Ebene enthalten ist.

Die Bahn des Punktes ist ein unendlich kleiner Kreisbogen, der durch die tiefste Lage geht, die der Punkt überhaupt einnehmen kann, und sie wird unter dem Einflusse von zwei Kräften, nämlich dem Gewichte des Punktes und der Fadenspannung, beschrieben. Der Punkt erfährt beim Durchlaufen der Bahn neben Horizontalverschiebungen auch Hebungen und Senkungen, die aber von höherer Ordnung unendlich klein sind. Man kann daher von der Vertikalbewegung des Punktes absehen, falls man sich überall nur mit der Untersuchung der von der ersten Ordnung unendlich kleinen Größen begnügt. Freilich darf man dann z. B. den Satz von der lebendigen Kraft nicht heranziehen, denn da auch die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke unendlich klein bleibt, ist die lebendige Kraft, die von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt, ebenfalls unendlich klein von der zweiten Ordnung.

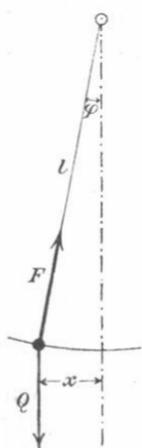


Abb. 11.

Zunächst schließen wir, daß die Resultierende aus Gewicht und Fadenspannung keine Vertikalkomponente von endlicher Größe haben kann. Die Horizontalkomponente ist gleich $F \sin \varphi$ (Abb. 11) und daher mit φ unendlich klein von der ersten Ordnung. Die Fadenspannung F kann hiernach von dem Gewichte Q nur unendlich wenig verschieden sein, so daß wir an Stelle von $F \sin \varphi$ auch $Q \sin \varphi$ schreiben können, oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von φ auch

$$Q \frac{x}{l},$$

wenn l die Fadenlänge bedeutet. Die Horizontalbewegung des Punktes erfolgt unter dem Einflusse dieser Horizontalkomponenten der Resultierenden aus F und Q . Wir sehen, daß die Kraft proportional mit dem Ausschlage x und nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet ist. Aus § 4 wissen wir aber, daß eine Kraft, die dieses Gesetz befolgt, zu

einer einfachen harmonischen Schwingung führt. Wir können daher die Lehren jenes Paragraphen ohne weiteres auf den uns jetzt beschäftigenden Fall übertragen. Dabei ist nur an Stelle der dort mit c bezeichneten Konstanten hier

$$c = \frac{Q}{l}$$

zu setzen und die Masse m im Gewichte Q auszudrücken. Für die Dauer einer vollen Schwingung erhält man daher nach Gl. (20)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (64)$$

Freilich wird gerade bei Pendelschwingungen sehr häufig nach einfachen Schwingungen oder „Pendelschlägen“ gerechnet. So versteht man unter einem Sekundenpendel ein Pendel, das die ganze Schwingungsbahn einmal in einer Sekunde zurücklegt, ohne die zum Durchlaufen der Schwingungsbahn auf dem Rückweg erforderliche Zeit mitzurechnen. Unter der Dauer eines Pendelschlages ist daher die Hälfte des in Gl. (64) angegebenen Wertes zu verstehen.

Die Pendelschwingungen sind hiernach, solange sie überhaupt nur als unendlich klein angesehen werden können, isochron, also unabhängig von dem besonderen Werte des unendlich kleinen Ausschlags. Auch die früheren Betrachtungen über gedämpfte und erzwungene Schwingungen lassen sich sofort auf die unendlich kleinen Pendelschwingungen übertragen.

Ferner können wir auch jetzt die Voraussetzung fallen lassen, daß die Pendelbewegung eine ebene sei. Sofern nur die Entfernung aus der Gleichgewichtslage stets unendlich klein bleibt, ist die Resultierende aus F und Q nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet und der Entfernung von ihr proportional. Die Horizontalprojektion der Bahn des beweglichen Punktes beschreibt demnach, wie wir aus § 4 wissen, eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit der Gleichgewichtslage zusammenfällt und die Schwingungsdauer ist ebenso groß wie im Falle der ebenen Schwingungen.

§ 12. Genauere Theorie der ebenen Pendelschwingungen.

Die vorigen Betrachtungen reichen zwar gewöhnlich für die Anwendungen aus. Bei großen Ausschlägen werden sie aber unzuverlässig und es ist daher eine Ergänzung nötig, die jedoch nur für den einfacheren und praktisch besonders wichtigen Fall der ebenen Schwingungen gegeben werden soll.

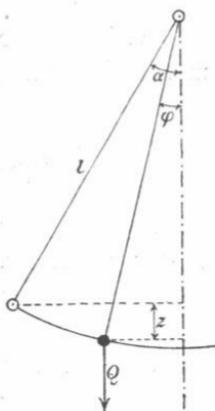


Abb. 12.

Wir müssen hier vor allem auf die Wege achten, die der materielle Punkt in lotrechter Richtung zurücklegt. In Abb. 12 sei α der Ausschlag des Pendels, φ gebe die augenblickliche Stellung an. Der Höhenunterschied beider Lagen ist in der Abbildung mit z bezeichnet. Er ist gleich dem Unterschiede zwischen den Vertikalprojektionen der Fadenslänge l in beiden Lagen und daher

$$z = l(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Wir wenden jetzt den Satz von der lebendigen Kraft an. Die Fadenspannung F leistet keine Arbeit, da sie in jedem Augenblicke senkrecht zur Bewegungsrichtung steht und die Arbeit von Q ist für eine Bewegung aus der Lage α in die Lage φ (oder umgekehrt) gleich Qz (oder $-Qz$). In der Lage α ist die Geschwindigkeit und mit ihr die lebendige Kraft gleich Null. Wenn also von Bewegungswiderständen abgesehen wird, muß die lebendige Kraft in der Lage φ gleich Qz sein. Wir haben also

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 = Qz$$

und berechnen daraus die Geschwindigkeit v in der Lage φ zu

$$v = \sqrt{2gz} = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)}. \quad (65)$$

Der Weg im Zeitelemente dt ist $v dt$. Wir können dafür auch $l d\varphi$ schreiben, so daß also $d\varphi$ die zur Zeit dt gehörige Richtungsänderung des Fadens bedeutet. Hiermit erhalten wir

$$l d\varphi = dt \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Diese Gleichung lösen wir nach dt auf, da es uns vor allem darauf ankommen muß, die Zeit zu berechnen, die während der Bewegung aus einer Lage in die andere verstreicht. Wir finden

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}. \quad (66)$$

Die ganze Zeit, die der Punkt braucht, um etwa aus der Lage φ in die Lage α zu gelangen, folgt hieraus durch eine Integration zwischen den Grenzen φ und α . Man wird sich besonders für die Zeit interessieren, die zum Durchlaufen des halben Schwingungsbogens von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$ erforderlich ist. Wir bezeichnen diese Zeit mit t ; sie ist der vierte Teil der Dauer einer vollen Schwingung. Denn es ist klar, daß bei der Bewegung in umgekehrter Richtung (von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = 0$) ebensoviel Zeit vergeht als auf dem Hinwege, da die Geschwindigkeit in jeder Stellung nur von z abhängt und daher in beiden Fällen gleich groß ist. Das gleiche gilt auch für die Bewegung auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage. Für t haben wir

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}. \quad (67)$$

Die einzige Schwierigkeit der genaueren Theorie der Pendelbewegung besteht nun darin, daß dieses Integral nicht auf die gewöhnlichen einfachen Funktionen zurückgeführt werden kann, sondern ein elliptisches ist. Da jedoch Tafeln der elliptischen Integrale berechnet und in vielen Formelbüchern abgedruckt sind, ist darauf nicht viel Gewicht zu legen. Es wird sich nur darum handeln, das Integral so umzuformen, daß sein Zahlenwert in einem gegebenen Falle ohne weiteres in den Tabellen aufgeschlagen werden kann.

Zum Zwecke der vorzunehmenden Umformung mache ich zunächst von der goniometrischen Formel

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Gebrauch. Mit ihrer Hilfe geht Gl. (67) über in

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (68)$$

An Stelle der Veränderlichen φ wird jetzt eine neue Veränderliche ψ eingeführt mit Hilfe der Substitution

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi. \quad (69)$$

Hiermit wird φ zu α , wenn ψ ein rechter Winkel ist. Um $d\varphi$ in $d\psi$ ausdrücken zu können, differenzieren wir die Gleichung und erhalten

$$\frac{1}{2} d\varphi \cos \frac{\varphi}{2} = d\psi \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi$$

und hieraus, wenn wir $\cos \frac{\varphi}{2}$ in $\sin \frac{\varphi}{2}$ ausdrücken und Gl. (69) berücksichtigen,

$$d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (68) geht diese über in

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\sqrt{\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi\right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \sin^2 \psi)}} d\psi.$$

Hier hebt sich aber $\cos \psi$ im Zähler gegen den gleichwertigen Faktor im Nenner weg usf. und man behält

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (70)$$

Damit ist die verlangte Umformung vollzogen, denn das hier noch vorkommende Integral kann bei gegebenem α ohne weiteres in den Tafeln aufgeschlagen werden. Es wird nach

Legendre, von dem auch die erste Berechnung der Tafeln herrührt, die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung genannt und mit dem Buchstaben F bezeichnet, wobei man den Wert von $\sin \frac{\alpha}{2}$ und die obere Grenze $\frac{\pi}{2}$, die andeutet, daß das Integral ein vollständiges ist, in Klammern beifügt. An Stelle von Gl. (70) kann daher auch

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (71)$$

geschrieben werden, wobei noch zu bemerken ist, daß in manchen Tafeln an Stelle von $\sin \frac{\alpha}{2}$ kürzer ein einziger Buchstabe, gewöhnlich ε geschrieben ist. Es wird gut sein, wenn ich hier auszugsweise wenigstens ein paar Werte der Funktion F anführe. Man hat für

$\frac{\alpha}{2} =$	0^0	$2,5^0$	5^0	10^0	20^0
$F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =$	1,5708	1,5715	1,5738	1,5828	1,6200
$=$	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0 .
$=$	1,6858	1,8541	2,1565	2,7681	∞

Man erkennt hieraus, daß die Pendelbewegung bei größeren Ausschlägen nicht mehr isochron ist. Wenn der Ausschlag α nur 5^0 beträgt (also $\frac{\alpha}{2} = 2,5^0$), ist zwar F nur etwa um $\frac{1}{2000}$ das Wertes, den es für $\alpha = 0^0$ annimmt, vergrößert; nachher wächst aber F viel rascher und mit ihm die Schwingungsdauer.

Die Dauer einer vollen Schwingung ist übrigens, wie schon vorher bemerkt wurde, das Vierfache von t , also

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (72)$$

Für unendlich kleine Schwingungen stimmt dies mit Gl. (64) des vorigen Paragraphen zusammen, denn F geht in diesem Falle, wie auch aus der kleinen Tabelle entnommen werden kann, in $\frac{\pi}{2}$ über.

Für solche Fälle schließlich, bei denen α zwar noch ziemlich klein ist (vielleicht zwischen 5° und 30°), bei denen man sich aber mit der Genauigkeit der Annäherungsformel (64) nicht begnügen kann, benutzt man häufig eine andere Formel, die eine viel größere Annäherung gewährt und die Benutzung einer Tabelle über die Funktion F entbehrlich macht. Diese soll jetzt auch noch abgeleitet werden. Hierzu knüpfe ich an Gl. (70) an und mache darauf aufmerksam, daß der unter dem Wurzelzeichen im Nenner stehende Ausdruck $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi$ stets ein ziemlich kleiner echter Bruch bleibt. Höchstens kann nämlich dieser Bruch den Wert $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ annehmen, und wenn z. B. der Ausschlag α selbst 30° beträgt, so ist doch $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ nur etwa 0,067, also jedenfalls gering gegenüber dem anderen Gliede 1 unter dem Wurzelzeichen. In solchen Fällen kann man mit geringem Fehler die Wurzel durch einen einfacheren Wert ersetzen. Ist nämlich m eine Größe, die klein ist von der ersten Ordnung, so ist bis auf Größen von der zweiten Ordnung genau

$$\sqrt{1-m} = 1 - \frac{m}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1-m}} = 1 + \frac{m}{2},$$

wovon man sich am einfachsten durch Ausquadrieren überzeugt. Sonst kann man aber auch sagen, daß es sich hierbei nur um eine Reihenentwicklung nach dem binomischen Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten handelt, die wegen des an und für sich schon kleinen Wertes von m sehr schnell konvergiert, so daß man schon mit dem zweiten Gliede abbrechen kann. Zugleich erkennt man hieraus auch, daß sich die Reihe ohne weiteres fortsetzen ließe, wenn etwa noch eine höhere Genauigkeit, als wir sie jetzt anstreben, verlangt werden sollte.

Machen wir von dieser Näherungsformel Gebrauch, so erhalten wir an Stelle von Gl. (70)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi \right) d\psi.$$

Diese Integration kann aber sofort ausgeführt werden; dabei ist zu beachten daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \, d\psi = \frac{\pi}{4}$$

ist, eine Formel, die auch sonst so häufig (namentlich in der Elektrotechnik, bei der Lehre von den Wechselströmen) gebraucht wird, daß man gut tut, sie sich besonders zu merken. Sie sagt aus, daß der durchschnittliche Wert von Sinusquadrat für alle Winkel von Null bis zu einem rechten gleich $\frac{1}{2}$ ist, und daß dies so sein muß, erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß der Kosinus in diesem Intervalle, wenn auch in umgekehrter Reihenfolge, doch dieselbe Wertreihe durchläuft, wie der Sinus, und daß daher der durchschnittliche Wert von Kosinusquadrat ebenso groß sein muß als der von Sinusquadrat. Da nun die Summe aus Kosinusquadrat und Sinusquadrat stets 1 liefert, folgt, daß jeder von beiden Mittelwerten gleich $\frac{1}{2}$ sein muß. Um das obenstehende Integral zu erhalten, braucht man nun bloß den Mittelwert $\frac{1}{2}$ mit dem ganzen Bogen $\frac{\pi}{2}$, nach dem integriert wird, zu multiplizieren, um das Resultat $\frac{\pi}{4}$ zu finden. Mit dieser Begründung, die ohne Rechnung angestellt werden kann, merkt man sich die Formel am besten, denn wenn man auch vergessen haben sollte, wie viel das Integral ausmacht, kann man dies nach kurzem Besinnen auf Grund der vorausgehenden Überlegung sofort wieder angeben.

Führen wir nun die Integration aus, so erhalten wir

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Wenn α nicht zu groß, $\frac{\alpha}{2}$ hiermit erst recht nicht groß ist, kann man an Stelle des Sinus, wenn man will, auch den Bogen

setzen. Nimmt man außerdem noch das Vierfache, so erhält man für die Dauer einer vollen Schwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \quad (73)$$

Das letzte Glied in der Klammer bildet das Korrektionsglied der mehr angenäherten Formel gegenüber der gewöhnlich gebrauchten einfachen Formel (64).

§ 13. Schwingungen auf der Zykloide.

Beim Pendel ist der bewegliche Punkt genötigt, auf einem Kreise zu bleiben. Man gelangt zu Bewegungen, die den Pendelschwingungen ganz nahe verwandt sind, wenn man den Kreisbogen durch irgendeine andere Kurve ersetzt. Von besonderem Interesse ist hier namentlich die Bewegung auf der Zykloide.

Man untersucht diese genau nach derselben Methode wie die Pendelbewegung. Zunächst sei eine Gleichung der Zykloide abgeleitet, wobei von der bekannten Erzeugungsweise der

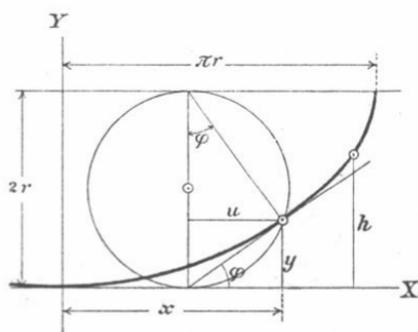


Abb. 13.

Zykloide durch Rollen eines Kreises auf einer Geraden ausgegangen werden soll. Der Winkel φ , den die Tangente mit der X -Achse bildet (siehe Abb. 13), ist gleich dem Winkel, den die Sehne vom Berührungspunkte des Erzeugungskreises nach dem Zykloidenpunkte mit der Y -Achse bildet, denn diese Sehne

geht durch den augenblicklichen Drehpunkt des Erzeugungskreises und steht daher senkrecht auf dem Wege des erzeugenden Punktes, also senkrecht auf der Tangente. Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{2r - y},$$

wobei die dem Winkel φ gegenüberliegende Kathete einstweilen mit u bezeichnet ist. Für u selbst findet man nach dem Satze über die Proportionen der Abschnitte von Kreissehnen, die sich schneiden

$$u = \sqrt{y(2r - y)}$$

und hiermit erhält man als Differentialgleichung der Zyklode

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}, \quad (74)$$

mit deren Integration wir uns hier nicht aufzuhalten brauchen.

Ich nehme jetzt an, daß ein materieller Punkt (selbstverständlich ohne Reibung!) von einem Punkte in der Höhe h herabrolle oder auch — was für die Vorstellung gewöhnlich bequemer ist, weil dann die Koordinaten mit der Zeit wachsen —, daß der Punkt auf der Zyklode hinaufrolle, und daß h die größte Höhe sei, die er hierbei erreicht. Dann kann nach dem Satze von der lebendigen Kraft die Geschwindigkeit v in der Höhe y genau wie beim Pendel

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

gesetzt werden und die Zeit dt , die beim Durchlaufen eines Bogens ds verstreicht, ist

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2g(h - y)}} = dy \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(h - y)}}$$

oder wenn man den reziproken Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus Gl. (74) einsetzt

$$dt = dy \sqrt{\frac{r}{gy(h - y)}}.$$

Die Zeit, die der Punkt braucht, um die halbe Schwingungsbahn von $y = 0$ bis $y = h$ einmal zurückzulegen, sei wieder mit t bezeichnet. Dann ist

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y(h - y)}}. \quad (75)$$

Hier ist aber das Integral viel leichter auszuführen, als bei den Pendelschwingungen. Allgemein ist nämlich

$$\int \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = -\arcsin \frac{\frac{h}{2} - y}{\frac{h}{2}},$$

wovon man sich durch Ausführung der Differentiation leicht überzeugt. Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 0 und h , so erhält man

$$-\arcsin(-1) + \arcsin(+1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

und hiermit geht Gl. (75) über in

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Die Dauer einer vollen Schwingung auf dem Zyklidenbogen ist das Vierfache hiervon, wofür man schreiben kann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}. \quad (76)$$

Zunächst erkennt man hieraus, daß die Schwingungsdauer auch für Ausschläge von beliebiger endlicher Größe streng isochron ist, während dies bei den Pendelschwingungen nur für kleine Schwingungen annähernd zutrif. Ferner lehrt der Vergleich mit Gl. (64), daß die Pendellänge, die bei kleinen Schwingungen zu dem gleichen Werte der Schwingungsdauer führt, wie die Schwingung auf der Zyklode, $l = 4r$ gewählt werden muß. Es ist aber eine hier als bekannt vorauszusetzende Eigenschaft der Zyklode, daß der Krümmungshalbmesser im Scheitel gleich dem Vierfachen vom Radius des Erzeugungskreises ist. Dies zeigt uns, daß wir nur so lange auf einen Isochronismus der Pendelschwingungen rechnen können, als wir uns den Kreisbogen durch einen kleinen Zyklidenbogen vom gleichen Krümmungsradius ersetzt denken können. Je größer der Ausschlag des Pendels wird, um so mehr weichen die Zyklode und ihr Krümmungskreis voneinander ab und um so ungenauer wird es, wenn wir die eigentlich nur für die Zyklode gültige Formel

für die Schwingungsdauer auch bei der Pendelbewegung als gültig betrachten.

Es sei noch erwähnt, daß man einen schweren Punkt leicht zwingen kann, auf einer Zykloide zu schwingen, wenn man ihn an einem Faden aufhängt, der sich beim Schwingen an zwei beiderseits vom Aufhängepunkte angebrachte Backen anlegt, die nach der Evolute der Kurve begrenzt sind. Versuche mit solchen Zykloidenpendeln werden häufig in Vorlesungen über Experimentalphysik vorgeführt, um durch den Versuch nachzuweisen, daß die Schwingungsdauer unabhängig von der Größe des Ausschlags ist.

Wegen der seither besprochenen Eigenschaft pflegt man die Zykloide auch als die Tautochrone zu bezeichnen. Sie hat aber zugleich noch eine andere Eigenschaft, zu deren Besprechung ich jetzt übergehen will und der sie den Namen Brachistochrone verdankt. Sie ist nämlich jene Kurve, auf der ein Punkt in kürzerer Zeit als auf jeder anderen von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle, die tiefer liegt als die erste, hinabrollt.

Um die Aufgabe in möglichst anschaulicher Form vorzubringen, erinnere ich an den Rücklauf, den man bei Kegelbahnen anwendet, um die Kugeln den Spielern wieder zuzuführen. Man könnte diesen Rücklauf zunächst geradlinig anordnen; dabei würde es aber ziemlich lange dauern bis die Kugel den Weg zurückgelegt hätte. Deshalb pflegt man den Rücklauf im Anfange viel steiler anzulegen und ihn nachher flacher verlaufen zu lassen. Der Gewinn, den man hierdurch erzielt, liegt ohne jede Rechnung auf der Hand. Wenn die Kugel nämlich schon zu Anfang ihrer Bahn um ein großes Stück der verfügbaren Höhe herabsinkt, so erlangt sie sehr bald eine verhältnismäßig große Geschwindigkeit, mit der sie dann die ganze weitere Bahn durchheilt, während sie bei geradlinigem Rücklaufe eine so große Geschwindigkeit erst gegen Ende ihrer Bahn erlangen könnte.

Soweit es sich nur um die Kegelbahn handelt, ist damit die Sache im wesentlichen schon erledigt. Man wird gut tun,

dem flacheren Teile der Rücklaufbahn ein solches Gefäll zu geben, daß die Bewegungswiderstände dadurch ungefähr aufgehoben werden und den hiernach verfügbaren Rest des Gefälles am Anfange des Rücklaufes in einer steilen Kurve, auf deren besondere Form praktisch nicht viel ankommt, zusammenzudrängen. So wird es auch in der Regel ungefähr gemacht.

Man wird sich aber auf Grund dieser Überlegungen sofort die weitere Frage stellen, welche Gestalt man der Kurve des Rücklaufs geben müßte, um bei Vernachlässigung von Bewegungswiderständen u. dgl. die aller kürzeste Zeit für die Rücklaufbewegung zu erhalten. Dabei bemerke ich noch, daß hierbei auch von der Rotation, die die Kugel in Wirklichkeit erlangt, abgesehen werden soll, damit wir sie mit Recht als materiellen Punkt ansehen können. Wenn die Kugel niemals auf der Unterlage gleiten könnte, würde die günstigste Form der Kurve hiervon freilich nicht beeinflußt, da das Verhältnis zwischen Rotations- und Translationsenergie immer denselben Wert hätte und die Zeitdauer der Rücklaufbewegung in jedem Falle nur im ganzen in einem entsprechenden konstanten Verhältnisse vergrößert würde. Das ist aber, wie schon aus Bd. I, Aufg. 32, S. 283 der 3. Aufl. hervorgeht, im allgemeinen keineswegs zu erwarten. Deshalb schon müssen sich zwischen der „theoretischen Lösung“ des unter den einfachsten Bedingungen behandelten Problems und den auf die Nebenumstände wenigstens schätzungsweise Rücksicht nehmenden „praktischen“ Erwägungen Unterschiede einstellen, die den Wert der theoretischen Untersuchung stark einschränken. Deshalb pflege ich auch in den Vorlesungen selbst diese Betrachtungen nicht mit vorzubringen; ich denke aber, daß es gut sein wird, wenn ich wenigstens in dem gedruckten Buche die Aufgabe löse, da sich doch wohl der eine oder der andere dafür interessieren dürfte.

In Abb. 14 sei also A die Stelle, in der der materielle Punkt seinen Lauf ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt und B sei der Punkt, nach dem er in möglichst kurzer Zeit längs

der Kurve AB hinabgleiten soll. Die Geschwindigkeit im Punkte xy ist, wie wir schon wissen,

$$v = \sqrt{2gy},$$

die Zeit, die zum Durchlaufen eines Bahnelementes ds gebraucht wird,

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}$$

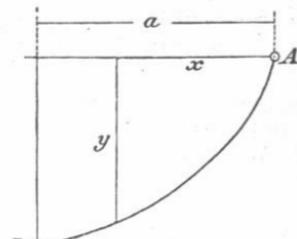


Abb. 14.

und die ganze Zeit für das Durchlaufen der Kurve AB wird

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} dx, \quad (77)$$

wenn a die Abszisse des Punktes B ist. Dieser Ausdruck soll nun durch eine geeignete Wahl der Kurvenform zu einem Minimum gemacht werden. Die notwendige Bedingung dafür besteht darin, daß die Variation des Wertes von t , die zu einer willkürlichen unendlich kleinen Änderung der Kurvenform gehört, zu Null wird. Wenn wir uns die Kurve AB durch irgendeine benachbarte ersetzt denken, wird sich jede Ordinate y um ein kleines Stück δy ändern, und wir haben zunächst einen Ausdruck für die Änderung aufzustellen, die dadurch in dem Werte von t herbeigeführt wird. Zunächst ist klar, daß die Gesamtänderung des Integrals gleich der Summe der Änderungen aller seiner einzelnen Elemente ist. Wir bilden also zunächst die Variation

$$\delta \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}}$$

Der Ausdruck, der sich verändert, ist aber eine bekannte Funktion von y und $\frac{dy}{dx}$ und wir können daher die Änderung des ganzen Ausdrucks nach den Regeln der Differentialrechnung

in den Variationen von y und $\frac{dy}{dx}$ ausdrücken. Allgemein gesagt ist

$$\delta F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \delta \frac{dy}{dx},$$

und wenn wir dies auf den vorliegenden Fall anwenden, erhalten wir

$$\delta \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \delta y \\ + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \delta \frac{dy}{dx}.$$

Nun ist aber nach dem Begriffe der Veränderung, um die es sich hier handelt,

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d(y + \delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}.$$

Wir haben daher jetzt für die Variation von t vorläufig den Ausdruck

$$\delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[-\frac{1}{2\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \delta y \right. \\ \left. + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \frac{d\delta y}{dx} \right] dx. \quad (78)$$

Um ihn weiter umzugestalten, nehmen wir am zweiten Gliede in der Klammer eine partielle Integration vor. Dies kommt darauf hinaus, daß wir nach dem Satze über die Differentiation eines Produkts setzen

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ = \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \delta y \right] - \delta y \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \right]$$

und nun auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und a integrieren. Wir erhalten dann

$$\int_0^a \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

$$(79)$$

$$= \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \delta y \right]_0^a - \int_0^a \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \right] \cdot \delta y \cdot dx.$$

Beim ersten Gliede auf der rechten Seite ließ sich nämlich die Integration sofort ausführen und das bestimmte Integral ist gleich der Differenz der Klammerwerte für $x=0$ und $x=a$. Nun sind aber die Punkte A und B der Kurve fest gegeben; wie wir also auch die Gestalt der Kurve sonst ändern mögen, an diesen beiden Stellen ist jedenfalls $\delta y = 0$.

Da nun δy in dem Klammerwerte als Faktor vorkommt, erkennen wir, daß dieser Wert an der oberen Grenze $x=a$ jedenfalls verschwindet. An der unteren Grenze ist dieser Schluß freilich nicht ohne weiteres zulässig, weil hier auch y im Nenner zu Null wird. Für den unbestimmten Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ setzen wir daher nach bekannten Regeln

$$\left[\frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \delta y \right)}{\frac{d}{dx} \sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \right]_{x=0}$$

Nun ist aber

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \delta y \right) \right]_{x=0} = \left[\frac{dy}{dx} \delta \frac{dy}{dx} \right]_{x=0},$$

$$\left[\frac{d}{dx} \sqrt{y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \right]_{x=0} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} \right]_{x=0},$$

Das Verhältnis beider Werte wird daher

$$\left[2\delta \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{\frac{y}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right]_{x=0},$$

und dies liefert wegen des Faktors y jedenfalls Null. In der Tat fällt also das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (79) vollständig fort, und das auf der linken Seite stehende Integral kann ohne weiteres durch das Integral im zweiten Gliede der rechten Seite ersetzt werden. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir daher jetzt an Stelle von Gl. (78)

$$\delta t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[\frac{1}{2\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}} \right) \right] \delta y \cdot dx. \quad (80)$$

Dieser Ausdruck soll nun für die Kurve, die wir suchen, zu Null werden. Dabei ist δy sonst ganz beliebig wählbar und nur an die Bedingung gebunden, daß es an beiden Grenzen verschwindet. Das Integral kann daher nur dann für jede Wahl von δy zu Null werden, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer selbst Null ist. Denn wäre dies nicht an jeder Stelle der Kurve der Fall, so könnte man δy überall so wählen, daß es gleiches Vorzeichen mit dem Ausdrücke in der eckigen Klammer hätte und dann würde das Integral als eine Summe von lauter positiven Gliedern jedenfalls nicht zu Null. Für die durch diese Verschiebungen δy neugewonnene Nachbarcurve wäre dann δt jedenfalls negativ, d. h. die zuerst gegebene Kurve beanspruchte eine längere Fallzeit t als die neugefundene. Als notwendige Bedingung für die Brachistochrone haben wir daher

$$\frac{1}{2\sqrt{y^3}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}} \right) = 0.$$

Durch Ausführung der Differentiation im zweiten Gliede und nach einer Reihe elementarer algebraischer Umformungen des zunächst ziemlich weitläufig herauskommenden Ausdrucks auf der linken Seite geht die Gleichung über in

$$\frac{2y \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\sqrt{y^3 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}} = 0.$$

Da sie für alle Werte von x gültig sein soll, kann dies nur dadurch geschehen, daß der Zähler überall zu Null wird. — Wir haben also für die gesuchte Kurve die Differentialgleichung

$$2y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0. \quad (81)$$

Um sie zu integrieren, multiplizieren wir zunächst mit $\frac{dy}{dx}$ und erhalten

$$2y \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Die beiden ersten Glieder der linken Seite lassen sich nun zu einem einzigen Differentialquotienten nach x zusammenfassen, so daß die Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dx} \left(y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

geschrieben werden kann. Die Integration liefert

$$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = C,$$

also bei Auflösung nach dem Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{C-y}{y}}. \quad (82)$$

Der Vergleich mit Gl. (74), die wir früher als Differentialgleichung der Zykloide ermittelt hatten, zeigt schon, daß die gesuchte Kurve eine Zykloide ist. Man muß dabei nur auf die jetzt etwas anders gewählte Bezeichnung achten. Schreibt man an Stelle von $C - y$ kürzer z , so geht Gl. (82) über in

$$\frac{dz}{dx} = \mp \sqrt{\frac{z}{C-z}},$$

und diese Gleichung für die von unten her gezählte Ordinate z stimmt nun ganz mit Gl. (74) überein, wenn man $C = 2r$ setzt. Die Integrationskonstante C gibt hiernach den Durchmesser des Rollkreises an, durch den man sich die Zykloide erzeugt denken kann.

Auch die endliche Gleichung der Zykloide kann aus Gl. (82) sofort durch eine einfache Quadratur gefunden werden. Man schreibt die Gleichung in der Form

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

und erhält hieraus durch Integration

$$x = K - \sqrt{Cy - y^2} - \frac{C}{2} \arcsin \frac{C - 2y}{C}. \quad (83)$$

Die neu auftretende Integrationskonstante K folgt aus der Bedingung, daß die Kurve durch den Punkt A gehen soll. Für $x = 0$ muß daher auch $y = 0$ sein, also

$$0 = K - \frac{C}{2} \arcsin(1)$$

und hieraus

$$K = \frac{\pi}{4} C.$$

Durch zwei Punkte A und B kann man unendlich viele Zykloidenbogen mit senkrechter Achse legen. Unter diesen besitzt aber nur ein einziger die von uns verlangte Minimumeigenschaft, denn auch die andere Integrationskonstante C wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Kurve durch den Punkt B gehen soll. Anstatt aber die Koordinaten von B in die Zykloidengleichung einzusetzen und die sich hieraus ergebende transzendente Gleichung nach C aufzulösen, bedenkt man einfacher, daß nach Gl. (82) für $y = 0$ jedenfalls $\frac{dy}{dx} = \infty$ werden muß, d. h., daß die Tangente der Kurve dort in lotrechter Richtung geht. Der materielle Punkt beginnt daher seine Fallbewegung auf der Kurve zuerst lotrecht nach abwärts. Oder mit anderen Worten: die Horizontale durch A ist die Gerade, auf der der Erzeugungskreis vom Durchmesser

C rollen muß, um die Zyklode zu beschreiben. Denkt man sich nun alle Zykloiden, die dieser Bedingung genügen, vom Punkte A aus gezogen, so sind alle ähnliche und ähnlich liegende Kurven und nur eine von ihnen geht durch den Punkt B . Man findet aber diese sofort heraus, wenn man zuerst nur irgendeine Zyklode konstruiert und

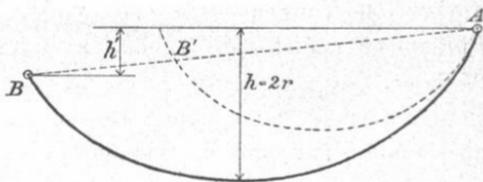


Abb. 15.

dann die Verbindungsgerade AB zieht (vgl. Abb. 15), deren Schnittpunkt mit der Zyklode B' heißen möge. Wenn etwa AB' kleiner ist als AB , muß man hierauf die Zyklode im Verhältnisse $AB : AB'$ vergrößern (vom Ähnlichkeitszentrum A aus), worauf die gesuchte Brachistochrone gefunden wird.

Wenn die horizontale Entfernung beider Punkte erheblich größer ist als die vertikale (wie bei der Kegelbahn) erlangt die Brachistochrone die in Abb. 15 angegebene Gestalt. Die Kugel sinkt zuerst viel tiefer, erlangt dadurch eine erheblich größere Geschwindigkeit und kann daher den etwas größeren Weg doch in kürzerer Zeit zurücklegen, als bei einer flacheren Form des Rücklaufs. Die Zeit, die nun mindestens nötig ist, um den Punkt auf der günstigsten Kurve bloß durch den Einfluß der eigenen Schwere von A nach B gelangen zu lassen, folgt leicht aus Gl. (75). Für die in Abb. 15 angegebenen Verhältnisse wird diese Zeit

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + \arcsin \frac{r-h'}{r} \right\},$$

wobei h' direkt gegeben und r aus der vorher beschriebenen Konstruktion zu entnehmen ist.

Ein Zahlenbeispiel möge dies noch näher erläutern. Die horizontale Entfernung der Punkte A und B sei 10 m, der Höhenunterschied 1 m. Dann ist die zum Durchlaufen einer geradlinigen Bahn zwischen A und B erforderliche Zeit, wenn auf Bewegungswiderstände und auf die durch das Rollen der

Kugel herbeigeführte langsamere Bewegung wie seither schon keine Rücksicht genommen wird, gleich 4,52 sec. Verbindet man dagegen A und B durch eine Kreisbahn, die in B eine horizontale Tangente hat, so wird die Zeit gleich 3,57 sec. Für die Brachistochrone endlich berechnet sich die Zeit auf 2,06 sec.

Will man die rollende Bewegung berücksichtigen, nimmt aber dafür an, daß in keinem Falle ein Gleiten der Kugel vorkäme, so beachte man, daß zur Geschwindigkeit v des Kugelmittelpunktes eine Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{\rho}$ gehört, wenn ρ den Kugelradius bedeutet. Die ganze lebendige Kraft L der Kugel ist daher

$$L = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} \Theta \frac{v^2}{\rho^2}$$

oder, wenn man für das Trägheitsmoment Θ der Kugel seinen Wert

$$\Theta = \frac{2}{5} \frac{Q}{g} \rho^2$$

einsetzt (vgl. Bd. I, S. 284, 3. Aufl.), so folgt

$$L = 0,7 \frac{Q}{g} v^2.$$

Die lebendige Kraft ist gleich der von der Schwere geleisteten Arbeit, also ebenso groß als die lebendige Kraft des materiellen Punktes sein würde, wenn er nur gleitete und nicht rollte. Daher wird v jetzt überall gegenüber dem früher vorausgesetzten Falle im Verhältnisse $\sqrt{\frac{5}{7}}$ verkleinert und die Zeit zum Durchlaufen der Bahn in allen vorher betrachteten Fällen im Verhältnisse $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1,183$ vergrößert.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Zykloide ihre Eigenschaft als Brachistochrone auch zwischen irgend zwei beliebig auf ihr ausgewählten Punkten behält, wie schon daraus hervorgeht, daß es sonst möglich sein müßte, auch bei der ganzen vorher betrachteten Bahn durch eine Abänderung der Kurve zwischen diesen beiden Punkten eine kürzere Fallzeit

herbeizuführen. Man muß nur beachten, daß in diesem Falle der materielle Punkt, wenn er in den Anfangspunkt des betrachteten Kurvenstücks gelangt, schon eine gewisse Geschwindigkeit besaß, während seither immer vorausgesetzt wurde, daß die Bewegung vom oberen Punkt A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnen sollte.

Wird also die Aufgabe gestellt, eine Brachistochrone zwischen zwei Punkten A und B anzugeben, unter der Voraussetzung, daß der bewegliche Punkt mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 in A auf die Bahn gebracht wird, so berechne man zunächst

$$h'' = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Diese Größe h'' gibt an, um wieviel die Abszissenachse oder mit anderen Worten die Gerade, auf der der Erzeugungskreis der Zykloide rollt, über dem Punkte A liegt. Dann hat man eine hierzu gehörige Zykloide durch die Punkte A und B zu legen; diese ist die verlangte Brachistochrone. Die Aufgabe ist durch die genannten Angaben eindeutig bestimmt und kann auf konstruktivem Wege mit Berücksichtigung des Umstandes, daß alle Zykloiden einander ähnlich sind, leicht gelöst werden.

§ 14. Anwendung des Seilpolygons auf die Dynamik des materiellen Punktes.

Ein materieller Punkt sei genötigt, sich auf irgendeiner gegebenen Bahn zu bewegen, wie das schon bei den in den vorigen Paragraphen besprochenen Fällen zutraf. Dabei mag von außen her eine beliebig veränderliche Kraft P auf ihn einwirken. Die gesamte Beschleunigung, die er erfährt, läßt sich in eine zur Bahn normale und in eine tangentielle Komponente zerlegen. Bezeichnet man die Bogenlänge der Bahn von irgendeinem Anfangspunkte bis zur augenblicklichen Lage des bewegten Punktes mit s , so ist die Tangentialbeschleunigung gleich $\frac{d^2s}{dt^2}$ zu setzen, und wenn man mit P' die Projektion von P auf die Richtung der Tangente bezeichnet, be-

steht zwischen beiden die schon aus Bd. I, § 14, S. 68 d. 3. Aufl. bekannte Gleichung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P'. \quad (84)$$

Andererseits lautet die Differentialgleichung einer Seilkurve nach Bd. II, Gl. (2), S. 79 d. 2. Aufl.

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q, \quad (85)$$

wobei H der konstante Horizontalzug des Seils, x die Abszisse, y die nach abwärts positiv gezählte Ordinate der Kurve und q die Belastungsintensität ist, die eine beliebig gegebene Funktion von x sein kann und sich durch Zeichnen einer Belastungsfläche graphisch darstellen läßt. Zugleich ist aus Bd. II bekannt, wie man die Seilkurve, die zu dieser Belastungsfläche gehört, auf graphischem Wege konstruieren kann.

Die beiden Gl. (84) und (85) sind von ganz ähnlicher Form, so daß sie sich durch eine passende Bestimmung der in Gl. (85) vorkommenden Größen in vollständige Übereinstimmung miteinander bringen lassen. Wenn dies geschehen ist, vermag man die Integration der Bewegungsgleichung (84) dadurch zu bewirken, daß man die der Differentialgleichung (85) entsprechende Seilkurve auf graphischem Wege ermittelt. Hierdurch werden dynamische Aufgaben der bezeichneten Art graphisch lösbar, was dann von Vorteil sein kann, wenn P' eine solche Funktion von t oder von s ist, daß die Integration der Bewegungsgleichung (84) auf analytischem Wege Schwierigkeiten macht. Es verhält sich damit genau so wie mit der Anwendung des Seilpolygons zur Konstruktion der elastischen Linie, von der in Bd. II die Rede war.

Zunächst unterscheiden sich freilich die beiden Gleichungen (84) und (85) voneinander durch das Vorzeichen auf der rechten Seite. Aber dieser Unterschied läßt sich sofort beseitigen, indem man die Ordinaten der Seilkurve nach oben hin positiv zählt, anstatt wie früher nach abwärts. Mit diesem Wechsel in der Bezeichnung geht Gl. (85) über in

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q. \quad (86)$$

Um die Übereinstimmung mit Gl. (84) herzustellen, setze man

$$y = s; \quad x = \gamma t; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad \frac{q\gamma^2}{H} = \frac{P'}{m}.$$

Dabei können die Konstanten γ und H nach Belieben gewählt werden, während q aus der letzten Gleichung zu ermitteln ist, und zwar wird es proportional mit P' gefunden, denn die übrigen in dieser Gleichung vorkommenden Größen sind Konstanten. Hat man jedoch P' bereits graphisch als Funktion der Zeit t dargestellt, so wird man am einfachsten $q = P'$ setzen, also das Diagramm von P' zugleich als Belastungsfläche betrachten und den Horizontalzug H aus der vorhergehenden Gleichung zu

$$H = \frac{q}{P'} \cdot m\gamma^2 \quad (87)$$

bestimmen. Aus der Seilkurve, die mit diesem H zu der Belastungsfläche konstruiert werden kann, läßt sich dann zu jedem gegebenen t das zugehörige s entnehmen, d. h. der zeitliche Verlauf der Bewegung ist damit vollständig bekannt.

Am einfachsten gestaltet sich diese graphische Lösung der Aufgabe, wenn die Kraft P' von vornherein als Funktion der Zeit gegeben ist. Man nehme z. B. die Bewegung auf der schiefen Ebene unter dem Einflusse des Eigengewichts. Unter P' ist dann die Projektion des Gewichts auf die Richtung der schiefen Ebene zu verstehen und diese bleibt während der ganzen Bewegung konstant. Die Belastungsfläche q ist ein Rechteck und die zugehörige Seilkurve eine Parabel. Oder man betrachte die Bewegung des Schwungrades einer Dampfmaschine unter dem Einflusse eines wechselnden Drehmomentes, und zwar jetzt ohne Berücksichtigung der Torsionsschwingungen, die sich zu dieser Bewegung noch hinzugesellen können. In den vorhergehenden Gleichungen ist dann unter m das Trägheitsmoment, unter s der von einer beliebigen Anfangsstellung aus zurückgelegte Drehungswinkel und unter P' das Moment des auf das Schwungrad wirkenden resultierenden Kräftepaars zu verstehen, das während einer Umdrehung bald positiv, bald negativ ist und dessen Veränderung mit der Zeit als genau

genug gegeben angesehen werden kann, wenn man an die Untersuchung des Ungleichförmigkeitsgrades des Schwungrades herantritt. Die vorher beschriebene Konstruktion gestattet dann, diese Untersuchung ohne weiteres auf graphischem Wege durchzuführen.

In den meisten Fällen wird aber P' nicht als Funktion der Zeit, sondern als Funktion des Weges gegeben sein. Das trifft z. B. bei der Pendelbewegung oder bei der Fallbewegung auf der Zykloide oder auf irgendeiner anderen gegebenen Kurve zu. Der nächste Schritt, um die Bewegung auf graphischem Wege zu untersuchen, besteht dann darin, die ganze Schwingungsbahn in eine Anzahl von Abschnitten einzuteilen, die man genau genug als geradlinig ansehen kann, in jedem Teilpunkte die Tangente zu ziehen und das Gewicht, das in einem passenden Maßstabe aufgetragen ist, auf die Tangente zu projizieren. Dann trägt man die Abschnitte der Bahn auf einer Geraden auf und errichtet in jedem Teilpunkte eine Ordinate, die gleich der Projektion P' ist. Damit hat man aber noch nicht die Belastungsfläche der Seilkurve, da bei dieser die Abszissen den Zeiten und nicht den Wegen proportional sein müssen.

Das hindert jedoch nicht die Lösung der Aufgabe, wie am Beispiele der Pendelbewegung gezeigt werden soll. In Abb. 16 stellt a die Schwingungsbahn des Pendels dar, und zwar beschränkt auf eine Hälfte, da es ausreicht, die Bewegung vom größten Ausschlage nach links bis zum tiefsten Punkt der Bahn zu betrachten. Die Einteilung der Bahn in einzelne Elemente ist in der Zeichnung weggelassen und nur an einer Stelle ist gezeigt, wie das Gewicht P auf die Tangente der Bahn projiziert und hiermit P' gefunden wird. Der Teil b der Abbildung enthält die Darstellung von P' als Funktion von s , und zwar ist s dabei in vertikaler Richtung aufgetragen, weil nachher die Ordinaten y der Seilkurve in dieser Richtung gehen sollen. Mit c ist das Seilpolygon, mit d die Belastungsfläche und mit e der Kräfteplan des Seilpolygons bezeichnet. Die erste Seileckseite geht horizontal, weil zu Beginn der Bewegung

die Geschwindigkeit, also $\frac{ds}{dt}$ und hiermit auch $\frac{dy}{dx}$ gleich Null ist. Auf dieser Horizontalen, die man in gleicher Höhe mit der unteren Begrenzungslinie von b zieht, trägt man nun eine Anzahl gleicher Strecken ab, die unter Zugrundelegung eines passend gewählten Maßstabes kleine Zeiten, etwa $\frac{1}{100}$ sec. o. dgl., bedeuten. Wie man diese Zeiten wählt ist im übrigen gleichgültig, wenn man nur sicher sein kann, daß eine passende Zahl

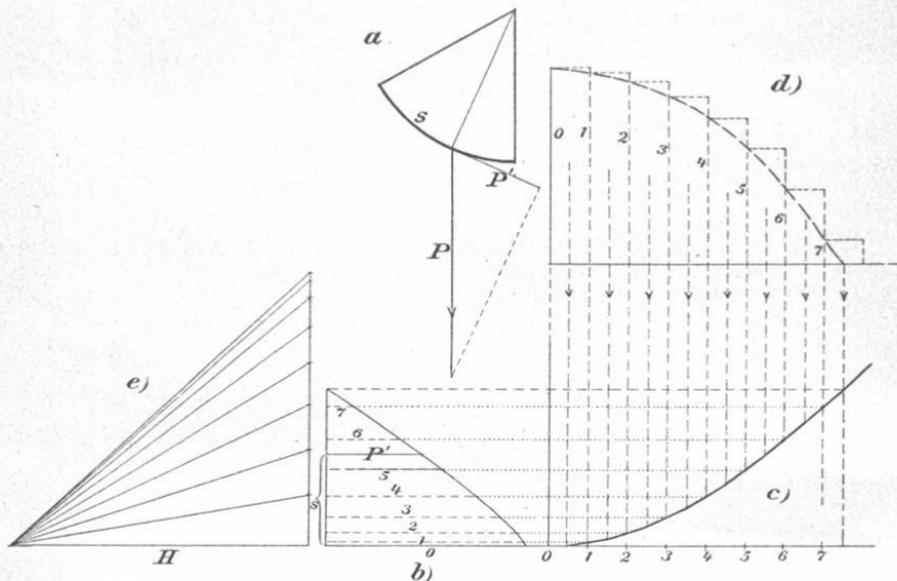


Abb. 16.

(vielleicht 6 bis 10) dieser Zeiten gleich der gesuchten Schwingungsdauer werden wird, und zwar ist diese Beschränkung auch nur deshalb nötig, damit man zu einer gut auszuführenden Zeichnung gelangt. Hierauf zieht man über c in beliebiger Höhe die horizontale Grundlinie der Belastungsfläche d . Die erste Ordinate der Belastungsfläche ist bekannt, da für $t=0$ auch $s=0$ ist und das zugehörige P' bereits konstruiert ist. Man macht also diese Ordinate gleich der Grundlinie von b . Später wird ja die Ordinate kleiner werden; zunächst genügt es aber, sie für das erste Zeitelement als

konstant zu betrachten. Man erhält dadurch das erste Rechteck von d . Den Inhalt dieses Rechtecks betrachtet man nun als Last des Seilpolygons und trägt ihn in irgendeinem günstig gewählten Maßstabe auf der Lastlinie des Kräfteplanes e auf. Hierauf hat man den Horizontalzug H nach Gl. (87) zu berechnen. Das soll hier unter Zugrundelegung eines Zahlenbeispiels, wie es beim Auftragen von Abb. 16 angenommen wurde, geschehen. Die Fadenlänge des Pendels, also der Halbmesser des Kreisbogens in a ist in Abb. 16 zu 2 cm angenommen. Das Gewicht P ist durch eine Strecke von 3 cm dargestellt und die Strecken, die q angeben, sind gleich groß mit denen gewählt, die man für P' erhielt. Hiernach besteht zwischen q und P' der Zusammenhang

$$P' = q \cdot \frac{P}{3 \text{ cm}} = q \frac{m \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}}{3 \text{ cm}} = qm \cdot 327 \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Ferner sind die Zeitelemente, die man auf der Grundlinie von c auftrug, gleich 0,01 sec gewählt und jedes dieser Elemente wurde durch eine Strecke von 5 mm dargestellt. Die Konstante γ hat daher den Wert

$$\gamma = 50 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Setzt man diese Größen in Gl. (87) ein, so erhält man

$$H = \frac{q}{qm \cdot 327 \frac{1}{\text{sec}^2}} \cdot m \cdot 2500 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} = 7,645 \text{ cm}^2.$$

Man erhält eine Fläche, wie es sein muß, da auch der Inhalt der Belastungsfläche unmittelbar als Last des Seilpolygons betrachtet wird. Der Maßstab des Kräfteplans steht noch frei. In Abb. 16, e ist der Inhalt jedes rechteckigen Streifens der Belastungsfläche durch $\frac{1}{4}$ der Höhe auf der Lastlinie dargestellt, d. h. 1 cm² der Fläche wird durch eine Länge von 5 mm dargestellt. Hiernach war H gleich 38,2 mm zu machen.

Nachdem H und die erste Last im Kräfteplan eingetragen sind, kennt man die Richtung des zweiten Seilstrahls in c . Von dem Punkte, in dem dieser die Vertikale 1 trifft, zieht man eine Horizontale, die in b das dieser Stelle zugehörige P'

abschneidet. Diese Strecke trägt man in d als nächste Ordinate der Belastungsfläche auf. Hierauf nimmt man an, daß im nächsten Zeitelemente P' diesen Wert unverändert beibehalte. Der nächste Streifen der Belastungsfläche wird daher als ein Rechteck von dieser Höhe betrachtet. Dessen Fläche wird auf der Lastlinie des Kräfteplans e abgetragen und das Seilpolygon rückt ebenfalls um eine Seite voran. Hierauf wird alles in derselben Weise weiter fortgesetzt, so daß Seilpolygon, Belastungsfläche und Kräfteplan miteinander entstehen. Man ist am Ende angelangt, wenn der letzte Strahl des Seilpolygons die durch den oberen Punkt von b gezogene Horizontale schneidet. Die zugehörige Abszisse stellt die Dauer t einer Viertelschwingung des Pendels dar.

Das ist freilich nur ein erster Näherungswert, der sich aber, wie ein Vergleich des Ergebnisses mit der genauen Formel lehrt, schon ziemlich eng an den wahren Wert anschließt. Es steht aber natürlich frei, die ganze Konstruktion noch einmal zu wiederholen, indem man an Stelle der ganzen Rechteckflächen, die vorher als Lasten angenommen wurden, jetzt Werte setzt, die gegenüber den Rechteckflächen in demselben Maße vermindert sind, wie sich dies bei der ersten Zeichnung herausgestellt hatte. Damit würde man dann schon eine solche Genauigkeit erlangen, wie sie (mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Zeichenfehler selbst bei schärfster Zeichnung im großen Maßstabe) auch bei einer ganz strengen Lösung nicht besser erzielt werden könnte. In Abb. 16 ist der Deutlichkeit wegen von der besprochenen Verbesserung abgesehen worden.

Für die Ermittlung der Schwingungsdauer des Pendels hat das Verfahren natürlich keinen Zweck, da man diese einfacher nach der Formel berechnet. Das Beispiel ist hier nur gewählt, um einen bequemen Vergleich und damit ein Urteil über die Genauigkeit zu ermöglichen. Dagegen führt die Zeichnung, wie nun auch P' als Funktion von s gegeben sein möge und wie die Bahnkurve aussehen möge, immer in derselben Weise leicht zum Ziele, während die Rechnung versagt oder wenigstens mehr Mühe verursacht.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Was folgt aus dem Flächensatze, wenn man ihn auf den schiefen Wurf eines Steines im luftleeren Raume anwendet?

Lösung. Als äußere Kraft wirkt an dem Steine nur die Schwere. Wir können uns diese vom „Mittelpunkte“ der Erde ausgehend denken und sie sonach als eine Zentralkraft auffassen. Dann muß für diesen Punkt als Momentenpunkt das statische Moment der Bewegungsgröße konstant sein. Um dieses Moment für irgendeine Stelle der Wurfbahn zu berechnen, denken wir uns den Hebelarm dahin gezogen und die dazu senkrechte Komponente der Geschwindigkeit mit ihm multipliziert. Gegenüber dem Erdhalbmesser sind aber die Erhebungen der Wurfbahn nur sehr klein und wir können daher die Hebelarme für alle Stellen der Wurfbahn als gleich groß ansehen. Daher muß auch der andere Faktor des statischen Moments konstant sein, d. h. die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit wird während des Wurfes nicht geändert.

Hiermit sind wir freilich nur zu einem Resultate gelangt, das vorher schon aus einfacheren Betrachtungen bekannt war. Wie schon früher bemerkt wurde, zeigt sich aber der Nutzen des Flächensatzes erst bei Aufgaben über Punkthaufen oder über starre Körper im rechten Lichte. Bei der Dynamik des einzelnen materiellen Punktes kann er gewöhnlich leicht entbehrt werden.

Wenn die Wurfbahn als sehr hoch im Vergleiche zum Erdhalbmesser vorausgesetzt wird, ist es freilich nicht mehr zulässig, den Hebelarm überall als gleich groß anzusehen. In der Tat wird aber auch dann die ganze Bewegung geändert. Der Stein (z. B. ein Meteorstein, der in die Nähe der Erdoberfläche gelangt) bewegt sich dann im allgemeinen nicht mehr in einer Parabel, sondern längs eines elliptischen Bogens, wie bei der Planetenbewegung (oder auch längs einer Hyperbel). Die Wurfbahn darf daher immer nur so lange als Parabel aufgefaßt werden, als ihre Abmessungen wirklich als klein gegenüber dem Erdhalbmesser vernachlässigt werden können.

2. Aufgabe. Von einem Anziehungszentrum geht eine Kraft aus, die im Abstände a die Größe P_a hat und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Wie groß ist das Potential des Kraftfeldes im Abstände x , wenn die willkürliche Konstante, die darin vorkommt, so gewählt wird, daß das Potential in unendlicher Ferne zu Null wird?

Lösung. Wir wählen als Integrationsweg eine vom Anziehungszentrum ausgehende Gerade und als Anfangspunkt O den unendlich fernen Punkt dieser Geraden. Dann ist in Gl. (10)

$$V_A = V_0 - \int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

die Konstante V_0 gleich Null zu setzen. Wir haben daher

$$V = - \int_{\infty}^x \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = \int_x^{\infty} \mathfrak{P} d\mathfrak{s}.$$

Hier sind \mathfrak{P} und $d\mathfrak{s}$ entgegengesetzt gerichtet. Im Abstände z ist

$$P = P_a \frac{a^2}{z^2}$$

und, wenn wir für $d\mathfrak{s}$ jetzt dz schreiben, erhalten wir

$$V = - \int_x^{\infty} P_a \frac{a^2}{z^2} dz = P_a a^2 \left[\frac{1}{z} \right]_x^{\infty} = - P_a \frac{a^2}{x}.$$

Für den Fall der Abstoßung anstatt der Anziehung, wie er bei elektrostatischen Untersuchungen vorliegt, wird dagegen V positiv. Es gibt dann sofort die potentielle Energie an, die dadurch bedingt wird, daß sich der bewegliche Punkt im Abstände x von dem Abstoßungszentrum befindet. In diesem Falle wird nämlich die potentielle Energie bei unendlicher Entfernung des beweglichen Punktes zu Null, und dadurch wird die Wahl, die für die willkürliche Konstante getroffen wurde, gerechtfertigt. Für den Fall der Anziehung dagegen wird die potentielle Energie um so größer, je mehr der Abstand wächst und das mit derselben Wahl der Konstanten berechnete V kann daher nicht mehr als Ausdruck für die potentielle Energie angesehen werden. Immerhin ist es auch in diesem Falle gebräuchlich, das Potential derart zu bestimmen, daß es in unendlicher Entfernung verschwindet.

3. Aufgabe. Man soll für beliebig verteilte gegebene Massen, die nach dem Gravitationsgesetze auf einen anderen Massenpunkt einwirken, das Potential des von ihnen erzeugten Gravitationsfeldes berechnen.

Lösung. Ein Volumenelement der Massenverteilung sei mit $d\tau$ bezeichnet (Abb. 17), die Dichte der Massenverteilung an dieser Stelle mit μ und ihr Abstand vom Punkte A , für den man das Potential V berechnen soll, mit r . Dann ist nach der Lösung der vorigen Aufgabe das von der Masse $\mu d\tau$ für sich herrührende Potential bekannt und man braucht nur die Summe aller dieser Werte für die einzelnen Massenelemente zu nehmen, um V zu erhalten. — Rechnet man ferner mit astronomischen Masseneinheiten, so wird für

die Masse 1 im Abstände $a = 1$ das von ihr herrührende P_a zu 1 und man kann in der Lösung der vorigen Aufgabe die Faktoren $P_a a^2$ streichen, wogegen die Masse $\mu d\tau$, die an Stelle der Masse 1 tritt, als neuer Faktor beizufügen ist. Man erhält daher

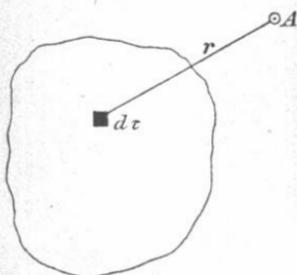


Abb. 17.

$$V = - \int \frac{\mu d\tau}{r},$$

wobei sich die durch das Integralzeichen angedeutete Summierung über den ganzen von Massen erfüllten Raum zu erstrecken hat. — Bei elektrostatischen Aufgaben kehrt sich auch hier das Vorzeichen des Potentials um, da sich elektrische Massen gleichen Vorzeichens abstoßen.

4. Aufgabe. Drei feste Punkte A, B, C , die mit den Massen m_1, m_2, m_3 behaftet sind, üben auf einen in derselben Ebene liegenden beweglichen Punkt Zentralkräfte aus, die den Massen proportional, von den Entfernungen aber unabhängig sind. Man soll das Potential dieser Kräfte berechnen und ferner ermitteln, an welcher Stelle es zu einem Minimum wird.

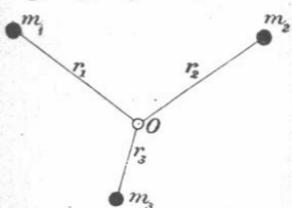


Abb. 18.

Lösung. Wir berechnen zunächst das Potential, das von einer einzigen Masse m_1 berührt. Den Anfangspunkt des Integrations-

wegs lassen wir mit m_1 zusammenfallen und integrieren von da aus längs einer geraden Linie weiter bis zum Abstände r_1 . In der Formel

$$V_1 = V_0 - \int_0^{r_1} \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

ist jetzt \mathfrak{P} konstant und die Summe aller $d\mathfrak{s}$ liefert r_1 . Hierbei ist nur zu beachten, daß \mathfrak{P} und $d\mathfrak{s}$ entgegengesetzt gerichtet sind, das Produkt $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ daher negativ ist. Ferner ist \mathfrak{P} proportional mit m_1 . Hierbei würde noch ein Proportionalitätsfaktor auftreten, den wir uns aber durch eine passende Wahl der Masseneinheit der Einfachheit halber vermieden denken wollen. Die Anziehung, die von jedem m ausgeht, soll also unmittelbar durch den Wert von m selbst angegeben werden. Dann wird

$$V_1 = V_0 + m_1 r_1.$$

Das Potential des von allen drei Massen herrührenden Kraftfeldes ist gleich der Summe von drei nach diesem Muster gebildeten Gliedern.

Die Summe der drei willkürlichen Konstanten V_0 können wir uns hierbei zu einer einzigen willkürlichen Konstanten C zusammengefaßt denken. Wir erhalten demnach

$$V = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + C,$$

wobei wir der willkürlichen Konstanten C schließlich auch zur weiteren Vereinfachung den Wert Null beilegen können.

Um schließlich zu ermitteln, wo V zu einem Minimum wird, beachten wir, daß an dieser Stelle für jede Verschiebung in irgendeiner Richtung $dV = 0$ sein muß. Zugleich gibt aber dV die Summe der von allen Kräften herrührenden Arbeitsleistungen an, die zu dieser Verschiebung gehören. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten schließen wir daher, daß die von den drei Massen ausgehenden Kräfte sich an dem beweglichen Punkte an der gesuchten Stelle im Gleichgewichte halten müssen. Auf Grund dieser Betrachtung

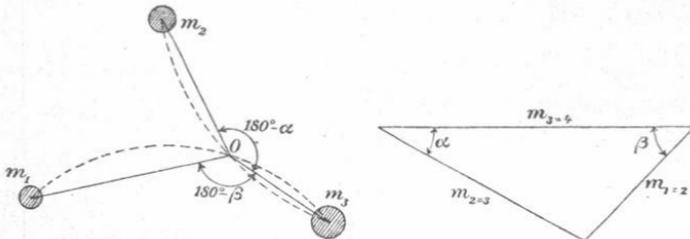


Abb. 19.

läßt sich der Ort des Potentialminimums leicht ermitteln. Die Größe der Kräfte ist nämlich gegeben und damit auch die Gestalt des Kräfte-dreiecks, zu dem sie sich zusammensetzen lassen müssen. Nur die Richtungen der Seiten sind einstweilen unbekannt. Wir konstruieren aber einstweilen das Dreieck in irgendeiner Lage. Dadurch erfahren wir, welche Winkel die Kraftrichtungen am Orte des Potentialminimums miteinander bilden müssen. Die Winkel der Verbindungslinien $r_1 r_2 r_3$ des gesuchten Punktes mit den Massenpunkten $m_1 m_2 m_3$ sind die Supplemente der Dreieckswinkel. Man braucht also nur über den Verbindungslinien von je zwei Massenpunkten einen Kreisbogen zu schlagen, der den seiner Größe nach bekannten Winkel als Peripheriewinkel faßt. Dann schneiden sich alle drei Kreisbögen im Orte des Potentialminimums.

In Abb. 19 ist diese Konstruktion unter der Voraussetzung ausgeführt, daß sich $m_1 : m_2 : m_3$ wie 2 : 3 : 4 verhalten. O ist der Ort des Potentialminimums.

Aus der Konstruktion erkennt man zugleich, daß das Potential im vorliegenden Falle nur an einer Stelle zu einem Minimum werden

kann. Ferner kann O auf dem angegebenen Wege nur dann gefunden werden, wenn jede Masse kleiner ist als die Summe der beiden anderen. Im entgegengesetzten Falle nimmt das Potential seinen kleinsten Absolutwert dort an, wo sich die größte Masse befindet.

Anmerkung. Zentralkräfte, die unabhängig von der Entfernung sind, kommen in den zur Mechanik gehörigen Anwendungen der Potentialtheorie kaum in Wirklichkeit vor. Man kann aber ein sehr treffendes Beispiel anführen, das sich den vorausgehenden Betrachtungen eng anschließt, und das schon deshalb von Nutzen ist, weil es den wichtigen Begriff des Potentials von einer neuen Seite her zeigt, die geeignet ist, ihn dem Anfänger vertrauter und verständlicher zu machen. In diesem Sinne sind die nachfolgenden Betrachtungen aufzufassen.

Unter den Massen m stelle man sich jetzt die Einwohnerzahlen von drei Dörfern vor, die die durch Abbildung 18 oder 19 gegebene Lage zueinander haben. Das Gelände sei vollständig eben und an Stelle des beweglichen Punktes stelle man sich das Projekt für irgendein Gebäude vor, das den Bedürfnissen aller drei Ortschaften dienen soll, also etwa den Bahnhof einer neu zu erbauenden Bahn, der mit gleicher Leichtigkeit an jeder Stelle des in Frage kommenden Geländes errichtet werden könnte und um dessen genauere Lage sich die Einwohner der drei Dörfer streiten sollen. Jedes Dorf will den Bahnhof so nahe als möglich haben, und die Einwohnerschaft sucht auf die Behörde, von der die endgültige Entscheidung über den Bauplatz abhängt, im Sinne der Interessen ihres Dorfes durch die in solchen Fällen gebräuchlichen Mittel einzuwirken. Die Behörde wird sich bemühen, einen billigen Ausgleich zwischen den sich widerstreitenden Interessen der verschiedenen Dörfer zu finden. — Man kann hier in der Tat in einem übertragenen Sinne von den Kräften sprechen, mit denen die Dörfer das Streitobjekt an sich heranzuziehen suchen. In Ermangelung anderer Unterlagen wird man auch die Kraft, die hierbei von jedem Dorfe ausgeht, proportional der Einwohnerzahl setzen dürfen; es würde ja anderenfalls auch freistehen, besonders einflußreiche Einwohner durch eine entsprechend erhöhte Einschätzung der Einwohnerzahl in Rechnung zu stellen. Ferner ist auch, worauf es im Zusammenhange mit der vorausgehenden Aufgabe besonders ankommt, anzunehmen, daß die Kraft unabhängig von der Entfernung ist. Jeder will den Bahnhof so nahe als möglich haben, und jeder Kilometer Weg, der dabei erspart werden kann, ist gleich willkommen und wird ebenso lebhaft angestrebt, ob nun dadurch die Entfernung von 5 auf 4 oder von 3 auf 2 Kilometer herabgesetzt wird.

Für einen gerechten Ausgleich würde man in einem solchen Falle wohl den Punkt O in Abb. 19 empfehlen können, da sich die

von den verschiedenen Dörfern auf ihn ausgeübten Kräfte an ihm im Gleichgewichte halten. Wäre freilich das eine Dorf größer als die Summe der beiden anderen, so müßte man wohl den Bahnhof bei ihm errichten; die anderen Interessenten würden gegen diese Wahl schwerlich aufkommen können.

Sehen wir nun zu, welche Rolle im vorliegenden Falle dem Potentialbegriffe zugewiesen ist. Wir fanden, daß der Ausdruck für das Potential

$$V = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$$

gesetzt werden kann und hierfür läßt sich sofort eine anschauliche Deutung angeben. V ist nämlich gleich der Summe der Wege, die von den Bewohnern aller drei Dörfer gemacht werden müssen, wenn sie sich von ihren Wohnorten aus unter Einhaltung des nächst möglichen — also geradlinigen — Weges alle an dem Punkte versammeln wollen, der für die Erbauung des Bahnhofs in Aussicht genommen ist. V gibt also eine gewisse Anzahl von Personenkilometern an, d. h. es hat eine Dimension, die sich zwar nicht auf die Fundamenteinheiten der Mechanik zurückführen läßt, die aber dem technischen Eisenbahnbeamten schon durch andere Betrachtungen sehr vertraut ist.

Wenn der Bahnhof dort errichtet wird, wo sich die von den Dörfern geltend gemachten Anziehungskräfte im Gleichgewichte halten, wird das Potential zu einem Minimum, d. h. bei dieser „günstigsten“ oder „gerechtesten“ Wahl des Platzes ist der durchschnittliche Weg jeder Person zum Bahnhofs möglichst klein; man kann ihn daher zugleich als den volkswirtschaftlich besten Platz betrachten, weil die Beförderungskosten oder die ihnen gleich zu achtenden Zeitverluste usf., die für die Erreichung des Bahnhofs aufgewendet werden müssen, möglichst klein sind.

Es steht ferner auch frei, Linien gleichen Potentials zu konstruieren, also hier solche Linien, für deren Punkte die Anzahl der Personenkilometer, die zu ihrer Erreichung aufgewendet werden müssen, gleich groß sind und die daher volkswirtschaftlich als gleichwertig angesehen werden können. — Wegen der besonderen Anwendung, die hier davon gemacht wird, kann man nach einem Vorschlage, den ich bei einer früheren Gelegenheit selbst einmal gemacht habe, das Wort Potential durch die hier treffendere Bezeichnung „Vial“ ersetzen. Der Ort des Potentialminimums heißt dann kürzer das Vialzentrum. Man sieht leicht ein, daß diese Begriffe ganz zweckmäßig zu manchen Betrachtungen benutzt werden können. So spricht man z. B. öfters vom Zentrum oder vom Verkehrsmittelpunkte einer Stadt. Damit ist nun zwar jener Ort gemeint, der tatsächlich den größten

Straßenverkehr aufweist. Offenbar hängt aber dessen Lage ganz wesentlich von der Gestaltung der Stadt, also von der Verteilung der Einwohnersehaft über die Flächen des Stadtbezirks ab und es läßt sich z. B. voraussehen, daß die einseitige Erweiterung der Stadt nach einer bestimmten Richtung hin eine Verschiebung des Verkehrsmittelpunktes zur Folge haben muß. Am wahrscheinlichsten wird sich auch hier unter sonst gleichen Umständen der stärkste Verkehr an jenem Platze einstellen, der von allen Einwohnern am leichtesten erreicht werden kann. Das wäre also wiederum das Vialzentrum, wobei jetzt auch die wirklichen Wegelängen mit Rücksicht auf die vorhandenen Straßenzüge bei der Berechnung der Personenkilometer verwendet werden können (anstatt der geradlinigen Wege bei der Lösung der Aufgabe). Das Vial im Vialzentrum geteilt durch die Einwohnerzahl gibt einen mittleren Stadtradius ab, der für jede Stadt charakteristisch und beim Vergleich verschiedener Städte von Wert wäre. — Leider sind die hier angedeuteten Berechnungen recht mühsam; sonst hätte man wohl schon längst mehr Gebrauch von ihnen gemacht.

5. Aufgabe. Ein materieller Punkt, dem ein Gewicht von 981 kg zugeschrieben wird, führt eine gedämpfte harmonische Schwingung aus. Die elastische Kraft, die ihn in die Anfangslage zurückzuführen sucht, beträgt für 1 cm Ausschlag 10 kg, der dämpfende Widerstand ist bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sek gleich 20 kg. Ist die Bewegung periodisch oder aperiodisch? Wie groß ist das logarithmische Dekrement? Wie groß müßte der dämpfende Widerstand sein, wenn die Bewegung an der Grenze zwischen der periodischen und aperiodischen stehen sollte?

Lösung. Die in § 6 mit c bezeichnete Konstante ist hier

$$c = \frac{10 \text{ kg}}{1 \text{ cm}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Ebenso wird, mit Berücksichtigung der Dimensionen,

$$k = \frac{20 \text{ kg}}{1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}} = 20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}$$

und die Masse m ist

$$m = \frac{981 \text{ kg}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 100 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}}.$$

Hiermit läßt sich die früher mit γ bezeichnete Wurzel berechnen; sie ist

$$\gamma = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{400}{40000} \cdot \frac{1}{\text{sec}^2} - \frac{1000}{100} \cdot \frac{1}{\text{sec}^2}}.$$

Wir sehen, daß γ imaginär und daher die Bewegung periodisch ist. Zugleich haben wir uns überzeugt, daß die beiden Glieder unter dem Wurzelzeichen homogen in den Dimensionen sind. Für γ' erhalten wir

$$\gamma' = \sqrt{10 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\text{sec}}} = 3,16 \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Bei der Berechnung des logarithmischen Dekrements wollen wir annehmen, daß die Schwingungsausschläge nach beiden Seiten hin beobachtet und miteinander verglichen werden sollen. Dann erhält man nach Gl. (44)

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{\pi \cdot 20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}}{\sqrt{(400 \cdot 1000 - 400) \frac{\text{kg}^2 \text{sec}^2}{\text{m}^2}}} = 0,0994.$$

Vergleicht man dagegen nur die nach derselben Seite erfolgenden Schwingungsausschläge oder auch die ganzen Schwingungsbahnen miteinander, so hat das logarithmische Dekrement den doppelten Wert.

Bei den Versuchen ist es oft bequemer (wenn nämlich gerade keine Tafel der natürlichen Logarithmen zur Verfügung steht) die Briggschen Logarithmen der Ausschläge zu nehmen. Um die vorige Zahl auf Briggsche Logarithmen umzurechnen, dividiere man sie durch den natürlichen Logarithmus von 10, also durch 2,3026.

Die Bewegung steht an der Grenze zwischen periodischer und aperiodischer, wenn γ und γ' zu Null werden. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{k^2}{4m^2} = \frac{c}{m} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{4mc}.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte geht dies über in

$$k = \sqrt{4 \cdot 100 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = 632,4 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}.$$

Die Dämpfung müßte mehr als dreißigmal so stark sein als sie angegeben war, um eine aperiodische Bewegung herbeizuführen.

6. Aufgabe, Man soll für den in der vorigen Aufgabe behandelten Fall die Schwingungsdauer berechnen.

Lösung. Nach Gl. (40) ist

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}},$$

woraus nach Einsetzen der Zahlenwerte $T = 1,99 \text{ sec}$ folgt. Die Schwingungen stimmen hiernach nahezu mit denen eines Sekundenpendels überein.

7. Aufgabe. Der in Aufgabe 5 behandelte materielle Punkt erfährt von einer fremden Schwingung periodische Anstöße vom Größtwerte 0,5 kg. Wie groß werden die Ausschläge der erzwungenen Schwingungen (nach so langer Zeit vom Beginne der Erregung an, daß die verwickelteren Bewegungen des Anfangszustandes als abgeklungen betrachtet werden können), wenn die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung a) 3 sec, b) 2,2 sec beträgt, c) ebenso groß ist als die der Eigenschwingungen?

Lösung. Die in § 8 mit P bezeichnete Größe ist hier

$$P = 0,5 \text{ kg.}$$

Ferner folgt die mit η bezeichnete Größe für den Fall a), der zuerst untersucht werden soll, aus

$$\eta \cdot 3 \text{ sec} = 2\pi \quad \text{zu} \quad \eta = 2,0944 \text{ sec}^{-1}.$$

Den Phasenverschiebungswinkel φ der erzwungenen gegen die erregenden Schwingungen findet man aus Gl. (54)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{c - m\eta^2} = \frac{20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}} \cdot 2,0944 \text{ sec}^{-1}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}} - 100 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} \cdot 4,3865 \text{ sec}^{-2}} = + 0,0746.$$

Der Winkel φ ist hier spitz und ziemlich klein, d. h. die erzwungenen Schwingungen bleiben nur wenig hinter den erregenden in der Phase zurück, was daher kommt, daß wir im Falle a) noch ziemlich weit von der Resonanz entfernt sind. Durch Aufschlagen in einer trigonometrischen Tafel findet man $\varphi = 4^\circ 16'$; ferner $\sin \varphi = 0,0744$ und $\cos \varphi = 0,9972$. Alle diese Werte sind in Gl. (55) einzutragen. Man erhält dann

$$C = \frac{0,5 \text{ kg}}{0,9972(1000 - 438,65) \frac{\text{kg}}{\text{m}} + 0,0744 \cdot 20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}} \cdot 2,0944 \text{ sec}^{-1}} = \\ = 0,00089 \text{ m} = 0,89 \text{ mm,}$$

Hiermit ist die Schwingungsamplitude gefunden. Die Wiederholung der Rechnung für 2,2 sec Schwingungsdauer liefert

$$\eta = 2,856 \text{ sec}^{-1}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,3098, \quad \varphi = 17^\circ 12' 50'', \\ \sin \varphi = 0,2959, \quad \cos \varphi = 0,9552, \quad C = 2,59 \text{ mm.}$$

Für den Fall der Resonanz endlich hat man $\varphi = 90^\circ$ und nach Gl. (57) wird die Schwingungsamplitude

$$C = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{0,5 \text{ kg}}{20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}} \sqrt{\frac{100}{1000} \text{ sec}^2} = 0,0079 \text{ m} = 7,9 \text{ mm.}$$

Die Schwingungsausschläge sind also im letzten Falle in der Tat etwa neunmal so groß, als im Falle a), obwohl die Intensität der erregenden Schwingungen dieselbe geblieben ist und nur die Schwingungsdauer sich geändert hat. Wenn die Dämpfung kleiner ist, als hier vorausgesetzt wurde, kann das Verhältnis noch viel größer werden.

8. Aufgabe. Für irgendeine Lage des einfachen Pendels, das Schwingungen von beliebiger endlicher Größe ausführt, soll man den genaueren Wert der Fadenspannung berechnen.

Lösung. Die Geschwindigkeit in der durch den Winkel φ in Abb. 12 S. 80 bezeichneten Lage ist, wie wir früher fanden (Gl. 65),

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Die Normalkomponente der Resultierenden aus der Fadenspannung F und dem Gewichte Q ist die Zentrifugalkraft, die wir nach der von früher her bekannten Formel berechnen können. Wir finden

$$C = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{l} = 2Q(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Die Projektion der Resultierenden auf die augenblickliche Fadenrichtung ist gleich der algebraischen Summe der Projektionen von F und Q ; also

$$C = F - Q \cos \varphi$$

und nach Einsetzen des Wertes von C folgt daraus

$$F = Q(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha).$$

Um diesen Wert anschaulicher zu deuten, formen wir ihn um in

$$F = Q \frac{3l(\cos \varphi - \cos \alpha) + l \cos \alpha}{l} = Q \frac{3z + l \cos \alpha}{l},$$

wenn wir die schon in Abb. 12 mit z bezeichnete Strecke wieder einführen, Die Fadenspannung wird hiernach gleich dem Gewichte Q , wenn $3z$ die Vertikalprojektion des Fadens in der äußersten Lage gerade zur ganzen Fadenlänge ergänzt, d. h. dann, wenn der bewegliche Punkt $\frac{1}{3}$ seiner ganzen Fallhöhe zurückgelegt hat. Bei größerem Ausschlage des Pendels ist F kleiner, bei kleinerem Ausschlage größer als Q .

9. Aufgabe. Ein Wagen (Abb. 20) ist auf seinen beiden Achsen mit Federn gelagert, die eine kleine Bewegung in vertikaler Richtung gestatten. Man soll die Schwingungsdauer für die Dreh-schwingungen berechnen, die der Wagenkasten um die durch den Punkt O senkrecht zur Zeichenebene gehende Achse auszuführen vermag.

Lösung. Ein gefederter Wagen vermag außer den Drehschwingungen, um die es sich hier handelt, auch noch andere auszuführen, die sich in ähnlicher Weise behandeln lassen, die hier aber nicht besprochen werden sollen. Die bezeichneten Drehschwingungen treten z. B. bei den Anhängewagen der Münchener Trambahn sehr deutlich auf, wenn nach einem Halt schnell angefahren wird. Die durch den Zughaken auf den Anhängewagen übertragene beschleunigende Kraft liegt ziemlich

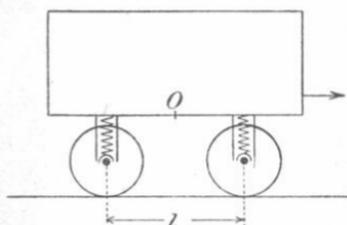


Abb. 20.

viel tiefer als der Schwerpunkt des Wagens. Man kann sie sich durch eine parallele und gleich große Kraft, die im Schwerpunkt angreift und ein Kräftepaar ersetzt denken. Während jene die Beschleunigung in der Fahrtrichtung hervorruft, entsteht durch das Kräftepaar während des ruckweise erfolgenden Anfahrens eine Drehbeschleunigung des Wagenkastens. Hierbei wird die hintere

Feder weiter zusammengedrückt und die vordere wird zum Teil entlastet, indem sich das vordere Wagenende ein wenig hebt. Nachdem die beabsichtigte Fahrgeschwindigkeit erreicht ist, führt der Wagenkasten Schwingungen um die horizontale Gleichgewichtslage aus, die allmählich erlösen. Daß die Schwingungen in dem als Beispiel angeführten Falle so deutlich hervortreten, liegt daran, daß die Federn sehr nachgiebig sind und die Dämpfung verhältnismäßig klein ist. Im folgenden soll nur die weitere Fortsetzung der Schwingungen nach Ablauf ihrer Erregung und ohne Berücksichtigung der Dämpfung besprochen werden.

Die Bewegungsgleichung läßt sich hier ebenso anschreiben, wie bei den in § 5 behandelten Torsionsschwingungen. Wie in Gl. (22) hat man auch hier

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c\varphi.$$

Dabei ist φ der Drehungswinkel und Θ das auf die Drehungsachse bezogene Trägheitsmoment des Wagenkastens. In einem bestimmten Falle wird man es dadurch genau genug erhalten, daß man den Trägheitshalbmesser abschätzt, während das Gewicht und hiermit die Masse von vornherein als gegeben angesehen werden können. Die Konstante c ist dagegen aus einer Angabe über die Zusammendrückbarkeit der Federn zu berechnen. Bezeichnet man nämlich die Zusammendrückung, die eine Feder durch die Lasteinheit erfährt, mit a , so entspricht einem Drehungswinkel φ ein Kräftepaar vom Momente

$$\frac{l^2\varphi}{a},$$

wobei zu beachten ist, daß vorn sowohl wie hinten je zwei Federn hintereinander liegen, von denen jede für einen Federhub $\frac{l}{2} \varphi$ eine Kraft von der Größe $\frac{l \varphi}{2a}$ ausübt. Die Konstante c ist daher

$$c = \frac{l^2}{a},$$

und für die Dauer einer vollen Schwingung hat man nach Gl. (23), wenn noch das Gewicht des Wagenkastens mit Q und der Trägheitsradius mit i bezeichnet wird,

$$T = 2\pi \frac{i}{l} \sqrt{\frac{aQ}{g}} = 4\pi \frac{i}{l} \sqrt{\frac{b}{g}},$$

wobei unter b die Zusammendrückung zu verstehen ist, die jede Feder durch das Eigengewicht des Wagens erfährt, falls alle gleich belastet sind.

10. Aufgabe. Ein Eisenbahnwagen I (Abb. 21) steht an einem Prellbocke, so daß sich die Puffer gerade berühren, während ein Wagen II mit einer Geschwindigkeit v_0 auf I auffährt. Man soll die Stoßvorgänge, die sich hierbei abspielen, näher untersuchen.

Lösung. Wir betrachten zunächst den Vorgang vom Auftreffen des Wagens II an, von dem ab wir die Zeiten t rechnen, bis zu dem Augenblicke $t = t_1$, in dem sich Wagen II wieder von Wagen I trennt, um nach links hin zurückzurollen. Innerhalb dieser Zeit führen beide Wagen zwei miteinander gekoppelte Schwingungen aus. Allerdings wird von jeder der

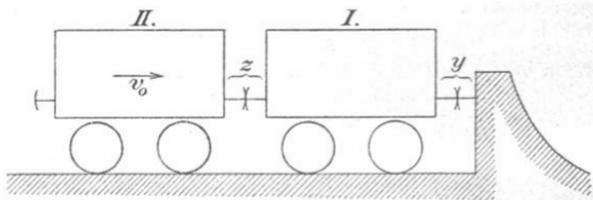


Abb. 21.

beiden Schwingungsbewegungen nur ein Bruchteil einer vollen Schwingung innerhalb dieser Zeit vollendet. Es mag jedoch bemerkt werden, daß die Schwingungen nach demselben Gesetze längere Zeit fortbestehen würden, wenn eine Einrichtung getroffen wäre, durch die die Puffer nach ihrem Zusammenstoßen (etwa durch Einhaken) miteinander verbunden würden, so daß sie sich im weiteren Verlaufe nicht mehr trennen könnten.

Zu einer Zeit t , die kleiner ist als t_1 , sei die Zusammendrückung der Puffer zwischen I und dem Prellbocke mit y , die der Puffer zwischen I und II mit z bezeichnet. Die Beschleunigung von I ist dann gleich $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und die von II gleich $\frac{d^2 (y+z)}{dt^2}$ zu setzen. An Wagen II wirkt

in diesem Augenblicke eine verzögernde Kraft, die gleich cz und an Wagen I als Resultierende der hinten und vorn angreifenden Pufferdrücke eine beschleunigende Kraft, die gleich $cz - cy$ zu setzen ist, wenn man unter c den Pufferdruck versteht, der einer Zusammenrückung gleich der Längeneinheit entspricht und alle Pufferfedern als gleich konstruiert voraussetzt.

Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$m_1 \frac{d^2 y}{dt^2} = c(z - y),$$

$$m_2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = -cz.$$

Löst man die erste Gleichung nach z auf und setzt den erhaltenen Ausdruck in die zweite ein, so erhält man

$$m_1 m_2 \frac{d^4 y}{dt^4} + (m_1 + 2m_2) c \frac{d^2 y}{dt^2} + c^2 y = 0.$$

Will man umgekehrt y eliminieren, so differenziere man die erste Gleichung zweimal nach t und setze darauf den aus der zweiten Gleichung hervorgehenden Ausdruck für $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ein. Man findet dann, daß z derselben Differentialgleichung genügen muß, wie y .

Diese Differentialgleichung ist von derselben Form wie Gl. (28) für die in § 5 als Beispiel behandelten gekoppelten Schwingungen, abgesehen davon, daß die konstanten Koeffizienten hier durch andere Ausdrücke dargestellt werden. Jedenfalls kann aber die Lösung hier in derselben Weise wie damals angeschrieben werden. Man hat also

$$y = A \sin \lambda_1 t + B \cos \lambda_1 t + C \sin \lambda_2 t + D \cos \lambda_2 t,$$

wenn unter λ_1 und λ_2 die beiden positiven Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$m_1 m_2 \lambda^4 - (m_1 + 2m_2) c \lambda^2 + c^2 = 0$$

verstanden werden. Zur Vereinfachung der weiteren Ausrechnung möge von hier ab angenommen werden, daß beide Wagen gleiche Massen haben, daß also $m_2 = m_1$ ist, wofür kürzer m geschrieben werden kann. Die Auflösung der Gleichung liefert dann zunächst

$$\lambda_1^2 = \frac{c}{2m} (3 + \sqrt{5}); \quad \lambda_2^2 = \frac{c}{2m} (3 - \sqrt{5}).$$

Die Quadratwurzeln aus den Klammerwerten lassen sich leicht auf eine einfache Form bringen, so daß man

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

erhält, oder auch, wenn man die Zahlenrechnung durchführt,

$$\lambda_1 = 1,618 \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \lambda_2 = 0,618 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Setzt man ferner den Wert von y in die erste der beiden Differentialgleichungen ein, so findet man

$$z = \left(1 - \frac{m}{c} \lambda_1^2\right) (A \sin \lambda_1 t + B \cos \lambda_1 t) \\ + \left(1 - \frac{m}{c} \lambda_2^2\right) (C \sin \lambda_2 t + D \cos \lambda_2 t).$$

Die Werte der Integrationskonstanten $ABCD$ findet man wie gewöhnlich aus den Grenzbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ wird nämlich

$$y = 0, \quad z = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = v_0.$$

Hiermit erhält man vier Gleichungen, die sich nach den Unbekannten leicht auflösen lassen. Man findet

$$A = -\frac{v_0}{\lambda_1 \sqrt{5}}; \quad C = +\frac{v_0}{\lambda_2 \sqrt{5}}, \quad B = D = 0.$$

Die fertigen Lösungen lauten demnach, wenn man auf die Werte von λ_1 und λ_2 achtet, um die Ausdrücke zu vereinfachen,

$$y = -\frac{v_0}{\lambda_1 \sqrt{5}} \sin \lambda_1 t + \frac{v_0}{\lambda_2 \sqrt{5}} \sin \lambda_2 t, \\ z = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} (\sin \lambda_1 t + \sin \lambda_2 t).$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich nun das Weitere entnehmen. Wagen II trennt sich von dem anderen, wenn z zum ersten Male wieder seit $t = 0$ zu Null wird. Die Zeit t_1 ergibt sich dabei aus der Gleichung

$$\sin \lambda_1 t_1 + \sin \lambda_2 t_1 = 0.$$

Hiernach muß $\lambda_1 t_1$ ein Winkel im dritten (oder vierten) Quadranten sein, der ebensoviel größer als π ist, wie $\lambda_2 t_1$ kleiner ist als π . Man hat daher

$$(\lambda_1 + \lambda_2) t_1 = 2\pi,$$

und wenn man auf die Werte von λ_1 und λ_2 achtet

$$t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{2\pi}{2,236} \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Die Geschwindigkeit v_2 , mit der Wagen II zurückrollt, findet man aus den Gleichungen für y und z , nämlich

$$v_2 = \left(\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \right)_{t=t_1}$$

$$= v_0 \cos \lambda_1 t_1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + v_0 \cos \lambda_2 t_1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

denn auf diese Form läßt sich der Ausdruck durch einige Vereinfachungen bringen. Nach dem, was vorher über die Winkel $\lambda_1 t_1$ und $\lambda_2 t_1$ gefunden war, ist aber

$$\cos \lambda_1 t_1 = \cos \lambda_2 t_1,$$

und hiermit erhält man kürzer

$$v_2 = v_0 \cos \lambda_2 t_1.$$

Auch dies läßt sich weiter ausrechnen. Durch Einsetzen der Zahlenwerte findet man nämlich

$$\lambda_2 t_1 = 0,2764 \cdot 2\pi = 99^\circ 30',$$

wenn man auf Gradmaß umrechnet und durch Aufschlagen in einer trigonometrischen Tafel

$$\cos \lambda_2 t_1 = -0,165,$$

woraus schließlich das einfache Ergebnis

$$v_2 = -0,165 v_0$$

folgt. Das negative Vorzeichen ist natürlich dadurch begründet, daß v_0 und v_2 entgegengesetzt gerichtet sind.

Die Geschwindigkeit v_2 hängt also weder von m noch von c , d. h. nicht von der Stärke der Puffer ab. Dabei ist natürlich, wie in der ganzen vorhergehenden Betrachtung stillschweigend vorausgesetzt, daß der Stoß nicht so heftig ist, daß die Puffer an der Hubgrenze anlangen oder höchstens bis dahin, ohne aufzustoßen. — Es mag auch noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß andererseits die Zeit t_1 , wie die dafür abgeleitete Formel lehrt, nur von m und c , dagegen nicht von der Geschwindigkeit v_0 abhängt, mit der Wagen II auf I aufstieß.

Wir haben jetzt weiter die Bewegung des Wagens I nach dem Ablaufen von Wagen II zu verfolgen. Von $t = t_1$ an bis zu einer Zeit $t = t_2$ besteht diese Bewegung in einer einfachen Sinusschwingung, von der freilich auch wieder nur ein Bruchteil einer vollen Schwingung zur Ausführung gelangt. An dem Wagen greift nämlich innerhalb dieser Zeit nur der Pufferdruck — cy an und ein materieller Punkt, an dem eine Kraft wirkt, die diesem Gesetze folgt, führt, so lange dies zutrifft, eine einfache Sinusschwingung aus. Wir können dafür ohne weiteres Gl. (17) in der Form

$$y = A \sin \alpha(t - t_1) + B \cos \alpha(t - t_1)$$

gültig von $t = t_1$ bis $t = t_2$ übernehmen. Dabei bedeutet, wie früher in § 4 α den Wert $\sqrt{\frac{c}{m}}$, während die jetzt neu eingeführten Integrationskonstanten A und B , die mit den vorher ebenso bezeichneten nicht verwechselt werden dürfen, aus den Anfangsbedingungen zu ermitteln sind. Zur Zeit $t = t_1$ finden wir nämlich das zugehörige y , das wir y_1 nennen wollen, sowie auch die Geschwindigkeit v_1 des Wagens aus der für die Zeit von $t = 0$ bis $t = t_1$ gültigen Formel für y , und zwar erhält man

$$y_1 = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \sin \lambda_2 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin \lambda_2 t_1 = 0,986 v_0 \sqrt{\frac{m}{c}},$$

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{5}} (-\cos \lambda_1 t_1 + \cos \lambda_2 t_1) = 0.$$

Die Pufferfedern am Prellbocke haben also, wegen $v_1 = 0$, gerade die größte Zusammendrückung erfahren, wenn sich Wagen II von Wagen I trennt. Ferner muß wegen $v_1 = 0$ die Integrationskonstante A gleich Null gesetzt werden, während $B = y_1$ wird. Setzt man dies ein, so wird

$$y = 0,986 v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cos \left(\sqrt{\frac{c}{m}} (t - t_1) \right)$$

gültig von $t = t_1$ bis zu einer gewissen Zeit $t = t_2$. Der Zeitpunkt t_2 ist dann erreicht, wenn sich entweder Wagen I vom Prellbock trennt oder wenn, falls dies schon früher eintritt, Wagen I wieder auf den im Davonrollen begriffenen Wagen II aufstößt.

