

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

**Hieronymi Cardani, praestantissimi mathematici,
philosophi, ac medici Artis magnae, sive de regvlis
algebraicis, lib. unus**

Cardano, Geronimo

Norimbergae [Nürnberg], 1545

XXXIX. De regula duplici, qua per iteratam positionem in uenimus ignotam
quantitate, ubi habentur capitula alia generalia qdqd. & qd. & rerum &
numeri

quod BC est 25, ut in priore quæstione, uerum generalis debet esse solutio, latera igitur trigoni BC 25, AB 20, AC 15, AD 12, BD 16, CD 9, area igitur eius est 150.

De regula qua pluribus positionibus inuenimus ignotam quantitatem. Caput XXXIX.

REGULA I.

Hæc regula similis est regulæ de medio, est autem talis, Constitue quantitates totidem in denominationibus liberis, quotus est numerus querendarum, inde intuenies proportionem, qua inuenta, denuo pones res sub numero quantitatum inuentarum, utque propositum est, perfice operationem, & habebis æquationem, qua habita, habebis rei æstimationem.

QUESTIO I.

Exemplum. Inuenias tres numeros proportionales, quorum quadratum primi sit æquale secundo & tertio, & quadratum tertij sit æquale quadratis primi & secundi, quia igitur quadratum tertij æquale est quadratis secundi & primi, ipsum sit 1 qd' qdratum, æquale 1 qdrato p ; 1 , quare res, seu proportio, est $R \propto V \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, igitur ponemus res 1 , & $R \propto V \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, & $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, quadratum igitur primæ quantitatis, quod est 1 quadratum, æquatur secundæ & tertiæ, scilicet totidem rebus, igitur rei æstimatio, est aggregatum ex secunda & tertia, quia diuidere aliquid per unitatem, qui est numerus quadratorum, est non diuidere, igitur rei æstimatio est, $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$ p ; $R \propto V \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, & secunda quantitas, est quod producitur ex hac, in $R \propto V \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, & tertia habebitur, ducendo rem quam habes in $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{2}{2}$.

QUESTIO II.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum tertius sit æqualis secundo & primo, & quadratum primi, sit æquale aggregato secundi & tertij, pones primum quadratum, secundum rem, tertium unitatem, & quia tertius, æqualis est secundo & primo, igitur 1 quadratum, æquatur 1 rei p ; 1 , & proportio erit $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, partes igitur erunt, 1 positio, & positiones $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$, & positiones $1 \frac{1}{2} p$; $R \propto 1 \frac{1}{4}$, & quia quadratum primi æquale est aggregato secundi & tertij, igitur 1 quadratum æquatur positionibus $R \propto 1 \frac{1}{4} p$; $\frac{1}{2}$ p ; $1 \frac{1}{2} p$; $R \propto 1 \frac{1}{4}$, quare rei æstimatio erit $R \propto 5 p$; 2 , & partes ut uides.

QUESTIO

QVÆSTIO III.

Inuenias quatuor quantitates proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ, & secundæ, & quantitates iunctæ simul, faciant 10, capiam 1, rem, quadratum & cubum, igitur qd' cubus, equatur 1 quadrato p:1, quare res ualet ex capitulo deriuatiuorū, $R:V^m:R:V$: cubicæ $\frac{1}{2} p:R:\frac{23}{108} p:R:V$: cubica $\frac{1}{2} m:R:\frac{23}{108}$, igitur posita prima unitate, hæc est secunda quantitas, & tertia erit quadratum huius, scilicet $R:V$ cubica $\frac{1}{2} p:R:\frac{23}{108} p:R:V$: cubica $\frac{1}{2} m:R:\frac{23}{108}$, quarta erit cubus secundæ seu proportionis, inde iunctis quatuor quantitatibus scilicet unitate, re, quadrato, & cubo, & diuiso 10 per aggregatum, exhibet prima quantitas, qua ducta in rem habebimus secundam, hac denuo, ducta in rem, habebimus tertiam, qua ducta per rem, habebimus quartam.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias quatuor quantitates continue proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ & tertiæ, & aggregatum earum sit 10, capiam ut in præcedente 1, rem, quadratum, cubum, erit igitur quadratum æqualis qd' quadrato p:1, quare ex capitulo deriuatiuorū, rei æstimatione est $R:V^m:R:V$: cubicæ $\frac{2}{3} p:R:\frac{31}{108} p:\frac{1}{3} p:R:V$: cubica $\frac{2}{3} m:R:\frac{31}{108}$, & huius quadratum, quod est idem, abiecta $R:V^m$: est tertia quantitas, inde ductis inuicem secunda & tertia, uel secunda ad suum cubum, uel tertia ad quadratum, & addita unitate consurgit quarta, quibus quatuor quantitatibus iunctis, si per eas diuideris 10, habebis primam quæsitam, qua ducta per secundam, & tertiā, & quartam, præcedentium, habebis secundam & tertiā & quartam quantitatē quas querebas.

REGULA II.

- 2 Alia est regula nobilior præcedente, & est Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes estimationes fermè capitulorum qd' quadrati & quadrati rerum, & numeri, uel qd' quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modo ut uides.

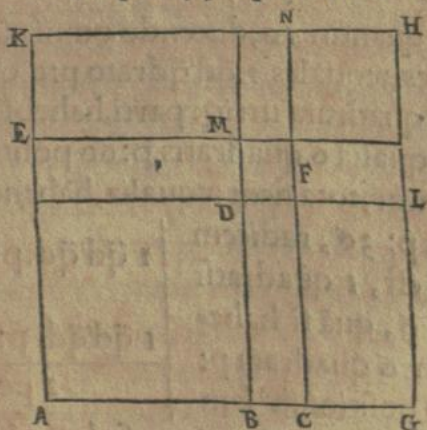
- 1 qd' qd. æquale qd. rebus & numero
- 2 qd' qd. æquale qd. cubis & numero
- 3 qd' qd. æquale cubis & numero
- 4 qd' qd. æquale rebus & numero
- 5 qd' qd. cum cubis æqualia qd. & numero
- 6 qd' qd. cum rebus æqualia qd. & numero
- 7 qd' qd.

- 7 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum cubis æqualia numero
- 8 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum rebus æqualia numero
- 9 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. æqualia cub. & numero
- 10 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. æqualia rebus & numero
- 11 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. & rebus æqualia numero
- 12 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. & cubis æqualia numero
- 13 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. & numero æqualia cubis
- 14 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$. & numero æqualia rebus
- 15 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum numero æqualia cubis & $\bar{q}d$.
- 16 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum numero æqualia cubis
- 17 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum numero æqualia rebus & $\bar{q}d$.
- 18 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum numero æqualia rebus
- 19 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum cubis & numero æqualia $\bar{q}d$.
- 20 $\bar{q}d'\bar{q}d$. cum rebus & numero æqualia $\bar{q}d$.

In his igitur omnibus capitulis, quę quidem sunt generalissima, ut reliqua omnia sexaginta septem superiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut septimum ad quartum, & secundum ad primum, deinde quæremus demonstrationem hoc modo.

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum $A F$, diuisum in duo quadrata $A D$ & $D F$, & duo supplementa $D C$ & $D E$, & uelim addere gnomonem $K F G$ circūcirca, ut remaneat quadratum totum $A H$, dico quod talis gnomon, constabit ex duplo $G C$ additę lineę, in $C A$, cum quadrato $G C$, nam $F G$ constat ex $G C$ in $C F$, ex diffinitione data in initio secundi elementorum, et $C F$ est æqualis $C A$, ex diffinitione quadrati, & per 44^{am} primi elementorum, $K F$ est æqualis $F G$