Um dies zu entscheiden, denken wir uns einmal vorläufig Wagen II ganz beseitigt. Dann würde sich jedenfalls die Sinusschwingung so lange fortsetzen, bis die Zusammendrückung y der Puffer am Prellbocke wieder zu Null geworden ist. Das geschieht, wenn der Winkel, dessen Kosinus in der Formel vorkommt, ein rechter wird. Die unter dieser Voraussetzung bestimmte Zeit t_2 , die wir t'_2 nennen wollen, folgt daher aus

$$t'_2 - t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Wagen I hätte dann in dieser Zeit einen Weg von der Länge y_1 nach links hin zurückgelegt. Andererseits hätte der Wagen II in der gleichen Zeit, wenn er ungestört fortgerollt wäre, den Weg

$$(t'_2 - t_1) v_2 = -0,165 \frac{\pi}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}$$

beschrieben. Das ist aber, wie der Vergleich lehrt, weniger als der Weg y_1 des Wagens I. Wir schließen daraus, daß Wagen I schon

wieder auf Wagen II stößt, ehe er sich vom Prellbocke trennen konnte. Die Zeit t_2 ist daher eine kleinere als t'_2 , und sie ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß beide Wagen in der Zeit $t_2 - t_1$ gleiche Wege nach links hin zurückgelegt haben müssen. Das liefert die Gleichung

$$0,986 v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \left\{ 1 - \cos \left(\sqrt{\frac{c}{m}} (t_2 - t_1) \right) \right\} = (t_2 - t_1) 0,165 v_0,$$

also eine transzendente Gleichung für $t_2 - t_1$, die durch Probieren leicht nach der Unbekannten aufgelöst werden kann, wobei es sich natürlich nur um die kleinste auf Null folgende positive Wurzel handelt. Dazu ist freilich nötig, daß man weiterhin für c und m bestimmte Zahlenwerte einführt. Davon soll jetzt abgesehen und der weitere Gang der Rechnung nur noch kurz angedeutet werden, damit die Auseinandersetzung nicht noch länger ausfällt, als sie ohnehin schon geworden ist. Übrigens sei wenigstens noch darauf hingewiesen, daß v_0 aus der vorstehenden Gleichung fortfällt, so daß auch t_2 ebenso wie früher schon t_1 unabhängig von der Heftigkeit des Stoßes gefunden wird, falls dieser die zulässige Grenze nicht überschreitet.

Nach der Zeit t_2 , die aus der vorhergehenden Gleichung zahlenmäßig bestimmt werden kann, setzen wieder bis zu einer ferneren Zeit $t = t_3$ die gekoppelten Schwingungen ein, die schon in dem ersten Zeitabschnitte zwischen 0 und t_1 bestanden. Die allgemeine Gleichung für y kann dafür ohne weiteres übernommen werden; dagegen sind die Konstanten $ABCD$ wieder von neuem zu bestimmen. Dazu stehen die Grenzbedingungen zur Verfügung, daß für $t = t_2$ zunächst $z = 0$ ist, während y und $\frac{dy}{dt}$ aus der Gleichung für y , gültig von $t = t_1$ bis $t = t_2$ entnommen werden können, und daß endlich $\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$ gleich v_2 wird.

Nachdem mit Verwertung dieser Grenzbedingungen die fertige Lösung für y und z für den dritten Zeitabschnitt aufgestellt ist, hat man von neuem zu untersuchen, wie lange dieser dauert, d. h. wann wieder eine Trennung stattfindet. Diese weiteren Rechnungen spielen sich aber dann genau nach dem Muster der vorhergehenden ab.

Ich breche die Betrachtung hier ab, empfehle aber ihre weitere Fortsetzung als ein gutes Übungsbeispiel, dem für die Beurteilung von Stoßvorgängen, bei denen mehrfache Federungen mitspielen, immerhin auch eine gewisse praktische Bedeutung beigemessen werden darf.

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des Punkthaufens.

Vorbemerkung. Schon im ersten Bande dieser Vorlesungen wurde die Mechanik beliebiger Körper dadurch an die Mechanik des materiellen Punktes angeknüpft, daß wir diese Körper als Punkthaufen auffaßten. Denselben Weg müssen wir auch hier wieder einschlagen. Die Beziehungen, die zwischen den Punkten des Haufens anzunehmen sind, richten sich nach den physikalischen Eigenschaften des Körpers oder des Verbandes verschiedener Körper, mit dem wir es gerade zu tun haben, sowie nach der Genauigkeit, mit der wir dem wirklichen Verhalten im besonderen Falle Rechnung tragen wollen. Halten wir es z. B. für genügend, von der Gestaltänderung, die ein fester Körper in einem bestimmten Falle erfährt, abzusehen, so gelangen wir zu dem Bilde des starren Körpers, unter dem wir uns einen Punkthaufen von unveränderlicher Gestalt zu denken haben. In diesem Abschnitte soll aber zunächst ganz allgemein von Punkthaufen die Rede sein, die beliebigen Bedingungen unterworfen sind, und von starren Körpern, die freilich das wichtigste Anwendungsgebiet der hier anzustellenden Betrachtungen ausmachen, nur nebenher und insoweit, als es sich um die Anführung von Beispielen zur Erläuterung der vorgetragenen Lehren handelt. Im folgenden Abschnitte wird erst der starre Körper ausführlich für sich behandelt werden.

§ 15. Das Prinzip von d'Alembert.

Wir betrachten einen Punkthaufen, der in beliebiger Bewegung begriffen sein soll, also so, daß sich auch seine Gestalt dabei im allgemeinen fortwährend ändert. An einem einzelnen Punkte des Haufens, auf den wir unser Augenmerk richten wollen, greifen verschiedene Kräfte an, die sich in äußere und innere einteilen lassen. Das ist schon im ersten Bande näher besprochen worden und in Übereinstimmung mit den damals gebrauchten Bezeichnungen sei \mathfrak{P} die Resultierende der äußeren und \mathfrak{Z} die Resultierende der inneren Kräfte. Wenn man

unter m die Masse des Punktes und unter \mathbf{r} den von einem festen Anfangspunkte nach ihm gezogenen Radiusvektor versteht, hat man nach der dynamischen Grundgleichung

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \Sigma \mathfrak{Z}, \quad (88)$$

und eine Gleichung von dieser Form gilt für jeden Punkt des Haufens.

Wir wollen uns ferner den Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt und Lage und unter Aufrechterhaltung aller übrigen Bedingungen jetzt noch ein zweites Mal gegeben denken; nur mit dem Unterschiede, daß an jedem Punkte noch eine fernere äußere Kraft \mathfrak{G} willkürlich zugefügt sein soll, die nach Größe und Richtung entsprechend der Gleichung

$$\mathfrak{G} = -m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (89)$$

gewählt ist, in der die Beschleunigung $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ so einzusetzen ist, wie sie bei der wirklichen Bewegung des ersten Punkthaufens im Augenblicke der Betrachtung gerade stattfindet.

Im zweiten Punkthaufen haben wir dann, da die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{Z} unverändert beibehalten wurden, die aus der Verbindung der beiden vorhergehenden folgende Gleichung

$$\mathfrak{P} + \Sigma \mathfrak{Z} + \mathfrak{G} = 0, \quad (90)$$

d. h. alle Kräfte halten sich jetzt an dem Punkte im Gleichgewichte, und zwar gilt dies für jeden Punkt des zweiten Punkthaufens.

Endlich wollen wir uns drittens noch einen starren Körper denken, der groß genug ist, um den ganzen Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt darauf abbilden zu können. Damit ist gemeint, daß jedem Punkte des Punkthaufens ein Punkt des starren Körpers zugewiesen werden soll, so daß die zugewiesenen Punkte ein dem Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt kongruentes und parallel liegendes Gebilde ausmachen. An jedem dieser Punkte des starren Körpers denken wir uns hierauf alle Kräfte \mathfrak{P} , \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} angebracht, die vorher an dem entsprechenden Punkte des zweiten Punkt-

haufens vorkamen. Die Kräfte \mathfrak{Z} sollen dabei ebenso wie die \mathfrak{P} und \mathfrak{S} als äußere Kräfte am starren Körper angebracht werden, ohne jede Rücksicht darauf, daß sie bei dem ersten Punkthaufen sich unter den gegebenen Bedingungen von selbst als innere Kräfte in dieser Größe und Richtung einstellten.

Da sich alle Kräfte, die wir anbrachten, an jedem Angriffspunkte für sich im Gleichgewichte befinden, wird der starre Körper, wenn er vorher in Ruhe war, auch weiterhin in Ruhe bleiben. Zwischen den Kräften \mathfrak{P} , \mathfrak{S} und \mathfrak{Z} müssen ferner auch alle Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein, die wir für Kräfte am starren Körper schon im I. Bande näher besprochen haben.

Hierbei ist aber zu beachten, daß nach der allgemeinen Fassung des Wechselwirkungsgesetzes auf jeden Fall die Kräfte \mathfrak{Z} unter sich ein Gleichgewichtssystem am starren Körper bilden müssen (vgl. § 21, Bd. I, S. 134 d. 3. Aufl.) Daher müssen auch die \mathfrak{P} und \mathfrak{S} unter sich im Gleichgewichte stehen und allen früher hierfür aufgestellten Bedingungen genügen. Insbesondere muß

$$\Sigma \mathfrak{P} + \Sigma \mathfrak{S} = 0$$

sein, wenn man die Summe über alle \mathfrak{P} und \mathfrak{S} an allen Punkten des starren Körpers erstreckt. Diese Bedingung ist indessen nur eine notwendige und nicht zugleich eine hinreichende. Vielmehr muß außerdem für jeden Momentenpunkt die Summe der Momente aller \mathfrak{P} und \mathfrak{S} gleich Null sein und ebenso muß für jede virtuelle Verschiebung des starren Körpers die Summe der Arbeitsleistungen aller \mathfrak{P} und \mathfrak{S} gleich Null sein.

In der zuletzt gegebenen Form wird das d'Alembertsche Prinzip gewöhnlich in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik dargestellt. Denkt man sich nämlich irgendeine unendlich kleine virtuelle Verschiebung des starren Körpers vorgenommen, und bezeichnet man den Weg, den der zunächst ins Auge gefaßte Punkt dabei zurücklegt, mit $\delta \mathfrak{s}$, so lautet die notwendige und zugleich auch hinreichende Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{S} an allen Punkten des starren Körpers

$$\Sigma (\mathfrak{P} + \mathfrak{S}) \delta \mathfrak{s} = 0$$

gültig für jede virtuelle Verschiebung. Setzt man \mathfrak{G} aus Gl. (89) ein, so geht sie über in

$$\Sigma \left(\mathfrak{P} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) \delta \mathfrak{s} = 0. \quad (91)$$

Bezeichnet man die Komponenten von \mathfrak{P} nach den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit XYZ , die Komponenten von \mathbf{r} mit xyz , und die Komponenten von $\delta \mathfrak{s}$ mit δx , δy , δz , so läßt sich dafür auch schreiben

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0, \quad (92)$$

und das ist die Formel, die gewöhnlich als die Aussage des d'Alembertschen Prinzips angegeben wird. Es entspricht aber eigentlich mehr dem ursprünglichen Sachverhalte, das d'Alembertsche Prinzip darin zu erblicken, daß man durch die Zufügung der Kraft \mathfrak{G} an dem Punkthaufen ein System von Kräften \mathfrak{P} und \mathfrak{G} erhält, das allen Gleichgewichtsbedingungen an einem starren Körper genügt. Ob man dieses Gleichgewicht nachher mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten oder mit Hilfe des Satzes von den statischen Momenten untersucht — was oft bequemer ist —, bleibt nebensächlich.

Die Hauptleistung von d'Alembert bei der Aufstellung seines Prinzips kann freilich vielleicht darin gefunden werden, daß er erkannt hat, daß sich die inneren Kräfte, weil sie für sich im Gleichgewichte stehen, aus den Gleichgewichtsbedingungen fortheben. Aber darum zu sagen, daß hierin der Kern des d'Alembertschen Prinzips zu erblicken sei, halte ich für unzuweckmäßig, weil eben die Tatsache, daß die inneren Kräfte für sich ein Gleichgewichtssystem bilden, schon durch das Wechselwirkungsgesetz ihrem vollen Inhalte nach zum Ausdruck kommt. Und darüber hinaus lehrt das Prinzip nur noch, daß man durch den Kunstgriff der Einführung der Kräfte \mathfrak{G} ein Gleichgewichtssystem der \mathfrak{P} und \mathfrak{G} herstellen kann, wodurch es möglich wird, Aufgaben der Dynamik auf statische Aufgaben zurückzuführen.

Die Kräfte \mathfrak{G} werden gewöhnlich als „Trägheitskräfte“ bezeichnet und ich werde mich dieser Bezeichnung ihrer Kürze wegen anschließen. Man hat freilich gegen den Gebrauch dieses Wortes öfters eingewendet, daß es zu Mißdeutungen

oder falschen Vorstellungen Veranlassung geben könne, da hiermit eine Größe als Kraft bezeichnet wird, die als solche physikalisch gar nicht existiert und die nur zur Vereinfachung der Betrachtungen zu den wirklich vorhandenen Kräften willkürlich zugefügt wird. Daß die Trägheitskräfte in der Tat nur in diesem Sinne als Hilfsgrößen und nicht als an dem ersten Punkthaufen, den wir eigentlich untersuchen wollen, wirklich angreifende Kräfte aufzufassen sind, darf man freilich nicht aus den Augen verlieren. Sofern dies geschieht, wird man aber jene Bedenken fallen lassen können, und ich habe auch, gerade um nach dieser Richtung keinen Zweifel zu lassen, ausdrücklich von zwei Punkthaufen und einem starren Körper gesprochen, von denen der erste Punkthaufen den unmittelbaren Gegenstand unserer Untersuchung bildet und an dem die Kräfte \mathfrak{H} fehlen, während der zweite und der starre Körper, an dem die Kräfte \mathfrak{H} angreifen sollen, nur zum Vergleiche mit dem ersten gebraucht werden. Ich trage auch um so weniger Bedenken gegen die gewählte Bezeichnung, als schon die „fingierte“ Zentrifugalkraft, von der im ersten Bande die Rede war, unter den Begriff der Trägheitskräfte fällt und man schon mit Rücksicht auf den in diesem Falle fest eingewurzelten Sprachgebrauch genötigt ist, zwischen den fingierten oder von uns willkürlich zugefügten Kräften und den physikalisch nachweisbaren oder, wie wir sagen, wirklich vorhandenen sorgfältig zu unterscheiden.

Man sieht leicht ein, wie den vorgehenden Betrachtungen noch eine allgemeinere Form gegeben werden kann. Anstatt den ganzen Punkthaufen auf einem starren Körper abzubilden, wie es vorher geschehen war, können wir ebenso mit einem beliebig herausgegriffenen Teil verfahren. Der starre Körper, der diesen Teil abbildet und an dem alle zugehörigen Kräfte \mathfrak{P} , \mathfrak{G} und \mathfrak{Z} angebracht sind, ist unter dem Einflusse dieser Kräfte jedenfalls im Gleichgewichte. Dagegen bilden jetzt nicht mehr alle Kräfte \mathfrak{Z} ein Gleichgewichtssystem, sondern nur jene davon untereinander, die auch für den in dieser Weise herausgegriffenen Teil des Punkthaufens noch als innere zu bezeich-

nen sind. Rechnen wir aber die übrigen, also die von den fortgelassenen Teilen des Punkthaufens auf die beibehaltenen übertragenen Kräfte jetzt zu den äußeren, so daß sie an dem starren Körper mit unter den \mathfrak{P} erscheinen, so bleiben die vorhergehenden Schlüsse und Aussagen ohne Änderung auch für das Teilstück bestehen.

Davon kann man z. B. Gebrauch machen bei einer Maschine, die aus Teilen zusammengesetzt ist, von denen jeder für sich genommen genau genug als starrer Körper betrachtet werden kann, während sich die Teile gegeneinander bewegen. Man kann dann eine zweite Maschine angeben, die im übrigen vollständig mit der vorigen übereinstimmt, die aber in Ruhe ist und dauernd in Ruhe bleibt, wenn man an jedem Teile der Maschine dieselben Kräfte \mathfrak{P} wie bei der ersten Maschine und außerdem noch die Trägheitskräfte \mathfrak{G} anbringt. Zu den Kräften \mathfrak{P} gehören dann auch die Kräfte zwischen den einzelnen Maschinenteilen, also etwa Gelenkdrücke o. dgl., die bei der ruhenden Maschine ebenso anzunehmen sind, wie bei der bewegten. Wenn man dann aus der Gleichgewichtsbetrachtung an der ruhenden Maschine die Gelenkdrücke usw. gefunden hat, kennt man sie zugleich für die bewegte Maschine.

Entsprechend läßt sich auch das Anwendungsgebiet von Gl. (91) oder (92) erweitern. Zuerst war gesagt, daß sich die Formeln nur auf eine Bewegung ohne Gestaltänderung beziehen sollten, denn darauf kam es ja hinaus, wenn wir den Punkthaufen auf einen starren Körper abbildeten.

Die Formeln gelten aber auch noch in einem allgemeineren Falle, nämlich immer dann, wenn zwar eine Gestaltänderung eintritt, die inneren Kräfte aber dabei trotzdem keine Arbeit leisten. Denn in der Tat bestand ja der einzige Gebrauch, den wir vorher von der Voraussetzung der unveränderlichen Gestalt gemacht hatten, nur darin, daß wir die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte gleich Null setzen konnten. Das ist immer erfüllt bei Bewegungen ohne Gestaltänderung; es kann aber auch noch in anderen Fällen erfüllt sein. Sobald es aber zutrifft, bleibt auch die Gültigkeit der Gleichungen (91) oder (92) bestehen.

Man denke sich z. B. zwei starre Körper, die in einem Gelenke ohne Reibung drehbar miteinander verbunden sind. Das System beider Körper kann als ein Punkthaufen von veränderlicher Gestalt aufgefaßt werden. Betrachten wir nun eine virtuelle Verschiebung des Punkthaufens, bei der zwar jeder starre Körper unveränderlich bleibt, während sich aber die beiden Körper gegeneinander drehen, so ist die Summe der Arbeiten aller inneren Kräfte immer noch Null, wenigstens dann, wenn zwischen beiden Körpern nur im Gelenke eine Kraft übertragen wird. Trügen beide Körper Magnete, die Fernkräfte aufeinander ausübten, so wäre dies freilich nicht mehr richtig und die Gleichungen (91) oder (92) blieben nicht mehr anwendbar. Man könnte sich in diesem Falle jedoch dadurch helfen, daß man die magnetischen Fernkräfte nicht als innere Kräfte des Systems, sondern als unmitttelbar gegebene äußere Kräfte auffaßte und sie daher in die \mathfrak{F} mit einrechnete, womit die Anwendbarkeit der Formeln gewahrt bliebe.

In der analytischen Mechanik denkt man bei der Anwendung von Gl. (92) gewöhnlich an solche virtuelle Verschiebungen, für die die inneren Kräfte keine Arbeit leisten, ob schon Gestaltänderungen dabei nicht ausgeschlossen sein sollen. Man kann dies, weil man sich die Körper, die das System oder den Punkthaufen ausmachen, nur in solcher Weise miteinander in Verbindung gebracht denkt, daß bei den hierdurch zugelassenen Verschiebungen der Teile gegeneinander in der Tat keine inneren Arbeiten geleistet werden. Um dies zum Ausdrucke zu bringen, pflegt man zu sagen, daß unter den in Gl. (92) auftretenden Verschiebungskomponenten nur solche zu verstehen seien, die zwar sonst willkürlich, aber dabei mit den Systembedingungen verträglich seien. Das kommt aber darauf hinaus, daß $\sum \delta \mathfrak{F}$ gleich Null sein soll. Insbesondere sollen keine elastischen Formänderungen mit der virtuellen Verschiebung verbunden sein und keine Reibungen an den Berührungsstellen der verschiedenen Körper auftreten.

§ 16. Festigkeitsberechnungen für bewegte Körper.

In der Festigkeitslehre untersucht man die Spannungen und die Formänderungen eines elastischen Körpers unter der Voraussetzung, daß die an ihm angreifenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte miteinander stehen und der Körper in Ruhe ist. In der Technik muß man aber auch öfters Festigkeitsaufgaben für bewegte Körper lösen. Dazu dient das d'Alembert'sche Prinzip, mit dessen Hilfe man diese Aufgaben auf solche an ruhenden Körpern zurückführen kann.

Bei einem beliebig bewegten Körper stehen nämlich die an einem Volumenelemente angreifenden Spannungen und die an ihm wirkenden äußeren Kräfte nicht im Gleichgewichte miteinander, sondern sie liefern eine Resultierende, durch die die Beschleunigung der in dem Volumenelemente enthaltenen Masse herbeigeführt wird. Sobald man sich aber die Trägheitskraft als fernere äußere Kraft an dem Volumenelemente angebracht denkt, herrscht wieder überall Gleichgewicht. Dadurch wird die Möglichkeit eröffnet, die inneren Kräfte, die man in diesem Zusammenhange als Spannungen bezeichnet, am ruhenden Körper untersuchen zu können, der neben den Lasten \mathfrak{P} auch noch die Lasten \mathfrak{S} trägt.

Um streng zu sein, muß man hierbei jedoch noch eine weitere Erwägung eintreten lassen. Man weiß nämlich aus der Festigkeitslehre, daß es nicht möglich ist, die Spannungen, die zu gegebenen Lasten gehören, ausschließlich auf Grund von Gleichgewichtsbetrachtungen zu ermitteln. Es könnte daher vorkommen, daß in dem ruhenden Körper, der die Lasten \mathfrak{P} und \mathfrak{S} trägt, ein anderes System von Spannungen zustande käme, wie bei dem ihm entsprechenden bewegten Körper. Zunächst wenigstens können wir nur behaupten, daß die Spannungen, die am Umfange jedes Volumenelements angreifen, in beiden Fällen statisch gleichwertig sein müssen, d. h., daß sie dieselbe Resultierende ergeben müssen. Darum brauchen sie aber noch nicht notwendig auch in den Einzelheiten miteinander übereinzustimmen. Vielmehr könnten sich beide Span-

nungssysteme derart voneinander unterscheiden, daß ihr Unterschied einem Systeme von Eigenspannungen entspräche, also einem Systeme von Spannungen, das auch in einem unbelasteten Körper unter gewissen Umständen auftreten kann, wie es z. B. bei den sogenannten Gußspannungen zutrifft.

Um hierüber eine Entscheidung treffen zu können, müssen wir nochmals auf die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen zurückkommen.

Wir hatten neben dem ersten Punkthaufen, auf den sich die Untersuchung bezog, einen zweiten eingeführt, an dem die Trägheitskräfte \mathfrak{H} zugefügt waren, während sich sonst nichts geändert haben sollte. Jetzt wollen wir an Stelle des starren Körpers, auf den wir hierauf alle Kräfte übertrugen, einen dritten Punkthaufen annehmen, der sich von dem zweiten dadurch unterscheidet, daß seine Punkte zur gegebenen Zeit in Ruhe sein sollen. Die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{H} wirken an ihm gerade so wie vorher an dem zweiten Punkthaufen. Dagegen dürfen wir jetzt nicht willkürlich annehmen, daß die Kräfte \mathfrak{Z} bei ihm genau dieselben seien, wie bei dem ersten Punkthaufen. Bei dem starren Körper konnten wir dies in den Betrachtungen des vorigen Paragraphen unbedenklich tun, da für ihn die Kräfte \mathfrak{Z} überhaupt nicht als innere aufzufassen waren, sondern gerade so wie die äußeren nach Belieben angebracht werden konnten, indem es nur darauf ankam, daß sie sich, wenn dies geschieht, nach dem Wechselwirkungsgesetze aus den Gleichgewichtsbedingungen hinwegheben. Das wird aber ganz anders, wenn wir die inneren Kräfte selbst und ihre nähere Verteilung am dritten Punkthaufen berechnen wollen, und zwar nicht auf Grund von Gleichgewichtsbetrachtungen allein, sondern auch auf Grund von anderen Erwägungen, und wenn wir sie dann später denen im ersten Punkthaufen gleich setzen wollen.

Diese anderen Erwägungen bestehen darin, daß der Spannungszustand durch die übrigen Bedingungen schon im einzelnen mitbestimmt ist. Wir haben uns also zu fragen, ob nach den besonderen physikalischen Eigenschaften der Körper, die durch die Punkthaufen dargestellt werden sollen, beim

dritten Punkthaufen dieselben inneren Kräfte zu erwarten sind, wie beim ersten. Offenbar ist diese Frage nur dann zu bejahen, wenn wir es als Erfahrungstatsache ansehen dürfen, daß die inneren Kräfte nur von jenen Bedingungen abhängen, in denen beide Punkthaufen miteinander übereinstimmen und nicht von jenen, in denen sie sich voneinander unterscheiden. Die Punkthaufen unterscheiden sich in dem Augenblicke, auf den sich unsere Betrachtung bezieht, dadurch voneinander, daß der eine in Bewegung begriffen, der andere aber in Ruhe ist. Hat man es also mit einem Körper von solcher Beschaffenheit zu tun, daß die inneren Kräfte nicht nur von der augenblicklichen Gestalt, sondern auch von der Geschwindigkeit der Gestaltänderung abhängen, so ist die aufgeworfene Frage zu verneinen.

Bei allen Körpern, die elastische Nachwirkungen erkennen lassen, trifft dies zu. Gewöhnlich aber darf man bei den zu praktischen Zwecken vorzunehmenden Festigkeitsberechnungen annehmen, daß die Geschwindigkeiten ohne Einfluß auf die Ausbildung der inneren Kräfte sind. Soviel wir bis jetzt wenigstens wissen, hängen die Spannungen in den elastischen Körpern, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist und daher merkliche elastische Nachwirkungen nicht in Frage kommen, nur von den Formänderungen selbst und nicht von deren Änderungsgeschwindigkeiten ab.

Mit den ausgesprochenen Vorbehalten dürfen wir daher die vorher aufgeworfene Frage bejahen. Hiermit sind wir aber in der Tat berechtigt, die Festigkeitsbetrachtung am ruhenden Körper vorzunehmen und die Rechnungsergebnisse ohne Änderung auf den bewegten Körper anzuwenden. Einige Beispiele unter den Aufgaben werden den Rechnungsgang, der dabei einzuschlagen ist, noch näher erläutern.

§ 17. Das physische Pendel.

Im vorigen Abschnitte wurde die Pendelbewegung unter Voraussetzung eines einfachen Pendels untersucht. Man dachte sich die ganze schwingende Masse in einem einzigen Punkte

vereinigt, der in unveränderlicher Entfernung vom Aufhängepunkte gehalten und dadurch zur Ausführung einer kreisförmigen Bewegung genötigt sein sollte. Mit diesem Bilde reicht man aber nur in seltenen Fällen aus. Gewöhnlich sind die Massen von Körpern, die Pendelschwingungen ausführen, räumlich so ausgedehnt, und namentlich in so verschiedenen Abständen von der festen Drehachse verteilt, daß es von vornherein an jedem Anhaltspunkte dafür fehlt, wo man sich etwa die ganze Masse vereinigt denken müßte, um das Pendel als ein einfaches behandeln zu können. Hier hilft nun — obschon auch andere Wege zum Ziele führen — am besten das d'Alembertsche Prinzip zur Lösung der Aufgabe.

In Abb. 22 sei O der Drehpunkt, d. h. die Projektion der Drehachse auf die senkrecht dazu gedachte Zeichenebene, S der Schwerpunkt des Pendels und m irgendein Massenteilchen im Abstände x , das wir als einen der materiellen Punkte des ganzen Haufens auffassen. Wenn alle übrigen Massen gegenüber m vernachlässigt werden könnten, hätten wir ein einfaches Pendel von der Länge x vor uns und die Schwingungsdauer könnte aus x nach den Lehren des vorigen Abschnitts berechnet werden. Jene Massen m , die nahe beim Drehpunkte O liegen, suchen, für sich genommen, eine kleine, die weiter abstehenden eine größere Schwingungsdauer des Pendels herbeizuführen, und die wirkliche Schwingungsdauer wird einen gewissen Mittelwert annehmen.

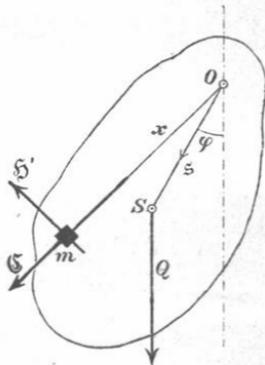


Abb. 22.

Die augenblickliche Stellung des Pendels sei durch den Winkel φ beschrieben, den der vom Aufhängepunkte nach dem Schwerpunkte gezogene Radiusvektor \mathfrak{s} mit der Lotrichtung bildet. In der Gleichgewichtslage des Pendels ist hier nach $\varphi = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{d\varphi}{dt}$ und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Kehren wir nun zum Massenteilchen m

zurück, so kann dessen Geschwindigkeit gleich $x \frac{d\varphi}{dt}$ und die Tangentialkomponente der Beschleunigung, die es im Augenblicke erfährt, gleich $x \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gesetzt werden. Dazu kommt dann noch eine Normalkomponente der Beschleunigung wegen der Richtungsänderung der Geschwindigkeit. — Wir führen jetzt die Trägheitskraft

$$\mathfrak{G} = -m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

ein, die wir ebenso wie die Beschleunigung in eine Tangentialkomponente \mathfrak{G}' und eine Normalkomponente \mathfrak{C} spalten können. Die letzte ist nichts anderes als die Zentrifugalkraft. Die Tangentialkomponente \mathfrak{G}' hat den Absolutwert

$$H' = mx \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Sie ist, wie in Abb. 22 eingetragen, nach außen und obenhin gerichtet. Schwingt nämlich das Pendel nach außen, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ positiv und der Absolutbetrag nimmt ab; schwingt es dagegen nach der Gleichgewichtslage hin, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ negativ und der Absolutbetrag nimmt zu. In jedem Falle ist daher $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ negativ und die Tangentialbeschleunigung nach innen und abwärts gerichtet. Die Trägheitskraft hat aber die entgegengesetzte Richtung wie die zu ihr gehörige Beschleunigung; sie ist also stets nach oben und außen gerichtet.

Nachdem die Trägheitskräfte \mathfrak{G}' und \mathfrak{C} überall zugefügt sind, haben wir ein System von Kräften vor uns, die sich an dem Körper im Gleichgewichte halten. Zur Untersuchung des Gleichgewichts betrachten wir den Körper, da er sich um eine feste Achse dreht, als einen Hebel. Wir schreiben daher die Bedingung an, daß die Summe der statischen Momente für den Drehpunkt gleich Null sein muß. In dieser Momentensumme kommen die Normalkomponenten \mathfrak{C} der Trägheitskräfte nicht vor, da sie alle durch den Momentenpunkt gehen. Die Tangentialkomponenten \mathfrak{G}' haben alle gleiches Momentenvor-

zeichen und die Summe ihrer Momente muß daher gleich dem Momente der entgegengesetzt drehenden Kraft Q sein. Wir erhalten damit die Gleichung

$$-\Sigma m x^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin \varphi. \quad (93)$$

Das Minuszeichen auf der linken Seite ist beigefügt, weil wir erkannt hatten, daß $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ an sich negativ ist. Der Faktor $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ ist allen Gliedern gemeinsam und kann daher auch vor das Summenzeichen gestellt werden. Die dann noch zurückbleibende Summe $\Sigma m x^2$ stellt das Trägheitsmoment für die Drehachse dar und soll, wie früher, mit Θ bezeichnet werden. Hiermit geht die vorige Gleichung über in

$$-\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin \varphi. \quad (94)$$

Aus dieser Differentialgleichung läßt sich φ als Funktion von t ermitteln, womit die Pendelbewegung bekannt ist. Anstatt dessen verfährt man aber einfacher und umgeht ausführliche Rechnungen, die jetzt von neuem anzustellen wären, wenn man die Theorie des physischen Pendels auf jene des einfachen Pendels zurückführt. Man gibt nämlich ein einfaches Pendel an, das mit dem gegebenen genau gleich schwingt, so daß es zur Berechnung der Schwingungsdauer usw. an die Stelle des zusammengesetzten Pendels gesetzt werden kann. Die Länge des gleichwertigen einfachen Pendels wird die reduzierte Pendellänge des zusammengesetzten Pendels genannt. Trägt man die reduzierte Pendellänge l vom Drehpunkte O aus auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Radiusvektor \mathfrak{s} ab, so wird der Endpunkt dieser Strecke der Schwingungsmittelpunkt des Pendels genannt. Denkt man sich nämlich alle übrigen Massen des Pendels verschwindend klein gegenüber einer in diesem Punkte vereinigten Masse m , so geht das Pendel in ein einfaches über, das gleiche Schwingungen wie das gegebene ausführt. Man kann also sagen, daß die an dieser Stelle befindliche Masse von den übrigen nicht beeinflußt wird,

sondern daß sie gerade so schwingt, als wenn die anderen nicht vorhanden wären.

Um nun das gleichwertige einfache Pendel wirklich zu finden, wenden wir Gl. (94) auf den Fall an, daß nur eine Masse m auf dem Radiusvektor \mathfrak{s} im Abstände l vom Drehpunkte vorhanden sei. Auch auf den Fall dieses einfachen Pendels läßt sich Gl. (94) anwenden, da sie nach ihrer Ableitung für jede beliebige Massenverteilung gültig bleibt. In diesem Falle ist $\Theta = ml^2$ und $s = l$, also geht Gl. (94) über in

$$- ml^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = mgl \sin \varphi$$

oder kürzer

$$- l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = g \sin \varphi. \quad (95)$$

Von dieser Gleichung kennen wir aber die Lösung bereits, da t schon in § 12 als Funktion von φ dargestellt wurde.

Soll nun das zusammengesetzte Pendel genau gleich mit dem einfachen schwingen, d. h. so, daß zu gleichen Zeiten stets auch gleiche Ausschläge gehören, so genügt es, daß die Anfangsbedingungen bei beiden gleich waren, und daß ferner die Gleichungen (94) und (95) in den konstanten Koeffizienten miteinander übereinstimmen. Freilich ist dazu nicht nötig, daß die Koeffizienten jeder Seite einzeln gleich sind; es genügt vielmehr die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Koeffizienten auf beiden Seiten. Man überblickt dies am besten, wenn man beide Gleichungen in der Form

$$- \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{Qs}{\Theta} \sin \varphi \quad \text{und} \quad - \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin \varphi$$

anschreibt. Beide Gleichungen werden miteinander identisch, wenn man

$$\frac{Qs}{\Theta} = \frac{g}{l}$$

setzt und hieraus folgt für die reduzierte Pendellänge l

$$l = \frac{g\Theta}{Qs}. \quad (96)$$

Führt man an Stelle des Trägheitsmomentes den Trägheitsradius i ein, so geht Gl. (96) über in

$$l = \frac{i^2}{s}. \quad (97)$$

Wie schon vorher bemerkt wurde, kann man das Problem des physischen Pendels auch ohne Benutzung des d'Alembertschen Prinzips nach mehreren anderen Methoden lösen. Namentlich der Satz von der lebendigen Kraft führt in allen Fällen, bei denen es sich, wie hier, um Bewegungen eines Körpers oder eines Systems von Körpern handelt, die nur einen Freiheitsgrad besitzen oder die, wie man sagt, zwangsläufig erfolgen, schnell zum Ziele. Es sei daher noch gezeigt, wie sich die Lösung auf diesem Wege gestaltet. Bezeichnet man den größten Ausschlag mit α , so liefert die Gleichsetzung der von dem Gewichte Q geleisteten Arbeit mit der lebendigen Kraft, gerade so wie früher beim einfachen Pendel, die Gleichung

$$\frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = Qs (\cos \varphi - \cos \alpha), \quad (98)$$

die hierauf entweder unmittelbar weiter integriert oder so wie vorhin mit der entsprechenden Gleichung für das gleichschwingende einfache Pendel verglichen werden kann. Gl. (98) ist, wie man sich leicht überzeugt, ein erstes Integral von Gl. (94), wobei die auftretende Integrationskonstante schon der Grenzbedingung, daß der größte Ausschlag α sein soll, angepaßt ist.

Dieser Weg ist vielleicht noch kürzer und einfacher als der vorher eingeschlagene. Wenn aber z. B. zugleich verlangt würde, die Biegungsbeanspruchung zu berechnen, die das Pendel erfährt, müßte man doch wieder zur Benutzung des d'Alembertschen Prinzips zurückgreifen und schon aus diesem Grunde ist es nützlich, die Aufgabe von vornherein mit dem d'Alembertschen Prinzip zu behandeln; ganz abgesehen davon, daß hier auch an einem möglichst einfachen Beispiele der Gebrauch dieses Prinzips erläutert werden sollte.

§ 18. Schwerpunkts- und Flächensätze für den Punkthaufen.

Die Schwerpunktssätze sind schon im ersten Bande behandelt; des Zusammenhangs wegen werde ich aber hier Einiges noch einmal kurz wiederholen, was darüber früher ausgemacht

wurde. — Zunächst erinnere ich daran, daß die Lage des Schwerpunkts, der dabei als Massenmittelpunkt aufzufassen ist, durch die Gleichung

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathbf{r} \quad (99)$$

definiert wird, in der \mathbf{r} der Radiusvektor für irgendeinen materiellen Punkt m des Haufens, M die Gesamtmasse des Haufens und \mathfrak{s} den Radiusvektor des Schwerpunkts bedeuten. Diese Gleichung gilt für beliebige Punkthaufen in jedem Augenblicke, auch dann, wenn sie während der Bewegung ihre Gestalt verändern. Durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$M \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

oder mit Einführung der Geschwindigkeit \mathbf{v} und der Schwerpunkts­geschwindigkeit \mathbf{v}_0

$$M\mathbf{v}_0 = \Sigma m\mathbf{v}, \quad (100)$$

d. h. die Bewegungsgröße des ganzen Haufens ist ebenso groß, als wenn die ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre und sich mit dessen Geschwindigkeit bewegte. Eine nochmalige Differentiation nach der Zeit liefert

$$M \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Sigma(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{Z}) = \Sigma\mathfrak{P}, \quad (101)$$

und diese Gleichung sagt aus, daß sich der Schwerpunkt stets so bewegt, als wenn die ganze Masse in ihm vereinigt und alle äußeren Kräfte parallel nach ihm verlegt wären.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zur Übertragung des im vorigen Abschnitte für einen einzelnen materiellen Punkt bewiesenen Flächensatzes auf einen beliebigen Punkthaufen. Für jeden Punkt des Haufens besteht nach Gl. (2) oder (3), § 2 die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dt} = \frac{d}{dt} V m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = V(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{Z})\mathbf{r} = V\mathfrak{P}\mathbf{r} + V\Sigma\mathfrak{Z}\mathbf{r}.$$

Gegenüber der früheren Formel war hier nur nötig, alle Kräfte, die an dem Punkte angreifen, in äußere und in innere Kräfte des Haufens einzuteilen, jene zu \mathfrak{P} und diese zu $\Sigma\mathfrak{Z}$ zu-

sammenzufassen und daher die Resultierende $\mathfrak{P} + \Sigma \mathfrak{J}$ an die Stelle der in § 2 mit \mathfrak{P} bezeichneten Kraft, die allein an dem materiellen Punkte angreifen sollte, treten zu lassen. Die vorstehende Gleichung gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt und für jeden Punkt des Haufens. Wir wollen sie uns für alle Punkte des Haufens unter Zugrundelegung desselben Momentenpunktes angeschrieben denken und alle so erhaltenen Gleichungen addieren. Wir finden dann

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathbf{r} + \Sigma \Sigma V \mathfrak{J} \mathbf{r}.$$

Nach dem Wechselwirkungsgesetze verschwindet aber das letzte Glied auf der rechten Seite und wir behalten daher

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathbf{r}, \quad (102)$$

oder auch in kürzerer Schreibweise

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathbf{r}. \quad (103)$$

Der Ausdruck $\Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ oder \mathfrak{B} stellt die geometrische Summe der statischen Momente der Bewegungsgrößen aller Punkte des Haufens dar; wir wollen diese Summe als das statische Moment der Bewegungsgröße des ganzen Haufens oder als dessen Drall bezeichnen. Dabei ist indessen wohl zu beachten, daß man sich, um dieses statische Moment zu bilden, nicht etwa zuvor die Bewegungsgröße nach Gl. (100) im Schwerpunkte vereinigt denken darf, um dann von ihr das Moment zu nehmen. Das ist deshalb nicht zulässig, weil der Faktor \mathbf{r} nicht für alle Glieder der Summe konstant ist, sondern für jeden materiellen Punkt einen anderen Wert annimmt. In der „Theorie des Kreisels“ von Klein und Sommerfeld, in der auf die Anwendung des Flächensatzes ein besonderes Gewicht gelegt ist, wird die Größe $\Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ als der „Impulsvektor“ bezeichnet. Ich glaube aber die Bezeichnung „Drall“ vorziehen zu sollen.

Der durch Gl. (102) ausgedrückte Flächensatz läßt sich in Worten wie folgt aussprechen:

Für jeden beliebigen Momentenpunkt ist die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls irgendeines Punkthaufens gleich der geometrischen Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte.

In dieser allgemeinsten Form wird indessen seltener von dem Flächensatze Gebrauch gemacht als von den einfacheren Formen, in die er übergeht, wenn besondere Bedingungen vorliegen. Namentlich durch eine geeignete Wahl des Momentenpunktes läßt er sich häufig erheblich vereinfachen, obschon damit freilich andererseits die allgemeine Gültigkeit eingeschränkt wird. Ich werde die häufigst vorkommenden Fälle dieser Art hier einzeln durchsprechen.

- a) *Punkthaufen, der zu Anfang ruhte und auf den keine äußeren Kräfte wirken.*

Durch die inneren Kräfte können in diesem Falle Bewegungen hervorgerufen werden, die zu Gestaltänderungen des Haufens führen. Wir schließen zunächst nach dem Schwerpunktsatze Gl. (101), daß der Schwerpunkt jedenfalls stets in Ruhe bleibt. Ferner folgt aus dem Flächensatze, daß \mathfrak{B} konstant und daher stets gleich Null bleiben muß, da es zu Anfang Null war. Auch die Projektion von \mathfrak{B} auf irgendeine Ebene oder irgend eine Achse muß daher zu jeder Zeit gleich Null sein. — Die Projektion eines statischen Moments auf eine Achse kann nach den Lehren des ersten Bandes stets als das statische Moment der Projektion auf eine zur Achse senkrecht stehende Ebene aufgefaßt werden. Projiziert man also alle Punkte des Haufens auf eine beliebige Ebene, so ist auch für jeden Punkt dieser Ebene als Anfangspunkt die Summe der mit den Massen m multiplizierten Flächenräume oder Sektorengeschwindigkeiten stets gleich Null. Man kann dies einfach so ausdrücken, daß ein Teil der materiellen Punkte den beliebig gewählten Punkt im Sinne des Uhrzeigers, ein anderer Teil ihn im entgegengesetzten Sinne umkreisen muß, und zwar so, daß die statischen Momente der Bewegungsgrößen für beide Umkreisungsrichtungen gleich groß sind.

b) *Punkthaufen mit sonst beliebiger Anfangsbewegung, dessen Schwerpunkt aber zu Anfang ruhte und auf den keine äußeren Kräfte wirken.*

Der Schwerpunkt muß hier wie im vorigen Falle dauernd in Ruhe und das statische Moment der Bewegungsgröße muß konstant bleiben. Dieses ist aber jetzt nicht gleich Null, sondern gleich dem durch den Anfangszustand gegebenen Werte. Bezeichnen wir diesen mit \mathfrak{G} , so ist

$$\Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \mathfrak{G} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{G}.$$

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß im vorliegenden Falle die Konstante \mathfrak{G} unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes ist. Um dies zu beweisen, wähle man einen zweiten Momentenpunkt, von dem die Hebelarme \mathbf{r}' gerechnet werden. Dann ist für diesen

$$\Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' = \mathfrak{G}'.$$

Für \mathbf{r}' können wir aber schreiben

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a},$$

wenn mit \mathbf{a} der Radiusvektor vom zweiten zum ersten Momentenpunkte bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\mathfrak{G}' = \Sigma V m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

In der letzten Summe ist \mathbf{a} konstant und man hat daher

$$\Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = V (\Sigma m \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = 0$$

nach Gl (100) und der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt ruhen sollte. In der Tat wird also

$$\mathfrak{G}' = \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \mathfrak{G}.$$

Der Drall eines Punkthaufens, dessen Schwerpunkt ruht, ist daher eine von der Wahl des Momentenpunktes unabhängige und überdies, wenn keine äußeren Kräfte wirken, der Zeit nach konstante Größe. Die Bedeutung dieses Satzes möge noch an einer seiner bekanntesten und wichtigsten Anwendungen näher erläutert werden.

Wir wählen das Sonnensystem, also die Sonne samt ihren Planeten und deren Trabanten u. dgl. als den Punkthaufen, auf

den wir den Satz anwenden wollen. Zugleich setzen wir voraus, daß der Schwerpunkt dieses Haufens gegenüber einem festen Raume, für den das Trägheitsgesetz gilt (vgl. Bd. I, S. 20) zu Anfang in Ruhe war, und daß die äußeren Kräfte, die von den fernen Weltkörpern des Fixsternhimmels ausgehen, so gering sind, daß sie vernachlässigt werden dürfen. — Zugleich sei übrigens bemerkt, daß man diese Voraussetzungen zum Teile auch fallen lassen kann; man würde dann auf Grund der unter c) und e) folgenden Betrachtungen zu ganz ähnlichen Schlüssen gelangen. Hier beschränke ich mich aber auf die Besprechung des einfachsten Falles.

Die Wahl des Momentenpunktes ist, wie bewiesen, gleichgültig und wir können dazu etwa den Sonnenmittelpunkt nehmen. Um diesen bewegen sich die Planeten alle in demselben Sinne und auch die Sonne besitzt eine Drehung in der gleichen Richtung. Jedenfalls wird also der Drall des Sonnensystems nicht gleich Null sein. Dagegen muß er nach Größe und Richtung konstant sein. Hierdurch ist eine, trotz aller Lagenänderungen, die vorkommen mögen, konstante Richtung gegeben. Wenn die Planetenbahnen alle in einer Ebene enthalten wären und auch die Drehbewegungen usf. alle parallel zu dieser Ebene erfolgten, wäre der Drall, als ein statisches Moment, senkrecht zu dieser Ebene gerichtet. Diese Voraussetzung ist zwar nicht erfüllt, aber die meisten Planetenbahnen usf. treten doch auch nicht sehr erheblich aus einer gewissen mittleren Ebene heraus. Hiernach liegt es nahe, nach einer solchen mittleren Ebene zu suchen, die unbeweglich im Raume festliegt, trotz aller Abweichungen und Schwankungen, die bei den einzelnen Bestandteilen der Bewegungsgröße des Haufens vorkommen mögen. Diese Ebene wird durch den Flächensatz gegeben; es ist jene, die senkrecht zu der unveränderlichen Richtung von \mathfrak{C} steht. Sie heißt nach Laplace, von dem diese Betrachtung herrührt, die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Natürlich kommt es, wenn man von ihr redet, nur auf ihre Stellung, nicht auf ihre besondere Lage an. Am einfachsten ist es zwar, sie sich durch den Schwer-

punkt des ganzen Haufens gezogen zu denken; aber auch jede zu dieser parallele Ebene kann als unveränderliche Ebene im Sinne unseres Satzes angesehen werden.

c) *Punkthaufen mit beliebiger Anfangsbewegung ohne Wirkung äußerer Kräfte.*

Der Schwerpunkt beschreibt eine geradlinige Bahn mit konstanter Geschwindigkeit. Der Drall bleibt für jeden Momentenpunkt der Zeit nach konstant, für verschiedene Momentenpunkte ist er aber verschieden. Zwischen \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' besteht die Beziehung (vgl. die Ableitung unter b)

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} + V M \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite ist stets senkrecht zur Schwerpunkts-*geschwindigkeit* \mathbf{v}_0 , also auch senkrecht zur Schwerpunktsbahn gerichtet. Daraus folgt, daß alle \mathfrak{C} gleiche Projektionen auf die Schwerpunktsbahn haben. Ferner ist \mathfrak{C} für alle Momentenpunkte gleich, die auf einer Parallelen zur Schwerpunktsbahn liegen, denn für zwei solche Momentenpunkte ist der Abstand \mathbf{a} parallel zu \mathbf{v}_0 und das äußere Produkt aus beiden wird daher zu Null.

Zum Begriffe der unveränderlichen Ebene gelangen wir hier, wenn wir von jedem Punkte des Haufens nur die Relativgeschwindigkeit zum Schwerpunkte betrachten, also den Ausdruck

$$\mathfrak{R} = \sum V m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{r}$$

bilden. Dieser ist für alle Momentenpunkte gleich; denn für einen zweiten Momentenpunkt hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= \sum V m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) (\mathbf{r} + \mathbf{a}) \\ &= \sum V m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \mathbf{r} + V \sum m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - V M \mathbf{v}_0 \mathbf{a} = \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

da sich die beiden letzten Glieder nach Gl. (100) gegeneinander fortheben. Die unveränderliche Ebene steht senkrecht zur Richtung von \mathfrak{R} .

Wenn \mathfrak{R} zu Anfang Null war, muß es auch Null bleiben. Man kann dies dahin ausdrücken, daß ein unveränderlicher Körper, der zu Anfang keine Rotation aus-

führte, sich nicht von selbst (durch innere Kräfte) umdrehen kann. Ein veränderlicher Körper kann es aber, wenn auch für ihn immer noch \mathfrak{R} gleich Null bleiben muß; auf diesen interessanten und auch praktisch sehr wichtigen Fall werde ich nachher ausführlicher eingehen.

d) *Punkthaufen, auf den äußere Kräfte einwirken, die alle von einem festen Punkte ausgehen.*

In diesem Falle bezieht man den Flächensatz gewöhnlich nur auf den festen Punkt als Momentenpunkt. Da für ihn das Moment der äußeren Kräfte immer noch gleich Null ist, bleibt auch der auf ihn bezogene Drall konstant. Als unveränderliche Ebene wird auch hier oft jene bezeichnet, die senkrecht zu diesem statischen Momente steht. — Hierher gehört namentlich die Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt festgehalten ist (Kreisel), solange man die Wirkung der Schwere vernachlässigen kann. Als einzige äußere Kraft kommt dann der Auflagerdruck an dem festgehaltenen Punkte in Betracht.

e) *Punkthaufen, auf den parallele äußere Kräfte wirken.*

Zu einer einfachen Aussage gelangt man in diesem Falle dadurch, daß man den Punkthaufen auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zur Richtung der äußeren Kräfte steht und nun die Bewegung in dieser Projektionsebene verfolgt. Die Projektion von \mathbf{v} sei \mathbf{v}' und \mathbf{r} sei ein von einem beliebigen Momentenpunkte in der Projektionsebene nach der Projektion von m gezogener Hebelarm. Dann ist $\sum m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}'$ zugleich das statische Moment von $m \mathbf{v}$ in bezug auf eine durch den gewählten Momentenpunkt senkrecht zur Projektionsebene gezogene Achse. Ebenso ist $\sum \mathfrak{P}' \cdot \mathbf{r}'$ zugleich das Moment der Kraft \mathfrak{P} für diese Achse. Nun gilt für jeden Momentenpunkt im Raume der Flächensatz in der Form

$$\frac{d}{dt} \sum m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \sum \mathfrak{P} \cdot \mathbf{r}.$$

Aus jeder Gleichung zwischen gerichteten Größen läßt sich aber sofort eine Gleichung zwischen den Projektionen auf

irgendeine Achse ableiten. Projizieren wir also auf eine Achse, so gilt auch

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}' = \Sigma V \mathfrak{P}' \mathbf{r}'.$$

Dies gilt zunächst für jede beliebig gerichtete Achse. Für die parallel zu den Kräften \mathfrak{P} gewählte Achse wird dagegen das statische Moment der Kräfte \mathfrak{P} zu Null, da die Projektion \mathfrak{P}' auf die zur Achse senkrecht stehende Projektionsebene verschwindet. Hiernach geht die Gleichung über in

$$\Sigma V m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}' = \mathfrak{C}.$$

Wählt man einen anderen Momentenpunkt in der Projektionsebene, setzt also an Stelle von \mathbf{r}' etwa $\mathbf{r}' + \mathbf{a}$, so kommt ein neues Glied in den Ausdruck für \mathfrak{C} hinein, das gleich

$$\Sigma V m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{a} = V (\Sigma m \mathbf{v}') \cdot \mathbf{a} = V M \mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{a}$$

gefunden wird. War die Schwerpunktschwindigkeit von vornherein entweder Null oder parallel zur Richtung der Kräfte \mathfrak{P} , so bleibt \mathbf{v}'_0 stets gleich Null und der in der Projektionsebene genommene Drall \mathfrak{C} hat für jeden Momentenpunkt denselben Wert. Natürlich kommt es dabei nicht auf die Richtung von \mathfrak{C} an, die selbstverständlich ist (nämlich rechtwinklig zur Projektionsebene), sondern nur auf die Größe von \mathfrak{C} .

§ 19. Einfache Anwendungen des Flächensatzes.

Die einfachste und eine der wichtigsten Anwendungen des Flächensatzes besteht in der Entscheidung der Frage, ob und unter welchen näheren Umständen ein sich selbst überlassener Punkthaufen, zwischen dessen einzelnen Teilen beliebige innere Kräfte auftreten, sich selbst im Raume umzudrehen vermag. Fast immer wird hierbei der Flächensatz in Verbindung mit dem Schwerpunktssatze gebraucht. Nach diesem vermag sich der Punkthaufen durch innere Kräfte nicht selbst fortzubewegen, da trotz aller relativen Bewegungen zwischen den einzelnen Punkten des Haufens der Schwerpunkt stets in Ruhe bleiben muß. Früher hat man öfters in Anlehnung hieran den Flächen-

satz dahin ausgesprochen, daß sich ein Punkthaufen ohne fremde Beihilfe, d. h. ohne Auftreten äußerer Kräfte an ihm, auch nicht selbst umzudrehen vermöge. Dies war aber nur eine irrige Deutung des Flächensatzes, die freilich lange Zeit fast allgemein verbreitet war und als Irrtum erst erkannt wurde, nachdem ein Widerspruch zwischen ihr und den Erfahrungstatsachen festgestellt war. An der Aussage des Satzes selbst, an den Formeln, Ableitungen und Beweisen dafür brauchte übrigens nicht das Geringste geändert zu werden; nur bei der Anwendung auf den konkreten Fall muß, wie sich hierbei herausstellte, mit größerer Vorsicht verfahren werden als früher.

Diese Frage wurde erst vor nicht sehr langer Zeit — nämlich im Jahre 1894 in der Pariser Akademie der Wissenschaften — angeregt und entschieden. Es handelte sich darum, eine mechanische Erklärung dafür zu finden, wie es eine Katze fertig bringt, beim Fallen aus größerer Höhe stets mit den Füßen voran auf den Boden zu kommen. Von den Vertretern der Mechanik wurde auf Grund der üblichen älteren Deutung des Flächensatzes zunächst die Ansicht ausgesprochen, daß die Drehung nur die Folge eines Abstoßes sei, der im Augenblicke des Herabfallens, so lange also die Katze noch mit anderen Körpern in Berührung war, erteilt wurde. Man schloß auf Grund des Flächensatzes ungefähr so: Wenn der Körper während des Herabfallens zunächst keine Drehbewegung hätte, so könnte etwa die Katze den Vorderkörper nach einer ihr genehmen Richtung umdrehen. Hierbei müßte aber dem Flächensatze zufolge gleichzeitig auch eine Drehung des Hinterkörpers in entgegengesetzter Richtung zustande kommen. Wenn nun etwa vorher alle vier Beine der Katze nach oben gestanden hätten, so müßte sie, um nachher alle vier nach unten zu bringen, Vorder- und Hinterkörper nach Art eines Schraubenumlaufs gegeneinander verdreht haben.

Diese Betrachtung war an sich nicht unrichtig; es wurde dabei nur übersehen, daß noch andere Möglichkeiten einer relativen Drehbewegung der Körperteile gegeneinander bestehen, als die hier allein in Aussicht genommene zwischen

Vorder- und Hinterkörper. Daß solche noch möglich sein mußten, ergab sich alsbald durch einwandfreie Versuche, indem man Katzen mit den Beinen nach oben an Schnüren aufhing und diese vorsichtig durchschnitt, so daß die Katze außer Berührung mit anderen Körpern kam, bevor sie sich noch durch einen Abstoß eine Rotationsgeschwindigkeit zu erteilen vermochte. Sie fiel dann in einen dunklen Raum hinab, dessen Fallhöhe sie nicht vorherzusehen vermochte und kam trotzdem bei sehr verschiedenen (nicht zu kleinen) Fallhöhen stets mit den Füßen zuerst auf dem Boden an. Außerdem hat man auch die Körperbewegungen, die sie während des Fallens ausführte, noch durch eine Reihe schnell aufeinanderfolgender Momentphotographien ermittelt.

Nachdem erst die Tatsache des Umdrehens einwandfrei festgestellt war, kam man auch bald auf die mechanische Erklärung dafür. Es hätte natürlich keinen Zweck, wenn ich diese gerade an dem historischen Beispiele geben wollte; ich werde vielmehr, um das Wesen der Sache zu erklären, ein einfacheres wählen. — Der Fehler, den man früher begangen hatte, bestand vor allem darin, daß man nicht beachtet hatte, daß sich Teile eines Körpers gegen den Rest beliebig oft im gleichen Sinne zu drehen vermögen, ohne daß sich nach jedem Umlaufe die Gestalt des Körpers irgendwie verändert hätte. Faßt man z. B. mit der rechten Hand eine Stange, einen Säbel oder dgl., streckt hierauf den Arm senkrecht nach oben aus und führt mit der Stange in horizontaler Richtung eine kreisförmige Bewegung um das Handgelenk herum aus, so vermag man diese Bewegung beliebig oft im gleichen Sinne zu wiederholen. Ein Mensch, der allen äußeren Kräften entzogen frei im Raume schwebte und vorher in Ruhe wäre, müßte, wenn er die beschriebene Bewegung ausführte, sich selbst im entgegengesetzten Sinne umdrehen, als die Stange, die er über seinem Kopfe rotieren läßt. Denkt man sich ihn etwa auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zu seiner Längsachse oder senkrecht zur Rotationsachse des Stabes steht, so bestimmt sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, die er

selbst ausführt, sehr einfach aus der Bedingung, daß für jeden Momentenpunkt, also etwa für die Projektion der Längsachse, das Produkt aus den Sektorengeschwindigkeiten und den Massen seines Körpers ebenso groß ist, als das gleiche für die Massen des Stabes gebildete Produkt. So lange der Stab weiter herumgeschwungen wird, dreht sich auch der Mensch im entgegengesetzten Sinne; sobald aber der Stab angehalten wird, hört auch der Mensch auf, sich weiter zu drehen. Er kommt dann wieder ganz zur Ruhe, sieht aber jetzt nach einer ganz anderen Richtung als zu Anfang. Durch das angegebene Mittel hätte er es also in der Hand, sich nach Wunsch jede beliebige Stellung im Raume zu geben.

Setzt man etwa an die Stelle des Stabes im vorigen Beispiele bei der herabfallenden Katze den Schwanz, der ebenfalls beliebig oft um die Längsachse des Körpers herumgedreht werden kann, so hat man schon eine Möglichkeit für die Wendung des Körpers nach abwärts. Es ist aber nicht einmal die einzige, wie aus den folgenden Betrachtungen leicht hervorgehen wird.

Man nehme jetzt nämlich an, daß ein seiner Gestalt nach veränderlicher Körper auf irgendeine Art schon eine gewisse Rotationsgeschwindigkeit erlangt hat. Äußere Kräfte sollen entweder ganz fehlen oder wie bei einem herabfallenden Körper parallel und den Massen proportional sein. Auf die Umdrehung des Körpers können sie dann keinen Einfluß haben und wir können daher, wenn es sich nur um die Drehbewegungen handelt, von ihnen absehen. Wenn keine äußeren Kräfte wirken, muß das Moment der Bewegungsgrößen konstant bleiben. Stellen wir uns jetzt vor, daß sich der Körper zusammenzieht, so nehmen die etwa von der Projektion des Schwerpunkts gezogenen Hebelarme ab, und da das Produkt aus ihnen und den Bewegungsgrößen konstant bleibt, muß die Winkelgeschwindigkeit der Drehung zunehmen. Wir können z. B. daraus sofort schließen, daß ein Himmelskörper, der um seine Achse rotiert, seine Winkelgeschwindigkeit vergrößert sobald er sich zusammenzieht. Würde sich etwa unser Erd-

ball infolge von Abkühlungen zusammenziehen, so müßte die Dauer eines Tages dadurch verkürzt werden.¹⁾

Man betrachte ferner einen Gymnastiker, der sich bei einem Sprunge in der Luft überschlägt (sog. Salto mortale). Der Schwerpunkt beschreibt in der Luft eine Parabel. Schon beim Absprunge hat der Springer seinem Körper eine gewisse Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Schwerpunkt gehende horizontale Rotationsachse gegeben. Diese würde aber nicht ausreichen, den Körper während des Fluges durch die Luft so weit umzudrehen, daß er wieder mit den Beinen auf den Boden käme. Der Gymnastiker, der diese Bewegung freilich nur auf Grund seiner Erfahrung und ohne Kenntnis des Flächensatzes ausführt, hat es aber in der Hand, die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehbewegung beträchtlich zu steigern, dadurch, daß er seinen Körper während des Sprunges stark zusammenzieht (durch Anziehen der Arme und Beine usf.). Hierdurch gelingt es ihm, während der für das Durchlaufen der Wurfparabel gegebenen Zeit eine hinreichende Drehung des Körpers zu veranlassen, die ihn wieder mit den Beinen den Boden erreichen läßt.

Betrachtet man ferner einen vorher ruhenden Körper, der aus zwei ungefähr gleichen Teilen besteht, die sich nicht vollständig, sondern nur um einen gewissen Winkel gegeneinander zu drehen vermögen, so kann eine Umdrehung des ganzen Körpers, an deren Schluß die Anfangsgestalt wieder erreicht wird, auch auf folgende Art bewirkt werden. Man drehe zuerst den Hauptteil I in dem gewünschten Sinne, wobei frei-

1) Diese Aussage setzt natürlich voraus, daß eine Zeiteinheit angegeben werden kann, die als unveränderlich betrachtet werden darf. Um die etwaige Veränderlichkeit der Tagesdauer während eines längeren Zeitraumes zu prüfen, kann man sich etwa die Aufgabe stellen, die Anzahl der Lichtschwingungen für Licht von einer genau definierten Farbe oder Wellenlänge abzuzählen, die in die Dauer eines Tages hineinfallen. Hiermit ist zunächst wenigstens theoretisch die Möglichkeit gegeben, Abweichungen in der Tagesdauer nachzuweisen. Außer dem angegebenen gibt es indessen auch noch eine Reihe anderer Mittel, die zu dem gleichen Zwecke benutzt werden könnten.

lich der Hauptteil II eine entgegengesetzte Drehung ausführt. Während dieser ersten Periode soll aber durch passende Anordnung (bei einem lebenden Wesen etwa durch Ausstrecken oder Anziehen der Arme und Beine) der Hauptteil I möglichst zusammengezogen, der Hauptteil II möglichst auseinander gespreizt sein. Dann wird I eine viel größere Winkelgeschwindigkeit erlangt haben als II. Nach einiger Zeit wird die relative Drehung beider Körperteile gegeneinander eingestellt. Sofort hört damit die weitere Drehbewegung auf. Der Hauptteil I hat aber jetzt schon einen großen Winkel in dem gewünschten, der Hauptteil II nur einen kleinen Winkel im unerwünschten Sinne durchlaufen. Hierauf werde umgekehrt der Hauptteil I möglichst ausgespreizt und der Hauptteil II möglichst zusammengezogen. Wenn jetzt eine Drehung beider Teile gegeneinander vorgenommen wird, die Hauptteil II im erwünschten Sinne dreht, so wird dieser eine große und Hauptteil I eine kleine Winkelgeschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne annehmen. Wenn diese Drehung so weit vorgeschritten ist, daß beide Teile wieder in ihrer normalen Lage zueinander sind, wird sich der ganze Körper bereits um die Differenz des im erwünschten Sinne zurückgelegten großen und des im unerwünschten Sinne zurückgelegten kleinen Winkels gedreht haben. Man sieht nun ein, daß durch genügend häufige Wiederholung beider aufeinanderfolgender Relativbewegungen jede beliebige Wendung des Körpers herbeigeführt werden kann.

Die Zahl der Beispiele, bei denen man auf ähnliche Art, also bloß auf Grund der einfachsten Überlegungen ohne jede Rechnung wenigstens zu einem qualitativen Resultate kommt, ist sehr groß. Einige davon sollen noch zur weiteren Erläuterung angeführt werden.

Man nehme an, daß die Insassen eines Luftballons den Wunsch haben, ihr Fahrzeug so zu drehen, daß etwa eine andere Seite des Ballons oder der Gondel die Richtung nach der Sonne hin einnehme. Sie können dies ausführen, indem sie etwa selbst im entgegengesetzten Sinne im Korbe herumlaufen oder sich auch nur um ihre Achse drehen oder, wenn

ihnen dies zu unbequem ist, indem sie einen Stab über dem Kopfe so herumschwingen, wie dies früher beschrieben wurde. Wenn dies oft genug geschehen ist, wird die gewünschte Wendung des Fahrzeugs ausgeführt sein, und sobald mit der Drehbewegung aufgehört wird, verharret auch der Ballon in seiner neuen Stellung zur Sonne.

Ein Schiff, das ruhig auf dem Wasser liegt, kann auf einfachere Weise gewendet werden, da es leicht möglich ist, mit Hilfe von Rudern oder von Stangen, die bis auf den Grund reichen, äußere Kräfte von hinreichendem Betrage darauf wirken zu lassen, um es bald in die gewünschte Richtung zu bringen. Aber auch wenn solche Mittel nicht vorhanden oder nicht zugänglich wären, ließe sich die Wendung auf dieselbe Art bewirken, wie beim Luftballon. Hätte man etwa ein Rad, das auf dem Schiffe um eine vertikale Achse drehbar angebracht wäre, so brauchte ein Passagier dieses Rad nur hinreichend oft in einem gewissen Sinne umzudrehen, um eine Wendung des Schiffes nach der entgegengesetzten Richtung herbeizuführen. Wenn das Rad etwa in der Kajüte ohne jede Verbindung nach außen hin angebracht wäre, brauchte man diesen Raum gar nicht zu verlassen, um die gewünschte Richtungsänderung des Schiffes zu bewirken. Man könnte sogar, um einen extremen Fall zu nennen, behaupten, daß schon die genügend oft im gleichen Sinne wiederholte Drehung eines Fingerrings um den in lotrechter Richtung gehaltenen Finger mit der Zeit eine Wendung des Schiffes herbeiführen müßte, wenn die Wirkung nicht so gering wäre, daß sie neben den niemals ganz zu vermeidenden zufälligen äußeren Einflüssen verschwindet und daher durch die Beobachtung nicht bestätigt werden kann.

Zu den als „zufällig“ bezeichneten äußeren Einflüssen gehört übrigens bei den jetzt erwähnten Beispielen einer, der für den Erfolg sehr wesentlich ist und auf den, da er stets zu erwarten ist, hier noch besonders aufmerksam gemacht werden soll. Der Luftballon oder das Schiff werden nämlich, sobald sie sich infolge der auf ihnen ausgeführten Dreh-

bewegungen selbst in umgekehrter Richtung drehen, hierbei auf einen Luft- oder Wasserwiderstand stoßen, der die Bewegung zwar zunächst nicht verhindert, ihre Geschwindigkeit aber allmählich verringert. Man kann diesem Übelstande auch nicht ohne weiteres dadurch abhelfen, daß man die Drehbewegung auf dem Fahrzeuge selbst einstellt und sie später von neuem wieder aufnimmt. Hat sich nämlich nach der ersten Ausführung der Drehbewegungen die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs durch den Luftwiderstand usf. vermindert, und man stellt hierauf die Drehbewegung ein, so verharret das Fahrzeug nun nicht mehr in seiner augenblicklichen Stellung, sondern es dreht sich sofort entgegengesetzt der ursprünglichen Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit, die gleich dem durch Reibung oder dgl. verursachten Verluste an der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit ist. Wenn man von den vorhergehenden Ausführungen praktischen Gebrauch machen wollte, müßte man dies wohl im Auge behalten. Durchführbar wäre aber, wie man leicht erkennt, die gewünschte Wendung immer, wenn andere äußere Einflüsse außer einem derartigen Bewegungswiderstande nicht vorkämen.

Wenn alle Eisenbahnzüge der Erde und alle Schiffe, die sich auf der Fahrt befinden, die Erde stets parallel zum Äquator, etwa in der Richtung von Westen nach Osten, also im gleichen Sinne mit der Rotationsbewegung der Erde umkreisen und keine im entgegengesetzten Sinne, so müßte dadurch die Winkelgeschwindigkeit der Erde etwas herabgesetzt werden, d. h. die Dauer eines Tages müßte sich vergrößern. Sobald die Schiffe und die Züge zur Ruhe gebracht würden, müßte auch der Tag seine frühere Länge wieder annehmen. Der Einfluß wäre freilich gering; er könnte aber für genaue astronomische Messungen merklich werden, wenn es sich um die bewegten Massen von Meeresströmungen oder von Winden handelte, die eine stetige Umkreisung der Erde im gleichen Sinne ohne Kompensation durch andere damit zusammenhängende Strömungen in der entgegengesetzten Richtung ausführten.

Auch wenn ein Knabe eine Schaukel, auf der er vorher

in Ruhe saß, ohne äußeren Anstoß in Bewegung setzen will, beginnt er damit, durch Anfassen der Aufhängeschnüre mit den Händen, Ausstrecken der Beine in horizontaler Richtung und Überneigen des Oberkörpers nach hinten sich selbst eine Drehbewegung zu erteilen. Betrachtet man den Aufhängepunkt der Schnüre als Momentenpunkt, so muß für ihn das Moment der Bewegungsgröße vorläufig noch Null bleiben, da die Schnurspannung durch den Momentenpunkt geht und die einzige andere äußere Kraft an der Schaukel, das Eigengewicht, zunächst ebenfalls noch. Der einen Drehung muß daher eine entgegengesetzte entsprechen und diese besteht in einer Drehung des ganzen Punkthaufens um den Aufhängepunkt, womit die gewünschte Pendelbewegung zunächst einmal eingeleitet ist. — Ich begnüge mich hier mit diesen Andeutungen, möchte aber die Bewegungen, die zum Ingangsetzen der Schaukel führen, einem genaueren Nachdenken empfehlen, da das Beispiel nach manchen Richtungen hin lehrreich ist. Man mache sich namentlich auch darüber klar, daß die Schaukel überhaupt nicht ohne äußeren Anstoß in regelmäßige Pendelbewegungen gebracht werden könnte, wenn die Aufhängeschnüre unendlich lang wären. Anstatt dessen kann man, um bei praktisch zu verwirklichenden Verhältnissen zu bleiben, auch sagen, daß es nur sehr schwer und nach sehr lange fortgesetzten zweckmäßigen Bewegungen möglich wäre, Pendelschwingungen von größerem Ausschlage herbeizuführen, wenn die Schnüre sehr lang wären, wie etwa die Seile in einem Glockenturme bei festgehaltener Glocke.

§ 20. Massenausgleich bei Schiffsmaschinen nach dem Verfahren von Schlick.

In einem Kahne, der von mehreren Personen besetzt ist, kann man sehr deutlich wahrnehmen, wie jede Bewegung eines Insassen zu einer Bewegung des Fahrzeuges führt, die auf Grund der Schwerpunkts- und Flächensätze mit Berücksichtigung der besonderen Bedingungen, denen der hier als äußere Kraft auftretende Auftrieb des Wassers unterworfen ist, leicht

vorausgesehen werden kann. Man weiß auch, daß selbst unmerkliche Bewegungen, die nur in gleichen Zwischenräumen wiederholt werden, mit der Zeit zu einem starken Schaukeln des Bootes führen können. Das Boot führt dann erzwungene Schwingungen aus, die im Falle der Resonanz sehr groß werden können.

Auf einem großen Dampfschiffe macht es nichts aus, wenn einer oder mehrere Fahrgäste darin auf und ab gehen. Einerseits sind hier die bewegten Massen zu klein im Vergleiche zur Masse des ganzen Schiffes und andererseits dauert es auch zu lange, bis die herumgehenden Personen etwa von einer Schiffsseite zur anderen gelangen. Sie müßten schon sehr schnell laufen, um im gleichen Takte mit den Eigenschwingungen des Schiffes herüber und wieder hinüber gelangen zu können, um es so zu kräftigeren erzwungenen Schwingungen anzuregen.

Anders ist es aber mit den großen Dampfmaschinen, die zur Fortbewegung des Schiffes dienen. Die bewegten Teile sind hier einerseits sehr schwer, so daß sie selbst gegenüber den Massen des ganzen Schiffes nicht vernachlässigt werden können und andererseits bewegen sie sich auch mit großen Geschwindigkeiten. Es läßt sich daher leicht voraussehen, daß die Schiffe durch die Massenverschiebungen, die sich in regelmäßigem Wechsel in ihnen wiederholen, zu Schwingungen veranlaßt werden, die sich oft sehr unangenehm bemerkbar gemacht haben. Man hat daher auf Abhilfe gesonnen und diese ist in praktisch befriedigender Weise durch das von Schlick angegebene Massenausgleichsverfahren gefunden worden.

Die Forderungen, die erfüllt sein müssen, damit die bewegten Massen ganz ohne Einfluß auf die Bewegungen des Schiffes bleiben, lassen sich auf sehr einfache Weise in folgenden beiden Sätzen aussprechen:

1. Der Schwerpunkt der beweglichen Massen muß stets in relativer Ruhe zum Schiffe bleiben.
2. Der Drall der beweglichen Massen muß für

jeden auf dem Schiffe liegenden Momentenpunkt in jedem Augenblicke gleich Null sein.

Denkt man sich nämlich ein Schiff zuerst in Ruhe auf ruhigem Wasser und hierauf die Maschinen im Leerlaufe (mit abgekuppelten Schaufelrädern oder Schrauben) in Bewegung gesetzt, so muß nach dem Schwerpunktssatze der Gesamtschwerpunkt des ganzen Punkthaufens nach wie vor in Ruhe bleiben. Wenn nun dafür gesorgt ist, daß sich auch der Schwerpunkt der beweglichen Teile für sich genommen nicht verschiebt, so folgt, daß sich auch der Schwerpunkt des Schiffskörpers nicht verschieben kann. — Ferner muß nach dem Flächensatze der Drall des ganzen Punkthaufens für jeden Momentenpunkt gleich Null bleiben, da sich die äußeren Kräfte (Gewicht und Auftrieb) gegenseitig aufheben. Wird diese Bedingung aber schon von den beweglichen Massen für sich genommen erfüllt, so muß auch das Moment der Bewegungsgröße des Schiffskörpers dauernd gleich Null bleiben. Das ist aber für den als starren Körper aufzufassenden Schiffskörper nur möglich, wenn er keine Rotationsbewegung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse annimmt.

Hiermit ist bewiesen, daß der Schiffskörper, der vorher in Ruhe war, auch dauernd in Ruhe bleibt, wenn die Maschinen zu laufen beginnen. Eine Massenausgleichung, die die vorher aufgestellten beiden Forderungen erfüllt, ist demnach eine vollkommene. — Es möge hier die Bemerkung eingeschaltet werden, daß der Flächensatz (bis vor kurzem wenigstens) in technischen Kreisen längst nicht die Beachtung gefunden hat, die er in Wirklichkeit verdient. Am deutlichsten geht dies aus dem Umstande hervor, daß in den zahlreichen Arbeiten, die über den Massenausgleich bald nach seiner Einführung in deutschen und ausländischen Zeitschriften erschienen sind, niemals von dem Flächensatze Gebrauch gemacht wurde. Man kann diesen Satz freilich auch vermeiden; er ist niemals unentbehrlich, läßt sich vielmehr stets, wenn es verlangt wird, durch die Anwendung anderer Sätze ersetzen. Und zwar ist es im vorliegenden Falle das Prinzip von d'Alembert, mit dessen Hilfe

die Aufgabe ebenfalls ohne Schwierigkeit gelöst werden kann. Bringt man nämlich an den bewegten Maschinenteilen die Trägheitskräfte an, so müssen diese für jede Stellung der Maschine den Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte an einem starren Körper genügen, wenn der Massenausgleich vollkommen sein soll. Für die rasche und übersichtliche Durchführung der Rechnungen und für die anschauliche Fassung ihrer Ergebnisse eignet sich aber bei diesem Beispiele der Flächensatz besser, als das d'Alembertsche Prinzip. Zugleich sei noch bemerkt, daß man überhaupt in vielen Fällen bei der Behandlung einer Aufgabe die Wahl hat, ob man sich dazu des Prinzips von d'Alembert oder des Flächensatzes bedienen will. Dabei ist aber nicht immer der Flächensatz im Vorteile. Man muß sich vielmehr mit beiden wichtigen Hilfsmitteln vollständig vertraut machen, um im einzelnen Falle das am schnellsten zum Ziele führende anwenden zu können.

Das Schlicksche Verfahren entspricht den aufgestellten Forderungen nicht streng, sondern nur annähernd. Es läßt sich ferner (von gewissen Ausnahmefällen abgesehen) nur an Maschinen zur Anwendung bringen, die mindestens vier Zylinder haben. Solche kommen bei den großen Dampfmaschinen mit dreistufiger Expansion besitzen, ohnehin gewöhnlich vor, da an Stelle eines einzigen Niederdruckzylinders, der zu groß ausfallen würde, besser zwei genommen werden. Bei den großen Schnelldampfmaschinen hat man neuerdings auch Maschinen mit sechs Zylindern ausgeführt. In diesem Falle kann man sich dem vollkommenen Massenausgleich noch mehr nähern, als bei vier Zylindern. Hier genügt es aber, wenn ich das Verfahren für den einfachsten Fall der vierzylindrigen Maschinen bespreche.

Abb. 23 gibt eine schematische Darstellung der Maschine in zwei Ansichten, mit den Zylindern I bis IV. Geachtet wird nur auf die Bewegungskomponenten der Kolben, Kolbenstangen, Pleuelstangen und Kurbeln in der Richtung der Zylinderachsen. Die dazu senkrechten Bewegungskomponenten führen gegenüber den anderen nur zu kleinen Bewegungsgrößen, die ebenso

Von der Winkelgeschwindigkeit u der Schiffswelle wird angenommen, daß sie als konstant betrachtet werden könne. Gestützt wird diese Annahme durch die Überlegung, daß schon geringe Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit u zu erheblichen Änderungen in dem Drucke zwischen der Schiffschraube und dem Fahrwasser führen, also auch eine große Mehrarbeit des Dampfes gegenüber der durchschnittlichen verlangen. Wie groß die Schwankungen von u sind, die etwa erwartet werden können, soll jetzt nicht weiter untersucht, jedenfalls soll aber an der Schickschen Annahme festgehalten werden.¹⁾

Für die Bewegungsgröße der Masse M_1 hat man

$$M_1 v_1 = M_1 u r_1 \sin \varphi_1.$$

Die Richtung ist hier nicht besonders hervorgehoben; sie ist in jedem Falle als lotrecht anzusehen und geht nach oben oder unten, je nachdem $\sin \varphi$ positiv oder negativ ist. — Für die Bewegungsgröße der zum Zylinder II gehörigen verschieblichen Massen erhält man ebenso

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 \sin \varphi_2$$

oder, wenn man den konstanten Winkelunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$ mit α_2 bezeichnet,

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_2 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_2)$$

und ebenso für die Massen M_3 und M_4 .

Die Bedingung, daß der Schwerpunkt der verschieblichen Massen in Ruhe bleiben soll, kommt darauf hinaus, daß die geometrische Summe der Bewegungsgrößen fortwährend gleich Null ist. Mit Rücksicht darauf, daß hier nur gleich oder entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten in Betracht zu ziehen sind, was schon durch die Vorzeichen von $\sin \varphi_1$, $\sin \varphi_2$ usf. berücksichtigt ist, haben wir daher die Gleichung

1) Im übrigen kommt es auf die Veränderlichkeit von u , wie aus den Sätzen 1. und 2. auf S. 154 hervorgeht, solange es sich nur um die Frage des Massenausgleichs handelt, überhaupt nicht an. Wenn jene Bedingungen für irgendeine Geschwindigkeit erfüllt sind, bestehen sie auch bei jeder anderen und daher auch bei einer beliebig veränderlichen Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned}
 M_1 u r_1 \sin \varphi_1 + M_2 u r_2 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_2 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_2) + \\
 + M_3 u r_3 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_3 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_3) + \\
 + M_4 u r_4 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_4 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_4) = 0
 \end{aligned}$$

Ordnen wir nach $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ und streichen den gemeinsamen Faktor u , so geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi_1 \{ M_1 r_1 + M_2 r_2 \cos \alpha_2 + M_3 r_3 \cos \alpha_3 + M_4 r_4 \cos \alpha_4 \} + \\
 + \cos \varphi_1 \{ 0 + M_2 r_2 \sin \alpha_2 + M_3 r_3 \sin \alpha_3 + M_4 r_4 \sin \alpha_4 \} = 0.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß für jede Kurbelstellung, also für jeden Wert des Winkels φ_1 erfüllt sein, damit der Schwerpunkt jederzeit in Ruhe bleibe. Dazu gehört, daß die beiden Klammerwerte einzeln verschwinden. Wir gelangen damit zu zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Konstanten der Maschine, die sich kürzer in der Form

$$\Sigma M r \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r \sin \alpha = 0 \quad (106)$$

anschreiben lassen. Die Summierung erstreckt sich hierbei jedesmal auf alle vier Massen und Winkel, α_1 ist gleich Null zu setzen, indem unter α_n nach den vorausgehenden Festsetzungen immer der Winkel zu verstehen ist, den die n te Kurbel mit der ersten bildet (diese Winkel im Sinne der Umlaufrichtung der Maschine gezählt). — Selbstverständlich bleiben übrigens die Bedingungsgleichungen (106) auch für Maschinen mit beliebig vielen Zylindern bestehen, von denen verlangt wird, daß keine Schwerpunktsverschiebungen vorkommen, solange man nur einen Massenausgleich erster Ordnung herbeiführen will. Für einen Ausgleich zweiter Ordnung wären dagegen die vorhergehenden Betrachtungen unter Zugrundelegung von Gl. (105) an Stelle von (104) in derselben Weise zu wiederholen und die Gleichungen (106) durch vier Gleichungen zu ersetzen, in die die Bedingungsgleichung für den Schwerpunkt zerfällt, wenn sie wiederum für jeden Wert des Winkels φ_1 erfüllt sein soll.

Wir bilden jetzt die statischen Momente der Bewegungsgrößen. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig, denn wenn der Schwerpunkt ruht, ist, wie wir früher fanden, das Moment für jeden Momentenpunkt gleich groß. —

Wir wählen den in Abb. 23 mit O bezeichneten Punkt oder überhaupt irgendeinen Punkt auf der Achse des Zylinders I. Das statische Moment der Bewegungsgröße der Massen I verschwindet für diesen Momentenpunkt. Das Moment für II ist

$$M_2 v_2 a_2 = M_2 u r_2 a_2 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_2 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_2),$$

wobei mit a_2 , wie aus Abb. 23 ersichtlich, der Abstand der Zylinderachse II von der Zylinderachse I bezeichnet ist. Die Richtung des Moments ist nicht besonders ersichtlich gemacht; sie steht in jedem Falle senkrecht zu der Ebene, in der alle vier Zylinderachsen enthalten sind und zwischen der Richtung nach vorn oder hinten wird durch das Vorzeichen des vorausgehenden Ausdrucks schon unterschieden. — Wenn die Summe der Momente der Bewegungsgrößen für den Momentenpunkt O und hiermit auch für jeden beliebigen Momentenpunkt verschwinden soll, muß auch die algebraische Summe der nach dem vorigen Muster gebildeten Ausdrücke für alle Massen gleich Null sein. Ordnen wir wieder wie vorher nach $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$, so lautet die Gleichung

$$\sin \varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \cos \alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \cos \alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \cos \alpha_4\} + \\ + \cos \varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \sin \alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \sin \alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \sin \alpha_4\} = 0$$

und da diese für jedes φ_1 erfüllt sein soll, zerfällt sie in die beiden Bedingungsungleichungen

$$\Sigma M r a \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r a \sin \alpha = 0. \quad (107)$$

Auch hier muß man sich die Summierung wieder auf alle vier Zylinder erstreckt denken; für die erste Zylinderachse ist nämlich sowohl a_1 als α_1 gleich Null und hiermit fallen die zugehörigen Ausdrücke, wie aus der vorigen Schreibweise zu ersehen, von selbst fort.

Das Schlichsche Verfahren beruht nun darauf, die Winkel $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ und die Abstände $a_2 a_3 a_4$, die dadurch freilich noch nicht völlig bestimmt sind, jedenfalls so zu wählen, daß die Gleichungen (106) und (107) erfüllt werden. Die Massen M und die Kurbelhalbmesser r sind bei der Vornahme des Massenausgleichs durch andere Rücksichten bereits als vorgeschrieben zu betrachten. Die drei Winkel α sind dagegen zunächst ganz

zur Verfügung des Konstrukteurs und von den drei Abständen a wenigstens die Verhältnisse $\frac{a_3}{a_2}$ und $\frac{a_4}{a_2}$, die ja auch in der Tat aus den Gl. (107) allein ermittelt werden können. Einer von den Winkeln α kann also willkürlich (oder auf Grund anderer Anforderungen) gewählt werden. Dann folgen die beiden anderen aus den Gl. (106) und hierauf die Abstandsverhältnisse aus den Gl. (107). Man wird natürlich die Wahl des ersten Winkels α so einrichten müssen, daß die sich aus Gl. (107) ergebenden Abstandsverhältnisse auch wirklich ausgeführt werden können. Wenn nämlich etwa $\frac{a_4}{a_2}$ sehr groß aus der Rechnung gefunden würde, so ließe sich dies nicht ausführen, weil für a_3 ein gewisses Mindestmaß wegen der Abmessungen der Maschinen und für a_4 ein gewisses Höchstmaß wegen der Dimensionen des Schiffes vorgeschrieben ist.

Die sogenannten Schlingerbewegungen, d. h. die pendelnden Bewegungen des Schiffes werden dann zustande kommen, wenn die vorher unter 2. angeführte Bedingung, also näherungsweise wenn die Gl. (107) nicht erfüllt sind. Man erkennt hieraus, daß gerade auf diese Gleichungen viel Wert zu legen ist. Den Schwerpunkt unveränderlich festzuhalten, hat man sich auch früher schon öfters bemüht; die große Bedeutung der Gl. (107) für einen praktisch befriedigenden Massenausgleich hat aber erst Schlick erkannt und damit einen wichtigen Fortschritt im Baue der großen Ozeandampfer herbeigeführt. — Zugleich erkennt man übrigens leicht aus den Gl. (106) und (107), daß eine Maschine mindestens vier Zylinder haben muß, wenn der Ausgleich erster Ordnung allgemein möglich sein soll.

Anmerkung. Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß die ganze Maschine ein Gestell hat, das hinreichend widerstandsfähig ist, um die zwischen den einzelnen Teilen auftretenden inneren Kräfte ohne merkliche Formänderung übertragen zu können. Anderenfalls würden auch bei einem vollkommenen Massenausgleiche Schwingungen entstehen können, die nicht in Bewegungen des Schiffes als starrer Körper, sondern in Formänderungsbewegungen des Schiffskörpers bestehen würden.

§ 21. Anwendung des Flächensatzes auf die Theorie der Turbinen.

Während des gleichförmigen Ganges einer Turbine besitzt der aus dem Laufrade samt Welle und Wasserinhalt bestehende Punkthaufen stets dieselbe Bewegung. Daher behält auch der auf die Umdrehungsachse bezogene Drall B dieses Punkthaufens immer denselben Wert, falls man in jedem Augenblicke immer jene Wasserteilchen in Betracht zieht, die sich grade im Laufrade befinden. Bei der Anwendung des Flächensatzes kommt es aber nicht auf den in dieser Weise berechneten Drall an, sondern auf jenen, der stets auf dieselben materiellen Punkte bezogen wird. Dieser erfährt wegen des Weiterströmens der Wassermasse durch die Turbine eine Änderung, die für ein Zeitelement dt berechnet werden soll.

Bezeichnet man mit M die Masse des die Turbine in der Zeiteinheit durchströmenden Wassers, so tritt während dt eine Wassermasse Mdt mit irgendeiner absoluten Geschwindigkeit v_1 in das Laufrad ein und eine ebenso große Masse verläßt das Rad mit einer Geschwindigkeit v_2 . Die Änderung dB des auf dieselben Massen wie zu Anfang von dt bezogenen Dralls ist dann, da sich im übrigen nichts geändert hat, gleich dem Unterschiede zwischen den statischen Momenten der Bewegungsgrößen für die austretende und für die eintretende Wassermasse Mdt .

Am einfachsten ermittelt man diese Momente, indem man die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf die Richtungen der zugehörigen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufrads projiziert. Bezeichnet man diese Projektionen mit $v_1 \cos \alpha_1$ und $v_2 \cos \alpha_2$ (wobei also unter α_1 und α_2 die Winkel zwischen den Richtungen der v und der Bewegungsrichtung des Laufrads an der gleichen Stelle zu verstehen sind) und die Abstände von der Umdrehungsachse mit r_1 und r_2 , so hat man

$$dB = Mdt(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1).$$

Nach dem Flächensatze ist dann das ebenfalls auf diese Umdrehungsachse bezogene statische Moment K der äußeren Kräfte,

die (etwa durch Vermittlung einer aufgekeilten Riemenscheibe) auf die Laufradwelle übertragen werden müssen, um diese in gleichförmigem Gange zu unterhalten,

$$K = \frac{dB}{dt} = M(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1). \quad (108)$$

Aus K folgt die Arbeit A , die von der Turbine in der Zeiteinheit nach außen hin abgegeben wird, durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit u , also

$$A = Mu(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1). \quad (109)$$

Durch einfache Umrechnungen, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, kann man die absoluten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auch in den Relativgeschwindigkeiten gegen das Laufrad in Verbindung mit den Umfangsgeschwindigkeiten ur_1 und ur_2 des Laufrads ausdrücken. Die in dieser Weise umgeformte Gleichung wird von Zeuner als die erste Hauptgleichung der Turbinentheorie bezeichnet. Eine zweite Hauptgleichung, die zur vorigen hinzutreten muß, um alle in der Aufgabe vorkommenden Größen berechnen zu können, erhält man nach Zeuner, indem man für A noch einen zweiten Ausdruck auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft aufstellt und ihn dem vorigen gleichsetzt. Aus der so erhaltenen zweiten Hauptgleichung berechnet man die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser das Rad durchströmt und hierauf nach der ersten Hauptgleichung die Leistung A der Turbine, auf deren Ermittlung es namentlich ankommt.

Die weitere Durchführung der Rechnung würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen; es handelte sich hier nur darum, zu zeigen, auf wie einfache Art man mit Hilfe des Flächensatzes zur ersten Hauptgleichung gelangen kann, die sonst auf viel umständlicherem Wege abgeleitet wird.

Die Aufgaben

zu diesem Abschnitte sind mit denen der beiden folgenden vereinigt und am Schlusse des vierten Abschnitts abgedruckt.

Dritter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers.

§ 22. Das Trägheitsellipsoid.

Schon früher haben wir wiederholt gesehen, daß für die Drehbewegungen eines starren Körpers das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment eine ähnliche Bedeutung hat, wie die Masse für die Bewegung eines materiellen Punktes. Hierbei besteht jedoch der wesentliche Unterschied, daß die Masse für alle Bewegungsrichtungen denselben unveränderlichen Wert behält, während das Trägheitsmoment für verschiedene Richtungen der durch den Schwerpunkt gezogenen Drehachsen ganz verschiedene Werte annimmt. Diese Abhängigkeit zu untersuchen, soll unsere nächste Aufgabe bilden. Für die Trägheitsmomente von Querschnittsflächen in bezug auf alle Achsen, die in der Ebene des Querschnitts enthalten sind, ist diese Aufgabe schon im dritten Bande (§ 19, S. 88 d. 3. Aufl.) gelöst worden. Damit allein kommen wir aber in der Dynamik des starren Körpers nicht aus und wir müssen daher jene früheren Betrachtungen entsprechend ergänzen.

Wir wählen irgendeinen Punkt O auf dem starren Körper aus und nehmen an, daß der Körper in einem bestimmten Augenblicke eine Drehbewegung um irgendeine durch den Punkt O gehende Achse ausführe. Die Winkelgeschwindigkeit sei, als gerichtete Größe aufgefaßt, mit \mathbf{u} bezeichnet. Die Richtung von \mathbf{u} gibt die Richtung der Drehachse und der Pfeil von \mathbf{u} den Umdrehungssinn an, wie es schon im ersten Bande (S. 120 d. 3. Aufl.) ausführlich auseinandergesetzt wurde. Bei den wichtigsten Anwendungen, die von den nachfolgenden Entwicklungen gemacht werden sollen, fällt der Punkt O mit dem Schwerpunkte S zusammen. Auf diesen Fall bezieht sich

auch die nebenstehende Abb. 24, in der \mathbf{u} in der besprochenen Weise von S aus abgetragen ist. Indessen könnte an Stelle von S auch irgendein anderer Punkt O des Körpers treten, ohne daß dadurch an der Gültigkeit der nachstehenden Betrachtungen etwas geändert würde.

Der Radiusvektor, den man von O aus nach irgendeinem Massenteilchen m des starren Körpers ziehen kann, sei mit \mathbf{r} und die augenblickliche Geschwindigkeit von m mit \mathbf{v} bezeichnet. Dann ist nach Bd. I, Gl. (58)

$$\mathbf{v} = -\nabla \mathbf{u} \mathbf{r},$$

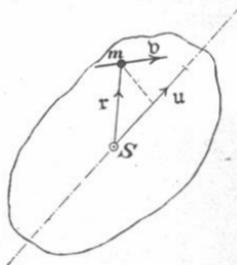


Abb. 24.

wobei nur zu beachten ist, daß der damals mit \mathbf{r}' bezeichnete Vektor jetzt \mathbf{r} geschrieben ist.

Wir berechnen jetzt die lebendige Kraft L des Körpers bei dem vorausgesetzten Bewegungszustande. Allgemein hat man

$$L = \sum \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2,$$

und durch Einsetzen des Wertes von \mathbf{v} geht dies über in

$$L = \frac{1}{2} \sum m (\nabla \mathbf{u} \mathbf{r})^2.$$

Dieser Ausdruck kann noch auf verschiedene Art weiter umgestaltet werden. Bezeichnet man die zu \mathbf{u} senkrecht stehende Komponente von \mathbf{r} , also den rechtwinkligen Abstand der Masse m von der Drehachse mit p , so erhält man für das Quadrat des äußeren Produkts aus \mathbf{u} und \mathbf{r} einfach $u^2 p^2$, wobei u den Absolutwert von \mathbf{u} bedeutet. Hiermit findet man

$$L = \frac{1}{2} u^2 \sum m p^2 = \frac{1}{2} u^2 \Theta, \quad (110)$$

wenn das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die gegebene Drehachse mit Θ bezeichnet wird.

Andererseits denken wir uns ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem XYZ mit dem Ursprunge in O gezogen. Zerlegen wir die Vektoren in ihre Komponenten nach diesem

Koordinatensystem, so erhalten wir durch Anwendung der in Gl. (53), Bd. I, S. 94 d. 3. Aufl. gegebenen Rechenvorschrift

$$\mathbf{v} = -\sqrt{u} \mathbf{r} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 u_2 u_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(u_3 y - u_2 z) + \mathbf{j}(u_1 z - u_3 x) + \\ + \mathbf{k}(u_2 x - u_1 y),$$

wobei die Koeffizienten von $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ die Komponenten von \mathbf{v} bilden. Daraus ergibt sich für das Quadrat der Geschwindigkeit der Ausdruck

$$\mathbf{v}^2 = (u_3 y - u_2 z)^2 + (u_1 z - u_3 x)^2 + (u_2 x - u_1 y)^2,$$

und wenn man dies in L einsetzt, ausquadriert und die Summe in ihre einzelnen Glieder zerlegt, erhält man

$$L = \frac{1}{2} u_1^2 (\Sigma m z^2 + \Sigma m y^2) + \frac{1}{2} u_2^2 (\Sigma m z^2 + \Sigma m x^2) + \\ + \frac{1}{2} u_3^2 (\Sigma m y^2 + \Sigma m x^2) - u_1 u_2 \Sigma m x y - u_1 u_3 \Sigma m x z - \\ - u_2 u_3 \Sigma m y z.$$

Nun ist aber nach dem pythagoreischen Lehrsatze $y^2 + z^2$ gleich dem Quadrate des senkrechten Abstandes der Masse m von der X -Achse. Bezeichnen wir also das Trägheitsmoment des starren Körpers für die X -Achse mit Θ_x , so wird

$$\Theta_x = \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2. \quad (111)$$

Außerdem setzen wir, wie früher schon in der Festigkeitslehre,

$$\Phi_{xy} = \Sigma m x y$$

und nennen Φ_{yz} das Zentrifugalmoment des Körpers für die X - und Y -Achse. Hiermit geht der Ausdruck für L über in

$$L = \frac{1}{2} u_1^2 \Theta_x + \frac{1}{2} u_2^2 \Theta_y + \frac{1}{2} u_3^2 \Theta_z - u_1 u_2 \Phi_{xy} - u_1 u_3 \Phi_{xz} - \\ - u_2 u_3 \Phi_{yz}. \quad (112)$$

Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (110), in der

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

gesetzt werden kann, gestattet das zu irgendeiner Achse \mathbf{u} gehörige Trägheitsmoment Θ in den auf die Koordinatenachsen bezogenen Momenten Θ und Φ auszudrücken. Be-

quemer ist es aber, den Zusammenhang zwischen diesen Größen durch eine einfache geometrische Darstellung zum Ausdruck zu bringen.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns eine große Zahl von Strahlen durch den Punkt O gelegt und für jeden dieser Strahlen ermittelt denken, mit welcher Winkelgeschwindigkeit der starre Körper um diesen Strahl als Achse rotieren müßte, wenn die zugehörige lebendige Kraft einen bestimmt vorgeschriebenen Wert L_0 annehmen sollte. Auf jedem Strahle sei die aus dieser Bedingung ermittelte Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} , so wie es in Abb. 24 für einen von ihnen geschehen war, als Vektor abgetragen. Die Endpunkte aller dieser \mathbf{u} liegen auf einer Fläche, die den Punkt O von allen Seiten her umgibt. Die Koordinaten eines Punktes dieser Fläche im Koordinatensysteme XYZ sind $u_1 u_2 u_3$ und Gl. (112) stellt daher, wenn wir uns für L den beliebig gewählten, aber unveränderlichen Wert L_0 eingesetzt denken, die Gleichung der Fläche dar. Sie ist für die $u_1 u_2 u_3$ vom zweiten Grade. Die Fläche muß daher, da wir außerdem wissen, daß sie sich nach keiner Richtung hin ins Unendliche erstrecken kann, ein Ellipsoid sein. Der Punkt O ist der Mittelpunkt des Ellipsoids, weil die Gleichung immer noch erfüllt ist, wenn man darin $u_1 u_2 u_3$ durch $-u_1, -u_2, -u_3$ ersetzt.

Führen wir ferner in Gl. (110) an Stelle des Trägheitsmoments Θ den Trägheitshalbmesser i ein, indem wir

$$\Theta = Mi^2$$

setzen, also unter M die Masse des ganzen Körpers verstehen, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{2} u^2 i^2 M. \quad (113)$$

Hiernach ist jeder Halbmesser u des Ellipsoids, für das L den konstanten Wert L_0 hat, dem auf die gleiche Achse bezogenen Trägheitshalbmesser i umgekehrt proportional. Wegen dieses Zusammenhangs mit den Trägheitsmomenten wird das Ellipsoid als das Trägheitsellipsoid bezeichnet.

Im allgemeinen ist das Ellipsoid dreiachsig und seine drei

Hauptachsen heißen zugleich die drei Hauptträgheitsachsen des Körpers für den Punkt O . Das Ellipsoid kann aber auch ein Umdrehungsellipsoid sein, und dann wird jede in der Äquator-ebene liegende Achse als eine Hauptträgheitsachse bezeichnet. Geht das Ellipsoid endlich in eine Kugel über, so kann jede Achse als eine Hauptachse angesehen werden.

In allen Fällen gilt aber für eine Hauptachse die Beziehung

$$\delta \Theta = 0, \quad (114)$$

wenn man unter $\delta \Theta$ die Änderung versteht, die das Trägheitsmoment beim Übergange von einer Achse zu einer ihr unendlich nahe benachbarten erfährt. Gl. (114) gibt nämlich die Bedingung dafür an, daß das Trägheitsmoment für die betreffende Achse ein Maximum oder Minimum oder im Falle der Kugel, daß Θ konstant ist.

Bisher verstanden wir unter XYZ ein beliebig orientiertes Koordinatensystem. Nachdem wir aber erkannt haben, daß man stets mindestens auf eine Art drei zu einer senkrecht stehende Hauptachsen angeben kann, ist es für die weitere Untersuchung von Vorteil, die drei Koordinatenrichtungen mit diesen Hauptachsen zusammenfallen zu lassen. Dann vereinfacht sich auch Gl. (112). Um dies zu erkennen, wollen wir von irgendeinem Punkte des Trägheitsellipsoids zu einem Nachbarpunkt übergehen, der ebenfalls auf dem Ellipsoid liegt und die Änderungen, die die Koordinaten $u_1 u_2 u_3$ bei diesem Übergange erfahren mit $\delta u_1 \delta u_2 \delta u_3$ bezeichnen. Mit $L = L_0$ ist Gl. (112) für jeden Punkt der Fläche erfüllt und zwischen den δu muß daher die Beziehung bestehen, die aus Gl. (111) durch Bildung der Differentialien hervorgeht, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 \delta u_1 \Theta_x + u_2 \delta u_2 \Theta_y + u_3 \delta u_3 \Theta_z - u_1 \delta u_2 \Phi_{xy} - u_2 \delta u_1 \Phi_{xy} - \\ - u_1 \delta u_3 \Phi_{xz} - u_3 \delta u_1 \Phi_{xz} - u_2 \delta u_3 \Phi_{yz} - u_3 \delta u_2 \Phi_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Das gilt für jede Stelle des Ellipsoids und für jeden Übergang zu einer Nachbarstelle. Wenden wir dagegen die Gleichung für einen der auf der X -Achse liegenden Punkte des Ellipsoids an, so ist $u_2 = u_3 = 0$ zu setzen und die Gleichung

vereinfacht sich zu

$$u_1 \delta u_1 \Theta_x - u_1 \delta u_2 \Phi_{xy} - u_1 \delta u_3 \Phi_{xz} = 0.$$

Da wir uns aber dafür entschieden hatten, die X-Achse mit einer Hauptachse zusammenfallen zu lassen, haben wir an dieser Stelle außerdem auch noch

$$\delta u_1 = 0$$

zu setzen, womit die Gleichung übergeht in

$$\delta u_2 \Phi_{xy} + \delta u_3 \Phi_{xz} = 0.$$

Das muß gelten für jede Richtung, in der wir vom Scheitelpunkt zu einem Nachbarpunkt übergehen, also für jedes Verhältnis von δu_2 zu δu_3 . Daraus folgt, daß zugleich

$$\Phi_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_{xz} = 0$$

sein muß. Hiermit ist bewiesen, daß die Zentrifugalmomente für die Hauptachsen gleich Null sind, denn derselbe Schluß wie für die X-Achse würde sich auch für die anderen Hauptachsen wiederholen lassen.

Wenn die Koordinatenachsen mit Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, vereinfacht sich daher Gl. (112) zu

$$L = \frac{1}{2} u_1^2 \Theta_x + \frac{1}{2} u_2^2 \Theta_y + \frac{1}{2} u_3^2 \Theta_z. \quad (115)$$

Bezeichnet man die Winkel, die irgendeine Achse mit den drei Hauptachsen bildet mit $\alpha\beta\gamma$, so folgt für das dieser Achse zugehörige Θ aus dem Vergleiche der Gleichungen (110) und (115)

$$\Theta = \Theta_x \cos^2 \alpha + \Theta_y \cos^2 \beta + \Theta_z \cos^2 \gamma. \quad (116)$$

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt haben, vollständig gelöst.

§ 23. Drall und Drall-Ellipsoid.

So wie vorher für die lebendige Kraft bilden wir jetzt auch den Ausdruck für den Drall \mathfrak{B} des mit der Winkelgeschwindigkeit \mathfrak{n} um den beliebigen Punkt O rotierenden starren Körpers, und zwar für den Punkt O selbst als Momentenpunkt. Hierbei mag jedoch gleich bemerkt werden,

daß, wenn O mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt, die Wahl des Momentenpunktes gleichgültig ist, da, wie wir in § 18 unter b) fanden, der Drall für jeden Momentenpunkt denselben Wert annimmt, wenn der Schwerpunkt ruht.

Allgemein war nach der Definition des Dralls

$$\mathfrak{B} = \Sigma V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r},$$

und wenn man für \mathbf{v} den hier zutreffenden Wert einsetzt, geht dies über in

$$\mathfrak{B} = - \Sigma V (m V \mathbf{u} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$$

oder nach Vertauschung der Faktoren in dem einen der äußeren Produkte

$$\mathfrak{B} = \Sigma m V \mathbf{r} V \mathbf{u} \mathbf{r}. \quad (117)$$

Man muß also zunächst das äußere Produkt aus \mathbf{u} und \mathbf{r} bilden, dann dieses selbst wieder als zweiten Faktor eines äußeren Produkts ansehen, dessen erster Faktor \mathbf{r} ist, um hierauf nach Multiplikation mit m und Summierung über alle Teile m des Körpers \mathfrak{B} zu erhalten. Das ist eine sehr umständliche Rechenvorschrift, die sich aber durch eine weit einfachere ersetzen läßt. Nach einer der bekanntesten Formeln der Vektoralgebra kann nämlich, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ beliebige Vektoren bedeuten, stets

$$V \mathfrak{A} V \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \quad (118)$$

gesetzt werden. Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei Gliedern, von denen das erste den Vektor \mathfrak{B} als Faktor enthält und daher mit ihm gleichgerichtet ist; denn der andere Faktor $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist ein inneres Produkt aus \mathfrak{A} und \mathfrak{C} und als solches eine Größe ohne Richtung. Ebenso ist das zweite Glied mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichtet.

Bisher ist die Formel (118) in diesem Buche nicht vorgekommen. Ich werde daher nicht unterlassen dürfen, hier einen Beweis dafür einzuschieben. Erfreulicherweise hat ja allerdings das Rechnen mit Vektoren in den letzten Jahren sehr zugenommen, und im Zusammenhange damit hat man auch damit begonnen, die einfachsten Rechengesetze für Vektoren in

den mathematischen Vorlesungen an einzelnen Hochschulen zu behandeln. Wenn das schon allgemein eingeführt wäre, könnte ich von einem Beweise für Formel (118), der an sich von rein mathematischer Art ist und mit der Dynamik sachlich so wenig zu tun hat, wie irgendeine andere mathematische Formel, absehen. So wie die Dinge heute liegen, muß ich mich aber doch zur Wiedergabe des Beweises entschließen.

Nach Gl. (53), Bd. I, S. 94 der 3. Aufl. ist

$$V\mathfrak{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(B_2C_3 - B_3C_2) + \mathbf{j}(B_3C_1 - B_1C_3) + \mathbf{k}(B_1C_2 - B_2C_1)$$

und hiernach auch

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2C_3 - B_3C_2) & (B_3C_1 - B_1C_3) & (B_1C_2 - B_2C_1) \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante, so erhält man zunächst für die \mathbf{i} -Komponente

$$\mathbf{i}(A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_3B_1C_3),$$

oder wenn man $A_1B_1C_1$ einmal als positives und einmal als negatives Glied zufügt,

$$\mathbf{i}\{B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)\},$$

d. h. wenn man sich der Bedeutung der in den runden Klammern stehenden Summen erinnert

$$\mathbf{i}\{B_1 \cdot \mathfrak{AC} - C_1 \cdot \mathfrak{AB}\}.$$

Genau ebenso findet man für die \mathbf{j} -Komponente

$$\mathbf{j}\{B_2 \cdot \mathfrak{AC} - C_2 \cdot \mathfrak{AB}\}$$

und entsprechend auch die letzte Komponente. Faßt man aber alle drei Komponenten wieder zusammen, so erhält man nach Herausheben der drei gemeinsamen Faktoren

$$\mathfrak{AC} \cdot (\mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3) - \mathfrak{AB} \cdot (\mathbf{i}C_1 + \mathbf{j}C_2 + \mathbf{k}C_3),$$

d. h. genau den in Gl. (118) angegebenen Wert. Hiermit ist der verlangte Beweis erbracht.

Kehren wir nach dieser Unterbrechung wieder zu Gl. (117) zurück, so geht sie durch Anwendung der in Gl. (118) ausgesprochenen Rechenvorschrift über in

$$\mathfrak{B} = \Sigma m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{ur}),$$

oder nach Spaltung des Ausdrucks in zwei Glieder in

$$\mathfrak{B} = \mathbf{u} \cdot \Sigma m \mathbf{r}^2 - \Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{ur}. \quad (119)$$

Diese Gleichung ist sehr wichtig und wir müssen sie daher noch näher im einzelnen besprechen.

Der Drall \mathfrak{B} stellt sich hiernach als eine geometrische Summe aus zwei Gliedern dar. Hiervon ist das erste Glied gleichgerichtet mit \mathbf{u} und auch proportional mit der absoluten Größe der Winkelgeschwindigkeit. Der andere Faktor des ersten Gliedes ist richtungslos und stets positiv; er stellt das polare Trägheitsmoment des Körpers für den Punkt O dar. Setzt man

$$\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und beachtet die durch Gl. (111) ausgesprochenen Beziehungen, so erhält man

$$\Sigma m \mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}(\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z). \quad (120)$$

Wenn man z. B. imstande ist, die Trägheitsmomente des Körpers für die drei durch den Punkt O gehenden Hauptachsen anzugeben, kennt man hiernach das erste Glied in dem Ausdrucke für \mathfrak{B} vollständig. — Das zweite Glied macht etwas mehr Schwierigkeiten; insbesondere läßt sich nicht unmittelbar erkennen, in welcher Richtung es geht. Man kann es indessen auch leicht auf die schon in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft vorkommenden Summenausdrücke zurückführen. Für \mathbf{ur} hat man nämlich in der Koordinatendarstellung

$$\mathbf{ur} = u_1 x + u_2 y + u_3 z$$

und die X -Komponente von $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{ur}$ geht daher über in

$$\Sigma m x(u_1 x + u_2 y + u_3 z).$$

Wenn die Koordinatenachsen mit den Trägheitshauptachsen zusammenfallen, heben sich die Zentrifugalmomente fort und

man behält

$$u_1 \Sigma m x^2$$

und entsprechend bei den anderen Komponenten.

Zerlegt man auch den Drall \mathfrak{B} selbst in seine Komponenten nach den Hauptträgheitsachsen, so erhält man aus Gl. (119) zunächst für die i -Komponente, die wir mit B_1 bezeichnen

$$\begin{aligned} B_1 &= u_1 \Sigma m r^2 - u_1 \Sigma m x^2 = u_1 \Sigma m (r^2 - x^2) = \\ &= u_1 \Sigma m (y^2 + z^2) = u_1 \Theta_x. \end{aligned}$$

Im ganzen läßt sich daher \mathfrak{B} auch in der folgenden Weise darstellen:

$$\mathfrak{B} = i u_1 \Theta_x + j u_2 \Theta_y + k u_3 \Theta_z \quad (121)$$

gültig für das mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallende Koordinatensystem.

Diese Formel ist sehr nützlich. In vielen Fällen wird es aber vorzuziehen sein, an ihrer Stelle die ursprüngliche Gl. (119) zu verwenden, wenn es möglich ist, den Wert $\Sigma m r \cdot \mathbf{ur}$ auf einfache Art zu ermitteln.

Wie dies bei beliebig gegebener Körpergestalt mit hinlänglicher Genauigkeit sofort geschehen kann, möge in Anlehnung an Abb. 25 besprochen werden. Man teile den Körper durch Schnitte, die senkrecht zu \mathbf{u} gezogen sind, in eine Anzahl von Scheiben ein, so daß sich die Scheibendicke näherungsweise als unendlich klein betrachten

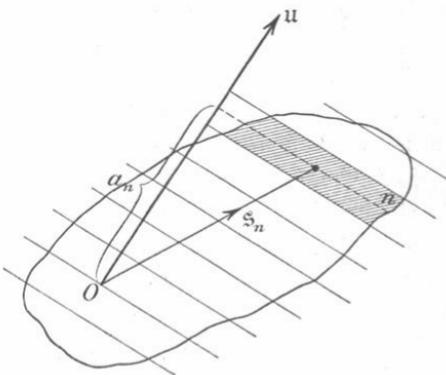


Abb. 25.

läßt. Eigentlich hätte man dazu unendlich viele Schnitte zu führen; aber der Fehler, der daraus entsteht, daß man nur eine geringe Zahl annimmt, macht nicht viel aus, wenn man die Schnitte nur sonst passend wählt. Eine der Scheiben, die in Abb. 25 schraffiert ist, möge die Ordnungsnummer n tragen. Für alle Massen m , die zu ihr gehören, hat \mathbf{ur} denselben Wert, nämlich $u a_n$, wenn mit a_n der senkrechte Abstand der

Scheibe von O bezeichnet wird. Zu der Summe $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$, die wir berechnen wollen, liefert daher die Scheibe n den Beitrag

$$u a_n \Sigma_n m \mathbf{r} = u a_n M_n \mathfrak{s}_n,$$

wenn mit \mathfrak{s}_n der nach dem Schwerpunkt der Scheibe gezogene Radiusvektor und mit M_n die Masse der Scheibe bezeichnet wird. Für jede Scheibe wird man also den Schwerpunkt aufzusuchen und hierauf den vorstehenden Ausdruck zu bilden haben. Man braucht nachher nur die geometrische Summe durch graphische Aneinanderreihung aller dieser Werte unter Zugrundelegung eines geeigneten Maßstabes zu bilden, um sofort $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ nach Richtung und Größe zu erhalten. Hierbei ist übrigens zu beachten, daß jene Abstände a , die im Sinne von \mathbf{u} hin liegen, positiv, jene aber, die nach der entgegengesetzten Richtung zählen, negativ einzusetzen sind.

Das Verfahren gestattet namentlich eine sehr schnelle ungefähre Schätzung der Richtung des Gliedes $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ vom Dralle. Man sieht z. B. sofort, daß bei einer länglichen Gestalt des Körpers, wie in Abb. 25, für einen nicht weit von der Achse liegenden Punkt O die Richtung von $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ jedenfalls nicht viel von der Figurenachse abweichen kann, während das erste Glied von \mathfrak{B} in die Richtung von \mathbf{u} fällt. Hieraus läßt sich auch erkennen, in welchem Sinne die Richtung von \mathfrak{B} von der Richtung von \mathbf{u} abweichen wird. Man darf dabei natürlich nicht vergessen, daß wegen des Minuszeichens vor

$\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ in Gl. (119) der Pfeil zuvor umzukehren ist. Ferner ist zu beachten, daß der Absolutwert von $\Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ jedenfalls kleiner ist, als der des anderen Gliedes $\mathbf{u} \Sigma m \mathbf{r}^2$. Auf Grund dieser Erwägungen vermag man z. B. leicht einzuschätzen, daß bei der in Abb. 26 angedeuteten Körpergestalt zu der dort angegebenen Richtung von \mathbf{u} ungefähr die ebenfalls eingetragene Richtung von \mathfrak{B} gehören wird. Diese Bemerkungen sind deshalb von Wichtigkeit, weil bei den Anwendungen

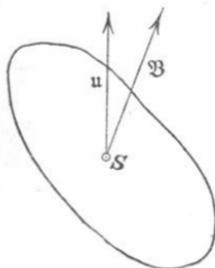


Abb. 26.

der Theorie eine ungefähre Abschätzung oft schon vollständig genügt.

Übrigens kann der Winkel, den die Richtungen von \mathfrak{B} und \mathbf{u} untereinander einschließen, unter allen Umständen nur ein spitzer, niemals ein stumpfer oder rechter sein. Man erkennt dies, wenn man das innere Produkt aus \mathfrak{B} und \mathbf{u} bildet. Dafür erhält man nach Gl. (119)

$$\mathbf{u}\mathfrak{B} = u^2 \Sigma m r^2 - \Sigma m (\mathbf{u}\mathbf{r})^2$$

oder auch, wenn man $\mathbf{u} = u\mathbf{u}_1$ setzt, also unter u den Absolutwert der Winkelgeschwindigkeit und unter \mathbf{u}_1 einen in der Richtung der Drehachse gezogenen Einheitsvektor versteht,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathfrak{B} &= u^2 (\Sigma m r^2 - \Sigma m (\mathbf{u}_1 \mathbf{r})^2) = u^2 \Sigma m (\mathbf{r}^2 - (\mathbf{u}_1 \mathbf{r})^2) = \\ &= u^2 \Sigma m p^2 = u^2 \Theta = 2L, \end{aligned} \quad (122)$$

wenn p und L in derselben Bedeutung wie im vorigen Paragraphen gebraucht werden. Da die lebendige Kraft L jedenfalls positiv und von Null verschieden ist, kann der Winkel zwischen \mathfrak{B} und \mathbf{u} nur ein spitzer sein.

Die Projektion von \mathfrak{B} auf die Drehachse sei mit B' bezeichnet. Dann ist B' zugleich der Drall bezogen auf die Drehachse als Momentenachse, wie aus der Lehre von den auf Achsen bezogenen statischen Momenten bekannt ist (vgl. § 17, Bd. I, S. 90 d. 3. Aufl.). Das innere Produkt aus \mathbf{u} und \mathfrak{B} wird gleich uB' und die vorige Gleichung geht über in

$$B' = u\Theta. \quad (123)$$

Wir haben uns ferner die Frage vorzulegen, unter welchen Umständen \mathfrak{B} und \mathbf{u} auf dieselbe Richtungslinie fallen. Das können wir am einfachsten auf Grund von Gl. (121) entscheiden. Ist z. B. $u_2 = u_3 = 0$, so folgt aus dieser Gleichung

$$\mathfrak{B} = i u_1 \Theta_x = \mathbf{u} \Theta_x,$$

d. h. Drall und Winkelgeschwindigkeit sind immer dann gleich gerichtet, wenn sich der Körper um eine Hauptträgheitsachse dreht. Allgemein lautet die Bedingung für gleiche Richtung von \mathfrak{B} und \mathbf{u} nach Gl. (121)

$$u_1 \Theta_x : u_2 \Theta_y : u_3 \Theta_z = u_1 : u_2 : u_3,$$

und diese kann für einen Körper mit dreiaxsigem Trägheitsellipsoid nur dann erfüllt sein, wenn zwei der drei Winkel-

geschwindigkeitskomponenten $u_1 u_2 u_3$ gleich Null sind, d. h. nur für eine Drehung um eine der drei Hauptachsen. Ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel, also $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z$, so sind \mathfrak{B} und \mathbf{u} stets gleich gerichtet, aber dann kann auch jede Achse als Hauptachse angesehen werden. Ist dagegen nur $\Theta_y = \Theta_z$, das Trägheitsellipsoid daher ein Umdrehungsellipsoid, so ist die Bedingung erfüllt, wenn entweder $u_2 = u_3 = 0$, oder auch wenn $u_1 = 0$ ist, während in diesem Falle u_2 und u_3 beliebige Werte haben können, d. h. also sowohl für die Umdrehungsachse des Ellipsoids als auch für jede in der Äquatorebene liegende Achse. Aber auch diese Achsen sind zugleich Hauptträgheitsachsen. Wir können daher den vorhin ausgesprochenen Satz dahin erweitern, daß Drall und Winkelgeschwindigkeit immer dann, aber auch nur dann gleich gerichtet sind, wenn sich der Körper um eine Hauptträgheitsachse dreht.

Im vorigen Paragraphen hatten wir alle möglichen Drehbewegungen um die durch O gehenden Achsen besprochen, die sämtlich zu demselben Werte L_0 für die lebendige Kraft führten. Jetzt wollen wir zu jeder dieser Bewegungen mit konstanter lebendiger Kraft auch den zugehörigen Drall ermitteln und alle diese Vektoren \mathfrak{B} nach Richtung und Größe vom Punkte O aus abtragen. Die Endpunkte aller dieser Strecken liegen auf einer Fläche, von der sich leicht zeigen läßt, daß sie ebenfalls ein Ellipsoid ist, das wir das Drall-Ellipsoid nennen wollen.

Zum Beweise dieser Behauptung mache ich zunächst darauf aufmerksam, daß \mathfrak{B} nach den Gl. (119) oder (121) linear von \mathbf{u} abhängig ist. Zerlegt man nämlich \mathbf{u} in irgend zwei Teile $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$ und berechnet die zu \mathbf{u}' und \mathbf{u}'' gehörigen Drallwerte \mathfrak{B}' und \mathfrak{B}'' , so ist auch der ganze zu \mathbf{u} gehörige Drall $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''$, wie aus den Gleichungen unmittelbar hervorgeht. Hiernach entsprechen allen Strahlen \mathbf{u} , deren Endpunkte auf einer beliebigen Geraden liegen, zugeordnete Strahlen \mathfrak{B} , deren Endpunkte ebenfalls auf einer anderen Geraden enthalten sind. Hiernach wird durch die Gleichungen (119) oder (121) jedem Punkte des Raumes (als Endpunkt von \mathbf{u} betrachtet) ein an-

derer Punkt des Raumes (als Endpunkt von \mathfrak{B}) zugeordnet in der Weise, daß eine kollineare Abbildung des Raumes entsteht. Nun lagen die Endpunkte jener \mathbf{u} , die alle zu demselben Werte L_0 für die lebendige Kraft führten, auf dem Trägheitsellipsoid und die Endpunkte aller \mathfrak{B} liegen daher auf einer Fläche, die als die kollineare Abbildung des Trägheitsellipsoids angesehen werden kann. Die kollineare Abbildung des Ellipsoids kann aber nur wieder ein Ellipsoid mit denselben Richtungen der Hauptachsen sein.

Anstatt sich auf diese Eigenschaften der kollinearen Abbildung zu stützen, kann man aber den Beweis natürlich auch unmittelbar auf Grund der Gl. (119) oder (121) führen. So erhält man aus Gl. (121) für die Komponenten von \mathfrak{B}

$$B_1 = u_1 \Theta_x; \quad B_2 = u_2 \Theta_y; \quad B_3 = u_3 \Theta_z,$$

und zwischen den Koordinaten $u_1 u_2 u_3$ des Trägheitsellipsoids besteht die Gleichung

$$\frac{u_1^2}{u_x^2} + \frac{u_2^2}{u_y^2} + \frac{u_3^2}{u_z^2} = 1,$$

wenn mit $u_x u_y u_z$ die Halbachsen des Trägheitsellipsoids bezeichnet werden. Drückt man die $u_1 u_2 u_3$ in den $B_1 B_2 B_3$ aus und setzt sie in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{B_1^2}{u_x^2 \Theta_x^2} + \frac{B_2^2}{u_y^2 \Theta_y^2} + \frac{B_3^2}{u_z^2 \Theta_z^2} = 1,$$

und das ist die Gleichung des Drallellipsoids, dessen Koordinaten $B_1 B_2 B_3$ sind. Man kann sie noch etwas einfacher schreiben, indem man bedenkt, daß $u_x \Theta_x = B_x$, d. h. gleich dem Drall für eine Bewegung um die X-Achse ist, womit die Gleichung übergeht in

$$\frac{B_1^2}{B_x^2} + \frac{B_2^2}{B_y^2} + \frac{B_3^2}{B_z^2} = 1.$$

Um den Zusammenhang zwischen beiden Ellipsoiden noch weiter zu erforschen, bilden wir die Änderung $\delta \mathfrak{B}$, die \mathfrak{B} erfährt, wenn man \mathbf{u} irgendeinen unendlich kleinen Zuwachs $\delta \mathbf{u}$ erteilt. Aus Gl. (119) findet man

$$\delta \mathfrak{B} = \delta \mathbf{u} \cdot \Sigma m \mathbf{r}^2 - \Sigma m \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u} \mathbf{r},$$

und wenn man dies mit \mathbf{u} auf innere Art multipliziert

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \delta \mathfrak{B} &= \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \cdot \Sigma m r^2 - \Sigma m \mathbf{u} r \cdot \delta \mathbf{u} r \\ &= \delta \mathbf{u} \{ \mathbf{u} \cdot \Sigma m r^2 - \Sigma m \mathbf{u} r \cdot r \} = \mathfrak{B} \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Wir haben also die bemerkenswerte Beziehung

$$\mathbf{u} \delta \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \delta \mathbf{u} \quad (124)$$

gefunden, und zwar gültig für beliebige Zuwüchse $\delta \mathbf{u}$. Betrachten wir aber weiterhin nur solche Zuwüchse $\delta \mathbf{u}$, die einen Halbmesser \mathbf{u} des Trägheitsellipsoids in einen benachbarten Halbmesser $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ überführen, oder die mit anderen Worten unendlich kleine Bögen auf dem Trägheitsellipsoid bilden, so folgt ferner aus Gl. (122), nämlich

$$\mathbf{u} \mathfrak{B} = 2L_0$$

durch Differentiation auch

$$\mathbf{u} \delta \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \delta \mathbf{u} = 0.$$

Da aber beide Glieder auf der linken Seite schon als gleich erkannt sind, folgt, daß jedes von ihnen gleich Null sein muß. Man hat also

$$\mathbf{u} \delta \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \delta \mathbf{u} = 0. \quad (125)$$

Diese Gleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Alle unendlich kleinere Bögen $\delta \mathbf{u}$, die man von einem Punkte des Ellipsoids aus in verschiedenen Richtungen ziehen kann, sind nämlich in der durch diesen Punkt gehenden Tangentialebene des Ellipsoids enthalten. Die Gleichung $\mathfrak{B} \delta \mathbf{u} = 0$ sagt daher aus, daß die Richtung von \mathfrak{B} senkrecht auf dieser Tangentialebene steht. Ebenso folgt aus der Gleichung $\mathbf{u} \delta \mathfrak{B} = 0$, daß jedes \mathbf{u} senkrecht steht zu der Tangentialebene, die man im Endpunkte des zugehörigen \mathfrak{B} an das Drall-Ellipsoid legen kann. Hierdurch sind wir in den Besitz eines einfachen Verfahrens gebracht, um die Richtung des zu einem gegebenen \mathbf{u} gehörigen \mathfrak{B} oder umgekehrt auf geometrischem Wege zu finden.

In Abb. 27 sind die beiden Ellipsoide für den Fall eines Umdrehungskörpers mit der Symmetrieachse mm dargestellt und zwei zusammengehörige Vektoren \mathbf{u} und \mathfrak{B} nebst den Spuren

ihrer Tangentialebenen eingetragen. Durch passende Wahl der Maßstäbe, in denen man \mathbf{u} und \mathfrak{B} aufträgt, kann man es erreichen, daß die beiden Meridiankurven kongruente Ellipsen bilden, die nur um 90° gegeneinander gedreht sind. Aus Gl. (122)

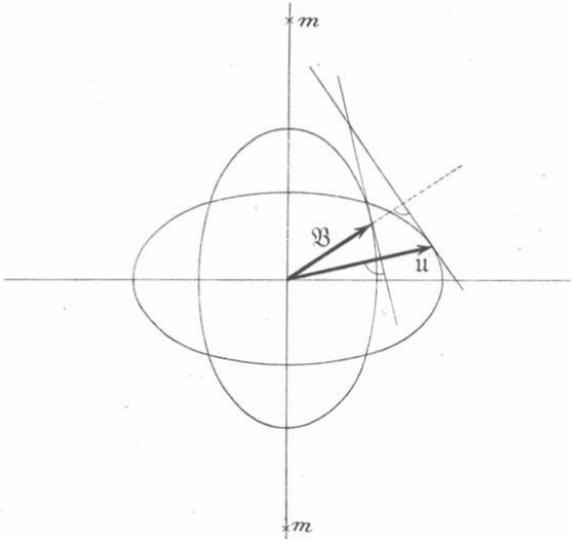


Abb. 27.

folgt nämlich

$$u_x B_x = u_y B_y = u_z B_z = 2L_0,$$

d. h. die Hauptachsen der beiden Ellipsen sind miteinander umgekehrt proportional. Je kleiner die Winkelgeschwindigkeit ist, die L_0 hervorbringt, desto größer ist der zugehörige Drall, wenn man nur die Hauptachsen miteinander vergleicht.

§ 24. Die freien Achsen.

Ein starrer Körper möge anfänglich eine beliebige Bewegung besitzen und hierauf ohne Einwirkung äußerer Kräfte sich selbst überlassen werden. Wir schließen nach Schwerpunkts- und Flächensatz von neuem, daß sowohl die Bewegungsgröße des ganzen Körpers als auch der Drall konstant bleiben müssen. In jedem Augenblicke kann man sich die Bewegung in eine Translation zerlegt denken mit jener Ge-

schwindigkeit, die dem Schwerpunkte zukommt und in eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Die Translation geht nach dem Schwerpunktssatze gleichförmig vor sich und interessiert uns kaum. Viel wichtiger ist jetzt für uns die Frage nach der Rotationsbewegung. Wir wollen daher von der Translation ganz absehen, also annehmen, daß der Schwerpunkt des starren Körpers schon von Anfang an ruhte; beim Fehlen aller äußeren Kräfte wird er dann auch dauernd in Ruhe bleiben, so daß wir es in der Tat nur noch mit den Rotationen zu tun haben. Im übrigen muß aber betont werden, daß auch im allgemeineren Falle das, was jetzt von den Rotationsbewegungen für sich ausgesagt werden soll, unverändert gültig bleibt, und daß dann nur noch die von den Rotationen unabhängige und hier gleichgültige konstante Translationsbewegung hinzutritt.

Wir werden das wichtige Problem, die Bewegung eines sich selbst überlassenen starren Körpers anzugeben, nur schrittweise in Angriff nehmen. Hier beschränken wir uns auf die Beantwortung der Frage, ob die Rotationsachse ihre Richtung im Raume und im Körper dauernd beibehält oder nicht.

Wer sich diese Frage, zum ersten Male vorlegt, ohne vorher davon gehört zu haben, wird leicht geneigt sein, die Konstanz der Rotationsachse für alle Fälle von vornherein anzunehmen. Schon die oft nicht ganz stichhaltige Fassung des Trägheitsgesetzes, wonach ein Körper seine augenblickliche Bewegung beim Fehlen äußerer Kräfte unverändert beibehalten müsse, verleitet oft zu dieser gleichwohl irrigen Annahme. Im allgemeinen verändert sich vielmehr die Lage der Rotationsachse mit der Zeit sowohl relativ zum Körper als zum absoluten Raume. Sie kann freilich auch konstant bleiben und jede im Körper gezogene (und jedenfalls durch den Schwerpunkt gehende) Achse, um die sich der Körper ohne Zwang dauernd zu drehen vermag, heißt eine freie Achse (oder auch permanente Drehachse).

Auf Grund des Trägheitsgesetzes vermag man nur zu schließen, daß ein einzelner materieller Punkt die Bewegung,

die er hatte, ohne Einwirkung äußerer Kräfte beibehält oder daß das gleiche auch von der Schwerpunktsbewegung eines beliebigen Punkthaufens gilt. Die Rotationsbewegung wird aber von der Aussage des Trägheitsgesetzes nicht unmittelbar berührt und mittelbar nur insofern, als aus dem Trägheitsgesetze in der Dynamik des materiellen Punktes eine Reihe von Folgerungen gezogen wurde, die sich später auf die Dynamik des Punkthaufens übertragen ließen, und die daher jetzt an Stelle des Trägheitsgesetzes zur Untersuchung der Rotationserscheinungen verwendet werden können.

Man wird aber nicht leicht die Forderung fallen lassen, daß sich irgendeine mit der Rotationsbewegung zusammenhängende Größe beim Fehlen äußerer Kräfte als konstant erweisen müsse, schon deshalb, weil man stets gewohnt ist, die Kräfte als Ursachen von Veränderungen anzusehen. In der Tat kann man zwei sehr wichtige Größen angeben, die nur durch das Eingreifen äußerer Kräfte geändert werden können. Die erste ist die lebendige Kraft des starren Körpers, von der dies schon im ersten Bande dieses Werkes gezeigt wurde und die andere ist der Drall, der nach dem Flächensatze (vgl. § 18 unter b) der Zeit nach konstant und hier überdies noch für jeden Momentenpunkt gleich groß ist. Die zweite Bedingung sagt übrigens mehr aus als die erste, denn die lebendige Kraft ist eine Größe ohne Richtung und die Bedingung, daß sie konstant sei, wird daher durch eine einzige Beziehung zwischen Zahlengrößen ausgesprochen. Der Drall ist dagegen eine gerichtete Größe und die Bedingung, daß er sich nicht ändere, schließt neben der Konstanz des Absolutwertes auch die Konstanz der Richtung ein. Die Vektorgleichung, die dies ausspricht, läßt sich in drei voneinander unabhängige Komponentengleichungen zerlegen, enthält also drei Zahlenbeziehungen. In der Tat ist daher auch das Moment der Bewegungsgröße von noch größerer Bedeutung für die Beurteilung der Rotationserscheinungen als selbst die lebendige Kraft.

Aus der Bedingung, daß sich der Drall nicht ändern kann, ergibt sich nun leicht, welche Drehungsachsen des starren

Körpers freie Achsen sind. Es sind jene, für die \mathfrak{B} gleichgerichtet mit \mathfrak{u} ist, d. h. die Hauptträgheitsachsen und nur diese sind freie Achsen. Im anderen Falle nämlich, wie er etwa durch Abb. 26, S. 174 angegeben ist, kann man zwar den Körper auch dazu zwingen, daß er sich dauernd um die durch \mathfrak{u} angegebene Achse dreht, indem man ihn z. B. mit Hilfe von Zapfen in einem Gestell lagert. Aber in diesem Falle bleibt der Drall \mathfrak{B} nicht konstant, sondern der Vektor \mathfrak{B} beschreibt eine Kegelfläche um \mathfrak{u} als Achse. Das folgt daraus, daß sich alle Radienvektoren nach den einzelnen Massenteilchen um diese Achse und um denselben Winkel gedreht haben, während \mathfrak{u} konstant blieb. Solange dies zutrifft, bleibt auch \mathfrak{B} relativ zum Körper genommen konstant und dreht sich daher mit dem Körper zusammen gegen den festen Raum. Nach dem Flächensatze müssen aber äußere Kräfte einwirken, um irgendeine Änderung von \mathfrak{B} gegen den festen Raum hervorzubringen, auch wenn sich diese Änderung nur auf die Richtung und nicht auf die Größe des Dralls bezieht. Daraus folgt, daß \mathfrak{u} in Abb. 26 unmöglich eine freie Achse sein kann; vielmehr muß von den Lagern her ein Zwang auf den Körper übertragen werden, der sich auf ein Kräftepaar zurückführen läßt. Das Moment dieses Kräftepaares kann auch nach der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma \mathfrak{V} \mathfrak{P} \mathfrak{r}$$

berechnet werden, wenn \mathfrak{u} und \mathfrak{B} gegeben sind. An einer späteren Stelle werden wir diese Berechnung vornehmen.

Rotiert dagegen der Körper um eine Hauptträgheitsachse, so bleibt das in die Richtung von \mathfrak{u} fallende \mathfrak{B} konstant und mit $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ wird auch $\Sigma \mathfrak{V} \mathfrak{P} \mathfrak{r}$ zu Null, d. h. der Körper dreht sich dauernd um dieselbe Achse weiter, ohne daß ein Zwang dazu aufgewendet zu werden braucht. Damit ist die vorher aufgestellte Behauptung bewiesen.

Auch in diesem Falle kann übrigens an Stelle des Flächensatzes das d'Alembertsche Prinzip verwendet werden. Man kommt

dann zu denselben Schlüssen, wie hier noch gezeigt werden soll. Wenn nämlich ein Körper gezwungen ist, stets um dieselbe Achse \mathbf{u} zu rotieren, bestehen die Trägheitskräfte, die man nach diesem Satze anbringen muß, um die dynamische Aufgabe auf eine statische zurückzuführen, in Zentrifugalkräften. Bezeichnet man die in Abb. 28 von der Drehachse \mathbf{u} rechtwinklig nach dem Massenteilchen m gezogene Strecke mit \mathbf{p} , so ist die Zentrifugalkraft \mathbf{C} nach Bd. I, § 26, S. 174 d. 3. Aufl.

$$\mathbf{C} = mu^2 \mathbf{p}$$

zu setzen, wofür auch

$$\mathbf{C} = mu^2 (\mathbf{r} - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{r})$$

geschrieben werden kann, wenn man beachtet, das \mathbf{p} als geometrische Summe der beiden anderen in Abb. 28 vorkommenden Dreieckseiten dargestellt werden kann. Aus der angeführten Stelle des ersten Bandes ist schon bekannt, daß die geometrische Summe aller \mathbf{C} gleich Null ist, wenn der Körper um den Schwerpunkt rotiert. Die äußeren Kräfte, die an dem Körper angreifen, müssen nun nach dem d'Alembertschen Prinzip mit den Trägheitskräften \mathbf{C} im Gleichgewicht stehen, und wenn keine äußeren Kräfte nötig sein sollen, um die Bewegung aufrecht zu erhalten, müssen daher die \mathbf{C} selbst ein Gleichgewichtssystem bilden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür besteht, da die geometrische Summe der \mathbf{C} jedenfalls Null ist, darin, daß für irgendeinen Momentenpunkt die geometrische Summe der statischen Momente verschwindet. Wählen wir S als Momentenpunkt, so lautet demnach die Bedingungsgleichung für die freie Achse

$$\sum m \mathbf{V}(\mathbf{r} - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{r}) = 0.$$

Da das äußere Produkt aus \mathbf{r} mit sich selbst verschwindet, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\sum m \mathbf{u}_1 \mathbf{r} \mathbf{V} \mathbf{u}_1 \mathbf{r} = 0.$$

Da \mathbf{u}_1 konstant ist, läßt sich dafür auch schreiben

$$\mathbf{V} \mathbf{u}_1 \sum m \mathbf{u}_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Das äußere Produkt kann aber, da beide Faktoren von Null verschieden sind, nur dadurch zu Null werden, daß beide Faktoren gleich

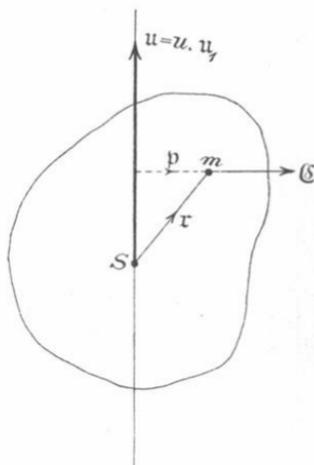


Abb. 28.

gerichtet sind. Die Bedingung für die freie Achse läßt sich daher auch dahin aussprechen, daß

$$\sum m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{r} \parallel \mathbf{u}_1$$

sein muß, oder schließlich auch, wenn man mit u multipliziert

$$\sum m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mathbf{r} \parallel \mathbf{u}.$$

Wenn dies zutrifft, ist aber nach Gl. (119) S. 172 auch \mathfrak{B} parallel mit \mathbf{u} und hiermit ist von neuem bewiesen, daß die Hauptträgheitsachsen und nur diese freie Achsen sind.

§ 25. Wirkung eines Kräftepaares auf einen freien starren Körper.

Ein starrer Körper sei frei, d. h. allen übrigen äußeren Kräften entzogen und vorher in Ruhe. Dann soll irgendein Kräftepaar auf ihn einwirken; es fragt sich, welche Bewegung der Körper annimmt.

Wir wissen schon, daß sich der Schwerpunkt nicht verschieben kann; die Bewegung muß also in einer Drehung um eine Schwerpunktsachse bestehen. Es fragt sich zunächst, um welche Achse er beginnen wird, sich zu bewegen, und welche Winkelbeschleunigung ihm von dem Kräftepaare um diese Achse erteilt werden wird.

Hinsichtlich des Kräftepaares muß zunächst daran erinnert werden, daß alle Kräftepaare am starren Körper, die in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, äquivalent sind, wenn sie dasselbe statische Moment haben (Band II, § 22). Um das Kräftepaar für unsere Zwecke eindeutig zu beschreiben, genügt es daher, den Momentenvektor \mathfrak{M} des Kräftepaares nach Größe und Richtung anzugeben. Da dieser ein völlig freier Vektor ist, d. h. auch parallel zu sich selbst willkürlich verschoben werden darf, ist es gleichgültig, von welchem Punkte aus wir ihn uns gezogen denken wollen. Am einfachsten ist es, wenn wir ihn uns vom Schwerpunkt aus abgetragen denken.

Auch hier muß wieder vor voreilig gefaßten Meinungen gewarnt werden. Es könnte nämlich bei flüchtiger Betrachtung scheinen, daß die Drehung \mathbf{u} , die von \mathfrak{M} hervorgebracht

wird, mit \mathfrak{K} gleich gerichtet sein müsse. Zu dieser Meinung kann namentlich der Vergleich des Kräftepaars mit einer Einzelkraft leicht verleiten. Wir haben schon im ersten Bande gesehen, daß sich beide in der Tat in vieler Hinsicht gleichen. Die Einzelkraft bringt am materiellen Punkte eine Verschiebung in ihrer Richtung hervor. Das Kräftepaar bringt eine Drehung um eine Schwerpunktsachse hervor. Aber hier besteht nun der erhebliche Unterschied, daß die Richtung der Drehachse im allgemeinen keineswegs mit der Richtung von \mathfrak{K} zusammenfällt. Unter besonderen Umständen trifft dies freilich zu und wir wollen hier vor allen Dingen untersuchen, unter welchen Umständen.

Mit Hilfe des Flächensatzes wird sich dies leicht entscheiden lassen. Beachten wir, daß an Stelle von $\sum V \mathfrak{P} \mathbf{r}$ jetzt kürzer \mathfrak{B} geschrieben werden kann, so wird der Flächensatz hier durch die einfache Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K} \quad (126)$$

ausgesprochen. Hat das Kräftepaar \mathfrak{K} einige Zeit hindurch auf den Körper eingewirkt, so folgt hieraus auch durch Integration

$$\mathfrak{B} = \int \mathfrak{K} dt. \quad (127)$$

Wenn \mathfrak{K} während der ganzen Zeit konstant war, ist hiernach \mathfrak{B} gleich gerichtet mit \mathfrak{K} , und zwar gilt dies für jede beliebige Gestalt des Körpers und für jede beliebige Richtung von \mathfrak{K} . Im allgemeinen fällt aber, wie wir aus § 23 wissen, die Richtung von \mathbf{u} keineswegs mit der Richtung von \mathfrak{B} zusammen, und daher ist auch \mathbf{u} anders gerichtet als \mathfrak{K} . Nur dann, wenn zufällig $\mathfrak{B} \parallel \mathbf{u}$, ist auch $\mathfrak{K} \parallel \mathbf{u}$. Diese Bedingung ist aber nur für die freien Achsen erfüllt und wir erkennen damit, daß die Achse der Drehung, die durch ein Kräftepaar hervorgerufen wird, nur dann senkrecht auf der Ebene des Kräftepaars steht, wenn diese Senkrechte eine freie Achse des Körpers ist.

In diesem Falle läßt sich auch Gl. (126) in weiter ausgerechneter Form darstellen. Auf die Richtungen, die mit-

einander zusammenfallen, brauchen wir dann, da sie selbstverständlich sind, nicht mehr ausdrücklich zu achten, und für die Größe von \mathfrak{B} können wir den in Gl. (123) ausgerechneten Wert von B' einsetzen. Wir haben dann

$$\frac{d(u\Theta)}{dt} = K$$

oder, da Θ der Zeit nach konstant ist,

$$\Theta \frac{du}{dt} = K. \quad (128)$$

Wir sind damit eigentlich nur zu einem einfachen Resultate zurückgelangt, das schon im ersten Bande (S. 200, Gl. (81) der 3. Aufl.) gefunden wurde. Die frühere Ableitung bezog sich zwar auf einen zwangsläufig drehbaren Körper und sie gilt für diesen allgemein. Aber auch der freie Körper, den wir hier untersuchen, kann bei seiner Drehung um eine freie Achse als drehbar gelagert angesehen werden, da gar keine Kräfte von dem Gestelle auf ihn übertragen werden, um die Beibehaltung der freien Drehachse zu erzwingen.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeineren Falle über, daß der Momentenvektor \mathfrak{K} nicht in die Richtung einer Hauptträgheitsachse fällt, so läßt sich die Richtung der Umdrehungsachse der durch \mathfrak{K} hervorgebrachten Drehbewegung leicht nach den Lehren von § 23 ermitteln. Denn dort ist gezeigt, wie man die Richtung von \mathbf{u} findet, die zu einer gegebenen Richtung von \mathfrak{B} gehört, falls das Trägheitsellipsoid des Körpers bekannt ist.

Um ferner auch die Größe der Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} zu ermitteln, zerlegen wir \mathfrak{K} in drei Komponenten $K_1 K_2 K_3$ nach den Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Für die erste Komponente folgt dann, da sie mit einer freien Achse zusammenfällt, nach Gl. (128)

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = K_1$$

und entsprechend für die übrigen. Die wirkliche Winkelbeschleunigung erhalten wir dann nach dem Satze über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen durch geo-

metrische Summierung der drei Komponenten. Versteht man also unter $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ drei Einheitsvektoren, die in den Richtungen der drei Hauptachsen gezogen sind und unter $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ die zugehörigen Trägheitsmomente, so hat man

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{i} \frac{K_1}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{K_2}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{K_3}{\Theta_3}, \quad (129)$$

und hieraus durch Integration nach der Zeit auch \mathbf{u} selbst.

Anstatt dessen kann man auch von Gl. (121) ausgehen, aus der

$$u_1 = \frac{B_1}{\Theta_1}; \quad u_2 = \frac{B_2}{\Theta_2}; \quad u_3 = \frac{B_3}{\Theta_3}$$

mit den hier gebrauchten Bezeichnungen folgt, woraus sich \mathbf{u} zusammensetzen läßt zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{B_3}{\Theta_3}. \quad (130)$$

Da \mathfrak{B} und daher auch seine Komponenten schon aus Gl. (127) bekannt sind, ist hiermit die Aufgabe gelöst.

Schließlich möge noch ein Gebrauch von Gl. (127) erwähnt werden, der zur Erzielung einer einfacheren Ausdrucksweise zuweilen gemacht wird. Gl. (127) hat nämlich die Form des Satzes vom Antriebe. An Stelle des Impulses einer Einzelkraft steht bei ihr das ebenso gebildete Zeitintegral des Kräftepaars, das daher auch als der Impuls des Kräftepaars bezeichnet werden kann. Ebenso tritt an die Stelle der Bewegungsgröße hier das statische Moment der Bewegungsgröße. Man kann daher Gl. (127) in Worten auch dahin aussprechen, daß der Impuls des Kräftepaars gleich dem von ihm erzeugten Dralle ist. Dabei könnte \mathfrak{K} sehr groß und die Zeit, während der es einwirkte, sehr klein sein, so daß wir es mit einem „Drehstoße“ zu tun hätten. Wenn ferner die Drehbewegung des Körpers in einem bestimmten Augenblicke ganz willkürlich gegeben ist, so kann man sich stets das zugehörige \mathfrak{B} ermittelt und hiermit nach Gl. (127) auch das ihm gleiche $\int \mathfrak{K} dt$ berechnet denken. Man kann daher die augenblickliche Bewegung auch dadurch beschreiben, daß man sagt,

sie sei ebenso, als wenn sie aus der Ruhe durch den Impuls eines Drehstoßes hervorgegangen wäre. Sobald dieser Impuls $\int \mathfrak{R} dt$ angegeben wird, ist auch die augenblickliche Bewegung dadurch gekennzeichnet. Manche Schriftsteller ziehen diese Art der Darstellung vor und gebrauchen dann die Bezeichnung „Impulsvektor“ als gleichbedeutend mit „Moment der Bewegungsgröße“ oder „Drall“. Natürlich ist dies im Grunde genommen gegenüber der von mir gewählten Ausdrucksweise nur ein Unterschied im Wortlaute, der das Wesen der Sache ganz unberührt läßt.

§ 26. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äußere Kräfte.

Wir machen nach allen diesen Vorbereitungen jetzt den letzten und wichtigsten Schritt zur Untersuchung der Bewegungen, die ein vollständig sich selbst überlassener Körper mit gegebener Anfangsbewegung weiterhin ausführt. Hierin besteht wenigstens das Hauptziel, das wir uns in diesem Paragraphen stecken, wenn auch die Überschrift etwas anderes anzukündigen scheint. Um diese zu erklären, erinnere ich zunächst daran, daß wir bei dieser Untersuchung von einer etwaigen Translationsbewegung ganz absahen, uns den Schwerpunkt also von Anfang an und daher, beim Fehler äußerer Kräfte, auch dauernd in Ruhe denken wollten. Damit ist der Schwerpunkt schon von selbst ein „fester Punkt“ des Körpers. Es kann auch nichts ausmachen, wenn wir uns diesen ohnehin schon am Orte bleibenden Punkt überdies noch mit einem festen Gestelle verbunden denken, falls nur dem Körper dabei durch Anordnung eines Kugelgelenkes die Möglichkeit erhalten bleibt, sich nach allen Richtungen hin ohne Widerstand zu drehen.

Dies allein würde allerdings noch nicht genügen, um die Einführung einer neuen Bezeichnung zu rechtfertigen, die ausdrücklich darauf hinweist, daß der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Es kommt aber hinzu, daß es für die wirkliche Ausführung

der Untersuchung fast ganz gleichgültig ist, ob der Körper im Schwerpunkte oder in irgendeinem anderen Punkte festgehalten ist, um den er sich frei zu drehen vermag. Auch dieser Fall ist für viele Anwendungen der Mechanik von großer Bedeutung und er muß daher ebenfalls behandelt werden. Da nun der Fall des frei beweglichen Körpers in ihm schon als Sonderfall mit enthalten ist, so tut man, um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, am besten, sogleich den allgemeineren Fall in Angriff zu nehmen. Es bleibt aber jedem, der sich für diesen etwa nicht interessiert, unbenommen, sich unter dem festen Punkte, von dem weiterhin die Rede ist, überall den Schwerpunkt vorzustellen und hiernach von einer Lagerung im Gestelle ganz abzusehen.

Im allgemeineren Falle wird natürlich ein Zwang von dem Gestelle auf den bewegten Körper übertragen werden müssen, durch den der feste Punkt auch wirklich an seinem Orte festgehalten wird. Von Reibungen u. dgl. soll abgesehen werden und der Zwang kann daher nur in einer Auflagerkraft bestehen, die sich im festen Punkte überträgt. Diese Kraft ist die einzige äußere Kraft, die am bewegten Körper angreift. Sie kann keine Arbeit leisten, da ihr Angriffspunkt in Ruhe bleibt und wir schließen daraus zunächst, daß die lebendige Kraft des Körpers konstant sein muß. Außerdem ist auch das statische Moment des Auflagerdrucks stets gleich Null, wenn wir den festen Punkt zum Momentenpunkte wählen. Hiernach folgt aus dem Flächensatze, daß auch der Drall \mathfrak{B} — diesmal freilich nur für diese besondere Wahl des Momentenpunktes — nach Größe und Richtung unverändert bleiben muß.

Auf Grund dieser beiden Bedingungen läßt sich die auf einen gegebenen Anfangszustand folgende weitere Bewegung des Körpers leicht voraussehen, falls das Trägheitsellipsoid und mit ihm das Drallellipsoid des Körpers bekannt sind. Trägt man zunächst in die Zeichnung des in der Anfangslage gegebenen Körpers den zur Anfangsbewegung gehörigen Drall \mathfrak{B} ein und legt durch den Endpunkt von \mathfrak{B} eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem festen Punkte zusammenfällt, so

schneidet die Kugel das Drall-Ellipsoid nach einer Raumkurve. Nun sind das Trägheits- und das Drallellipsoid im Körper festgeheftet und bewegen sich mit ihm zusammen. Da \mathfrak{B} vom festen Raume her betrachtet konstant bleibt, muß demnach die Bewegung von der Art sein, daß die soeben konstruierte Raumkurve, zu der alle Halbmesser des Drallellipsoids von der anfänglich gegebenen Größe von \mathfrak{B} gehören, stets durch die im festen Raume konstante Richtung von \mathfrak{B} hindurchgeht.

Durch diese Bemerkung allein ist die Bewegung freilich noch nicht völlig bestimmt. Wir greifen daher auf Gl. (122), nämlich

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = 2L$$

zurück, in der die lebendige Kraft L , wie wir vorher sahen, eine Konstante bedeutet. Um das innere Produkt $\mathfrak{u}\mathfrak{B}$ zu bilden, wollen wir uns jetzt \mathfrak{u} auf die Richtung von \mathfrak{B} projiziert denken. Bezeichnen wir die Projektion mit u' und die Größe von \mathfrak{B} mit B , so hat man

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = u'B = 2L,$$

und daraus erhält man

$$u' = \frac{2L}{B} \quad (131)$$

Da aber L und B konstant sind, folgt aus dieser Gleichung, daß auch die Projektion u' von \mathfrak{u} auf die unveränderliche Richtung von \mathfrak{B} konstant bleiben muß.

Diese Bemerkung gestattet uns schon, einen besseren Überblick über die fernere Bewegung des Körpers bei gegebenem Anfangszustande zu gewinnen. Man trage in die Zeichnung der Anfangslage zunächst das Trägheitsellipsoid sowie die Anfangsgeschwindigkeit \mathfrak{u}_0 ein, die einen Halbmesser des Ellipsoids bildet. Im Endpunkte von \mathfrak{u}_0 konstruiere man die Tangentialebene von α an das Ellipsoid und ziehe zu dieser eine Senkrechte vom festen Punkte O aus (vgl. Abb. 29). Aus den Lehren von § 23 wissen wir schon, daß diese Senkrechte die unveränderliche Richtung von \mathfrak{B} angibt. Auf \mathfrak{B} schneidet

die Ebene α eine Strecke ab , die u' darstellt. Denkt man sich hierauf dieselbe Konstruktion für eine spätere Stellung des Körpers wiederholt, so wird sich in der Zeichnung die Lage des Ellipsoids und die Richtung von \mathfrak{u} in ihm geändert haben. Dagegen müssen wir nach dem, was bewiesen wurde, immer wieder auf dasselbe \mathfrak{B} und dasselbe u' geführt werden. Durch die Richtung von \mathfrak{B} und die Größe von u' ist aber auch die Ebene α festgelegt, die man daher als die unveränderliche Ebene des Problems bezeichnet. Die Bewegung des Körpers muß nun in solcher Art erfolgen, daß das Ellipsoid jederzeit die unveränderliche Ebene α berührt. Dabei gleitet das Ellipsoid niemals auf dieser Ebene, da ja in jedem Augenblicke die Drehachse durch den Berührungspunkt hindurchgeht. Die Bewegung des Ellipsoids besteht daher in einem Rollen auf der unveränderlichen Ebene.

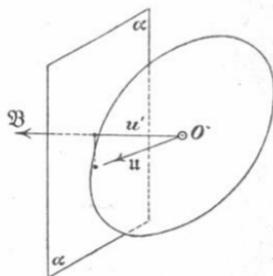


Abb. 29.

Man denke sich ferner das ganze Ellipsoid durch ein Bündel von Tangentialebenen eingehüllt. Unter allen diesen Tangentialebenen suche man jene auf, deren Abstand vom festen Punkte gleich u' ist. Die zugehörigen Berührungspunkte werden einen oder auch zwei getrennte, in sich geschlossene Kurvenzüge bilden. Alle Punkte dieser Kurven können durch geeignete Drehung des Ellipsoids in die Ebene α übergeführt werden, so daß sie die Berührungspunkte zwischen α und dem Ellipsoide bilden.

Hiermit ist nun auch entschieden, welche durch O gehenden Strahlen nach und nach als Drehachsen dienen werden: es sind die Verbindungslinien von O nach den Punkten der vorher konstruierten Kurve. Poinso't, von dem die hier auseinandergesetzte geometrische Lösung des Problems herrührt, hat die Kurve als die Polodie (oder den Polweg) bezeichnet. Er hat ferner noch eine zweite Kurve zur Beschreibung des ganzen Vorgangs benützt. Auch in der Ebene α wird nämlich der Berührungspunkt mit dem Ellipsoid, der in jedem Augen-

blicke als der Pol der Bewegung bezeichnet werden kann, nach und nach andere Lagen einnehmen. Der Berührungspunkt beschreibt dabei eine Kurve, die als die Herpolodie bezeichnet wird. Die Bewegung des Ellipsoids kann nun als ein Rollen der Polodie auf der Herpolodie aufgefaßt werden.

Diese einfache geometrische Beschreibung der im übrigen so schwierig zu behandelnden Bewegung genügt meist, um sich ohne Rechnung einen schnellen Überblick über die Erscheinungen zu verschaffen, die man zu erwarten hat. Von der Gestalt des Trägheitsellipsoids des Körpers wird man sich im gegebenen Falle meist sehr schnell eine ziemlich genau zutreffende Vorstellung machen können, ohne vorher viel rechnen zu müssen. Wie die Polodie aussieht, läßt sich dann auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften ebenfalls schnell genug erkennen. Die Herpolodie ist nicht so leicht anzugeben; aber man braucht sie auch kaum, um sich eine deutliche Vorstellung von dem Rollen des Ellipsoids auf der unveränderlichen Ebene zu machen. — Der Hauptmangel der vorausgehenden Betrachtungen besteht nur noch darin, daß die Zeit, die während der Bewegung des Körpers aus der Anfangslage in irgendeine andere verstreicht, daraus nicht unmittelbar entnommen werden kann. — Darauf werde ich in § 28 zurückkommen.

§ 27. Die stabilen Drehachsen.

Wir können sofort eine wichtige Anwendung der vorhergehenden Lehren machen. Früher fanden wir nämlich, daß jeder Körper mindestens drei freie Achsen hat, die mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Sie sind aber, wie sich jetzt zeigen wird, nicht alle „stabile“ Drehachsen.

Der Begriff der „Stabilität“ ist aus der Lehre vom Gleichgewichte entnommen. Er ist dort ein ganz eindeutig bestimmter Begriff; wenn er aber auf Bewegungen übertragen werden soll, bedarf er in jedem einzelnen Falle einer neuen Definition. Was man unter Stabilität einer Bewegung verstehen soll, ist nämlich in vielen Fällen einstweilen noch ganz streitig, so daß verschiedene Autoren zuweilen ganz verschiedene Begriffe mit

demselben Worte verbinden. Ich werde daher zunächst erklären, was man unter der Stabilität einer Drehachse versteht, ohne mich aber darauf einzulassen, eine Definition für die Stabilität einer Bewegung überhaupt geben zu wollen.

Man denke sich, daß ein Körper nicht genau, sondern nur nahezu um eine freie Achse rotiere. Würde er genau um die freie Achse rotieren, so könnte sich die Drehachse niemals ändern und der Körper würde nach jeder Umdrehung immer wieder in die Anfangslage zurückkehren. Völlig genau läßt sich dieser Zustand aber niemals erreichen und es fragt sich, welche Folgen eine geringe Abweichung davon nach sich zieht. Wenn der Körper sich dauernd nahezu so verhält, als rotierte er um die stets in nächster Nachbarschaft bleibende freie Achse, so heißt diese freie Achse eine stabile Drehachse. Bringt dagegen eine noch so geringe anfängliche Abweichung von der freien Achse eine mit der Zeit immer weiter fortschreitende Ablenkung der Bewegung von der zur freien Achse gehörigen hervor, so nennt man die Rotation um eine solche freie Achse eine labile Bewegung, weil schon der geringste Anstoß genügt, um die Art der Bewegung allmählich vollständig zu ändern.

Von den drei freien Achsen, die im allgemeinen bei einem Körper vorkommen, sind bloß zwei, nämlich jene, die zum allergrößten und zum allerkleinsten Trägheitsmomente gehören, stabile Drehachsen; die Bewegung um die dritte freie Achse ist labil.

Man erkenne dies ohne jede Schwierigkeit an der Hand einer Figur. In Abb. 30 sei OA die größte Halbachse des Trägheitsellipsoids, also zugleich die Achse des kleinsten Trägheitsmoments. Weicht die Drehachse im Anfangszustande nur wenig von der Richtung OA ab, so erlangt die Polodie die durch die kreuzpunktierte Linie angedeutete Gestalt. Nur in nächster Nachbarschaft von A lassen sich nämlich Punkte ausfindig machen, deren Tangentialebenen einen senkrechten Abstand

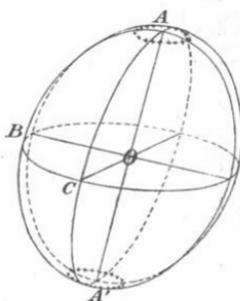


Abb. 30.

von O haben, der nur wenig kleiner ist als OA selbst. Die Polodie umgibt demnach als geschlossene Kurve den Punkt A . Diametral gegenüber, um A' läßt sich zwar ebenfalls eine Kurve angeben, die der gleichen Bedingung genügt. Da sie mit der ersten nicht zusammenhängt, ist aber kein stetiger Übergang aus der einen in die andere möglich. Hiernach durchläuft der Endpunkt von \mathbf{u} in der Tat stets die sehr kleine Kurve um A und die auf der unveränderlichen Ebene beschriebene Herpolodie kann sich ebenfalls nur auf eine kleine Fläche erstrecken, so daß auch gegenüber dem festen Raume keine erheblichen Richtungsveränderungen von OA zu erwarten sind.

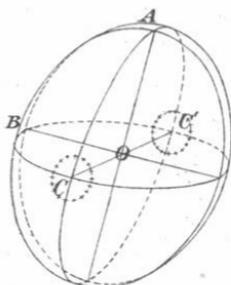


Abb. 31.

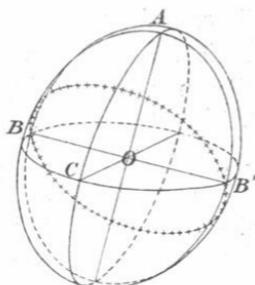


Abb. 32.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Figur und die Betrachtung für den Fall, daß die anfängliche Drehachse nahezu mit dem kleinsten Halbmesser des Ellipsoids OC (oder mit der Achse des größten Trägheitsmoments) zusammenfiel (Abb. 31). Auch hier kann die Polodie nur in einer den Punkt C eng umschließenden Kurve bestehen, und zwar deshalb, weil nur an dieser Stelle des Ellipsoids Tangentialebenen möglich sind, die so nahe an den Mittelpunkt des Ellipsoids heranrücken. Die Achse OC ist demnach nicht nur eine freie, sondern zugleich auch eine stabile Drehachse.

Anders ist es aber mit der dritten freien Achse OB . Wie man aus Abb. 32 sofort erkennt, ist keine Polodie möglich, die den Punkt B in kleinem Abstände umkreist, sondern die Polodie umfaßt das ganze Ellipsoid. Auch auf dem Meri-

diane AC gibt es Punkte, deren Tangentialebenen denselben Abstand vom Mittelpunkte O haben, als die in der Nachbarschaft von B gezogenen und ebenso auf allen übrigen durch A gelegten Meridianen. Die freie Achse OB ist hiernach eine labile Drehachse.

§ 28. Die Eulerschen Gleichungen.

Die in § 26 nach Poincot vorgetragene Theorie der Bewegung des starren Körpers um einen festen Punkt gibt nur über die Lagen Aufschluß, die der Körper der Reihe nach einnimmt. Wieviel Zeit währenddessen verstreicht, ist daraus nicht zu entnehmen. Um auch dies zu erreichen, muß man die rein geometrische Darstellung verlassen und sich wieder mehr der analytischen zuwenden. Der zeitliche Verlauf ergibt sich nämlich aus der Integration der Differentialgleichungen des Problems, die schon von Euler aufgestellt wurden und die ich jetzt ableiten will.

Die Absicht bei Aufstellung der Eulerschen Gleichungen kommt darauf hinaus, die Winkelgeschwindigkeit \mathfrak{u} als Funktion der Zeit t darzustellen. Am besten rechnet man hierbei, wie ich von vornherein bemerken möchte, mit den rechtwinkligen Komponenten $u_1 u_2 u_3$ von \mathfrak{u} . Auf diese beziehen sich die Eulerschen Gleichungen.

Bei der Untersuchung der Veränderlichkeit von \mathfrak{u} kann man übrigens zwei ganz verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man nämlich die Lagen angibt, die \mathfrak{u} der Reihe nach gegen den starren Körper oder gegen den festen Raum durchläuft. Alle \mathfrak{u} im ersten Falle bilden den Polodie-, alle \mathfrak{u} im zweiten Falle den Herpolodiekegel. Wir müssen uns also für eine bestimmte Aufstellung des Beobachters, der die Veränderlichkeit von \mathfrak{u} nach Richtung und Größe konstatiert, entscheiden, oder wir müssen mit anderen Worten das Koordinatensystem, auf das sich die Projektionen $u_1 u_2 u_3$ beziehen, entweder im festen Raum ruhen lassen oder es an dem bewegten Körper festheften. Euler hat sich für den letzten Fall entschieden. Stellt man sich etwa vor, unsere Erde sei der Einwirkung

aller anderen Weltkörper entzogen und drehe sich nicht genau um eine freie Achse, so wird man sich in erster Linie dafür interessieren, welche Linien der Erde im Laufe der Zeit als Drehachsen dienen, d. h. wie sich etwa der Nordpol der Erde im Laufe der Zeit auf der Erde selbst verschiebt. Wir beziehen dann die Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} auf ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem, folgen also der Eulerschen Darstellung.

Bei diesem Probleme erfolgt die Zerlegung der gerichteten Größe \mathbf{u} in drei rechtwinklige Komponenten übrigens nicht bloß willkürlich oder aus Verlegenheit, weil man etwa keine bessere Methode zur Behandlung gerichteter Größen kennt, sondern sie ist im Wesen der Sache selbst begründet. In jedem Körper haben wir nämlich drei aufeinander senkrecht stehende ausgezeichnete Richtungen, die Richtungen der Hauptträgheitsachsen, für die sich die Rotationserscheinungen besonders einfach gestalten. Durch eine Zerlegung nach diesen Richtungen vereinfacht sich daher auch in anderen Fällen die Untersuchung der Rotationen und wir sind so von vornherein auf die Benutzung eines nach diesen drei Hauptrichtungen orientierten Koordinatensystems hingewiesen.

Davon ist auch schon bei der Ableitung von Gl. (130)

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{B_3}{\Theta_3}$$

Gebrauch gemacht worden, in der \mathbf{u} als geometrische Summe seiner drei Koordinaten

$$u_1 = \frac{B_1}{\Theta_1}, \quad u_2 = \frac{B_2}{\Theta_2}, \quad u_3 = \frac{B_3}{\Theta_3} \quad (132)$$

dargestellt ist. Die Einheitsvektoren \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sind in den Richtungen der Hauptträgheitsachsen gezogen und Θ_1 gehört zur Achse \mathbf{i} usw.

Die Eulerschen Gleichungen entstehen aus der Gleichung für \mathbf{u} , wenn man diese nach der Zeit differenziert. Um dies ausführen zu können, muß man zunächst feststellen, wie sich der Drall \mathfrak{B} relativ zum starren Körper mit der Zeit ändert. Gegen den festen Raum ist, wie wir wissen, \mathfrak{B} nach dem

Flächensätze konstant. Relativ zum bewegten Körper muß \mathfrak{B} daher veränderlich sein, zwar nicht der absoluten Größe, aber der Richtung nach.

Zur gegebenen Zeit ist die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers \mathbf{u} . Für einen Beobachter, der sich auf dem starren Körper befindet, dreht sich der ganze äußere Raum um den starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathbf{u}$. Auch die Bewegung des im äußeren Raume feststehenden Vektors \mathfrak{B} relativ zum starren Körper besteht in einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathbf{u}$. Der Endpunkt von \mathfrak{B} beschreibt hierbei seinen Weg mit einer Geschwindigkeit, die nach Größe und Richtung durch

$$V \mathbf{u} \mathfrak{B}$$

dargestellt wird (Bd. I, Gl. (57) S. 121 d. 3. Aufl.). Der Weg im Zeitelemente dt ist daher

$$dt V \mathbf{u} \mathfrak{B},$$

und das ist jene Strecke, die zum ursprünglichen \mathfrak{B} geometrisch summiert werden muß, um das nach Ablauf von dt entstehende neue \mathfrak{B} zu erhalten (immer relativ zum starren Körper genommen). Hiernach wird

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V \mathbf{u} \mathfrak{B}$$

oder, wenn man in Komponenten zerlegt,

$$\frac{dB_1}{dt} = u_2 B_3 - u_3 B_2; \quad \frac{dB_2}{dt} = u_3 B_1 - u_1 B_3;$$

$$\frac{dB_3}{dt} = u_1 B_2 - u_2 B_1.$$

Die Differentiation der Gleichung für \mathbf{u} nach der Zeit ergibt mit Benutzung dieser Werte

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{i} \frac{u_2 B_3 - u_3 B_2}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{u_3 B_1 - u_1 B_3}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{\Theta_3}$$

oder, nachdem man noch die Komponenten von \mathfrak{B} mit Hilfe der Gleichungen (132) in den Komponenten von \mathbf{u} ausgedrückt hat,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{i} u_2 u_3 \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} + \mathbf{j} u_3 u_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} + \mathbf{k} u_1 u_2 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3}. \quad (133)$$

Anstatt die Komponenten mit Hilfe der \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} aneinander zu reihen, kann man sie natürlich auch einzeln anschreiben. Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \end{aligned} \right\}, \quad (134)$$

und das sind die Eulerschen Gleichungen in der ihnen gewöhnlich gegebenen Form. Sie sind gewöhnliche simultane Differentialgleichungen für die drei von der Zeit abhängigen Funktionen $u_1 u_2 u_3$. Die Integration ist freilich im allgemeinen Falle insofern nicht ganz einfach, als sie auf elliptische Funktionen führt. Im übrigen macht sie aber keine Schwierigkeiten.

Hier beschränke ich mich auf die Durchführung der Rechnung für den einfachen Fall, daß das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist (was z. B. bei der Anwendung auf die „Nutation“ der Erdachse angenommen werden kann). Es sei also

$$\Theta_2 = \Theta_3,$$

und zur Abkürzung möge ferner

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} = \gamma$$

gesetzt werden. Dann gehen die Eulerschen Gleichungen über in

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} = \gamma u_1 u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = -\gamma u_1 u_2. \quad (135)$$

Die erste Gleichung lehrt, daß u_1 konstant ist. Multipliziert man die zweite Gleichung mit u_2 und die dritte mit u_3 und addiert, so folgt

$$u_2 \frac{du_2}{dt} + u_3 \frac{du_3}{dt} = 0,$$

also durch Integration

$$u_2^2 + u_3^2 = C,$$

worin C eine durch die Anfangsbedingungen bestimmte Kon-

stante ist. Da auch u_1^2 konstant ist, so folgt dies auch für $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, d. h. der absolute Wert der Winkelgeschwindigkeit ist konstant und ebenso ihre Projektion auf die i -Achse. Der Vektor \mathbf{u} beschreibt demnach einen Kreiskegel um die i -Achse. Bis dahin sind wir nur zu einem Resultate gelangt, das uns aus der Poinsoischen Lehre von der Polodie bereits bekannt war. — Durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (135) nach t erhält man

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = \gamma u_1 \frac{d u_3}{dt},$$

und wenn man den Differentialquotienten von u_3 aus der dritten Gleichung einführt, wird daraus

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_2. \quad (136)$$

Ebenso wird, wenn man bei diesem Eliminationsverfahren die dritte der Gleichungen (135) mit der zweiten vertauscht

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_3. \quad (137)$$

Diese Differentialgleichungen sind uns ihrer Form nach bereits aus der Lehre von den harmonischen Schwingungen bekannt. Ihre allgemeine Lösung ist

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t, \quad (138)$$

und diese Lösung gilt bei passender Wahl der unbestimmten Integrationskonstanten ebenso auch für u_3 . Die Umlaufszeit T der Momentanachse um die Achse der Figur ergibt sich aus der Bedingung, das der Winkel $\gamma u_1 t$ währenddessen um 2π angewachsen sein muß; also

$$T = \frac{2\pi}{\gamma u_1}$$

oder nach Einsetzen des Wertes von γ

$$T = \frac{2\pi \Theta_2}{u_1 (\Theta_1 - \Theta_2)}. \quad (139)$$

Die Umlaufszeit der Nutationsbewegung wird demnach um so größer, je weniger sich die Hauptträgheitsmomente voneinander unterscheiden. Sie hängt außerdem von der Projektion

der Winkelgeschwindigkeit auf die Figurenachse, im übrigen aber nicht von dem Winkel ab, den \mathbf{u} mit der Figurenachse bildet.

Will man die auf den festen Raum bezogene Änderung der Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} mit der Zeit untersuchen, so schreibe man die Gleichung

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathbf{f} \frac{B_3}{\Theta_3}$$

zunächst in der folgenden Form an:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \cdot \frac{\mathbf{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1} + \mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2} + \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{f}\mathfrak{B}}{\Theta_3}$$

in der \mathfrak{B} und die Θ konstante Größen sind, während die Richtungen der Einheitsvektoren \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{f} , die mit den Trägheitshauptachsen zusammenfallen, jetzt mit der Zeit veränderlich sind. Hat man die \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{f} als Funktionen der Zeit dargestellt, so ist \mathbf{u} aus der vorstehenden Gleichung unmittelbar zu entnehmen. Nun beachte man, daß z. B.

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{i}$$

gefunden wird, und zwar auf Grund derselben Überlegung, die uns vorher auf $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ (relativ zum Körper genommen) geführt hatte. Setzen wir hier den Wert von \mathbf{u} aus der vorigen Gleichung ein und führen die Vektorprodukte aus den Einheitsvektoren aus, so erhalten wir die erste der folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2} - \mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{f}\mathfrak{B}}{\Theta_3} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \mathbf{i} \cdot \frac{\mathbf{f}\mathfrak{B}}{\Theta_3} - \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1} \\ \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{i}\mathfrak{B}}{\Theta_1} - \mathbf{i} \cdot \frac{\mathbf{j}\mathfrak{B}}{\Theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Die anderen beiden erhält man in derselben Weise. Man hat damit drei simultane Differentialgleichungen für die Unbekannten \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{f} . Wenn auch die Integration bedeutende Schwierigkeiten macht, wenigstens wenn man sich nicht auf die einfacheren Sonderfälle beschränkt, so ist damit doch wenigstens das Bewegungsgesetz, dem der Körper folgt, in analytischer Form dargestellt.

§ 29. Ein einfaches Beispiel.

Ein Ring, dessen Reif erheblich mehr Masse hat, als die radial geführten Arme, die den Reif mit einer in der Mitte gelegenen Nabe verbinden, soll im Schwerpunkte auf einer

Spitze gelagert sein. Zu Anfang möge die Ringebene horizontal liegen und der Ring möge eine Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u}_0 um irgendeine Achse besitzen, die aber nicht mit der Figurenachsens zusammenfallen soll. Im anderen Fall rotierte er nämlich um eine freie Achse und würde um diese immer weiter rotieren, ein Fall, der uns nicht weiter zu beschäftigen braucht.

Um die fernere Bewegung des Ringes angeben zu können, konstruieren wir zunächst ein Trägheitsellipsoid des Ringes, bei dem wir nur auf die Masse des Reifs zu achten brauchen, die wir uns überdies in der kreisförmigen Mittellinie vereinigt denken können. Wenn der Radius dieser Mittellinie mit r und die Masse des Reifs mit M bezeichnet werden, ist das Trägheitsmoment Θ_1 für die Figurenachsens

$$\Theta_1 = Mr^2$$

und die anderen Hauptträgheitsmomente sind

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{Mr^2}{2},$$

wie sich aus Gl. (120) oder auch nach Bd. III, Gl. (61), S. 96 d. 3. Aufl. sofort schließen läßt. Auf welche zur Figurenachsens senkrechten Achsen man Θ_2 und Θ_3 beziehen will, ist übrigens bei einem Rotationskörper gleichgültig, da jede derartige Achse eine Hauptträgheitsachsens ist.

Die Trägheitsradien verhalten sich hiernach wie $\sqrt{2} : 1$ und die Hauptachsens des Trägheitsellipsoids wie $1 : \sqrt{2}$. Hiernach kann das Zentrallipsoid in einem willkürlichen Maßstabe aufgetragen werden. In Abb. 33 ist dies geschehen. Der Schnitt durch den Reif ist durch zwei kleine schraffierte Kreise angedeutet; die Figurenachsens ist OA .

Wir tragen ferner die Richtung der Anfangswinkelgeschwindigkeit \mathbf{u}_0 ein; dabei wollen wir uns die Projektionsebene von vornherein so gewählt denken, daß sie durch die Richtung von \mathbf{u}_0 geht. Im Schnittpunkte von \mathbf{u}_0 mit der Ellipse, deren Achsen sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten, konstruieren wir eine Tangente. Diese ist die Spur der auf der Projektionsebene senkrecht stehenden unveränderlichen Ebene α . Recht-

winklig dazu steht die in der Projektionsebene enthaltene Richtungslinie des Dralls \mathfrak{B} .

Von der Voraussetzung, die wir seither stets machten, daß äußere Kräfte auf den starren Körper, abgesehen vom Auflagerdrucke an festen Punkte, nicht einwirken sollten, sind wir übrigens im vorliegenden Falle bis zu einem gewissen Grade frei. Wir können uns nämlich, da der Unterstützungspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, zugleich die Schwerkraft am Körper wirkend denken. Das Gewicht wird hier einfach vom Auflagerpunkte aufgenommen, hat aber keinen Einfluß auf die Bewegung. Es leistet nämlich weder Arbeit, noch hat es ein von Null verschiedenes statisches Moment für den festen Punkt; daher muß ganz wie früher sowohl die lebendige Kraft als der Drall \mathfrak{B} konstant sein und hierauf beruhten ja in der Tat alle Folgerungen der vorausgehenden Untersuchungen.

Die Polodie wird hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf

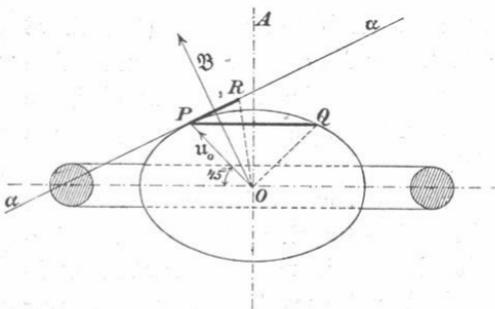


Abb. 33.

der Figurenachse liegt und dessen Ebene senkrecht auf ihr steht. Er hat die Projektion PQ in Abb. 33. Auch die Herpolodie wird ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte von \mathfrak{B} mit der unveränderlichen Ebene α zusammenfällt und der

sich in Abb. 33 als Strecke PR projiziert. Die fernere Bewegung des Rings wird nun in sehr einfacher Weise durch das Rollen des Kreiskegels OPQ um den ihn von innen berührenden festen Kreiskegel OPR beschrieben.

Um auch die Umlaufzeit T für ein bestimmtes Zahlenbeispiel berechnen zu können, nehme ich an, daß u_0 einen Winkel von 45° mit der Figurenachse bildete und gleich 20 Touren pro Sekunde war. Die Projektion u_1 auf die Figurenachse wird

hieraus durch Division mit $\sqrt{2}$ gefunden. Außerdem rechnen wir 20 Touren pro Sekunde auf Bogenmaß um und erhalten

$$u_1 = \frac{40\pi}{\sqrt{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

Ferner haben wir hier

$$\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2} = 1$$

und, wenn wir diese Werte in Gl. (139) einsetzen, erhalten wir

$$T = 0,0707 \text{ sec.}$$

Nach Ablauf dieser Zeit hat die Momentanachse wieder dieselbe Lage gegen den Ring. Sie hat aber nicht dieselbe Lage im Raume. Wenn die Durchmesser PQ und PR der Polodie und der Herpolodie nicht kommensurabel miteinander sind, kann der Anfangszustand sowohl der Lage des Ringes als dem Geschwindigkeitszustande nach überhaupt niemals wieder erreicht werden. Die Zeit, die vergeht, bis u den Heropolodiekegel einmal im festen Raume durchlaufen hat, verhält sich übrigens (da beide Kegel aufeinander rollen) zu T wie PR zu PQ .

Man kann noch nach der Bewegung fragen, die die Figuren-achse OA ausführt. Um diese zu finden, denke man sich durch den Punkt O eine Einheitskugel gelegt. Diese Kugel schneidet die beiden aufeinander rollenden Kegel nach Kreisen und OA im sphärischen Mittelpunkte des einen Kreises. Dieser Punkt beschreibt demnach ebenfalls einen Kreis um die unveränderliche Richtung \mathfrak{B} . In jedem Augenblicke liegen die Momentanachse u , das unveränderliche Moment \mathfrak{B} und die Figuren-achse in einer Ebene und der Winkel zwischen \mathfrak{B} und der Figuren-achse ist konstant. Hiernach macht die Figuren-achse in der gleichen Zeit einen Umlauf, in der auch der Herpolodiekegel einmal von u durchlaufen wird. In Abb. 34, die dies näher erläutern soll, deutet der Kreis P den Schnitt der Einheitskugel mit dem Polodiekegel, H den Schnitt mit dem Herpolodiekegel an, ferner ist \mathfrak{B} die Spur von \mathfrak{B} auf der Einheitskugel, A die Spur der Figuren-achse und der durch A gelegte punktierte Kreis gibt die Bahn an, die A auf der Einheitskugel durchläuft.

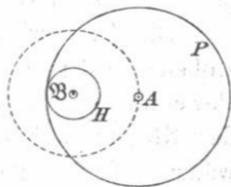


Abb. 34.

§ 30. Stöße am starren Körper.

Auf einen völlig freien starren Körper, der vorher in Ruhe war, möge ein Stoß einwirken, d. h. es soll während einer sehr kurzen Zeit an irgendeinem Angriffspunkte eine Kraft \mathfrak{P} angreifen, derart daß das Zeitintegral der Kraft $\int \mathfrak{P} dt$ über die ganze Stoßzeit erstreckt von gegebener Richtung und Größe ist. Außer \mathfrak{P} sollen während des Stoßvorgangs keine äußeren Kräfte an dem Körper angreifen. Es handelt sich zunächst darum, die Bewegung anzugeben, die der Körper durch den Stoß erlangt.

Hierbei ist daran zu erinnern, daß das Bild des starren Körpers keineswegs ausreicht, um alle Fragen zu beantworten, die sich auf den Stoß beziehen. Je kleiner wir uns die Stoßzeit vorstellen, desto größer muß während ihr der durchschnittliche Wert des Stoßdruckes \mathfrak{P} angenommen werden, damit der Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ die vorgeschriebene Größe erlange. Allzu groß darf aber \mathfrak{P} nicht werden, ohne Formänderungen von merklicher Größe oder einen Bruch des Körpers herbeizuführen. Im ersten Bande wurde dies schon ausführlich besprochen. Hier soll aber einstweilen vorausgesetzt werden, daß die Stoßzeit, wenn auch klein, so doch nicht so kurz bemessen sei, daß es nötig würde, auf die durch den Stoß bewirkten Formänderungen einzugehen. Unter dieser ausdrücklichen Voraussetzung können wir an dem Bilde des starren Körpers bei der Lösung der aufgeworfenen Frage festhalten.

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 , die der Schwerpunkt S des gestoßenen Körpers erlangt, läßt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes sofort angeben. Wenn die Masse des Körpers mit M bezeichnet wird, ist in jedem Augenblicke während des Stoßes

$$M \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathfrak{P},$$

und durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\int \mathfrak{P} dt}{M} = \frac{\mathfrak{A}}{M}, \quad (141)$$

wenn für den Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ des Stoßes außerdem noch zur Abkürzung der Buchstabe \mathfrak{A} gebraucht wird.

Zur Schwerpunktsbewegung \mathbf{v}_0 tritt noch eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, deren Winkelgeschwindigkeit nach Richtung und Größe mit \mathbf{u} bezeichnet werden soll. Wir finden sie, indem wir zunächst den auf den Schwerpunkt bezogenen Drall \mathfrak{B} des rotierenden Körpers berechnen. Nach dem Flächensatze ist in jedem Augenblicke

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \nabla \mathfrak{A} \mathfrak{p},$$

wenn \mathfrak{p} den vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte des Stoßes gezogenen Radiusvektor bedeutet. Durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathfrak{B} = \nabla \int \mathfrak{P} dt \cdot \mathfrak{p} = \nabla \mathfrak{A} \mathfrak{p}. \quad (142)$$

Um von \mathfrak{B} auf \mathbf{u} überzugehen, zerlegen wir \mathfrak{B} in seine drei rechtwinkligen Komponenten $B_1 B_2 B_3$ nach den Richtungen der drei Hauptträgheitsachsen des starren Körpers. Werden in diesen Richtungen drei Einheitsvektoren oder Richtungsfaktoren $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ angegeben, so ist nach Gl. (130) S. 187

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{B_3}{\Theta_3}.$$

Die Komponenten von \mathfrak{B} finden sich durch Entwicklung des äußeren Produkts $\nabla \mathfrak{A} \mathfrak{p}$ zu

$B_1 = A_2 p_3 - A_3 p_2$, $B_2 = A_3 p_1 - A_1 p_3$, $B_3 = A_1 p_2 - A_2 p_1$,
und wenn man diese einsetzt, erhält man

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} + \mathbf{j} \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} + \mathbf{k} \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3}. \quad (143)$$

Nachdem \mathbf{v}_0 und \mathbf{u} berechnet sind, kennt man die durch den Stoß hervorgerufene Bewegung bereits vollständig. Um auch noch die Geschwindigkeit \mathbf{v} zu berechnen, die ein beliebiger Punkt des starren Körpers erlangt hat, ziehen wir nach diesem Punkte vom Schwerpunkte aus einen Radiusvektor \mathbf{r} und setzen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla \mathbf{r} \mathbf{u}.$$

Durch Entwicklung des äußeren Produkts und Einsetzen der

für \mathbf{v}_0 und \mathbf{u} gefundenen Werte geht dies über in

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \mathbf{i} \left(\frac{A_1}{M} + r_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - r_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) \\ & + \mathbf{j} \left(\frac{A_2}{M} + r_3 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - r_1 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right) \\ & + \mathbf{k} \left(\frac{A_3}{M} + r_1 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - r_2 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} \right). \quad (144) \end{aligned}$$

Hiermit sind wir auch in den Stand gesetzt, den Satz von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten zu beweisen. Man denke sich nämlich am starren Körper zwei Punkte, die jetzt mit I und II bezeichnet werden mögen, beliebig ausgewählt und außerdem an jedem von ihnen eine beliebig gewählte Richtung α und β angeben, ganz so wie es bei dem Maxwell'schen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen in der Festigkeitslehre geschieht. Dann läßt sich behaupten, daß ein Stoß am Punkte I in der Richtung α dem Punkte II eine Geschwindigkeit verleiht, deren Komponente in der Richtung β ebenso groß ist, als die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung α , die ein Stoß am Punkte II von gleich großem Antriebe am Punkte I hervorbringt.

Zum Beweise der Behauptung beachte man, daß der für \mathbf{v} aufgestellte Ausdruck sofort auch zur Berechnung der Geschwindigkeit \mathbf{v}' benutzt werden kann, die der Punkt vom Radiusvektor \mathbf{p} erlangt, wenn ein Stoß von irgendeinem Impulse \mathfrak{Z} am Punkte vom Radiusvektor \mathbf{r} angebracht wird. Man braucht nur die Bezeichnungen entsprechend zu vertauschen und erhält dann

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = & \mathbf{i} \left(\frac{J_1}{M} + p_2 \frac{J_1 r_2 - J_2 r_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{J_3 r_1 - J_1 r_3}{\Theta_2} \right) \\ & + \mathbf{j} \left(\frac{J_2}{M} + p_3 \frac{J_2 r_3 - J_3 r_2}{\Theta_1} - p_1 \frac{J_1 r_2 - J_2 r_1}{\Theta_3} \right) \\ & + \mathbf{k} \left(\frac{J_3}{M} + p_1 \frac{J_3 r_1 - J_1 r_3}{\Theta_2} - p_2 \frac{J_2 r_3 - J_3 r_2}{\Theta_1} \right). \end{aligned}$$

Um auf die Komponenten von \mathbf{v} und \mathbf{v}' in den Richtungen von \mathfrak{Z} und \mathfrak{A} zu kommen, bilden wir die inneren Produkte

$\mathbf{v}\mathfrak{Z}$ und $\mathbf{v}'\mathfrak{A}$ und subtrahieren sie des Vergleiches wegen voneinander. Dabei beachte man, daß z. B.

$$\mathbf{v}\mathfrak{Z} = J_1 \left(\frac{A_1}{M} + r_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - r_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) \\ + J_2 \left(\frac{A_2}{M} + \dots \right) + \dots$$

zu setzen ist. Nachdem auch $\mathbf{v}'\mathfrak{A}$ in derselben Weise entwickelt ist, heben sich beim Subtrahieren alle Glieder gegeneinander fort und man erhält daher

$$\mathbf{v}\mathfrak{Z} = \mathbf{v}'\mathfrak{A}. \quad (145)$$

Da aber \mathfrak{A} und \mathfrak{Z} nach Voraussetzung den gleichen absoluten Wert haben sollten, folgt hieraus, daß auch die Projektion von \mathbf{v} auf die Richtung von \mathfrak{Z} ebenso groß sein muß, wie die Projektion von \mathbf{v}' auf die Richtung von \mathfrak{A} , womit der Satz bewiesen ist. — Ein anderer Beweis des Satzes, der sich dem in der Festigkeitslehre gegebenen Beweise des ihm ähnlichen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen auch der Form nach aufs engste anschließt, ergibt sich aus dem Zusammenhange zwischen der vom Stoßdrucke geleisteten Arbeit und der lebendigen Kraft, die der Körper durch den Stoß erlangt.

Zwar folgt schon ohne weiteres aus dem Satze von der lebendigen Kraft, daß die Arbeit des Stoßdruckes gleich der von ihr hervorgebrachten lebendigen Kraft sein muß. Wegen des Verlustes an lebendiger Kraft, der in manchen Fällen des Stoßes eintritt, ist es aber der Vorsicht wegen, um sich nämlich vor naheliegenden irrigen Schlüssen zu schützen, ratsam, sich auch noch unmittelbar davon zu überzeugen, daß der Satz von der lebendigen Kraft in unserem Falle ebenfalls zu Recht besteht. Um diesen Nachweis zu führen, wende man den in Gl. (144) für \mathbf{v} aufgestellten Ausdruck zur Berechnung der Geschwindigkeit an, die der Angriffspunkt des Stoßes selbst erlangt hat. Dazu ist nur nötig, die Komponenten $r_1 r_2 r_3$ des Radiusvektors \mathbf{r} durch die Komponenten $p_1 p_2 p_3$ von \mathbf{p} zu ersetzen. Nebenbei bemerkt, ergibt sich daraus zugleich, daß sich der Angriffspunkt des Stoßes im allgemeinen keineswegs

in der Stoßrichtung selbst, sondern in einer davon abweichenden Richtung bewegt.

Wir wollen ferner ein Zeitelement dt auswählen, das in die Stoßzeit hineinfällt. Bis zum Beginne dieses Zeitelements hat der Angriffspunkt des Stoßes noch nicht seine volle Geschwindigkeit erlangt. Wir können aber die zu dieser Zeit bereits bestehende Geschwindigkeit ebenfalls nach der früheren Formel berechnen, wenn wir darin jetzt unter $A_1 A_2 A_3$ die Komponenten jenes Teiles des ganzen Antriebs $\int \mathfrak{P} dt$ verstehen, der zeitlich vor dt liegt. Der Weg $d\mathfrak{s}$ des Angriffspunktes während dt ergibt sich dann zu

$$d\mathfrak{s} = dt \left\{ \mathbf{i} \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \right\},$$

und die Arbeit des Stoßdruckes \mathfrak{P} während dt wird gleich

$$dt \left\{ P_1 \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + P_2 \left(\frac{A_2}{M} + p_3 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - p_1 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right) + P_3 \left(\frac{A_3}{M} + p_1 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - p_2 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} \right) \right\}.$$

Andererseits wollen wir berechnen, um wie viel sich die lebendige Kraft des gestoßenen Körpers während dt vermehrt. Beziehen sich auch hier \mathbf{v}_0 und \mathbf{u} auf den Anfang des Zeitelementes dt , so ist die zugehörige lebendige Kraft L (vgl. Gl. (115), S. 169)

$$L = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 u_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_3 u_3^2$$

oder, wenn man die früher berechneten Komponenten von \mathbf{v}_0 und \mathbf{u} einsetzt,

$$L = \frac{1}{2} \frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{(A_2 p_3 - A_3 p_2)^2}{\Theta_1} + \frac{1}{2} \frac{(A_3 p_1 - A_1 p_3)^2}{\Theta_2} + \frac{1}{2} \frac{(A_1 p_2 - A_2 p_1)^2}{\Theta_3}.$$

In diesem Ausdrucke sind nur die Komponenten von \mathfrak{A}

mit der Zeit veränderlich, und zwar so, daß

$$\frac{dA_1}{dt} = P_1, \quad \frac{dA_2}{dt} = P_2, \quad \frac{dA_3}{dt} = P_3$$

ist. Für den Zuwachs dL von L während dt findet man daher

$$dL = dt \left\{ \frac{A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3}{M} + (P_2 p_3 - P_3 p_2) \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} \right. \\ \left. + (P_3 p_1 - P_1 p_3) \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} + (P_1 p_2 - P_2 p_1) \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right\}.$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem vorher für die Arbeit des Stoßdruckes aufgestellten — abgesehen von der etwas abweichenden Anordnung der einzelnen Glieder — genau überein und die Anwendbarkeit des Satzes von der lebendigen Kraft ist hiermit auch unmittelbar bewiesen.

Ehe ich weiter gehe, möchte ich hier noch darauf aufmerksam machen, daß die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft in der gewöhnlichen Form wesentlich von der an die Spitze dieser Betrachtungen gestellten Voraussetzung abhängt, daß die Gestaltänderung des Körpers während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden dürfe. Erfährt der Körper Formänderungen, die selbst nur in der Nachbarschaft des Stoßangriffspunktes von merklicher Größe zu sein brauchen, so hört die Gültigkeit der vorhergehenden Entwicklungen auf. Der Angriffspunkt legt nämlich, wenn das Material des Körpers etwas nachgiebig ist, wegen der Zusammendrückung an der Kraftübertragungsstelle einen etwas größeren Weg zurück, als vorher berechnet wurde, und damit wird auch die Arbeit des Stoßdruckes größer als vorher und hiermit zugleich auch größer als die lebendige Kraft, die durch den Stoß hervorgebracht wird. Der Grund für diese Abweichung vom Satze von der lebendigen Kraft in der üblichen Form liegt darin, daß nun auch die inneren Kräfte arbeiten. Der Überschuß der Arbeit des Stoßdruckes über die hervorgebrachte lebendige Kraft wird zur Überwindung der inneren Kräfte verwendet und falls der Körper vollkommen elastisch sein sollte, in Gestalt von Formänderungsarbeit aufgespeichert.

In je kürzerer Zeit sich ein Stoß von gegebenem Antriebe abspielt, um so mehr tritt der Einfluß der Formänderung hervor, und zwar aus doppeltem Grunde. Zunächst muß nämlich der Stoßdruck um so größer sein, je kürzer die Stoßzeit ist, damit der Impuls den vorgeschriebenen Wert behalte. Der größeren Kraft entspricht aber eine größere Formänderung. Dazu kommt ferner noch, daß zugleich der Weg, den der Angriffspunkt des Stoßes, abgesehen von der Form-

änderung, während der Stoßdauer zurücklegt, in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Stoßzeit selbst. Aus beiden Gründen wächst daher der aus der Formänderung hervorgehende Anteil des ganzen Weges, auf dem die Arbeit des Stoßdrucks geleistet wird, gegenüber dem Teile, der von der Bewegung des als starr aufgefaßten gesamten Körpers herrührt, wenn die Stoßdauer kürzer wird. Man erkennt hieraus, in welche Widersprüche und Fehler man geraten kann, wenn man, wie es immer noch oft genug geschieht, eine Lehre vom Stoße starrer Körper bis in ihre letzten Folgerungen hinein durchführen will, ohne auf die Unzulänglichkeit des gebrauchten Bildes zu achten, sobald die Stoßdauer zu kurz wird.

Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, mögen die vorhergehenden Schlüsse auf den Fall angewendet werden, daß zwei freie Körper aufeinander stoßen. Dabei soll für den Augenblick auf die — von mir freilich keineswegs geteilte — Vorstellung eingegangen werden, daß es ein zulässiges Problem der Mechanik sei, den Stoß von Körpern zu untersuchen, die in Gedanken ohne fernere Bedingungen nur als absolut starr betrachtet werden könnten. Der Schluß liegt dann nahe, die Arbeit der inneren Kräfte wegen des Fehlens jeder Formänderung gleich Null zu setzen und daraus zu folgern, daß die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper durch den Stoß keine Änderung erfahre, während man doch im Gegenteile gewöhnlich einen Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper herausrechnet. Der Widerspruch klärt sich einfach dadurch auf, daß der auf die Formänderung verwendete Anteil der Arbeit des Stoßdruckes, sobald man den Grenzübergang zum starren Körper vollzieht, in der Form $\infty \cdot 0$ auftritt. Dies ist, solange keine weitere Bedingung hinzutritt, ein unbestimmter Ausdruck, der je nach der Art, wie man sich den Grenzübergang vollzogen denkt, verschiedene Werte annimmt. Der Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper kann daher ohne Zuhilfenahme bestimmter willkürlicher Voraussetzungen durch kein allgemein bewährtes Grundgesetz der Mechanik berechnet werden.

Nach diesen Abschweifungen kehre ich zum Satze von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten zurück. Man denke sich an den Punkten *I* und *II* in den Richtungen α und β , von denen früher die Rede war, nacheinander zwei Stöße von den Impulsen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} angebracht. Dabei ist es, wenn nur beide Stöße so schnell aufeinanderfolgen, daß sich der Körper in der Zwischenzeit nicht merklich aus der anfänglichen Lage verschoben hat, nach dem Gesetze von der Super-

position der Bewegungen gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Stöße ausgeübt werden. Bei jeder Reihenfolge der Stöße erlangt der Körper dieselbe lebendige Kraft und daher muß auch die Summe der Arbeiten beider Stoßdrücke denselben Wert annehmen. Diese Arbeiten lassen sich aber sofort berechnen. Dazu möge die Geschwindigkeit von Punkt *I* in jedem Falle mit v_I , und zwar jene, die durch den Impuls \mathfrak{A} am Punkte *I* hervorgebracht wird, speziell mit $v_{I, \mathfrak{A}}$, jene, die vom Impuls \mathfrak{B} erzeugt wird, mit $v_{I, \mathfrak{B}}$ bezeichnet werden und in demselben Sinne sollen für den Punkt *II* die Bezeichnungen $v_{II, \mathfrak{A}}$ und $v_{II, \mathfrak{B}}$ gebraucht werden. Wird nun der Stoß \mathfrak{A} zuerst und unmittelbar darauf der Stoß \mathfrak{B} ausgeführt, so legt der Angriffspunkt *I* von \mathfrak{A} , wegen des allmählichen Anwachsens der Geschwindigkeit von 0 bis $v_{I, \mathfrak{A}}$ während der Stoßzeit τ einen Weg $\frac{1}{2} v_{I, \mathfrak{A}} \cdot \tau$ zurück und die Arbeit von \mathfrak{A} während der ganzen Stoßzeit ist daher gleich

$$\frac{1}{2} v_{I, \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Angriffspunkt *II* von \mathfrak{B} hat zu Beginn des zweiten Stoßes bereits die Geschwindigkeit $v_{II, \mathfrak{A}}$, und dazu summiert sich noch während des Stoßes die von 0 bis zu ihrem Endwerte anwachsende Geschwindigkeit $v_{II, \mathfrak{B}}$. Die Arbeitsleistung des zweiten Stoßes berechnet sich daher zu

$$\left(v_{II, \mathfrak{A}} + \frac{1}{2} v_{II, \mathfrak{B}} \right) \cdot \mathfrak{B}.$$

Die der erzeugten lebendigen Kraft gleiche Arbeitsleistung beider Stöße ergibt sich daher zu

$$\frac{1}{2} v_{I, \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A} + v_{II, \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{B} + \frac{1}{2} v_{II, \mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{B}.$$

Erfolgen dagegen beide Stöße in umgekehrter Reihenfolge, so findet man die gesamte Arbeitsleistung auf dem gleichen Wege zu

$$\frac{1}{2} v_{II, \mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{B} + v_{I, \mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{2} v_{I, \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Beide Werte müssen einander gleich sein und der Vergleich liefert.

$$\mathbf{v}_{II, \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{Z} = \mathbf{v}_{I, \mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Sind demnach die Antriebe \mathfrak{A} und \mathfrak{Z} von gleicher absoluter Größe, so folgt für die Projektionen der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_{I, \mathfrak{Z}}$ und $\mathbf{v}_{II, \mathfrak{A}}$ auf deren Richtungslinien

$$v'_{I, \mathfrak{Z}} = v'_{II, \mathfrak{A}}, \quad (146)$$

womit der Satz von neuem, und zwar diesmal auf ganz gleichem Wege wie früher der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen an elastischen Körpern bewiesen ist. — Hierbei mag noch bemerkt werden, daß die Punkte I und II auch in einen einzigen zusammenfallen dürfen, während die Richtungslinien der Stöße \mathfrak{A} und \mathfrak{Z} verschieden voneinander sind. Auch für diesen Fall gilt der Satz.

Schließlich sei hier noch darauf hingewiesen, wie sich das Prinzip von d'Alembert gestaltet, wenn es auf Stöße am starren Körper angewendet wird. Solange der Stoß vom Antriebe $\mathfrak{A} = \int \mathfrak{P} dt$ einwirkt, bringt er an jedem Massenpunkte des Körpers eine gewisse Beschleunigung hervor, die gleich $\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ geschrieben werden kann und die zu jeder Zeit proportional mit \mathfrak{P} ist. Bringt man die Trägheitskräfte $-m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ an, so bilden sie mit \mathfrak{P} in jedem Augenblicke ein Gleichgewichtssystem. Um dieses Gleichgewichtssystem näher zu untersuchen, kann man sich an Stelle von \mathfrak{P} auch $\int \mathfrak{P} dt$ gesetzt denken, wenn man nur auch für jede Trägheitskraft ihr Zeitintegral, also $-m \left(\frac{d \mathfrak{s}}{dt} - \left(\frac{d \mathfrak{s}}{dt} \right)_0 \right)$ oder mit anderen Worten $-m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ einsetzt, falls hier unter \mathbf{v}_0 die Geschwindigkeit verstanden wird, die der betreffende materielle Punkt etwa schon vor dem Stoße hatte. In Worten heißt dies, daß der durch eine Kraft in irgendeinem Maßstab dargestellte Impuls mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Zuwächsen der Bewegungsgrößen, falls man sie sich im gleichen Maßstabe durch Kräfte wiedergegeben denkt,

ein Gleichgewichtssystem bildet. Schreibt man an, daß des Gleichgewichts wegen die geometrische Summe der darstellenden Kräfte gleich Null sein, und daß die Summe ihrer statischen Momente verschwinden muß, wobei man den Schwerpunkt zum Momentenpunkte wählen kann, so gelangt man wieder zu denselben Gleichungen, die vorher aus dem Schwerpunkts- und dem Flächensatze abgeleitet worden waren.

§ 31. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper.

Unter einem starren Körper soll jetzt der Grenzfall eines weichen oder plastischen, d. h. eines Körpers vom Elastizitätsgrade Null verstanden werden, der aus einem solchen dadurch hervorgeht, daß man sich die Zusammendrückbarkeit des Körpers unter stetiger Festhaltung der genannten Eigenschaft bis auf Null vermindert denkt. Eine solche nähere Bestimmung ist, wie wir vorher erkannten, nötig, um den Aufgaben über den Stoß starrer Körper gegeneinander eine physikalisch zulässige Bedeutung zu geben. Wenn dies von anderen Autoren auch nicht ausdrücklich ausgesprochen wird, liegt diese Vorstellung doch überall stillschweigend zugrunde, wo anderwärts vom Stoße starrer Körper geredet wird oder die darüber angestellten Betrachtungen bleiben wenigstens nur dann richtig, wenn man dem unbestimmt gelassenen Begriffe des starren Körpers nachträglich überall den hier genauer angegebenen Sinn unterlegt.

Wenn zwei weiche Körper aufeinander stoßen, endigt der Stoß mit der ersten Stoßperiode, d. h. mit dem Augenblicke, in dem die Körper an der Berührungsstelle gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die durch die Zusammendrückung der Körper hervorgerufene Annäherung hat dann zugleich ihren größten Wert erreicht. Auch für den Stoß starrer Körper in dem hier definierten Sinne ist daher die Bedingung festzuhalten, daß die Körper an der Stoßstelle gleiche Geschwindigkeiten durch den Stoß erlangen. Dabei ist zunächst an den geraden Stoß gedacht. Für den allgemeinen Fall des Stoßes

zweier starrer Körper gegeneinander soll die Aussage dahin ergänzt werden, daß die Stoßstellen gleiche Geschwindigkeits-Komponenten in der Richtung der Stoßnormalen erlangen, und daß ferner einem Gleiten der Oberflächen übereinander während des Stoßes keine Reibung entgegenstehe. Die letzte Voraussetzung ist freilich abermals vollkommen willkürlich eingeführt und sie entspricht, wie wir wissen, dem wahren Verhalten der festen Körper keineswegs. Als nähere Definition des idealen starren Körpers ist sie aber zulässig, und da der Satz von Carnot, der sich auf starre Körper von den hier vorausgesetzten Eigenschaften bezieht, in manchen Teilen der technischen Mechanik eine nicht unerhebliche Rolle spielt, mag sie an dieser Stelle gelten.

Dabei möchte ich freilich sofort bemerken, daß meine Absicht bei der Behandlung des Carnotschen Satzes hauptsächlich darauf hinausgeht, meine Leser durch eine genauere Darlegung des wahren Sachverhaltes vor einer Überschätzung dieses Satzes, auf den man sich in der technischen Hydraulik sehr häufig bezieht, zu schützen und sie dadurch davor zu behüten, manche Formeln, die als Näherungsannahmen eine gewisse Berechtigung haben, für streng beweisbare und daher entsprechend zuverlässige Folgerungen aus den Grundgesetzen der Mechanik anzusehen.

Der Verlust an lebendiger Kraft beim geraden zentralen Stoße weicher (und hiermit auch der „starren“) Körper ist schon im ersten Bande ermittelt worden. Bezeichnet man die Massen beider Körper mit m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten vor dem Stoße mit v_1 und v_2 , wobei $v_2 > v_1$ sein möge, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der ersten Stoßperiode, die hier vorübergehend mit w bezeichnet werden mag,

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

und der Verlust an lebendiger Kraft stellt sich zunächst in der Form

$$\text{Verl} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) \frac{w^2}{2}$$

dar. Dieser Ausdruck kann auf verschiedene Art umgeformt werden, und zwar, um auf den Carnotschen Satz zu kommen, auch in folgender Weise

$$\text{Verl} = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2) w^2 - 2(m_1 + m_2) w^2)$$

oder, wenn man in dem letzten mit w^2 behafteten Gliede für den einen Faktor w den vorher dafür festgestellten Wert einsetzt,

$$\begin{aligned} \text{Verl} &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_1 w^2 + m_2 w^2 - 2w(m_1 v_1 + m_2 v_2)) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2. \end{aligned} \quad (147)$$

Die beiden Glieder dieses Ausdrucks haben eine einfache Bedeutung. Die Differenzen $w - v_1$ und $v_2 - w$ geben nämlich die Geschwindigkeitsänderungen an, die beide Körper durch den Stoß erfahren. Faßt man daher diese Geschwindigkeitsänderungen als selbständige Bewegungszustände auf, so ist die Summe der zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte ebenso groß als der in Wirklichkeit eintretende Verlust an lebendiger Kraft, den wir berechnen wollten. Diese Aussage spricht den Carnotschen Satz aus, der indessen, wie sich sofort zeigen wird, nicht nur für den geraden zentralen Stoß, sondern auch noch in viel allgemeineren Fällen seine Gültigkeit behält.

Zunächst gilt der Satz auch für den beliebigen — schiefen und exzentrischen — Stoß von zwei freien starren Körpern gegeneinander. Um dies zu beweisen, bezeichne ich die Geschwindigkeit der vom Stoße getroffenen Stelle des ersten Körpers in irgendeinem Augenblicke während der Stoßzeit mit \mathbf{w}_1 , die Geschwindigkeit der Stoßstelle des zweiten Körpers mit \mathbf{w}_2 . Da sich die Körper an der Stoßstelle während der ganzen Stoßdauer berühren — obschon die Oberflächen im allgemeinen zugleich übereinander gleiten —, müssen die in der Richtung der Stoßnormalen genommenen Komponenten von \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 gleich groß sein. Der ebenfalls in die Richtung der Stoßnormalen fallende Stoßdruck am ersten

Körper sei mit \mathfrak{P} , das bis zu dem betrachteten Augenblicke genommene Zeitintegral von \mathfrak{P} mit \mathfrak{A} und das über die ganze Stoßdauer erstrebte Zeitintegral mit \mathfrak{A}' bezeichnet. Am zweiten Körper kehren sich die Richtungen von \mathfrak{P} und \mathfrak{A} dem Wechselwirkungsgesetze zufolge um und man hat daher für ihn $-\mathfrak{P}$ bzw. $-\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}'$ zu setzen. Die Arbeit von \mathfrak{P} am ersten Körper während eines Zeitelementes dt ist gleich

$$\mathfrak{P} w_1 dt,$$

und die Arbeit des Stoßdrucks am zweiten Körper gleich

$$-\mathfrak{P} w_2 dt.$$

Nach dem, was vorher über w_1 und w_2 bemerkt wurde, sind beide Arbeiten von gleicher Größe und entgegengesetzten Vorzeichen, also

$$\mathfrak{P}(w_1 - w_2) = 0. \quad (148)$$

Die Geschwindigkeiten w_1 und w_2 der Stoßstellen sind aber nicht jene, die diesen zukämen, wenn sie sich so bewegten, wie es dem starren Zusammenhange mit den fern von der Stoßstelle gelegenen Körpermassen entspräche. So klein auch die Formänderungen sein mögen, und wenn wir sie beim Grenzübergange vom weichen zum starren Körper schließlich selbst ganz verschwinden lassen: während der dann ebenfalls gegen Null hin konvergierenden Stoßdauer müssen wir jedenfalls darauf Rücksicht nehmen, daß sich die Stoßstelle der minimalen Formänderung wegen mit anderer Geschwindigkeit zu bewegen vermag, als es dem starren Zusammenhange mit der Hauptmasse des gestoßenen Körpers entsprechen würde. Jene Geschwindigkeiten der Stoßstellen, die den Bewegungszuständen der beiden Körper im gegebenen Augenblicke mit Vernachlässigung der Formänderung an der Stoßstelle zugehörten, seien zum Unterschiede von w_1 und w_2 mit v_1 und v_2 bezeichnet.

Die Änderung, die die lebendige Kraft des ersten Körpers während dt erfährt, ist gleich jener Arbeit des Stoßdrucks \mathfrak{P} , die zum Wege $v_1 dt$ gehört, denn wir wissen schon aus den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen, daß die

Arbeit eines Impulses $\mathfrak{P}dt$ gleich der von ihr verursachten Änderung der lebendigen Kraft ist, falls während dt keine Formänderung eintritt. Der Rest, also

$$\mathfrak{P}(w_1 - v_1)dt$$

wird auf die Formänderungsarbeit am ersten Körper verwendet. Hierbei ist übrigens wohl zu beachten, daß auch beim starren Körper eine endliche Formänderungsarbeit möglich ist, denn wenn auch der Weg der Zusammendrückung gegen Null konvergiert, so konvergiert gleichzeitig die Größe des Stoßdrucks gegen Unendlich und das Produkt $0 \cdot \infty$ behält bei der hier zugrunde gelegten Definition des starren Körpers einen endlichen Wert.

Ebenso wird während des Zeitelementes dt die Arbeit

$$- \mathfrak{P}(w_2 - v_2)dt$$

auf die Formänderung des zweiten Körpers verwendet. Die Summe beider Formänderungsarbeiten ist gleich dem Verluste an lebendiger Kraft während dt , also

$$d \text{Verl} = \mathfrak{P}(w_1 - v_1 - w_2 + v_2)dt,$$

und daher mit Berücksichtigung von Gl. (148) auch

$$d \text{Verl} = \mathfrak{P}(v_2 - v_1)dt.$$

Der gesamte Verlust an lebendiger Kraft während der ganzen Stoßdauer folgt daraus zu

$$\text{Verl} = \int (v_2 - v_1) \mathfrak{P} dt.$$

Um die Integration nach der Zeit auszuführen, bezeichne ich die Geschwindigkeit v_1 , die dem Anfange des Stoßes entspricht, mit v_1^0 und die am Ende des Stoßes mit v_1' . Die Änderung $v_1' - v_1^0$ entspricht dem ganzen Stoßimpulse \mathfrak{A}' , die Änderung $v_1 - v_1^0$ bis zu dem betrachteten Augenblicke dem bis dahin bereits verstrichenen Impulse \mathfrak{A} und die beiden Änderungen verhalten sich zueinander wie die absoluten Werte A und A' dieser Impulse, da die Richtung des Stoßdrucks fortwährend mit der Stoßnormalen zusammenfällt und sich daher nicht ändert. Man hat daher

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^0 + \frac{A}{A'}(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1^0) \quad \text{und ebenso} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^0 + \frac{A}{A'}(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2^0).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\text{Verl} = (\mathbf{v}_2^0 - \mathbf{v}_1^0) \int \mathfrak{P} dt + (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2^0 - \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1^0) \int \frac{A}{A'} \mathfrak{P} dt.$$

Nun ist aber $\mathfrak{P} dt = d\mathfrak{A}$, und daher

$$\text{Verl} = (\mathbf{v}_2^0 - \mathbf{v}_1^0) \mathfrak{A}' + (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2^0 - \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1^0) \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{A}'.$$

Beachtet man ferner noch, daß am Ende des Stoßes die Projektionen von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 auf die Stoßnormale gleich groß geworden sind, so vereinfacht sich dies zu

$$\text{Verl} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2^0 - \mathbf{v}_1^0) \mathfrak{A}'. \quad (149)$$

Hiermit ist ein Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft gefunden, von dem nur noch gezeigt zu werden braucht, daß er mit dem nach dem Carnotschen Satze berechneten übereinstimmt. Zu diesem Zwecke sei nun irgend ein fern von der Stoßstelle liegender materieller Punkt des ersten Körpers ins Auge gefaßt, dessen Geschwindigkeit vor dem Stoße mit \mathbf{v}^0 und nach dem Stoße mit \mathbf{v}' (also unter Weglassung des unteren Zeigers gegenüber den vorher gebrauchten Bezeichnungen) bezeichnet werden soll. Wir können dann sagen, daß der spätere Bewegungszustand des ersten Körpers aus dem früheren dadurch hervorgeht, daß sich ihm ein Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ zugesellt. Betrachtet man, wie es bei der Aussage des Carnotschen Satzes geschieht, den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ für sich, so gehörte ihm, wenn er allein vorkäme, eine gewisse lebendige Kraft zu, die mit L_1 bezeichnet werden mag. Nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen ließe sich der Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ jedenfalls dadurch getrennt für sich hervorbringen, daß man an dem ruhend gedachten ersten Körper den Stoß vom Impulse \mathfrak{A}' wirken ließe. Unter der Voraussetzung, daß sich dieser Stoß ohne Formänderung abspielte, wäre dann die lebendige Kraft L_1 , die durch den Stoß hervorgebracht würde, gleich der Arbeit des Impulses zu setzen. Dabei müßte die Geschwindig-

keit der Stoßstelle während des Stoßes von Null bis zu dem Endwerte $\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}^0_1$ wachsen. Die Arbeit des Impulses und hiermit die lebendige Kraft L_1 berechnet sich demnach zu

$$L_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}^0_1) \mathfrak{A}',$$

und ebenso findet man für den zweiten Körper

$$L_2 = -\frac{1}{2} \mathfrak{A}' (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}^0_2),$$

wobei nur zu beachten ist, daß bei ihm $-\mathfrak{A}'$ an Stelle von \mathfrak{A}' tritt. Die Summe liefert

$$L_1 + L_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}^0_1 - \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}^0_2) \mathfrak{A}'.$$

Da nun, wie vorher schon bemerkt war, am Ende des plastischen Stoßes die Projektion von \mathbf{v}'_1 auf die Stoßnormale oder auf die Richtung von \mathfrak{A}' ebenso groß ist wie die Projektion von \mathbf{v}'_2 , stimmt dies genau mit dem Werte in Gl. (149) überein und man findet

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \quad (150)$$

womit der Carnotsche Satz auch für den allgemeinsten Fall des Stoßes von zwei „plastisch-starren“ Körpern gegeneinander bewiesen ist.

Auch auf den Fall, daß die stoßenden Körper nicht völlig frei, sondern bestimmten Bedingungen unterworfen sind, läßt sich der Satz unter Beibehaltung der früheren Schlußweise übertragen, falls dabei nur immer vorausgesetzt wird, daß alle Körper, durch die diese Bedingungen verwirklicht sind, auch wenn sie in der Grenze als starr angesehen werden, selbst im Grenzfalle noch den Elastizitätsgrad Null haben, und daß ferner kein weiterer Verlust an lebendiger Kraft durch Reibungen herbeigeführt wird. Ich begnüge mich damit, dies hier noch an einem einfachen Falle dieser Art zu zeigen.

Ein starrer Körper möge zunächst völlig frei sein und eine beliebige Anfangsbewegung besitzen. Dann soll irgendein Punkt von ihm durch eine geeignete Vorrichtung plötzlich festgehalten werden, so daß

sich der Körper von da ab nur noch um diesen festen Punkt weiter zu drehen vermag. Man soll angeben, wie er sich weiterhin bewegt und wie groß der Verlust an lebendiger Kraft ist, den er durch den Stoß erleidet.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes vor dem Stoße sei wieder mit \mathbf{v}^0 , die nach dem Stoße mit \mathbf{v}' bezeichnet, die Geschwindigkeiten der Stoßstelle insbesondere, sofern von der Formänderung abgesehen wird, mit \mathbf{v}_1^0 und \mathbf{v}'_1 , wobei freilich zu beachten ist, daß auch hier wieder während der Stoßzeit die wahre Geschwindigkeit \mathbf{w}_1 des Punktes, den man festzuhalten im Begriffe ist, der unvermeidlichen Formänderung wegen, von \mathbf{v}_1 verschieden ist. Die Endgeschwindigkeit \mathbf{v}'_1 ist übrigens nach der im vorliegenden Falle vorgeschriebenen Bedingung gleich Null zu setzen. — Durch den Stoß wird der Bewegungszustand um $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ abgeändert und wir können uns einen selbständigen Bewegungszustand denken, der sich dem vorhergehenden überlagert und bei dem jeder Punkt die Geschwindigkeit $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$, die Stoßstelle also speziell die Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_1^0$ besitzt. Der Stoßimpuls, von dem zunächst nur der Angriffspunkt gegeben ist, muß jedenfalls so gerichtet und von solcher Größe sein, daß er für sich den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ hervorruft, insbesondere also seinem Angriffspunkte die gegebene Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_1^0$ erteilt. Dadurch ist aber, wie aus § 30 hervorgeht, der Stoßimpuls schon vollständig bestimmt. Nach Gl. (144) (S. 206) folgt nämlich, wenn man darin die Komponenten von \mathbf{r} noch speziell durch die von \mathbf{p} ersetzt, die zu einem gegebenen Stoßimpulse \mathfrak{A} gehörige Geschwindigkeit \mathbf{v} des Angriffspunktes von \mathfrak{A} . Zerlegt man diese Gleichung in drei Komponentengleichungen nach den Richtungen der \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , so lassen sich diese drei Gleichungen auch nach den Komponenten $A_1 A_2 A_3$ von \mathfrak{A} auflösen, indem sie für diese Unbekannten vom ersten Grade sind. Nachdem dies geschehen ist, kennt man den Stoßimpuls \mathfrak{A} nach Richtung und Größe, der auf den festzuhaltenden Punkt vom Gestelle aus übertragen werden muß. Hiermit ist auch

der Bewegungszustand nach dem Stoße als bekannt zu betrachten.

Für den Verlust an lebendiger Kraft können wir ohne weiteres den Ausdruck in Gl. (149) in Anspruch nehmen, wenn wir unter dem zweiten Körper, auf den sich \mathbf{v}_2^0 bezieht, das Gestell verstehen, also die Vorrichtung, durch die der betreffende Punkt genötigt wird, nach Ablauf des Stoßes in Ruhe zu bleiben. Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_2^0 selbst ist daher gleich Null zu setzen und man hat

$$\text{Verl} = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_1^0 \mathfrak{A}'.$$

Das hier auftretende Minuszeichen erklärt sich leicht damit, daß \mathfrak{A}' den Stoßimpuls am ersten Körper bedeutet, der die Geschwindigkeit \mathbf{v}_1^0 vernichtet, also ungefähr — wenn auch keineswegs genau — entgegengesetzt gerichtet mit \mathbf{v}_1^0 sein muß. Das innere Produkt $\mathbf{v}_1^0 \mathfrak{A}'$ hat daher an sich einen negativen, der Verlust an lebendiger Kraft dagegen, des Minuszeichens wegen, einen positiven Wert.

Nun beachte man, daß der Stoßimpuls \mathfrak{A}' am ruhend gedachten Körper den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ hervorbrächte. Die diesem zugehörige lebendige Kraft sei wieder mit L_1 bezeichnet. Dann ist L_1 ebenso groß wie die Arbeit des Stoßimpulses \mathfrak{A}' , wenn dieser den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ aus dem Ruhestande heraus hervorbringt. Dabei steigt aber die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von \mathfrak{A}' von Null an bis auf $-\mathbf{v}_1^0$ an und für die Arbeit von \mathfrak{A}' und hiermit zugleich für L_1 erhält man daher

$$L_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_1^0 \mathfrak{A}'.$$

Mit dem vorher für Verl gefundenen Werte stimmt dies aber genau überein und wir finden daher auch hier den Carnotschen Satz durch die Gleichung

bestätigt.
$$\text{Verl} = L_1$$

Man sieht nun auch leicht ein, daß sich derselbe Beweisgang auch auf andere Arten von Zwangsbedingungen übertragen läßt, solange es sich um einen rein plastischen Stoß

handelt, für den die zu Gl. (149) führende Betrachtung stets ohne Änderung übernommen werden kann.

Dagegen wird der Carnotsche Satz stets ungültig, sobald der Stoß entweder nicht ganz unelastisch ist oder sobald (etwa beim schiefen Stoße) Reibungen vorkommen, die sich dem Übereinanderweggleiten der Stoßstellen widersetzen.

§ 32. Die Kreiselbewegung.

Wir nehmen jetzt die schon in § 26 behandelte Bewegung eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt reibungsfrei zu drehen vermag, von neuem wieder auf, jedoch mit dem Unterschiede, daß außer dem Auflagerdrucke am festen Punkte jetzt auch noch das Eigengewicht des Körpers als weitere äußere Kraft zur Geltung kommen soll. Ein Körper, der diesen Bedingungen unterworfen ist, wird gewöhnlich als ein Kreisel bezeichnet, wenigstens dann, wenn ihm von vornherein eine große Winkelgeschwindigkeit erteilt wurde. Die sich hieran unter den angegebenen Bedingungen anschließende Bewegung heißt die Kreiselbewegung. Indessen bezeichnet man zuweilen auch schon den in § 26 behandelten Körper, der um einen festen Punkt rotierte, ohne daß andere Kräfte als der Auflagerdruck im festen Punkt an ihm angriffen, als einen „kräftefreien Kreisel“ und im Gegensatze den jetzt zu untersuchenden Körper, an dem außerdem noch das Eigengewicht angreift, als einen „schweren“ Kreisel.

Die Theorie des schweren Kreisels ist erheblich schwieriger als die des kräftefreien Kreisels und für den allgemeinsten Fall eines Kreisels mit dreiaxsigem Trägheitsellipsoid hat die Aufgabe, die weitere Bewegung bei beliebig gegebenen Anfangsbedingungen vorauszusagen, bisher überhaupt noch keine strenge Lösung gefunden. Nur für einzelne Fälle und insbesondere für den praktisch sehr wichtigen Fall des „symmetrischen“ Kreisels ist die Lösung der Aufgabe gelungen. Symmetrisch wird der Kreisel genannt, wenn er die Gestalt eines Umdrehungskörpers hat und der Unterstützungspunkt auf der

Umdrehungsachse liegt. Die Umdrehungsachse wird auch als „Figurenachse“ oder „Kreiselachse“ bezeichnet. Bei den meisten Anwendungen der Kreiseltheorie liegt dieser Fall vor. Indessen kommt es eigentlich auf die besondere Gestalt des Kreiselkörpers gar nicht an. Wesentlich ist nur, daß das auf den festen Punkt bezogene Trägheitsellipsoid des Körpers ein Umdrehungsellipsoid ist und der Schwerpunkt des Kreisels auf der Umdrehungsachse des Ellipsoids enthalten ist. Man kann daher auch jeden Kreisel, von dem dies gilt, als einen „symmetrischen“ Kreisel im Sinne der Kreiseltheorie betrachten.

Ein besonderer Fall des symmetrischen Kreisels, für den sich die Theorie noch etwas einfacher gestaltet, ist der des „Kugelkreisels“. Man versteht darunter einen Kreisel, dessen Trägheitsellipsoid, bezogen auf den festen Punkt, eine Kugel bildet, gleichgültig, wie nun der Kreisel im übrigen gestaltet sein möge.

Die allgemeine Kreiselbewegung umfaßt auch die Pendelbewegung als einen besonderen Fall. Setzt man nämlich die Anfangsrotation gleich Null, so führt der Körper unter dem Einflusse des Eigengewichtes ebene Pendelbewegungen aus. Ebenso kommt bei passend gewählten Anfangsbedingungen eine Bewegung zustande, bei der der Körper als Zentrifugalpendel schwingt. An diese Grenzfälle denkt man aber nicht, wenn man von der Kreiselbewegung im engeren Sinne des Wortes redet; man meint vielmehr jene Bewegungen, die der Körper ausführt, wenn ihm eine besonders große Anfangsrotation, und zwar meist um eine Achse, die nicht viel von der Figurenachse abweicht, erteilt wurde. Man kommt dadurch auf einen anderen Grenzfall, der zumal für die praktischen Anwendungen von besonderer Wichtigkeit ist.

Um diesen Grenzfall näher zu kennzeichnen, mache ich zunächst darauf aufmerksam, daß bei der allgemeinen Kreiselbewegung die lebendige Kraft nicht konstant bleibt. Der Auflagerdruck leistet zwar, wie schon beim kräftefreien Kreisel, auch hier keine Arbeit; wohl aber das Eigengewicht. Wenn

sich der Schwerpunkt bei der Bewegung senkt, wächst die lebendige Kraft um den Betrag der Arbeit an, die hierbei von dem Gewichte geleistet wird. Bezeichnet man das Kreiselgewicht mit Q und den Abstand des Schwerpunktes mit s , so vermag sich die lebendige Kraft im Verlaufe der Kreiselmovement höchstens um den Betrag $2 Qs$ zu ändern, und um so viel auch nur dann, wenn dabei der Schwerpunkt aus der höchsten in die tiefste Lage oder umgekehrt übergegangen sein sollte. Hatte man aber dem Kreisel eine sehr große Anfangsrotation erteilt, so ist die ihr entsprechende lebendige Kraft weit größer, als $2 Qs$. Unter diesen Umständen vermag sich die lebendige Kraft während der Kreiselmovement im Verhältnisse zu ihrem Anfangswerte und zu allen späteren Werten überhaupt nur um geringfügige Beträge zu ändern.

Der Grenzfall, von dem ich vorher sprach, liegt dann vor, wenn die lebendige Kraft L_0 der Anfangsrotation so groß ist, daß sie genau genug als unendlich groß gegenüber $2 Qs$ betrachtet werden kann. Mit demselben Grade der Annäherung kann man dann L als konstant betrachten; geradeso wie beim kräftefreien Kreisel, bei dem ja auch L nur deshalb als konstant angesehen werden konnte, weil man die niemals ganz zu vermeidenden Bewegungswiderstände vernachlässigte. Durch diese Bemerkung wird die Theorie für den Grenzfall bedeutend vereinfacht und die Ergebnisse, zu denen man auf Grund dieser Voraussetzung gelangt, können für die meisten praktischen Anwendungen als vollkommen hinreichende Annäherungen gelten.

Beim kräftefreien Kreisel war außer L auch noch der Drall \mathfrak{B} konstant. Dagegen dürfen wir beim schweren Kreisel, selbst in unserem Grenzfall, \mathfrak{B} nicht als näherungsweise konstant betrachten. Zwar wird mit L auch \mathfrak{B} unendlich groß. Aber die Änderungen, die \mathfrak{B} im Laufe der Zeit zu erfahren vermag, sind nicht, wie bei der lebendigen Kraft, in bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen, sondern sie vermögen nach Ablauf einer hinlänglichen Zeit über jede Grenze hinaus zu wachsen. Nach dem Flächensatze ist nämlich, wenn man jetzt unter \mathfrak{R} das statische Moment

des Gewichtes in bezug auf den festen Punkt versteht,

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K} \quad \text{und hieraus} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \int_0^t \mathfrak{K} dt.$$

Wie groß man nun auch \mathfrak{B} bei einem bestimmt gegebenen \mathfrak{K} annehmen möge, so wird doch nach Verstreichen einer entsprechenden Zeit t das Zeitintegral von \mathfrak{K} mit \mathfrak{B}_0 von gleicher Größenordnung werden können.

Nur dies ist von vornherein klar, daß es jedenfalls um so längerer Zeiten bedürfen wird, bis sich \mathfrak{B} merklich von \mathfrak{B}_0 unterscheidet, je größer die Anfangsrotation war, die wir dem Kreisel erteilten. Um so langsamer ändert sich dann der Drall. Für eine kürzere Zeit, die immerhin noch eine Anzahl von Umdrehungen des Kreisels um seine Drehachse umfassen kann, ist dann freilich die Änderung von \mathfrak{B} geringfügig im Vergleich zu Anfangswerte \mathfrak{B}_0 und für einen solchen kurzen Zeitabschnitt kann daher auch \mathfrak{B} annähernd als konstant angesehen werden.

Wir erkennen hieraus, daß sich der Kreisel in unserem Grenzfalle während eines verhältnismäßig kürzeren Zeitabschnitts nahezu ebenso bewegt, wie ein kräftefreier Kreisel, daß aber daneben langsame Änderungen einherlaufen, die sich mit der Zeit derart anhäufen, daß der Bewegungszustand späterhin vollständig von dem verschieden ist, der beim kräftefreien Kreisel nach Ablauf der gleichen Zeit zu erwarten wäre.

§ 33. Die pseudoreguläre Präzession.

Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung des symmetrischen Kreisels, dem eine so schnelle Anfangsrotation erteilt wurde, daß man den vorher besprochenen Grenzfalle als genau genug zutreffend erachten kann. Außerdem wollen wir noch annehmen, daß die Achse der Anfangsrotation nicht viel von der Figurenachse abweicht, so daß man den Richtungsunterschied zwischen beiden nahezu als unendlich klein betrachten kann. Die Bewegung, die der Kreisel unter dem Einflusse des Eigengewichts bei diesen Anfangsbedingungen

ausführt, wird als eine pseudoreguläre Präzession bezeichnet.

Um diese Bezeichnung zu erklären, weise ich darauf hin, daß auch die ganze Erde neben ihrer Planetenbewegung, die sie um die Sonne beschreibt, zugleich eine Kreiselbewegung ausführt. Sie rotiert dabei zwar nicht um einen festen Punkt, sondern um ihren Schwerpunkt. Dieser Unterschied ist aber, wie es schon beim kräftefreien Kreisel besprochen wurde, unwesentlich. Wesentlich ist dagegen, daß die von der Sonne auf die einzelnen Massenteilchen der Erde ausgeübten Anziehungskräfte wegen der etwas verschiedenen Abstände, die sie in einem gegebenen Augenblicke vom Sonnenmittelpunkte haben, nicht einfach den Massen proportional sind, und daß sie sich daher auch nicht zu einer einzigen, durch den Erdmittelpunkt gehenden Resultierenden zusammensetzen lassen. Wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde tritt vielmehr noch ein Kräftepaar von freilich nur sehr geringfügigem Betrage auf. Die am Schwerpunkt angebrachte geometrische Summe aller Anziehungskräfte bringt die Bewegung des Schwerpunktes längs der planetarischen Bahn der Erde hervor. Das Kräftepaar dagegen beeinflußt die Rotationsbewegung, die die Erde außerdem noch um durch ihren Schwerpunkt gehende Achsen ausführt und so gering es auch ist, bringt es doch in längeren Zeiträumen sehr erhebliche Wirkungen hervor. Die Rotationsachse der Erde beschreibt infolge davon im Laufe von etwa 21000 Jahren einen Kegel gegen den Fixsternhimmel und diese Bewegung macht sich schon innerhalb kürzerer Zeiträume durch ein Fortschreiten des Frühlingspunktes oder, wie man dafür auch sagt, durch die Präzession der Tag- und Nachtgleichen bemerklich. Diese wurde schon von dem griechischen Astronomen Hipparch durch die Beobachtung festgestellt und später von Newton auf die angegebene Ursache zurückgeführt.

An diesem Beispiele hat sich die Kreiseltheorie überhaupt zuerst entwickelt und man hat daher in Anlehnung daran später jede Kreiselbewegung, bei der die Figurenachse einen Kreiskegel beschreibt, als eine Präzessionsbewegung bezeichnet.

Ist der Kegel genau ein Kreiskegel, so spricht man von einer regulären Präzession. Bei dem schnell rotierenden schweren Kreisel, mit dem wir uns hier vor allem beschäftigen wollen, erfolgt dagegen die Bewegung nur näherungsweise nach einem Kreiskegel, dessen Achse in die Richtung der Lotlinie fällt und die Bewegung wird, weil sie von einer regulären nicht viel abweicht, als eine pseudoreguläre Präzession bezeichnet.

Die Theorie der pseudoregulären Präzession ist sehr einfach, so lange man sich nur auf die Untersuchung des durch den Grenzfall bezeichneten Hauptvorganges einläßt und auf die geringen Abweichungen nicht achtet, die durch die unvollkommene Erfüllung der sich darauf beziehenden Voraussetzungen bedingt sind. Wir erkannten schon, daß für einen kurzen Zeitabschnitt, der nur wenige Umdrehungen des Kreisels umfaßt, die Bewegung nicht viel von der eines kräftefreien Kreisels abweichen kann. Innerhalb dieser Zeit kann \mathfrak{B} als konstant angesehen werden und die Figurenachsse sowohl als die Drehachse (d. h. die Richtung \mathfrak{u}) beschreiben, genau so wie wir es schon in § 29 an einem Beispiele näher besprochen haben, Kreiskegel von sehr kleinem Öffnungswinkel um die Richtung von \mathfrak{B} als Achse. Während eines solchen Umlaufs hat der auf der Figurenachsse liegende Radiusvektor \mathfrak{s} des Schwerpunkts, der zugleich den Hebelarm des Gewichts bildet, etwas verschiedene Richtungen; im Mittel für den ganzen Umlauf fällt aber die Richtung von \mathfrak{s} mit der von \mathfrak{B} zusammen. Bezeichnen wir also einen in der augenblicklichen Richtung von \mathfrak{B} gezogenen Einheitsvektor mit \mathfrak{b} , so kann als Durchschnittswert des Momentes \mathfrak{K} für einen Umlauf der Ausdruck

$$\mathfrak{K} = s \sqrt{\mathfrak{Q} \mathfrak{b}} \quad (151)$$

angeschrieben werden, wenn \mathfrak{Q} das Kreiselgewicht nach Größe und Richtung angibt. Die sehr kleine Änderung $d\mathfrak{B}$, die \mathfrak{B} während der sehr kurzen Zeit dt erfährt, in der der Kegel nur wenige Umläufe machen konnte, ist daher

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{K} dt = s dt \sqrt{\mathfrak{Q} \mathfrak{b}}. \quad (152)$$

Der Zuwachs $d\mathfrak{B}$ steht hiernach senkrecht zu \mathfrak{b} , d. h. zu \mathfrak{B} selbst. Dadurch kann \mathfrak{B} nur eine Richtungsänderung, aber keine Änderung der absoluten Größe erfahren. Ferner steht $d\mathfrak{B}$ auch senkrecht zu \mathfrak{C} , d. h. zur Lotlinie. Demnach ist $d\mathfrak{B}$ horizontal und senkrecht zu der durch \mathfrak{C} gelegten Lotebene gerichtet. Die Vektoren \mathfrak{B} und $\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}$ liegen daher so zueinander wie zwei aufeinander folgende Erzeugende eines geraden Kreiskegels, dessen Achse in die Richtung der Lotlinie fällt. Das gilt für jeden folgenden Zeitabschnitt dt ebenso, und hiermit ist bewiesen, daß \mathfrak{B} in der Tat im Laufe der Zeit den genannten Kreiskegel vollständig und später immer wieder von neuem durchlaufen muß.

Daß die Präzession indessen nur eine pseudoreguläre und keine reguläre ist, ergibt sich daraus, daß innerhalb eines jeden Kreiselumlaufs wegen der etwas verschiedenen Richtungen von \mathfrak{s} kleine Schwankungen von \mathfrak{B} um den mittleren Wert herum stattfinden müssen, die bei den vorhergehenden Betrachtungen außer acht gelassen wurden, da wir nur nach den Mittelwerten aller Größen für eine Umdrehung fragten. Im Grenzfalle des unendlich schnell rotierenden Kreisels werden diese Schwankungen übrigens unendlich klein.

Wir kennen jetzt die langsam erfolgende Änderung von \mathfrak{B} gegen den festen Raum. Es fragt sich aber noch, wie sich \mathfrak{B} relativ zum Kreiselkörper verschiebt. Auch darauf läßt sich sofort eine Antwort erteilen, indem man sich darauf stützt, daß die lebendige Kraft L als konstant angesehen werden kann, und zwar hier um so mehr, als sich der Schwerpunkt, wie wir schon sahen, abgesehen von den kleinen Schwankungen innerhalb eines Umlaufs nur in horizontaler Richtung verschiebt. Alle mit diesem Werte von L verträglichen \mathfrak{B} liegen nach § 23 auf dem zugehörigen Drallellipsoide. Da sich aber \mathfrak{B} , wie schon bewiesen ist, der Größe nach nicht ändert, so können nur jene Radienvektoren des Drallellipsoids in Frage kommen, die unter sich von gleicher Größe sind und diese bilden, da das Drallellipsoid hier ein Umdrehungsellipsoid ist, einen Kreiskegel, dessen Achse mit der Figurenachse, d. h. der Hauptträgheits-

achse zusammenfällt. Hiermit ist bewiesen, daß von den kleinen Schwankungen innerhalb eines Umlaufs abgesehen, der Drall \mathfrak{B} im Mittel auch relativ zum Körper, und zwar um die Figuren-achse herum einen Kreiskegel beschreibt. Da außerdem noch vorausgesetzt war, daß \mathfrak{B} in der Anfangsrichtung nur wenig von der Figuren-achse abweichen sollte, so hat dieser Kreiskegel nur einen sehr kleinen Öffnungswinkel, d. h. die Kreiselachse muß stets in der nächsten Nachbarschaft von \mathfrak{B} bleiben. Mit der Bewegung von \mathfrak{B} gegen den festen Raum ist daher auch die Bewegung der Figuren-achse gegen den festen Raum hinlänglich genau bekannt.

Es muß übrigens noch bemerkt werden, daß die zuletzt ange-stellte Beweisführung versagt, wenn es sich um einen Kugelkreisel handelt, da dann alle Radienvektoren des in eine Kugel übergehenden Drallellipsoids gleich groß sind. Aber auch in diesem Falle kann sich die Richtung von \mathfrak{B} oder der mit \mathfrak{B} zusammenfallenden Dreh-achse \mathfrak{u} nicht merklich von der Kreiselachse, die durch den Schwer-punkt des Körpers gelegt ist, entfernen. Schreibt man nämlich \mathfrak{R} in der Form an

$$\mathfrak{R} = V \Omega \mathfrak{s}, \quad \text{womit} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V \Omega \mathfrak{s}$$

wird, so folgt daraus durch innere Multiplikation mit \mathfrak{s}

$$\mathfrak{s} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0.$$

Da ferner $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ die augenblickliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes angibt und daher auf der Drehachse \mathfrak{u} und hiernach auch auf \mathfrak{B} senkrecht steht, so ist auch

$$\mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = 0.$$

Im ganzen wird, wie man aus beiden Gleichungen erkennt, also auch

$$\frac{d(\mathfrak{B} \mathfrak{s})}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} \mathfrak{s} = \text{konstant.}$$

Demnach kann sich beim Kugelkreisel die Projektion von \mathfrak{B} auf \mathfrak{s} nicht ändern. Bei der pseudoregulären Präzession ändert sich aber auch die Größe von \mathfrak{B} nicht merklich und daher muß auch der Winkel zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{s} nahezu konstant sein. Wenn er von An-fang an sehr klein war, bleibt er daher auch dauernd klein.

Es bleibt noch übrig, die Umlaufzeit T der Präzession oder auch an deren Stelle die Winkelgeschwindigkeit ω zu ermitteln, mit der sich die Richtung von \mathfrak{B} und hiermit die Kreiselachse um die durch den festen Punkt gelegte Lotlinie drehen. Jedenfalls muß der Vektor ω der Bedingung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\nabla\omega\mathfrak{B}$$

genügen und da andererseits schon in Gl. (152)

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = s\nabla\Omega\mathfrak{b}$$

gefunden war, so muß, damit beide Gleichungen miteinander übereinstimmen, ω entgegengesetzt mit Ω gerichtet sein, also nach oben hin gehen. Außerdem muß

$$wB = sQ \quad \text{oder} \quad w = \frac{sQ}{B} = \frac{sQ}{u\Theta} \quad (153)$$

sein. Hierbei ist zu beachten, daß wegen des nahen Zusammenfallens von \mathfrak{B} mit der Kreiselachse $B = u\Theta$ gesetzt werden konnte. Für die Umlaufzeit T der Kreiselachse um die Lotlinie erhält man daher

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \frac{u\Theta}{sQ}. \quad (154)$$

Wir finden hiermit bestätigt, daß die Umlaufzeit um so größer ist, die Präzession daher um so langsamer erfolgt, je schneller der Kreisel rotiert.

Schließlich mag noch erwähnt werden, daß die geringen Abweichungen, die die Kreiselachse während einer Kreiselumdrehung von der vorher allein in Betracht gezogenen mittleren Richtung für diese Umdrehung erfährt, als die Nutation der Kreiselbewegung bezeichnet werden. Mit demselben Grade der Annäherung, den wir bisher schon als genügend ansahen, kann nachträglich auch noch die Nutationsbewegung angegeben werden. Wir erkannten nämlich vorher schon, daß bei der pseudoregulären Präzession während einer Umdrehung der Drall \mathfrak{B} als konstant angesehen werden kann, und daß sowohl die Richtung von \mathfrak{u} als die Kreiselachse Kreiskegel um diese Richtung von \mathfrak{B} beschreiben. Die Nutation besteht also

in dieser mit der Winkelgeschwindigkeit u um die Richtung von \mathfrak{B} erfolgenden Drehbewegung der Kreiselachse, die sich der vorher allein betrachteten Präzessionsbewegung überlagert. Der Schwerpunkt beschreibt dabei einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zu \mathfrak{B} steht und dessen Mittelpunkt auf \mathfrak{B} liegt. Der Halbmesser des Kreises ergibt sich aus dem Winkel zwischen \mathfrak{B} und der Kreiselachse, ist also nach unseren Voraussetzungen jedenfalls sehr klein. Er hängt davon ab, um wieviel zu Anfang der Bewegung die Richtung von \mathfrak{B} von der Kreiselachse abwich, während es bei der Präzession auf den genaueren Wert dieser Abweichung, falls sie nur überhaupt als klein angesehen werden konnte, nicht ankam.

§ 34. Einwirkung eines Stoßes auf den schnell rotierenden
Kreisel.

Die Zeitdauer eines Stoßes wird stets als sehr klein betrachtet. Da aber bei dem schnell rotierenden Kreisel auch die Zeitdauer einer Umdrehung sehr klein ist, so daß sie bei den vorausgehenden Untersuchungen sogar als unendlich klein angesehen werden konnte, wird hier zur Beurteilung der Wirkung eines Stoßes eine nähere Festsetzung darüber erforderlich, wie sich die beiden sehr kleinen Zeiten der Größenordnung nach zueinander verhalten sollen. Wir begnügen uns hier damit, nur die beiden Grenzfälle zu besprechen, daß die Stoßzeit entweder als sehr klein oder als sehr groß gegenüber der Zeitdauer einer Kreiselumdrehung angesehen werden kann. Es wird sich zeigen, daß sich der Kreisel in beiden Fällen gegen die Wirkung eines Stoßes von gegebener Größe (diese gemessen durch den Antrieb, also das Zeitintegral der Stoßkraft) sehr verschieden verhält.

Im ersten Falle, wenn sich also der Kreisel während der Stoßzeit nur sehr wenig weiter bewegt hat, kann man die durch den Stoß hervorbrachte Änderung des Dralls genau so berechnen, als wenn der Kreisel in der augenblicklichen Lage in Ruhe gewesen wäre, also etwa nach den in § 30 gegebenen

Anleitungen. Anstatt darauf zurückzugreifen, kann man aber auch unmittelbar

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \int \mathfrak{K} dt = \mathfrak{B} + V \left(\int \mathfrak{P} dt \right) \mathfrak{p}$$

setzen, wenn \mathfrak{B} den Drall vor, \mathfrak{B}' den nach dem Stoße und \mathfrak{p} den vom festen Punkte gerechneten Hebelarm der Stoßkraft \mathfrak{P} bezeichnet. Da sich der Kreisel inzwischen nur wenig weiter bewegt hat, ist die Richtungsänderung des Dralls relativ zum Kreiselkörper als ebenso groß anzusehen wie die gegenüber dem festen Raum. Wenn also der Kreisel vorher um eine nahezu mit der Kreiselachse zusammenfallende Drehachse rotierte, trifft dies nach dem Stoße nicht mehr zu. Die Kreiselbewegung wird daher durch einen solchen kurzdauernden Stoß auch der Art nach vollständig geändert.

Ganz anders ist es, wenn sich beim gleichen Wert des Antriebs die Stoßdauer so in die Länge zieht, daß der Kreisel inzwischen eine größere Anzahl von Umdrehungen ausführen konnte. Über die Art, wie der Stoß vor sich gehen soll, werde vorausgesetzt, daß die Stoßkraft \mathfrak{P} während der ganzen Stoßdauer die gleiche Richtung beibehält und sich der Größe nach stetig (im Verlaufe einer Umdrehung daher nur wenig) ändert, sowie daß sie stets an demselben Angriffspunkte des Kreiselkörpers wirkt. Man denke sich also etwa einen Stab oder eine andere Hervorragung an dem Kreiselkörper angebracht, an deren Ende die Stoßkraft angreift.

Da $\int \mathfrak{P} dt$ einen endlichen gegebenen Wert haben soll, muß unter diesen Voraussetzungen jener Teil des Antriebs, der auf eine einzelne Umdrehung entfällt, klein sein. Daher ändert sich auch \mathfrak{B} während einer Umdrehung nur wenig; es wird also genügen, wenn wir diese Änderung als ein Differential ansehen. Der Hebelarm \mathfrak{p} der Stoßkraft beschreibt während einer Umdrehung eine Kegelfläche und die mittlere Richtung von \mathfrak{p} fällt aus denselben Gründen wie im vorigen Paragraphen mit der Richtung von \mathfrak{B} zusammen. Bezeichnen wir also die Dauer einer Umdrehung mit dt , so finden wir für das zugehörige $d\mathfrak{B}$

$$d\mathfrak{B} = dt p' \sqrt{\mathfrak{P} \mathfrak{b}},$$

wobei p' die Projektion von \mathfrak{p} auf die Richtung von \mathfrak{B} oder \mathfrak{b} bedeutet. Jedenfalls steht hiernach $d\mathfrak{B}$ senkrecht zu \mathfrak{b} oder zu \mathfrak{B} selbst und daher erfährt \mathfrak{B} nur eine Richtungsänderung und keine Änderung der absoluten Größe. Auch die lebendige Kraft erfährt für den ganzen Umlauf keine Größenänderung, da der Angriffspunkt von \mathfrak{P} eine geschlossene Bahn durchläuft, das Linienintegral oder die Arbeit der Kraft \mathfrak{P} , da \mathfrak{P} während dieser Zeit als konstant betrachtet werden kann, daher zu Null wird. Hieraus folgt durch dieselbe Schlußweise wie im vorigen Paragraphen, daß sich die Richtung von \mathfrak{B} relativ zum Kreiselkörper im Falle des langsam verlaufenden Stoßes nicht merklich zu verschieben vermag. Die pseudoreguläre Präzession bleibt daher als solche bestehen. Der ganze Erfolg des Stoßes besteht darin, daß sich die Richtung von \mathfrak{B} , mit ihr aber zugleich auch die Kreiselachse um einen endlichen Winkel gegen den festen Raum gedreht hat.

Von Wichtigkeit ist es noch, auf die Richtung zu achten, nach der der Kreisel unter dem Einflusse eines langsam verlaufenden Stoßes ausweicht. Abb. 35 zeigt dies an einem Beispiele, bei dem der Einfachheit halber vorausgesetzt ist, daß es sich um einen Kugelkreisel handle. Vor dem Stoße soll der Kreisel, der in kegelförmiger Gestalt gezeichnet ist, in aufrechter Lage um eine mit der Kreiselachse zusammenfallende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit u_0 rotiert haben. Die Stoßkraft \mathfrak{P} ist in horizontaler Richtung angenommen. Der Momentenvektor \mathfrak{K} von \mathfrak{P} ist ebenfalls horizontal und senkrecht zu \mathfrak{P} gerichtet. In der Stoßdauer t , während der \mathfrak{P} konstant sein mag, ändert sich der Drall um $\mathfrak{K}t$ und die Winkelgeschwindigkeit daher um $\frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$. Dadurch geht u_0 über in u , wie aus der Abbildung zu entnehmen ist. Mit u hat sich aber auch die Kreisel-

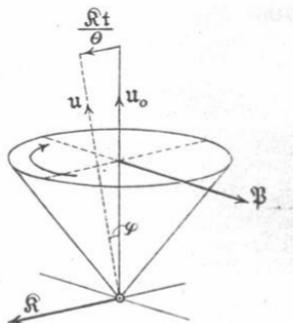


Abb. 35.

achse (ungefähr wenigstens) in der gleichen Richtung verschoben; obschon beide nachher nicht mehr genau zusammenfallen. Der Kreisel führt dann nach dem Stoße unter dem Einflusse des Eigengewichts eine pseudoreguläre Präzession von der uns bereits bekannten Art aus.

Die Kreiselachse verschiebt sich also im Mittel bei einem langsam verlaufenden Stoß rechtwinklig zur Richtung der Stoßkraft \mathfrak{P} und hierin besteht eine der bemerkenswertesten Eigenschaften des schnell rotierenden Kreises.

Ferner erkennt man, was ja auch schon aus der Erfahrung hinlänglich bekannt ist, daß die Bewegung des Kreisels um die aufrechte Achse stabil ist. Durch den Stoß wird die Bewegung in eine pseudoreguläre Präzession umgewandelt, die der vorhergehenden Bewegung nahe benachbart ist, wenn der Antrieb des Stoßes nicht zu groß war. Der Kreisel wird durch einen solchen Stoß nicht „umgeworfen“, wie es sein müßte, wenn er gar nicht oder nur langsam rotierte. Je schneller er sich umdreht, um so geringer ist die Ablenkung, die er durch einen Stoß von gegebenem Antrieb aus der anfänglichen Bewegung erfährt.

§ 35. Die strenge Lösung des Kreiselproblems für den symmetrischen schweren Kreisel.

In den meisten Fällen der praktischen Anwendung wird man mit den vorhergehenden Betrachtungen vollständig auskommen. Für den symmetrischen Kreisel, an dem nur das Eigengewicht angreift, kann man aber die weitere Bewegung, die auf einen beliebig gegebenen Anfangszustand folgt, auch in aller Strenge angeben. „Streng“ ist die Theorie freilich auch hier nur im mathematischen Sinn und nicht im physikalischen, da die Bewegungswiderstände, die sich niemals ganz beseitigen lassen, dabei vernachlässigt werden müssen.

Immerhin hat aber die mathematisch strenge Kreiseltheorie auch einen gewissen praktischen Wert und ich werde daher hier einen kurzen Abriß davon geben, wobei ich mir vorbehalte, im 6. Bande dieses Werkes später nochmals ausführ-

licher hierauf und auf die Kreiseltheorie überhaupt zurückzukommen.

Wenn das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, kann man für den Drall \mathfrak{B} des rotierenden Körpers einen für die weitere Behandlung besonders geeigneten Ausdruck aufstellen, den ich zunächst ableiten werde. Man denke sich die Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt, von denen die eine in die Richtung der Figurenachse, die andere in die Äquatorebene des Trägheitsellipsoids fällt. Bezeichnet man die Größen dieser beiden Komponenten mit u_1 und u_2 , ferner einen in der Richtung der Figurenachse gezogenen Einheitsvektor mit \mathfrak{s}_1 und einen in die Richtung der Projektion von \mathbf{u} auf die Äquatorebene fallenden Einheitsvektor mit \mathfrak{a}_1 , so wird die besprochene Zerlegung durch die Gleichung

$$\mathbf{u} = u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1 \quad (155)$$

zum Ausdruck gebracht. Da die beiden Komponenten von \mathbf{u} mit Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallen, findet man das zu \mathbf{u} gehörige \mathfrak{B} in derselben Weise wie schon in Gl. (121) S. 173, indem man jede der beiden Komponenten mit den zugehörigen Hauptträgheitsmomenten multipliziert. Bezeichnet man diese mit Θ_1 und Θ_2 , so folgt zunächst

$$\mathfrak{B} = u_1 \Theta_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \Theta_2 \mathfrak{a}_1.$$

Daraus entsteht durch eine einfache Umformung

$$\mathfrak{B} = \Theta_2 (u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1) + u_1 \mathfrak{s}_1 (\Theta_1 - \Theta_2),$$

wofür man nach Gl. (155) kürzer

$$\mathfrak{B} = \Theta_2 \mathbf{u} + u_1 (\Theta_1 - \Theta_2) \mathfrak{s}_1 \quad (156)$$

schreiben kann. Das ist der Ausdruck, den ich ableiten wollte und von dem weiterhin ausgegangen werden soll.

Nach dem Flächensatze gilt in jedem Augenblicke streng die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = s \nabla \Omega \mathfrak{s}_1, \quad (157)$$

die hier an die Stelle der nur näherungsweise gültigen Gleichung (152) S. 227 tritt, die wir zum Ausgangspunkt der Theorie der

pseudoregulären Präzession gemacht hatten. Unter s ist wie früher der Schwerpunktsabstand, vom festen Punkt aus gerechnet, zu verstehen.

Außerdem gilt noch die schon mehrfach benutzte, aus Band I, § 20 übernommene Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -V\mathfrak{u}\mathfrak{s}_1, \quad (158)$$

in der auf der linken Seite die augenblickliche Geschwindigkeit des auf der Kreiselachse im Abstände Eins vom festen Punkte liegenden Punktes steht.

Aus den drei zuletzt angeschriebenen Gleichungen kann man die Variablen \mathfrak{B} und \mathfrak{u} eliminieren, womit man auf eine Differentialgleichung kommt, die nur noch die Unbekannte \mathfrak{s}_1 enthält, von der also die Bewegung der Kreiselachse gegen den festen Raum unmittelbar abhängt.

Zu diesem Zwecke überzeuge man sich zunächst, daß

$$\frac{d(\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1)}{dt} = \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0 \quad (159)$$

wird. Man findet dies nämlich bestätigt, wenn man \mathfrak{B} aus Gl. (156) und die Differentialquotienten von \mathfrak{B} und \mathfrak{s}_1 aus den Gleichungen (157) und (158) einsetzt und sich dabei erinnert, daß jeder Ausdruck von der Form $\mathfrak{A}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zu Null werden muß, weil $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ senkrecht zu \mathfrak{A} steht.

Das innere Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1$ ist aber nichts anderes als die Projektion B_1 von \mathfrak{B} auf die Kreiselachse und aus Gl. (159) geht hervor, daß diese Projektion konstant ist. Andererseits kann aber diese Komponente B_1 von \mathfrak{B} , wie schon aus den auf Gl. (155) folgenden Bemerkungen hervorgeht, auch

$$B_1 = u_1\mathcal{O}_1$$

gesetzt werden und hieraus folgt, daß auch die in die Richtung der Kreiselachse fallende Komponente u_1 der Winkelgeschwindigkeit während der ganzen Bewegung konstant bleibt.

Der besondere Umstand, daß u_1 eine Konstante ist, ermöglicht uns die Auflösung von Gl. (158) nach \mathfrak{u} in eindeutiger Weise, während sie sonst bei einer solchen Vektorgleichung

nicht möglich wäre. Multipliziert man nämlich Gl. (158) auf äußere Art mit \mathfrak{s}_1 , so erhält man zunächst mit Anwendung des durch Gl. (118) S. 170 ausgesprochenen Rechengesetzes

$$V \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -V \mathfrak{s}_1 V u \mathfrak{s}_1 = -u(\mathfrak{s}_1)^2 + \mathfrak{s}_1 \cdot u \mathfrak{s}_1.$$

Nun war aber \mathfrak{s}_1 ein Einheitsvektor, das Quadrat davon ist daher gleich Eins und $u \mathfrak{s}_1$ ist gleich u_1 ; daher läßt sich die Gleichung schreiben

$$V \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -u + u_1 \mathfrak{s}_1,$$

in der u_1 eine durch den Anfangszustand der Bewegung gegebene Konstante bedeutet. Die Auflösung nach u liefert daher

$$u = u_1 \mathfrak{s}_1 - V \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}. \quad (160)$$

Hierauf läßt sich auch \mathfrak{B} durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (156) vollständig in \mathfrak{s}_1 ausdrücken. Führt man dies aus, so erhält man nach Streichen von zwei sich gegeneinander weghebenden Gliedern

$$\mathfrak{B} = u_1 \Theta_1 \mathfrak{s}_1 - \Theta_2 V \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}. \quad (161)$$

Wir brauchen jetzt nur noch diesen Ausdruck in die Gleichung des Flächensatzes, also in Gl. (157) einzusetzen, um zur Differentialgleichung für \mathfrak{s}_1 zu gelangen. Dabei ist zu beachten, daß

$$\frac{d}{dt} V \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = V \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2}$$

ist, indem das äußere Produkt einer Größe mit sich selbst zu Null wird. Man erhält daher

$$\Theta_2 V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1 \Theta_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + s V \Omega \mathfrak{s}_1 = 0. \quad (162)$$

Damit haben wir die Hauptgleichung des Kreiselproblems für den schweren symmetrischen Kreisel aufgestellt. Alle übrigen außer \mathfrak{s}_1 in ihr vorkommenden Größen sind gegebene Konstanten. Wenn wir das allgemeine Integral der Gl. (162) finden, haben wir damit zugleich die Lösung des Problems, die auch alle besonderen Fälle, wie die Pendelbewegung usf. umfaßt. Denn nachdem \mathfrak{s}_1 als Funktion der

Zeit dargestellt ist und die in der Lösung auftretenden beiden Integrationskonstanten aus den Bedingungen ermittelt sind, daß zur Zeit $t = 0$ sowohl \mathfrak{s}_1 als $\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}$ gegeben sind, kennt man nach den Gleichungen (160) und (161) auch \mathfrak{u} und \mathfrak{B} vollständig und damit auch den weiteren Verlauf der Bewegung in allen Einzelheiten.

Auch die Bewegung des kräftefreien Kreisels wird durch diese Theorie mit umfaßt. Man braucht hierzu nur in Gl. (162) $\mathfrak{C} = 0$ zu setzen. Die in dieser Weise vereinfachte Gleichung läßt sich viel leichter integrieren als die vollständige Gl. (162). Ich gehe aber darauf jetzt nicht näher ein, weil die Lösung für den kräftefreien Kiesel vorher schon in anderer Weise abgeleitet wurde.

Die Integration von Gl. (162) wird durch zwei Umstände erschwert, zunächst dadurch, daß sie eine Vektorgleichung ist, die sich schwieriger behandeln läßt als eine Gleichung für eine richtungslose Größe und dann noch besonders dadurch, daß sie nicht linear ist. Man kann sie aber trotzdem lösen, wobei jedoch im allgemeinen Falle elliptische Funktionen auftreten. Im sechsten Bande werde ich darauf näher eingehen; hier begnüge ich mich damit, die partikuläre Lösung abzuleiten, die sich auf die reguläre Präzession des Kreisels bezieht.

§ 36. Die reguläre Präzession.

Jene Lösung der Hauptgleichung, Gl. (162), die der regulären Präzession entspricht, erhält man, indem man

$$\mathfrak{s}_1 = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \cos \varphi \mathfrak{j} + a_2 \sin \varphi \mathfrak{k} \quad (163)$$

setzt. Dabei bedeuten $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ Einheitsvektoren in den Richtungen eines im festen Raume ruhenden rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen \mathfrak{i} -Achse in lotrechter Richtung nach oben hin gezogen ist. Der Winkel φ ist eine von der Zeit t abhängige neue Variable, die wir nachträglich so zu bestimmen haben, daß Gl. (163) eine Lösung der Hauptgleichung bildet. Unter a_1 und a_2 sind Konstanten zu verstehen, die aber nicht unabhängig voneinander sind, sondern zwischen denen die Be-

dingung besteht

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad (164)$$

weil \mathfrak{s}_1 nur unter dieser Bedingung einen Einheitsvektor darstellt. Man erkennt dies, indem man \mathfrak{s}_1^2 bildet.

Legt man dem Winkel φ in Gl. (163) verschiedene Werte bei, so liegen die Endpunkte aller zugehörigen \mathfrak{s}_1 auf einem horizontalen Kreise. Zunächst nämlich müssen diese Endpunkte alle auf der Kugelfläche vom Halbmesser Eins enthalten sein, weil $\mathfrak{s}_1^2 = 1$ ist für jeden Winkel φ . Außerdem liegen sie aber wegen des konstanten Gliedes $a_1 \mathbf{i}$ auch alle auf einer horizontalen Ebene, die vom festen Punkte den Abstand a_1 hat. Man kann daher sagen, daß Gl. (163) die Gleichung des Kreises bildet, nach dem diese horizontale Ebene von der Einheitskugel geschnitten wird.

Durch Differentiation nach der Zeit erhält man aus Gl. (163)

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = a_2 \frac{d\varphi}{dt} (-\sin\varphi \cdot \mathbf{j} + \cos\varphi \cdot \mathbf{f})$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = a_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} (-\sin\varphi \cdot \mathbf{j} + \cos\varphi \cdot \mathbf{f}) - a_2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (\cos\varphi \cdot \mathbf{j} + \sin\varphi \cdot \mathbf{f}).$$

Diese Werte setzen wir jetzt in Gl. (162) ein, um uns zu überzeugen, ob die Gleichung durch eine passende Wahl von φ befriedigt werden kann. An Stelle von \mathfrak{Q} schreiben wir dabei, mit Rücksicht auf die inzwischen für \mathbf{i} getroffene Wahl

$$\mathfrak{Q} = -Q\mathbf{i},$$

verstehen also unter Q den Absolutwert des Gewichtes \mathfrak{Q} . Die in Gl. (162) vorkommenden Vektorprodukte können leicht nach der gewöhnlichen Vorschrift (siehe Band I, Gl. (53), S. 94 d. 3. Aufl.) gebildet werden. Führt man die Rechnung durch, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & a_2 \Theta_2 \left\{ \mathbf{i} a_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathbf{j} a_1 \left(-\cos\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{f} a_1 \left(-\sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \cos\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) \right\} + \\ & u_1 \Theta_1 a_2 \frac{d\varphi}{dt} (\mathbf{j} \sin\varphi - \mathbf{f} \cos\varphi) + s Q a_2 (\mathbf{j} \sin\varphi - \mathbf{f} \cos\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Faßt man die Glieder in anderer Weise zusammen, so läßt sich die Gleichung schreiben

$$\Theta_2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} (\mathbf{i} a_2 - \mathbf{j} a_1 \cos \varphi - \mathbf{k} a_1 \sin \varphi) + \left(a_1 \Theta_2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + u_1 \Theta_1 \frac{d\varphi}{dt} + s Q \right) (\mathbf{j} \sin \varphi - \mathbf{k} \cos \varphi) = 0.$$

Die linke Seite ist damit in eine geometrische Summe aus zwei Gliedern von verschiedener Richtung zerlegt. Das zweite Glied ist wegen Fehlens von \mathbf{i} horizontal gerichtet, das erste dagegen nicht. Damit die geometrische Summe zu Null wird, muß daher jedes Glied für sich jederzeit gleich Null sein. Die Gleichung zerfällt daher in die beiden folgenden

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0, \\ a_1 \Theta_2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + u_1 \Theta_1 \frac{d\varphi}{dt} + s Q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = w,$$

wenn wir die Integrationskonstante mit w bezeichnen. Die Bedeutung von w folgt aus dem Ansatz in Gl. (163); es gibt die Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich die horizontale Komponente von \mathfrak{s}_1 dreht, also die Winkelgeschwindigkeit der Präzession. Wir erkennen daraus, daß die Lösung in Gl. (163) eine konstante Winkelgeschwindigkeit der Präzession verlangt.

Die zweite der Gleichungen (165) geht hiermit über in

$$a_1 \Theta_2 w^2 + u_1 \Theta_1 w + s Q = 0. \quad (166)$$

Wenn wir w so wählen, daß diese Gleichung befriedigt ist, erfüllt auch Gl. (163) die Hauptgleichung und wir sind damit zu einer möglichen Art der Kreiselbewegung gelangt, die auch tatsächlich eintritt, wenn die Anfangsbewegung damit übereinstimmt. Die Auflösung nach w liefert

$$w = -\frac{u_1 \Theta_1}{2 a_1 \Theta_2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_1 \Theta_1}{2 a_1 \Theta_2} \right)^2 - \frac{s Q}{a_1 \Theta_2}}. \quad (167)$$

Man erhält immer zwei reelle Wurzeln, wenn a_1 negativ

ist, d. h. wenn der Schwerpunkt bei der durch Gl. (163) dargestellten Bewegung unterhalb des festen Punktes liegt. Gewöhnlich denkt man aber bei der Kreiselbewegung an den Fall, daß der Schwerpunkt höher liegt, als der Unterstützungspunkt. In diesem Falle muß

$$\left(\frac{u_1 \Theta_1}{2a_1 \Theta_2}\right)^2 \geq \frac{sQ}{a_1 \Theta_2}$$

sein, damit die betrachtete Bewegung möglich ist. In anderer Form läßt sich die Bedingung schreiben

$$u_1^2 \geq \frac{4a_1 Q s \Theta_2}{\Theta_1^2}. \quad (168)$$

Der Kreisel muß also mindestens so schnell rotieren, daß die Winkelgeschwindigkeits-Komponente u_1 dieser Bedingung genügt; anderenfalls ist die Bewegung in dieser Form nicht möglich.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit sehr groß ist, hat man nach Gl. (167) zwei verschiedene Werte von w , von denen der eine, der dem positiven Wurzelvorzeichen entspricht, sehr klein gegenüber dem anderen ist. Es sind dann bei gegebenen a_1 zwei verschiedene Arten der regulären Präzession möglich, die man als „langsame“ und „schnelle“ Präzession bezeichnet. Wodurch sich beide Fälle im übrigen voneinander unterscheiden, erkennt man durch Bildung der Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} , indem man \mathfrak{s}_1 aus Gl. (163) in Gl. (160) einsetzt. Man findet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & u_1 (\mathbf{i}a_1 + \mathbf{j} \cdot a_2 \cos \varphi + \mathbf{k}a_2 \sin \varphi) + \\ & + a_2 w (-\mathbf{i}a_2 + \mathbf{j}a_1 \cos \varphi + \mathbf{k}a_1 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf Gl. (164) läßt sich das aber auch in die Form

$$\mathbf{u} = (u_1 + a_1 w) \mathfrak{s}_1 - \mathbf{i}w \quad (169)$$

bringen. Bei der langsamen Präzession des schnell rotierenden Kreisels ist w klein gegen u_1 und daher fällt die Richtung von \mathbf{u} nahezu mit der Richtung von \mathfrak{s}_1 , d. h. mit der Kreiselachse zusammen. Bei der schnellen Präzession ist dagegen, wie aus Gl. 167 hervorgeht, w von gleicher Größenordnung mit u_1 (wenigstens wenn sich Θ_1 und Θ_2 nicht zu viel von-

einander unterscheiden) oder auch noch größer und die Richtung von \mathbf{u} weicht dann erheblich von der Richtung der Kreiselachse ab. Für den Fall des Kugelkreisels, also für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ wird nach Gl. (167) bei der schnellen Präzession $a_1 \omega$ nahezu gleich $-u_1$ und daher muß, damit diese Bewegung erfolgen kann, \mathbf{u} nach Gl. (169) nahezu in die Lotrichtung fallen.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß man auch die allgemeine Lösung des Kreiselpblems aus dem Ansatz in Gl. (163) erhalten kann, wenn man die Konstante a_1 durch eine von t abhängige Variable x ersetzt. Es zeigt sich dann, daß x einer Differentialgleichung genügen muß, die man mit Hilfe von elliptischen Funktionen integrieren kann. Im sechsten Bande werde ich das näher besprechen.

§ 37. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis.

Für die praktische Technik hatte die Theorie des Kreisels lange Zeit hindurch nur eine sehr geringe Bedeutung. Das hing mit den verhältnismäßig geringen Winkelgeschwindigkeiten zusammen, die in den älteren, langsam laufenden Maschinen allein vorkamen. Als erst durch die Elektrotechnik und später noch mehr durch die Entwicklung der Dampfturbine viel schneller laufende Maschinen zur Anwendung kamen, gewann aber die Kreiseltheorie, oder allgemeiner gesagt, die Dynamik sehr schnell rotierender Körper immer mehr an Bedeutung.

Und zwar nach zwei Richtungen hin. Einerseits nämlich war es möglich, als man sehr schnell umlaufende Schwungräder herzustellen und in Gang zu halten verstand, die besonderen Eigenschaften der Kreiselbewegung unmittelbar praktisch nutzbar zu machen. Das bekannteste Beispiel dafür ist der Schlicksche Schiffskreisel, dessen Theorie ich im sechsten Bande ausführlich darzustellen beabsichtige. Andererseits aber traten, auch ohne daß man es beabsichtigt hatte, an den schnell umlaufenden Maschinen Erscheinungen auf, die man in kurzer Zusammenfassung als Kreiselwirkungen bezeichnen kann. Man wurde dadurch genötigt, sich mit der Kreiseltheorie zu beschäftigen,

um sich über diese Erscheinungen Rechenschaft geben und schädliche Folgen davon vermeiden zu können.

Nun sind freilich die Bedingungen, unter denen diese Kreiselwirkungen auftreten, von sehr verschiedener Art, so daß man nur selten die Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen ohne jede Änderung zu ihrer Erklärung verwenden kann. Aber trotz aller Unterschiede im einzelnen bleibt doch das Verfahren, das dabei eingeschlagen wurde, auch in allen anderen Fällen anwendbar. Wer sich ein Urteil über einen verwickelten Bewegungsvorgang dieser Art bilden will, wird daher vor allem danach trachten müssen, ein klares Verständnis für die unter den einfacheren Verhältnissen, die in den vorhergehenden Paragraphen vorausgesetzt wurden, zu erwartenden Bewegungserscheinungen zu gewinnen. Er wird dadurch namentlich auch in den Stand gesetzt sein, in solchen Fällen, bei denen die Rechnung zu schwierig würde oder überhaupt versagt, wenigstens eine ungefähr zutreffende Schätzung vorzunehmen, womit der Praxis oft schon vollständig gedient ist.

Zur Kreiseltheorie im weiteren Sinne gehört auch eine sehr einfache Betrachtung, die sich auf die Drehung eines Schwungrades aus seiner Ebene heraus bezieht und von der man öfters mit Nutzen Gebrauch machen kann. Ich werde sie daher zunächst besprechen. Ein Ring sitze auf einer schnell rotierenden Welle und das Gestell, in dem die Welle gelagert ist, möge vergleichsweise langsam irgendeine vorgeschriebene Bewegung ausführen. Man denke etwa an einen solchen Schwungring, der auf einer Lokomotive angebracht sein mag. Wenn die Lokomotive eine Kurve durchfährt, wird die Ebene des Schwungrings langsam gedreht. Die daneben stattfindende Translation ist hierbei gleichgültig und der Einfachheit halber wollen wir deshalb ganz von ihr absehen.

In Abb. 36 ist der Schwungring in seiner Anfangslage durch ausgezogene Striche angegeben. Die horizontale Welle, auf der er sitzt, möge durch eine Bewegung des Fahrzeugs genötigt werden, in einer gewissen Zeit t in die durch punktierte Linien angegebene neue Lage einzurücken. Natürlich

müssen, um diese Bewegung zu erzwingen, Kräfte von dem Fahrzeuge auf die Welle und durch deren Vermittlung auf das Schwungrad übertragen werden. Unter Umständen können diese sehr groß werden, so daß sie bei ungenügender Festigkeit zu einer Zerstörung der Welle oder zu einem Heraus-schleudern der Welle aus den Lagern zu führen vermöchten; jedenfalls wird man sich daher Rechenschaft darüber zu geben

haben, von welcher Art diese Kräfte sind und wie groß sie sind.

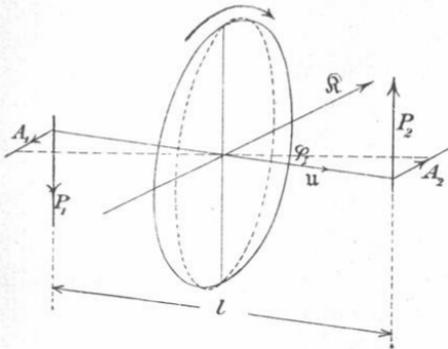


Abb. 36.

Von dem Schwungrad nehme ich an, daß es richtig ausgeglichen und genau auf die Welle aufgekeilt sei, so daß bei stillstehendem Fahrzeuge nur eine Bewegung um eine freie Achse in Frage kommt. Die Lager der Welle haben dann

nur das Gewicht und etwaige sonstige Belastungen aufzunehmen, genau so, als wenn der Schwungring ebenfalls in Ruhe wäre. Diese Auflagerkräfte werden auch später noch neben den anderen, die wir suchen, weiter bestehen; sie sind aber verhältnismäßig gering und es soll deshalb weiterhin nicht ausdrücklich von ihnen die Rede sein, vielmehr soll das Schwungrad so behandelt werden, als wenn es gewichtslos (aber nicht masselos) wäre.

Um die angegebene Drehung um die lotrechte Achse auszuführen, wird man natürlich zunächst einmal ein Kräftepaar anbringen müssen, das diese Drehung auch bei dem ruhenden Schwungringe zustande brächte. Um den Schwungring in die neue Lage überzuführen, müssen wir ihn um die lotrechte Achse drehen, ihm also eine vertikale Winkelgeschwindigkeit erteilen. Dies kann etwa durch das in Abb. 36 mit $A_1 A_2$ bezeichnete Kräftepaar geschehen. Wenn der Schwungring während der Drehung des Fahrzeuges nicht rotierte, wäre von

den Lagern nur einfach dieses Kräftepaar auf die Welle zu übertragen. Sobald aber der Schwungring schnell umläuft, tritt dazu ein anderes von weit größerem Betrage. Der Winkelgeschwindigkeit u entspricht nämlich ein Drall \mathfrak{B}

$$\mathfrak{B} = u \Theta,$$

und um diesen um einen Winkel φ zu drehen, muß nach dem Flächensatze ein Drehimpuls $\mathfrak{K}t$ aufgewendet werden, der nach den früher gegebenen Anleitungen leicht zu

$$Kt = \varphi u \Theta$$

berechnet werden kann. Wenn man also die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Wenden des Fahrzeuges erfolgt, mit w bezeichnet, erhält man

$$K = u \Theta w, \quad (170)$$

und bei großem u und Θ kann dies selbst für kleine Werte von w schon sehr beträchtlich werden. Die Richtung des jetzt der Größe nach berechneten Moments \mathfrak{K} folgt ebenfalls daraus, daß \mathfrak{B} durch geometrische Summierung von $\mathfrak{K}t$ in den neuen Wert übergeht. In die Abbildung ist der Pfeil von \mathfrak{K} eingetragen. Dieses Moment \mathfrak{K} kann von den Lagern nur in Form eines Kräftepaars übertragen werden, so daß jedes der beiden Lager eine Kraft des Paares überträgt. Auch diese mit $P_1 P_2$ bezeichneten Auflagerkräfte sind in Abb. 36 eingetragen worden; die Pfeile ergeben sich aus den früheren Festsetzungen über den Zusammenhang des Drehsinnes eines Kräftepaars mit dem Pfeile des dazu gehörigen Momentenvektors. Daß die beiden Auflagerkräfte $P_1 P_2$ wirklich von gleicher Größe sein müssen, folgt übrigens einfach daraus, daß sich der Schwerpunkt des ganzen Systems nicht in vertikaler Richtung verschiebt. Wenn man die Länge der Welle mit l bezeichnet, hat man für jede dieser Kräfte

$$P_1 = P_2 = \frac{u \Theta w}{l}.$$

Wir sprachen bisher von den Kräften, die vom Gestelle auf die Welle und den Schwungring übertragen werden. Am Fahrzeuge selbst kommen die Reaktionen dieser Kräfte in Be-

tracht; wenn wir die Beanspruchung des Fahrzeugs durch diese Auflagerkräfte untersuchen wollen, müssen wir daher die Pfeile umkehren. Wir sehen daraus, daß das Fahrzeug am linken Lager der Welle (in der Abbildung) gehoben, am anderen niedergedrückt wird. Unter Umständen kann es dadurch vollständig umgeworfen werden.

Natürlich kann man von dieser Betrachtung auch unmittelbar Gebrauch machen, um die Abänderung in der senkrechten Komponente des Raddrucks zu berechnen, die infolge der Umdrehung der Räder beim Fahren eines Eisenbahnfahrzeugs in einer Kurve zustande kommt, denn daß hier zwei Räder auf einer Achse sitzen, während bisher nur von einem Schwungring die Rede war, macht offenbar nichts aus. Man bezeichne den Halbmesser des Radumfangs mit r , die Fahrgeschwindigkeit des Eisenbahnzugs mit v , den Krümmungshalbmesser des Geleises mit R , so wird

$$u = \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad w = \frac{v}{R},$$

also

$$P_1 = P_2 = \frac{v^2 \Theta}{R r l}.$$

Unter Θ ist jetzt das doppelte vom Trägheitsmomente eines einzelnen Rades zu verstehen, unter l die Spurweite. Betrachtet man zum Zwecke einer Abschätzung ein Rad nur als einfachen Reifen vom Radius r und vom Gewichte Q , so kann näherungsweise (aber sicher etwas zu groß) $\Theta = 2 \frac{Q}{g} r^2$ gesetzt werden und die vorige Gleichung geht damit über in

$$P_1 = P_2 = Q \cdot \frac{2v^2 r}{g R l}.$$

Wenn v so groß wird, daß der als Faktor von Q auftretende Bruch gleich Eins wird, sinkt der Raddruck auf der nach innen hin gelegenen Schiene um das ganze Gewicht eines Rades. Eine allein auf dem Geleise dahinrollende, mit zwei aufgekeilten Rädern versehene Achse müßte bei Überschreitung der angegebenen Geschwindigkeit entgleisen.

Setzt man etwa $r = 1$ m (Lokomotivräder sind zuweilen so hoch), $R = 200$ m (scharfe Kurve, wie sie aber bei Weichen usf. vorkommt) und $l = 1,435$ m (Normalspur der Hauptbahnen), so erhält man für die fragliche Geschwindigkeit

$$v = 37,5 \text{ m sec}^{-1}.$$

Ein Rad, das ganz besonders schnell umläuft, ist das Laufrad einer Lavalschen Dampfturbine. Man denke sich eine solche auf einem Schiffe montiert und das Schiff möge die schaukelnden Bewegungen ausführen, die bei einem heftigen Sturme eintreten können. Wenn die Welle der Lavalschen Turbine steif konstruiert wäre, müßte sie nach Gl. (170) ein sehr erhebliches Kräftepaar K übertragen, um das Rad aus seiner Rotationsebene abzulenken, denn hier ist nicht nur u ungewöhnlich groß, sondern auch w , die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schiff seine pendelnde Bewegung ausführt, ist nicht allzu klein. Um ein Zahlenbeispiel anzuführen, setze man etwa $u = 2000 \text{ sec}^{-1}$ (entsprechend etwa 19000 Touren in der Minute), $w = 0,2 \text{ sec}^{-1}$, das Gewicht des Laufrads gleich 100 kg und den Trägheitsradius gleich 0,2 m. Dann wird der Drall des Laufrads gleich 815 mkg sec und nach Gl. (170)

$$K = 163 \text{ mkg}.$$

Das Kräftepaar wirkt verbiegend auf die Welle. Die Welle ist aber so dünn konstruiert, daß sie sich schon bei kleinen Biegemomenten ziemlich stark verbiegt. Deshalb folgt die Rotationsebene des Rades nur zum Teile den Schwingungen des Schiffskörpers. Wenn die Welle ganz biegsam wäre, würde sich die Rotationsebene des Rades überhaupt nicht verrücken; sie würde im Raume feststehen und die durch die Schwingungen des Schiffes hervorgerufenen relativen Bewegungen würden in den Verbiegungen der Welle allein zum Ausdruck kommen. Auch über die der pseudoregulären Präzession des Kreisels verwandten Bewegungserscheinungen, die das Laufrad zeigt, wenn der Schiffskörper etwa einfache Sinusschwingungen ausführt, vermag man sich leicht ungefähre Rechenschaft zu geben, falls man aus hinreichenden Angaben über die Stärke der

Welle, den Elastizitätsmodul und die Entfernungen des Rades von den Lagern die elastische Verbiegung der Welle für ein Biegemoment $K = 1$ mkg nach den Sätzen der Festigkeitslehre zuvor berechnet hat.

Bei dem eben besprochenen Beispiele konnte die Masse des Laufrades als so gering gegenüber dem schwingenden Schiffskörper angesehen werden, daß man auf die Rückwirkung, die es auf diesen ausübt, nicht zu achten brauchte. Unter anderen Umständen kann dies aber nötig werden; man muß sich dann erinnern, daß das von dem rotierenden Rade auf das Fahrzeug ausgeübte Kräftepaar dieses nicht im Sinne der Hauptdrehung, die das Rad ausführt, sondern um eine rechtwinklig dazu stehende Achse zu drehen sucht. Es wird nicht nötig sein, dies noch weiter auszuführen, da schon bei dem Beispiele des Schwungrings auf der Lokomotive darauf eingegangen wurde. Dagegen mag wenigstens erwähnt werden, daß man durch eine pendelnde Aufhängung des Schwungrades, wie sie beim Schlickschen Schiffskreisel vorkommt, eine Rückwirkung des Schwungrades auf das Schiff herbeizuführen vermag, die hemmend auf die Schiffsschwingungen einwirkt.

Ein ferneres Beispiel für Betrachtungen dieser Art bildet der Bumerang. Auf dessen Beschreibung selbst will ich hier zwar nicht eingehen, sondern ihn durch ein einfacheres Beispiel ersetzen, bei dem der Bewegungsvorgang im wesentlichen der gleiche ist. Man denke sich eine Scheibe (den Diskus der Alten) fortgeworfen, indem man ihr zugleich eine schnelle Drehung um die auf der Scheibenebene senkrechte Figurenachse erteilt. Wenn der Wurf durch den luftleeren Raum erfolgte, würde der Schwerpunkt der Scheibe einfach eine Parabel beschreiben und die Rotationsachse, die eine freie Achse ist, behielte unverändert ihre Richtung im Raume; die Scheibenebene würde also stets der Anfangslage parallel bleiben. Im luftgefüllten Raume kann aber die Bewegung nicht in dieser Weise erfolgen. Der Luftwiderstand wird sehr groß, sobald die Scheibenebene nicht mehr parallel zur Bewegungsrichtung ist. Wie sich der Luftwiderstand im vorliegenden

Falle im einzelnen verteilt, ist freilich schwer zu sagen; wir wollen es aber, um nicht in eine Erörterung darüber eintreten zu müssen, als ausgemacht ansehen, daß er sich jedenfalls in solcher Weise geltend macht, daß ein merkliches Heraustreten der Scheibenebene aus der Bewegungsrichtung durch ihn verhütet wird. Außerdem wird eine merkliche Änderung des Dralls \mathfrak{B} der sehr schnell rotierenden Scheibe sobald nicht zu erwarten sein. Dann kann sich die Scheibe nahezu nur innerhalb der Ebene bewegen, die durch die Anfangslage der Scheibe gegeben ist. Der Bewegungsvorgang ist demnach ungefähr derselbe, als wenn die unterhalb an die Scheibenfläche angrenzende Luft sich wie eine starre schiefe Ebene verhielte, die sich jeder Bewegung rechtwinklig zu ihr widersetzte. An Stelle der in einer lotrechten Ebene liegenden gewöhnlichen Wurfparabel muß jetzt der Schwerpunkt der Scheibe eine in der ursprünglichen Scheibenebene liegende Bahn beschreiben. Wenn er sich anfänglich senkrecht zur Horizontalspur der Scheibenebene nach oben hin bewegte, wird er sich in dieser schief nach aufwärts gehenden geraden Linie bis zu einem höchsten Punkte hin bewegen und nachdem er diesen erreicht hat, dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung zurück durchlaufen und so zum Ausgangspunkte zurückkehren. Wirft man die Scheibe in horizontaler Richtung, so wird sie nahezu in gerader horizontaler Richtung weiterfliegen, und wenn die vorausgehenden Betrachtungen streng anwendbar wären, müßte sie, allen Fallgesetzen zum Trotze, beliebig weit fortfliegen können, ohne zu sinken. Das ist natürlich nicht genau richtig; man wird sich aber erinnern, daß geschickte Taschenspieler in ihren Vorstellungen gelegentlich Spielkarten mit großer Kunstfertigkeit so hinausschleudern, daß sie in der Tat weite Strecken durchheilen, ohne in gewohnter Weise aus der Wurfrichtung abgelenkt zu werden und das, was ich vorher auseinandersetzte, gibt wenigstens eine ungefähre Erklärung des Vorganges, der dem beim Werfen des Bumerangs gleicht.

Auch die bekannte seitliche Ablenkung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen Wurfgeschosse

gehört hierher. Der Luftwiderstand spielt hier nur eine andere Rolle. Wir wollen uns davon summarisch in folgender Weise Rechenschaft geben. In Abb. 37 sei AB ein Teil der Bahn des Schwerpunktes S . Wenn kein Luftwiderstand wirkte, hätte



Abb. 37.

die Rotationsachse ihre ursprüngliche Richtung beibehalten und die Granate würde etwa die in Abb. 37 gezeichnete Stellung einnehmen. Der Luftwiderstand, dem sie in dieser Lage begegnet, sei etwa durch \mathfrak{W} angegeben. Es kommt dann wesentlich darauf an, wie der Schwerpunkt S gegen die Richtungslinie von \mathfrak{W} liegt. Liegt er oberhalb, wie in der Figur, so gehört zu \mathfrak{W} ein statisches Moment \mathfrak{M} , das eine Drehung der Granate in die Richtung der Flugbahn herbeizuführen sucht. Diese Drehung setzt sich aber mit jener zusammen, die die Granate schon um ihre Längsachse ausführte. Der Erfolg wird, wie in den früheren analogen Fällen, zunächst darin bestehen, daß sich \mathfrak{B} und mit ihm \mathfrak{u} und die Figurenachse aus der Ebene der Flugbahn etwas herausdrehen. Auch der Sinn dieser Ablenkung ist leicht festzustellen. Wenn das Geschütz mit Linksdrall versehen ist, haben wir \mathfrak{u} vom Schwerpunkte aus nach oben hin abzutragen und \mathfrak{B} ist mit ihm gleichgerichtet. Das Moment von \mathfrak{W} dreht in der Abbildung im Sinne des Uhrzeigers und der Momentenvektor \mathfrak{M} geht daher vom Zeichenblatte aus nach dem Beschauer hin. Vereinigen wir nun \mathfrak{B} mit \mathfrak{M} , so erhalten wir eine Richtung, die nach vorn hin (d. h. nach dem Beschauer hin) etwas geneigt ist. Das vordere Ende der Granate zeigt daher auch nach dieser Richtung. Sobald das Geschöß in Grundrisse ein wenig schräg gestellt ist, erfährt es auf der vorausgehenden Seite einen größeren Luftwiderstand, als auf der ein wenig nach hinten zu gedrehten. Es wird dadurch seitlich abgelenkt, und zwar vom Geschütz aus gesehen nach rechts hin (bei Rechtsdrall nach links hin). Gerade die nun im Grundrisse etwas exzentrische Angriffslinie des Winddrucks bringt dann ein statisches Moment hervor,

das die Geschoßachse in die Richtung der Flugbahn dreht. — Natürlich soll diese Betrachtung nur eine ungefähre Vorstellung geben; im einzelnen sind die pendelnden Bewegungen des Geschosses sehr verwickelt. Außerdem ist auch darauf zu achten, daß die Seitenablenkung nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wenn der Schwerpunkt S in Abb. 37 unterhalb von \mathfrak{B} liegt. Bei den gewöhnlich verwendeten Geschößformen scheint dies übrigens in der Regel der Fall zu sein.

Eng verwandt mit der Kreiselbewegung ist auch die Bewegung eines rollenden Rades. Die strenge Theorie dieser Bewegung ist freilich noch erheblich schwieriger, als wenigstens die Theorie des symmetrischen Kreises, und zwar namentlich deshalb, weil das auf einen Umfangspunkt des Rades bezogene Trägheitsellipsoid ein dreiachsiges ist. Das hindert aber nicht, den Bewegungsvorgang wenigstens schätzungsweise mit Hilfe einfacher Betrachtungen so weit zu verfolgen, als es für eine erste Übersicht wünschenswert erscheint. Dabei soll sich das Rad nur unter dem Einflusse seines Gewichtes bewegen und auf dem horizontalen Fußboden nur rollen und nicht gleiten.

Den Umfang des Radreif's denke ich mir etwas gewölbt, so daß das Rad — abgesehen von der elastischen Abplattung, die dabei entsteht — den Boden immer in einem Punkte berührt. Der Punkt, mit dem es im gegebenen Augenblicke auf dem Boden aufsitzt, möge als der Auflagerpunkt bezeichnet werden. Damit das Rad rollt, ohne zu gleiten, muß der Auflagerpunkt in augenblicklicher Ruhe sein, d. h. die Bewegung des

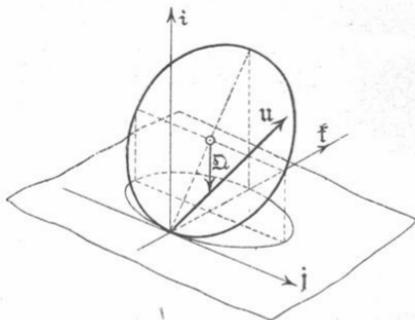


Abb. 38.

Rades aus einer Lage in die folgende kann immer nur in einer Drehung um eine durch den Auflagerpunkt gezogene Achse bestehen. Die Richtung dieser Achse kann beliebig sein. In Abb. 38, die das Rad in irgendeiner seiner Stellungen an-

gibt, ist die Richtung der Drehachse und die Größe der Winkelgeschwindigkeit durch den Vektor \mathbf{u} angegeben. Geschwindigkeiten kann man zerlegen wie Kräfte. Man tut hier am besten daran, \mathbf{u} nach drei zueinander rechtwinkligen Richtungen zu zerlegen, die in Abb. 38 durch die Richtungsfaktoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kenntlich gemacht sind. Die \mathbf{i} -Richtung steht senkrecht zum Fußboden, die \mathbf{j} -Richtung fällt mit der Horizontalspur der Radebene zusammen und die \mathbf{k} -Richtung ist schon durch die beiden vorigen mit bestimmt.

Die augenblickliche Bewegung des Rades kann man sich stets aus einem Zusammenwirken von Drehungen um die genannten Hauptrichtungen bestehend denken. Es wird daher nützlich sein, wenn man zunächst nur die Drehungen um jede der drei Hauptrichtungen für sich betrachtet. Zunächst möge das Rad nur eine Drehung um die \mathbf{i} -Achse besitzen. Der Auflagepunkt bleibt dann dauernd an seiner Stelle und das Rad kann einfach als ein dreiachsiger Kreisel aufgefaßt werden, der eine Präzessionsbewegung ausführt. Auch eine reguläre Präzession ist unter diesen Umständen möglich, und zwar so, daß jedem Neigungswinkel der Radebene gegen den Fußboden eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit um die \mathbf{i} -Achse entspricht, die zu einer regulären Präzession führt. Ich erinnere nur an das bekannte Experiment, bei dem man einen Taler auf einem Tische in dieser Weise rotieren läßt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit abnimmt, neigt sich der Taler immer mehr. Auch rechnerisch läßt sich der Zusammenhang zwischen Neigungswinkel und Winkelgeschwindigkeit um die \mathbf{i} -Achse leicht verfolgen; ich sehe aber hier davon ab.

Drehungen um die \mathbf{j} -Achse sind als Pendelbewegungen aufzufassen; volle Pendelschwingungen können hier freilich nicht zustande kommen, die Bewegung endet vielmehr mit dem Umfallen des Rades auf den Fußboden. Überdies ist auch zu beachten, daß schon vor dem vollständigen Umfallen ein Gleiten des Rades auf dem Boden zu erwarten ist. Auch darüber kann man sich ohne Schwierigkeit Rechenschaft geben; am einfachsten wendet man dazu das d'Alembertsche Prinzip

an. Man betrachtet das fallende Rad in irgendeiner seiner Stellungen, führt die Trägheitskräfte ein und ermittelt nach der Lehre vom Gleichgewichte eines starren Körpers den im Auflagerpunkte übertragenen Druck. Solange die Richtung des Auflagerdrucks noch innerhalb des Reibungskegels liegt, tritt kein Abgleiten ein; die Bewegung setzt sich vielmehr einstweilen noch so wie eine Pendelschwingung fort. Gegen das Ende der Bewegung hin wird man aber die Bedingung nicht mehr erfüllt finden und dann gleitet der Auflagerpunkt über den Fußboden.

Die beiden bis jetzt betrachteten Drehungen führen überhaupt nicht zu einem Rollen des Rades; dieses wird nur durch die Drehung um die \mathbf{f} -Achse bewirkt. Freilich kann von einer dauernden Drehung um eine festliegende \mathbf{f} -Achse hier nicht die Rede sein; die Drehung führt sofort zu einem Wechsel des Auflagerpunktes und die \mathbf{f} -Achse kann daher nur als Momentanachse in Betracht kommen. Wir können uns aber eine Bewegung vorstellen, bei der in jeder neuen Lage des Rades die nach der gegebenen Vorschrift stets von neuem konstruierte Richtung der \mathbf{f} -Achse die augenblickliche Drehungsachse angibt. Eine solche Bewegung mag als eine rein rollende bezeichnet werden; im Gegensatze zu ihr kann die Drehung um die \mathbf{i} -Achse als eine Wendung und die Drehung um die \mathbf{j} -Achse als eine Fallbewegung des Rades bezeichnet werden, wobei im letzten Falle nicht ausgeschlossen ist, daß sie im gegebenen Augenblicke auch nach oben hin erfolgt.

Im allgemeinen Falle bestehen alle drei Bewegungskomponenten zugleich und sie beeinflussen sich gegenseitig. Ein besonderes Interesse kann aber die rein rollende Bewegung, die sich leicht theoretisch behandeln läßt, immerhin beanspruchen. Um sie zu untersuchen, denke man sich eine Senkrechte zur Radebene vom Radmittelpunkte aus gezogen. Sie trifft den Fußboden auf der \mathbf{f} -Achse. Vom Schnittpunkte aus als Spitze denke man sich einen Kegel konstruiert, dessen Grundlinie der Radumfang ist und der mit dem Rade fest

verbunden sein mag. Dann muß die Kegelspitze während der rollenden Bewegung des Rades dauernd in Ruhe bleiben, da sie in jedem Augenblicke auf der f -Achse, also auf der Momentanachse enthalten ist. Wir können daher die Bewegung geradezu durch das Rollen des Kegels auf der Bodenfläche beschreiben, d. h. der Kegel bildet in Anlehnung an die früher eingeführten Bezeichnungen den Polodiekegel für die Bewegung um die als festen Punkt anzusehende Kegelspitze. Der Herpolodiekegel ist hier in eine ebene Fläche, nämlich in die Oberfläche des Bodens ausgeartet.

Von äußeren Kräften wirken auf das Rad das Gewicht und der Auflagerdruck. Die senkrechte Komponente des Auflagerdrucks muß dem Gewichte gleich sein, da der Schwerpunkt des Rades Geschwindigkeitskomponenten in senkrechter Richtung weder besitzt noch erlangt. Daneben muß freilich zugleich eine Horizontalkomponente des Auflagerdrucks auftreten, die die Zentripetalkraft für die vom Schwerpunkte ausgeführte kreisförmige Bewegung abgibt. Die Horizontalkomponente geht hiernach in jedem Augenblicke durch die Kegelspitze, und wenn wir den Flächensatz für die Kegelspitze als Momentenpunkt anwenden ist ihr Moment stets gleich Null.

Man sieht jetzt leicht, wie die Rechnung durchzuführen ist. Wenn das Rad im Anfangszustande gegeben ist, kennt man sofort die Kegelspitze, die von ihm bei der rein rollenden Bewegung umkreist wird. Man konstruiere nun das Trägheitsellipsoid für die Kegelspitze als festen Punkt. Mit dessen Hilfe findet man in schon oft benutzter Weise die Richtung des Dralls \mathfrak{B} , bezogen auf den festen Punkt. Das Moment \mathfrak{A} der äußeren Kräfte ist ebenfalls bekannt; es ist das statische Moment des aus dem Gewichte und der senkrechten Komponente des Auflagerdrucks bestehenden Kräftepaares. Beim Weiterrollen des Rades dreht sich mit ihm sowohl \mathfrak{B} als \mathfrak{A} , die stets rechtwinklig zueinander bleiben. Die Größe von \mathfrak{A} ist nur von der Neigung der Radebene gegen den Fußboden, die absolute Größe von \mathfrak{B} aber zugleich von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig. Wie groß aber diese Anfangs-

geschwindigkeit sein muß, damit bei der gegebenen Neigung des Rades eine rein rollende Bewegung zustande kommen kann, folgt aus der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{R}.$$

Auf die wirkliche Durchführung der Rechnung, die nach dem angegebenen Plane leicht erfolgen kann, gehe ich nicht ein. Dagegen mache ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam, daß die rein rollende Bewegung nur bei einer ganz bestimmten Beziehung zwischen der Schiefstellung des Rades gegen die Vertikale und der Geschwindigkeit der Rollbewegung möglich ist. Wenn das Rad im Anfangszustande eine rein rollende Bewegung hatte und die genannte Bedingung nicht erfüllt war, kann sie sich nicht in dieser Weise fortsetzen; es tritt vielmehr alsbald noch eine „Fallbewegung“ (nach unten oder auch nach oben hin) dazu. Dadurch wird die Neigung der Radebene gegen den Fußboden geändert, und zwar in solchem Sinne, daß eine Annäherung an jene Radstellung stattfindet, für die bei der gegebenen Fahrgeschwindigkeit die Bedingung des reinen Rollens erfüllt ist.

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß man zu einer allgemeineren Theorie der Radbewegung dadurch gelangen kann, daß man zwar immer noch die „Wendebewegung“ um die i -Achse ausschließt, dagegen das Auftreten von Drehungen um die j - und die k -Achse zugleich zuläßt. Diese würde sich dem allgemeinen Verhalten des Rades beim Rollen ziemlich genau anschließen, da die als Wendebewegung bezeichnete Drehung um die i -Achse auf eine „bohrende“ Reibung stößt und daher, wenn sie nicht schon anfänglich mit hinreichender Winkelgeschwindigkeit gegeben, also absichtlich herbeigeführt war, späterhin schnell erlischt und auch nicht von selbst wieder entstehen kann.

Sehr eng verwandt mit der vorigen ist auch die Bewegung einer Kugel auf einer rauhen horizontalen Ebene (Billardball) bei beliebigen Anfangsbedingungen. Man hat diese Bewegung schon sehr ausführlich behandelt; sie ist

aber praktisch von nur geringer Wichtigkeit und eigentlich nur für den Billardspieler, der zu einem theoretischen Verständnis der empirisch erworbenen Kunstfertigkeit gelangen möchte, von einigem Interesse. Die Bemerkung mag daher genügen, daß sich die Bewegung der rein rollenden Kugel (abgesehen von der rollenden Reibung) auf der rauhen Ebene genau so fortsetzt, als wenn die Ebene absolut glatt wäre. Wenn die Kugel durch einen Stoß in Bewegung gesetzt wird, tritt aber im allgemeinen (und namentlich wenn der Stoß ziemlich tief erfolgt) zugleich ein Gleiten ein, so lange bis durch die dabei auftretende gleitende Reibung der Bewegungszustand so weit abgeändert ist, daß die Kugel nachher nur noch rollt. So lange das Gleiten anhält, beschreibt der Schwerpunkt der Kugel im allgemeinen eine gekrümmte Bahn (unter gewissen Umständen eine Parabel), an die sich nach Aufhören des Gleitens eine gerade Bahn schließt.

§ 38. Ebene Bewegungen des starren Körpers.

Bisher war in diesem Abschnitte nur von der Bewegung eines starren Körpers im dreifach ausgedehnten Raum die Rede. Davon wird natürlich die ebene Bewegung, bei der alle Punkte Bahnen beschreiben, die zu einer gegebenen Ebene parallel sind, als Sonderfall mit umfaßt. Dieser Sonderfall verdient aber doch auch noch eine besondere Besprechung, zunächst weil er sehr häufig vorkommt und dann weil sich die allgemeinen Betrachtungen bei ihm sehr vereinfachen und erleichtern lassen.

Diese Vereinfachung tritt namentlich dann ein, wenn der Körper entweder eine Symmetrieebene oder wenigstens eine zum Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt gehörige Hauptträgheitsebene hat, die zur Bewegungsebene parallel ist. Die Rotationsbewegung des Körpers erfolgt dann um eine freie Achse und der zugehörige Drall fällt in dieselbe Richtung. Die Winkelgeschwindigkeit und der Drall brauchen dann nicht mehr durch Vektoren dargestellt zu werden, sondern es genügt dazu schon eine mit einem Vorzeichen versehene Zahlenangabe.

Ebenso kommt von den Trägheitsmomenten des Körpers nur das eine in Betracht, das sich auf die senkrecht zur Bewegungsebene stehende Achse bezieht. Kräfte, die in der Symmetrieebene oder in der an ihre Stelle tretenden Hauptträgheitsebene angreifen, lassen sich auf eine am Schwerpunkt angreifende Resultierende und ein Kräftepaar zurückführen, die in dieser Ebene liegen und beide können nur den Erfolg haben, daß sich die Bewegung weiter als eine ebene fortsetzt, wenn sie als solche begonnen hatte. Vom Kräftepaare folgt dies aus § 25.

Es genügt daher, wenn man sich zur Untersuchung der ebenen Bewegung den starren Körper durch eine starre Scheibe ersetzt denkt. Aber auch dieses Bild läßt sich noch weiter vereinfachen, indem man dafür zwei starr miteinander verbundene materielle Punkte setzt, deren Massen und Lagen passend gewählt sind. Hierzu erwähne ich noch, daß ein solcher Ersatz natürlich auch noch in anderer Weise möglich und auch schon vorgenommen worden ist. Aber der Ersatz durch zwei Punkte, auf den Herr Prof. Skutsch hingewiesen hat, verdient in der Regel ohne Zweifel den Vorzug.

Zunächst ist die aufgestellte Behauptung zu beweisen. Dazu dient die Bemerkung, daß sich die Bewegung eines Körpers unter dem Einflusse gegebener Kräfte vollständig auf Grund des Satzes von der Bewegung des Schwerpunkts in Verbindung mit dem Flächensatze voraussagen läßt. In den Gleichungen, die diese Sätze zum Ausdruck bringen, kommt es aber auf die besondere Gestalt und Massenverteilung überhaupt nicht an, sondern nur auf die gesamte Masse, die Lage des Schwerpunkts und auf die Gestalt des Trägheitsellipsoids. Körper, die in diesen übereinstimmen, müssen daher bei gleichem Kraftangriff auch übereinstimmende Bewegungen ausführen. Bei der ebenen Bewegung kommt es überdies, wie wir schon sahen, nur auf das Trägheitsmoment für die zur Bewegungsebene senkrechte Achse an. Es steht uns daher frei, eine beliebig gegebene Massenverteilung durch eine andere von einfacherer Art zu ersetzen, die mit der gegebenen nur in den vorher bezeichneten Stücken übereinzustimmen braucht. Wenn dann an

dieser äußere Kräfte in solcher Größe und Verteilung angebracht werden, daß die am Schwerpunkt angreifende Resultierende und das zugehörige Kräftepaar mit den am ursprünglich gegebenen Körper wirkenden übereinstimmen, müssen beide Massensysteme übereinstimmende Bewegungen ausführen.

Den gestellten Forderungen vermag man aber schon durch zwei materielle Punkte zu genügen, von denen der eine überdies noch in beliebiger Lage in der Scheibenebene angenommen

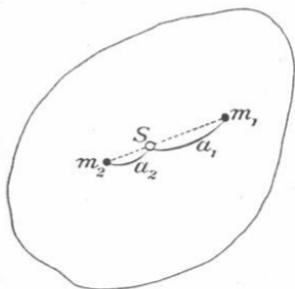


Abb. 39.

werden kann, nur mit der Ausnahme, daß er nicht auf den Schwerpunkt fallen darf. Wählt man nämlich in Abb. 39, die einen Umriß der Scheibe angibt, den materiellen Punkt m_1 beliebig aus, so muß der andere auf der durch den Schwerpunkt S gezogenen Geraden zunächst so gewählt werden, daß der Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2 mit S zusammenfällt. Zwischen den Abständen a_1 und a_2 (vgl. Abb. 39) und den Massen muß daher die Bedingung erfüllt sein

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

und außerdem, damit die Gesamtmasse in beiden Fällen dieselbe ist,

$$m_1 + m_2 = M,$$

wenn M die Scheibenmasse bedeutet. Bezeichnen wir ferner den Trägheitshalbmesser der Scheibe (bezogen auf die durch S senkrecht zur Scheibenebene gezogene Achse) mit i , so muß endlich, damit die Trägheitsmomente übereinstimmen,

$$M i^2 = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

sein. Die drei Gleichungen lassen sich nach den Unbekannten m_1 , m_2 und a_2 (da a_1 beliebig gewählt war) sofort auflösen und man erhält

$$a_2 = \frac{i^2}{a_1}; \quad m_1 = \frac{M i^2}{a_1^2 + i^2}; \quad m_2 = \frac{M a_1^2}{a_1^2 + i^2}. \quad (171)$$

Das einfachste Beispiel für die Anwendung des besprochenen Verfahrens bildet das physische Pendel, das schon

in § 17 als Beispiel für die Anwendung des Prinzips von d'Alembert besprochen worden ist. Denkt man sich in Abb. 22, S. 133 eine Massenreduktion in der Art vorgenommen, daß die Masse m_1 mit dem Aufhängepunkt O zusammenfällt, während die Masse m_2 und ihr Abstand vom Schwerpunkt nach den Gleichungen (171) zu bestimmen sind, so bilden die beiden starr miteinander verbundenen Massen ein System, das dieselbe Bewegung ausführen muß, wie das physische Pendel selbst, wenn man die entsprechenden Kräfte daran wirken läßt. Von dem Eigengewicht wird dies erreicht, wenn man annimmt, daß auch den m_1 und m_2 Gewichte zukommen, die diesen Massen entsprechen. Aber auch der Auflagerdruck muß unter diesen Umständen in beiden Fällen gleich groß und gleich gerichtet sein. Ist er es nämlich, so führen beide Systeme übereinstimmende Bewegungen aus und der mit O zusammenfallende Systempunkt bleibt in beiden Fällen in Ruhe. Wollte man dagegen annehmen, daß der an m_1 als äußere Kraft angreifende Auflagerdruck in dem System der Massen m_1 und m_2 von dem vorigen verschieden wäre, so müßte dieses System auch eine andere Bewegung ausführen, und zwar so, daß sich dabei der Angriffspunkt m_1 der abgeänderten Kraft anders bewegte als zuvor, d. h. nicht in Ruhe bliebe. Wenn wir also festsetzen, daß auch in dem Systeme $m_1 m_2$ der mit O zusammenfallende materielle Punkt m_1 festgehalten sein soll, so ist dadurch schon mit bestimmt, daß auch die Auflagerkraft in diesem Systeme ebenso groß ausfallen muß, wie vorher bei dem physischen Pendel.

Man erkennt nun sofort, welchen Vorteil diese Art der Massenreduktion gewährt. Das Gewicht von m_1 wird unmittelbar vom Auflager aufgenommen und kommt nur darin zur Geltung, daß der Auflagerdruck dadurch mit bestimmt wird. Das System der m_1 und m_2 muß sich daher genau so wie ein einfaches Fadenpendel mit der Masse m_2 im Abstände $a_1 + a_2$ vom Aufhängepunkt bewegen, d. h. die reduzierte Pendellänge des physischen Pendels ist

$$l_{\text{red}} = a_1 + a_2 = s + \frac{i^2}{s} = \frac{i^2 + s^2}{s}.$$

Das stimmt mit Gl. (97), S. 136 überein, wenn man nur beachtet, daß dort der Trägheitshalbmesser i auf die Aufhängeachse, hier aber auf die Schwerpunktsachse des Körpers bezogen wurde, und daß zwischen beiden die schon aus den Untersuchungen des 3. Bandes bekannte einfache Beziehung besteht.

Diese Massenreduktion und ihre Anwendung auf das physische Pendel rührt schon von Poinsot her. Herr Skutsch, der sie von neuem aufgriff und auf ihre mannigfache Verwendbarkeit hinwies, hat in seiner kurzen Abhandlung (Sitzungsberichte d. Berliner math. Ges. v. 26. April 1905) unter anderem ein Beispiel gebracht, auf das hier noch mit wenigen Worten eingegangen werden soll. Die Aufgabe lautet: „Zwei in derselben Ebene bewegte Scheiben werden plötzlich fest miteinander verbunden; man soll die Bewegung nach der Koppelung ermitteln.“

Man löst die Aufgabe, indem man jede Scheibe durch zwei Massenpunkte derart ersetzt, daß beide Punktpaare in dem Augenblicke, in dem die Verbindung der Scheiben erfolgt, miteinander zusammenfallen. Zu diesem Zwecke zieht man die Verbindungslinie beider Schwerpunkte. Auf ihren Verlängerungen nach beiden Seiten hin kann man dann leicht zwei Punkte ermitteln, deren Abstände a_1 , a_2 und b_1 , b_2 von den Schwerpunkten den Bedingungen $a_1 a_2 = i_1^2$ und $b_1 b_2 = i_2^2$ entsprechen, wenn i_1 , i_2 die Trägheitshalbmesser der Scheiben sind. Nach diesen Punkten lassen sich dann entsprechend den Gleichungen (171) die Massen beider Scheiben verteilen und ebenso auch die gesamte Masse nach erfolgter Koppelung. Bei der Koppelung entsteht ein Stoß, durch den aber weder die Bewegungsgröße noch der Drall des ganzen Systems geändert werden können, da keine äußeren Kräfte mitwirken. Diese Bedingungen genügen, um daraus sofort die Geschwindigkeiten beider Reduktionspunkte zu berechnen, was aber jetzt nicht weiter ausgeführt werden soll.

Vierter Abschnitt.

Schwingungen elastischer Körper.

§ 39. Biegungsschwingungen von Stäben mit gleichförmig verteilter Masse.

Von den Schwingungen elastischer Körper hat besonders das Problem der schwingenden Saiten, also etwa der Violinsaiten, eine wichtige Rolle in der Physik gespielt. Fourier hat es zuerst gelöst und daran hat sich zugleich einer der wichtigsten Fortschritte der Mathematik, nämlich die Entwicklung einer beliebig gegebenen Funktion in eine Fouriersche Reihe geknüpft. Für die Technik ist dieses Problem jedoch nur von geringer Bedeutung.

Ich werde hier deshalb nicht darauf eingehen, sondern an Stelle davon das Problem des schwingenden Stabs behandeln das mit jenem sehr verwandt, dabei aber von größerem Interesse für den Techniker ist, weil es Aufschluß über die Schwingungen gibt, die z. B. ein Brückenbalken oder überhaupt ein belasteter Träger auszuführen vermag. Dagegen möchte ich noch hervorheben, daß dieses Problem nicht mit einem anderen verwechselt werden darf, das schon früher von Stokes und später besonders von Zimmermann in sehr geschickter und ausführlicher Weise behandelt worden ist. Bei diesem wird nämlich der Fall untersucht, daß ein Fahrzeug, das als materieller Punkt aufgefaßt werden kann, auf einen Brückenträger mit gegebener Geschwindigkeit auffährt und dabei vorausgesetzt, daß die Masse des Brückenträgers vernachlässigt werden könne. Auf die Zimmermannsche Untersuchung werde ich hier nicht eingehen, weil mich dies zu weit führen würde; ich empfehle aber den sich dafür Interessierenden die darüber veröffentlichte

Schrift „Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last“ von H. Zimmermann, Berlin 1896. Ich muß freilich leider hinzufügen, daß diese an sich sehr schöne Untersuchung durch die Vernachlässigung der Masse des Trägers sehr an Wert einbüßt.

Darum, wie die Schwingungen des Trägers, die wir untersuchen wollen, ursprünglich angeregt wurden, werde ich mich überhaupt nicht kümmern; es wird sich nur darum handeln, zu untersuchen, wie sie sich, nachdem sie einmal bestanden haben, weiterhin fortsetzen. Aber auch dieses Problem behandle ich nicht vollständig; ich begnüge mich vielmehr, die allerwichtigsten Betrachtungen, die sich darüber anstellen lassen, hier wiederzugeben.

Gegenüber dem Probleme der schwingenden Saiten besteht hier nur der Unterschied, daß bei den Saiten der Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann, so daß nur die Längsspannungen in Frage kommen, während bei den Stäben der Biegungswiderstand die ausschlaggebende Rolle spielt, von dem Hinzutreten einer Längszugspannung dagegen abgesehen werden kann.

Unter der gleichmäßig verteilten Last, die dem Träger aufgebürdet ist, und die die Schwingungen mit ihm zusammen ausführt, erfährt der Träger schon im Ruhezustande eine geringe elastische Durchbiegung, die als Funktion der Querschnittsabszisse aus der Gleichung der elastischen Linie nach bekannten Entwicklungen der Festigkeitslehre berechnet werden kann. Diese „statische“ Durchbiegung y_s kümmert uns hier wenig. Wenn der Träger schwingt, wird die gesamte Durchbiegung in einem bestimmten Augenblicke von y_s im allgemeinen verschieden sein. Der Unterschied möge mit y und die totale Durchbiegung mit y_d oder als „dynamische“ Durchbiegung bezeichnet werden. Man hat also

$$y_d = y_s + y.$$

und in Abb. 40 ist dieser Zusammenhang noch näher nachgewiesen. Die eine Linie soll die elastische Linie für den

Ruhezustand, die andere die Mittellinie des Stabs in irgendeinem Augenblicke während der Schwingung andeuten.

Um die Aufgabe nach den Methoden der Festigkeitslehre behandeln zu können, machen wir von dem d'Alembert'schen

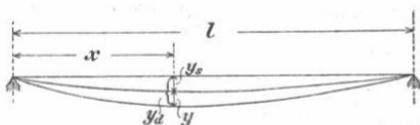


Abb. 40.

Prinzip Gebrauch. Wir können voraussetzen, daß im wesentlichen nur Verschiebungen senkrecht zur Stabachse in Frage kommen und wollen uns auch von vornherein nur auf Verschiebungen in der Vertikalebene beschränken. Natürlich lassen sich aber die erlangten Resultate auch auf Horizontalschwingungen ohne weiteres anwenden. Dann ist die Beschleunigung im gegebenen Augenblicke für die im Abstände x vom linken Auflager liegenden Massenteilchen ebenfalls nach abwärts (oder bei negativem Vorzeichen nach aufwärts) gerichtet und gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

zu setzen. Wenn die auf die Längeneinheit kommende Masse der Belastung (samt Eigengewicht des Stabs) mit μ bezeichnet wird, erhalten wir für die Trägheitskraft, die wir an dem Längenelement dx anbringen müssen, um die Aufgabe auf ein Gleichgewichtsproblem zurückzuführen,

$$-\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Es möge noch bemerkt werden, daß man in diesem Ausdrucke y auch durch y_a ersetzen könnte, da y_s der Zeit nach konstant ist. Es ist aber bequemer, sofort überall mit y zu rechnen.

Die Trägheitskräfte, als Lasten an dem Stabe angebracht, führen am ruhenden Stabe im Vereine mit den wirklich vorhandenen Lasten zu der elastischen Durchsenkung y_a . Anstatt dessen können wir auch sagen, daß die Trägheitskräfte für sich genommen, als Lasten am ruhenden Stabe eine elastische Linie hervorrufen würden, deren Ordinaten y wären. Natürlich ist dabei vorausgesetzt, daß das Material des Stabes dem Hookeschen Gesetze gehorcht, daß also die Proportionalitäts-

grenze im Verlaufe der Schwingung niemals überschritten wird. In diesem Falle setzen sich aber in der Tat, wie aus den Untersuchungen der Festigkeitslehre bekannt ist, die von zusammengesetzten Lastensystemen erzeugten Durchbiegungen durch algebraische Summierung aus jenen zusammen, die den einzelnen Lasten für sich entsprechen.

Die Gleichung der elastischen Linie für die Durchbiegungen y lautet

$$E\Theta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M.$$

Das Biegemoment M ist aber hier nicht unmittelbar gegeben; wir haben nur einen Ausdruck für die Belastung irgendeines Stabelements dx . Wir befinden uns also genau in derselben Lage wie bei den im 6. Abschnitte der „Festigkeitslehre“ untersuchten Stäben auf nachgiebiger Unterlage; wir müssen daher auch genau so verfahren wie dort. Wir differenzieren also die Gleichung der elastischen Linie zweimal nach x und erhalten

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Für das Differential ∂V der Scherkraft, das zum Differential ∂x der Abszisse gehört, haben wir

$$\partial V = +\mu \partial x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

denn die Trägheitskräfte sind nach aufwärts gekehrte Lasten, wenn sie negativ sind, und sie führen in diesem Falle zu einer Vergrößerung der Scherkraft, die nach oben hin positiv gerechnet wird. Die vorhergehende Gleichung geht hiermit über in

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (172)$$

Das ist die Differentialgleichung unseres Problems. Sie ist eine partielle Differentialgleichung, in deren allgemeine Lösung daher willkürliche Funktionen eintreten müssen. Die Schwingungen des Stabes können daher von sehr mannigfaltiger Art sein. Das kann auch nicht überraschen, wenn wir be-

denken, daß die Gestalt des Stabes zu Anfang ganz willkürlich gegeben sein kann, und daß auch die anfänglichen Geschwindigkeiten ganz beliebige stetige Funktionen der Querschnittsabszisse x sein können. Jedem anderen Anfangszustande müssen aber in der Folge auch andere Schwingungen entsprechen.

Unter diesen Umständen sucht man zunächst partikuläre Lösungen der Gleichung von möglichst einfacher Form. Man gelangt dadurch zur Kenntnis besonderer möglicher Schwingungen und aus einer Kombination der einzeln als möglich erkannten Schwingungen sucht man die allgemeine Lösung oder die zu gegebenen Anfangsbedingungen gehörige Lösung zusammensetzen. Das Zusammensetzen der einzelnen Lösungen wird mathematisch gesprochen dadurch ermöglicht, daß die Differentialgleichung linear ist, oder physikalisch gesprochen dadurch, daß sich die Schwingungen zu superponieren vermögen, so daß eine die andere nicht stört.

Die einfachste Lösung von Gl. (172) ist von der Form

$$y = A \sin \alpha x \sin \beta t. \quad (173)$$

Von den hierbei vorkommenden Konstanten ist indessen nur A willkürlich; es gibt den größten Ausschlag an, der an irgendeiner Stelle und zu irgendeiner Zeit vorkommt. Zwischen den anderen Konstanten α und β muß zunächst eine Bedingungsgleichung erfüllt sein, damit Gl. (173) wirklich eine Lösung von Gl. (172) darstelle. Setzt man nämlich den für y vorgeschlagenen Wert in Gl. (172) ein, so geht sie nach Wegheben gleicher Faktoren auf beiden Seiten über in

$$E\Theta\alpha^4 = \mu\beta^2. \quad (174)$$

Außerdem muß α auch so gewählt werden, daß die Grenzbedingungen an den Enden erfüllt werden. Für $x = 0$ ist y nach Gl. (173) schon von selbst gleich Null; außerdem muß aber y auch für $x = l$ zu jeder Zeit gleich Null bleiben. Hiernach muß der Winkel αl entweder gleich π oder 2π oder überhaupt gleich irgendeinem ganzen Vielfachen von π sein. Je nachdem man sich für die eine oder die andere Annahme entscheidet, erhält man verschiedene Schwingungsbewegungen

des Stabes. Jene, die zum Werte $\alpha = \frac{\pi}{l}$ gehört, wird die Grundschiwingung des Stabes genannt. Es ist jene, die dem tiefsten Tone der von dem schwingenden Stabe ausgesendeten Schallwellen entspricht. Für β hat man dann nach Gl. (174)

$$\beta = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \Theta}{\mu}}$$

und Gl. (173) nimmt für die Grundschiwingung die bestimmtere Form an

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin t \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \Theta}{\mu}}. \quad (175)$$

Während der Dauer einer vollen Schwiwingung wächst der Winkel βt um 2π an; für die Schwiwingungsdauer T hat man daher

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{E \Theta}}. \quad (176)$$

Wählt man α gleich einem Vielfachen von $\frac{\pi}{l}$, so treten nach Gl. (173) Schwiwingungsknoten auf, d. h. es gibt Punkte, die die ganze Stablänge in gleiche Abschnitte einteilen und die während der Schwiwingungsbewegung fortwährend in Ruhe bleiben. Die dazwischen liegenden Abschnitte deformieren sich, so wie im vorigen Falle der ganze Stab, nach dem Gesetze einer Sinuskurve: sie bilden die zwischen den Knoten liegenden „Schwiwingungsbäuche“. Setzt man z. B. $\alpha = 2 \frac{\pi}{l}$, so hat man einen Schwiwingungsknoten in der Mitte, denn für $x = \frac{l}{2}$ wird αx zu π und der Sinus zu Null. Die Stabmittellinie zerfällt beim Schwiwingen in zwei Schwiwingungsbäuche. Wenn α auf das Doppelte wächst, steigt β nach Gl. (174) auf das Vierfache. Die Schwiwingungsdauer beträgt daher bei dieser Schwiwingung nur den vierten Teil von der Schwiwingungsdauer der Grundschiwingung. Je mehr Bäuche der Stab bei den einfachen Sinusschwiwingungen bildet, desto kleiner ist die Schwiwingungsdauer und um so höher ist daher der Ton der von dem Stabe ausgesendeten Schallwellen. Man nennt diese Töne die „Ober-

töne“ des schwingenden Stabs im Gegensatze zu dem von der Grundschiwingung ausgehenden „Grundtone“.

In je mehr Abschnitte die ganze Stablänge durch die Schwingungsknoten zerlegt ist, um so kleinere Schwingungsamplituden A sind noch mit einem gewissen Krümmungsradius von gegebener Größe oder auch mit einer gegebenen Formänderungsarbeit des Stabes verträglich. Die Grundschiwingung vermag daher schon zu großen Ausschlägen zu führen, ohne daß etwa die Proportionalitätsgrenze schon bald erreicht wäre, oder ohne daß eine besonders große Arbeit äußerer Kräfte zur Herstellung der Schwingungen und der dazu gehörigen Formänderungen aufgewendet werden müßte. Je höher aber die Schwingungszahlen der Oberschwingungen liegen, um so kleiner müssen notwendig die Schwingungen schon deshalb bleiben, weil sonst die Proportionalitätsgrenze überschritten und damit die Schwingungen sofort gedämpft würden und zugleich auch weil eine viel größere Arbeit zu ihrer Erregung bei gleicher Amplitude aufgewendet werden müßte. Außerdem werden die Schwingungen auch an sich schon um so stärker gedämpft, je schneller sie erfolgen, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit wächst. Von der Schwingungsamplitude hängt aber die Schallstärke der von dem schwingenden Stab auf die Luft übergehenden Schallwellen ab und man erkennt daher, daß sich der Grundton bei beliebiger Erregung der Schwingungen im allgemeinen am stärksten bemerkbar machen wird und jeder Oberton um so weniger, je höher er liegt.

§ 40. Allgemeinere Lösung der Schwingungsgleichung.

Für den auf zwei Stützen ruhenden Stab genügt die vorhergehende Betrachtung; dagegen versagt sie bereits bei der Untersuchung der Biegungsschwingungen eines Stabs, der an einem Ende eingeklemmt ist, während das andere frei ist, also z. B. eines Kragträgers oder eines Pfeilers oder auch des Zinkens einer Stimmgabel. Um eine allgemeinere Lösung der Differentialgleichung (172) zu erhalten, setzen wir daher jetzt

$$y = z \sin \beta t, \quad (177)$$

worin z eine Funktion von x allein bedeutet. Setzen wir diesen Wert in die Differentialgleichung ein, so geht sie nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors $\sin\beta t$ über in

$$E\Theta \frac{d^4 z}{dx^4} = \mu\beta^2 z \quad (178)$$

und die Schwingungsgleichung ist daher in der Tat erfüllt, wenn man z so bestimmt, daß Gl. (178) befriedigt wird. Diese Gleichung ist aber eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung sofort angegeben werden kann. Bezeichnet man nämlich mit α denselben Wert wie im vorigen Paragraphen, nämlich in Übereinstimmung mit Gl. (174)

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\mu\beta^2}{E\Theta}},$$

so lautet die allgemeine Lösung von Gl. (178)

$$z = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}, \quad (179)$$

wovon man sich durch Einsetzen in Gl. (178) leicht überzeugt. Die C sind die vier willkürlichen Integrationskonstanten, die in der allgemeinen Lösung vorkommen müssen. Setzt man die drei letzten gleich Null und beschränkt sich auf das mit C_1 behaftete Glied, so gelangt man wieder auf die im vorigen Paragraphen betrachtete, weniger allgemeine Lösung zurück. Im allgemeineren Falle sind aber alle vier beizubehalten und den vorgeschriebenen Grenzbedingungen gemäß zu ermitteln. Soll insbesondere für $x = 0$ jederzeit auch $y = 0$ werden, so folgt zunächst

$$C_2 + C_3 + C_4 = 0.$$

Wenn der Stab an dieser Stelle überdies eingespannt sein soll wie wir es jetzt voraussetzen, muß für $x = 0$ auch $\frac{dz}{dx} = 0$ werden, woraus

$$C_1 + C_3 - C_4 = 0$$

folgt. Die weitere Berechnung mag sich auf den eingangs genannten Fall beziehen, daß das andere Ende des Stabs von der Länge l frei ist, wie bei einem Kragträger. Dann muß für den Querschnitt $x = l$ sowohl das Biegemoment M , als die

Schwerkraft V jederzeit gleich Null sein. Dazu gehört, daß dort $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^3z}{dx^3}$ verschwinden. Wir haben also die weiteren Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} -C_1 \sin \alpha l - C_2 \cos \alpha l + C_3 e^{\alpha l} + C_4 e^{-\alpha l} &= 0 \\ -C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l + C_3 e^{\alpha l} - C_4 e^{-\alpha l} &= 0. \end{aligned}$$

Wollte man aber die vier Bedingungsgleichungen dazu benutzen, um bei beliebig angenommenen α (oder β) die C daraus zu berechnen, so würde man sie alle vier gleich Null finden. Damit überhaupt eine Schwingung von der beobachteten Art möglich ist, müssen wir daher eine der Konstanten C beliebig annehmen, dann die drei anderen aus drei der Bedingungsgleichungen ermitteln und hierauf die vierte Bedingungsgleichung dazu verwenden, um daraus α zu berechnen. Mit α ist dann auch β und hiermit die Schwingungsdauer bekannt. Drückt man aus den ersten beiden Gleichungen C_1 und C_2 in C_3 und C_4 aus und setzt dies in die beiden letzten ein, die sich hierauf beide nach dem Verhältniss $\frac{C_3}{C_4}$ auflösen lassen, so erhält man durch Gleichsetzen der beiden Werte, zu denen man hierdurch gelangt, eine Gleichung für α , die sich nach Ausrechnung vereinfacht zu

$$\cos \alpha l \cdot \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2} = -1. \quad (180)$$

wofür man auch unter Benutzung der hyperbolischen Funktionen kürzer

$$\cos \alpha l \cdot \cosh \alpha l = -1 \quad (181)$$

schreiben kann. Die Gleichung hat unendlich viele reelle positive Wurzeln, die sich genau genug angeben lassen. Am wichtigsten ist die kleinste unter ihnen. Man erkennt sofort, daß für sie der Winkel αl ein stumpfer sein muß. Schreibt man daher

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} + \varphi_1,$$

so läßt sich Gleichung (181) auch in der etwas bequemeren Form

$$\sin \varphi_1 \cosh \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) = 1$$

schreiben und durch Vergleichen einer Sinustafel mit einer Tafel der hyperbolischen Funktionen läßt sich φ_1 ziemlich schnell durch Probieren ermitteln. Nimmt man $\varphi_1 = 18^\circ$ oder in Bogenmaß $\varphi_1 = 0,3142$, so erhält man

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_1 = 1,8850; \quad \lg \sin 18^\circ = 9,4900; \quad \lg \cosh 1,8850 = 0,5275$$

$$\lg \sin 18^\circ + \lg \cosh 1,8850 = 0,0175,$$

während Null herauskommen sollte. Der Winkel φ_1 muß daher ein wenig kleiner sein, als 18° . Die Wiederholung der Rechnung für $17^\circ 30'$ liefert für die Summe der beiden Logarithmen 0,0019. Hiernach kann φ_1 genau genug gleich $17^\circ 26'$ gesetzt werden oder in Bogenmaß $\varphi_1 = 0,304$ und hiermit schließlich

$$\alpha l = 1,875.$$

Für β folgt daraus nach Gl. (174)

$$\beta = \alpha^2 \sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}} = \frac{0,3516}{l^2} \sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}}$$

und hiermit wird die Schwingungsdauer der Grundschwingung gefunden zu

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = 1,787 l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E\Theta}}. \quad (182)$$

Die nächste Wurzel der Gleichung (181) gehört zu einem Winkel im dritten Quadranten. Um diesen zu finden, setze man

$$\alpha l = \frac{3\pi}{2} - \varphi_2,$$

womit Gl. (181) übergeht in

$$\sin \varphi_2 \cosh \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi_2 \right) = 1.$$

Nun ist $\cosh \frac{3\pi}{2}$ schon größer als 55, daher kann φ_2 nur ein kleiner Winkel sein, dessen sin ungefähr $\frac{1}{55}$ ausmacht, d. h. ein Winkel von ungefähr 1° , dessen genauerer Wert sich so wie vorher feststellen ließe.

Ebenso läßt sich die dritte Wurzel der Gl. (181) in der Form

$$\alpha l = \frac{5\pi}{2} + \varphi_3$$

darstellen und die folgenden entsprechend. Dabei sind aber φ_3 und mehr noch die späteren φ so klein, daß man sie ohne weiteres ver-

nachlässigen kann. Man hat also genau genug

$$\alpha_3 = \frac{5\pi}{2l}; \quad \alpha_4 = \frac{7\pi}{2l} \text{ usf.}$$

Aus diesen Werten von α findet man wiederum die zugehörigen β nach Gl. (174) und hieraus die Schwingungsdauern der betreffenden Oberschwingungen.

§ 41. Biegungsschwingungen von Schiffen.

Ein Schiff vermag als elastischer Körper mancherlei Schwingungen auszuführen. Von Wichtigkeit ist es, die Schwingungsdauern dieser Schwingungen ungefähr zu kennen, weil bei einer Resonanz mit einer schwingungserregenden Ursache leicht große Ausschläge entstehen, die sich sehr lästig bemerkbar machen können. Als schwingungserregende Ursache kommt dabei namentlich die Maschine, außerdem aber auch die Schiffsschraube in Betracht. Geringe Abweichungen in den Steigungsverhältnissen der einzelnen Schraubenflügel bewirken nämlich schon erhebliche Unterschiede des durch diese Flügel hervorgebrachten Schubs, und wenn der Flügel, der einen größeren Wasserwiderstand findet, nach oben hin liegt, hat auch die Resultierende der von der ganzen Schraube auf das Schiff übertragenen Kräfte eine höhere Lage als nach einer halben Umdrehung, nach der dieser stärker beanspruchte Flügel unten ist. Wenn die Umlaufzeit der Schraube mit der Dauer einer vollen Biegungsschwingung des Schiffes übereinstimmt, hat man eine Resonanz zu erwarten, die zu großen Schwingungsausschlägen führen kann. Experimentelle Untersuchungen, die Herr Schlick über die elastischen Schwingungen großer Dampfer angestellt hat, bestätigten diese Überlegung. Ein Schiffbau-Ingenieur hat daher alle Ursache, die mit elastischen Formänderungen verbundenen Schwingungen der Schiffskörper näher zu untersuchen.

Auf theoretischem Wege läßt sich freilich die Schwingungsdauer der Biegungsschwingungen, um die es sich hier zunächst handelt, nicht genau voraus berechnen. Einen ungefähren Anhaltspunkt erhält man aber doch, wenn man das Schiff als einen Stab betrachtet, dessen Massenverteilung der im belasteten

Schiffe zu erwartenden angenähert entspricht und bei dem auch das Trägheitsmoment der Querschnitte, von dem der Biegungswiderstand abhängt, hinlänglich mit der des Schiffes übereinstimmt.

Hier wird es genügen, wenn die Betrachtung unter der Voraussetzung durchgeführt wird, daß die Massenverteilung der ganzen Länge des Stabes nach als gleichförmig, und daß auch das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts als konstant angenommen werden kann. Zum mindesten wird damit das Verfahren klar gelegt, nach dem man die Betrachtung auch für passend gewählte andere Annahmen, die sich dem einzelnen Falle besser anschließen, dabei aber ebenfalls noch zu verhältnismäßig einfachen Rechnungen führen, durchzuführen vermag.

Wenn die Längsachse des Schiffes eine Verbiegung in der vertikalen Ebene erfährt, werden einzelne Teile etwas tiefer, andere etwas weniger in das Wasser eintauchen, als vorher. Daher wird auch die Verteilung des Auftriebs ein wenig geändert werden. Da aber die Biegungspfeile jedenfalls nur sehr gering sein werden, wird diese Änderung sehr geringfügig ausfallen, so daß man von ihr ganz absehen kann. Der Stab, den wir uns an die Stelle des Schiffskörpers gesetzt denken, wird sich bei der Schwingung dann so wie ein völlig freier Stab verhalten, an dem von außen her gar keine Kräfte angreifen.

Man sieht jetzt schon, daß die Lösung der gestellten Aufgabe unmittelbar aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen entnommen werden kann. Wir haben die Gleichungen (177) bis (179) ohne Änderung zu übernehmen und nur die Bedingungsgleichungen zwischen den Integrationskonstanten C den jetzt geltenden Grenzbedingungen gemäß aufzustellen.

In Abb. 41 sei die Gestalt der deformierten Stabmittellinie zur Zeit t dargestellt. Wegen der Symmetrie dieser Biegelinie, die wir von vornherein voraussetzen dürfen, empfiehlt es sich, die Y -Achse mit der Symmetrieachse zusammenfallen zu lassen. Dann muß y und daher auch z eine grade Funktion von x sein. Daraus folgt $C_1 = 0$ und $C_3 = C_4$, womit sich

Gl. (179) vereinfacht zu

$$z = C_2 \cos \alpha x + C_3 (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}). \quad (183)$$

Da die Schwingung ohne Mitwirkung äußerer Kräfte erfolgt, muß der Schwerpunkt dabei in Ruhe bleiben und dazu gehört bei gleichförmiger Massenverteilung, daß

$$\int_0^b z dx = 0$$

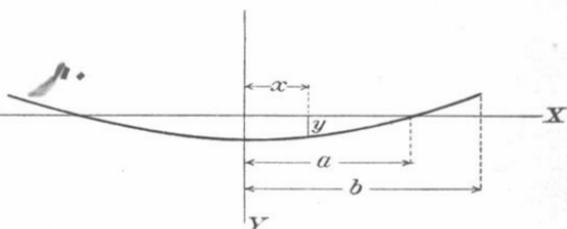


Abb. 41.

wird. Führt man die Integration aus, so erhält man als Bedingungsgleichung zwischen den Integrationskonstanten C

$$C_2 \sin \alpha b + C_3 (e^{\alpha b} - e^{-\alpha b}) = 0.$$

Die beiden Stabenden sind frei; für $x = b$ muß daher das Biegemoment M und die Scherkraft V zu Null werden. Daraus folgt, wie schon im vorigen Paragraphen, daß an dieser Stelle $\frac{d^2 z}{dx^2}$ und $\frac{d^3 z}{dx^3}$ verschwinden müssen. Dadurch erhalten wir die Gleichungen

$$-C_2 \cos \alpha b + C_3 (e^{\alpha b} + e^{-\alpha b}) = 0,$$

$$C_2 \sin \alpha b + C_3 (e^{\alpha b} - e^{-\alpha b}) = 0.$$

Die letzte Gleichung stimmt aber mit der vorher aus dem Schwerpunktsatze abgeleiteten Bedingungsgleichung überein, so daß nur zwei Gleichungen zu befriedigen sind, was auch von vornherein zu erwarten war.

Löst man beide Gleichungen nach dem Verhältnisse $\frac{C_2}{C_3}$ auf und setzt die beiden Lösungen einander gleich, so gelangt man auf die Gleichung, aus der α zu berechnen ist, nämlich

$$\frac{e^{\alpha b} + e^{-\alpha b}}{\cos \alpha b} = - \frac{e^{\alpha b} - e^{-\alpha b}}{\sin \alpha b}.$$

Auch hier gelangt man zu einer kürzeren Fassung durch die

Einführung der Hyperbel-Funktionen. Mit ihnen läßt sich die Gleichung schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha b = - \operatorname{tgh} \alpha b. \quad (184)$$

Da $\operatorname{tgh} \alpha b$ stets ein positiver echter Bruch ist für ein positives αb , muß $\operatorname{tg} \alpha b$ negativ und daher αb jedenfalls größer als $\frac{\pi}{2}$ sein. Mit Hilfe einer Tabelle der Hyperbelfunktionen findet man leicht, wie schon im vorigen Paragraphen die kleinste Wurzel der Gleichung (184) durch Probieren, und zwar genau genug

$$\alpha b = 2,365. \quad (185)$$

Von den übrigen Wurzeln ist jede folgende nahezu um π größer als die vorhergehende; die wichtigste Wurzel ist aber die kleinste, da sie zu den Grundschwingungen gehört, mit denen eine Resonanz am meisten zu fürchten ist. Berechnet man α aus Gl. (185) und hierauf β nach Gl. (174), so erhält man für die Schwingungsdauer der Grundschwingung

$$T = 1,123 b^2 \sqrt{\frac{\mu}{E \Theta}}.$$

Setzt man noch $b = \frac{1}{2} l$, so daß unter l die ganze Stablänge zu verstehen ist, und bezeichnet man das Gewicht des Stabs mit Q , womit

$$\mu = \frac{Q}{ly}$$

wird, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$T = 0,281 \sqrt{\frac{Q l^3}{g E \Theta}}. \quad (186)$$

Die kritische Umdrehungszahl der Maschine oder der Schiffschraube bei der eine Schwingungsresonanz zu erwarten ist, und zwar auf die Minute bezogen, wird hiermit

$$N_k = \frac{60}{T} = 213 \sqrt{\frac{g E \Theta}{Q l^3}}. \quad (187)$$

Von Wichtigkeit ist noch die Lage $x = a$ (Abb. 41) des Schwingungsknotens, für den z zu Null wird. Mit dem Werte

αb aus Gl. (185) erhält man aus den Bedingungsgleichungen

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{\cos 2,365}{2 \cosh 2,365} = -0,0664.$$

Für die Grundschwingungen schreibt sich daher Gl. (183) in der Form

$$z = C_2 (\cos \alpha x - 0,0664 \cdot 2 \cosh \alpha x),$$

so daß für die Abszisse des Schwingungsknotens die Gleichung

$$\cos \alpha a = 0,1328 \cosh \alpha a$$

besteht. Die Auflösung durch Probieren liefert für die kleinste Wurzel, die allein in Betracht kommt,

$$\alpha a = 1,305.$$

Vergleicht man hiermit Gl. (185), so folgt

$$a = 0,552 b, \quad (188)$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß die Lösung auch dann noch gültig bleibt, wenn μ und Θ zwar nicht mehr konstant sind, aber ihr Verhältnis $\frac{\mu}{\Theta}$ unabhängig von x ist. Reicht man damit nicht aus, so wird man für dieses Verhältnis eine sich dem tatsächlichen Verlaufe genau genug entschießende einfache Funktion von x annehmen, die so gewählt ist, daß sich Gl. (178) nachher auch noch leicht integrieren läßt. Durch Probieren wird man leicht einen passenden Ansatz ausfindig machen können. Die weitere Berechnung kann dann genau nach dem Muster der vorhergehenden durchgeführt werden.

§ 42. Torsionsschwingungen von langen Wellen.

Wir betrachten hier zuerst eine Welle, an deren Enden zwei Schwungräder aufgekeilt sind. Abb. 42 gibt davon eine Vorderansicht; die zur Unterstützung der Wellen dienenden Lager sind aus der Zeichnung weggelassen. Die Trägheitsmomente der beiden Schwungräder sind mit Θ_1 und Θ_2 bezeichnet.

Solange die Welle keine merkliche elastische Formände-

rung erfährt, kann man den ganzen in Abb. 42 gezeichneten Verband als starren Körper betrachten, der als solcher z. B. eine

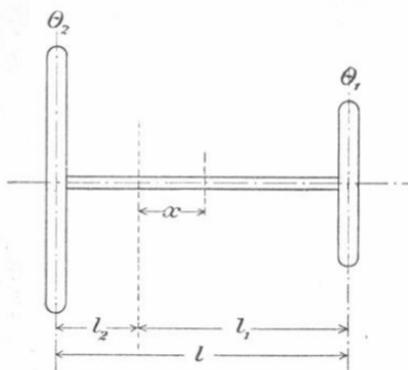


Abb. 42.

Drehbewegung um die Mittel-
linie der Welle als Drehachse
ausführen kann. Wenn die
Welle ziemlich lang ist, ver-
mag sie aber ohne Über-
schreitung der Proportionali-
tätsgrenze des Materials um
einen merklichen Torsionswin-
kel verdreht zu werden und
die Winkelgeschwindigkeiten
der beiden Schwungräder brau-
chen dann in einem gege-
benen Augenblicke nicht mehr

genau gleich zu sein. Der Unterschied der beiden Winkel-
geschwindigkeiten ist vielmehr gleich der Geschwindigkeit, mit
der sich der Torsionswinkel in diesem Augenblicke ändert.
Erfährt nun der Torsionswinkel periodische Änderungen, so
werden dadurch Drehschwingungen der beiden Schwungräder
gegenseitig bedingt, die wir hier näher untersuchen wollen.

Neben diesen durch die Elastizität der Wellen ermöglichten
Formänderungsschwingungen kann der ganze Verband zugleich
noch eine gemeinschaftliche Bewegung, und zwar hier eine Um-
drehung um die Wellenachse mit beliebiger Winkelgeschwindig-
keit ausführen. Dieser Fall liegt sogar bei den im praktischen
Maschinenbetriebe vorkommenden Erscheinungen, um deren Er-
klärung es sich hier vor allem handelt, stets vor. Die Form-
änderungsschwingungen entziehen sich dann, selbst wenn sie
verhältnismäßig groß sind, vollständig der unmittelbaren Wahr-
nehmung, da sie durch die viel größeren Drehbewegungen, die
der ganze Verband gemeinschaftlich ausführt, verdeckt werden.
Sie sind daher lange Zeit auch unter Umständen, bei denen
sie von großer Wichtigkeit waren, ganz unbemerkt und unbe-
achtet geblieben. Durch besondere Meßvorrichtungen können
sie aber natürlich nachgewiesen werden. Es war ein erheb-

liches Verdienst des Hamburger Ingenieurs Frahm, daß er diese Schwingungen an den langen Wellenleitungen von Dampfschiffen einerseits durch Messungen festgestellt, andererseits die theoretische Erklärung dafür gegeben und die Gefahren aufgedeckt hat, die durch diese Schwingungen für die Sicherheit der Wellen beim Auftreten von Resonanzen hervorgerufen werden.

Die Winkelgeschwindigkeit der gemeinschaftlichen Bewegung des ganzen Verbandes braucht übrigens auch nicht konstant zu sein. Wenn an einer Stelle der Wellen ein periodisch wechselndes Drehmoment auftritt, das von der Antriebsmaschine herrührt, während an einer anderen Stelle die zugeführte Arbeit wieder nach außen abgegeben wird, erfährt vielmehr die Winkelgeschwindigkeit der gemeinschaftlichen Bewegung abwechselnd Verzögerungen und Beschleunigungen. Der ganze Bewegungsvorgang kann dann in drei Bestandteile zerlegt werden: in die Drehbewegung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, die gleich der durchschnittlichen Geschwindigkeit ist, in die Schwingungen, die das ganze System als starrer Körper betrachtet, um diesen mittleren Bewegungszustand herum ausführt und endlich in die Formänderungsschwingungen, die zu den anderen noch hinzukommen. Ist der letzte Anteil so klein, daß er vernachlässigt werden kann, so hängt die Gleichförmigkeit des Ganges der Maschine nur von dem Verhältnisse ab, in dem der zweite Anteil zu dem ersten steht. Anders wird es aber, wenn die Formänderungsschwingungen der Größe nach vergleichbar mit den gemeinschaftlichen Schwingungen des ganzen Verbandes sind. Dann kann von einem Ungleichförmigkeitsgrade der Maschine nur mit einer näheren Angabe der einzelnen Stelle der Welle gesprochen werden, auf die er sich beziehen soll, da verschiedenen Stellen auch verschiedene Ungleichförmigkeitsgrade zukommen.

Um die hiermit wenigstens kurz angedeuteten Fragen, die besonders von Herrn Prof. Sommerfeld näher behandelt worden sind, zu beantworten, wird man sich vor allem mit den Formänderungsschwingungen oder, wie wir dafür auch

sagen können, mit den Eigenschwingungen des Verbandes beschäftigen müssen. Das geschieht am besten, wenn wir vorläufig von den übrigen Anteilen der ganzen Bewegung, die noch dazu kommen können, ganz absehen und die Eigenschwingungen für sich betrachten.

Ihre Theorie wird sehr einfach, wenn man das Trägheitsmoment der Welle, bezogen auf die Umdrehungsachse gegenüber den Trägheitsmomenten der Schwungräder vernachlässigen kann. Irgendein Querschnitt der Welle, von dem wir die Abszissen x in Abb. 42 rechnen, wird dann dauernd in Ruhe bleiben, während sich das eine Schwungrad in einem bestimmten Augenblicke im einen, das andere im entgegengesetzten Sinne dreht. Die Lage dieses Querschnitts folgt aus der Bedingung, daß der Drall des ganzen Systems dauernd gleich Null bleiben muß, da äußere Kräfte auf die Schwingung nicht einwirken und andere Bewegungen außer den Eigenschwingungen nicht vorkommen sollen. Diese Bedingung führt zu der Gleichung

$$\Theta_1 l_1 = \Theta_2 l_2, \quad (189)$$

aus der sich die Lage des ruhenden Querschnitts ergibt. Wenn die Trägheit der Wellenmasse vernachlässigt wird, braucht man nämlich auch keine Trägheitskräfte an ihr anzubringen, um ihren Formänderungszustand im gegebenen Augenblicke so zu untersuchen, als wenn die Welle in dieser Gestalt dauernd in Ruhe bliebe. Die Trägheitskräfte rühren dann nur von den Schwungrädern her und setzen sich an jedem Ende der Welle zu einem Kräftepaar zusammen. Beide Kräftepaare müssen gleich groß sein und jedes Wellenstück von der Einheit der Länge wird durch sie um denselben Torsionswinkel verdreht. Danach verhalten sich die Winkelwege und daher auch die Winkelgeschwindigkeiten beider Wellenenden in jedem Augenblicke wie die Abstände l_1 und l_2 von dem ruhenden Querschnitte. Da sich die Schwungräder um freie Achsen drehen, ist der Drall der Bewegung der Winkelgeschwindigkeit und hiernach auch den Abständen l_1 und l_2 in jedem Augenblicke proportional, woraus die Gleichung folgt.

Jedes Schwungrad schwingt demnach so, als wenn der in Ruhe bleibende Querschnitt festgeklemmt wäre. Damit ist der Fall auf den schon in § 5 behandelten der einfachen harmonischen Drehschwingungen zurückgeführt und die Schwingungsdauer kann nach der dort abgeleiteten Gl. (23) S. 36 sofort berechnet werden.

Wir wollen aber dabei jetzt nicht stehen bleiben, sondern die Aufgabe auch noch für den allgemeineren Fall lösen, daß die Trägheit der Wellenmasse nicht vernachlässigt werden darf, da dies in der Tat z. B. bei den langen und sehr starken Wellen der Schraubendampfer, an deren Enden keine besonders großen Schwungmassen sitzen, keineswegs zulässig ist. Auch hier rechnen wir die Abszissen x in Abb. 42 von dem bei den Eigenschwingungen in Ruhe bleibenden Querschnitte, dessen Lage aus der Untersuchung selbst erst hervorgehen wird. Der Querschnitt x sei zur Zeit t um den Winkel φ gegen den ruhenden gedreht. Die in diesem Querschnitt übertragenen Torsionsspannungen lassen sich zu einem Kräftepaare zusammenfassen, dessen Moment mit M bezeichnet werden soll. Dieses Moment hängt von der Formänderung an der Stelle x allein ab, d. h. von dem Zuwachse, den φ erfährt, wenn wir um ein unendlich kleines Stück dx weiter gehen. Der Zusammenhang zwischen beiden wird durch Gl. 225, S. 309 der 3. Aufl. von Band III angegeben, wenn wir in dieser Formel an Stelle von $\Delta\varphi$ hier $d\varphi$ und dx an Stelle von l schreiben. Hiernach ist

$$M = \frac{\pi a^4 G}{2} \frac{d\varphi}{dx} = c \frac{d\varphi}{dx} \quad (190)$$

zu setzen, wenn a den Halbmesser des Wellenquerschnitts und G den Schubelastizitätsmodul bedeuten und c zur Abkürzung für den vorhergehenden Ausdruck eingeführt wird.

Hierauf vergleichen wir die in den beiden Querschnitten x und $x + dx$ auftretenden Momente M miteinander. Sie unterscheiden sich um einen Betrag dM , weil der Formänderungszustand nicht überall derselbe ist, sondern sich beim Fortschreiten um dx selbst ein wenig ändert. Wir finden dM

aus Gl. (190) durch eine Differentiation nach x zu

$$dM = c \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx.$$

Die beiden Momente M und $M + dM$ halten sich an dem zwischen ihnen liegenden Wellenelemente nicht im Gleichgewichte miteinander, sondern sie liefern das eben berechnete resultierende Moment dM , das die Winkelbeschleunigung des Wellenelements hervorbringt. Wir haben daher die Gleichung

$$d\Theta \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx,$$

wenn mit $d\Theta$ vorläufig das Trägheitsmoment der zu dx gehörigen Wellenmasse bezeichnet wird. Da φ jetzt als Funktion von x und t auftritt, wurden runde ∂ zur Bezeichnung der Differentialquotienten verwendet. Beide Seiten der Gleichung müssen hier dasselbe Vorzeichen erhalten, da ein in positivem Sinne zählendes dM auch eine im gleichen Sinne gehende und daher positiv zu rechnende Winkelbeschleunigung hervorbringt. Um $d\Theta$ zu berechnen, bezeichnen wir die auf die Raumeinheit bezogene Masse, also das spezifische Gewicht des Stahls geteilt durch die Beschleunigung g , mit μ ; dann wird, da der Querschnitt der Welle kreisförmig sein soll, wie schon in § 5 besprochen wurde,

$$d\Theta = \mu \pi a^2 dx \cdot i^2 = \frac{\mu \pi a^4}{2} dx.$$

Setzt man auch noch für c seinen Wert ein (nach Gl. (190)), so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\mu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad (191)$$

und das ist die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung, von deren Integration die Lösung der Aufgabe abhängt.

Setzen wir, um eine partikuläre Lösung zu erhalten, wie in § 40

$$\varphi = z \sin \beta t,$$

so muß z der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = - \frac{\beta^2 \mu}{G} z$$

genügen, deren allgemeine Lösung sofort in der Form

$$z = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

angeschrieben werden kann. Die Konstante α folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung zu

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{\mu}{G}}.$$

Von den Integrations-Konstanten A und B kann sofort $B = 0$ ermittelt werden, weil für $x = 0$ bei der Wahl, die wir für den Koordinatenanfang getroffen haben, jederzeit φ und daher auch $z = 0$ sein muß. Hiermit geht φ über in

$$\varphi = A \sin \left(\beta x \sqrt{\frac{\mu}{G}} \right) \sin \beta t. \quad (192)$$

Die Konstante β ergibt sich aus den Grenzbedingungen an den Wellenenden. Wäre das Wellenende frei, also kein Schwungrad aufgekeilt, so müßte $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ sein für $x = l_1$. Wegen des Schwungrads muß aber die Welle auch an ihrem Ende verdreht sein, und zwar so, daß das dieser Formänderung entsprechende Moment M die Winkelbeschleunigung des Schwungrads hervorbringt. Für $x = l_1$ hat man daher die Bedingung

$$M = - \Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß unter M das auf das Wellenende wirkende Verdrehungsmoment zu verstehen ist, das die Reaktion des am Schwungrad angreifenden Moments $-M$ bildet. Setzt man M aus Gl. (190) ein, so lautet die Bedingungsgleichung für $x = l_1$

$$c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

woraus durch Einsetzen von φ aus Gl. (192)

$$c \sqrt{\frac{\mu}{G}} \cos \left(\beta l_1 \sqrt{\frac{\mu}{G}} \right) = \Theta_1 \beta \sin \left(\beta l_1 \sqrt{\frac{\mu}{G}} \right)$$

hervorgeht. Eine Gleichung von derselben Form muß auch für das andere Wellenende gelten, und zwar erhält man sie aus der vorhergehenden, indem man l_1 und Θ_1 durch l_2 und

Θ_2 ersetzt. Führt man zur Vereinfachung der Schreibweise wieder die vorher schon benutzte Hilfsgröße α an Stelle von β ein und ersetzt c durch seinen Wert aus Gl. (190), so lauten die Bedingungsgleichungen für die Wellenenden

$$\left. \begin{aligned} \alpha \operatorname{tg} \alpha l_1 &= \frac{\pi a^4 \mu}{2 \Theta_1}, \\ \alpha \operatorname{tg} \alpha l_2 &= \frac{\pi a^4 \mu}{2 \Theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Aus ihnen erhält man eine Gleichung, die nur noch die Unbekannte α enthält, indem man $l_2 = l - l_1$ setzt, in der letzten Gleichung $\operatorname{tg}(\alpha l - \alpha l_1)$ entwickelt und hierauf $\operatorname{tg} \alpha l_1$ aus der ersten Gleichung einsetzt. Dadurch erhält man

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha l - \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha l \cdot C_1 C_2 = C_1 + C_2, \quad (194)$$

wenn zur Abkürzung die bekannten Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen (193) mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Gleichung (194) hat unendlich viele Wurzeln, von denen aber die kleinste wieder die wichtigste ist, weil dem kleinsten Werte von α und hiermit von β die größte Schwingungsdauer, also die Grundschwingung entspricht. Wenn C_1 und C_2 zahlenmäßig gegeben sind, läßt sich die kleinste Wurzel von Gl. (194) wieder leicht durch Probieren finden und ebenso auch die folgenden Wurzeln, die den Oberschwingungen entsprechen. Nachdem α gefunden ist, erhält man auch l_1 und hiermit die Lage des in Ruhe bleibenden Querschnitts (oder des Schwingungsknotens) aus der ersten der Gleichungen (193). Hierbei ist nur zu beachten, daß αl_1 jedenfalls ein kleinerer Winkel als der aus der Auflösung von Gl. (194) bereits bekannte Winkel αl sein muß.

Beachtenswert ist übrigens, daß die Lage der Schwingungsknoten bei der Grundschwingung und den verschiedenen Oberschwingungen keineswegs immer dieselbe ist. Wenn alle Schwingungsanteile zusammenwirken, bleibt daher im allgemeinen kein Querschnitt ganz in Ruhe.

§ 43. Biegungsschwingungen von schnell umlaufenden schwanken Wellen. (Lavalsche Turbinenwelle.)

Solange die Mittellinie einer Welle eine freie Achse der auf ihr sitzenden Räder u. dgl. bleibt, liegt kein Grund zur Befürchtung vor, daß die Welle eine schädliche Beanspruchung durch eine hohe Umlaufgeschwindigkeit erfahren könne. Nun ist es aber zunächst sehr schwer, die genannte Bedingung genau genug zu erfüllen; man kann es auch bei größter Sorgfalt in der Herstellung nicht erreichen, daß die Umdrehungsachse wirklich durch die Schwerpunkte der rotierenden Körper geht, wenn sich die Abweichung vielleicht auch nur auf kleine Bruchteile eines Millimeters beschränkt. Noch schwerer ist es häufig, die Umdrehungsachse in die Richtung der Hauptträgheitsachse zu legen. Außerdem ist man aber, selbst wenn die beiden Bedingungen anfänglich vollständig erfüllt wären, im Zweifel darüber, ob sie auch während des Ganges der Maschine, bei der sich zufällige Erschütterungen nicht vermeiden lassen, dauernd erfüllt bleiben werden.

Solange die Geschwindigkeiten nicht allzu groß waren, genügte es, durch möglichst genaue Zentrierung die freie Achse so gut als möglich mit der Wellenmittellinie zusammen fallen zu lassen. Die Welle wurde hierbei steif genug konstruiert, um ihr die Übertragung der zur Aufrechterhaltung der Umdrehungsachse wegen der unvermeidlichen Abweichung von der Hauptträgheitsachse erforderlichen Zwangskräfte unbesorgt zuzumuten zu können. Dieses Verfahren mußte aber versagen, sobald die Umlaufgeschwindigkeiten über ein gewisses Maß hinaus wuchsen; denn die Zwangskräfte wachsen mit dem Quadrate der Geschwindigkeit und beim Übergange zur zehnfachen Geschwindigkeit hatte man daher schon mit einem 100-fachen Bieugungsmomente der Zwangskräfte zu rechnen, das von der Welle übertragen werden mußte. In der Tat hat man früher öfters Rechnungen darüber angestellt, welche Geschwindigkeiten höchstens erreicht werden könnten; man setzte dabei genaueste Zentrierung voraus, beachtete aber, daß

eine kleine Erschütterung schon genügt, den Schwerpunkt ein wenig aus der Mittellinie der Welle zu entfernen. Die hiermit hervorgerufene Zentrifugalkraft sucht dann die zufällig entstandene kleine Ausbiegung noch weiter zu vergrößern und je mehr diese wächst, wächst auch die Zentrifugalkraft. Es war hiermit genau wie bei der Knickfestigkeit und die Rechnung schloß, wie bei dieser, damit ab, daß bei gegebener Länge, bei gegebener Last und gegebenem Querschnitte eine gewisse Geschwindigkeit (der Eulerschen Knicklast entsprechend) nicht erreicht werden dürfe, um trotz anfänglich genauester Zentrierung ein Ausweichen und hiermit eine Zerstörung der Welle zu vermeiden.

Betrachtungen dieser Art führten zu verhältnismäßig niedrigen gefährlichen Umlaufszahlen, die heute tatsächlich nicht nur erreicht, sondern noch weit überschritten sind. Diese Betrachtungen waren in einem sehr wesentlichen Punkte ungenau und führten daher zu ganz falschen Resultaten: man hatte nämlich nicht auf die Schwingungen geachtet, die sofort entstehen müssen, wenn sich die schnell rotierende Welle etwas ausbiegt. Der schwedische Ingenieur de Laval war der erste, der durch praktische Versuche nachwies, daß man eine Welle viel schneller laufen lassen kann, als man es früher für möglich hielt. Anstatt die Welle so stark zu machen, daß sie die Umdrehung um ihre Mittellinie trotz nicht völlig genauer Zentrierung erzwingen konnte, machte er sie umgekehrt viel schwächer; er verzichtete damit auf die vollständige Beherrschung des rotierenden Körpers durch die Welle, ließ ihm vielmehr die Möglichkeit, sich leicht ein wenig in der Richtung quer zur Welle zu verschieben oder sich auch ein wenig dagegen zu drehen.

Als die Lavalschen Versuchsergebnisse bekannt wurden, stießen sie anfänglich überall auf Unglauben. Nachdem aber der experimentelle Nachweis ihrer Richtigkeit auch die hartnäckigsten Zweifler überzeugt hatte, begann man mit Erklärungsversuchen, die oft ganz verfehlt waren. Man sprach von der „Selbsteinstellung“ eines rotierenden Körpers in die freie

Achse und tat dabei so, als wenn jeder sich selbst überlassene Körper mit der Zeit seine Rotationsachse in die benachbarte freie Achse verlege. Diese viel nachgesprochene Phrase bewies nur, daß ihre Urheber und ihre Verbreiter eine ganz falsche Vorstellung von der Dynamik des sich selbst überlassenen Körpers hatten.

Wie die Theorie des Vorganges zu fassen ist, um einerseits in Übereinstimmung mit den allgemein gültigen Sätzen der Mechanik zu bleiben und andererseits durch passende Vereinfachung zu bequem anwendbaren Formeln und Regeln zu gelangen, die sich in hinreichender Übereinstimmung mit den tatsächlichen Beobachtungen befinden, habe ich selbst gezeigt und ich werde diese Theorie hier wiederholen. Daß sich meine Lösung mit dem wirklich beobachteten Vorgange so weit deckt, als die Genauigkeit der Beobachtung überhaupt zu reichen vermag, ist durch eine besondere Experimentaluntersuchung bewiesen worden, die Herr Professor Ludw. Klein in Hannover, der damals Assistent unserer Hochschule war, in meinem Laboratorium ausführte.

Zunächst mache ich darauf aufmerksam, daß ein geringer Richtungsunterschied zwischen der Rotationsachse und der Hauptträgheitsachse des rotierenden Körpers nicht viel Bedeutung hat, wenn die Welle sehr biegsam ist. Man kann sich davon sowohl auf Grund des Flächensatzes wie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips überzeugen. Ich wähle den letzten Weg. In Abb. 43 sei AB die zunächst geradlinig gedachte Mittellinie der Welle und DE die davon ein wenig abweichende Hauptträgheitsachse des rotierenden Körpers. Wenn der Körper mit konstanter Geschwindigkeit um AB rotiert, reduzieren sich die Trägheitskräfte auf Zentrifugalkräfte, die mit C bezeichnet

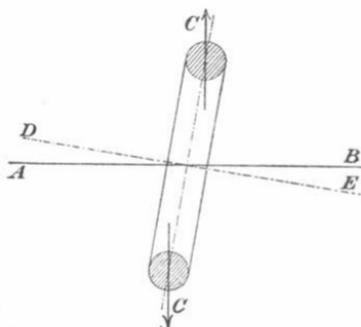


Abb. 43.

und in Abb. 43 eingetragen sind. Wir können jetzt den Körper und die Welle im Ruhezustande betrachten und finden, daß die Zentrifugalkräfte C ein Kräftepaar bilden, das eine Verbiegung der Welle herbeiführt. Diese Verbiegung erfolgt aber in solchem Sinne, daß sich die Hauptachse DE der Verbindungslinie AB der Zapfenmittelpunkte der die Welle stützenden Lager nähert. Die ursprünglich vorhandene Abweichung zwischen DE und AB gleicht sich demnach zum Teile von selbst aus, und zwar um so mehr, je biegsamer die Welle ist und zugleich je mehr die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, denn mit dieser wächst auch das Moment des Kräftepaars der Zentrifugalkräfte. Allerdings kann DE hierdurch nicht vollständig zum Zusammenfallen mit AB gebracht werden, da immer noch ein Moment der Zentrifugalkräfte zurückbleiben muß, das die erforderliche Verbiegung der Welle aufrecht erhält. Die Folge davon wird eine Kreiselbewegung des rotierenden Körpers von der Art der pseudo-regulären Präzession sein. Wenn man schon beim Aufkeilen des rotierenden Körpers darauf achtete, den anfänglichen Richtungsunterschied zwischen DE und AB so gering zu machen, daß die Welle sich leicht um so viel verbiegen kann, als er ausmacht, so kann diese Präzessionsbewegung niemals für sich zu großen Wellenverbiegungen und zu einer Gefahr des Bruches führen. Ich kann daher weiterhin von dieser Erscheinung ganz absehen und die Aufgabe so behandeln, als wenn überhaupt kein Richtungsunterschied zwischen DE und AB vorkäme.

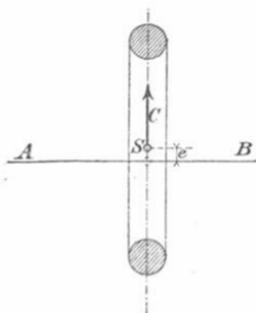


Abb. 44.

Schwerpunktes an. Die Zentrifugalkräfte geben dann eine

Ganz anders gestaltet sich die Betrachtung, wenn wir annehmen, die Wellenmittellinie AB gehe nicht genau durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers. Auch hier denken wir uns den Körper unter Einführung der Trägheitskräfte zur Ruhe gebracht. In Abb. 44

Resultierende, die S von AB zu entfernen sucht. Hierdurch entsteht eine Biegung der Welle, durch die die Exzentrizität e vergrößert wird. Gerade auf Grund dieser Überlegung schloß man früher, daß eine gewisse größte Winkelgeschwindigkeit überhaupt nicht überschritten werden könnte, ohne eine dauernde Verbiegung oder den Bruch der Welle und ein Heraus-schleudern des rotierenden Körpers herbeizuführen.

Die Erfahrung lehrt indessen, daß bei wachsender Geschwindigkeit ein absichtlich etwas exzentrisch aufgekeiltes Rad zunächst in der Tat in Übereinstimmung mit der vorausgehenden Betrachtung zu immer stärkeren Biegungen der Welle führt und daher immer stärker schleudert. Das gilt aber nur bis zu einer gewissen Grenze. An dieser wird das Schleudern so stark, daß die Welle, wie man es früher schon vorausgesehen hatte, ganz verbogen oder zerbrochen werden müßte, wenn sie nicht durch eine Führung, die sie umgibt, an stärkeren Formänderungen verhindert würde. Die Welle stößt nun bei der fraglichen Geschwindigkeit, die als ihre kritische Geschwindigkeit bezeichnet werden soll, gegen die Führungen, hat einen stark unregelmäßigen Gang, verbraucht wegen der Reibung und der Stöße gegen die sie ringartig umgebende Führung viel Arbeit und versetzt den ganzen Apparat in starke Erschütterungen. Bei der kritischen Geschwindigkeit ließe sich in der Tat trotz des Auskunftsmittels der „Führung“, das schließlich auf eine zeitweilige Herabsetzung der freien Länge der Welle hinauskommt, kein geordneter Maschinenbetrieb, aufrecht erhalten. Sowie man aber nun die Geschwindigkeit der Welle noch weiter steigert, bemerkt man, daß die Welle anfängt, wieder ruhiger zu laufen, und wenn die Geschwindigkeit groß genug geworden ist, läuft sie ruhiger als jemals vorher. Man kann die Führung jetzt vollständig entfernen und bemerkt, daß selbst äußere Stöße zu keinen großen Ausschlägen der Welle mehr führen. Schaltet man hierauf den Antrieb aus und überläßt den rotierenden Körper sich selbst, so läuft die Welle anfänglich ruhig weiter; sobald sich aber infolge der Reibungen usf. die Geschwindig-

keit so weit vermindert hat, daß sie sich wieder der kritischen nähert, treten wieder stärkere Schwingungen ein und es wird Zeit, daß man von neuem eine Führung oder überhaupt irgendeine Sicherung gegen zu große Ausschläge der Welle anbringt, um ein Herausschleudern zu verhüten. Die als Führung bezeichnete Schutzvorkehrung ist daher immer nur für das Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit, sei es im einen oder im anderen Sinne erforderlich. Vorher und nachher läuft die Welle ganz frei und sicher.

Außerdem zeigt auch die Erfahrung, daß man die Welle selbst ohne Benutzung einer Schutzvorkehrung der genannten Art zu regelmäßigen Umläufen ohne große Schwingungen bringen kann, wenn man sie nur schnell genug in sehr große Umdrehungsgeschwindigkeit versetzt. Dazu muß man natürlich nach Art eines „Drehstoßes“ ein sehr großes Kräftepaar auf sie einwirken lassen, das ihr schon nach ganz kurzer Zeit die erforderliche Umdrehungsgeschwindigkeit zu erteilen vermag.

Ich habe die Beschreibung dieser Erfahrungen vorausgeschickt, weil sich auch die theoretische Erklärung erst an sie anknüpfte. Es ist zwar möglich, aber nicht wahrscheinlich, daß man auf theoretischem Wege zur Erkenntnis der Möglichkeit gekommen wäre, eine Welle über ihrer kritischen Geschwindigkeit laufen zu lassen, wenn die Erfahrung nicht den Weg dazu gewiesen hätte. Es wäre aber verfehlt, wenn man die erst nachträglich gefundene Theorie des Vorgangs darum geringschätzig beurteilen wollte. Solange man sich nicht theoretisch Rechenschaft über diesen zu geben vermochte, besaß man nichts als einige vereinzelte Erfahrungen, über deren Zusammenhang man so wenig auszusagen vermochte, als über die Bedingungen, unter denen die gesehenen Erscheinungen stets sicher zu erwarten seien. Erst durch die theoretische Bearbeitung wurden die vereinzelten Erfahrungen zu einem wohlgeordneten Bilde vereinigt, aus dem sich erkennen läßt, warum und unter welchen Umständen so hohe Umlaufgeschwindigkeiten zulässig sind.

Ich beginne zunächst mit der Erklärung der zuletzt be-

schriebenen Erscheinung, bei der die Welle in sehr kurzer Zeit in eine Geschwindigkeit versetzt wird, die über der kritischen liegt. In Abb. 45 sei durch den äußeren Kreis der Umriß des auf der biegsamen Welle sitzenden Rades in der Anfangslage angegeben. Die Zeichenebene steht senkrecht auf der Mittellinie der Welle in der Ruhelage, oder wie wir sagen wollen, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zapfenmittelpunkte der Welle, die sich in O projizieren möge. Der Wellenquerschnitt ist in der Zeichnung nicht angegeben. Der Schwerpunkt des rotierenden Körpers soll anfänglich in S liegen. Die Strecke OS gibt also die Exzentrizität e an; sie ist der Deutlichkeit wegen in der Zeichnung viel größer angegeben, als sie in Wirklichkeit zu erwarten sein wird.

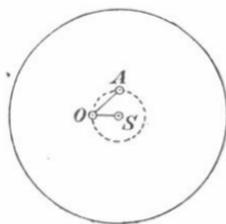


Abb. 45.

Nun möge die Welle und mit ihr das Rad in schnelle Umdrehung versetzt werden. Das Kräftepaar, das wir hierzu am Rade angreifen lassen müssen, wird durch die auf Torsion beanspruchte Welle auf das Rad übertragen. Nun wissen wir aber, daß ein Kräftepaar stets nur eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, aber keine Verschiebung des Schwerpunkts herbeizuführen vermag. Das Rad wird also, sobald wir durch Torsion der Welle drehend auf es einzuwirken beginnen, nicht eine Drehung um O , sondern eine Drehung um S auszuführen suchen. Da die Welle hinreichend biegsam sein sollte, wird es daran auch nicht merklich gehindert. Wenn die Welle gar keine Biegungssteifigkeit hätte, könnte sogar dauernd überhaupt nur eine Drehung um S erfolgen. Der Befestigungspunkt der Welle, der ursprünglich mit O zusammenfiel, müßte dann einen Kreis um S beschreiben, der in die Abbildung punktiert eingetragen ist. Ganz ohne Biegungswiderstand dürfen wir die Welle freilich nicht voraussetzen. Denken wir uns also den Befestigungspunkt des Rades auf der Welle in seiner kreisförmigen Bahn um den Schwerpunkt S etwa nach A gelangt, so ist OA der

Biegungspfeil der Welle und wegen der Biegung wird die Welle außer dem Kräftepaare, das die Umdrehung herbeiführt, auch noch eine Kraft auf das Rad übertragen, die A nach O zurückzuführen sucht. Erst diese Kraft wird nun auch eine Bewegung des Schwerpunktes S veranlassen. Wir mußten uns aber ohnehin vorstellen, daß das Rad sehr schnell in Umdrehung versetzt werden sollte und können daher annehmen, daß das diese Umdrehung bewirkende Kräftepaar so groß ist, daß es das Rad schon mehrmals umgedreht hat, bevor die durch die Biegungselastizität hervorgerufene Kraft den Schwerpunkt merklich von seiner Stelle rücken konnte. Wie groß das Kräftepaar hierzu sein müßte, ließe sich leicht ausrechnen; wir können aber darauf verzichten, da es sich jetzt nur um eine qualitative Untersuchung handelt und man sich das Kräftepaar jedenfalls immer groß genug vorstellen kann, um die gestellte Bedingung zu erfüllen.

Nach dem Satze vom Antriebe ist die Bewegungsgröße, die das Rad wegen der Schwerpunktsbewegung während eines Umlaufs erlangt, gleich dem Zeitintegrale der Biegungskraft. Außerdem kann dieses Zeitintegral gleich der Dauer eines Umlaufs multipliziert mit dem graphischen Mittelwerte der

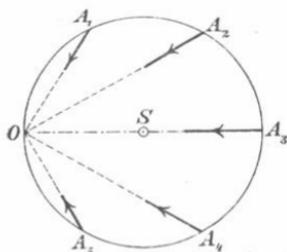


Abb. 46.

Biegungskraft während eines Umlaufs gesetzt werden. Wir wollen uns daher überlegen, welche Richtung diesem Mittelwerte zukommt. In Abb. 46 ist der Kreis, den A in Abb. 45 beschrieb, vergrößert herausgezeichnet. A fällt der Reihe nach mit O , A_1 , A_2 usw. zusammen, um dann wieder nach O zu gelangen. In jedem Augenblicke ist die von der

gebogenen Welle auf das Rad übertragene „Biegungskraft“ von A aus nach O zu gerichtet; außerdem ist die Größe der Kraft der Sehne AO , d. h. dem Biegungspfeile, proportional. Jedem Punkte A_1 auf der oberen Hälfte des Kreises entspricht ein zum Durchmesser durch O symmetrisch liegender Punkt A_2 .

auf der unteren Hälfte. Die durch die Sehnen A_1O und A_5O dargestellten Biegungskräfte haben gleiche und gleichgerichtete horizontale, aber entgegengesetzt gerichtete Vertikalkomponenten. Solange der Punkt A die obere Hälfte des Kreises durchläuft, wird der Schwerpunkt nach links und zugleich nach abwärts beschleunigt; durchläuft A die untere Kreishälfte, so wird S immer noch nach links, aber jetzt zugleich nach aufwärts beschleunigt. Nun durchläuft freilich A den Kreis nicht gleichförmig, sondern beschleunigt. Wir wollen aber, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesem Umstande jetzt absehen. Dann können wir sagen, daß der Mittelwert der Biegungskraft für einen ganzen Umlauf im allgemeinen nach links hin gerichtet ist. Jedenfalls erkennen wir daraus, daß sich im Mittel S nach O hin verschieben muß und nicht nach außen hin. Das ist es aber, worauf es ankommt.

Nehmen wir nun an, S sei nach einigen Umläufen so nahe an O hin gerückt, daß es als mit O zusammenfallend betrachtet werden kann, so wird nachher A einen Kreis um O beschreiben, dessen Halbmesser gleich der Exzentrizität e oder gleich der Strecke OS in der Anfangslage ist. Die Biegungskraft wirkt dann während eines Umlaufs der Reihe nach von allen möglichen Richtungen her mit stets gleicher Stärke auf das Rad ein und $\int \mathfrak{P} dt$ für einen Umlauf wird zu Null. Der Schwerpunkt vermag also späterhin dauernd in der Nähe von O zu bleiben. Die anfängliche Exzentrizität ist durch die geringe Ausbiegung der Welle ausgeglichen und das Rad hat sich, wenn man so will, von selbst so eingestellt, daß es um eine freie Achse rotiert.

Bei dieser Betrachtung wird man freilich einen Nachweis dafür vermissen, daß diese Bewegung nun auch eine stabile Bewegung ist, d. h. man sieht wohl leicht ein, daß die Bewegung so wie beschrieben weiter gehen kann; aber es bleibt zweifelhaft, ob nicht etwa durch einen zufälligen Stoß von außen her, der den Schwerpunkt S etwas aus der Nähe von O verrückt, die Bewegung vollständig geändert und das Rad schließlich doch noch abgeschleudert werden könnte. Um uns

hierüber Gewißheit zu verschaffen, müssen wir nun noch in eine genauere quantitative Untersuchung der Bewegung eintreten.

Hierbei nehme ich an, daß der Anfangszustand des bereits in schneller Rotation begriffenen Rades beliebig gegeben sei, und daß es hierauf ohne äußere Einwirkung sich selbst überlassen werde. Ich nehme also mit anderen Worten an, daß von der Welle nur noch ein Torsionsmoment von solcher Größe und solchem Sinne auf das Rad übertragen werde, um die Rotation auf gleicher Höhe zu erhalten, also um entweder die Bewegungswiderstände aufzuheben oder um (bei einem Turbinenrade) die fernere Beschleunigung durch die daran angreifenden äußeren Kräfte zu verhindern. Außerdem soll auch das Gewicht des Rades nicht in Berücksichtigung gezogen werden. Man kann sich dessen Einfluß etwa dadurch beseitigt denken, daß die Welle, um die das Rad rotiert, lotrecht steht; im übrigen ist aber das Eigengewicht des Rades auch so gering gegenüber den gewaltigen Zentrifugalkräften, die bei merklichen Exzentrizitäten und bei den großen Geschwindigkeiten, um die es sich hier handelt, vorkommen, daß es ohnehin keine große Rolle spielt. Außerdem soll schließlich noch

vorausgesetzt werden, daß die Exzentrizität auf jeden Fall gering gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Rades ist, so daß sie genau genug diesem gegenüber als unendlich klein betrachtet werden darf.

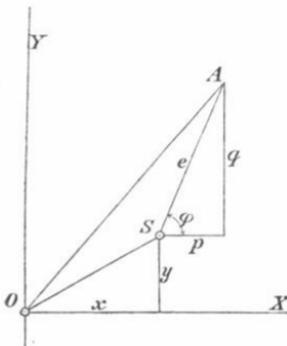


Abb. 47.

In Abb. 47 bedeutet wie vorher O die Projektion der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Zapfen, mit denen die Welle im Gestelle gelagert ist. S ist der Ort des Schwerpunktes und A der Ort des Befestigungspunktes zur Zeit t ; OA

dennach der Biegunspfeil. Alle Strecken sind in die Abbildung stark vergrößert eingetragen. Außerdem sind zwei Koordinatenachsen gezogen und der Winkel, den AS mit der

X-Achse bildet, ist mit φ bezeichnet. Die X-Achse möge man sich in solcher Richtung gezogen denken, daß der Winkel φ zur Zeit $t=0$, also im Anfange der Betrachtung, gleich Null war. Die Rotation des Rades mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit u möge in solcher Richtung erfolgen, daß der Winkel φ mit der Zeit wächst. Dann kann der Winkel φ zur Zeit t

$$\varphi = ut$$

gesetzt werden. Die Biegekraft \mathfrak{B} ist gleichgerichtet mit AO und hat die Größe $c \cdot AO$, wenn c einen von der Biegesteifigkeit der Welle abhängigen konstanten Faktor bedeutet, der nach bekannten Sätzen der Festigkeitslehre aus der Spannweite, dem Querschnitte der Welle und dem Elastizitätsmodul stets leicht berechnet werden kann. Die Biegekraft \mathfrak{B} geht zwar nicht durch den Schwerpunkt S ; wenn wir sie uns parallel nach S verlegt denken, tritt vielmehr noch ein Kräftepaar auf. Der Hebelarm dieses Kräftepaares kann aber nach einer schon vorher ausgesprochenen Voraussetzung als unendlich klein angesehen werden, so daß der Einfluß des Kräftepaares auf die Änderung der Winkelgeschwindigkeit außer Betracht bleiben, u also in der Tat als konstant angesehen werden kann.

Horizontal- und Vertikalprojektion der Exzentrizität e oder SA sind in der Abbildung mit den Buchstaben p und q bezeichnet; man hat dafür

$$p = e \cos ut; \quad q = e \sin ut.$$

Die dynamische Grundgleichung soll ebenfalls für jede Achsenrichtung gesondert angeschrieben werden. Wenn die Masse des Rades mit m bezeichnet wird, ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c(x+p)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c(y+q),$$

denn $x+p$ ist die Horizontalprojektion des Biegepfeiles OA , daher $c(x+p)$ die Horizontalprojektion der Biege-

kraft \mathfrak{P} und das Minuszeichen drückt aus, daß \mathfrak{P} und daher auch die Horizontalprojektion von \mathfrak{P} nach dem Ursprunge O hin, der positiven Seite der X -Achse also entgegengesetzt gerichtet ist. Durch Einführung der für p und q aufgestellten Werte, gehen die vorigen Gleichungen über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{c} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + x + e \cos ut &= 0 \\ \frac{m}{c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y + e \sin ut &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (195)$$

Hiermit haben wir die Differentialgleichungen des Problems gefunden. Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen können auch sofort angegeben werden; sie lauten

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut \\ y &= C \sin \alpha t + D \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \sin ut \end{aligned} \right\}. \quad (196)$$

Hierin ist α eine Konstante, die so ermittelt werden muß, daß die Lösungen richtig sind; dagegen sind A, B, C, D willkürliche Integrationskonstanten, durch deren geeignete Wahl man sich jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anzupassen vermag. Hieraus folgt, daß wir in der Tat die allgemeinste Lösung gefunden haben, falls nur überhaupt die angegebenen Werte die Gleichungen (195) befriedigen. Man überzeugt sich davon leicht; ich will die kleine Zwischenrechnung, die dazu erforderlich ist, wenigstens für die sich auf die X -Richtung beziehende Gleichung durchführen.

Durch Differentiation nach t folgt aus Gl. (196)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\alpha \cos \alpha t - B\alpha \sin \alpha t - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} u \sin ut, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -A\alpha^2 \sin \alpha t - B\alpha^2 \cos \alpha t - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} u^2 \cos ut. \end{aligned}$$

Setzt man nun x und seinen zweiten Differentialquotienten in die erste der Gleichungen (195) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{m}{c} \alpha^2 \left(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + e \frac{u^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut \right) + A \sin \alpha t \\ + B \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut + e \cos ut = 0. \end{aligned}$$

Die zwei letzten Glieder auf der linken Seite vereinigen sich aber zu

$$e^{\frac{u^2}{u^2 - \alpha^2}} \cos ut$$

und die ganze Gleichung läßt sich daher schreiben

$$\left(1 - \frac{m}{c} \alpha^2\right) (A \sin at + B \cos at + e^{\frac{u^2}{u^2 - \alpha^2}} \cos ut) = 0.$$

Diese Gleichung ist nun in der Tat identisch, d. h. für jeden Wert der Veränderlichen t und zugleich für beliebige Werte der Konstanten A und B erfüllt, wenn der in der ersten Klammer stehende Faktor durch eine passende Wahl von α zum Verschwinden gebracht wird. Man muß also

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (197)$$

setzen. — Für die sich auf die Y -Richtung beziehende Gleichung läßt sich die Rechnung genau in derselben Form wiederholen; man findet dabei für α denselben Wert.

Fassen wir nun die durch die Gleichungen (196) beschriebene Bewegung näher ins Auge, so bemerken wir sofort, daß nur die ersten beiden Glieder des dreigliedrigen Ausdrucks für x oder y von den Integrationskonstanten, also vom Anfangszustande abhängen; das dritte Glied ist im übrigen unabhängig vom Anfangszustande, wohl aber abhängig von dem konstanten Werte der Winkelgeschwindigkeit u , die ihrerseits wieder in den ersten Gliedern nicht vorkommt. Hiernach können wir uns die Gesamtbewegung des Schwerpunkts in zwei Teile zerlegt denken, also etwa

$$x = x_1 + x_2; \\ x_1 = A \sin at + B \cos at; \quad x_2 = e^{\frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2}} \cos ut$$

setzen und ähnlich für y . Die Integrationskonstanten bestimmen sich aus der anfänglichen Lage des Schwerpunkts zur Zeit $t = 0$ und aus der Geschwindigkeit, die er zu dieser Zeit hatte. Dagegen kommt u in x_1 nicht vor, d. h. der durch x_1 und y_1 beschriebene Bewegungsanteil erfolgt genau so, als wenn das Rad überhaupt nicht rotierte. In diesem Falle hätten wir es

aber mit einer gewöhnlichen harmonischen Schwingung zu tun und wir wissen schon, daß der Schwerpunkt hierbei eine Ellipse beschreibt, die auch (bei passenden Anfangsbedingungen) in einen Kreis oder in eine Gerade übergehen kann. Jedenfalls kann dieser Bewegungsanteil, auch wenn etwa zu Anfang durch einen Stoß eine größere Entfernung des Schwerpunkts von O herbeigeführt wurde, niemals zu dauernd wachsenden Ausschlägen führen. Wir werden vielmehr zu erwarten haben, daß wegen der in der Rechnung nicht berücksichtigten Dämpfung, diese harmonischen Schwingungen in Wirklichkeit nach einem etwa erfolgten Stoße mit der Zeit ebenso abklingen, wie wir dies früher bei der Untersuchung der gedämpften Schwingungen gefunden haben.

Ganz anders ist es aber mit dem durch x_2 und y_2 dargestellten zweiten Bewegungsanteile, der nur von u und sonst gar nicht von den Anfangsbedingungen abhängt. Wäre etwa (nach dem Abklingen der ursprünglich vorhandenen harmonischen Schwingung und bei Fernhalten jedes späteren Stoßes von außen her) x_1 und y_1 zu Null geworden, so müßte der durch x_2 und y_2 dargestellte Bewegungsanteil jedenfalls immer noch fort dauern. Die Bewegung $x_1 y_1$ (wie wir der Kürze halber sagen wollen) gibt demnach eine von zufälligen Umständen abhängige Bewegung an, die der rotierende Körper genau so ausführt, als wenn er nicht rotierte und die daher nicht als ein wesentlicher Bewegungsanteil aufgefaßt werden kann. Jene Bewegung, die gerade der rotierenden Welle eigentümlich ist und die für alle Erscheinungen bestimmend auftritt, die wir hier untersuchen wollen, ist vielmehr die Bewegung $x_2 y_2$. Setzen wir also, um diese für sich zu untersuchen, vorläufig den unwesentlichen Bewegungsanteil $x_1 y_1$ gleich Null, so bleibt nur noch die Bewegung

$$x_2 = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut; \quad y_2 = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \sin ut$$

übrig. Man erkennt sofort, daß diese in einer kreisförmigen Bewegung des Schwerpunkts besteht, die mit der Winkelgeschwindigkeit u beschrieben wird. Der Halbmesser des

Kreises r ist

$$r = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2}. \quad (198)$$

Kommt dagegen die Bewegung $x_2 y_2$ zur harmonischen Schwingung $x_1 y_1$ hinzu, so legt der Schwerpunkt eine epizykloidische Bahn zurück; er durchläuft nämlich einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Ellipse der harmonischen Schwingung fortschreitet.

Die Stärke der Ausschläge, die man zu erwarten hat, hängt nun vor allem von der Größe des Halbmessers r ab. Für kleine Werte von u wird r negativ; das Vorzeichen ist indessen hier unwesentlich. Jedenfalls ist dem Absolutwerte nach r etwas größer als die Exzentrizität e . Sobald sich nun u dem Werte von α nähert, fängt r stark zu wachsen an und für $u = \alpha$ liefert Gl. (198) sogar $r = \infty$. Wir sehen hiermit, daß bei dieser Geschwindigkeit oder in ihrer Nähe unter allen Umständen sehr starke Ausschläge zu erwarten sind, d. h. $u = \alpha$ ist die schon aus den Versuchen bekannte kritische Geschwindigkeit. Bezeichnen wir diese mit u_k , so erhalten wir nach Einsetzen des Wertes von α aus Gleichung (197)

$$u_k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (199)$$

Wenn u größer wird als u_k , nimmt der Absolutwert von r wieder ab und für eine sehr große Geschwindigkeit u wird r fast zu Null. In diesem Falle beschreibt (nahezu wenigstens) der Schwerpunkt nur noch die Ellipse der harmonischen Schwingung oder er bleibt, wenn diese abgeklungen ist und äußere Störungen fern gehalten werden, in Ruhe, indem er dauernd mit O zusammenfällt. Damit kommen wir auf jene Bewegung zurück, die wir schon vorher bei der bloß qualitativen Untersuchung als möglich erkannt hatten. Wir wissen aber jetzt auch, daß diese Bewegung eine stabile ist, d. h. daß durch einen äußeren Stoß nur eine harmonische Schwingung von derselben Art wie beim nichtrotierenden Körper hervorgerufen wird, die allmählich abklingt, so daß der Schwer-

punkt wieder nach O zurückgeführt wird. Ein Herausschleudern des Rades ist also bei Geschwindigkeiten, die weit über der kritischen liegen, auf keinen Fall zu befürchten.

Man gewinnt noch eine anschaulichere Vorstellung von der schwingenden Bewegung des Rads durch die folgende Konstruktion. Man trage auf der Geraden SA in Abb. 48, die im übrigen vollständig mit Abb. 47 übereinstimmt, eine Strecke SP ab, so daß

$$SP = -e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \quad (200)$$

ist. Für Werte von u , die unter dem kritischen Werte u_k liegen, wird dieser Ausdruck positiv und dann soll SP in jener Richtung abgetragen werden, wie es in der Abbildung geschehen ist. Ein negativer Wert von SP wäre dagegen in der entgegengesetzten Richtung, also von S aus in der Verlängerung von AS abzutragen. Man beachte, daß P hiernach niemals zwischen S und A liegen kann. Bei kleinen Werten von u liegt P in der Nähe von A , aber außerhalb der Strecke AS ; wenn u wächst, rückt P von A ab und für $u = u_k$ rückt es ins Unendliche. Wenn u noch größer wird, rückt P aus dem Unendlichen von der anderen Seite der Geraden her auf S zu; für sehr große Werte von u liegt P ganz in der Nähe von S und für $u = \infty$ fällt P mit S zusammen.

Der in dieser Weise für ein bestimmtes u konstruierte Punkt P möge auf dem Rade markiert werden und wir wollen zusehen, welche Bewegung dieser Punkt ausführt. Die Koordinaten des Punktes seien mit $\xi\eta$ bezeichnet. Dann ist mit Rücksicht auf Gl. (200)

$$\xi = x - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut,$$

$$\eta = y - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \sin ut,$$

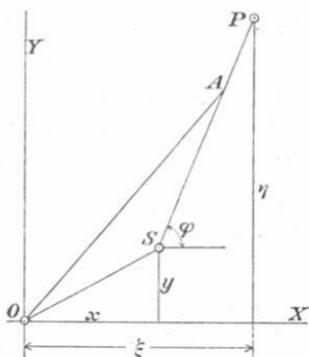


Abb. 48.

also, wenn man die Werte von x und y aus den Gleichungen (196) einführt,

$$\xi = A \sin at + B \cos at,$$

$$\eta = C \sin at + D \cos at.$$

Wir erkennen hieraus, daß im allgemeinsten Falle nicht der Schwerpunkt, sondern der Punkt P eine einfache harmonische Schwingung ausführt; der Schwerpunkt, wie schon vorher gefunden, nur dann, wenn P mit S zusammenfällt, d. h. für $u = \infty$. Die ganze Bewegung kann nun in eine Translation zerlegt werden, die den Punkt P auf seiner elliptischen Bahn herumführt und in eine Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit u um den Punkt P . Bei dieser Darstellung überblickt man vielleicht noch deutlicher als vorher, daß große Bewegungen des Schwerpunktes, also ein starkes Schaukeln des Rades, von der Lage des Punktes P und hiermit von dem Werte der Winkelgeschwindigkeit u bedingt werden.

Schließlich möge noch der in Gl. (199) für die kritische Geschwindigkeit aufgestellte Wert in eine Form gebracht werden, die für die unmittelbare Anwendung in der Praxis möglichst bequem ist. Hierzu führe ich eine Kraft P ein, die als Biegunslast an der ruhenden Welle angebracht einen Biegunspfeil von 1 cm herbeiführen würde. Wenn die Abmessungen der Welle usf. gegeben sind, wird man P nach den Formeln der Festigkeitslehre immer leicht berechnen können. An einer fertigen Maschine kann man P auch durch einen unmittelbaren Belastungsversuch sofort experimentell feststellen. Wenn die Welle zu steif ist, um eine Durchbiegung um 1 cm ohne dauernde Verbiegungen zu ertragen, ist unter P das Zehnfache der Biegunslast zu verstehen, die einen Biegunspfeil von 1 mm hervorruft oder überhaupt das n -fache der zum Biegunspfeile $\frac{1}{n}$ cm gehörigen Last. Nach der Bedeutung der Konstanten c , die in den vorausgehenden Rechnungen vorkam, hat man dann

$$P = c \cdot 1 \text{ cm} \quad \text{oder} \quad c = \frac{P}{1 \text{ cm}}$$

Das Gewicht des Rades sei mit Q bezeichnet; an Stelle der Masse m tritt daher jetzt

$$m = \frac{Q}{981 \text{ cm}} \text{ sec}^2.$$

Ferner soll noch an Stelle der auf Bogenmaß bezogenen Winkelgeschwindigkeit u die Zahl der in der Minute ausgeführten Umdrehungen N eingeführt werden, wie es in der Praxis gebräuchlich ist. Unter N_k ist also die kritische Tourenzahl zu verstehen. Dann ist

$$N_k = \frac{60 \text{ sec} \cdot u_k}{2\pi}$$

und Gl. (199) geht nach Einführung dieser Werte über in

$$N_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{P}{Q} \cdot 981}$$

oder zur Abrundung und genau genug für die praktische Anwendung

$$N_k = 300 \sqrt{\frac{P}{Q}}. \quad (201)$$

Die Tourenzahl N_k muß jedenfalls vermieden werden. Wenn die Welle mindestens $1\frac{1}{2}$ bis 2 mal so viel Touren macht, kann bereits auf einen ruhigen Gang der Welle gerechnet werden. Besser ist es aber, wenn man die Welle bei gegebener Tourenzahl so schwach konstruiert, also P so klein macht, daß das nach Gl. (201) berechnete N_k möglichst weit unter der beabsichtigten Umlaufgeschwindigkeit liegt. Diese Bemerkung bezieht sich aber natürlich nur auf sehr schnell umlaufende Wellen; bei langsamer umlaufenden konstruiert man umgekehrt die Welle so steif, daß das nach Gl. (201) berechnete N_k weit über der beabsichtigten Geschwindigkeit liegt.

Endlich ist noch auf eine Deutung der Formel für die kritische Geschwindigkeit einzugehen, die sie in Beziehung setzt zur Lehre von den erzwungenen Schwingungen. Man geht dabei von der Erwägung aus, daß die nicht rotierende Welle einfache harmonische Schwingungen auszuführen vermag, deren

Schwingungsdauer von dem in Gl. (18) S. 29 berechneten Werte α abhängt, der mit dem Werte α in Gl. (197) genau übereinstimmt. Man weiß ferner, daß die durch eine periodisch wechselnde Kraft erzwungenen Schwingungen eines schwingungsfähigen Systems im Falle der Resonanz besonders groß ausfallen, also dann, wenn die Schwingungsdauer der erregenden Ursache mit der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen übereinstimmt. Nun kann man bei der schnell rotierenden Welle sagen, daß sich der Einfluß der Rotation auf die Schwingungen, die sie ausführt, in ähnlicher Weise geltend machen wird, wie eine periodisch wechselnde äußere Kraft, deren Schwingungsdauer einer vollen Umdrehung der Welle entspricht. Daraus ist dann zu schließen, daß die kritische Geschwindigkeit erreicht wird, wenn $u = \alpha$ wird, womit man unmittelbar zu Gl. (199), nämlich

$$u_k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

geführt wird. Diese Ableitung ist weit kürzer als die vorher gegebene; aber sie ist auch viel weniger streng. Namentlich würde man, wenn nur diese Herleitung vorläge, nicht mit Bestimmtheit zu sagen vermögen, ob die Bewegung auch wirklich stabil ist, wenn u den Wert u_k übersteigt. Die Vermutung liegt freilich nahe; aber zu einer Gewißheit könnte sie nur durch den näheren Nachweis gesteigert werden, daß sich in der Tat der Einfluß der Rotation unter allen Umständen so äußert, wie eine periodisch wechselnde Kraft. Das würde aber zum mindesten ebensoviel Umstände machen als die vorhergehende Ableitung.

Damit soll indessen der Wert dieser Betrachtung nicht bestritten werden. Er ist aber nicht darin zu suchen, daß eine genauere Untersuchung durch sie entbehrlich gemacht werden könnte, sondern darin, daß man durch eine sehr einfache Überlegung darauf aufmerksam gemacht wird, was man voraussichtlich zu erwarten hat. Das zeigt sich am deutlichsten, wenn man nach der Erledigung des einfachsten Falles, in dem die Welle nur eine Schwungmasse trug, zur Behandlung von

verwickelteren Fällen übergeht, bei denen die Welle mehrere Schwungmassen trägt, oder wenn es nötig erscheint, auf die mit der Verbiegung der Welle verbundene Drehung der Radenebene, z. B. bei einem „fliegend“ angeordneten Schwungrade zu achten. In solchen, mit dem vorher eingehend untersuchten ganz verwandten Fällen kann es zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeiten als vollständig ausreichend angesehen werden, die Schwingungsdauern der verschiedenen Eigenschwingungen, die das System auszuführen vermag, zu berechnen und daraus die zugehörigen kritischen Geschwindigkeiten in derselben Weise abzuleiten, wie vorher u_k . Für den Fall, daß eine Welle zwei Schwungräder trägt, kann z. B. die in § 5 im Anschlusse an Abb. 9 S. 37 durchgeführte Berechnung der Schwingungsdauern T_1 und T_2 ohne weiteres benutzt werden. Die zugehörigen kritischen Geschwindigkeiten sind den aus Gl. (32) folgenden Werten λ_1 und λ_2 gleich zu setzen. Herr Prof. Stodola hat diesen Fall und einige andere in der Zeitschr. d. Vereins d. Ing. 1903, S. 127 auf diese Art untersucht, worauf hier noch verwiesen werden möge.

§ 44. Mechanische Ähnlichkeit; Theorie der Modelle.

An dieser Stelle soll eine Betrachtung eingeschaltet werden, die mit dem übrigen Inhalte dieses Abschnitts zwar nur in einem losen Zusammenhange steht, die sich aber auch an einer anderen Stelle nicht mit mehr Recht einreihen ließe, dabei aber wegen der praktischen Bedeutung, die ihr zukommt, nicht ohne Beachtung bleiben darf.

Der Begriff der mechanischen Ähnlichkeit ist aus dem der geometrischen Ähnlichkeit hervorgegangen. Mechanische Ähnlichkeit zweier Systeme schließt die geometrische Ähnlichkeit zum mindesten in allen wesentlichen Bestimmungsstücken ein, wird aber dadurch nicht erschöpft. Man kann z. B. zwei Maschinen nach denselben Plänen und Werkzeugzeichnungen bauen, indem man etwa die eingeschriebenen Maße einmal als englische Zolle, ein anderes Mal als Zentimeter

deutet. Die Maschinen sind dann geometrisch ähnlich und so lange sie still stehen, besteht gar keine Veranlassung, ihre Ähnlichkeit zu bezweifeln. Sobald sie aber in Betrieb kommen, werden sie sich im allgemeinen ganz verschieden verhalten. Während die eine von beiden vielleicht vollständig befriedigend arbeitet und sich als tüchtig durchkonstruiert bewährt, wird die andere bald eine große Zahl von Fehlern aufweisen, wenn sie sich nicht schon von vornherein als ganz untauglich erweist.

Der Grund für das abweichende Verhalten ist leicht einzusehen. Die den Flächen proportionalen äußeren Kräfte wachsen mit den Flächen, also im Verhältnisse n^2 , wenn n das lineare Vergrößerungsverhältnis bedeutet. Das Verhältniß n^2 würde z. B. bei dem treibenden Dampfdrucke zutreffen, wenn beide Maschinen Dampfmaschinen wären und von demselben Kessel aus betrieben werden sollen. Die Gewichte der Teile wachsen mit dem Volumen, also im Verhältnisse n^3 . Wollte man verlangen, daß die Maschinen entsprechende Wege in gleichen Zeiten zurücklegen, so müßten die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen im Verhältnisse n zueinander stehen. Zwischen den nach dem d'Alembertschen Prinzip einzuführenden Trägheitskräften hätte man dann das Verhältniß $n^3 \cdot n$ oder n^4 . Da die miteinander in Vergleich zu bringenden Kräfte in so verschiedenen Verhältnissen wie n^2 , n^3 , n^4 anwachsen, müßte das Verhalten beider Maschinen natürlich ein ganz verschiedenes sein, d. h. trotz der geometrischen Ähnlichkeit sind die Maschinen mechanisch einander durchaus nicht ähnlich.

Man kann sich aber die Aufgabe stellen, zwei geometrisch ähnliche Maschinen so zu konstruieren, daß sie sich auch mechanisch ähnlich verhalten. Durch die vorhergehenden Erwägungen wird dies nicht ausgeschlossen. Es steht uns nämlich, um bei dem gewählten Beispiele zu bleiben, frei, beide Dampfmaschinen mit verschiedenem Dampfdrucke zu betreiben und zugleich auch die Umlaufgeschwindigkeit verschieden zu wählen. Außerdem könnte man sich auch bei beiden Material von verschiedenem spezifischem Gewichte angewendet denken,

also etwa Eisen im einen, Aluminium im anderen Falle. In dieser Hinsicht ist man freilich praktisch an enge Grenzen gebunden. Jedenfalls kann man es aber durch solche Mittel dahin bringen, daß die Oberflächenkräfte, die Gewichte und die Trägheitskräfte bei beiden Maschinen in gleichen Verhältnissen zueinander stehen, so daß sich die Maschinen auch mechanisch ähnlich verhalten, d. h. so, daß die Bewegungsvorgänge im einen Falle ein getreues Abbild von jenen im anderen Falle darstellen, bei dem nur Längen, Zeiten und Kräfte in festen Verhältnissen vergrößert oder verkleinert erscheinen.

Von praktischer Bedeutung sind diese Betrachtungen namentlich immer dann, wenn man von dem Verhalten eines, der Kostenersparnis wegen zunächst in kleinerem Maßstabe ausgeführten Modells auf die Eigenschaften einer nach diesem Modell zu erbauenden großen Maschine schließen will. Von diesem Mittel wird sehr häufig Gebrauch gemacht; so wird z. B. vor dem Baue eines großen Schiffes, das in wesentlichen Punkten von früheren Ausführungen abweichen soll, gewöhnlich zunächst ein Modell desselben hergestellt, mit dem man Versuche über den Schiffswiderstand bei verschiedenen Geschwindigkeiten anstellt, um danach beurteilen zu können, wie groß die Maschinenstärke des Schiffes sein muß, um diesem eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen usf.

Strenge mechanische Ähnlichkeit läßt sich in solchen Fällen meist entweder gar nicht oder wenigstens nur mit einem unverhältnismäßigen Aufwand von Mitteln erreichen. Es genügt aber, wenn nur in den wesentlichen Punkten, die man gerade untersuchen will, eine Übereinstimmung erzielt wird, während man sonst Abweichungen, die zur Bequemlichkeit oder zur Ermöglichung der Ausführung geboten sind, unbedenklich zulassen kann. Natürlich erfordert die richtige Abwägung darüber, wie weit man in dieser Hinsicht gehen darf, im einzelnen Falle ein eingehendes Studium aller Nebenumstände, die etwa auf den Erfolg von Einfluß sein könnten. — Hier handelt es sich nur

um eine Darlegung der allgemeinen Gesichtspunkte, von denen aus Fragen der mechanischen Ähnlichkeit zu beurteilen sind.

Am einfachsten gestaltet sich die Betrachtung, wenn nur das statische Verhalten in Frage kommt. Eine Tragkonstruktion, etwa ein Brückenträger oder ein Dachverband, möge im Modell ausgeführt sein und man fragt, wie man aus den am Modell beobachteten Erscheinungen auf das Verhalten der in λ -facher Größe ausgeführten Konstruktion schließen kann. Wenn das Modell der Konstruktion geometrisch ähnlich aus demselben Material nachgebildet ist, müssen die Lasten, die man am Modell aufhängt, im Verhältnisse $1:\lambda^2$ zu den an der Konstruktion auftretenden Lasten bemessen sein. Die Spannungen der einzelnen Stäbe erscheinen dann ebenfalls im Verhältnisse $1:\lambda^2$, d. h. im selben Verhältnisse wie die Querschnitte, so daß die spezifischen Spannungen und hiermit die Beanspruchung des Materials in beiden Fällen dieselbe bleibt. Auch die Sicherheit gegen Ausknicken ist in beiden Fällen die gleiche, denn die Knicklast eines Stabes ist nach der Eulerschen Formel — etwa bei frei drehbaren Enden —

$$P = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2},$$

und da E konstant ist, Θ im Verhältnisse $1:\lambda^4$ und l im Verhältnisse $1:\lambda$ steht, folgt, daß auch die Knicklasten das Verhältnis $1:\lambda^2$ haben, also dasselbe Verhältnis, wie die von den Stäben aufzunehmenden Kräfte.

Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, daß das Eigengewicht der Konstruktion in beiden Fällen keine wesentliche Rolle spielt. Kommt dieses aber in Betracht, so ist zu beachten, daß es im Verhältnisse $1:\lambda^3$ steht, daß also die große Konstruktion davon stärker beansprucht wird als das Modell. Um die Bedingung der mechanischen Ähnlichkeit in diesem Falle, wenigstens in der Idee, streng aufrecht zu erhalten, müßte man schon voraussetzen, daß das spezifische Gewicht des Materials, aus dem das Modell besteht, λ mal so groß sei, als bei der großen Konstruktion, während der Elastizitätsmodul und die zulässige Beanspruchung beider Materialien immer noch die

gleich sein müßten. Dies läßt sich natürlich nicht verwirklichen; man kann sich aber praktisch ganz gut dadurch helfen, daß man das Modell noch mit Zusatzgewichten belastet, die passend, etwa auf die Knotenpunkte, verteilt sind, so daß der Unterschied in der Beanspruchung durch das Eigengewicht hierdurch ausgeglichen wird. Wenn man in der hier geschilderten Weise verfährt, kann man aus den elastischen Deformationen und den sonstigen Festigkeitseigenschaften des Modells zuverlässige Schlüsse auf das statische Verhalten der großen Konstruktion ziehen. Auch das Verhalten unter dem Einflusse gleicher Temperaturänderungen wird in beiden Fällen das gleiche sein. Voraussetzung ist natürlich, daß auch sonst in der Tat alle Bedingungen übereinstimmen, daß also die Kräfte in beiden Fällen in der gleichen Weise angreifen, daß das Material in den kleinen Stücken von derselben Beschaffenheit ist, wie in den großen usf. Dies ist ja freilich eigentlich selbstverständlich; es sollte aber noch besonders betont werden, weil in dieser Hinsicht große Vorsicht geboten ist, damit nicht irgendein für den Erfolg sehr wesentlicher Nebenumstand, der eine Abweichung von den Anforderungen der mechanischen Ähnlichkeit in sich schließt, bei flüchtiger Betrachtung übersehen wird.

Dies alles bezieht sich indessen nur auf das statische Verhalten. Schon wenn man im vorhergehenden Falle Schlüsse über die Schwingungen, die die Konstruktion unter dem Einflusse bewegter Laster ausführt, aus Versuchen am Modell ziehen will, reichen die vorigen Betrachtungen nicht mehr aus. Wir fassen daher jetzt die Frage von einem allgemeineren Standpunkte her an, der zugleich die dynamischen Verhältnisse zu berücksichtigen gestattet.

Das Verhältnis der maßgebenden Längen (wobei unwesentliche Abweichungen im einzelnen ebenso wie in den folgenden Fällen immerhin gestattet werden können) sei abermals λ . Das Verhältnis der von außen her übertragenen Kräfte mit Ausschluß der Eigengewichte sei dagegen jetzt allgemein mit π bezeichnet; ferner sei das Verhältnis der Massen μ und das

Verhältnis der Zeiten τ . Wenn beide Systeme mechanisch ähnlich sein sollen, müssen sie in entsprechenden Zeiten t und τt in gleichen Stellungen sein und in gleicher Art von Kräften P und πP beansprucht werden. Mit anderen Worten heißt dies, daß alle Größen, die die Bewegung und den Zustand beider Systeme beschreiben, identisch miteinander werden, wenn man sie in beiden Fällen auf verschiedene Einheiten bezieht. Dann gelten auch alle Gleichungen der Mechanik, die man für das eine der beiden Systeme anschreibt, ohne jede Änderung für das andere. Aus diesen Gleichungen läßt sich die spätere Bewegung des Systems voraussehen, wenn der Anfangszustand und alle übrigen Bedingungen hinreichend gekennzeichnet sind. Da die Gleichungen mit allen Nebenbedingungen in beiden Fällen identisch sein sollten, beziehen sich auch die Schlüsse, die man aus ihnen ziehen kann, in gleicher Weise auf beide Systeme und daraus folgt, daß in der Tat bei gleichen Anfangsbedingungen auch der spätere Verlauf in beiden Fällen übereinstimmen muß.

Die Verhältniszahlen λ , π , μ , τ sind aber nicht unabhängig voneinander. In der Mechanik kommen nur drei Fundamenteinheiten vor, die man beliebig wählen kann, während jede andere Einheit dadurch mit bestimmt ist. Daher können auch nur drei von den vorhergehenden Verhältniszahlen beliebig gewählt werden. Nach dem dynamischen Grundgesetze ist die Kraft gleich der Masse mal der Beschleunigung. Sind in einem Maßsysteme alle diese drei Größen in einem bestimmten Falle gleich der Einheit, so muß die Beziehung auch noch gültig bleiben, wenn man dieselben Größen nach dem anderen Maßsysteme ausmißt, d. h. man hat

$$\pi = \mu \frac{\lambda}{\tau^2} \quad \text{oder} \quad \pi \tau^2 = \lambda \mu, \quad (202)$$

und diese Gleichung spricht die Hauptbedingung aus, die bei der Konstruktion der Modelle von Maschinen im Auge behalten werden muß.

Zu dieser Hauptbedingung treten noch Nebenbedingungen, je nach den Anforderungen, die man an den Grad stellt, in dem die mechanische Ähnlichkeit beider Systeme verwirklicht sein soll. Wenn die Eigengewichte der Körper, die den Massen proportional sind, neben den anderen Kräften nicht vernachlässigt werden dürfen, hat man

$$\pi = \mu \quad \text{und hiermit} \quad \tau^2 = \lambda \quad (203)$$

zu setzen. Man hat dann nur noch zwei Verhältniszahlen zur beliebigen Wahl frei. Verlangt man außerdem, wie in dem vorausgehenden statischen Beispiele, daß die Beanspruchung des Materials und das elastische Verhalten in beiden Fällen übereinstimmen, so muß, wie wir uns schon vorher überzeugten,

$$\pi = \mu = \lambda^2 = \tau^4 \quad (204)$$

sein. Wir haben dann nur noch eine Verhältniszahl zur Verfügung und sind, um strenge mechanische Ähnlichkeit herzustellen, genötigt, in beiden Systemen Stoffe mit verschiedenen spezifischen Gewichten vorauszusetzen, die sich aber sonst in allen Eigenschaften gleichen.

Da das zuletzt erhobene Verlangen praktisch nicht erfüllbar ist, verzichtet man entweder auf die Berücksichtigung des Spannungszustandes und hiermit der elastischen und der Festigkeitseigenschaften beider Systeme oder man vernachlässigt (je nach der Lage des einzelnen Falles) das Eigengewicht neben den übrigen äußeren Kräften, nimmt dagegen, um gleiches Material bei beiden Systemen voraussetzen zu können,

$$\mu = \lambda^3, \quad (205)$$

eine Gleichung, die sich mit den Bedingungen (204) nicht vereinigen läßt.

An einigen Beispielen wird man am besten erkennen, wie diese Bedingungen zu verwerten sind. Zunächst sind zwei geometrisch ähnliche Pendel auch mechanisch ähnliche Systeme. Da bei ihnen das Eigengewicht in Frage kommt, muß man $\pi = \mu$ und daher wie in Gl. (203) $\tau^2 = \lambda$ setzen. Nach der Beanspruchung des Pendelmaterials und nach den elastischen Formänderungen, die das Pendel während der

Schwingungen erfährt, fragt man in diesem Falle nicht. Wir sind daher nicht an die Erfüllung der Bedingungen (204) gebunden, ebensowenig an die Bedingung (205), können vielmehr μ ganz beliebig wählen, d. h. es macht keinen Unterschied, wie groß das spezifische Gewicht des Pendelmaterials in beiden Fällen gewählt wird. Wesentlich bleibt nur die Bedingung $\tau^2 = \lambda$, die uns aussagt, daß sich die Schwingungsdauern wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Modell eines Schiffes, mit dessen Hilfe der Schiffswiderstand ermittelt werden soll. Das mechanische System, das ähnlich nachgebildet werden soll, besteht hier nicht nur aus dem Schiffe, sondern sehr wesentlich auch aus dem sich um das Schiff bewegenden Wasser. Hier ist daher an Gl. (205) festzuhalten, durch die ausgedrückt wird, daß es sich in beiden Fällen um dieselbe Flüssigkeit handelt. Außerdem müssen auch die Gleichungen (203) erfüllt sein, da das Eigengewicht des Systems nicht vernachlässigt werden darf, sondern im Gegenteile eine wichtige Rolle spielt. Auf die durch die Gleichungen (204) ausgedrückte Bedingung, daß die spezifischen Spannungen richtig nachgebildet werden, müssen wir dagegen verzichten, weil sich die Gleichungen (204) mit den anderen Bedingungen, auf die hier das Hauptgewicht zu legen ist, nicht vereinigen lassen.

Durch Verbindung der Gleichungen (203) und (205) erhält man

$$\pi = \mu = \lambda^3 = \tau^6.$$

Macht man etwa $\lambda = 9$ (das Modell in $\frac{1}{9}$ der Schiffsgröße), so wird $\tau = 3$. Die Geschwindigkeit des Modells muß, um den Vorgang mechanisch ähnlich zu gestalten, demnach so bemessen werden, daß es entsprechende Wege im dritten Teile der Zeit zurücklegt, als das Schiff. Das Geschwindigkeitsverhältnis sei v ; dann folgt aus den Dimensionen der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda},$$

also hier $v = 3$. Soll also das Schiff etwa 12 m in der Sekunde zurücklegen, so muß die Geschwindigkeit des Modells 4 m sec^{-1} betragen. Mißt man nun die Kraft, die man aufwenden muß, um das Modell mit der konstanten Geschwindigkeit von 4 m sec^{-1} vorwärts zu bewegen oder, wie man auch sagen kann, den Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Modells, und bezeichnet sie oder ihn mit R , so ist der Schiffswiderstand bei der entsprechenden Geschwindigkeit gleich πR , also gleich $R\lambda^3$ oder in unserem Falle gleich $729 R$. — Diese Methode, den Schiffswiderstand unter den Bedingungen der mechanischen Ähnlichkeit am Modell zu untersuchen, rührt von Froude her.

Schließlich wähle ich noch ein Beispiel zur näheren Besprechung aus, das ich dem Werke von Routh, *Dynamik der Systeme starrer Körper*, deutsch von Schepp, Bd. I, S. 330 entnehme. Dort heißt es:

„Man soll die Durchbiegung einer Brücke von 15 m Länge und 100 t Gewicht, wenn eine Maschine, die 20 t wiegt, mit der Geschwindigkeit von 64 km in der Stunde über sie fährt, durch Experimente feststellen, die an einem Modell der Brücke gemacht werden, das 1,5 m lang ist und 2,8 kg wiegt. Man finde das Gewicht des Modells der Maschine und nehme an, das Modell der Brücke sei so steif, daß die statische Durchbiegung in der Mitte unter dem Modell der Maschine ein Zehntel derjenigen der Brücke unter der Maschine selbst beträgt, und zeige, daß dann die Geschwindigkeit des Modells der Maschine etwa 5,6 m in der Sekunde betragen muß.“

Das Beispiel ist insofern bemerkenswert, als die Fassung der Aufgabe leicht zu einem Zweifel darüber Veranlassung geben kann, ob die Bedingungen der mechanischen Ähnlichkeit hier überhaupt noch genügend gewahrt sind. Strenge mechanische Ähnlichkeit besteht offenbar nicht und überdies gehen auch die Abweichungen davon weiter, als es die praktischen Rücksichten erfordern. Weder die speziellen Bedingungen (204) noch die damit nicht vereinbare Bedingung (205) sind hier erfüllt. Wäre das Modell der Brücke geometrisch ähnlich und aus dem gleichen Material hergestellt, so müßte das Modell ein Gewicht von 100 kg haben, da λ hier gleich 10 ist. Um

dagegen genaue Übereinstimmung hinsichtlich des elastischen Verhaltens und der Beanspruchung des Materials herzustellen, müßte die Bedingung (204) erfüllt sein, d. h. das spezifische Gewicht des Materials müßte am Modell das Zehnfache von dem an der Brücke betragen oder es müßte wenigstens in der früher besprochenen Weise durch eine Zusatzlast das Eigengewicht des Modells entsprechend erhöht werden, während es in dem Beispiele umgekehrt niedriger angenommen ist, als es bei bloßer geometrischer Nachbildung in dem gleichen Materiale ausfiel. Auf eine Übereinstimmung des Verhaltens in jeder Hinsicht ist daher in der Aufgabe stillschweigend von vornherein verzichtet.

Das hindert jedoch nicht, daß man auch bei dieser unvollkommenen Annäherung an die strengen Bedingungen der mechanischen Ähnlichkeit aus dem Versuche am Modell erfahren kann, was man zu wissen wünscht, falls nur vorausgesetzt werden darf, daß das Material weder an der Brücke noch am Modell über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht wird, was von vornherein freilich keineswegs feststeht.

Da das Eigengewicht hier eine wesentliche Rolle spielt, muß auf jeden Fall die Bedingung (203) erfüllt sein. Mit Rücksicht auf die Zahlenangaben der Aufgabe hat man daher

$$\pi = \mu = \frac{100000}{2,8}, \quad \lambda = 10, \quad \tau = \sqrt{10}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß das Gewicht des Modells der Maschine gleich

$$20000 \cdot \frac{2,8}{100000} = 0,56 \text{ kg}$$

sein muß. Für das Geschwindigkeitsverhältnis v hat man wie im vorigem Beispiele

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3,16.$$

Das Modell muß daher mit der Geschwindigkeit

$$\frac{64000 \text{ m}}{3,16 \cdot 3600 \text{ sec}} \quad \text{oder rund} \quad 5,6 \text{ m sec}^{-1}$$

über das Brückenmodell geführt werden, wie in der Aufgabe schon angegeben ist. — Bei Erfüllung der angegebenen Bedingungen hat man aber in der Tat für jede Stellung der Maschine und des Modells geometrisch ähnliche Durchbiegungslinien zu erwarten. Man tut gut, sich davon besonders zu überzeugen, indem man auf die Differentialgleichung (172) zurückgeht, die von einem schwingenden Stabe erfüllt sein muß. Diese Gleichung lautete

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

wobei zu beachten ist, daß μ darin eine andere Bedeutung hatte, als die ihm vorhin zugeschriebene. In dieser Form möge sich die Gleichung auf die Brücke beziehen; für das Modell gilt eine von der gleichen Form, nämlich

$$E_1\Theta_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} = -\mu_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}.$$

Zum Vergleiche zwischen $E\Theta$ und $E_1\Theta_1$ dient die Bemerkung der Aufgabe, daß der statische Biegunspfeil bei der Stellung der Last in der Brückenmitte oder Modellmitte im Längenverhältnisse λ gefunden wird. Nach Gl. (82) von Band III ist der Biegunspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48 E\Theta} \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{P_1 l_1^3}{48 E_1\Theta_1},$$

und hiernach

$$\frac{f}{f_1} = \lambda = \frac{\pi \lambda^3}{E\Theta : E_1\Theta_1} \quad \text{oder} \quad \frac{E\Theta}{E_1\Theta_1} = \pi \lambda^2.$$

Ferner ist das Verhältnis der auf die Längeneinheit entfallenden Massen

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \pi \frac{1:l}{1:l_1} = \frac{\pi}{\lambda},$$

wobei μ wieder in derselben Bedeutung wie in der Differentialgleichung gebraucht ist. Außerdem ist $y = \lambda y_1$, $x = \lambda x_1$ und $t = \tau t_1$ zu setzen. Multipliziert man die für das Modell geltende Differentialgleichung auf beiden Seiten mit der Konstanten

$$\pi \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda^4} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau^2},$$

was wegen der hier erfüllten Beziehung $\tau^2 = \lambda$ auf dasselbe hinauskommt, so geht die Differentialgleichung in die für die Brücke geltende über. Durch die Differentialgleichung wird aber im Zusammenhange mit den Grenz- und Anfangsbedingungen der zeitliche und örtliche Verlauf der Stabschwingung vollständig beschrieben und da auch diese Bedingungen im Modell, so weit als erforderlich, genau nachgebildet sind, hat man in beiden Fällen, abgesehen von den verschiedenen Maßstäben, in denen die Zeit- und Längengrößen auszumessen sind, genau den gleichen Schwingungsvorgang zu erwarten.

Auch in anderen Fällen, bei denen Abweichungen von den strengen Bedingungen der geometrischen Ähnlichkeit unvermeidlich oder durch die Festsetzungen der Aufgabe vorgeschrieben sind, wird man stets am besten tun, sich durch unmittelbares Zurückgehen auf die Differentialgleichung des ganzen Vorgangs am einzelnen Objekt oder überhaupt auf die spezielle mechanische Theorie dieses Vorgangs davon zu überzeugen, ob und inwiefern jene Abweichungen zulässig sind, ohne den Vergleich unmöglich zu machen. Auf diese Art kann man aus Differentialgleichungen eines mechanischen Problems auch dann noch leicht Nutzen ziehen, wenn die unmittelbare Lösung der durch die Differentialgleichung umschriebenen Aufgabe nicht möglich ist.

Aufgaben zum 2., 3. und 4. Abschnitt.

11. Aufgabe. Ein Stab, auf den sonst keine äußeren Kräfte wirken und der vorher in Ruhe war, erhält plötzlich einen Stoß von gegebenem Impulse an seinem einen Ende rechtwinklig zur Längsrichtung; man soll die zustande kommende Bewegung angeben.

Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hilfe des Flächensatzes oder mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips lösen; wir entscheiden uns hier für das d'Alembertsche Prinzip, weil man dieses ohnehin anwenden muß, wenn etwa daneben noch nach der Biegungsbeanspruchung gefragt werden sollte, die der Stab bei dem Stoße erfährt.

Es wird sich vor allen Dingen darum handeln, den Bewegungszustand des Stabs unmittelbar nach dem Stoße zu erfahren. Die Be-

wegung ist jedenfalls eine ebene; der Stab bewegt sich nämlich in jener Ebene, die durch die Stabmittellinie und durch die Richtung der Stoßkraft gelegt werden kann. Eine ebene Bewegung kann in jedem Augenblicke als eine Drehung um eine zur Bewegungsebene senkrechte Achse oder, wie man einfacher sagen kann, als eine Drehung um einen in dieser Ebene enthaltenen Punkt aufgefaßt werden. Wir wollen die Lage dieses Momentanzentrums aufsuchen. Da sich der Schwerpunkt in der Richtung der Stoßkraft P , also rechtwinklig zur Stabachse bewegt, folgt zunächst, daß das Momentanzentrum jedenfalls auf der Stabachse liegen muß. Wir brauchen also nur noch die genaue Lage dieses Punktes auf der Stabachse zu ermitteln.

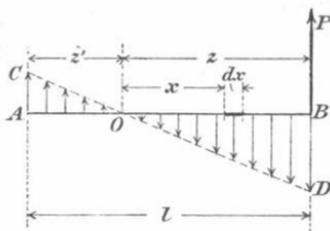


Abb. 49.

Dazu bringen wir an jedem Massenelement des Stabes in einem bestimmten Augenblicke während des Stoßes eine Trägheitskraft an. In Abb. 49 sei AB die Stabmittellinie; die Stoßkraft P wirke am Ende B . Wenn die Masse des Stabes mit m und seine Länge mit l bezeichnet wird, kommt auf ein Längenelement dx im Abstände x vom Momentanzentrum O die Masse $\frac{m dx}{l}$. Wenn die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t (während des Stoßes) mit u bezeichnet wird, ist die Geschwindigkeit v dieses Massenelementes gleich ux und man hat

$$\frac{dv}{dt} = x \frac{du}{dt}.$$

Dieser Beschleunigung entspricht eine Trägheitskraft von der Größe

$$\frac{m dx}{l} x \frac{du}{dt},$$

die also mit x proportional ist. Denkt man sich die Trägheitskräfte überall abgetragen, so liegen die Endpunkte auf einer durch O gehenden geraden Linie, die in der Abbildung mit CD bezeichnet ist. Die Trägheitskräfte müssen nun in jedem Augenblicke während des Stoßes mit der Stoßkraft P im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben eine Momentengleichung für O als Momentenpunkt an und erhalten

$$Pz = \frac{m}{l} \frac{du}{dt} \left(\int_0^z x^2 dx + \int_0^z x_1^2 dx_1 \right).$$

Mit x_1 sind hier die Abstände der nach links hin von O liegenden

Stabteile bezeichnet. Die Ausführung der Integrationen liefert

$$Pz = \frac{m}{l} \frac{du}{dt} \cdot \frac{z^3 + z_1^3}{3}.$$

Zugleich muß aber die algebraische Summe aller Kräfte gleich Null sein. Wir haben daher noch die weitere Gleichung (die auch schon aus dem Satze über die Bewegung des Schwerpunkts hervorgeht)

$$P = \frac{m}{l} \frac{du}{dt} \left(\int_0^z x dx - \int_0^{z_1} x_1 dx_1 \right) = \frac{m}{l} \frac{du}{dt} \frac{z^2 - z_1^2}{2}.$$

Der Vergleich beider Gleichungen liefert

$$\frac{z^3 + z_1^3}{3} = \frac{z^2 - z_1^2}{2} \quad \text{oder} \quad z^3 = 2z_1^3 + 3zz_1^2.$$

Setzt man nun noch $z_1 = l - z$ ein, so geht dies über in

$$z^3 = 2(l - z)^3 + 3z(l - z)^2 \quad \text{und hieraus} \quad z = \frac{2l}{3}.$$

Die vorausgehende Gleichung für P geht damit über in

$$P = \frac{m}{l} \frac{du}{dt} \cdot \frac{l^2}{6}$$

und hiernach ist die Winkelgeschwindigkeit, die der Stab nach Ablauf des Stoßes erlangt hat,

$$u = \frac{6}{ml} \int P dt.$$

Wenn von einem Stoße gesprochen wird, setzt man dabei stillschweigend voraus, daß die Zeit, während deren er ausgeübt wird, so klein ist, daß sich der Körper inzwischen nicht merklich aus der Anfangslage verschieben kann. Wir kennen daher jetzt den Bewegungszustand des Stabes unmittelbar nach dem Stoße vollständig. Weiterhin wirken keine äußeren Kräfte mehr auf ihn ein und er bewegt sich daher nach den Lehren über die Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers. Der Schwerpunkt beschreibt also eine geradlinige Bahn mit der Geschwindigkeit $\frac{ul}{6}$, die er beim Stoße erlangt hat.

Zugleich dreht sich der Körper mit der Geschwindigkeit u stetig weiter, denn die zugehörige Drehachse ist offenbar eine freie Achse. Alle übrigen Punkte außer dem Schwerpunkte beschreiben daher zyklische Bahnen. — Sieht man P und die Trägheitskräfte als Lasten an dem ruhenden Stabe an, so kann auch die Biegungsbeanspruchung, die er erfährt, berechnet werden; man muß aber hierzu nicht nur wissen, wie groß der Stoßimpuls $\int P dt$ im ganzen ist, sondern auch, wie

groß die Kraft P zu irgendeiner Zeit selbst ist. Je schneller der Stoß bei gegebenem Impuls sich abspielt, um so größer wird die Biegungsbeanspruchung und bei sehr großen Werten von P wird es auch nötig, die elastische Formänderung des Stabes während des Stoßes zu verfolgen, wovon bei der vorausgegangenen Rechnung abgesehen werden konnte.

Anmerkung. Auf andere Art läßt sich die Aufgabe auch lösen, indem man von der in § 38 besprochenen Massenreduktion Gebrauch macht. Die Masse des Stabes ist hierzu durch eine Masse m zu ersetzen, die mit dem Angriffspunkte der Stoßkraft zusammenfällt und durch eine zweite Masse m_2 , deren Lage sich aus den Gl. (171) ergibt. Dann erfährt m_1 eine Beschleunigung durch P , während m_2 zunächst in Ruhe bleibt. Die Lage von m_2 fällt daher mit dem Momentanzentrum zusammen. — Falls nach der Biegungsbeanspruchung des Stabes gefragt wird, kann aber von diesem Verfahren kein Gebrauch gemacht werden.

12. Aufgabe. Man soll auf Grund des d'Alembertschen Prinzips die Biegungsbeanspruchung berechnen, die die Pleuelstange einer schnelllaufenden Dampfmaschine erfährt.

Lösung. Schon im ersten Bande sind einige Betrachtungen

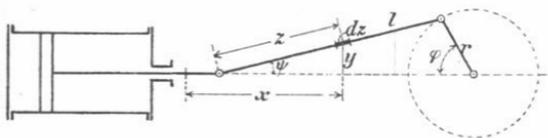


Abb. 50.

über den Kurbelmechanismus der Dampfmaschine durchgeführt worden, an die ich hier anknüpfen kann. Abb. 50 gleicht sonst ganz der Abb. 59 auf

S. 209 der 3. Aufl. des ersten Bandes und es ist hier nur noch ein Längenelement dz der Pleuelstange im Abstände z vom Kreuzkopfzapfen besonders hervorgehoben. Die Ordinate von dz ist mit y und die von der linken Todpunktlage aus gerechnete Abszisse mit x bezeichnet.

Mit der schon früher benützten und für den vorliegenden Fall stets hinreichenden Annäherung $\cos \psi = 1$ erhält man

$$x = z + r - r \cos \varphi; \quad y = \frac{z}{l} r \sin \varphi.$$

Beachtet man nun, daß z konstant ist, so lange man immer nur dasselbe Massenteilchen ins Auge faßt, und daß auch

$$\frac{d\varphi}{dt} = u$$

als konstant betrachtet werden kann, so erhält man für die Beschleunigungskomponenten des Massenteilchens

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ru^2 \cos\varphi; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{z}{l} ru^2 \sin\varphi = -yu^2.$$

Die zum Längenelemente dz der Stange gehörige Masse sei mit m bezeichnet; dann sind die mit X und Y bezeichneten Komponenten der Trägheitskraft, die an dz angebracht werden muß,

$$X = -mru^2 \cos\varphi; \quad Y = myu^2.$$

Hiernach ist X unabhängig von z , also für alle Massenteilchen der Stange gleich groß (bei gleichem m), während Y mit y oder mit z proportional von dem Kreuzkopfe der Stange zum Kurbelzapfende hin wächst. Die durch die Vorzeichen ausgewiesenen Richtungen von X und Y sind in Abb. 51 noch besonders eingetragen.

Um die Biegungsbeanspruchung der Pleuelstange zu berechnen, muß man sich die Stange, die hierbei als ein auf zwei Stützen ruhender Balken aufzufassen ist, in Ruhe denken und die Trägheitskräfte als Lasten daran anbringen. Es fragt sich dann, bei welcher Stellung der Stange die Biegungsbeanspruchung am größten wird. Auf die Lastkomponenten X , die im übrigen zu den schon im ersten Bande besprochenen Erscheinungen des „Massendruckes“ führen, kommt bei der Biegung offenbar nicht viel an, da sie nur wenig von der Richtung der Stange abweichen, also im wesentlichen nur eine axiale Beanspruchung der Stange herbeiführen. Die Lastkomponenten Y stehen dagegen in allen Lagen nahezu senkrecht zur Stange und wir müssen uns daher fragen, wann sie am größten werden. Dies trifft dann zu, wenn $\sin\varphi = 1$ wird, oder (was hier mit Rücksicht auf die Vernachlässigungen, die wir von vornherein machten, auf dasselbe hinauskommt) wenn ψ seinen größten Wert annimmt.

Das Belastungsschema wird demnach durch Abb. 52 zum Ausdruck gebracht. Die größte Intensität nimmt die Belastung am rechten Auflager an. Für jedes Massenteilchen m ist dort die Last mru^2 anzubringen. Das ist übrigens genau der Wert der Zentrifugalkraft für das den Kurbelwarzenkreis durchlaufende Teilchen und die Last muß auch diese Größe annehmen, da ja an dieser Stelle die Trägheitskraft sich in der Tat auf eine einfache Zentrifugalkraft reduziert. Vom rechten Auflager nimmt die Belastung nach links hin gleichmäßig ab.

Wir haben nun eine einfache Aufgabe der Festigkeitslehre vor uns, die mit der in Aufg. 16 des zweiten Bandes auf graphischem

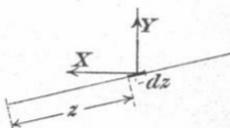


Abb. 51.

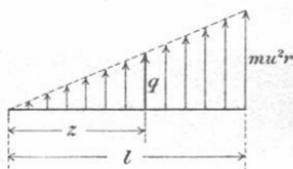


Abb. 52.

Wege gelöst vollkommen übereinstimmt. Die auf die Längeneinheit entfallende Belastung q im Abstände z vom linken Auflager ist

$$q = \frac{Q}{gl} r u^2 \cdot \frac{z}{l},$$

wenn das ganze Gewicht der hierbei als zylindrisch vorausgesetzten Stange mit Q bezeichnet wird. Man kann nun leicht die Auflagerkräfte auf beide Stützpunkte und hiernach das Biegemoment für einen Querschnitt z berechnen. Dann sucht man das Maximalmoment

auf und berechnet die Biegungsspannung σ mit Hilfe der gewöhnlichen Biegungsgleichung.

13. Aufgabe. Man soll die Biegungsbeanspruchung einer Kuppelungsstange AB zwischen zwei Treibrädern einer Loko-

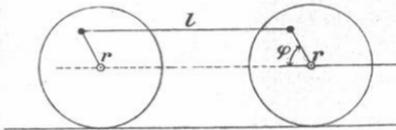


Abb. 53.

motive berechnen (vgl. Abb. 53).

Lösung. Die Aufgabe kann ganz ähnlich wie die vorhergehende behandelt werden; sie ist aber insofern einfacher, als sich die Bewegung der Kuppelungsstange in zwei Anteile zerlegen läßt, von denen der eine die gleichförmige geradlinige Translationsbewegung darstellt, die die Stange mit dem Fahrzeuge zusammen ausführt, während der andere Anteil in der Relativbewegung gegen das Fahrzeug besteht. Der erste Anteil kann zu keinen Trägheitskräften führen; man braucht sich also nur um den zweiten zu kümmern. Dieser besteht ebenfalls in einer Translationsbewegung, bei der alle Punkte Kreise vom Halbmesser r zurücklegen. Die Trägheitskräfte

sind daher Zentrifugalkräfte von der Größe mu^2r und gleichmäßig über die ganze Stangenlänge verteilt. Die Biegung wird am größten, wenn die Zentrifugalkräfte senkrecht zur Stange stehen, also in der tiefsten oder in der höchsten Lage der Stange; bei der tiefsten addiert sich noch die Biegung durch das Eigengewicht, das freilich gegenüber den Trägheitswirkungen bei einer schnelllaufenden Lokomotive nur gering ist.

14. Aufgabe. Die Mittellinie eines Stabes hat die in Abb. 54 angegebene Z-förmige Gestalt. Der Stab rotiert um den in der Mitte liegenden Punkt O ; man soll die

Biegungsbeanspruchung und die elastische Formänderung berechnen, die der Stab erfährt.

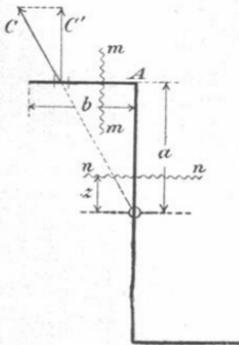


Abb. 54.

Lösung. Der eigentlich dynamische Teil der Aufgabe ist hier sehr einfach. Man braucht nur überall die Zentrifugalkräfte anzubringen, um die Aufgabe auf eine der Festigkeitslehre zurückzuführen. Die Zentrifugalkräfte am mittleren Teile tragen zur Biegung nichts bei, sondern nur die an den Seitenfortsätzen. Für einen Querschnitt mm berechnet man die Summe der statischen Momente der links von mm liegenden Zentrifugalkräfte C . Da $C = mu^2 r$ ist, hat man für die Vertikalkomponente C' von C den Wert $mu^2 a$, d. h. die Lasten C' sind über den Seitenfortsatz gleichmäßig verteilt. Das größte Biegemoment tritt im Punkte A auf und es ist

$$M_{\max} = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2},$$

wenn mit Q das Gewicht des seitlichen Armes bezeichnet wird. Auch der mittlere Stabteil wird verbogen und das Biegemoment kann für jeden Querschnitt nn ebenfalls sofort angegeben werden. Es ist

$$M = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2} - \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} (a - z) = \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} z.$$

Für $z = 0$ wird M zu Null. — Nachdem die Biegemomente bekannt sind, kann man die auftretenden Verbiegungen so wie bei einem Bogenträger (Band III, § 38) berechnen.

15. Aufgabe. In welchem Abstände vom Schwerpunkte muß ein physisches Pendel aufgehängt werden, wenn die Schwingungsdauer möglichst klein werden soll?

Lösung. Die Schwingungsdauer hängt von der reduzierten Pendellänge l ab und diese ist nach den Gleichungen (96) und (97)

$$l = \frac{g \Theta}{Q s} = \frac{i^2}{s}.$$

Das Trägheitsmoment Θ für eine Achse, die den Abstand s vom Schwerpunkte hat, folgt aus dem Trägheitsmomente Θ_0 für die dazu parallele Schwerpunktsachse nach der Formel (vgl. Band III, Gl. 51),

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{Q}{g} s^2$$

oder, wenn man mit den Trägheitsradien i und i_0 rechnet,

$$i^2 = i_0^2 + s^2.$$

Für l erhält man daher

$$l = s + \frac{i_0^2}{s}.$$

Dieser Ausdruck soll durch geeignete Wahl von s zu einem Minimum

gemacht werden. Durch Differenzieren findet man

$$\frac{dl}{ds} = 1 - \frac{i_0^2}{s^2} = 0 \quad \text{oder} \quad s = i_0.$$

Da ferner

$$\frac{d^2l}{ds^2} = 2 \frac{i_0^2}{s^3},$$

also positiv ist, hat man für $s = i_0$ in der Tat ein Minimum, und zwar $l_{\min} = 2i_0$. Man erkennt zugleich, daß die Schwingungsdauer für alle untereinander parallelen Achsen, die denselben Abstand vom Schwerpunkte haben, gleich groß ist. Der Kreis vom Halbmesser i_0 um den Schwerpunkt enthält alle Aufhängepunkte, um die der Körper seine schnellsten Schwingungen ausführen kann. Je weiter sich der Aufhängepunkt nach außen oder nach innen von diesem Kreisumfang entfernt, um so langsamer werden die Schwingungen. Wenn der Aufhängepunkt unendlich nahe dem Schwerpunkte liegt, dauern die Schwingungen unendlich lange und dasselbe gilt auch, wenn der Aufhängepunkt in einen Abstand vom Schwerpunkte rückt, der als unendlich groß angesehen werden kann.

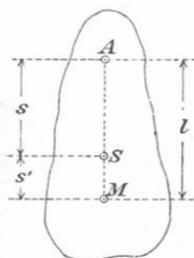


Abb. 55.

16. Aufgabe. Man soll beweisen, daß der Aufhängepunkt und der Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels miteinander vertauscht werden können.

Lösung. In Abb. 55 sei A der Aufhängepunkt, S der Schwerpunkt und M der Schwingungsmittelpunkt. Dann ist nach der Definition des Schwingungsmittelpunktes $AM = l$ und

daher nach den schon in der vorhergehenden Aufgabe benutzten Formeln

$$l = s + \frac{i_0^2}{s},$$

woraus, wenn man den Abstand SM mit s' bezeichnet, folgt

$$s's = i_0^2.$$

Macht man nun M zum Aufhängepunkte, so tritt s' an Stelle von s und daher nach der vorausgehenden Gleichung, die auch im neuen Falle wieder erfüllt sein muß, zugleich s an Stelle von s' , d. h. A ist nun in der Tat der Schwingungsmittelpunkt.

Ein Pendel, das zwei Schnitten bei A und M besitzt, so daß die in der Aufgabe vorkommende Vertauschung von Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt sofort praktisch ausgeführt werden kann,

heißt ein Reversionspendel. Man benutzt es zur Ausführung absoluter Schweremessungen, d. h. zur Messung der Fallbeschleunigung g . Zu diesem Zwecke werden die Schneiden mit Hilfe von Stellschrauben so eingestellt, daß die Schwingungsdauer für beide Schneiden gleich groß wird. Dies läßt sich leicht sehr genau erreichen, da man nicht bloß eine, sondern eine große Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen zum Vergleiche benutzen kann. Dann muß der Schneidenabstand möglichst genau gemessen werden: er gibt die reduzierte Pendellänge an. Da die Schwingungsdauer, die dieser entspricht, ebenfalls aus der Beobachtung gegeben ist, kann mit Hilfe dieser Daten die Fallbeschleunigung g nach den Gleichungen (72) oder (73) berechnet werden.

17. Aufgabe. Für die Festigkeitsberechnung eines Glockenstuhls, der eine große Glocke stützt, muß man die Auflagerkräfte nach Größe und Richtung kennen, die von der Glocke bei ihren Schwingungen auf den Glockenstuhl übertragen werden. Man soll die Auflagerkraft für verschiedene Stellungen der Glocke auf ihrem Schwingungswege ermitteln.

Erste Lösung. Die Glocke bildet ein physisches Pendel von so großer Masse, daß im Vergleiche zu ihr der Klöppel vernachlässigt werden kann. Die Schwingungsweite der Glocke ist bei der Berechnung der Auflagerkraft so groß anzunehmen, als sie beim Läuten der Glocken überhaupt zu werden vermag. Jedenfalls sind also die Schwingungsaussschläge nicht als klein zu betrachten.

Verwendet man die in Abb. 22, S. 133 eingeschriebenen und in § 17 sonst noch gebrauchten Bezeichnungen, so hat man nach dem Satze von der lebendigen Kraft für die Winkelgeschwindigkeit u oder $\frac{d\varphi}{dt}$ die Gleichung

$$\frac{1}{2} \Theta u^2 = Qs (\cos \varphi - \cos \alpha); \quad \text{also } u = \sqrt{\frac{2 Qs (\cos \varphi - \cos \alpha)}{\Theta}}.$$

Daraus folgt durch Differentiieren oder auch unmittelbar durch Anwendung des Flächensatzes

$$\Theta \frac{du}{dt} = - Qs \sin \varphi.$$

Hiermit ist die Bewegung des Schwerpunktes genügend bekannt und nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes folgt daraus auch die geometrische Summe aller äußeren Kräfte an dem schwingenden Körper. Zerlegen wir diese geometrische Summe in eine radiale Komponente C und eine tangentielle Komponente T , so ist, wie schon aus Band I, § 14 d. 3. Aufl. bekannt ist,

$$C = \frac{Q}{g} u^2 s = \frac{Q^2 s^2}{g \Theta} 2 (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

$$T = \frac{Q}{g} s \frac{du}{dt} = - \frac{Q^2 s^2}{g \Theta} \sin \varphi.$$

Das Minuszeichen bei T weist darauf hin, daß T entgegengesetzt der Richtung geht, in der φ wächst, also nach der Mittellage zu gerichtet ist; C ist die Zentripetalkraft, also vom Schwerpunkte nach dem Auflagerpunkte hin gerichtet.

Die geometrische Summe aller Kräfte, die wir durch die Komponenten C und T dargestellt haben, besteht aus dem Auflagerdrucke und dem Gewichte Q . Um die Auflagerkraft zu finden, brauchen wir daher von C und T nur die in den gleichen Richtungen genommenen Komponenten von Q zu subtrahieren, natürlich unter Beachtung der Vorzeichen. Man findet daher für die Komponenten C' und T' der Auflagerkraft

$$C' = C + Q \cos \varphi = \frac{Q^2 s^2}{g \Theta} 2 (\cos \varphi - \cos \alpha) + Q \cos \varphi,$$

$$T' = T + Q \sin \varphi = \left(- \frac{Q^2 s^2}{g \Theta} + Q \right) \sin \varphi.$$

Die Pfeile von C' und T' folgen in derselben Weise wie bei C und T , also C' mit dem Pfeile nach oben hin, während T' bei positivem Vorzeichen im Sinne des wachsenden Winkels φ gehen würde, tatsächlich aber, da T' negativ herauskommt, im entgegengesetzten Sinne geht.

Auf Grund dieser Formeln kann man für eine Reihe von Stellungen der Glocke die Auflagerkraft nach Größe und Richtung sofort angeben, indem man die geometrische Summe aus C' und T' bildet. Das Ergebnis wird man in geeigneter Weise graphisch darstellen, womit die Unterlage für die Festigkeitsberechnung des Stabverbandes, aus dem der Glockenstuhl etwa hergestellt werden soll, gewonnen ist.

Zweite Lösung. Noch schneller kann man die Aufgabe mit Hilfe der in § 38 besprochenen Massenreduktion lösen. Eigentlich ist nämlich die Lösung in den auf Gl. (171) S. 258 folgenden Bemerkungen schon enthalten. Der ganze Auflagerdruck läßt sich danach aus zwei Teilen zusammensetzen, die von den dort mit m_1 und m_2 bezeichneten Massen herrühren. Hiervon bringt m_1 einen in jeder Lage der Glocke gleichen und nach oben hin gerichteten Auflagerdruck hervor, der gleich dem Gewichte $m_1 g$ ist, während m_2 einen mit φ veränderlichen Auflagerdruck zur Folge hat, der mit dem eines Fadenpendels vom Gewichte $m_2 g$ und der Pendellänge $a_1 + a_2$ (nach den Bezeichnungen in § 38) übereinstimmt. Dieser kann aber aus der Lösung der 8. Aufgabe, S. 115 unmittelbar ent-

nommen werden. Hierauf bleibt nur noch übrig, die geometrische Summe aus den von m_1 und m_2 herrührenden Teilen zu bilden.

Es mag noch bemerkt werden, daß sich auch die beiden vorhergehenden Aufgaben auf Grund von § 38 in sehr einfacher Weise lösen lassen.

18. Aufgabe. Ein Pendel (Abb. 56), das im Punkte A drehbar aufgehängt ist, besteht aus einer Stange, deren Masse und Gewicht zu vernachlässigen ist und zwei auf ihr befestigten Kugeln von je 100 kg Gewicht, die als materielle Punkte angesehen werden sollen. Wie groß ist die reduzierte Pendellänge bei den in der Abbildung angegebenen Maßen? Wie groß ist das Biegemoment das von der Stange aufgenommen werden muß, wenn das Pendel Schwingungen mit Ausschlägen von $\alpha = 30^\circ$ macht, und an welcher Stelle der Stange tritt das größte Biegemoment ein?

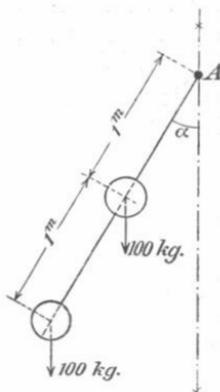


Abb. 56.

Lösung. Das auf die Aufhängeachse bezogene Trägheitsmoment Θ des Pendels ist

$$\Theta = \frac{100 \text{ kg}}{g} (1 + 4) \text{ m}^2,$$

das ganze Gewicht $Q = 200 \text{ kg}$ und der Abstand s des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte gleich $1,5 \text{ m}$. Setzt man diese Werte in Gl. (97) ein, so erhält man für die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{5}{3} \text{ m}.$$

Die Biegebbeanspruchung der Stange wird von den in § 17 mit H' bezeichneten tangentialen Komponenten der Trägheitskräfte in Verbindung mit den ebenfalls in tangentialer Richtung genommenen Komponenten der Gewichte hervorgerufen. Aus der Betrachtung in § 17 entnehmen wir, daß die H' proportional mit den Abständen von der Aufhängeachse sind. Wird also in irgendeiner Stellung des Pendels das an der oberen Masse anzubringende H' mit X bezeichnet, so ist das zur gleichen Zeit an der unteren Masse anzubringende H' gleich $2X$. Die Größe von X folgt hierauf aus der Bedingung, daß die Trägheitskräfte mit den äußeren Kräften im Gleichgewichte stehen. Eine Momentengleichung in bezug auf A als Momentenpunkt liefert uns daher

$$X \cdot 1 \text{ m} + 2X \cdot 2 \text{ m} = (100 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} + 100 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m}) \sin \alpha,$$

woraus

$$X = 60 \text{ kg} \cdot \sin \alpha$$

folgt. Daraus läßt sich schon erkennen, daß die Biegungsbeanspruchung am größten wird, wenn α seinen größten Wert annimmt, also am Ende des Ausschlags. Für $\alpha = 30^\circ$ wird $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ und $X = 30 \text{ kg}$. Zerlegen wir ferner jedes Gewicht Q in eine radiale und eine tangentielle Komponente, so folgt für die tangentielle Komponente, die für die Biegung der Stange allein in Betracht kommt, $100 \text{ kg} \sin \alpha$ oder 50 kg . Vereinigt man nun an jedem Angriffspunkte die senkrecht zur Stange gerichteten Kräfte zu einer Resultierenden, so kommt man auf den in Abb. 57 dargestellten Belastungsfall. Bei der unteren Masse überwiegt nämlich die Kraft H' von 60 kg gegenüber der Gewichtskomponente von 50 kg , während bei der Masse in der Stangenmitte die Gewichtskomponente die Komponente H' der Trägheitskraft um 20 kg übertrifft.* Die Komponente des Auflagerdrucks bei A , ebenfalls in der Richtung senkrecht zur Stange genommen, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen den Kräften sofort zu 10 kg , wie in der Abbildung angegeben.

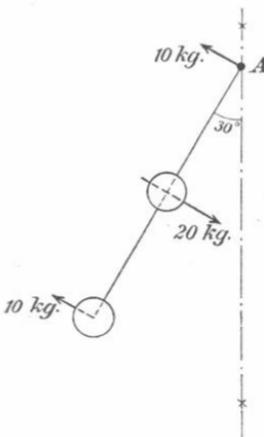


Abb. 57.

Die Festigkeitsberechnung kann hierauf am ruhenden Stabe weiter geführt werden. Die Momentenfläche der Biegemomente bildet offenbar ein Dreieck und für das in der Stabmitte auftretende Biegemoment erhält man $M_{\max} = 10 \text{ mkg}$.

19. Aufgabe. An den beiden Enden eines Seils, das über eine Rolle läuft, hängen zwei gleich schwere Personen, die vorher ruhten. Eine klettert an dem Seile in die Höhe; was geschieht, wenn Reibung, Seilsteifigkeit usw. außer acht gelassen werden?

Lösung. Am einfachsten behandelt man die Aufgabe mit Hilfe des Flächensatzes. Den Momentenpunkt lege man auf den Rollenmittelpunkt. Dann verschwinden die Momente aller Kräfte, die von außen her auf den aus der Rolle, dem Seile und den beiden Personen gebildeten Punkthaufen einwirken. Der Auflagerdruck geht nämlich durch den Momentenpunkt und die Gewichte der beiden Personen haben Momente von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung. Nach dem Flächensatze muß dann auch das Moment der Bewegungsgrößen konstant, und zwar, da es von Anfang an Null war, auch ferner gleich Null bleiben. Vernachlässigt man die Massen der Rolle und

des Seils gegenüber jenen der beiden Personen, so müssen die Bewegungsgrößen, die diese erlangen, von gleicher Größe sein, da auch die Hebelarme (gleich dem Rollenhalbmesser) gleich groß sind. Das entgegengesetzte Vorzeichen des Moments verlangt, daß die Geschwindigkeiten beider Personen nach oben hin gerichtet sind. Wenn also der eine hinaufklettert, senkt sich zugleich das Seil unter ihm, so daß er in Wirklichkeit nur halb so hoch hinaufkommt, als er an dem Seile in die Höhe kletterte. Der andere dagegen, der sich gar nicht rührt, wird hierbei ebenfalls mit in die Höhe genommen, und zwar so, daß beide stets gleich hoch bleiben. — Natürlich ändern sich diese Ergebnisse etwas ab, wenn man die Massen der Rolle und des Seils oder auch Reibung und Seilsteifigkeit mit in Berücksichtigung zieht.

20. Aufgabe. Ein homogener Zylinder rotiert mit gegebener Winkelgeschwindigkeit u um seine Achse; man soll den Drall für diese Achse berechnen.

Lösung. Die Achse ist eine Hauptträgheitsachse, der Drall für einen auf dieser Achse gelegenen Momentenpunkt fällt daher in die Richtung der Achse. Nach Gl. (123) ist

$$B' = u \Theta.$$

Das Trägheitsmoment des Zylinders für diese Achse ist gleich dem polaren Trägheitsmomente eines Querschnittskreises, über den die ganze Masse des Zylinders gleichmäßig ausgebreitet gedacht wird. Der Trägheitsradius kann daher nach Band III, S. 108 d. 3. Aufl. gleich $\frac{a}{2} \sqrt{2}$ gesetzt werden, wenn der Zylinderhalbmesser mit a bezeichnet wird. Wenn das Gewicht des Zylinders gleich Q ist, hat man daher

$$B' = \frac{u Q a^2}{2g}.$$

21. Aufgabe. Für einen homogenen Kreis-
kegel von der Höhe h und dem Basishalbmesser a sollen die Trägheitsmomente für die Schwerpunkthauptachsen berechnet werden. Ferner soll angegeben werden, bei welchem Verhältnisse zwischen h und a das auf die Kegelspitze bezogene Trägheitsellipsoid in eine Kugel übergeht.

Lösung. Am einfachsten läßt sich das Trägheitsmoment Θ_1 für die Kegelachse berechnen. Man denke sich den Kegel durch

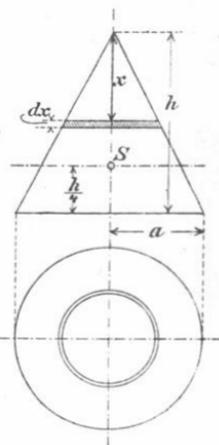


Abb. 58.

Querschnitte in Schichten von der unendlich kleinen Höhe dx geteilt. Jede Schicht kann als eine kreisförmige Scheibe vom Halbmesser $a \frac{x}{h}$ angesehen werden. Das Volumen der Schicht ist $\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} dx$ und ihr Beitrag zu Θ_1 daher

$$\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} \mu dx \cdot \frac{1}{2} a^2 \frac{x^2}{h^2},$$

wenn μ die spezifische Masse bedeutet. Im ganzen wird daher

$$\Theta_1 = \pi \mu \frac{a^4}{2h^4} \int_0^h x^4 dx = \pi \mu \frac{a^4 h}{10} = M \frac{3a^2}{10},$$

worin für die Gesamtmasse des Kegels M gesetzt ist. Der zugehörige Trägheitshalbmesser ist $a \sqrt{0,3} = 0,548 a$.

Der Schwerpunkt des Kegels liegt in der Höhe $\frac{h}{4}$. Für eine senkrecht zur Kegelschwerachse durch ihn gelegte Achse sei das Trägheitsmoment mit Θ_2 bezeichnet. Der Beitrag, den die Scheibe zu Θ_2 liefert, ist gleich dem Trägheitsmomente der Scheibe für eine durch deren Schwerpunkt parallel zu jener gelegte Achse, vermehrt um das Produkt aus der Masse der Scheibe und dem Quadrate des Abstandes $\frac{3h}{4} - x$ zwischen Kegelschwerpunkt und Scheibenschwerpunkt. Dies folgt nämlich aus dem in Band III, Gl. (51) d. 3. Aufl. bewiesenen Satze, der sich auf den vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen läßt. Hiernach ist der Beitrag der Scheibe zu Θ_2 gleich

$$\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} \mu dx \left(\frac{1}{4} a^2 \frac{x^2}{h^2} + \left(\frac{3h}{4} - x \right)^2 \right)$$

und im ganzen erhält man

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \pi \mu \frac{a^4}{4h^4} \int_0^h x^4 dx + \frac{\pi a^2 \mu}{h^2} \int_0^h x^2 \left(\frac{3h}{4} - x \right)^2 dx \\ &= \pi \mu \frac{a^4 h}{20} + \pi \mu \frac{a^2 h^3}{80} = \frac{3M}{20} \left(a^2 + \frac{h^2}{4} \right). \end{aligned}$$

Der zugehörige Trägheitsradius ist daher gleich

$$\sqrt{\frac{12a^2 + 3h^2}{80}}.$$

Für die Kegelspitze seien die Trägheitsmomente mit Θ'_1 und Θ'_2 bezeichnet. Dann ist $\Theta'_1 = \Theta_1$ und

$$\Theta'_2 = \Theta_2 + M \cdot \frac{9h^2}{16}.$$

Wenn nun $\Theta'_1 = \Theta'_2$ werden soll, so muß sein

$$M \frac{3a^2}{10} = \frac{3M}{20} \left(a^2 + \frac{h^2}{4} \right) + M \frac{9h^2}{16}$$

und hieraus folgt $a = 2h$. Die Höhe des Kegels darf also nur $\frac{1}{4}$ vom Durchmesser des Basiskreises betragen. — Ein Spielkreisel von dieser Form wäre hiernach ein Kugelkreisel. Gewöhnlich sind die Spielkreisel freilich höher; das zur Spitze gehörige Trägheitsellipsoid ist dann ein verlängertes Rotationsellipsoid.

22. Aufgabe. Auf zwei konaxialen Wellen sitzen zwei Umdrehungskörper von den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2 . Die eine Welle rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit u , während die andere ruht. Dann wird durch eine einrückbare Kuppelung die zweite Welle mit der ersten verbunden; man soll die Winkelgeschwindigkeit u' berechnen, mit der beide Wellen zusammen weiter rotieren, wenn keine äußeren Kräfte einwirken.

Lösung. Nach dem Flächensatze bleibt der Drall konstant. Man hat daher

$$u\Theta_1 = u'(\Theta_1 + \Theta_2) \quad \text{und hieraus} \quad u' = u \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

Anmerkung. Bei dieser Aufgabe ist wohl darauf zu achten, daß die lebendige Kraft nicht konstant bleibt, sondern kleiner wird. Der Verlust an mechanischer Energie wird durch die beim Stoß oder von den Reibungen (wenn es sich um eine Reibungskuppelung handelt) entwickelte Wärme aufgewogen.

Für einen veränderlichen Punkthaufen, an dem keine äußeren Kräfte angreifen, ist überhaupt die lebendige Kraft im allgemeinen nicht konstant, der Drall dagegen immer.

23. Aufgabe. Eine gewichtslose Stange SS (Abb. 59) trägt zwei gleich schwere Körper Q und Q' und rotiert um die Achse AA . Plötzlich werden (durch Auslösen einer Feder o. dgl.) die Gewichte auseinandergezogen, so daß ihr Abstand von 40 auf 60 cm wächst. Wieviel Touren macht die Stange nachher, wenn sie vorher 60 in der Minute machte?

Lösung. Auch hier muß der Drall konstant bleiben. Wenn

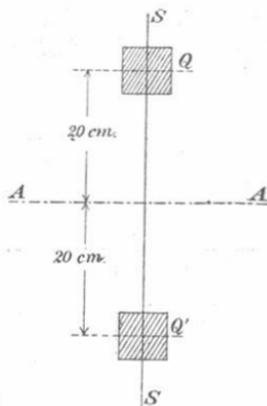


Abb. 59.

die beiden Gewichte wie materielle Punkte behandelt werden können, die sich im Abstände r von der Achse befinden, so ist das Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{2Q}{g} r^2$$

und der Drall

$$B = \frac{2Q}{g} r^2 u.$$

Dieser muß vorher und nachher gleich sein; also wenn man die Werte von r und u nachher mit r_1 und u_1 bezeichnet

$$r^2 u = r_1^2 u_1 \quad \text{oder} \quad \frac{u_1}{u} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man für die Tourenzahl N_1

$$N_1 = 60 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^2 = 26 \frac{2}{3}.$$

Anmerkung. Erscheinungen dieser Art (also Änderung der Winkelgeschwindigkeit infolge von Änderung des Abstandes von der Drehachse) kommen öfters vor. Wenn man z. B. Wasser durch einen Trichter ausströmen läßt und man hat das Wasser oben im Trichter (etwa durch eine seitlich gerichtete Einflußgeschwindigkeit) in eine geringe Rotation versetzt, so steigert sich diese im Ausströmungsrohr des Trichters erheblich, so daß starke Wirbel entstehen, die den Ausfluß beträchtlich verzögern können.

24. Aufgabe. Der Schwungring eines Schwungrads wiegt 3000 kg und hat 2 m Durchmesser. Die Ebene des Schwungrings sei wegen ungenauen Aufkeilens um einen Winkel von 1° gegen die zur Wellenmittellinie senkrechte Ebene geneigt. Wie groß ist das Moment des von den Lagern aufzunehmenden Kräftepaars, wenn die Welle 120 Touren macht?

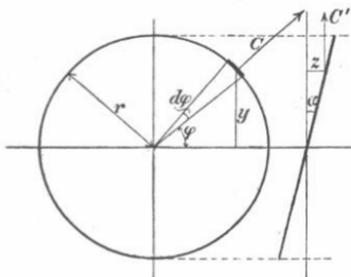


Abb. 60.

nach d'Alembert, weil sich die Trägheitskräfte auf bloße Zentrifugalkräfte reduzieren.

In Abb. 60 ist der Schwungring in zwei Projektionen gezeichnet.

Erste Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hilfe des Flächensatzes oder mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips behandeln. Einfacher und daher gewöhnlich gebraucht ist hier das Verfahren

Der im Zahlenbeispiele zu 1° angegebene Winkel ist in der Abbildung mit α bezeichnet. Da er jedenfalls klein sein wird (kleiner als dort gezeichnet), kann die andere Projektion des Schwungrings genau genug als kreisförmig angesehen werden. Man fasse ein Element des Schwungrings ins Auge, das zum Zentriwinkel $d\varphi$ gehört. Wenn Q das Gewicht des ganzen Schwungrings ist, gehört zu $d\varphi$ das Gewicht

$$\frac{Q d\varphi}{2\pi}.$$

Für die mit y und z bezeichneten Abstände erhält man

$$y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = y\alpha = r\alpha \sin \varphi,$$

wobei an Stelle von $\tan \alpha$ der Bogen α gesetzt werden durfte.

Die Zentrifugalkraft C an dem zu $d\varphi$ gehörigen Teilchen ist

$$C = \frac{Q d\varphi}{2\pi} \cdot \frac{u^2 r}{g}.$$

Die Horizontalkomponenten aller C stehen im Gleichgewichte miteinander. Dagegen bilden die Vertikalkomponenten C' ein Kräftepaar, dessen Moment mit K bezeichnet sei. Man hat

$$C' = C \sin \varphi = \frac{Q u^2 r}{2\pi g} \sin \varphi d\varphi.$$

Der Hebelarm von C' in bezug auf die Radmitte ist z und daher wird

$$K = \frac{Q u^2 r^2 \alpha}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{Q u^2 r^2 \alpha}{2g}.$$

Wenn man die lebendige Kraft des Schwungrings, die man ohnehin schon berechnet haben wird, ehe man an eine solche Untersuchung herantritt, mit L bezeichnet, hat man kürzer

$$K = L\alpha.$$

Im Zahlenbeispiele ist $Q = 3000$ kg, $u = \frac{120}{60} \cdot 2\pi = 4\pi$ sec $^{-1}$,

$r = 1$ m und $\alpha = \frac{\pi}{180}$ und nach Einsetzen und Ausrechnen erhält man

$$K = 421 \text{ mkg.}$$

Dieses Moment muß von den Lagern aufgenommen werden; die Division mit dem Abstände der Lager voneinander liefert die Einzelkraft für jedes Lager. Zu beachten ist, daß die Richtung des Moments und der Einzelkräfte ebenfalls stetig mit dem Schwungrade herumrotiert; hierdurch kommt das „Rütteln“ in den Lagern zustande. Zugleich gibt K das Biegemoment an, das von der Welle auf-

genommen werden muß; in bezug auf die Welle ändert sich übrigens die Richtung von K nicht. Wenn die Welle hinreichend biegsam ist, richtet sich das Schwungrad von selbst auf, so daß der Winkel α und hiermit auch K selbst kleiner werden.

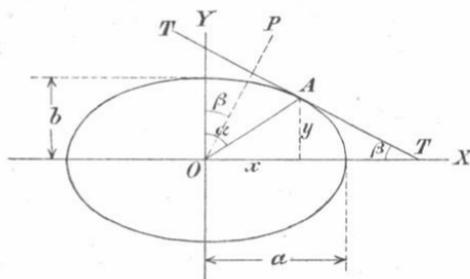


Abb. 61.

sei α , der Winkel, den das Perpendikel OP auf die im Punkte A konstruierte Tangente TT' mit der gleichen Achse bildet, sei β . Dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$$

und

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

wofür auch, wenn α und β klein genug sind, kürzer

$$\beta = \frac{b^2}{a^2} \alpha$$

geschrieben werden kann.

In diesem Falle kann ferner $B = u \Theta$ gesetzt werden. Der Winkel $\alpha - \beta$ gibt den Richtungsunterschied zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{u} an. Unter der Ellipse in Abb. 61 ist hierbei der Meridian des Trägheitsellipsoids des Schwungrings zu verstehen. Der Drall \mathfrak{B} beschreibt bei der Drehung des Schwungrads eine Kegelfläche mit dem angegebenen Öffnungswinkel. Um den absoluten Betrag von $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ zu berechnen, beachte man, daß das zu dt gehörige $d\mathfrak{B}$ ein Bogenelement vom Basiskreise jenes Kegels ausmacht und daher (bei kleinem $\alpha - \beta$) gleich $B(\alpha - \beta)u dt$ gesetzt werden kann. Für das statische Moment der Zwangskräfte erhält man daher

$$K = B(\alpha - \beta)u = u^2 \Theta(\alpha - \beta) = u^2 \Theta \alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Diese Formel gilt noch allgemein für irgendeinen Rotationskörper. Für den Schwungrad ist aber überdies (vgl. § 29) $a^2 = 2b^2$ und daher,

wie vorher

$$K = \frac{1}{2} u^2 \Theta \alpha = L \alpha.$$

25. Aufgabe. An einem Ringe von 300 kg Gewicht und 120 cm Durchmesser, der in Abb. 62 in Aufriß und Grundriß dargestellt ist und der vorher in Ruhe war, wirkt $\frac{1}{100}$ sec lang das Kräftepaar $P_1 P_2$,

von dem jede Kraft gleich 1000 kg ist. Man soll ermitteln, um welche Achse der Ring in Drehung versetzt wird und wie groß die Winkelgeschwindigkeit ist, die er nach Ablauf der genannten Zeit erlangt hat, wenn der Winkel, den die Ebene des Kräftepaars mit der Ringebene bildet, gleich 45° ist. Der Ring ist vollständig frei und andere Kräfte als P_1 und P_2 wirken nicht auf ihn ein.

Erste Lösung. Man zerlege den Momentenvektor des Kräftepaars in zwei Komponenten K_1 und K_2 in der Richtung der Figurenachse und in der Ringebene. Die Komponenten fallen in die Richtungen von freien Achsen und bringen um diese Drehungen hervor, deren Winkelgeschwindigkeiten u_1 und u_2 nach Ablauf des Drehstoßes

$$u_1 = \frac{K_1 t}{\Theta_1} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{K_2 t}{\Theta_2}$$

sind, wenn t die Stoßdauer und $\Theta_1 \Theta_2$ die zu den betreffenden Achsen gehörigen Trägheitsmomente bedeuten. Für diese hat man, wenn m die Ringmasse und r den Halbmesser bezeichnen

$$\Theta_1 = m r^2; \quad \Theta_2 = \frac{1}{2} m r^2$$

und für die Komponenten $K_1 K_2$ findet man

$$K_1 = K_2 = \frac{2 P r}{\sqrt{2}}.$$

Der Winkel α , den die resultierende Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} mit der Figurenachse einschließt, folgt aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_2}{u_1} = 2 \quad \text{zu} \quad \alpha = 63^\circ 25'.$$

Die Größe u von \mathbf{u} folgt nach dem pythagoreischen Lehrsatz zu

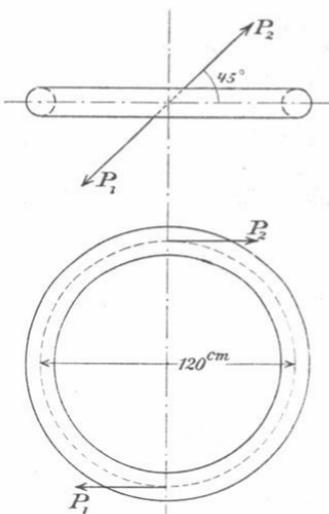


Abb. 62.

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{Pt}{mr} \sqrt{2 + 8}$$

$$= \frac{1000 \text{ kg} \cdot \frac{1}{100} \text{ sec} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{300 \text{ kg} \cdot 0,6 \text{ m}} \sqrt{10} = 1,71 \text{ sec}^{-1}.$$

Zweite Lösung. Der Drall \mathfrak{B} ist mit dem Momentenvektor \mathfrak{K} gleich gerichtet, bildet also einen Winkel von 45° mit der Figuren-achse. Daraus kann mit Hilfe des Trägheitsellipsoids in derselben Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe die Richtung von \mathfrak{u} entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung ermittelt werden. Wählt man die Zeichnung, so folgt weiter die Größe B von \mathfrak{B} zu $1000 \text{ kg} \cdot 1,2 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ sec} = 12 \text{ mkg sec}$. Die Projektion B' von \mathfrak{B} auf \mathfrak{u} ist $B' = 12 \text{ mkg sec} \cos(63^\circ 25' - 45^\circ)$ und hieraus

$$u = \frac{B'}{\Theta}.$$

Dabei ist Θ das auf die Drehachse \mathfrak{u} bezogene Trägheitsmoment, das

$$\Theta = \frac{mr^2 a^2}{c^2}$$

gesetzt werden kann, wenn unter a und c die aus der Zeichnung zu entnehmenden Halbmesser des Trägheitsellipsoids verstanden werden, die zur Figuren-achse und zu der vorher schon ermittelten Richtung von \mathfrak{u} gehören. Die Ausrechnung liefert u ; erheblich kürzer ist aber hier, wie man sieht, die zuerst angegebene Lösung.

26. Aufgabe. Zwei gleich schwere Kugeln sind durch eine Stange verbunden; man soll die freien Achsen des dadurch gebildeten Körpers angeben.

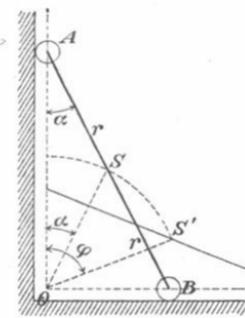


Abb. 63.

Lösung. Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt ist ein verlängertes Umdrehungs-ellipsoid, dessen große Achse mit der Stangen-achse zusammenfällt. Die Stangen-achse und jede senkrecht zu ihr durch den Schwerpunkt gezogene Achse ist eine freie Achse des Körpers. Eine stabile Drehachse ist aber nur die Stangen-achse, da nur für sie das Trägheitsmoment zu einem absoluten Minimum (oder Maximum) wird.

27. Aufgabe. Eine homogene Stange von der Länge $2r$ ist an den Enden mit Rollen versehen, mit denen sie auf einer glatten senkrechten Wand und einem glatten Fußboden ruht. Außerdem soll durch eine geeignete Vorrichtung auch dafür gesorgt sein, daß sich die Rollen

von der Wand oder dem Fußboden nicht abheben können. Vorher war die Stange in der durch Abb. 63 angegebenen Lage AB festgehalten. Dann wird sie ohne Stoß freigelassen und man soll berechnen, wie lange es dauert, bis sie unten liegt.

Lösung. Die Entfernung von O bis zum Stangenschwerpunkt S ist nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks gleich r , daher beschreibt S während des Herabfallens einen Kreis um O vom Halbmesser r . Irgendeine spätere Lage der Stange sei durch den Winkel φ gekennzeichnet, den die Stange mit der Wand oder den auch die Linie OS' mit der Wand bildet. Die Stange hat sich währenddessen um den Winkel $\varphi - \alpha$ gedreht. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sie sich im gegebenen Augenblicke dreht, ist

$$u = \frac{d\varphi}{dt}$$

und die Geschwindigkeit des Schwerpunkts hat den Absolutbetrag

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die lebendige Kraft der Stange, deren Masse mit m bezeichnet sei, ist daher

$$L = \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Für das Trägheitsmoment Θ findet man leicht

$$\Theta = m \frac{r^2}{3}$$

und daher wird

$$L = \frac{2}{3} m r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Der lebendigen Kraft L muß die Arbeit der äußeren Kräfte gleich sein. Die Auflagerkräfte leisten aber keine Arbeit, da Reibungen ausgeschlossen sein sollen und die Arbeit des Gewichts ist gleich mg mal der Senkung des Schwerpunkts, die gleich $r(\cos \alpha - \cos \varphi)$ gesetzt werden kann. Wir haben daher

$$\frac{2}{3} r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = g (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Hieraus findet man

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2r}{3g} \cdot \frac{1}{\cos \alpha - \cos \varphi}}$$

und durch Integration nach φ folgt die Zeit, die zum Durchlaufen des Weges gebraucht wird. Ist t die Zeit, die bis zum Ende der Bewegung,

d. h. bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verstreicht, so hat man

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \varphi}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches, das ganz ähnlich wie das bei der Pendelbewegung in Gl. (67) vorkommende weiter behandelt werden kann. Man setze, um auf die frühere Form zu kommen, zunächst $\pi - \varphi = 2\chi$ und $\pi - \alpha = 2\beta$, dann wird

$$\cos \varphi = -\cos 2\chi = 2\sin^2\chi - 1; \quad \cos \alpha = 2\sin^2\beta - 1; \quad d\varphi = -2d\chi;$$

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} \frac{2d\chi}{\sqrt{2(\sin^2\beta - \sin^2\chi)}}.$$

Der einzige wesentliche Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht nur darin, daß die untere Grenze hier $\frac{\pi}{4}$ anstatt Null ist.

Man kann aber das Integral als die Differenz von zwei bestimmten Integralen auffassen, von denen das eine von 0 bis β und das andere von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ reicht und auf jedes von beiden die frühere Umformung anwenden. Dadurch erhält man

$$t = 2 \sqrt{\frac{r}{3g}} \left\{ F\left(\sin \beta, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sin \beta, \gamma\right) \right\},$$

wobei γ durch die Bedingung bestimmt wird

$$\sin \gamma = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \beta}.$$

Da $\beta > \frac{\pi}{4}$, läßt sich γ stets angeben.

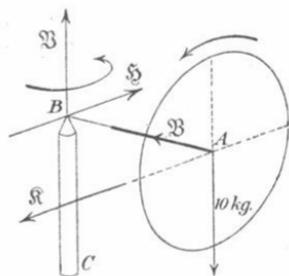


Abb. 64.

28. Aufgabe. Ein Gyroskop besteht aus einem Schwungring von 20 cm Durchmesser und 10 kg Gewicht und einem Rahmen (dessen Masse gegen die Schwungringmasse vernachlässigt werden soll), in dem der Schwungring mit 100 Umdrehungen in der Sekunde rotiert. Der Rahmen hat einen Arm (Abb. 64) von 20 cm Länge und wird bei B drehbar auf eine Spitze des Gestells BC aufgesetzt. In welchem Sinne und mit

welcher Geschwindigkeit dreht sich das Gyroskop um das Gestell BC , nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist?

Lösung. Wir haben es hier mit einem Falle der pseudoregulären Präzession zu tun. Wenn der Rahmen zuerst bei horizontaler Stellung des Armes AB ruhte und hierauf losgelassen wird, tritt infolge des Gewichts zunächst eine kleine Senkung des Schwungrings ein. Diese muß wegen der Auflagerbedingung bei B in einer Drehung um B bestehen. Dabei ändert sich die Richtung des Dralls \mathfrak{B} . Um diese Änderung zu erzwingen, muß ein statisches Moment äußerer Kräfte von senkrecht nach oben gerichtetem Momentenvektor in bezug auf den Schwerpunkt des Schwungrings vorhanden sein. Es muß daher eine horizontale Auflagerkomponente \mathfrak{H} bei B entstehen, die dieses Moment liefert. Die Kraft \mathfrak{H} bewirkt nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts eine Drehung des Gyroskops um das Gestell, und zwar bei dem in der Abbildung angegebenen Umdrehungssinne des Schwungrings von oben gesehen entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung.

Um das Übergangsstadium wollen wir uns jetzt nicht weiter kümmern. Nachdem das Gyroskop eine Winkelgeschwindigkeit w um die lotrechte Achse des Gestells angenommen hat, ändert sich die Richtung von \mathfrak{B} abermals, und zwar um horizontal gerichtete Zuwüchse. Wir haben daher jetzt ein statisches Moment von horizontal, und zwar nach vorn gerichtetem Momentenvektor \mathfrak{R} , der in die Abbildung eingetragen ist. Diesem entspricht eine senkrecht nach oben gerichtete Auflagerkraft \mathfrak{S} bei B . Wenn \mathfrak{S} gleich dem Gewichte von 10 kg ist, bilden beide ein Kräftepaar miteinander und es besteht dann kein Anlaß mehr zu einer Senkung des Schwerpunkts. Der einzige Erfolg des Kräftepaars besteht vielmehr darin, den Drall \mathfrak{B} um die lotrechte Achse herum rotieren zu lassen. Außerdem muß dann auch ein in der Richtung BA gehender Auflagerdruck (Zentripetalkraft) auftreten, um den Schwerpunkt zu seiner kreisförmigen Bewegung um die Gestellachse zu zwingen. Dagegen verschwindet nachher \mathfrak{H} , sobald eine (von kleinen Schwankungen abgesehen) gleichförmige Drehung des Gyroskops um die Gestellachse hergestellt ist.

Streng genommen führt das Rad jetzt zwei Drehungen zugleich aus, eine im Rahmen mit der Winkelgeschwindigkeit u und die zweite mit dem Rahmen um die Gestellachse mit der Winkelgeschwindigkeit w . Beide lassen sich zu einer resultierenden Winkelgeschwindigkeit zusammensetzen. Da aber w nur sehr klein gegen u ist, wollen wir nur auf diese Komponente achten. Der Drall hat den Absolutwert

$$B = u\Theta = u \frac{Q}{r} r^2,$$

wenn Q das Gewicht des Schwungrings und r der Halbmesser ist. Der senkrecht zum Arme stehende Zuwachs von B , der sich geometrisch im Zeitelemente dt dazu summiert, hat den Absolutwert

$$Bwdt \quad \text{oder} \quad uw \frac{Q}{g} r^2 dt.$$

Dieser ist nach dem Flächensatze gleich Kdt , und da das Moment K gleich Ql ist, wenn l die Länge des Armes AB bezeichnet, erhalten wir die Gleichung

$$Ql = uw \frac{Q}{g} r^2, \quad \text{also} \quad w = \frac{lg}{ur^2}.$$

Mit $u = 100 \cdot 2\pi \text{ sec}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m sec}^{-2}$, $l = 0,2 \text{ m}$, $r = 0,1 \text{ m}$ wird

$$w = 0,31 \text{ sec}^{-1},$$

d. h. die Dauer eines Umlaufs beträgt $\frac{2\pi}{0,31}$ oder rund 20 Sekunden.

Der Umlaufssinn war schon vorher festgestellt. Wenn das Rad infolge von Reibungen usf. nachher langsamer rotiert, läuft das Gyroskop später im selben Verhältnisse schneller um. Auf das Gewicht Q kommt es übrigens, wie man sieht, gar nicht an; eine Zahlenangabe darüber wäre daher entbehrlich gewesen.

29. Aufgabe. Man soll die reduzierte Pendellänge berechnen, für die die Schwingungsdauer ebenso groß ausfällt, als für die Schwingungen eines Stabes, der beiderseits unterstützt ist und in der Mitte eine konzentrierte Last trägt, gegen die die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann.

Lösung. Die Schwingungen sind harmonische und nach Gl. (20) hat man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Der statische Biegunspfeil unter der Last $Q = mg$ sei mit f bezeichnet. Dann ist nach der Bedeutung der Konstanten c

$$cf = Q, \quad \text{also} \quad c = \frac{mg}{f}.$$

Setzt man dies ein, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Dies stimmt nach Gl. (64) mit der Schwingungsdauer eines Pendels überein, wenn $f = l$ gesetzt wird. Der statische Biegunspfeil f gibt daher ohne weiteres die reduzierte Pendellänge an. Da f gewöhnlich nur klein ist, erfolgen die Schwingungen verhältnismäßig schnell.

30. Aufgabe. Die Schwingungsdauer eines bifilar (d. h. mit Hilfe von zwei Fäden) und symmetrisch zur Mitte aufgehängten homogenen Stabes soll für kleine Ausschläge berechnet werden. Dabei ist nur auf die Drehschwingungen zu achten, die der Stab um den Schwerpunkt ausführt; gegeben sind die Stablänge l , die Entfernung e der Aufhängepunkte von der Stabmitte und die Fadenlänge a .

Lösung. Abb. 65 gibt Aufriß, Grundriß und Seitenansicht an; dabei ist die Lage, die der Stab zur Zeit t bei einem Ausschlage φ einnimmt, durch punktierte Striche angegeben. Die Fäden stehen dann ein wenig schräg und die Horizontalprojektion der Fadenlänge ist mit z bezeichnet. Wenn z klein von der ersten Ordnung ist, unterscheidet sich die Vertikalprojektion der Fadenlänge im Aufrisse nur um eine von der zweiten Ordnung kleine Größe von a . Es findet daher keine merkliche Hebung des Stabes statt; dieser schwingt vielmehr nahezu in einer horizontalen Ebene. Der Schwerpunkt bleibt also in Ruhe und die Vertikalkomponenten der Fadenspannungen müssen jederzeit zusammen gleich dem Gewichte Q des Stabes sein. Für die Horizontalkomponente H einer Fadenspannung erhält man daher

$$H = \frac{Q}{2} \cdot \frac{z}{a} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \sin \varphi}{a}.$$

Beide Horizontalkomponenten bilden ein Kräftepaar, das die Winkelbeschleunigung hervorbringt. Das Moment K des Kräftepaares ist

$$K = 2 e H = Q \frac{e^2 \sin \varphi}{a}.$$

Da die Schwingungen um eine freie Achse erfolgen, hat man (mit Berücksichtigung des Vorzeichens)

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{Q e^2 \sin \varphi}{a}.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie die Differentialgleichung (94) für die Pendelschwingungen; diese lautete

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - Q s \sin \varphi.$$

Beide stimmen überein, wenn man $s = \frac{e^2}{a}$ setzt. Für die reduzierte Pendel-

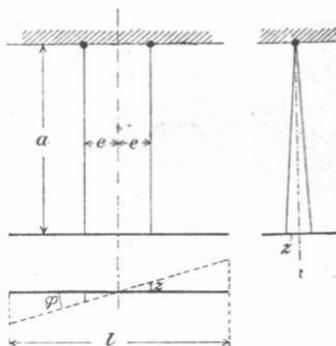


Abb. 65.

länge l_{red} hat man daher nach Gl. (97)

$$l_{\text{red}} = \frac{ai^2}{e^2},$$

oder, da der Trägheitsradius i einer Stange $i = \frac{l}{\sqrt{12}}$ ist,

$$l_{\text{red}} = \frac{al^2}{12e^2}.$$

Wenn die Stange so aufgehängt wird, daß $e = i$ wird, erhält man $l_{\text{red}} = a$, d. h. die Schwingungsdauer ist dann dieselbe, als wenn die Stange gewöhnliche Pendelschwingungen um die durch die beiden Aufhängepunkte gehende Achse ausführte.

Diese Betrachtung gilt indessen nur für den Fall kleiner Schwingungsausschläge. Um die Differentialgleichung der Bewegung für größere Schwingungen aufzustellen, muß man darauf achten, daß sich die Stange bei ihrer Drehung um den Winkel φ ein wenig aus ihrer untersten Lage hebt. Ihr Abstand von der durch die Aufhängepunkte gelegten horizontalen Ebene zur Zeit t sei mit x bezeichnet. Dann ist

$$x = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Nach dem Satze von der lebendigen Kraft erhält man

$$\frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = Q(x - x_0),$$

wenn mit x_0 der Wert von x bezeichnet wird, der der höchsten Lage der Stange oder dem größten Werte des Winkels φ entspricht. Setzt man hier x ein, so erhält man eine Gleichung, die sich nach $\frac{d\varphi}{dt}$ auflösen läßt. Entnimmt man daraus dt , so erhält man die Schwingungsdauer ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral nach φ . Die Gleichung vereinfacht sich erheblich und läßt sich so wie die des Pendels für große Ausschläge behandeln, wenn man annimmt, daß e klein ist gegenüber der Fadenlänge a . Von der weiteren Ausrechnung soll aber hier abgesehen werden.

31. Aufgabe, Man soll die Schwingungsdauer der „schlingern-den“ oder „rollenden“ Bewegungen eines Schiffes um die Längsachse für kleine Ausschläge berechnen.

Lösung. Hier ist an die Betrachtungen über das Metazentrum in Band I, § 66 d. 3. Aufl. anzuknüpfen. Die Höhe des Metazentrums über dem Schiffsschwerpunkte sei mit s bezeichnet. Dann bilden beim Ausschlage φ das Gewicht Q und der Auftrieb ein Kräftepaar vom Momente $Qs \sin \varphi$, und wenn das Trägheitsmoment des Schiffes für die parallel zur Kielrichtung durch den Schwerpunkt gehende

Achse mit Θ bezeichnet wird, hat man

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - Q s \sin \varphi.$$

Dies stimmt genau mit der Differentialgleichung (94) für die Pendelschwingungen überein. Hiernach kann die reduzierte Pendellänge und aus dieser die Schwingungsdauer ebenso wie dort berechnet werden. Da hier die Drehung um den Schwerpunkt stattfindet, bezieht sich jedoch Θ auf die Schwerpunktsachse, während sich beim Pendel Θ auf die Aufhängeachse bezog, worauf beim Vergleiche zu achten ist.

Auf den Widerstand, den das Wasser den Schwingungen entgegensetzt, ist bei dieser Betrachtung nicht geachtet. Jedenfalls wird dadurch eine Dämpfung hervorgerufen. Aber auch sonst wird der Verlauf der Bewegung dadurch etwas geändert werden; man kann namentlich nicht erwarten, daß der Schwerpunkt genau in Ruhe bleibe.

32. Aufgabe. Wenn auf einen seitlich aus einer Mauer hervorragenden Steinbalken (etwa eine Treppenstufe) ein Gewicht Q herabfällt (Abb. 66), kommt es vor, daß er jenseits der Aufschlagstelle (etwa bei mm) abbricht. Man soll in allgemeinen Zügen angeben, wie dieses Problem zu behandeln ist.

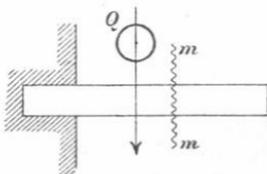


Abb. 66.

Lösung. Man denke sich in irgendeinem Augenblicke während des Stoßes die Trägheitskräfte eingeführt. Diese sind an jenen Teilen des Balkens, die nach abwärts beschleunigt werden, nach obenhin gerichtet. Auch rechts vom Schnitt mm treten diese Trägheitskräfte auf und sie bewirken ein Biegemoment in mm , das zu Zugspannungen in den unteren und zu Druckspannungen in den oberen Fasern führt. Es kann nun sein, daß die Aufschlagstelle und ihre Nachbarschaft schon keine Beschleunigung nach abwärts mehr erfährt, oder schon eine in der entgegengesetzten Richtung, während am freien Ende noch eine starke Beschleunigung nach abwärts besteht. Namentlich wenn am Ende noch größere Massen befestigt sind, kann die zugehörige Trägheitskraft zu einem Biegemomente führen, das an irgendeinem Querschnitte mm den Bruch hervorbringt.

Zur rechnerischen Verfolgung des Vorgangs muß man von der Differentialgleichung (172) ausgehen, die auch für den vorliegenden Fall ohne Änderung gültig bleibt. Sie ist für jeden der beiden Teile, in die der Stab durch die Aufschlagstelle von Q zerlegt wird, ge-

sondert mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu integrieren. In der französischen Übersetzung des Buches von Clebsch über die Theorie der Elastizität hat de Saint-Venant das Problem ausführlich behandelt.

Die bekannte Erfahrung, daß man eine Flintenkugel durch eine Fensterscheibe schießen kann, ohne diese in einiger Entfernung von dem Schußloche zu beschädigen, erklärt sich übrigens auf ganz ähnliche Art. In der Umgebung der Aufschlagstelle der Kugel treten sehr große Trägheitskräfte auf, die sich zunächst nur über einen engen Bezirk verteilen und mit dem Drucke zwischen Kugel und Scheibe vorerst im Gleichgewichte stehen. Die diesem Belastungsfalle entsprechende Beanspruchung des Glases steigert sich dann so, daß der Bruch erfolgt, der sich aber nur über diesen engen Bezirk erstrecken kann, weil überall außerhalb des Bezirks nur geringe Trägheitskräfte und Spannungen auftreten.

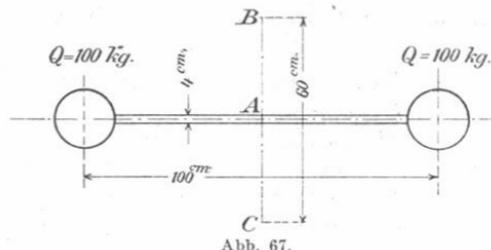


Abb. 67.

33. Aufgabe. Eine Stange von 1 m Länge und kreisförmigem Querschnitt von 4 cm Durchmesser (Abb. 67) trägt an beiden Enden Gewichte von je 100 kg. In der Mitte bei A ist die Stange an einem

Maschinenteile befestigt, der eine zwischen B und C geradlinig hin und her gehende Bewegung nach Art einer harmonischen Schwingung ausführt. Wieviel Schwingungen darf der Maschinenteil in der Minute machen, ohne daß die durch die Trägheitskräfte hervorgerufene Biegebeanspruchung der Stange $1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ übersteigt? Der Schwingungsweg BC beträgt 60 cm. Bei welcher Schwingungszahl in der Minute wäre eine Resonanz mit den Eigenschwingungen zu befürchten, die die Gewichte infolge der elastischen Verbiegung der Stange ausführen können, wenn der Elastizitätsmodul gleich $2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gesetzt wird?

Lösung. Die erste Frage läßt sich leicht nach dem Prinzip von d'Alembert beantworten. Die Entfernung x der Stange von der Mittellage zur Zeit t ist

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wenn mit a der Schwingungsausschlag AB und mit T die Dauer einer

vollen Schwingung bezeichnet wird. Daraus folgt die Beschleunigung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot x.$$

Die Beschleunigung und hiermit die Trägheitskraft und die Biegungsbeanspruchung der Stanze ist am größten an den Hubenden für $x = \pm a$. In dieser Stellung hat die Trägheitskraft den Wert

$$\frac{Q}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a.$$

Das Biegemoment für die Stangenmitte folgt daraus durch Multiplikation mit der halben Stangenlänge, die mit l bezeichnet werden soll und für die Biegungsspannung findet man daher

$$\sigma = \frac{\frac{Q}{g} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a l}{\frac{\pi r^3}{4}}.$$

Im Nenner steht das Widerstandsmoment des kreisförmigen Querschnitts vom Halbmesser r . In dieser Gleichung sind alle Größen gegeben bis auf die Schwingungsdauer T . Löst man die Gleichung nach T auf und setzt die Zahlenwerte ein, so erhält man

$$T = 0,98 \text{ sec}$$

entsprechend rund 61 vollen Schwingungen in der Minute.

Für die Schwingungsdauer der elastischen Schwingungen findet man ebenso wie bei der Lösung von Aufgabe 29

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}},$$

wenn mit f der Biegungspfeil bezeichnet wird, den eine Last $Q = 100 \text{ kg}$ am Stangenende hervorruft. Dafür hat man nach einer Formel des Festigkeitslehre (Band III, S. 162 d. 3. Aufl.)

$$f = \frac{Q l^3}{3 E \Theta} = \frac{4 Q l^3}{3 \pi E r^4}.$$

Führt man die Zahlenrechnung aus, so erhält man

$$T = 0,081 \text{ sec}.$$

Eine Resonanz ist daher überhaupt nicht zu erwarten, da die

Maschine hierzu 740 Schwingungen in der Minute ausführen müßte, während schon viel früher eine Verbiegung oder ein Bruch der Stange eintreten würde.

Etwas anderes ist es aber, wenn der Maschinenteil nicht genau, sondern nur angenähert harmonische Schwingungen ausführt, wie z. B. der Kreuzkopf eines Kurbelmechanismus. Dann ist x nach einer Fourierschen Reihe zu entwickeln und mit den höheren Gliedern dieser Reihe, die für sich genommen schnelleren Schwingungen entsprechen, ist eine Resonanz für bestimmte Umlaufgeschwindigkeiten der Maschine möglich.

Fünfter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

§ 45. Vorbemerkungen.

Vom Begriffe der Relativbewegung ist schon im ersten Bande wiederholt Gebrauch gemacht worden und ich kann hier als bekannt voraussetzen, was damals hierüber ermittelt wurde. Bei jenen früheren Gelegenheiten erstreckte sich indessen die Untersuchung immer nur auf den Fall, daß das Fahrzeug, von dem aus die Bewegung des materiellen Punktes oder des Körpers beobachtet werden sollte, nur eine Translationsbewegung und keine Drehung ausführte. Es macht sich daher jetzt noch eine Ergänzung erforderlich für den Fall, daß sich das Fahrzeug in ganz beliebiger Weise bewegt.

Zuvor sei aber noch auseinandergesetzt, zu welchem Zwecke und für welchen Gebrauch die hier vorzunehmenden Untersuchungen bestimmt sind. Bei den meisten Aufgaben der Dynamik hat man gar keine Veranlassung, Relativbewegungen ins Auge zu fassen; man löst sie am einfachsten, wenn man sich den Beobachter im festen Raume aufgestellt denkt: also in einem Raume, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist. Bei den vorausgehenden Untersuchungen dieses Bandes ist dies auch stets geschehen. In manchen Fällen vermag man aber entweder überhaupt nicht gut die Untersuchung der Bewegung von einem Fahrzeuge aus zu vermeiden oder man würde wenigstens, wenn die Vermeidung auch möglich wäre, auf erhebliche Vereinfachungen verzichten müssen, die durch die Hereinziehung der Relativbewegungen erzielt werden können.

Kaum zu vermeiden ist die Betrachtung der Relativbewegung bei solchen irdischen Bewegungsvorgängen, die von der Eigenbewegung des Erdballs gegen den festen Raum merk-

lich beeinflußt sind. Diese Fälle sind freilich selten; gewöhnlich braucht man auf die Eigenbewegung der Erde nicht zu achten, kann vielmehr das Trägheitsgesetz, wie es auch bisher stillschweigend schon immer geschehen ist, als gültig in bezug auf den von der Erde her ausgemessenen Raum betrachten. Dadurch wird man aber der Verpflichtung natürlich nicht enthoben, eine genauere Untersuchung anzustellen, um sich zu überzeugen, inwieweit die Vernachlässigung zulässig ist und um für jene Fälle, in denen sie nicht mehr zulässig ist, eine andere geeignete Untersuchungsmethode ausfindig zu machen.

So erwähnte ich z. B. schon früher einmal, daß ein Stein nicht genau in einer lotrechten geraden Linie zur Erde fällt, sondern daß sich wegen der Drehung der Erde gegen den festen Raum, in dem das Trägheitsgesetz gilt, eine Seitenablenkung einstellt, die freilich sehr gering und nur durch genaue Versuche nachweisbar ist. Freilich steht nichts im Wege, selbst in solchen Fällen den Beobachtungsposten im festen Raume zu wählen, von hier aus die absolute Bahn des fallenden Steins zu ermitteln und dann erst nachträglich unter Berücksichtigung der Eigenbewegung der Erde den „relativen“ oder „scheinbaren“ Weg des Steins gegen die Erde, für den wir uns interessieren, und der allein unmittelbar beobachtet werden kann, daraus abzuleiten. Ein solches Verfahren wäre aber sehr umständlich. Außerdem sind wir auch in der Mechanik der irdischen Bewegungsvorgänge so sehr darauf angewiesen, die Erde selbst als Aufstellungsort des Beobachters zu wählen, daß man auch in solchen Ausnahmefällen nicht darauf verzichten möchte. Die nachfolgenden Betrachtungen werden uns zeigen, wie man die früheren Untersuchungen nötigenfalls zu ergänzen hat, um den irdischen Standpunkt unter allen Umständen festhalten zu können.

Bei einer anderen Klasse von Problemen liegt zwar keine so dringende Nötigung vor, auf die Relativbewegungen einzugehen; man erleichtert die Untersuchung aber auch bei ihnen oft sehr erheblich, wenn man davon Gebrauch macht. Hierher

gehören namentlich die Flüssigkeitsbewegungen, die im Innern einer Zentrifugentrommel oder im Laufrade einer Turbine vor sich gehen. Die Eigenbewegung der Erde kommt hierbei übrigens nicht in Frage; man kann vielmehr ohne Bedenken die von der festen Erde her gesehenen Bewegungen dabei als absolute auffassen. Betrachtet man aber die Flüssigkeitsströmungen in der rotierenden Trommel als Relativbewegungen gegen das Gefäß, so führt man die Aufgabe auf Wasserbewegungen in ruhenden Gefäßen zurück, also auf einfachere Betrachtungen, die schon früher erledigt wurden. Auch hierüber, wie dies möglich ist, soll unsere Untersuchung Aufschluß geben.

Um die aufgezählten Aufgaben lösen zu können, müssen wir die Wege, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte im bewegten Raume mit jenen vergleichen, die vom absoluten Raume her festgestellt werden. Die Massen der bewegten Körper sind als Eigenschaften dieser Körper und daher in beiden Fällen als gleich anzusehen. Von den Kräften gilt dies aber nicht; wir müssen vielmehr von vornherein erwarten, daß an dem Körper, dessen Bewegung untersucht werden soll, noch andere Kräfte angebracht werden müssen, wenn die Bewegung auf ein bewegtes Fahrzeug, als wenn sie auf den festen Raum bezogen werden soll, für den das Trägheitsgesetz gilt. — Außer den schon aufgezählten werden auch noch andere dynamische Größen, wie Arbeiten, statische Momente, Antriebe, lebendige Kräfte usf. in Betracht zu ziehen sein; wir können aber von diesen einstweilen absehen, da sie aus den zuerst angeführten später leicht abgeleitet werden können.

§ 46. Der Satz von Coriolis.

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung eines materiellen Punktes in möglichst einfacher Weise geometrisch darstellen kann. Man betrachte zwei aufeinander folgende Zeitteilchen von der gleichen Dauer τ . Zu Anfang hatte der Punkt, dessen

absolute Bewegung betrachtet werden soll, den Abstand \mathfrak{s}_0 von einem festen Anfangspunkte In den beiden Zeiteilchen τ ändert sich der Abstand \mathfrak{s} um die Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$. Da \mathfrak{s} als eine Funktion der Zeit t zu betrachten ist, hat man nach der Taylorschen Entwicklung

$$d\mathfrak{s}_1 = \tau \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt} \right)_0 + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} \right)_0 + \dots$$

$$d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 = 2\tau \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt} \right)_0 + \frac{(2\tau)^2}{2} \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} \right)_0 + \dots$$

zu setzen. Die Differenz der Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ ist daher

$$d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1 = \tau^2 \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} \right)_0 + \dots$$

Die Glieder höherer Ordnung können weggelassen werden und für die Beschleunigung zur Zeit $t=0$ erhält man daher

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} \right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} = \frac{(d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2) - 2d\mathfrak{s}_1}{\tau^2}. \quad (206)$$

Nun sei BB_1B_2 in Abb. 68 der absolute Weg eines beweglichen Punktes B und BC_1C_2 der absolute Weg jenes Punktes des Fahrzeugs, mit dem B anfänglich zusammenfiel. Da die Strecken BB_1 usf. in der Grenze unendlich klein zu denken sind, schreiben wir dafür

$$BB_1 = d\mathfrak{s}_1; \quad B_1B_2 = d\mathfrak{s}_2; \quad BC_1 = d\mathfrak{p}_1; \quad C_1C_2 = d\mathfrak{p}_2.$$

Die Strecken C_1B_1 und C_2B_2 geben die relativen Wege von B gegen das Fahrzeug an, so wie sie vom festen Raume aus gesehen erscheinen. Man hat dafür

$$C_1B_1 = d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1; \quad C_2B_2 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2.$$

Die Geschwindigkeiten hängen von dem Wege im ersten Zeiteilchen allein ab. Bezeichnen wir C_1B_1 mit $d\mathfrak{r}_1$, so folgt aus der ersten dieser Gleichungen durch Division mit τ oder dt

$$\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{dt},$$

wofür auch allgemein

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \quad (207)$$

geschrieben werden kann, da es gleichgültig ist, von welchem Zeitpunkte ab wir die Wege $d\mathfrak{s}$ usf. verfolgen. In Worten heißt dies:

Die absolute Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist in jedem Augenblicke gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit gegen das Fahrzeug.

Die Relativbeschleunigung von B ist dagegen aus dem Vergleiche der Wege C_1B_1 und C_2B_2 nach der durch Gl. (206) gegebenen Anleitung zu berechnen. Dabei müssen wir aber beachten, daß der Beobachter, der diese Wege miteinander vergleicht, im Fahrzeuge selbst aufgestellt sein muß. Markiert dieser Beobachter die Punkte C_1 und B_1 nach dem ersten Zeitteilchen im Fahrzeuge, so führt die Strecke C_1B_1 des Fahrzeugs während des zweiten Zeitteilchens selbst noch eine Bewegung aus. Der Anfangspunkt C_1 gelangt dabei nach C_2 und zugleich führt die Strecke C_1B_1 noch eine Drehung um den Winkel $\mathfrak{u}\tau$ aus, wenn mit \mathfrak{u} die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs während dieser Zeit bezeichnet wird. Da nun C_2B_2 in Abb. 68 so gezeichnet ist, wie es der Lage nach Ablauf des zweiten Zeitteilchens entspricht, so müssen wir, um beide Strecken auch für den innen stehenden Beobachter, der sich nach dieser zweiten Lage orientiert, vergleichbar miteinander zu machen, an Stelle von C_1B_1 die Strecke

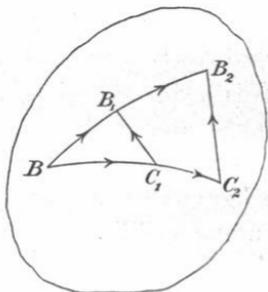


Abb. 68.

$$d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau V(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}$$

setzen. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke gibt den Weg an, den der Endpunkt von C_1B_1 bei der Drehung beschreibt.

Für die Relativbeschleunigung schreiben wir $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ und erhalten dafür nach Vorschrift von Gl. (206)

$$\tau^2 \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \right)_0 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2 - 2 \{ d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau V(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u} \}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_0 &= \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} - \frac{d\mathfrak{p}_2 - d\mathfrak{p}_1}{\tau^2} - 2\mathbf{V} \left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}\right) \mathbf{u} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\right)_0 - 2\mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (208)$$

wobei im letzten Gliede die Relativgeschwindigkeit $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ an Stelle der ihr gleichen Differenz $\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}$ eingeführt ist. Läßt man nachträglich die Zeiger o weg, die nur darauf hinweisen, daß sich alle Größen auf den Anfangspunkt der Zeit $t = 0$ beziehen sollen, der aber ganz nach Belieben gewählt werden kann, so läßt sich Gl. (208) auch in die anschaulichere Form

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{u} \quad (209)$$

bringen. Diese Gleichung spricht den Satz von Coriolis aus, der sich auch in die Worte fassen läßt:

Die absolute Beschleunigung des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeugbeschleunigung, aus der Relativbeschleunigung gegen das Fahrzeug und aus dem doppelten äußeren Produkte aus der Relativgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

Unter „Fahrzeugbeschleunigung“ ist dabei, wie aus dem Zusammenhange hervorgeht, die Beschleunigung jenes Fahrzeugpunktes zu verstehen, mit dem der bewegte Punkt gerade zusammenfällt.

§ 47. Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung.

Für den im Fahrzeuge stehenden Beobachter ist das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung nicht erfüllt, wenn er nur die tatsächlich an dem bewegten Punkte angreifenden Kräfte ins Auge faßt. Als „tatsächlich angreifende“ oder „physikalisch existierende“ Kräfte sind hierbei jene bezeichnet, die auch für den im festen Raume aufgestellten Beobachter nachweisbar sind. Mit der dynamischen Grundgleichung würden aber auch alle anderen Folgerungen der Dynamik hinfällig werden. Um die Lehren der Dynamik auch

für den im Fahrzeuge aufgestellten Beobachter, der von der absoluten Bewegung seines Fahrzeuges gar keine Notiz nimmt, anwendbar zu machen, kann man aber den Kunstgriff benützen, an dem bewegten Punkte B Zusatzkräfte von der Art anzubringen, daß nachher die dynamische Grundgleichung auch für den bewegten Raum gültig bleibt. Dies ist leicht zu erreichen. Man multipliziere Gl. (208) mit der Masse m des bewegten Punktes. Dann wird

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} - m \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} - 2m \mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{u}. \quad (210)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt nach dem dynamischen Grundgesetze die „physikalisch existierende“ Kraft \mathfrak{P} an dem materiellen Punkte (oder die Resultierende, wenn mehrere vorkommen) dar. Die beiden anderen Glieder müssen, wenn wir die dynamische Grundgleichung auch für die Relativbewegung aufrecht erhalten wollen, ebenfalls als Kräfte gedeutet werden. Diese Kräfte sollen als „erste“ und „zweite“ Zusatzkraft bezeichnet werden.

Die erste Zusatzkraft ist jene, die schon beim d'Alembert'schen Prinzip vorkam. In der Tat hängt ja der Fall der Relativbewegung in sehr einfacher Weise mit dem d'Alembert'schen Prinzip zusammen. Wenn sich ein starrer Körper bewegt, sind alle seine materiellen Punkte im Gleichgewichte (und in Ruhe) relativ zu einem auf dem starren Körper selbst aufgestellten Beobachter. Für diesen Beobachter müssen daher, wenn er die Lehren der Mechanik auf seinen Raum bezieht, alle an dem starren Körper angreifenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden. Er muß aber dann, wie wir schon früher auf anderem Wege und jetzt von neuem fanden, außer den physikalisch existierenden Kräften auch die „Trägheitskräfte“ \mathfrak{S} , nämlich

$$\mathfrak{S} = -m \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2}$$

anbringen. Bei dieser Anwendung von Gl. (210) fallen nämlich, da keine Relativbewegungen vorkommen, die Differentialquotienten von \mathbf{r} fort. Behalten wir die frühere Bezeichnung

für die „Trägheitskräfte“ auch in dem allgemeineren Falle bei, so geht Gl. (210) über in

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{G} - 2m \mathbf{V} \mathbf{v} \mathbf{u}, \quad (211)$$

wobei noch der Kürze halber die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes mit \mathbf{u} bezeichnet ist.

Die Anwendung von Gl. (211) soll zunächst an dem Beispiele des fallenden Steines gezeigt werden. An einem materiellen Punkte, den wir von der Erde aus beobachten, wirken zunächst von physikalisch existierenden Kräften die Anziehung der Erde, der Sonne und aller anderen Weltkörper, die wir uns zu einer Resultierenden \mathfrak{P}_0 zusammengefaßt denken. Ferner können noch andere physikalisch existierende Kräfte, wie Luftwiderstand, Widerstand einer Bahn, überhaupt Druck von seiten eines anderen Körpers, elektrische Anziehung o. dgl. daran angreifen, deren Resultierende \mathfrak{P}_1 sei, so daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ ist. Wenn der Punkt an seinem Orte auf der Erde unter der Einwirkung aller dieser Kräfte festgehalten werden soll, muß nach Gl. (211)

$$0 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{G} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{G})$$

sein. Hieraus wird die Bedeutung von $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{G}$ klar, denn wir wissen, daß wir an einem materiellen Punkte, an dem andere physikalisch existierende Kräfte nicht angreifen, eine dem Gewichte des Punktes entgegengesetzt gleiche Kraft \mathfrak{P}_1 anbringen müssen, um ihn an seiner Stelle auf der Erde festzuhalten. Die Summe $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{G}$ ist daher selbst das Gewicht des Körpers, das mit \mathfrak{G} bezeichnet werden soll. Hiermit geht Gl. (211) über in

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{P}_1 - 2m \mathbf{V} \mathbf{v} \mathbf{u}. \quad (212)$$

Wenn die von der Erde her gesehenen Bewegungen in Übereinstimmung mit den auf den festen Raum bezogenen Lehren der Mechanik stehen sollen, müssen wir uns daher außer dem Gewichte \mathfrak{G} und anderen etwa noch daran angreifenden Kräften \mathfrak{P}_1 noch die „zweiten Zusatzkräfte“ $-2m \mathbf{V} \mathbf{v} \mathbf{u}$

darin angebracht denken. Die zweite Zusatzkraft ist aber hier unter gewöhnlichen Umständen sehr gering wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit u der Drehung der Erde gegen den festen Raum und hiervon allein kommt es, daß man in der Mehrzahl der Fälle von der Eigenbewegung der Erde ganz absehen, die Bewegungen relativ zur Erde also ohne weiteres als Absolutbewegungen betrachten kann. Ein Zahlenbeispiel möge dies noch zeigen. Die Erde dreht sich in einem Stern-tage einmal um ihre Achse und voraussichtlich ist diese Winkelgeschwindigkeit als jene gegen den absoluten Raum aufzufassen. Ein Sterntag unterscheidet sich aber nicht viel von einem Sonnentage und man pflegt daher bei solchen Rechnungen die Winkelgeschwindigkeit der Einfachheit wegen auf den Sonnentag zu beziehen. Dann ist

$$u = \frac{2\pi}{86400} \text{ sec}^{-1} = \frac{1}{13760} \text{ sec}^{-1}.$$

Wenn die Relativgeschwindigkeit v etwa 10 m sec^{-1} beträgt, und senkrecht zur Erdachse steht (also bei jener Richtung, in der das äußere Produkt seinen größten Wert annimmt) erhält man für die zweite Zusatzkraft den Wert

$$m \cdot \frac{20 \text{ m sec}^{-1}}{13760} \cdot \text{sec}^{-1} \text{ oder } m \cdot \frac{1}{688} \text{ m sec}^{-2}.$$

Das Gewicht von m ist $m \cdot 9,81 \text{ m sec}^{-2}$; die zweite Zusatzkraft beträgt daher rund $\frac{1}{7000}$ des Gewichtes, ist also unter gewöhnlichen Umständen unmerklich.

Lassen wir bei dem fallenden Steine den Luftwiderstand außer Berücksichtigung, so ist $\mathfrak{P}_1 = 0$ zu setzen und die Differentialgleichung der Fallbewegung lautet

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} - 2m \mathbf{V} \mathbf{v} \mathbf{u}$$

oder, wenn wir an Stelle des Gewichtes das Produkt aus Masse und Fallbeschleunigung \mathfrak{g} einführen,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2 \mathbf{V} \mathbf{v} \mathbf{u}. \quad (213)$$

Gewöhnlich vernachlässigt man das zweite Glied der rechten

Seite gegenüber \mathbf{g} . Dann wird $\mathbf{v} = \mathbf{g}t$, wenn man die Zeit t von Beginn der Fallbewegung an rechnet. Es wird daher, um eine bessere Annäherung zu erhalten, genügen, wenn man im Korrektionsgliede $\mathbf{v} = \mathbf{g}t$ setzt. Der damit begangene Fehler ist jedenfalls erst von höherer Ordnung klein, als die Abweichung von dem Falle in lotrechter Richtung; es ist daher für unsere Zwecke zunächst nicht nötig, die Differentialgleichung (213) streng zu integrieren. Wir können sie vielmehr genau genug ersetzen durch

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2t\mathbf{V}\mathbf{g}\mathbf{u}$$

und durch Integration erhält man daraus, wenn die Radienvektoren \mathbf{r} von der Ausgangsstelle der Fallbewegung aus gerechnet werden,

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\mathbf{V}\mathbf{g}\mathbf{u}. \quad (214)$$

Das letzte Glied ist das Korrektionsglied. Das äußere Produkt aus \mathbf{g} und \mathbf{u} ist gleich $ug \cos\varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes der Erde ist, an dem der Versuch angestellt wird. Die Richtung von $\mathbf{V}\mathbf{g}\mathbf{u}$ steht senkrecht zu \mathbf{g} und \mathbf{u} , ist also horizontal und nach Westen hin gekehrt. Wegen des negativen Vorzeichens stellt daher das Korrektionsglied eine östliche Abweichung des fallenden Steins aus der Lotrichtung dar. Am größten wird die Abweichung am Äquator, weil dort \mathbf{g} und \mathbf{u} senkrecht zueinander stehen und daher $\cos\varphi = 1$ ist. Aber auch dort ist sie nur gering. Selbst bei $t = 10$ sec Fallzeit erreicht das Korrektionsglied erst die Größe

$$\frac{1000 \text{ sec}^3}{3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \frac{1}{13760} \text{ sec}^{-1} = 0,238 \text{ m},$$

während der in dieser Zeit in lotrechter Richtung zurückgelegte Weg bei Außerachtlassung des Luftwiderstandes gegen 500 m beträgt.

Es mag übrigens noch bemerkt werden, daß sich Gl. (213) auch streng integrieren läßt. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - 2\mathbf{V}\mathbf{v}\mathbf{u},$$

so lautet das erste Integral

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t - \frac{(1 - \cos 2ut)}{2u^2} \mathbf{V} \mathbf{g} \mathbf{u} + \frac{2ut - \sin 2ut}{2u^3} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^2), \quad (215)$$

wobei noch eine willkürliche Integrationskonstante \mathbf{v}_0 beigelegt werden könnte, die die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ angeben würde, die aber wegen der hier vorliegenden Anfangsbedingung gleich Null zu setzen ist und daher weggelassen worden ist. Durch Einsetzen des Wertes in die Differentialgleichung überzeugt man sich leicht, daß sie davon befriedigt wird.

Eine Integration nach t liefert nun auch sofort \mathbf{r} als Funktion der Zeit. Beachtet man auch hier die Anfangsbedingung $\mathbf{r} = 0$ für $t = 0$, so erhält man

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{g}t^2}{2} - \frac{2ut - \sin 2ut}{4u^3} \mathbf{V} \mathbf{g} \mathbf{u} + \frac{2u^2t^2 + \cos 2ut - 1}{4u^4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^2). \quad (216)$$

Bei einer Fallzeit von einigen Sekunden dreht sich die Erde nur um einen sehr kleinen Winkel ut weiter; daher können $\sin 2ut$ und $\cos 2ut$ in sehr schnell konvergierende Reihen entwickelt werden. Behält man dabei nur die Glieder bis zur Größenordnung $(ut)^3$ bei, so kommt man wieder auf die Näherungsformel (214). Man kann aber auch noch kleinere Glieder mitnehmen und erhält z. B. mit Berücksichtigung der Glieder bis zur Ordnung $(ut)^4$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{g}t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \mathbf{V} \mathbf{g} \mathbf{u} + \frac{t^4}{6} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^2).$$

Der Ausdruck $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^2)$ bedeutet, wie die geometrische Betrachtung lehrt, einen im Meridian liegenden, senkrecht zur Erdachse nach außen hin gehenden Vektor von der Größe $u^2 g \cos \varphi$. Er läßt sich zerlegen in eine lotrechte Komponente, die aber gegenüber dem Gliede $\frac{\mathbf{g}t^2}{2}$ von verschwindender Größe ist und in eine horizontale Komponente, die für einen auf der nördlichen Halbkugel gelegenen Punkt nach Süden hin geht, von der Größe $u^2 g \cos \varphi \sin \varphi$.

Hiernach liefert die bis auf Glieder von der Ordnung $(ut)^4$ genaue Integration der Fallgleichung außer einer östlichen Abweichung, die vorher schon besprochen war, auch noch eine südliche Ablenkung des fallenden Körpers von der Größe

$$\frac{t^4}{6} u^2 g \sin \varphi \cos \varphi.$$

Setzt man die geographische Breite $\varphi = 45^\circ$ und $t = 10$ sec, so geht dies über in

$$0,000043 \text{ m,}$$

d. h. die südliche Ablenkung beträgt hiernach selbst bei einer Fallzeit von 10 sec nur einige hundertstel Millimeter, ist also durch Messung überhaupt nicht nachweisbar.

Wenn man eine Genauigkeit der Rechnung bis auf so kleine Glieder anstrebt, muß man übrigens auch noch einen anderen Umstand beachten. Wir haben nämlich g als eine Konstante betrachtet, während in Wirklichkeit g an jedem Orte der Bahn etwas (wenn auch nur sehr wenig) verschieden ist. Hierbei ist namentlich zu bedenken, daß das Gewicht G den Summanden \mathfrak{G} enthält, der in verschiedenen Höhen, d. h. in verschiedenen Abständen von der Erdachse verschiedene Größen hat. Zieht man eine Kraftlinie, deren Richtung überall mit der von G oder g zusammenfällt, so hat diese daher selbst schon eine geringe Krümmung in der Meridianebene, vorausgesetzt, daß man sich weder am Pole noch am Äquator befindet. Auch hierdurch wird eine geringe Ablenkung des fallenden Steins von der Lotlinie in der Nord-Südrichtung hervorgerufen, die der Größe nach mit der vorher berechneten vergleichbar, hiermit aber ebenfalls so klein ist, daß sie unmöglich durch einen Fallversuch nachgewiesen werden kann.

Die genauere Theorie der Fallbewegung lehrt daher, daß ein fallender Körper nur eine östliche Ablenkung von merklichem Betrage erfahren könne. Merkwürdigerweise haben aber die meisten Beobachter, die solche Versuche anstellten, außer der östlichen Abweichung auch noch eine südliche wahrgenommen oder wenigstens wahrzunehmen geglaubt. Diese viel umstrittene südliche Ablenkung ist nach den besten Beobachtungen jedenfalls viel kleiner, als die durch Messung leicht nachzuweisende östliche Ablenkung, aber immerhin nach den Angaben der Beobachter weit größer, als sie nach der vorgetragenen Theorie erwartet werden dürfte. Man nimmt daher gewöhnlich an, daß die Beobachtungen ungenau gewesen seien und manche Gelehrten stellen es sogar als gewiß hin, daß dies so sein müsse, weil die südliche Ablenkung mit der Theorie nicht übereinstimmt. Ich betrachte dies aber als unzulässig. Aus bekannten Gründen läßt sich die südliche Ablenkung freilich nicht erklären; aber dies beweist noch keineswegs, daß die Beobachter unrecht haben müßten. Es wäre ja sehr wohl möglich, daß die Theorie noch unvollständig wäre. Wenn das genauere Gesetz der etwa doch noch tatsächlich bestehenden südlichen Ablenkung später einmal durch verfeinerte Beobachtungen festgestellt werden sollte, würde man daraus die wichtigsten Schlüsse auf die Verbesserungen ziehen können, die an der Theorie anzubringen wären. Daraus erklärt sich die große Bedeutung solcher Versuche.

Eng verwandt mit der Seitenablenkung des fallenden Steins ist auch die eines Geschosses. Wenn ein Geschütz z. B. in der Richtung nach Norden hin abgefeuert

wird, tritt wegen der Erddrehung eine seitliche Ablenkung des Geschosses nach Osten hin ein. Schießt man nach Süden, so ist die Seitenablenkung westlich, d. h. in beiden Fällen nach rechts vom Schützen aus gesehen. Vorausgesetzt wird dabei, daß man sich auf der nördlichen Halbkugel befindet; am Äquator ist die Ablenkung Null und auf der südlichen Halbkugel entgegengesetzt. Auch wenn man nach Osten oder Westen hin schießt, hat man stets eine Ablenkung nach rechts hin vom Geschütze aus gesehen. Auch der Betrag dieser Ablenkung kann unter Voraussetzung einer flachen Flugbahn leicht berechnet werden. Wenn sich das Geschöß z. B. nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 350 m sec^{-1} ungefähr in horizontaler Richtung bewegt, ist in der geographischen Breite φ die zweite Zusatzkraft von der Größe

$$m \cdot 700 \cdot \frac{1}{13760} \sin \varphi$$

anzubringen, wofür rund $\frac{Q}{200} \sin \varphi$ gesetzt werden kann, wenn Q das Geschößgewicht ist. Eine konstante Kraft von dieser Größe bringt z. B. während einer Flugzeit von 20 sec nach den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung einen in ihre Richtung fallenden Weg von rund

$$10 \text{ m} \cdot \sin \varphi \quad \text{oder von } 7,7 \text{ m}$$

zustande, wenn $\varphi = 50^\circ$ gesetzt wird. Wenn es verlangt wird, kann man die Rechnung natürlich auch noch genauer durchführen; es sollte sich jetzt nur um eine Abschätzung handeln.

Beträchtlich wird die Zusatzkraft, wenn man die Bahn eines zur Erde fallenden Meteorsteines betrachtet, weil es sich in diesem Falle um sehr große Geschwindigkeiten handelt. Zugleich wird aber dann auch der Luftwiderstand so groß, daß die vorher für die Fallbewegung ohne Luftwiderstand abgeleiteten Formeln keine Anwendung finden können.

Auch an einem schnell umlaufenden Schwungrade wirkt wegen der Erddrehung ein freilich bei den praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten nur sehr

geringfügiges Kräftepaar der „zweiten Zusatzkräfte“, das leicht berechnet werden kann. Es kann übrigens auch nach den in § 37 gegebenen Anleitungen sofort ermittelt werden, denn das Schwungrad wird von der Erde bei ihrer Bewegung im absoluten Raume genau ebenso mitgenommen wie der dort betrachtete Schwungring, der auf einer Lokomotive gelagert sein sollte.

Aus der dynamischen Grundgleichung sind alle übrigen Sätze der Mechanik, soweit sie nicht an und für sich für jeden Aufstellungsort des Beobachters gültig sind, abgeleitet worden. Sobald wir daher durch Einführung der Zusatzkräfte Sorge dafür tragen, daß die dynamische Grundgleichung auch für die Bewegungen relativ zur Erde erfüllt bleibt, können wir auch alle daraus abgeleiteten Folgerungen ohne weiteren Beweis anwenden, d. h. die Gültigkeit der zunächst auf den absoluten Raum bezogenen Betrachtungen der Mechanik wird damit auch für den auf der Erde fußenden Beobachter gerettet.

Selbstverständlich bleiben übrigens die bisher auf die Bewegung relativ zur Erde bezogenen Betrachtungen ohne weiteres auch für die Bewegungen relativ zu irgendeinem anderen Fahrzeuge anwendbar. Man kann also z. B. die Wasserbewegung im Laufrade einer Turbine genau so untersuchen, als wenn das Laufrad ruhte, falls man nur die beiden Zusatzkräfte an jedem Wasserteilchen anbringt. Die erste Zusatzkraft reduziert sich übrigens in diesem Falle auf die Zentrifugalkraft. Beide Zusatzkräfte erlangen hier sehr große Werte wegen der großen Winkelgeschwindigkeit u , die viele Tausende mal größer ist als die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Schließlich bemerke ich noch, daß ich im 6. Bande nochmals ausführlicher auf die Relativbewegung zurückzukommen beabsichtige.

Aufgaben.

34. Aufgabe. Eine Scheibe rotiert um eine zur Scheibenebene senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit u_1 . Relativ zur Scheibe beschreibt ein materieller Punkt eine kreisförmige Bahn, deren Ebene gleichfalls senkrecht zur Umdrehungsachse der Scheibe steht

und deren Mittelpunkt auf dieser Umdrehungsachse liegt. Die Winkelgeschwindigkeit der Relativbewegung sei mit u_2 bezeichnet. Man soll die Ergänzungs- oder Zusatzkräfte der Relativbewegung angeben.

Lösung. Immer wenn die Fahrzeugbewegung in einer gleichförmigen Drehung besteht, ist die erste Zusatzkraft die Zentrifugalkraft, genommen für einen im Fahrzeuge fest liegenden Punkt. Sie ist also radial nach außen gekehrt und hat die Größe $mu_1^2 a$, wenn m die Masse des bewegten Punktes und a den Kreishalbmesser bedeutet. Die zweite Zusatzkraft hat die Richtung, von $-\sqrt{v}u_1$, geht also ebenfalls in radialer Richtung, und zwar nach außen hin, wenn die Relativgeschwindigkeit v denselben Umlaufssinn hat, wie die Fahrzeugbewegung. Im entgegengesetzten Falle ist sie auf den Mittelpunkt zu gerichtet. Die Größe ist in jedem Falle gleich $2mvu_1$ oder, da $v = u_2 a$ gesetzt werden kann, gleich $2mu_1 u_2 a$. Wenn die beiden Winkelgeschwindigkeiten u_1 und u_2 im gleichen Umdrehungssinne gehen, wollen wir u_2 positiv, im entgegengesetzten Falle negativ rechnen. Dann kann für beide Fälle die Resultierende aus beiden Zusatzkräften gleich einer radial nach außen gehenden Kraft vom Betrage

$$ma(u_1^2 + 2u_1 u_2)$$

gesetzt werden, wobei ein etwa herauskommendes negatives Vorzeichen eine entgegengesetzte Richtung der Resultierenden bedeutet.

Außer den beiden Zusatzkräften greift an dem bewegten Punkt noch eine tatsächlich vorhandene Kraft an, die etwa durch einen Faden oder durch eine Federspannung darauf übertragen wird. Die Resultierende aus dieser und den Zusatzkräften gibt die gesamte Kraft an, die man sich an dem Punkte angebracht denken muß, um die Relativbewegung so behandeln zu können, als wenn sie eine absolute Bewegung wäre, die durch diese Kraft hervorgebracht würde. Da die Relativbewegung eine Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit u_2 ist, entspricht ihr eine resultierende Kraft die nach innen hin gekehrt ist, nämlich die Zentripetalkraft vom Betrage mau_2^2 . Hieraus läßt sich auch erkennen, wie groß die

an dem bewegten Punkt wirklich vorhandene (durch den Faden u. dgl. übertragene Kraft) sein muß. Sie muß radial nach innen gehen, zunächst die nach außen gehende Resultierende der beiden Zusatzkräfte ausgleichen und darüber hinaus noch einen nach dem Mittelpunkte hin gerichteten Überschuß von dem berechneten Betrage mau_2^2 liefern. Sie hat daher die Größe

$$ma(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2).$$

Das ist aber nichts anderes als der Wert, den man unmittelbar erhalten hätte, wenn man die absolute Bewegung des materiellen Punktes mit der Winkelgeschwindigkeit $u_1 + u_2$ betrachtet hätte, zu der eine Zentripetalkraft von der Größe $ma(u_1 + u_2)^2$ gehören muß.

In diesem Beispiele führt daher die Betrachtung der Relativbewegung zu einem Umwege; immerhin ist es nützlich, ihn einmal einzuschlagen, um den Zusammenhang der allgemeinen Lehren mit den hier vorliegenden Verhältnissen zu überblicken.

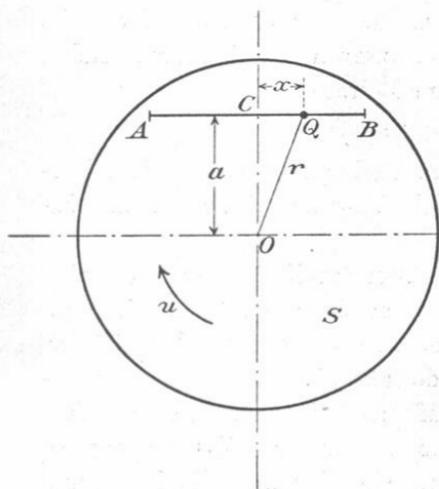


Abb. 69.

35. Aufgabe. Auf einer Scheibe S (Abb. 69), die sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit u um die durch den Scheibenmittelpunkt O senkrecht zur Scheibenebene gehende Achse dreht, ist eine Führungstange AB befestigt, längs deren sich ein als materieller Punkt vom Gewichte Q aufzufassender Körper reibungsfrei zu verschieben vermag. Der Körper Q ist an einer Feder befestigt, die ihn bei

einem Ausschlage x mit einer elastischen Kraft von der Größe cx nach der Stangensmitte C zurückzieht. Wenn der Körper durch einen Anstoß aus der Gleichgewichtslage C gekommen ist, führt er Schwingungen relativ zur rotierenden Scheibe aus. Man soll die Zusatzkräfte der Relativbewegung angeben, die Differentialgleichung der Schwin-

gungsbewegung aufstellen und die Schwingungsdauer berechnen. Unter welcher Größe muß die Winkelgeschwindigkeit u liegen, wenn solche Schwingungen überhaupt möglich sein sollen?

Lösung. Die erste Ergänzungskraft ist wieder eine Zentrifugalkraft von der Größe

$$\frac{Q}{g} u^2 r,$$

wenn mit $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ der augenblickliche Abstand des Körpers Q von O bezeichnet wird. Die zweite Zusatzkraft steht senkrecht zur Führungsstange AB , hat die Größe

$$2 \frac{Q}{g} u \frac{dx}{dt}$$

und hat bei einem positiven $\frac{dx}{dt}$ einen nach außen gekehrten Pfeil, falls sich die Scheibe, wie in Abb. 69 angenommen ist, im Uhrzeigersinne dreht.

Bei Körpern, die sich längs Führungen reibungsfrei bewegen, hat die zweite Ergänzungskraft keinen Einfluß auf den Bewegungsvorgang, da sie stets senkrecht zur Geschwindigkeit und daher zur Führung steht und von der Führungsstange aufgenommen wird. Das gilt wenigstens so lange, als die Rückwirkung des Führungsdrucks auf die Fahrzeugbewegung vernachlässigt werden kann, jedenfalls also hier, wo ausdrücklich vorausgesetzt wurde, daß sich die Scheibe mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewege.

Aus demselben Grunde kommt auch von der ersten Zusatzkraft nur die in die Richtung der Führungsstange fallende Komponente zur Geltung. Diese hat die Größe

$$\frac{Q}{g} u^2 x$$

und ist mit x gleich gerichtet. Die Schwingungsbewegung erfolgt nun unter dem Einflusse dieser Kraft und der tatsächlich vorhandenen Kraft, nämlich dem Federzuge cx , der entgegengesetzt gerichtet ist. Überwiegt der Federzug, so lassen sich beide Kräfte zu einer Resultierenden

$$x \left(c - \frac{Q}{g} u^2 \right)$$

zusammensetzen, die auf die Gleichgewichtslage C hin gerichtet ist. Die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung lautet daher, wenn die Masse von Q mit m bezeichnet wird,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - (c - mu^2) x$$

Sie unterscheidet sich von der Differentialgleichung (16) für die einfache harmonische Schwingung nur dadurch, daß an die Stelle des die Feldstärke der elastischen Kraft bezeichnenden Faktors c jetzt der in der Klammer enthaltene Ausdruck getreten ist. Hiernach kann die Schwingungsdauer sofort nach Gl. (20) angegeben werden, nämlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c - mu^2}}$$

Für $c = mu^2$ wird T unendlich groß und für größere Werte von u imaginär. Das weist darauf hin, daß nur bis zu dieser Grenze hin Schwingungen möglich sind. Wenn die Scheibe schneller rotiert, geht Q bis zum Ende der Führungsstange und bleibt dort stehen. Die Gleichgewichtslage in C entspricht dann einem labilen Gleichgewichte.

Bei diesem Beispiele ist, im Gegensatze zu dem in der vorigen Aufgabe behandelten die Lehre von der Relativbewegung von großem Nutzen für die Lösung der Aufgabe und durch eine andere Betrachtung in der Tat nur in sehr schwerfälliger Weise zu ersetzen.

36. Aufgabe. Wie gestaltet sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Bewegung längs der Führungsstange nicht reibungsfrei, sondern einer Reibung unterworfen ist, die dem Normaldrucke zwischen Q und der Führungsstange proportional gesetzt werden kann?

Lösung. Wir betrachten die Bewegung zunächst während der Zeit, in der $\frac{dx}{dt}$ positiv ist, also vom linken Umkehrpunkte bis zum rechten hin. Der Normaldruck zwischen Q und der Führungsstange ist dann gleich der Summe aus der Normalkomponente der Zentrifugalkraft und der Corioliskraft, wie man die zweite Zusatzkraft zur Abkürzung oft nennt. Er ist also gleich

$$mu^2 a + 2mu \frac{dx}{dt}$$

Bezeichnet man den Reibungskoeffizienten mit f und beachtet man, daß die Reibung in jedem Falle der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist, hier also eine Beschleunigung im Sinne der negativen x hervorbringt, so erhält man als Differentialgleichung für diesen Teil des Schwingungsvorgangs

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - (c - mu^2)x - fmu \left(ua + 2 \frac{dx}{dt} \right).$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der Differentialgleichung einer auf den absoluten Raum bezogenen Schwingung überein, an der zugleich eine der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportionale Dämpfung und außerdem noch eine Dämpfung durch gewöhnliche Reibung auftritt. Ihre Lösung ergibt sich daher aus der Verbindung der in § 6 und § 7 gesondert betrachteten Lösungen. Insbesondere folgt daraus, daß die Schwingungsdauer der einfachen Schwingung, während deren $\frac{dx}{dt}$ positiv ist, unabhängig von dem konstanten Gliede auf der rechten Seite der Differentialgleichung ist. Diese Schwingungszeit T_1 kann daher aus Gl. (40) S. 49 unmittelbar entnommen werden, indem man die Hälfte davon nimmt, da es sich jetzt nur um eine einfache Schwingung handelt und außerdem c durch $c - mu^2$ und k durch $2mfu$ ersetzt. Hiermit findet man

$$T_1 = \frac{2\pi m}{\sqrt{4m(c - mu^2) - 4m^2 f^2 u^2}}.$$

Bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne, also bei negativem $\frac{dx}{dt}$ sind die Normalkomponenten der Zentrifugalkraft und die Corioliskraft von einander entgegengesetzter Richtung. Ihre Resultierende wird aber auch dann noch durch den Ausdruck

$$mu^2 a + 2mu \frac{dx}{dt},$$

bei dem nun das zweite Glied einen negativen Wert erlangt, richtig angegeben. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ während des Ver-

laufs des Schwingungsvorgangs immer so klein bleibt, daß der vorstehende Ausdruck stets positiv bleibt, oder ob er einen Vorzeichenwechsel erfährt. Im letzten Falle muß man den ganzen Schwingungsweg in drei Teile zerlegen, so daß für den mittleren Teil eine andere Differentialgleichung gilt, als für die beiden äußeren.

Wir wollen uns jetzt damit begnügen, die Betrachtung für den Fall weiter zu führen, daß der Absolutbetrag von $\frac{dx}{dt}$ kleiner bleibt, als $\frac{ua}{2}$. Dann lautet die Differentialgleichung für den ganzen Schwingungsweg

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -(c - mu^2)x + fmu \left(ua + 2 \frac{dx}{dt} \right),$$

da die Reibung stets im Sinne der positiven x gerichtet ist. Auch die Lösung dieser Gleichung kann in derselben Weise gefunden werden, wie die der vorigen. Dabei zeigt sich, daß die Schwingungszeit T_2 für das einmalige Durchlaufen der ganzen Schwingungsbahn ebenso groß wird, wie vorher T_1 bei der Bewegung im positiven Sinne. Der Grund dafür liegt darin, daß in der Formel (40) für die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung der Dämpfungsfaktor k nur im Quadrat vorkommt, und daß es daher für das Schlüßergebnis nichts ausmacht, wenn der Faktor von $\frac{dx}{dt}$ in der Differentialgleichung einen Vorzeichenwechsel erfährt. Für die Dauer T einer vollen Schwingung findet man damit

$$T = 2 T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - u^2(1 + f^2)}}.$$

In bezug auf die Dämpfung unterscheiden sich dagegen die beiden Halbschwingungen, die im positiven oder negativen Sinne erfolgen, erheblich voneinander. Aus den Lösungen der Differentialgleichungen für beide Fälle läßt sich dies erkennen; von der vollständigen Durchrechnung soll aber hier abgesehen werden.

Sechster Abschnitt.

Hydrodynamik.

§ 48. Die Ansätze der Hydrodynamik.

Bei allen Naturvorgängen spielen viele Umstände mit, von denen einige von großem, andere von weit geringerem Einflusse sind. Um zu einer einfachen und doch hinreichend genauen Theorie zu gelangen, muß man sich daher vor allem ein Urteil darüber verschaffen, welche von jenen Umständen im gegebenen Falle die wichtigsten sind, und welche anderen man ohne Schaden außer acht lassen darf. Die Antwort auf diese Frage wird nicht in allen Fällen dieselbe sein. Was in einem Falle außer Ansatz bleiben durfte, wird vielleicht in einem anderen Falle so viel mehr hervortreten, daß man unbedingt darauf achten muß, um die Theorie in hinreichende Übereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen.

Ich erinnere daran, daß das schon in der Mechanik der festen Körper gilt. Häufig genügt es, einen festen Körper als starr zu betrachten; ein andermal muß man auf die Formänderungen achten, die er erfährt; es genügt aber noch, diese als vollkommen elastische zu betrachten und das Hookesche Elastizitätsgesetz darauf anzuwenden, während man in einem dritten Falle genötigt sein kann, auf bleibende Formänderungen, auf Abweichungen vom Hookeschen Gesetze, auf Eigenspannungen u. dgl. einzugehen. Ebenso paßt auch in der Hydrodynamik nicht jeder Ansatz auf alle Fälle. Man muß dies wohl beachten, wenn man sieht, wie weit sich oft die Schlußfolgerungen der hydrodynamischen Theorien, die sich auf zu eng gefaßte Ansätze gründeten, von der Wirklichkeit entfernten.

Im ersten Bande dieser Vorlesungen habe ich schon einmal die üblichen Annahmen besprochen, die man der theore-

tischen Behandlung der Flüssigkeitsbewegungen gewöhnlich zugrunde legt. Insbesondere erinnere ich daran, daß man auf zwei physikalische Eigenschaften der tropfbaren Flüssigkeiten gewöhnlich nicht zu achten braucht, nämlich auf die Volumenänderungen elastischer und thermischer Art, die durch Änderungen des Flüssigkeitsdruckes oder der Temperatur hervorgerufen werden. Von wenigen besonderen Fällen abgesehen, die eine darauf eingehende Betrachtung erforderlich machen können, sind wir daher berechtigt, die tropfbaren Flüssigkeiten und insbesondere das Wasser unter dem zwar nicht mehr ganz aber doch hinlänglich genauen, vereinfachten Bilde einer raumbeständigen Flüssigkeit in unseren theoretischen Ansatz eingehen zu lassen.

Mittelbar freilich tragen die durch Temperaturunterschiede herbeigeführten Unterschiede in der Dichte sehr wesentlich zu einer Erscheinung bei, die man nicht immer mit dem gleichen Rechte vernachlässigen darf. Betrachtet man nämlich ein mit Wasser gefülltes Glas, das ruhig auf einem Tische steht, so wird man zwar in erster Annäherung sagen können, daß sich die Wassermasse im Gleichgewichte und in Ruhe befinde. Bei genauerem Zusehen bemerkt man aber an kleinen Teilchen, die darin herumschwimmen, daß die Wassermasse dauernd in langsamen Strömungen begriffen ist. Der Grund dafür ist in geringen Temperaturunterschieden zu erblicken, die sich unter gewöhnlichen Umständen nicht leicht vermeiden lassen und die entsprechend geringe Dichteunterschiede und hiermit eine Störung des Gleichgewichts hervorbringen. Die Meeresströmungen, wie z. B. der Golfstrom geben uns ein Beispiel von sehr mächtigen Wirkungen, die von dieser Ursache herühren. Bei den meisten Anwendungen der Hydrostatik sind aber diese Wirkungen so unmerklich, daß man mit Recht ganz von ihnen absehen darf. Immerhin müssen wir jedoch aus dieser Betrachtung den wesentlichen Unterschied eines flüssigen Körpers gegenüber einem festen entnehmen, daß bei ihm schon durch die geringfügigsten Ursachen ein fortwährender langsamer Platzwechsel und Austausch der einzelnen Teilchen innerhalb

der ganzen Masse hervorgerufen wird, der beim festen Körper fehlt.

Der Kürze halber wollen wir die durch zufällige Umstände hervorgerufenen langsamen Strömungen der bezeichneten Art als die „Mischbewegung“ bezeichnen. Durch den Gebrauch dieses Wortes soll zugleich angedeutet werden, daß es sich um einen an sich unerheblichen Vorgang handelt, der einer Beachtung nur insoweit bedarf, als er zu einer Durchmischung benachbarter Teile der Flüssigkeit führt.

Auch in einer strömenden Wassermasse fehlt die Mischbewegung nicht. Die Beobachtung der Wasserbewegung in einem Flusse läßt erkennen, daß „Mischbewegungen“ dabei vorkommen. Man bemerkt auch, daß diese weit größer sind als in einer ruhenden Masse unter sonst gleichen Umständen, also größer etwa als in einem langhin gestreckten Teiche von der gleichen Breite und Tiefe. Die Mischbewegung lagert sich über die Hauptbewegung, die das Wasser flußabwärts führt und die eben angeführte Beobachtung lehrt, daß sie von ihr beeinflußt wird. Sie ist zwar verhältnismäßig geringfügig gegenüber der Hauptbewegung. Aber vernachlässigt darf sie darum doch nicht werden, und zwar deshalb nicht, weil sie auch selbst wieder die Hauptbewegung sehr wesentlich beeinflussen kann.

Der Einfluß, den die Mischbewegung auf den Hauptvorgang auszuüben vermag, wird um so geringer, je weniger sich innerhalb eines gegebenen Bezirks die durch den Hauptvorgang bedingten Geschwindigkeiten der einzelnen Massenteilchen voneinander unterscheiden. Denn eine wesentliche Änderung des Hauptvorgangs kann nur dadurch hervorgerufen werden, daß die zum Austausch gegeneinander gelangenden Teilchen merklich verschiedene Bewegungszustände mit sich bringen.

Wenn die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Teilchen nur sehr gering sind, wird man also von einer Beachtung der Mischbewegung überhaupt absehen dürfen. In diesem Falle kommt aber überdies auch die Eigenschaft der Zähigkeit der Flüssigkeit nicht zur Geltung und man wird, wenigstens innerhalb des betreffenden Bezirks, die Flüssigkeit

mit genügender Genauigkeit unter dem Bilde einer reibungsfreien oder „vollkommenen“ Flüssigkeit in den theoretischen Ansatz eintreten lassen können.

Zwischen der Zähigkeit und dem Einflusse, den die Mischbewegung ausübt, ist aber im übrigen wohl zu unterscheiden. Schon Newton hatte erkannt, daß man in der Hydrodynamik auf die physikalische Eigenschaft der Zähigkeit in vielen Fällen Rücksicht nehmen muß und von ihm rührt der erste Ansatz her, durch den sie in die Rechnung eingeführt wird. Bei den zähen Flüssigkeiten treten, wie schon in Band I besprochen wurde, während der Bewegung Schubspannungen oder „innere Reibungen“ auf, die man, und zwar wie es scheint mit genügender Genauigkeit, als linear abhängig von den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach den Koordinatenrichtungen betrachten kann. Darauf wird später noch näher einzugehen sein.

Aber je zäher eine Flüssigkeit ist, um so geringer fällt bei ihr unter sonst gleichen Umständen die Mischbewegung und hiermit auch deren Einfluß auf den Hauptvorgang aus. Es ist daher nicht möglich, beide Umstände zusammenzuwerfen und sie etwa beide durch einen einheitlichen Ansatz zum Ausdruck zu bringen. Sie müssen vielmehr getrennt behandelt werden.

Die übliche Hydrodynamik der zähen Flüssigkeit sieht in der Regel von der Mischbewegung vollständig ab und in zahlreichen Fällen mit vollem Rechte. Man muß indessen beachten, daß eine theoretische Lösung, die auf diesem Wege gewonnen wurde, für ein dickes Öl noch sehr genau richtig sein kann unter Umständen, bei denen dieselbe Lösung für eine weniger zähe Flüssigkeit, etwa für Wasser, schon vollständig versagt. Und zwar selbstverständlich auch dann, wenn man in die gleiche Formel die sehr verschiedenen Werte des Zähigkeits-Koeffizienten für beide Flüssigkeiten einsetzt. Der Grund dafür liegt darin, daß im ersten Falle die Vernachlässigung des Einflusses der Mischbewegung berechtigt, im anderen Falle aber unzulässig war.

Meiner Meinung nach geht aus diesen Bemerkungen hervor, daß außer den üblichen Ansätzen für die vollkommene und die zähe Flüssigkeit noch ein Ansatz fehlt, der unter gewissen Umständen an deren Stelle zu treten hätte und bei dem der Einfluß der Mischbewegung in geeigneter Weise zum Ausdruck kommt. Oder genauer gesprochen: ich würde es als einen großen Fortschritt der Hydrodynamik betrachten, wenn es gelingen sollte, schon für den ersten Ansatz, also für die Differentialgleichungen der Bewegung eine Form zu finden, die den Einfluß der Mischbewegung mit einer für die überwiegende Mehrzahl aller Fälle genügenden Genauigkeit derart zum Ausdruck bringt, daß man sich, nachdem dies geschehen ist, weiterhin nicht mehr um sie zu kümmern braucht. In einzelnen Fällen lassen sich solche Ansätze zwar verhältnismäßig leicht ausfindig machen. Das Ziel, einen brauchbaren allgemein gültigen Ansatz zu finden, wird freilich nicht leicht zu erreichen sein. Als der erste Schritt dazu darf es aber immerhin gelten, wenn dieses Ziel zunächst einmal aufgerichtet wird.

§ 49. Die Darstellungsmittel der Hydrodynamik.

Abgesehen von den physikalischen Eigenschaften und ihrer Berücksichtigung oder Vernachlässigung wird die Fassung der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen auch noch von der Wahl der Darstellungsmittel beeinflusst, die man zur Untersuchung anwenden will. Am einfachsten fällt die Betrachtung aus, wenn man sich mit der Untersuchung der durchschnittlichen Bewegung einer größeren, in bestimmter Weise abgegrenzten Wassermasse begnügt. Dabei muß man freilich auf die Besprechung der feineren Einzelheiten und auf wichtige Erkenntnisse, die sich darauf stützen, verzichten. Immerhin sind aber die Ergebnisse, zu denen man auf diesem Wege gelangt, von großer Bedeutung und in bezug auf ihre praktische Nutzbarkeit stellen sie überhaupt den wertvollsten Schatz dar, den wir zurzeit auf dem Gebiete der Mechanik der flüssigen Körper besitzen. Was auf diesem Wege gefunden werden kann, ist aber schon im ersten Bande hinreichend besprochen worden.

Hier werde ich daher zur Ergänzung der früheren Betrachtungen den anderen Weg einschlagen, der von der Untersuchung der Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten, den Beschleunigungen und den Kräften an einem unendlich kleinen Flüssigkeitselemente ausgeht. Man führt dadurch die verwickelten Erscheinungen in endlichen Raumgebieten auf ein Zusammenwirken der einfachsten gesetzmäßigen Vorgänge zwischen benachbarten Teilen zurück.

Ihren Ausdruck finden die Elementargesetze, auf die man in solcher Weise das gesamte Verhalten der Flüssigkeit zurückzuführen sucht, durch partielle Differentialgleichungen. Diese werden natürlich verschieden ausfallen müssen, je nachdem man die Flüssigkeit als „vollkommen“ oder als „zäh“ betrachtet oder auch je nachdem man den Einfluß der Mischbewegung vernachlässigen oder ihn in passender Weise von vornherein berücksichtigen will.

Als letztes Ziel gilt freilich auch hier die Erkenntnis der Bewegung endlicher Wassermassen in ihren wichtigsten Einheiten. Von den Differentialgleichungen aus kann dieses Ziel nur durch eine Integration unter Berücksichtigung der im einzelnen Falle näher vorgeschriebenen Bedingungen erreicht werden. Der ganze Untersuchungsplan schließt sich sehr eng an jenen an, der den Lesern des dritten Bandes schon von der mathematischen Elastizitätstheorie her bekannt ist. Er hat den Vorzug, daß er wenigstens den Grundzügen nach alle Flüssigkeitsbewegungen zu umfassen gestattet und auf Sätze von sehr allgemeiner Gültigkeit zu führen vermag. Freilich werden die Integrationen, die zur Ableitung brauchbarer Ergebnisse aus den Differentialgleichungen erforderlich sind, immer nur in einer beschränkten Anzahl einfacherer Fälle wirklich ausführbar bleiben. Ganz wird daher die sich auf die Differentialgleichungen stützende „höhere“ Theorie die im ersten Bande wiedergegebenen elementaren Betrachtungen niemals entbehrlich machen können, selbst wenn es in der Folge gelingen sollte, das Gebiet, in dem sie zu wirklich richtigen (d. h. zu physikalisch genauen) Lösungen führt, erheblich zu erweitern.

Der Bewegungszustand in einer Flüssigkeit kann auf zwei verschiedene Arten analytisch dargestellt werden. Wir können zunächst unser Augenmerk auf eine bestimmte Stelle des Raumes richten, in dem die Flüssigkeitsströmung erfolgt. Der augenblickliche Zustand der Strömung an dieser Stelle wird vollständig durch die Geschwindigkeit \mathbf{v} beschrieben, mit der die Bewegung hier gerade nach Richtung und Größe vor sich geht. Bezeichnen wir den von einem festen Anfangspunkte nach dieser Stelle gezogenen Radiusvektor mit \mathbf{r} und die Zeit mit t , so wird durch eine Funktion

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (217)$$

die Geschwindigkeit für jede Stelle des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes und für jeden Augenblick angegeben werden können. Will man in Koordinaten rechnen, so kann man dafür auch

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(x, y, z, t) \\ v_2 &= \varphi_2(x, y, z, t) \\ v_3 &= \varphi_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

schreiben und das ganze Problem wird nun darauf hinauskommen, die Vektor-Funktion φ oder ihre Komponenten-Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ zu ermitteln, denn damit wird zugleich die Bewegung in allen Einzelheiten und für den ganzen Verlauf des Vorgangs bekannt.

Der durch diese Betrachtung angewiesene Weg zur Untersuchung des ganzen Vorgangs ist zuerst von Euler beschritten worden. Die Gleichungen, zu denen man auf diesem Wege geführt wird, bezeichnet man daher als die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen. Gewöhnlich ist diese Untersuchungsmethode die bequemste. Zuweilen führt aber auch eine zweite, die von Lagrange weiter ausgearbeitet wurde, besser zum Ziele und die Gleichungen, die sich auf diese beziehen, bezeichnet man als die hydrodynamischen Gleichungen von Lagrange, obwohl auch Euler selbst, der um ein Menschenalter früher lebte, mit diesem zweiten Wege ebenfalls schon ganz gut bekannt war.

Das zweite Verfahren besteht nämlich darin, daß man das Augenmerk nicht auf eine bestimmte Stelle des Raumes richtet und zusieht, wie sich die Geschwindigkeit hier im Laufe der Zeit ändert, sondern indem man die Schicksale eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens im Laufe des Bewegungsvorgangs verfolgt. Um anzugeben, was für ein Teilchen man meint, zieht man einen Radiusvektor \mathbf{r}_0 von einem festen Anfangspunkte nach jener Stelle, die das Teilchen zu einer gewissen Zeit, die zum Ausgange der Untersuchung gewählt wird, inne hatte. Nach Verlauf einer Zeit t wird es sich an einer anderen Stelle befinden, deren Radiusvektor \mathbf{r} sei. Die Gleichung

$$\mathbf{r} = \psi(\mathbf{r}_0, t) \quad (219)$$

gibt dann bei konstantem \mathbf{r}_0 die Bahnkurve des Teilchens an. Wenn die Funktion ψ für alle möglichen Werte von \mathbf{r}_0 bekannt ist, hat man ebenfalls eine erschöpfende Beschreibung des ganzen Bewegungsvorgangs. Auch bei der Untersuchungsmethode von Lagrange handelt es sich daher im wesentlichen um die Bestimmung einer Funktion ψ . Natürlich kann auch Gl. (219) durch drei Komponentengleichungen ersetzt werden.

§ 50. Die hydrodynamischen Gleichungen von Euler.

Bis jetzt ist die Untersuchungsmethode, die hier einzuhalten ist, nur im allgemeinen geschildert worden, ohne jede Rücksicht auf die Bedingungen, denen eine Flüssigkeitsbewegung unterworfen ist. Die Formulierung dieser Bedingungen wird uns zu den hydrodynamischen Gleichungen führen. Die Bedingungen sind von zweifacher Art. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar anzusehen ist, muß die Strömung jedenfalls immer in solcher Weise erfolgen, daß aus einem gegebenen Teile des festen Raumes, der ganz im Innern der Flüssigkeit liegt, jederzeit ebenso viel ausströmt, als durch andere Teile der Grenzfläche einströmt. Diese Bedingung ist eine rein kinematische oder geometrische; sie wird als die Konti-

nuitätsbedingung bezeichnet und die Gleichung, die ihr Ausdruck gibt, spielt bei hydrodynamischen Untersuchungen stets die Hauptrolle. Hierzu kommt aber noch die fernere Bedingung, daß die Bewegung des Wassers den allgemeinen Sätzen der Mechanik, also namentlich der dynamischen Grundgleichung, unterworfen ist. Daß die Gleichungen, die dies aussprechen, erst in zweiter Linie, nämlich nach der Kontinuitätsgleichung, in Betracht kommen, rührt davon her, daß die an den Wasserteilchen wirkenden Kräfte auch erst nachträglich so gewählt werden können, daß irgendeine an sich (d. h. geometrisch) mögliche Bewegung zustande kommt, während eine Bewegung, die der Kontinuitätsbedingung nicht von vornherein genügt, überhaupt nicht verwirklicht werden kann.

Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung in der Eulerschen Form betrachte man das in Abb. 70 gezeichnete Raumelement mit den Kantenlängen dx , dy , dz . Wir fragen uns zunächst, wie viel Wasser, auf die Zeiteinheit bezogen, im Augen-

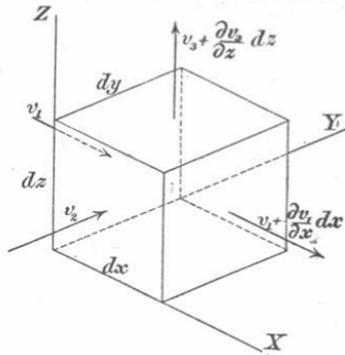


Abb. 70.

blicke durch das in der YZ -Ebene liegende Rechteck einströmt. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} sei ebenfalls in ihre rechtwinkligen Komponenten v_1, v_2, v_3 zerlegt. Die Komponenten v_2 und v_3 tragen hier zur Einströmung nichts bei; es kommt bei dem fraglichen Rechtecke nur auf die Normalkomponente v_1 an. Wenn diese positiv ist, also im Sinne der positiven X -Achse geht, findet eine Einströmung statt, die während der Zeiteinheit dem Parallelepiped das Wasservolumen $v_1 dy dz$ zuführt. Gleichzeitig strömt durch die gegenüberliegende Seitenfläche eine Wassermenge aus, die ebenso groß wäre, als die zugeführte, wenn sich v_1 mit x nicht änderte. Im allgemeinen wächst aber v_1 um das Differential $\frac{\partial v_1}{\partial x} dx$, wenn man um dx

weiter geht. Wenn man beide Flächen zusammenfaßt, hat man daher einen Überschuß der Ausströmung über die Einströmung vom Betrage

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} dx \cdot dy dz.$$

In gleicher Weise kann man auch eine Zusammenfassung für die beiden zur Y -Achse senkrecht stehenden Seitenflächen vornehmen und erhält dann als Überschuß der Ausströmung über die Einströmung

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} dy \cdot dx dz$$

und ebenso für die beiden zur Z -Achse senkrechten Seitenflächen. Im ganzen strömt daher auf die Zeiteinheit bezogen aus dem Parallelepiped das Flüssigkeitsvolumen

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dx dy dz$$

mehr aus, als ein. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar (und unausdehnbar) angesehen wird, kann jedoch nur ebenso viel ausströmen, als einströmen und man erkennt daraus, daß ν in diesem Falle keine ganz willkürliche Funktion von \mathbf{r} sein kann, sondern nur eine solche, die den vorhergehenden Ausdruck zu Null macht. Es macht aber hier gar keine Schwierigkeit, die Betrachtung gleich noch etwas allgemeiner zu fassen und wir wollen daher die Voraussetzung der Unzusammendrückbarkeit für den Augenblick fallen lassen. Dann kann während eines Zeitelementes dt in der Tat mehr Flüssigkeit aus dem Raumelemente ausströmen, als einströmt, und zwar geschieht dies auf Kosten des darin enthaltenen Vorrats an Flüssigkeit, die sich dabei ausdehnt. Zur näheren Verfolgung dieses Zusammenhangs führe ich den Begriff der bezogenen Masse μ ein, also jener Masse, die bei überall gleicher Dichte auf die Raumeinheit käme. Für die zusammendrückbare Flüssigkeit ist μ nicht konstant, sondern nach der Eulerschen Darstellung eine Funktion von \mathbf{r} und t .

Die durch eine Seitenfläche des Raumelementes strömende Flüssigkeitsmasse wird aus deren Volumen durch Multiplikation

mit μ gefunden. Hiernach erhält man für die im ganzen während des Zeitelementes dt aus dem Raumelemente mehr aus- als einströmende Flüssigkeitsmasse den Wert

$$\left(\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z} \right) dx dy dz \cdot dt.$$

Andererseits kann die Änderung, die der Flüssigkeitsvorrat $\mu dx dy dz$ in dem Raumelemente während der Zeit dt erfährt, auch durch

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt \cdot dx dy dz$$

ausgedrückt werden. Dieser Ausdruck würde indessen bei positivem Vorzeichen eine Zunahme, der andere eine Abnahme des Flüssigkeitsinhalts angeben; beide sind daher von gleichem Werte, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Hiermit erhält man sofort die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z} = - \frac{\partial \mu}{\partial t}. \quad (220)$$

Setzen wir dagegen weiterhin die Flüssigkeit wieder als unzusammendrückbar voraus, so ist μ konstant und die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0. \quad (221)$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurden allen Größen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Man erkennt aber, daß die Summe der drei Differentialquotienten auf der linken Seite von der speziellen Wahl, die man für dieses Koordinatensystem getroffen hat, ganz unabhängig ist, oder daß sie, wie man sich ausdrückt, eine invariante Größe ist. Dies folgt aus der physikalischen Bedeutung, die dieser Summe zukommt: wir sahen nämlich, daß das Produkt der Summe mit dem Volumen des Raumelementes, die während der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge angibt. Daß dies auch für jedes anders gestaltete Raumelement noch zutrifft, folgt daraus, daß sich ein solches aus Elementen höherer Ordnung von parallelepipedischer Gestalt zusammensetzen läßt. Die Summe der drei Differential-

quotienten gibt demnach an, wieviel Flüssigkeit, auf die Raumeinheit und auf die Zeiteinheit bezogen, aus irgendeinem Volumenelemente an der betreffenden Stelle und zur gegebenen Zeit ausströmt.

Es ist wünschenswert, diese Größe, die an sich mit einem Koordinatensysteme gar nichts zu schaffen hat, wenn sie auch auf ein solches bezogen werden kann, in einfacherer Weise zu bezeichnen. Man hat dafür die Bezeichnungen Divergenz oder Quelle eingeführt. In der Tat divergiert ja die Flüssigkeit — indem sie sich ausdehnt — an der betreffenden Stelle, wenn die Summe der drei Differentialquotienten positiv ist und man kann auch sagen, daß die Strömung nach außen hin so ist, als wenn sie durch eine im Inneren gelegene Quelle hervorgerufen wäre. In den Formeln schreibt man Divergenz abgekürzt div , setzt also

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad (222)$$

womit der Begriff der Divergenz seine nähere Feststellung erhält. Mit Benutzung dieser Bezeichnung kann die Eulersche Kontinuitätsgleichung für die unzusammendrückbare Flüssigkeit auch in der einfachen Form

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (223)$$

angeschrieben werden.

Die Flüssigkeitsbewegung muß ferner auch dem dynamischen Grundgesetze unterworfen sein. Um dies in einer Gleichung aussprechen zu können, müssen wir zunächst einen Ausdruck für die Beschleunigung und einen für die Resultierende der an einem Massenteilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte aufstellen. Die Beschleunigung wird hier nicht dadurch gefunden, daß man die durch die Gl. (217)

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{r}, t)$$

als Funktion der Zeit t dargestellte Geschwindigkeit \mathbf{v} nach t differenziert. Der Differentialquotient $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ gibt vielmehr nur an, wie sich die Geschwindigkeit an dem gerade ins Auge gefaßten Orte im Laufe der Zeit ändert, während die Beschleuni-

gung die Geschwindigkeitsänderung eines bestimmten Massenteilchens darstellt. Man bedenke, daß sich ein zur Flüssigkeit gehöriger materieller Punkt im Laufe der Zeit dt um $\mathbf{v}dt$ verschoben hat. Wenn nun, wie in der Eulerschen Untersuchungsmethode, \mathbf{v} als Funktion der Zeit und des Ortes dargestellt ist, setzt sich die Änderung der Geschwindigkeit \mathbf{v} des bestimmten Massenteilchens zusammen aus der Änderung wegen der Verschiebung $\mathbf{v}dt$ nach einem anderen Orte und aus der Änderung, die \mathbf{v} auch ohne diese Verschiebung während der Zeit dt schon am gleichen Orte erfährt. Wir wollen dies in der Form

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (\mathbf{v}dt \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

anschreiben, zu deren Erklärung die Bemerkung genügt, daß das Zeichen ∇ einen Differentialoperator vorstellt, der nach Hinzutritt des Faktors $\mathbf{v}dt$ die durch die Verschiebung um $\mathbf{v}dt$ hervorgebrachte Änderung von \mathbf{v} angibt. Die Beschleunigung mag im Gegensatze zu dem vorher schon eingeführten partiellen Differentialquotienten als totaler Differentialquotient von \mathbf{v} nach t angeschrieben werden. Man findet dann aus der vorhergehenden Gleichung nach Division mit dt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \cdot \mathbf{v}. \tag{224}$$

Ich habe diese Beziehung zunächst in Gestalt einer Vektorgleichung angeschrieben, weil sie so am anschaulichsten hervortritt. Da aber die vollständige Durchführung der Rechnung mit Vektoren den damit weniger vertrauten Lesern Schwierigkeiten bereiten würde, ziehe ich es vor, weiterhin die gewohnte Kartesische Darstellungsweise zu benützen.

Ich spalte also Gl. (224) in drei Gleichungen, von denen die erste den Wert von $\frac{dv_1}{dt}$, also die Beschleunigungskomponente in der Richtung der X-Achse anzugeben hat. Man erhält dafür

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}. \tag{225}$$

Dieses Resultat kann entweder unmittelbar aus Gl. (224) abgelesen werden, indem man sich des zuvor angegebenen Sinnes der Operation ($\mathbf{u} \nabla$) erinnert oder man kann auch auf Grund derselben Überlegung, die schon zu Gl. (224) führte, unmittelbar zu Gl. (225) gelangen. Auch die Änderung der Geschwindigkeitskomponente v_1 während eines Zeitelementes dt für einen bestimmten materiellen Punkt setzt sich zusammen aus der Änderung, die v_1 unabhängig von der Verschiebung während dt erleidet und aus der Änderung, die mit dem Ortswechsel verbunden ist. Da sich der materielle Punkt in den Richtungen der Achsen während dt um die Strecken $v_1 dt$, $v_2 dt$, $v_3 dt$ verschiebt, setzt sich auch die mit dem Ortswechsel verbundene Änderung von v_1 aus drei Gliedern zusammen, die durch Multiplikation dieser Wege mit den Differentialquotienten von v_1 nach den drei Achsenrichtungen erhalten werden. Dividiert man die auf solche Art erhaltene Gleichung mit dt , so erhält man Gl. (225). Dieser lassen sich natürlich noch zwei andere für v_2 und v_3 anreihen und im ganzen wird daher Gl. (224) durch den Verein der folgenden drei Gleichungen ersetzt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Wir kommen jetzt zu den Kräften, die diese Beschleunigungen hervorbringen. Von außen her wirkt auf die im Innern liegenden Teile der Flüssigkeit in der Regel nur das Gewicht ein; allgemein mögen aber die drei Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen äußeren Kraft nach den Koordinatenachsen mit XYZ bezeichnet werden. Außerdem wirkt an jedem Massenteilchen noch der Druck der ringsum angrenzenden Flüssigkeit. Man denke sich wieder ein Parallelepiped wie in Abb. 70 aus der Flüssigkeit abgegrenzt. Wenn wir uns zunächst auf die Betrachtung einer reibungsfreien Flüssigkeit

beschränken, steht der Druck auf jede Seitenfläche senkrecht zur Seitenfläche und geht durch deren Schwerpunkt, also auch durch den Mittelpunkt des Parallelepipedes. Die Druckkräfte auf allen Seitenflächen lassen sich daher zu einer Resultierenden zusammensetzen, die ebenfalls durch den Mittelpunkt des Parallelepipedes geht. Auch die äußere Kraft, also in den gewöhnlich vorliegenden Fällen das Gewicht, geht durch diesen Mittelpunkt. Hieraus erkennt man schon, daß die Kräfte an dem in der angegebenen Weise abgegrenzten Wasserkörper keine Drehung, sondern nur eine Translation hervorzubringen suchen; auf diesen Punkt wird in der Folge noch zurückzukommen sein.

Wir wollen jetzt die in der Richtung der X -Achse gehende Komponente der Resultierenden aller an dem betrachteten Wasserkörper angreifenden Kräfte berechnen. Sie setzt sich zusammen aus der Komponente $X dx dy dz$ der äußeren Kraft und aus dem Unterschiede des Flüssigkeitsdruckes auf den beiden zur X -Achse senkrecht stehenden Seitenflächen. Der Flüssigkeitsdruck auf die Flächeneinheit bezogen sei p ; falls p wächst, wenn man in der X -Richtung weitergeht, überwiegt der Druck auf jener Seite, deren äußere Normale in die positive X -Richtung fällt und auf der der Druck daher dieser positiven Richtung entgegengesetzt ist. Demnach erhält man für die X -Komponente der Resultierenden

$$X dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy dz.$$

Diese Komponente bringt die Beschleunigungskomponente $\frac{dv_1}{dt}$ der Masse $\mu dx dy dz$ hervor. Nach der dynamischen Grundgleichung hat man daher bei Weglassung des gemeinsamen Faktors $dx dy dz$ die Beziehung

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (227)$$

und für die beiden anderen Koordinatenrichtungen gilt eine entsprechende Gleichung. Setzt man noch die Werte der Beschleunigungskomponenten aus den Gl. (226) ein, so erhält man

die Eulerschen Gleichungen in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (V + p) \\ \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (V + p) \\ \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} (V + p) \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

Die Umformung, die noch mit den rechten Seiten vorgenommen wurde, bezieht sich auf den Fall, daß die äußere Massenkraft mit den Komponenten XYZ von einem Potentiale V abgeleitet werden kann, was in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, daß diese Kraft nur in dem Gewichte besteht, stets zutrifft. Dabei ist die Flüssigkeit als unzusammendrückbar vorausgesetzt. Man erkennt übrigens leicht, wie die vorausgehende Entwicklung auch für den Fall einer elastischen Flüssigkeit benutzt werden kann. — Durch die Kontinuitätsgleichung in Verbindung mit den Gl. (228) und auch in Verbindung mit den Grenz- und Anfangsbedingungen ist die Bewegung der unzusammendrückbaren Flüssigkeit dynamisch vollständig gekennzeichnet; bei den elastischen Flüssigkeiten muß noch eine aus der Erfahrung zu entnehmende Beziehung zwischen μ und p hinzutreten, um das Problem eindeutig zu umgrenzen.

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß sich die Gl. (228) auch in eine einzige Gleichung zwischen gerichteten Größen zusammenfassen lassen, nämlich in die Gleichung

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathfrak{P} - \nabla p = - \nabla (V + p), \quad (229)$$

in der \mathfrak{P} die Resultierende der XYZ bedeutet.

§ 51. Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung.

Die in der Überschrift angedeutete Einteilung der Flüssigkeitsbewegungen in zwei wesentlich voneinander verschiedene Klassen ist von größter Bedeutung für die Hydrodynamik. Man betrachte den augenblicklichen Bewegungszustand der Flüssigkeit zu irgendeiner Zeit. Jedem Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ist dann eine bestimmte augenblickliche Geschwindigkeit \mathbf{v} zugeordnet (die auch gleich Null sein kann). Man grenze ferner in der Flüssigkeit noch einen einfach zusammenhängenden Raum von im übrigen beliebiger Gestalt ab und ziehe innerhalb dieses Raumes eine zum Anfangspunkt zurücklaufende, sonst aber beliebige Linie. Ein Element dieser Linie sei mit $d\mathbf{s}$, die Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle mit \mathbf{v} bezeichnet. Aus \mathbf{v} und $d\mathbf{s}$ soll das innere Produkt genommen und dann soll die Summe dieser Produkte für alle Linienelemente der geschlossenen Linie gebildet werden. Diese Summe heißt das Linienintegral von \mathbf{v} längs des durch die beliebig gewählte geschlossene Linie dargestellten Integrationsweges. Wenn das Linienintegral stets gleich Null wird, wie man auch den Integrationsweg innerhalb des Bezirks, den wir zu diesem Zwecke willkürlich abgegrenzt hatten, wählen möge, wird die Bewegung innerhalb des Bezirks als wirbelfrei bezeichnet. Trifft dasselbe Kennzeichen auch noch zu für jeden Bezirk, den man abgrenzen mag und auch für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum, so ist die Bewegung überall wirbelfrei. In Form der Gleichung

$$\int_0^0 \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0, \quad (230)$$

die sich auf einen beliebigen, vom Anfangspunkte O -ausgehenden und nach diesem wieder zurückführenden Integrationsweg bezieht, läßt sich demnach die Bedingung, der die wirbelfreie Bewegung genügen muß, in einfachster Weise aussprechen.

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als

eine „wirbelfreie“ bezeichnet, ergibt sich aus einer einfachen Betrachtung. In der Umgangssprache bezeichnet man als „Wasserwirbel“ eine Bewegungsform, bei der die einzelnen Wasserteilchen in sich zurücklaufende Bahnen beschreiben. Allgemein bekannt ist die Erscheinung aus der Beobachtung der Strömung in Flußläufen, bei der sich namentlich in der Nähe von Bewegungshindernissen, etwa von Brückenpfeilern, leicht Wirbel ausbilden, die sich an den Bewegungen kleiner Körper, die von dem Wasser mitgeführt werden, leicht erkennen lassen. Es macht dabei auch nichts aus, wenn zu dieser wirbelnden Bewegung noch andere Bewegungskomponenten hinzutreten, die etwa den Wirbel flußabwärts führen. Beschränkt sich die Wasserbewegung auf die Bewegung längs geschlossener Bahnen und wählt man eine dieser Bahnen als den Integrationsweg für die Bildung des Linienintegrals von \mathbf{v} , so ist dieses jedenfalls positiv, da \mathbf{v} mit $d\mathbf{s}$ überall gleichgerichtet ist. Die in Gl. (230) als Kennzeichen für die wirbelfreie Bewegung aufgestellte Bedingung ist daher im vorliegenden einfachsten Falle schon in bester Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche. Wir bemerkten aber schon, daß zu der wirbelnden Bewegung auch noch andere Bewegungskomponenten hinzutreten können, die zu den Wirbeln selbst nichts beitragen. Diesem Umstande trägt die vorher aufgestellte Definition Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermaßen als wirbelverdächtig zu betrachten. Zu einer in sich längs einer solchen Bahn zurücklaufenden Bewegung tragen nur jene Geschwindigkeitskomponenten etwas bei, die überall in die Bahnrichtung fallen und nur diese sind es auch in der Tat, die in dem inneren Produkte $\mathbf{v}d\mathbf{s}$ zur Geltung kommen. Hat also das Linienintegral von \mathbf{v} einen von Null verschiedenen Wert, so zeigt dies wenigstens einen Überschuß der tangentialen Bewegungskomponenten in einem Umlaufsinne über die im entgegengesetzten Sinne an und man kann sagen, daß im ganzen genommen die Wasserbewegung mit einem bestimmten Umlaufsinne längs des Integrationsweges übereinstimmt. — Freilich ist das durch Gl. (230) angegebene

Kennzeichen mit dem Begriffe der Wirbelbewegung in der Umgangssprache, der keine strenge Abgrenzung besitzt, nicht geradezu identisch; es widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder als eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden. Bei der wissenschaftlichen Untersuchung einer allgemein bekannten und vom Volksmunde nach seiner Art schon beschriebenen Erscheinung ist man nur selten in der glücklichen Lage, wie hier, ohne weiteres an den gewöhnlichen Sprachgebrauch anknüpfen zu können.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen betrachte ich noch die Bewegung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig in sich geschlossenen Rohres. Die Bewegung kann in diesem Falle so erfolgen, das etwa für jeden kugelförmigen Bezirk, den man im Innern der Flüssigkeit abgrenzen mag, Gl. (230) erfüllt ist. Für einen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise schließt, ist sie aber natürlich nicht erfüllt. Der Grund für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, daß der Sitz des Wirbels in diesem Falle an den Flüssigkeitsgrenzen liegt. Im ganzen genommen ist die Bewegung jedenfalls nicht wirbelfrei, wenn sie auch für jeden einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbelfrei sein kann.

Die allgemeinste Bewegung einer Flüssigkeit ist natürlich eine solche, mit der Wirbel verbunden sind; die wirbelfreie Bewegung stellt nur einen besonders einfachen Ausnahmefall dar. Ganz streng ist die Bewegung der Wirbelfreiheit bei einer wirklichen Wasserbewegung überhaupt niemals erfüllt. Die Bewegung kann sich aber der wirbelfreien unter gewissen Umständen sehr nähern und es ist daher von Interesse, die Gesetze dieser einfachsten Bewegungsart kennen zu lernen. In der Tat beziehen sich auch ihrem Umfange nach die meisten Untersuchungen der heutigen Hydrodynamik auf die wirbelfreie Bewegung. Daß eine solche Abgrenzung des Untersuchungsgebietes möglich und in sich einwandfrei ist, beruht auf einem von Lagrange aufgestellten Satze, der hier abgeleitet werden soll.

In einem bestimmten Augenblicke sei in der Wassermasse eine beliebige geschlossene Linie gezogen und für diese das in Gl. (230) vorkommende Linienintegral von \mathbf{v} berechnet. Die Bewegung braucht jetzt nicht wirbelfrei zu sein und das Linienintegral wird daher im allgemeinen irgendeinen von Null verschiedenen Wert A

$$A = \int \mathbf{v} d\mathfrak{s}$$

annehmen. Nach Ablauf eines Zeitelementes dt haben sich die einzelnen Wasserteilchen um Strecken $\mathbf{v} dt$ verschoben und jene, die vorher auf dem gewählten Integrationswege lagen, werden, wenn keine diskontinuierlichen Bewegungen vorkommen, abermals auf einer stetigen geschlossenen Linie liegen. Für diese und für den jetzt herrschenden Bewegungszustand soll das Linienintegral von \mathbf{v} ebenfalls berechnet sein. Der Unterschied gegenüber dem früheren Werte sei mit δA bezeichnet. Dann ist

$$\delta A = \int \delta \mathbf{v} d\mathfrak{s} + \int \mathbf{v} \delta d\mathfrak{s}, \quad (231)$$

wobei zunächst

$$\delta \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt$$

gesetzt werden kann. Die Beschleunigung $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ folgt aus dem dynamischen Grundgesetze, und zwar, wenn wir zur Abkürzung die im vorigen Paragraphen erklärten Bezeichnungen benutzen, zu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mu} (\mathfrak{P} - \nabla p) = -\frac{1}{\mu} \nabla (V + p).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die äußere Kraft \mathfrak{P} von einem Potentiale V abgeleitet werden kann.

Um $\delta d\mathfrak{s}$ zu berechnen, beachten wir, daß sich der Vektor $d\mathfrak{s}$ durch eine Parallelverschiebung nicht ändert, und daß daher $\delta d\mathfrak{s}$ nur von dem Unterschiede der Verschiebungen der Endpunkte von $d\mathfrak{s}$, dieser aber von dem Geschwindigkeitsunterschiede abhängt. Wir können daher setzen

$$\delta d\mathfrak{s} = (d\mathfrak{s} \nabla) \mathbf{v} dt,$$

wenn wir das Operationszeichen $(d\mathfrak{s}\nabla)$ in dem durch den Zusammenhang selbst schon genügend erklärten Sinne verwenden. Ferner wird aber, wenn wir beachten, daß es sich dabei um eine Differentiation nach einer bestimmt vorgeschriebenen Richtung handelt

$$\mathbf{v} \delta d\mathfrak{s} = \mathbf{v}(d\mathfrak{s}\nabla)\mathbf{v} dt = (d\mathfrak{s}\nabla) \frac{\mathbf{v}^2}{2} dt$$

und im ganzen erhält man daher für δA

$$\delta A = -\frac{1}{\mu} dt \int (d\mathfrak{s}\nabla)(V + p) + dt \int (d\mathfrak{s}\nabla) \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Die Summe der Änderungen einer stetigen und eindeutigen Funktion längs der Linienelemente einer Kurve ist aber gleich dem Unterschiede der Funktionswerte im Endpunkte und Anfangspunkte des Kurvenstücks und daher für eine geschlossene Kurve gleich Null. Wir erhalten daher unter den gemachten Voraussetzungen, von denen noch besonders hervorzuheben ist, daß μ konstant, die Flüssigkeit reibungsfrei und das Kraftfeld der äußeren Kräfte wirbelfrei sein sollte,

$$\delta A = 0. \tag{232}$$

Das gilt auch noch von einer Wirbelbewegung unter den angenommenen Voraussetzungen. War aber A anfänglich für jeden geschlossenen Integrationsweg gleich Null, so bleibt es auch dauernd gleich Null.

Wenn die Bewegung einer raumbeständigen und reibungsfreien Flüssigkeit, auf die von außen her nur solche Massenkräfte einwirken, die sich (wie das Gewicht) von einem Potentiale ableiten lassen, zu irgendeiner Zeit wirbelfrei war, so bleibt sie auch weiterhin wirbelfrei. Insbesondere ist die Bewegung wirbelfrei, wenn sie unter dem Einflusse von Kräften der bezeichneten Art aus dem Ruhezustande hervorgegangen ist.

Das ist der Satz von Lagrange, für den sein Urheber freilich keinen stichhaltigen Beweis gegeben hatte. Der hier wiedergegebene Beweis rührt (den Grundzügen nach) von Lord Kelvin her.

Erst durch diesen Satz erlangen die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung die ihnen in der Hydrodynamik mit Recht eingeräumte Bedeutung. Es ist nur zu billigen, daß man sich zunächst Rechenschaft darüber zu geben sucht, was geschehen müßte, wenn weder die Zähigkeit noch die durch Dichteunterschiede hervorgerufene Mischbewegung in Betracht käme. Freilich darf man aber dabei nicht vergessen, daß keine genaue Übereinstimmung zwischen diesem einfachsten Falle und dem wirklichen Bewegungsvorgange erwartet werden darf.

Um zu zeigen, welche Vereinfachungen der theoretischen Behandlung entstehen, wenn man sich auf die Untersuchung wirbelfreier Strömungen beschränkt, erinnere ich an die Betrachtungen des ersten Abschnittes über die Kraftfelder.

An die Stelle des Linienintegrals der Kraft ist hier nur das Linienintegral der Geschwindigkeit getreten, während sich sonst nichts geändert hat. Es ist daher nicht nötig, die in § 3 durchgeführten Betrachtungen über das Potential hier nochmals zu wiederholen; wir können vielmehr die Schlüsse, zu denen wir damals gelangten, auf den jetzt vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen. Von diesen ist für uns namentlich von Wichtigkeit; daß sich im wirbelfreien Felde der Vektor des Feldes durch Differentiation aus einer richtungslosen Größe ableiten läßt, die früher als das Potential des Kraftfeldes bezeichnet wurde. Auch bei der wirbelfreien Wasserbewegung muß sich aus denselben Gründen wie damals zu jedem Punkte des Raumes in einem gegebenen Augenblicke eine Größe ohne Richtung angeben lassen, aus der die Geschwindigkeitskomponente nach irgendeiner Richtung durch Differentiation nach dieser Richtung abgeleitet werden kann. Man bezeichnet diese Größe, um die enge Verwandtschaft mit den früheren Betrachtungen über die Kraftfelder ausdrücklich hervorzuheben, als das Geschwindigkeitspotential, obschon die sprachliche Herkunft des Wortes Potential mit der Verwendung, die das Wort hier findet, nichts zu tun hat. Das Geschwindigkeits-

potential sei in der Folge mit Φ bezeichnet; ich setze dann

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (233)$$

Hier findet freilich eine Abweichung im Vorzeichen von den früheren Festsetzungen über das Potential der Kraftfelder (vgl. Gl. (12), S. 21) statt. Damals war es mir von Wichtigkeit, an dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten des Potentials festzuhalten, weil das Potential des Kraftfeldes nur bei dieser Vorzeichenfestsetzung mit der potentiellen Energie des Feldes gleichbedeutend werden kann. Beim Geschwindigkeitspotential fällt aber ein solcher bestimmender Grund weg und wir können uns daher das Vorzeichen von Φ von vornherein so gewählt denken, daß die Differentialquotienten, ohne daß ein Vorzeichenwechsel vorauszugehen brauchte, unmittelbar die Geschwindigkeitskomponenten angeben. In der Tat ist es allgemeiner Brauch, das Geschwindigkeitspotential mit der durch die Gl. (233) bereits zum Ausdrucke gebrachten Vorzeichenfestsetzung zu benutzen.

Differentiiert man die erste der Gl. (233) nach y und die zweite nach x und subtrahiert, so erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

und dazu treten noch zwei andere Gleichungen, die in derselben Weise gewonnen werden können. Diese Gleichungen geben die Bedingung an, der die Geschwindigkeitskomponenten genügen müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll. Damit werden wir in den Stand gesetzt, die Bedingung für die wirbelfreie Bewegung noch in anderer Form auszusprechen, als dies schon mit Hilfe des Linienintegrals in Gl. (230) geschehen war. Man bilde nämlich eine gerichtete Größe \mathbf{w} , deren Komponenten nach den Achsenrichtungen gleich den Differenzen von Differentialquotienten sind, die in dem vorausgehenden Ausdrucke vorkommen, nämlich

$$\mathbf{w} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right). \quad (234)$$

Die Größe ω wird nur dann zu Null, wenn alle drei Komponenten für sich verschwinden. Wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll, also wenn die Bewegung wirbelfrei sein soll, müssen aber diese Komponenten, wie aus dem Vergleiche mit den Gl. (233) hervorgeht, sämtlich zu Null werden. Als Bedingung für die wirbelfreie Wasserbewegung kann man daher auch die Gleichung

$$\omega = 0 \quad (235)$$

an Stelle von Gl. (230) aufstellen. Jedenfalls ist diese Bedingung eine notwendige; daß sie auch hinreichend ist, läßt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen noch nicht erkennen. Da dieser Nachweis für die Folge nicht nötig ist, werde ich davon absehen, ihn hier ebenfalls zu führen; näheres darüber findet man in meiner „Geometrie der Wirbelfelder“. Nur dies möchte ich noch erwähnen, daß man mit Hilfe eines von Stokes aufgestellten Satzes den unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Gl. (230) und (235) in einfachster Weise erkennen kann.

Wenn das Feld nicht wirbelfrei ist, entsteht das Bedürfnis nach einem Maße für den Wirbel, oder vielleicht besser gesagt, nach einem Maße dafür, in welchem Grade und in welcher Art die Bewegung von der wirbelfreien abweicht. Hierzu kann die durch Gl. (234) definierte gerichtete Größe ω ohne weiteres benützt werden, da ihr Verschwinden die Bedingung für das Nichtvorhandensein von Wirbeln innerhalb eines Bezirks bildet, der der gerade betrachteten Stelle eng benachbart ist. An Stelle der Größe ω selbst kann auch irgendein Vielfaches davon als Maß des Wirbels benutzt werden. Helmholtz, dem man die ersten Untersuchungen über die Wirbelbewegungen verdankt, hat dazu die Hälfte von ω gewählt, und zwar auf Grund eines Vergleichs der Wasserbewegung in einem engen Bezirke mit der Bewegung eines starren Körpers. Die Hälfte von ω entspricht dann der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers.

Die große Bedeutung des Wirbelbegriffes beschränkt sich

übrigens nicht auf die Hydrodynamik, sondern sie tritt in der Elektrizitätslehre fast noch mehr hervor. Es hat sich daher die Notwendigkeit herausgestellt, eine einfache Bezeichnung für den analytischen Zusammenhang zwischen dem Wirbel \mathfrak{w} und der Geschwindigkeit \mathfrak{v} einzuführen. Gl. (234) gestattet zunächst, \mathfrak{w} unter Zugrundelegung eines Koordinatensystems zu berechnen, wenn \mathfrak{v} überall gegeben ist. Aus der physikalischen Bedeutung des Vektors \mathfrak{w} folgt aber schon, daß \mathfrak{w} von der besonderen Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein muß. Es ist daher zweckmäßiger, bei der Angabe des Zusammenhangs zwischen \mathfrak{w} und \mathfrak{v} die Bezugnahme auf ein Koordinatensystem zu vermeiden. Man nennt \mathfrak{w} den Quirl von \mathfrak{v} , und setzt mit Benutzung der ursprünglichen englischen (von Maxwell eingeführten) Bezeichnung

$$\mathfrak{w} = \text{curl } \mathfrak{v} \quad (236)$$

(curl = Quirl). Bei der wirklichen Ausrechnung von \mathfrak{w} ist man freilich sehr oft genötigt, auf die mit Gl. (236) gleichbedeutenden Gl. (234) wieder zurückzugehen.

§ 52. Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfreie Bewegung.

Die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen werden für den Fall der wirbelfreien Bewegung am besten so umgeformt, daß alle Geschwindigkeitskomponenten im Geschwindigkeitspotentiale Φ mit Hilfe der Gl. (233) ausgedrückt werden. Sie vereinfachen sich dann erheblich. Die Kontinuitätsgleichung (221) nimmt dann die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (237)$$

an, wofür man mit Benutzung des schon von früher her bekannten Laplaceschen Operators ∇^2 kürzer

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (238)$$

schreiben kann. Ferner findet man für den in Gl. (225) angegebenen Ausdruck für die Beschleunigungskomponente in

der X-Achse, nämlich

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

nach Einsetzen von

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

jetzt

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}.$$

Die drei letzten Glieder in diesem Ausdrucke bilden den partiellen Differentialquotienten nach x von

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ oder von } \frac{1}{2} \mathbf{v}^2,$$

wenn \mathbf{v} wieder die Gesamtgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle nach Größe und Richtung bedeutet, wobei man beachten möge, daß das Quadrat (oder das innere Produkt mit sich selbst) einer gerichteten Größe eine Größe ohne Richtung angibt. Setzt man dies ein, so erhält man die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (239)$$

Die in Gl. (228) zusammengestellten Eulerschen Gleichungen gehen nun — immer unter der Voraussetzung, daß die äußere Massenkraft von einem Potentiale V abgeleitet werden kann — über in

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial x} (V + p) \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial y} (V + p) \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} &= - \frac{\partial}{\partial z} (V + p) \end{aligned} \right\}. \quad (240)$$

Da nun μ für die raumbeständige Flüssigkeit, um die es sich bei diesen Betrachtungen allein handelt, konstant ist,

lassen sich die Gl. (240) zu einer einzigen Integralgleichung zusammenfassen. Sie sprechen ja in der Tat nur aus, daß sich die Größen, deren Differentialquotienten nach x , y und z miteinander übereinstimmen, nur um eine Größe voneinander unterscheiden können, die von diesen Veränderlichen unabhängig ist, während sie von t abhängig sein kann. Bezeichnen wir diese Größe mit $f(t)$, so liefert die Integration der Gl. (240)

$$\mu \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} + V + p = f(t). \quad (241)$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Beziehung bei der stationären Flüssigkeitsströmung, also bei einer Bewegung, die sich dauernd in der gleichen Weise fortsetzt. Dann sind \mathbf{v} , Φ , p zwar immer noch mit dem Orte veränderlich, an jedem Punkte des festen Raumes bleiben sie aber der Zeit nach konstant. Der Differentialquotient von Φ verschwindet dann in der vorausgehenden Gleichung und auch $f(t)$ muß der Zeit nach konstant, also überhaupt eine Konstante sein, weil alle übrigen in der Gleichung vorkommenden Größen von t unabhängig sind. Für die stationäre wirbelfreie Strömung hat man daher die einfache Beziehung

$$\frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 + V + p = C \quad (242)$$

oder in Worten: die Summe aus der kinetischen Energie, dem Potentiale der äußeren Kräfte (d. h. der potentiellen Energie) und dem Flüssigkeitsdrucke hat zu jeder Zeit und für alle Stellen des Raumes denselben Wert, wenn man diese Größen auf die Raumeinheit bzw. auf die Flächeneinheit bezieht. Dieses Resultat stimmt nahezu überein mit einem, das schon im ersten Bande § 58 auf viel einfacherem Wege gefunden und durch Gl. (139), 3. Aufl., ausgedrückt wurde. In einer Hinsicht besteht indessen zwischen beiden Resultaten doch ein sehr wesentlicher Unterschied. Das frühere Resultat galt nur für die Veränderlichkeit des Druckes in dem gleichen Stromfaden und es bleibt in diesem begrenzten Umfange, wie aus der Ableitung hervorgeht, auch dann noch gültig, wenn die Bewegung nicht wirbel-

frei ist, falls dabei nur von der Flüssigkeitsreibung abgesehen werden kann. Gl. (242) ist insofern viel allgemeiner gültig, als sie die Veränderlichkeit des Druckes auch dann noch angibt, wenn man von einem Punkte eines Stromfadens zu einem Punkte irgendeines anderen Stromfadens übergeht. Andererseits ist dagegen die Gültigkeit dieser erweiterten Beziehung an die Bedingung geknüpft, daß die Bewegung wirbelfrei ist. Ich bitte auf diesen wesentlichen Unterschied sorgfältig zu achten, da der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck bei der Theorie der hydraulischen Motoren in der theoretischen Maschinenlehre sehr häufig zum Ausgangspunkte der ganzen Entwicklung gemacht wird.

§ 53. Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit.

Ein fester kugelförmiger Körper möge sich in einer Flüssigkeit geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Es fragt sich, was für eine Kraft von außen her an ihm wirken muß, um diese Bewegung aufrecht zu erhalten. Dabei soll angenommen werden, daß sich der Körper hinlänglich weit von den Grenzflächen der Flüssigkeit entfernt befindet, um den Einfluß benachbarter Wände usf. vernachlässigen zu können. Wir drücken diese Voraussetzung am einfachsten dahin aus, daß wir die Flüssigkeit nach allen Seiten hin als unbegrenzt ansehen. In größerer Entfernung von der sich bewegenden Kugel soll die Flüssigkeit ruhen; in der Nachbarschaft der Kugel treten natürlich Strömungen auf, da die Flüssigkeit der Kugel während ihres Fortschreitens vorn ausweichen muß, während sie sich hinter ihr wieder zusammenschließt.

Wenn die Kugel in Ruhe wäre, würde die Flüssigkeit einen hydrostatischen Auftrieb an ihr ausüben und es müßte daher, um sie in Ruhe zu erhalten, eine lotrechte Kraft an ihr angebracht werden, die mit dem Gewichte der Kugel und

dem hydrostatischen Auftriebe Gleichgewicht herstellte. Denken wir uns nachher die Kugel in horizontaler Richtung durch die Flüssigkeit bewegt, so wird immer noch, um ein Verschieben in der lotrechten Richtung zu verhüten, durch eine äußere Kraft Gleichgewicht zwischen dem Auftriebe und dem Kugelgewichte hergestellt werden müssen. Diese Kraft ist einfach zu ermitteln und sie interessiert uns hier weiter nicht; von Interesse ist für uns nur die Kraft, die man in der Bewegungsrichtung aufwenden muß, um den Widerstand der Flüssigkeit gegen die Bewegung zu überwinden. Wir wollen uns deshalb die Kugel von vornherein von gleichem spezifischem Gewichte mit dem Wasser vorstellen, so daß sie im Ruhestande darin von selbst schwimmt. Wir können dann von der Einwirkung der Schwerkraft auf die Kugel und die Flüssigkeit ganz abgesehen; der Vorgang erfolgt so, als wenn die Schwere überhaupt nicht vorhanden wäre.

Wenn die Aufgabe in dieser Weise gestellt wird, haben wir es nicht mit einer stationären Strömung zu tun, da die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem bestimmten Punkte des festen Raumes wechselt, wenn die Kugel auf ihrer Bahn fortschreitet. Relativ zu einem Raume, der sich mit der Kugel ohne Drehung gleichförmig weiter bewegt, wird die Bewegung dagegen, nachdem sie schon längere Zeit angedauert hat, stationär sein. Man vereinfacht daher die Aufgabe, wenn man die Bewegung von einem solchen Raume aus beobachtet; Zusatzkräfte der Relativbewegung brauchen dabei nicht angebracht zu werden, da sich der Raum weder dreht, noch eine Translationsbeschleunigung besitzt. Einfacher läßt sich dies auch dahin ausdrücken, daß man sich die Kugel von vornherein an ihrer Stelle festgehalten denkt, während die Flüssigkeit an ihr vorüberströmt. Man kann sich die Kugel etwa in das Wasser eines Flusses versenkt denken, so daß sie hinreichend weit von dem Umfange des Flußbettes und der Wasseroberfläche entfernt bleibt. Bewege sich das Wasser an dieser Stelle vor dem Einsenken der Kugel gleichförmig, so nämlich, daß die Geschwindigkeit v sowohl dem Orte als der Zeit nach in

diesem Bezirke konstant war, so wird dieselbe Kraft an der Kugel angebracht werden müssen, um sie vor dem Fortreißen mit der Strömung zu schützen, als wenn das Wasser ruhte und die Kugel sich im entgegengesetzten Sinne mit konstanter Geschwindigkeit bewegte. In dieser Form läßt sich die Aufgabe am einfachsten weiter behandeln.

Wir betrachten die Flüssigkeit als reibungsfrei und nehmen hiermit zugleich an, daß die Bewegung wirbelfrei sei. Die Wasserströmung ist dann vollständig bekannt, wenn man das von der Zeit unabhängige Geschwindigkeitspotential Φ anzugeben vermag. Da das Problem durch die auferlegten Bedingungen physikalisch vollständig bestimmt ist, muß auch Φ bis auf eine willkürliche Konstante, die man ihm nach Belieben zufügen darf, ohne an den daraus abgeleiteten Geschwindigkeitskomponenten etwas zu ändern, vollständig bestimmt sein. Falls man daher einen Ausdruck von Φ kennt, der allen Bedingungen genügt, ist dieser — abgesehen von jener willkürlichen Konstanten — der richtige. Wenn man will, kann man dies auch noch strenger beweisen, indem man zuerst annimmt, es wären zwei Werte von Φ möglich, die allen Bedingungen genügen, dann ihre Differenz bildet und zeigt, daß diese notwendig eine Konstante sein muß.

Dirichlet hat den Ausdruck von Φ , der den Bedingungen unserer Aufgabe genügt, gefunden, nämlich

$$\Phi = az \left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1 \right). \quad (243)$$

Dabei ist angenommen, daß die positive Z -Achse in jene Richtung gelegt ist, in der die ungestörte Strömung der Flüssigkeit erfolgt; a ist die Geschwindigkeit dieser Strömung, ϱ der Radius der festgehaltenen Kugel und r die Entfernung jenes Punktes in der Flüssigkeit, für den Φ durch Gl. (243) angegeben wird, vom Kugelmittelpunkte, der als Koordinatenursprung dient. Auf die Orientierung der X - und der Y -Achse kommt offenbar nichts an, da rings um die Z -Achse alles symmetrisch ist. Für r hat man übrigens nach dem pythagoreischen

Lehrsatz die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (244)$$

mit deren Hilfe sofort die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \quad (245)$$

gebildet werden können. Um zu beweisen, daß der für Φ angegebene Ausdruck in der Tat die Lösung unseres Problems bildet, ermitteln wir zunächst die Geschwindigkeitskomponenten, die sich daraus ergeben. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichungen (245)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -az \frac{3\rho^3}{2r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -a \frac{3\rho^3}{2r^5} xz \\ v_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -az \frac{3\rho^3}{2r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -a \frac{3\rho^3}{2r^5} yz \\ v_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = a \left(\frac{\rho^3}{2r^3} + 1 \right) - az \frac{3\rho^3}{2r^4} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= a \frac{\rho^3}{2r^3} + a - a \frac{3\rho^3}{2r^5} z^2 \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten müssen vor allem der Kontinuitätsbedingung genügen. Um dies zu prüfen, stellen wir die Differentialquotienten nach x, y, z auf, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -a \frac{3\rho^3}{2r^5} z + a \frac{15\rho^3}{2r^6} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot xz = az \frac{3\rho^3}{2r^5} \left(\frac{5x^2}{r^2} - 1 \right), \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= az \frac{3\rho^3}{2r^5} \left(\frac{5y^2}{r^2} - 1 \right), \\ \frac{\partial v_3}{\partial z} &= -a \frac{3\rho^3}{2r^5} z - 2az \frac{3\rho^3}{2r^5} + a \frac{15\rho^3}{2r^7} z^3 = az \frac{3\rho^3}{2r^5} \left(\frac{5z^2}{r^2} - 3 \right). \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Differentialquotienten oder $\nabla^2 \Phi$ muß Null ergeben. In der Tat findet man aber beim Zusammenzählen

$$\nabla^2 \Phi = az \frac{3\rho^3}{2r^5} \left(\frac{5x^2 + 5y^2 + 5z^2}{r^2} - 5 \right)$$

und dies wird mit Rücksicht auf Gl. (244) identisch zu Null. Damit ist zunächst gezeigt, daß die durch Φ angegebene Flüssigkeitsbewegung in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit geometrisch möglich ist.

Hierzu kommen noch die Grenzbedingungen. An der Kugeloberfläche muß die Flüssigkeit der Kugel ausweichen, d. h. die Geschwindigkeit der Flüssigkeit kann dort überall nur tangential gerichtet sein. Um dies zu untersuchen, denke man sich an irgendeiner Stelle der Kugeloberfläche eine Normale n nach außen hin gezogen. Die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung dieser Normalen wird erhalten, wenn man Φ in der Richtung der Normalen differentiiert, und wenn die Lösung richtig sein soll, muß dieser Wert überall gleich Null sein. Wir bilden den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = a \left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1 \right) \frac{\partial z}{\partial n} - a z \frac{3\varrho^3}{2r^4} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Wenn man in der Richtung der Normalen um ∂n von der Kugelfläche weiter geht, wächst r um ∂r und man hat daher

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1.$$

Projiziert man ferner ∂n auf die Z -Achse, so erhält man das zugehörige ∂z , und da ∂n mit dem zur betreffenden Stelle gezogenen Radius r , dessen Projektion z ist, gleiche Richtung hat, besteht die Proportion

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{z}{r}.$$

Setzt man diese Werte ein, so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{az}{r} \left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1 \right) - a z \frac{3\varrho^3}{2r^4} = \frac{az}{2r^4} (\varrho^3 + 2r^3 - 3\varrho^3)$$

und an der Kugeloberfläche wird dies in der Tat überall zu Null, weil dort $r = \varrho$ ist.

Schließlich muß noch in größerer (oder streng genommen in unendlicher) Entfernung von der Kugel die Flüssigkeit überall parallel zur Z -Achse mit der Geschwindigkeit a strömen. In der Tat wird aber, wie man aus den Gleichungen (246) erkennt, für $r = \infty$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = a.$$

Die Flüssigkeit strömt demnach überall so, wie es den geometrischen Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es bleibt

jetzt nur noch übrig, auf die Erfüllung der aus der dynamischen Grundgleichung hervorgegangenen Eulerschen Gleichungen zu achten. Für den Fall der stationären Strömung sind diese bereits in der Integralgleichung (242) zusammengefaßt. Da wir auf die Veränderlichkeit des Druckes mit der Höhe jetzt nicht zu achten brauchen, weil der Vorgang, wie bereits bemerkt, im übrigen so erfolgt, als wenn die Flüssigkeit und die Kugel der Schwere überhaupt nicht unterworfen wären, können wir diese Gleichung hier noch dadurch vereinfachen, daß wir das Potential konstant setzen und es in die Konstante C mit einrechnen. Wir haben dann

$$\frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 + p = C.$$

In unendlicher Entfernung von der Kugel wird $\mathbf{v}^2 = a^2$ und wir erkennen daraus, daß dort auch überall derselbe Druck herrscht, so als wenn die Kugel nicht vorhanden wäre. Bezeichnen wir diesen Druck an den fernen Grenzen mit p_0 , so findet man damit auch die Konstante C , nämlich

$$C = \frac{1}{2} \mu a^2 + p_0$$

und der Druck an irgendeiner anderen Stelle ist

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \mu (a^2 - \mathbf{v}^2). \quad (247)$$

Hiermit ergibt sich auch der Druck, den die Flüssigkeit auf irgendeine Stelle der Kugeloberfläche ausübt, indem man

$$\mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

bildet und die Werte aus den Gleichungen (246) einführt, wobei noch darauf zu achten ist, daß an der Kugeloberfläche $r = \rho$ zu setzen ist und xyz Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche bedeuten. Führt man dies aus und bezeichnet man die Geschwindigkeit irgendwo in nächster Nähe der Kugeloberfläche mit \mathbf{v}_ρ , so wird

$$\mathbf{v}_\rho^2 = \frac{9a^2}{4} \left(1 - \frac{z^2}{\rho^2}\right). \quad (248)$$

Dort, wo die Z -Achse die Kugeloberfläche schneidet, wird $z = \rho$

und daher v_e gleich Null, was schon von vornherein zu erwarten war. Am größten wird die Geschwindigkeit am Äquator der Kugel, der in die XY -Ebene fällt und für den $z = 0$ ist. Die Flüssigkeit strömt dort mit der Geschwindigkeit $\frac{3a}{2}$ an der Kugel vorüber. Der Druck p_e an der Kugelfläche ist nach Gl. (247)

$$p_e = p_0 + \frac{\mu a^2}{8} \left(9 \frac{z^2}{a^2} - 5 \right). \quad (249)$$

In den Endpunkten des in der Richtung der Strömung gezogenen Durchmessers nimmt p_e seinen größten Wert p_{\max} an, nämlich

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\mu a^2}{2},$$

und zwar wird der Druck, worauf wohl zu achten ist, an der der Strömung abgekehrten Seite ebenso groß als an der der Strömung zugekehrten. Der kleinste Druck p_{\min} herrscht am Äquator der Kugel, nämlich

$$p_{\min} = p_0 - \frac{5\mu a^2}{8}.$$

Wir setzen dabei voraus, daß p_0 groß genug ist, damit p_{\min} positiv bleibt, weil sonst die Ausbildung eines Hohlraumes zu erwarten wäre.

Im übrigen ist p_e eine gerade Funktion von z . Es ist daher für p_e gleichgültig, ob das Vorzeichen von z positiv oder negativ ist, d. h. der Druck ist an entsprechenden Stellen der der Strömung abgewendeten Halbkugel genau ebenso groß als auf der ihr zugewendeten Halbkugel. Daraus folgt ohne weiteres, daß sich alle von der Flüssigkeit auf die Kugel übertragenen Druckkräfte im Gleichgewichte miteinander halten. Wir kommen daher zu dem unerwarteten Resultate, daß man überhaupt keine Kraft an der Kugel anzubringen braucht, um sie bei der wirbelfreien Strömung in der vollkommenen Flüssigkeit an ihrer Stelle festzuhalten; sie bleibt vielmehr von selbst stehen und läßt

die Flüssigkeit um sich herumfließen, ohne sich von der Stelle zu rühren.

Zugleich folgt daraus auch, daß sich der geradlinig gleichförmigen Bewegung einer Kugel durch eine vollkommene Flüssigkeit kein Widerstand entgegengesetzt. Wenn das Wasser eine vollkommene Flüssigkeit wäre, in der auch keine Mischbewegungen vorkämen, brauchte man keine Arbeit aufzuwenden, um darauf zu fahren; nur zu Beginn der Fahrt wäre ein Anstoß erforderlich, um die Anfangsgeschwindigkeit herzustellen.

Das wirkliche Verhalten des Wassers ist natürlich ganz anders. Wir sind mit dem Widerstande, den das Wasser der Fortbewegung eines in ihm schwimmenden Körpers entgegengesetzt, so bekannt, daß wir unwillkürlich geneigt sind, diesen Widerstand mit der Eigenschaft des Flüssigseins in Verbindung zu bringen und ihn daher auch bei einer vollkommenen Flüssigkeit vorauszusetzen. Unsere Untersuchung lehrt uns aber, daß diese Meinung irrig ist. Der Widerstand, den das Wasser schwimmenden Körpern entgegengesetzt, kommt nicht davon her, daß das Wasser an sich ein flüssiger Körper ist, sondern davon, daß es nicht vollkommen flüssig ist, sowie ferner auch von den Mischbewegungen, auf die bei unserem Ansatz nicht gerechnet wurde. Über solche Fragen kann daher ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat nur aus Betrachtungen gewonnen werden, die auf diese Umstände Rücksicht nehmen. Ich möchte hier nur erwähnen, daß man die Aufgabe der sich durch das Wasser bewegendes Kugel auch mit Berücksichtigung der Zähigkeit gelöst und hierbei gefunden hat, daß das Wasser der Bewegung einen Widerstand entgegensetze, der der Geschwindigkeit (bei gleichförmiger Bewegung) proportional sei. Das gilt aber nur für sehr geringe Geschwindigkeiten und außerdem auch nur unter der Voraussetzung, daß die Mischbewegungen vernachlässigt werden dürfen. Die Erfahrung hingegen lehrt, daß bei größeren Geschwindigkeiten der Widerstand proportional mit dem Quadrate der Geschwindigkeit angenommen werden kann.

Daß die vollkommene Flüssigkeit der gleichförmigen Be-

wegung eines in ihr schwimmenden Körpers beim Fehlen von Mischbewegungen kein Hindernis zu bereiten vermag, läßt sich übrigens auch auf Grund einer ganz einfachen Betrachtung erkennen. Wäre ein solcher Widerstand zu überwinden, so müßte an dem Körper, um ihn in seiner Bewegung zu erhalten, eine Arbeit von außen her geleistet werden. Wohin sollte aber diese Energie gelangen? Bei der zähen Flüssigkeit wird Energie zur Überwindung der inneren Reibungen verbraucht und in Wärme verwandelt. Dasselbe gilt von dem Stoßverluste, der durch die Mischbewegung hervorgerufen wird. Bei der vollkommenen Flüssigkeit ist aber in unserem Falle kein solcher Energieaufwand möglich; sie vermag überhaupt keine mechanische Energie aufzuzehren, außer wenn eine Mischung von Wasserteilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten stattfindet, bei der ebenso wie beim Stoße plastischer Körper mechanische Energie vernichtet werden kann. Auch die lebendige Kraft des ganzen Systems behält fortwährend denselben Wert und ins Unendliche vermag sich ebenfalls die Energie nicht zu zerstreuen. Da kein Energiebedarf vorliegt, um die Bewegung zu unterhalten, braucht dem bewegten Körper auch keine Energie zugeführt zu werden, d. h. der Widerstand der Flüssigkeit ist gleich Null. Diese Überlegung hat zugleich den Vorteil, daß sie sich nicht auf den kugelförmigen Körper beschränkt, sondern auch auf Körper von beliebiger Gestalt anwendbar ist.

Vor allem interessiert natürlich den Techniker bei diesen Betrachtungen der Widerstand, den ein Schiff auf seiner Fahrt findet. Für ein unterseeisches Boot, das nicht zu nahe an der Oberfläche schwimmt, könnten für die Bewegung in der vollkommenen Flüssigkeit ohne Mischbewegung die vorausgehenden Schlüsse ohne weiteres angewendet werden. Bei einem gewöhnlichen Schiffe, das nur zum Teile im Wasser schwimmt und sich im übrigen im Luftraume fortbewegt, muß aber noch eine wichtige Ergänzung hinzutreten. Der Luftwiderstand mag dabei übrigens gegenüber dem viel größeren Widerstande des Wassers vernachlässigt werden. Wir gehen wieder

auf die Bewegung der Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit zurück. Die Kugel mag sich in horizontaler Richtung bewegen; durch die Z -Achse, die mit der Bewegungsrichtung zusammenfiel, sei eine horizontale Ebene, etwa die YZ -Ebene, gelegt. Diese teilt die Kugel und die Flüssigkeit in zwei symmetrisch zueinander liegende und sich in jeder Hinsicht genau gleich verhaltende Hälften. Es strömt auch niemals während des Bewegungsvorgangs Flüssigkeit aus der einen Hälfte in die andere über. Es ändert daher nichts, wenn wir uns die eine, und zwar die obere Hälfte ganz beseitigt denken. Wir behalten dann eine Halbkugel, die sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit, mit der sie gerade abschneidet, fortbewegt. Man kann sich diese Halbkugel etwa als ein Schiffsgefäß denken, das sich auch noch über die Wasseroberfläche erheben darf, wenn der Luftwiderstand, den der emporragende Teil findet, vernachlässigt werden kann. Es scheint zunächst, als wenn für den Bewegungswiderstand des an der Oberfläche schwimmenden Schiffes dasselbe gelten müßte wie für den Widerstand an der vollständig eingetauchten Kugel.

Man muß aber bedenken, daß der Druck in der YZ -Ebene veränderlich ist, wie aus Gl. (247) hervorgeht. Solange die Flüssigkeit zusammenhing, war dies gleichgültig, da der Druck auf beiden Seiten der YZ -Ebene um gleich viel abnahm. Wenn sich aber nur auf der einen Seite Wasser und auf der anderen Luft befindet, deren Druck auf die Wasseroberfläche überall fast genau denselben Wert hat, kann der Druckunterschied in der YZ -Ebene nicht so weiter bestehen, wie er vorher berechnet war. An den Stellen, wo p nach der früheren Rechnung seinen größten Wert annahm, also an den Endpunkten des in der Bewegungsrichtung gezogenen Durchmessers, muß die Wasseroberfläche nach oben hin ausweichen, da ihr dort kein genügender Gegendruck widersteht und an den Endpunkten der Y -Achse, wo der Druck nach Gl. (249) am kleinsten wird, senkt sich der Wasserspiegel. Der Bewegungsvorgang bei einem an der Wasseroberfläche schwimmenden Schiffe ist aus diesem Grunde recht erheblich von dem bei einem unter-

seischen Boote oder bei einem Fische verschieden. Wenn das Schiff weiterrückt, müssen sich die Hebungen und Senkungen, die der Wasserspiegel erfuhr, wieder ausgleichen und hierbei entsteht eine weitere Bewegung, die sich in Form einer Welle über die Wasseroberfläche ausbreitet. Ein an der Wasseroberfläche schwimmendes Schiff müßte hiernach auch selbst in einer vollkommenen Flüssigkeit einen Bewegungswiderstand finden; es müßte ihm nämlich fortwährend Energie zur Neubildung der Oberflächenwellen während der Fahrt zugeführt werden. Die Oberflächenwellen würden bei der seitlich unbegrenzten vollkommenen Flüssigkeit die Energie stetig ins Unendliche hinaus fortführen.

Die zuletzt gezogenen Schlüsse stimmen nun auch in der Tat wieder ganz gut mit den Beobachtungen am Wasser überein. Jedermann kennt die Oberflächenwellen, die ein in der Fahrt befindliches Schiff hervorruft und man weiß auch, daß die Kraft der Maschine bei größeren Geschwindigkeiten zum größten Teile zur Erzeugung dieser Wellen verbraucht wird. Im übrigen aber müssen wir aus dem Ergebnisse der hier durchgeführten Untersuchung schließen, daß eine physikalisch genaue Lösung der gestellten Aufgabe, den Widerstand eines im Wasser bewegten Körpers zu finden, von vornherein einen anderen Ansatz erfordert, als er bis jetzt in der Hydrodynamik üblich ist. Dieser Ansatz wird so gestaltet werden müssen, daß darin auf den Einfluß der Mischbewegungen in geeigneter Weise Rücksicht genommen wird.

§ 54. Strömung in Röhren; Zähigkeit.

Bei der Strömung des Wassers in Rohrleitungen erfolgt die Bewegung jedenfalls der Hauptsache nach in geraden Linien parallel zur Rohrachse. Daneben kann und wird freilich auch eine „Mischbewegung“ einhergehen, die ihrerseits auch den Hauptvorgang je nach den Umständen mehr oder weniger zu beeinflussen vermag.

Aus den Beobachtungen ist zu schließen, daß die Flüssig-

keit unmittelbar an der Rohrwand gegen diese nicht gleitet, sondern von ihr festgehalten wird. Das hängt, wie man alsbald sehen wird, von den besonderen Gesetzen der Flüssigkeitsreibung ab. Wenn nun von dieser ein so wesentlich bestimmender Einfluß ausgeübt wird, folgt daraus, daß man bei der Theorie der Strömung in Röhren von vornherein auf die Zähigkeit der Flüssigkeiten Rücksicht nehmen muß.

Die Zähigkeit ist eine Eigenschaft, die allen physikalischen Flüssigkeiten in mehr oder minder hohem Maße zukommt. Sie äußert sich darin, daß in der strömenden Flüssigkeit Schubspannungen auftreten, die man in diesem Falle auch als innere Reibungen bezeichnet. Über die Gesetze der inneren Reibungen hat man sich auf Grund der darüber vorliegenden Erfahrungen die folgenden Vorstellungen gebildet. Man nimmt an, daß sie — im Gegensatze zur Reibung zwischen festen Körpern — unabhängig vom Drucke sind, daß sie dagegen von den Geschwindigkeitsunterschieden zwischen verschiedenen Stellen abhängen und proportional mit ihnen wachsen. Außerdem hängen sie von der Art der Flüssigkeit und auch von ihrer Temperatur ab. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, führen wir eine Konstante k , den Zähigkeitskoeffizienten ein, dessen Wert für jede Flüssigkeit bei jeder Temperatur durch Versuche zu ermitteln ist. Wenn nun die Strömung innerhalb eines kleinen Bezirks überall in der Richtung der Z -Achse mit einer Geschwindigkeit v erfolgt, die sich der Größe nach ändert, wenn man von einem Stromfaden zu einem benachbarten übergeht, so wird in einem Flächenelemente das senkrecht zur X -Achse gelegt ist, eine auf die Flächeneinheit bezogene Schubspannung oder innere Reibung τ übertragen, die man

$$\tau = k \frac{dv}{dx} \quad (250)$$

setzt. Auf jener Seite der Schnittfläche, nach der hin v kleiner ist, geht die Schubspannung in gleicher Richtung mit v , auf der anderen Seite daher in der entgegengesetzten Richtung. Sie wirkt also, wie man sagen kann, in solchem Sinne, daß

sie die bestehenden Geschwindigkeitsunterschiede auszugleichen sucht.

Dieser Ansatz rührt schon von Newton her. Er schließt die Vorstellung in sich, daß in den Grenzflächen zwischen zwei benachbarten Stromfäden kein Gleiten vorkommen kann, da sonst $\frac{dv}{dx}$ und hiermit auch die Schubspannung unendlich groß würde. Derselbe Ansatz wie für die innere Reibung wird aber auch für die Berechnung der äußeren Reibung, d. h. für die Berechnung der Schubspannung an der Grenzfläche zwischen der Flüssigkeit und einem rauhen Körper (also etwa der Rohrwand) benutzt. Daraus folgt dann, daß auch an dieser Grenzfläche kein Gleiten stattfinden kann, was schon vorher als ein Ergebnis der Erfahrung angeführt wurde.

Die Folgerungen, die man aus der auf dieser Grundlage aufgebauten Theorie der zähen Flüssigkeiten gezogen hat, stimmen recht gut mit der Erfahrung überein, so lange der Einfluß der Mischbewegungen, auf den dabei keine Rücksicht genommen ist, mit Recht vernachlässigt werden darf. Was nun die Mischbewegungen anbetrifft, so ist daran zu erinnern, daß sie den Hauptvorgang stets um so mehr beeinflussen, je größer die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Stellen werden. In dieser Hinsicht gleichen sie den inneren Reibungen. Andererseits treten aber im Gegensatze zu den inneren Reibungen die Mischbewegungen um so mehr hervor, je geringer die Zähigkeit ist und außerdem werden sie auch durch geometrische Bedingungen eingeschränkt. Die an die Rohrwand grenzende äußerste Flüssigkeitsschicht kann überhaupt nicht in einen Austausch mit benachbarten Stromfäden treten, da sie daran durch die Kontinuitätsbedingung gehindert wird, nach der an der Rohrwand eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Rohrwand aus geometrischen Gründen ausgeschlossen ist. Außerdem wird auch unter sonst gleichen Umständen die Mischbewegung in einem weiten Rohr mehr ausmachen, als in einem engen, bei dem sie durch die überall nahe benachbarten Wände in ihrer Ausbildung gehemmt wird.

In der Tat haben nun auch die Versuche gelehrt, daß der Einfluß der Mischbewegungen gering ist und daher vernachlässigt werden darf, wenn die Geschwindigkeit der Hauptbewegung in einem Rohre nicht zu groß ist, und zwar kommt es dabei ferner noch in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Überlegungen auch auf den Rohrdurchmesser und die Zähigkeit der Flüssigkeit an. Nach den Versuchen von O. Reynolds ändert sich die Bewegungsart plötzlich, wenn die Geschwindigkeit einen gewissen kritischen Wert v überschreitet, der

$$v = \frac{kK}{\mu d} \quad (251)$$

gesetzt werden kann, wenn man den Rohrdurchmesser mit d und die auf die Raumeinheit bezogene Masse der Flüssigkeit mit μ bezeichnet. Die Konstante K ist, wie aus den Dimensionen der in der Formel auftretenden Größen hervorgeht, eine absolute Zahl, die zu 1900 bis 2000 ermittelt ist. Für Wasser von 15°C ist k ungefähr $140 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{sec}$, $\mu = \frac{1000 \text{ kg sec}^2}{9.81 \text{ m}^4}$ und mit $K = 2000$ erhält man

$$v = 28 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{d},$$

also z. B. $v = 0,28 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1 \text{ cm}$ oder $v = 0,0028 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1 \text{ m}$.

Man erkennt daraus, daß die kritische Geschwindigkeit bei engen Röhren verhältnismäßig groß, bei großen Wasserleitungsröhren aber so klein ist, daß die ohne Berücksichtigung der Mischbewegungen aufgestellte Theorie für sie ganz ohne Bedeutung ist. Anders ist es aber freilich bei der Strömung von zäheren Flüssigkeiten, wie Öl, Masut u. dgl.

Für den Fall, daß die Mischbewegung vernachlässigt werden kann, läßt sich die folgende einfache Theorie der Strömung in einem Rohre aufstellen.

Der Querschnitt des Rohres wird als kreisförmig vorausgesetzt, so daß der Symmetrie wegen die Geschwindigkeit nur von dem

Abstände von der Rohrachse abhängig ist. In Abb. 71 stelle der äußere Kreis den inneren Umfang des Rohres im Querschnitte dar. Wir betrachten die Bewegung des Wassers innerhalb des durch Schraffierung hervorgehobenen Kreises von dem beliebigen Halbmesser x . Die Geschwindigkeit am Umfange dieses Kreises sei gleich v . Wenn x um dx wächst, ändert sich v um dv . Diesem Geschwindigkeitsgefälle ist die Reibung

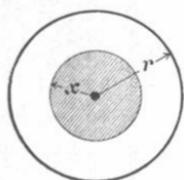


Abb. 71.

an dem Umfange des schraffierten Kreises zwischen den innerhalb und den außerhalb liegenden Stromfäden proportional zu setzen. Am Rohrumfange wird das Wasser durch die Reibung an der Rohrwand festgehalten; daher wird die Geschwindigkeit von der Mitte aus mit wachsendem x abnehmen, d. h. dv ist als negativ zu erwarten. Für die innerhalb des schraffierten Kreises liegenden Stromfäden ist die Reibung daher eine verzögernde Kraft.

Die Wasserbewegung erfolgt nach Voraussetzung geradlinig und daher der Kontinuitätsbedingung wegen auch mit konstanter Geschwindigkeit. Demnach müssen sich alle von außen her auf ein beliebig abgegrenztes Volumenelement übertragenen Kräfte im Gleichgewichte miteinander halten. Der Kreis vom Halbmesser x bilde den Querschnitt eines Wasserzylinders, dessen Länge dz sei. Parallel zur Z -Achse, die mit der Rohrachse zusammenfällt, wirken auf diesen Wasserzylinder die Reibungen am Umfange verzögernd ein. Ihre Summe ist gleich

$$- 2\pi x dz \cdot k \frac{dv}{dx}.$$

Damit Gleichgewicht bestehe, muß zwischen beiden Zylindergrundflächen ein Druckunterschied von derselben Größe auftreten. Da ferner v unabhängig von z ist, folgt, daß auch der Druckunterschied proportional mit dz ist. Daher ist

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_0 - p_l}{l} = c,$$

wenn p_0 der Druck im Anfange und p_1 der Druck am Ende der Rohrlänge l ist und die Druckabnahme auf die Längeneinheit zur Abkürzung mit c bezeichnet wird. Für das Gleichgewicht der Kraftkomponenten im Sinne der Z -Achse erhalten wir hiernach die Bedingungsgleichung

$$cdz \cdot \pi x^2 = -2\pi x dz \cdot k \frac{dv}{dx}$$

oder kürzer

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2k}x. \quad (252)$$

Durch Integration folgt daraus

$$v = C - \frac{c}{4k}x^2. \quad (253)$$

Die Integrationskonstante C ist aus der Grenzbedingung am Rohrumfange zu ermitteln, nach der $v = 0$ wird für $x = r$. Damit folgt

$$C = \frac{c}{4k}r^2$$

und hiermit

$$v = \frac{c}{4k}(r^2 - x^2). \quad (254)$$

Trägt man in jedem Punkte eines Durchmessers die zugehörige Geschwindigkeit v in einem passenden Maßstabe rechtwinklig ab, so erhält man als Geschwindigkeitsverteilungsdiagramm einen Parabelbogen.

Die durch jeden Querschnitt der Röhre in der Zeiteinheit fließende Wassermenge sei mit Q bezeichnet. Man findet Q , indem man jedes Flächenelement des Querschnitts mit der zugehörigen Geschwindigkeit multipliziert und hierauf über den ganzen Querschnitt integriert. Man hat daher

$$Q = \int_0^r v 2\pi x dx = \frac{2\pi c}{4k} \int_0^r (r^2 x - x^3) dx = \frac{\pi c}{8k} r^4. \quad (255)$$

Unter der mittleren Geschwindigkeit v_m der Strömung versteht man jene Geschwindigkeit, die allen Stromfäden zukommen müßte, wenn sie bei allen gleich groß sein und die-

selbe Flüssigkeitsmenge Q durch den Querschnitt führen sollte. Man hat daher

$$v_m = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{cr^2}{8k}. \quad (256)$$

Die Geschwindigkeit in der Mitte ist daher doppelt so groß als die mittlere Geschwindigkeit.

Man verwendet diese Formeln gewöhnlich entweder, um bei gegebenem k den Druckhöhenverlust c für die Längeneinheit zu berechnen, der erforderlich ist, um eine verlangte Flüssigkeitsmenge Q durch die Röhre zu treiben, oder um k aus den übrigen Werten, die bei einem Versuche direkt beobachtet sind, zu ermitteln. Durch Auflösen nach c findet man aus Gl. (256)

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{8kv_m}{r^2}, \quad (257)$$

d. h. das Druckgefäll wird hiernach proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Rohrweite gefunden.

Bei den zuerst von Poiseuille angestellten und später sehr oft wiederholten Versuchen über die Strömung von Flüssigkeiten in engen Röhren treffen diese Folgerungen sehr gut zu. Hierin ist die wichtigste Bestätigung für die Zulässigkeit des gewählten Ansatzes zu erblicken. Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit erfolgt aber die Bewegung nach ganz anderen Gesetzen. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß in diesem Falle das Druckgefäll c ungefähr proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der ersten Potenz des Rohrdurchmessers gesetzt werden kann. Der Zähigkeitskoeffizient k scheint nur insofern von Bedeutung zu sein, als der Wert der kritischen Geschwindigkeit von ihm abhängt, während er, falls diese einmal überschritten ist, keinen wesentlich bestimmenden Einfluß auf den Bewegungsvorgang mehr zu haben scheint. Bei Wasserleitungen ist der Druckhöhenverlust für eine Röhrenlänge, die etwa das 40- bis 50-fache des Rohrdurchmessers beträgt, so groß wie der Druck, der

erforderlich ist, um dem Wasser beim Ausströmen aus dem Gefäße in die freie Luft die Geschwindigkeit v_m zu erteilen. Die Beobachtungen lehren ferner, daß die Geschwindigkeit v im mittleren Teile des Rohres nahezu konstant ist und erst in der Nähe der Wand einen starken Abfall bis auf den Wert Null an der Rohrwand erfährt.

Eine befriedigende Theorie dieses Strömungsvorgangs besitzt man bis jetzt nicht. Nur so viel ist klar, daß man, um zu ihr zu gelangen, jedenfalls auf die Mischbewegungen Rücksicht nehmen muß. Diese bewirken, daß der Flüssigkeitszylinder, dessen Gleichgewicht wir vorher betrachteten, außer durch die Reibung auch noch durch den Austausch mit den außerhalb liegenden und langsamer fließenden Wassermassen eine Verzögerung erfährt. Die Schwierigkeit besteht nur darin, einen geeigneten Ansatz für diese verzögernde Kraft ausfindig zu machen. Jedenfalls wird darin das Geschwindigkeitsgefäll $\frac{dv}{dx}$ und die Masse μ der Flüssigkeit als Faktor vorkommen müssen, außerdem aber auch noch die Geschwindigkeit, mit der sich der Austausch der Wassermassen vollzieht. Für diese fehlt es aber zunächst an jedem Anhalte. Wenn es sich ausschließlich um die Erklärung des einen Vorgangs der Strömung in Röhren handelte, könnte man z. B. an Stelle von Gl. (252)

$$k \frac{dv}{dx} + \zeta \mu r v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2} x \quad (258)$$

setzen, worin der durch die Mischbewegungen hervorgebrachten Verzögerung durch das zweite Glied der linken Seite Rechnung getragen werden soll.

Die Integration der Gleichung mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen liefert nach Auflösung für das Druckgefäll c

$$c = \frac{4k v_0}{r^2} + 2\zeta \frac{\mu v_0^2}{r}, \quad (259)$$

wenn die Geschwindigkeit in der Rohrmitte mit v_0 bezeichnet wird. Die Konstante ζ hat die Dimension einer absoluten Zahl, die für verschiedene Flüssigkeiten verschieden sein kann.

Bei kleinem v_0 und kleinem r überwiegt das erste Glied der Gleichung, das dem Poiseuilleschen Strömungsgesetze entspricht, während es im entgegengesetzten Falle auf das zweite Glied ankommt, das mit den Beobachtungen an weiten Wasserleitungsröhren in Übereinstimmung steht.

Dieser einfache Ansatz kann aber nicht als eine Lösung der Frage betrachtet werden. Erst wenn er sich auf alle anderen Fälle der Wasserbewegung sinngemäß übertragen ließe und dort ebenfalls zu einer Übereinstimmung mit der Erfahrung führte, könnte ein Ansatz von dieser Art als eine befriedigende Lösung bezeichnet werden. Einige Bemühungen, die ich in dieser Richtung machte, haben mich nicht zu dem gewünschten Erfolge geführt; das schließt aber nicht aus, daß doch noch ein allen berechtigten Ansprüchen genügender Ansatz gefunden werden könnte.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Dynamik des materiellen Punktes.

$$V \mathfrak{P} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \quad (2) \quad 5$$

allgemeinste Aussage des Flächensatzes für den materiellen Punkt; m = Masse, \mathbf{v} = Geschwindigkeit, \mathfrak{P} = äußere Kraft an m , \mathbf{r} der von einem festen aber beliebig gewählten Momentenpunkt gezogene Radiusvektor oder Hebelarm, $V \mathfrak{P} \mathbf{r}$ das statische Moment von \mathfrak{P} , $m \mathbf{v}$ die Bewegungsgröße des Punktes, $V m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ deren statisches Moment oder der Drall.

$$Yz - Zy = \frac{d}{dt} (m v_2 z - m v_3 y), \quad (4) \quad 7$$

Flächensatz für die X -Achse als Momentenachse; XYZ die Komponenten von \mathfrak{P} ; xyz die von \mathbf{r} .

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = 0, \quad (8) \quad 15$$

Bedingung dafür, daß ein Kraftfeld wirbelfrei ist; die Integration ist über eine geschlossene Kurve zu erstrecken.

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s}, \quad (10) \quad 18$$

Definitionsgleichung für das Potential V_A im Punkte A ; O Anfangspunkt, V_O bleibt willkürlich.

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad P_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (12) \quad 21$$

$$\mathfrak{P} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad (13) \quad 21$$

$$\mathfrak{P} = -\nabla V, \quad (14) \quad 22$$

Ableitung der Kraft des Feldes aus dem Potentiale V .

$$V_2 + L_2 = V_1 + L_1, \quad (15) \quad 26$$

die Summe aus der potentiellen Energie V und der kinetischen Energie L bleibt während der Bewegung im Kraftfelde konstant.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx, \quad (16) \quad 29$$

Differentialgleichung der geradlinigen harmonischen Schwingung, c ein die Intensität des Feldes beschreibender Proportionalitätsfaktor.

$$x = A \sin at + B \cos at, \quad (17) \quad 29$$

$$a = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (18) \quad 29$$

Lösung der Gleichung (16), A und B Integrationskonstanten, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (20) \quad 31$$

Formel für die Schwingungsdauer der harmonischen Schwingung.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + \mathbf{a} \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (21) \quad 32$$

\mathbf{r} der Radiusvektor bei der elliptischen harmonischen Schwingung zur Zeit t , \mathbf{v}_0 Anfangsgeschwindigkeit, \mathbf{a} Anfangswert von \mathbf{r} .

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -c\varphi \quad (22) \quad 36$$

Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen, φ Drehungswinkel, Θ Trägheitsmoment der schwingenden Masse;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{c}} \quad (23) \quad 36$$

Formel für die Schwingungsdauer der Drehschwingungen.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{11} - f_{12}}{g}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{11} + f_{12}}{g}} \quad (35) \quad 43$$

T_1 und T_2 die Schwingungsdauern der beiden sich übereinander lagernden einfachen harmonischen Schwingungen von zwei Massen, die eine symmetrische Belastung eines Balkens

bilden; die f sind die zugehörigen Biegungspfeile, g die Beschleunigung der Schwere. Seite

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - k \frac{dx}{dt}, \quad (36) \quad 45$$

Differentialgleichung für die gedämpfte geradlinige Schwingung, k der Dämpfungsfaktor.

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \quad (38) \quad 47$$

Lösung der Differentialgleichung für den Fall der aperiodischen Bewegung, γ zur Abkürzung für den konstanten Wert

$$\gamma = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}.$$

Die Bewegung wird periodisch, wenn $\gamma = i\gamma'$ imaginär wird; Gl. (38) geht dann über in

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \gamma' t. \quad (39) \quad 48$$

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}}, \quad (40) \quad 49$$

Formel für die Schwingungsdauer der gedämpften harmonischen Schwingung.

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{kT}{4m}, \quad (44) \quad 51$$

Formel für das logarithmische Dekrement zweier aufeinander folgenden Ausschläge a_n und a_{n+1} .

$$a_{n+1} = a_n - 2e \quad (51) \quad 55$$

Formel für die Abnahme der Schwingungsausschläge bei einer Dämpfung durch gewöhnliche Reibung, e eine Konstante.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx + k \frac{dx}{dt} = P \sin \eta t, \quad (52) \quad 61$$

Differentialgleichung für die erzwungenen Schwingungen, P der größte Betrag der die Schwingungen anregenden periodisch veränderlichen Kraft, η ein Faktor, der von deren Periode abhängt.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{c - m\eta^2}, \quad (54) \quad \text{Seite } 63$$

φ Phasenverschiebungswinkel.

$$C = \frac{P}{\cos \varphi (c - m\eta^2) + k\eta \sin \varphi}, \quad (55) \quad 63$$

C die Amplitude der erzwungenen Schwingungen im Beharrungszustande.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (64) \quad 79$$

Näherungsformel für die volle Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge l .

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (72) \quad 83$$

genaue Formel für das einfache Pendel, α Schwingungsamplitude, F das Funktionszeichen für das elliptische Integral erster Gattung.

(Eine abgekürzte Tabelle für die Werte von F findet sich auf S. 83.)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \quad (73) \quad 86$$

genauere Näherungsformel für das einfache Pendel.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}, \quad (76) \quad 88$$

T Dauer der Schwingungen auf der Zyклоide.

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des Punkthaufens.

$$\mathfrak{S} = -m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (89) \quad 124$$

\mathfrak{S} Trägheitskraft, die an jedem materiellen Punkte anzuwenden ist, um ein Gleichgewichtssystem von Kräften herzustellen (d'Alembert).

$$\Sigma \left(\mathfrak{P} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) \delta \mathfrak{s} = 0, \quad (91) \quad 126$$

Aussage des d'Alembertschen Prinzips in Verbindung mit

dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, $\delta \mathfrak{s}$ virtuelle Seite
Verschiebungen.

$$- \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin \varphi, \quad (94) \quad 135$$

Differentialgleichung für die Schwingungen des physischen Pendels, Θ Trägheitsmoment für die Schwingungsachse, φ Ausschlag, Q Gewicht, s Schwerpunktsabstand von der Schwingungsachse.

$$l = \frac{g \Theta}{Qs}, \quad (96) \quad 136$$

l reduzierte Pendellänge.

$$\frac{d}{dt} \Sigma \mathbf{V} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \Sigma \mathbf{V} \mathfrak{P} \mathbf{r} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma \mathbf{V} \mathfrak{P} \mathbf{r}, \quad (102) \quad \text{und} \quad (103) \quad 139$$

Aussage des Flächensatzes für den Punkthaufen; gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt.

$$\Sigma M r \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r \sin \alpha = 0, \quad (106) \quad 159$$

$$\Sigma M r a \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r a \sin \alpha = 0, \quad (107) \quad 160$$

Bedingungsgleichungen für den Schlicksches Massenausgleich erster Ordnung bei Schiffsmaschinen, M die hin und her gehenden Massen, r die Kurbelhalbmesser, α die Winkel zwischen den folgenden Kurbeln und der ersten und a die Abstände der Kurbelmechanismen von dem ersten.

Dritter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers.

$$L = \frac{1}{2} u_1^2 \Theta_x + \frac{1}{2} u_2^2 \Theta_y + \frac{1}{2} u_3^2 \Theta_z. \quad (115) \quad 169$$

L lebendige Kraft des um eine Schwerpunktsachse rotierenden starren Körpers, $u_1 u_2 u_3$ die Winkelgeschwindigkeitskomponenten für die Trägheitshauptachsen, die Θ die zugehörigen Trägheitsmomente.

$$\Theta = \Theta_x \cos^2 \alpha + \Theta_y \cos^2 \beta + \Theta_z \cos^2 \gamma. \quad (116) \quad 169$$

Θ Trägheitsmoment für eine Achse, die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha \beta \gamma$ einschließt.

$$\mathbf{V} \mathfrak{A} \mathbf{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \quad (118) \quad \text{Seite 170}$$

Rechengesetz der Vektoralgebra, $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ beliebige Vektoren.

$$\mathfrak{B} = \mathbf{u} \cdot \Sigma m \mathbf{r}^2 - \Sigma m \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \mathbf{r} \quad (119) \quad 172$$

Formel für den Drall \mathfrak{B} eines mit der Winkelgeschwindigkeit \mathbf{u} rotierenden Körpers.

$$\mathfrak{B} = i u_1 \Theta_x + j u_2 \Theta_y + k u_3 \Theta_z \quad (121) \quad 173$$

andere Formel für den Drall.

$$B' = u \Theta. \quad (123) \quad 175$$

B' Drall für die Drehachse selbst.

$$\mathbf{u} \delta \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \delta \mathbf{u} = 0 \quad (125) \quad 178$$

gibt den Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathbf{u} in Form einer Differentialbeziehung an.

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}, \quad (126) \quad 185$$

Aussage des Flächensatzes für den starren Körper, an dem das Kräftepaar vom Momente \mathfrak{K} angreift.

$$\Theta \frac{du}{dt} = K \quad (128) \quad 186$$

folgt aus dem Vorigen für den Fall, daß \mathfrak{K} in die Richtung einer freien Achse fällt.

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \end{aligned} \right\} \quad (134) \quad 198$$

Gleichungen von Euler; gelten für einen freien starren Körper und geben die Veränderlichkeit von \mathbf{u} mit der Zeit relativ zum Körper selbst an.

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t, \quad (138) \quad 199$$

Lösung der Eulerschen Gleichungen für den Fall $\Theta_2 = \Theta_3$; A und B Integrationskonstanten, γ zur Abkürzung eingeführt für

$$\gamma = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2}.$$

$$T = \frac{2\pi \Theta_2}{u_1 (\Theta_1 - \Theta_2)}, \quad (139) \quad \text{Seite 199}$$

T Umlaufszeit der Nutationsbewegung.

$$v'_{I, \mathfrak{S}} = v'_{II, \mathfrak{A}} \quad (146) \quad 212$$

spricht den Satz von der Gegenseitigkeit der Stoßgeschwindigkeiten für den starren Körper aus.

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \quad (150) \quad 219$$

Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße starrer Körper.

$$T = 2\pi \frac{u \Theta}{s Q}. \quad (154) \quad 230$$

T Umlaufzeit der Kreiselachse um die Lotlinie bei der pseudo-regulären Präzession des Kreisels, Q Gewicht, s Schwerpunktsabstand vom festen Punkte, u Winkelgeschwindigkeit, Θ Trägheitsmoment.

$$\Theta_2 V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2 \mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1 \Theta_1 \frac{d \mathfrak{s}_1}{dt} + s V \mathfrak{Q} \mathfrak{s}_1 = 0, \quad (162) \quad 237$$

Hauptgleichung der strengen Theorie der Kreiselbewegung für den schweren symmetrischen Kreisel, \mathfrak{s}_1 Einheitsvektor in der Richtung der Kreiselachse, u_1 die konstant bleibende Winkelgeschwindigkeitskomponente in der Richtung von \mathfrak{s}_1 ; Θ_1 Trägheitsmoment für die Kreiselachse, Θ_2 für eine senkrecht dazu stehende Achse.

$$w = - \frac{u_1 \Theta_1}{2 a_1 \Theta_2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_1 \Theta_1}{2 a_1 \Theta_2}\right)^2 - \frac{s Q}{a_1 \Theta_2}}. \quad (167) \quad 240$$

w Winkelgeschwindigkeit der regulären Präzession; a_1 Kosinus des Winkels zwischen Kreiselachse und Lotrichtung.

$$K = u \Theta w. \quad (170) \quad 245$$

K Drehmoment, das bei der Drehung eines mit der Winkelgeschwindigkeit u rotierenden Schwungrads aus der Schwungradebene mit der Winkelgeschwindigkeit w auftritt.

$$a_2 = \frac{i^2}{a_1}; \quad m_1 = \frac{M i^2}{a_1^2 + i^2}; \quad m_2 = \frac{M a_1^2}{a_1^2 + i^2}. \quad (171) \quad 258$$

Formeln für den Ersatz eines starren Körpers durch zwei

Punkte von den Massen m_1 und m_2 und den Schwerpunkts- Seite
 abständen a_1 und a_2 bei der ebenen Bewegung; M Masse
 des starren Körpers, i sein Trägheitshalbmesser.

Vierter Abschnitt.

Schwingungen elastischer Körper.

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (172) \quad 264$$

Differentialgleichung für die Schwingungen eines Stabes
 mit gleichförmig verteilter Masse, μ Masse für die
 Längeneinheit, y Durchsenkung an der Stelle x zur Zeit t ,
 E Elastizitätsmodul, Θ Trägheitsmoment des Querschnitts.

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin t \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}}. \quad (175) \quad 266$$

Lösung der vorigen Gleichung für den Fall der Grund-
 schwingungen, l die Länge des Stabs.

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{E\Theta}}, \quad (176) \quad 266$$

T Dauer einer vollen Grundschwingung des auf zwei Stützen
 ruhenden Stabs.

$$T = 1,787 l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E\Theta}} \quad (182) \quad 270$$

tritt an die Stelle der vorigen Formel, wenn der Stab am einen
 Ende eingespannt, am anderen Ende frei ist.

$$T = 0,281 \sqrt{\frac{Ql^3}{gE\Theta}}, \quad (186) \quad 274$$

dasselbe für die Biegungsschwingungen von Schiffen.

$$N_k = 300 \sqrt{\frac{P}{Q}}. \quad (201) \quad 300$$

N_k kritische Tourenzahl einer schnell umlaufenden schwan-
 ken Welle, Q das Gewicht des Rades, P die Kraft, die
 erforderlich ist, um die Welle um 1 cm durchzubiegen.

$$\pi r^2 = \lambda \mu. \quad (202) \quad 307$$

Hauptbedingung für die Konstruktion der Modelle von Maschinen, π Verhältnis der Kräfte, τ der Zeiten, λ der Längen und μ der Massen. Seite

Fünfter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

$$\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} + 2V \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \mathfrak{u}, \quad (209) \quad 348$$

Satz von Coriolis; \mathfrak{s} der Radiusvektor des beweglichen Punktes von einem festen Anfangspunkte im absoluten Raume, \mathfrak{p} der Radiusvektor nach dem Punkte des Fahrzeugs, mit dem der bewegliche Punkt gerade zusammenfällt, vom gleichen Anfangspunkte aus gerechnet, \mathfrak{r} der Radiusvektor des beweglichen Punktes von einem Anfangspunkte, der mit dem Fahrzeug fest verbunden ist, und \mathfrak{u} die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{S} - 2mV \mathfrak{v} \mathfrak{u}, \quad (211) \quad 350$$

\mathfrak{S} die „erste Zusatzkraft“ der Relativbewegung, das folgende Glied gibt die „zweite Zusatzkraft“ an; darin ist \mathfrak{v} die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes gegen das Fahrzeug.

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2V \mathfrak{v} \mathfrak{u}, \quad (213) \quad 351$$

Differentialgleichung für die Fallbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung. \mathfrak{g} Beschleunigung der Schwere, als gerichtete Größe aufgefaßt.

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} V \mathfrak{g} \mathfrak{u}, \quad (214) \quad 352$$

näherungsweise gültiges Integral der vorigen Gleichung.

Sechster Abschnitt.

Hydrodynamik.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \quad (221) \quad 373$$

Kontinuitätsbedingung für die unzusammendrückbare

Flüssigkeit, $v_1 v_2 v_3$ Geschwindigkeitskomponenten nach den Achsenrichtungen. Seite

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \cdot \mathbf{v} \quad (224) \quad 375$$

zeigt, wie sich die Beschleunigung aus der Veränderung am gleichen Orte und aus der durch die Verschiebung selbst bedingten Änderung von \mathbf{v} zusammensetzt.

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ = X - \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (V + p) \end{aligned} \right\} \quad (228) \quad 378$$

Hydrodynamische Gleichung von Euler für die X -Richtung, μ bezogene Masse, p Druck, XYZ Komponenten der äußeren Massenkraft, die zum Potentiale V gehört.

$$\int_0^0 \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0, \quad (230) \quad 379$$

Bedingung für die wirbelfreie Bewegung; das Integral erstreckt sich auf eine beliebige geschlossene Kurve

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (233) \quad 385$$

Φ Geschwindigkeitspotential, nur für wirbelfreie Bewegung verwendbar.

$$\mathbf{w} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \quad (234) \quad 385$$

\mathbf{w} der Wirbelvektor.

$$\mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v} \quad (236) \quad 387$$

abgekürzte Wiedergabe der vorigen Gleichung.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (237) \quad 387$$

κ ontinuitätsbedingung für die wirbelfreie Bewegung.

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + V + p = C, \quad (242) \quad \text{Seite } 389$$

allgemeines Integral der Eulerschen Gleichungen für die stationäre wirbelfreie Bewegung, C eine Konstante, die sowohl von der Zeit als vom Orte unabhängig ist.

$$\Phi = az \left(\frac{e^3}{2r^3} + 1 \right), \quad (243) \quad 392$$

Geschwindigkeitspotential für die Strömung um eine Kugel, ρ der Kugelhalbmesser, r die Entfernung vom Kugelmittelpunkt, a Geschwindigkeit der Strömung in großer Entfernung von der Kugel (parallel zur Z -Achse).

$$v = \frac{kK}{\mu d}, \quad (251) \quad 403$$

Formel von Reynolds für die kritische Geschwindigkeit v der Strömung in Röhren, k Zähigkeitskoeffizient, K eine Konstante, die zu 1900 bis 2000 ermittelt ist, μ bezogene Masse, d Rohrdurchmesser.

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{8kv_m}{r^2} \quad (257) \quad 406$$

Poiseuillesches Gesetz für die Strömung in Röhren unterhalb der kritischen Geschwindigkeit, c Druckabfall für die Längeneinheit, v_m mittlere Geschwindigkeit der Strömung, r Rohrhalmesser.

$$k \frac{dv}{dx} + \xi \mu r v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2} x, \quad (258) \quad 407$$

einfacher Ansatz zur Berücksichtigung der Mischbewegung bei der Strömung in Röhren, ξ ein Zahlenkoeffizient.

Sachverzeichnis.

	Seite		Seite
Achsen, freie	179	Flächensatz	4, 137
Ähnlichkeit, mechanische . .	302	Fouriersche Reihen	75
d'Alembertsches Prinzip . 123.	212	Freie Achsen	179
Amplitude von Schwingungen	30	Froude, Schiffsmodelle	309
Antrieb einer Kraft	3	Gegenseitigkeit d. Stoßgeschw.	206
Aperiodische Bewegung	47	Geoid	24
Äquipotentialflächen	22	Geschwindigkeitspotential . . .	384
Bifilare Aufhängung	337	Glockenstuhl	321
Billardball	255	Grundschwingung	266
Brachistochrone	89	Gyroskop	334
Bumerang	248	Harmonische Schwingung	26
Carnotscher Satz	213	Hauptgleichung d. Kreiselpro-	
Coriolischer Satz	345	blems	237
Dämpfung	43, 52	Hauptträgheitsachse	168
Dekrement	51	Hydrodynamik	363
Divergenz	374	Impuls	187
Drall	6, 139, 169	Interferenz	70
Drall-Ellipsoid	169	Isochrone Schwingungen	31
Ebene Bewegungen	256	Katze beim Fallen	146
Einfache Schwingungsdauer . .	31	Kegel, Trägheitsmomente	325
Elastische Körper, Schwin-		Kegelbahn	89
gungen	261	Kontinuitätsbedingung	370
Elliptische Schwingung	31	Kräftepaar am starren Kör-	
Elliptische Integrale	81	per	184, 331
Eulersche Gleichungen, Krei-		Kraftfeld	14
sel	195	Kraftlinien	23
Eulersche Gleichungen, Hy-		Kreisel, kräftefreier	188
drodynamische	369	„ schwerer	222
Fallbewegung	350	Kreisel-Problem, strenge Lö-	
Festigkeitsberechnung für be-		sung	234
wegte Körper	130	Kritische Geschwindigkeiten . .	72,
			287, 403

	Seite		Seite
Kugel, Bewegung in Flüssigkeit	390	Präzession, reguläre	238
Kugelkreisel	223	Punkthaufen	123
Lagrange, hydrodynam. Satz	383	Quelle	374
Lavalsche Turbinenwelle	283	Quirl	387
Lebendige Kraft	3	Radbewegung	251
Logarithmisches Dekrement	51	Reduzierte Pendellänge	135
Massenausgleich	153	Relativbewegung	343
Massenreduktion	257	Resonanz	60, 66
Mechanische Ähnlichkeit	302	Rollbewegung von Schiffen	338
Mischbewegungen	365	Röhre, Wasserströmung	400, 407
Modelle von Maschinen	304	Schiffschwingungen	271, 338
Niveauflächen	22	Schlick, Massenausgleich	153
Nivellement	25	„ Schiffskreisel	248
Nutation	198, 230	Schlingerbewegungen	338
Oberschwingungen	266	Schwebungen	70
Pendel, einfaches	77, 80	Schwerpunktssätze	137
„ „ mit Seilpolygon	102	Schwingung, einfache	26
„ „ Fadenspannung	115	„ elliptische	31
„ „ physisches	132, 258, 319	„ Dreh-	34, 115, 275
„ „ reduzierte Länge	135	„ gekoppelte	38, 117
„ „ Reversionspendel	320	„ Biegungs-	37, 261
„ „ Biegungsbeanspruchung	323	„ gedämpfte	34, 52
Perpetuum mobile	15	„ erzwungene	58
Phasenunterschied	64	„ auf Zykloide	86
Pleuelstange	316	„ von elastischen Körpern	261
Poinsotbewegung	188	„ von Schiffen	271, 338
Poiseuillesches Gesetz	406	„ von Wellen	275, 283
Polodie	191	Schwingungsmittelpunkt von Pendel	135
Potential	13, 106	Schwungrad, Drehung aus Ebene	243
Potentialgefäll	21	Schwungrad, schief aufgekeilt	328
Potentialtreppe	23	Seilpolygon in Dynamik	99
Potentialunterschied	18	Seitenablenkung v. Geschossen	249, 354
Präzession, pseudoreguläre	225	Sektorengeschwindigkeit	13
		Sinusschwingungen	26
		Stabile Drehachsen	192
		Stabschwingungen	261

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Aug. Föppl:

Vorlesungen über Technische Mechanik

In 6 Bänden, gr. 8.

- I. Band. **Einführung in die Mechanik.** 3. Auflage. Mit 103 Figuren im Text. [XVI u. 428 S.] 1905. Geb. n. *M.* 10.—
- II. — **Graphische Statik.** 2. Auflage. Mit 176 Figuren im Text. [XII u. 471 S.] 1903. Geb. n. *M.* 10.—
- III. — **Festigkeitslehre.** 3. Auflage. Mit 83 Figuren im Text. [XVI u. 434 S.] 1905. Geb. n. *M.* 10.—
- IV. — **Dynamik.** 3. Auflage. Mit 71 Figuren im Text. [VIII u. 422 S.] 1908. Geb. n. *M.* 10.—
- V. — **Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie.** Mit 44 Figuren im Text. [XII u. 391 S.] 1907. Geb. n. *M.* 10.—
- VI. — **Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik.** [In Vorbereitung.]

Leitfaden und Aufgabensammlung für den Unterricht in der angewandten Mechanik

Mit zahlreichen Figuren. 2 Hefte, gr. 8. 1890. In Leinw. geb. n. *M.* 4.40.
Einzeln: Heft I. [IV u. 140 S.] n. *M.* 2.— Heft II. [VI u. 180 S.] n. *M.* 2.40.

Das Fachwerk im Raume

Mit Figuren u. 2 Tafeln. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1892. Geh. n. *M.* 3.60,
in Leinwand geb. n. *M.* 4.40.

Theorie der Elektrizität

Von Dr. M. Abraham,

Professor an der Universität Illinois.

In 2 Bänden.

- I. Band. **Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität.** Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. FÖPPL. 3. Auflage von Dr. M. ABRAHAM. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 460 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—
- II. — **Elektromagnetische Theorie der Strahlung.** Von Dr. M. ABRAHAM. Mit 5 Figuren im Text. [X u. 405 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von

Dr. E. Jahnke,

Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

8. Steif geh. und in Leinwand geb.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen, sieht sich vergeblich nach kurzen Darstellungen um, die geeignet wären, ihn schnell in das besondere Gebiet, das ihn gerade interessiert, einzuführen. — Diese Lücke will vorliegende Sammlung ausfüllen. Dabei kann Vollständigkeit der Beweisführung, die vom Standpunkte wissenschaftlicher Strenge erstrebenswert wäre, hier nicht erwartet werden. Vielmehr wird besonderer Wert darauf gelegt, Dinge, die für die Anwendungen von Wichtigkeit sind, nicht zu zugunsten wissenschaftlicher Strenge zurücktreten zu lassen. Die Darstellung der einzelnen Gebiete wird so gehalten sein, daß jede ein abgeschlossenes Ganze für sich bildet.

Bisher erschienene Bändchen:

- I. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von R. Gans, Tübingen. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] 1908. Steif geh. n. M. 2.40, geb. n. M. 2.80.
- II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] 1908. Steif geh. n. M. 2.40, geb. n. M. 2.80.
- III. Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von O. Schaefer, Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. n. M. 3.40, geb. n. M. 3.80.
- IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von P. Schafheitlin, Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 128 S.] 1908. Steif geh. ca. n. M. 2.60, geb. ca. n. M. 3.—

Unter der Presse:

Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven. Von E. Jahnke und F. Emde, beide in Berlin.

In Vorbereitung:

- Grundlagen des Schiffbaues. Von O. Alt, Kiel.
- Gastheorie. Von A. Byck, Berlin.
- Die mathematischen Instrumente. Von A. Galle, Potsdam.
- Potentialtheorie. Von R. Gans, Tübingen.

Schwingungsprobleme. Von E. Grün-eisen, Berlin.

Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik. Von W. v. Ignatowsky, Gießen.

Akustik. Von A. Kalähne, Danzig.

Festigkeitsprobleme der modernen Maschinenteknik. Von Th. v. Karman, Göttingen.

Thermoelektrizität. Von F. Krüger, Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Berlin.

Über Berechnungen spezieller elektrischer und magnetischer Felder. Von L. Lichtenstein, Charlottenburg.

Technische Hydromechanik. Von R. Edler von Mises, Brünn.

Die Determinanten. Von E. Netto, Gießen.

Die Grundlagen der Wechselstrom-technik. Von E. Orlich, Berlin.

Die Fourierschen Reihen. Von R. Rothe, Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von R. Rothe, Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von R. Rüdenberg, Göttingen.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von G. Rümelin, Freiburg i. Br.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Brünn.

Temperaturmessungen. Von S. Valentin, Hannover.

Die Sammlung wird fortgesetzt.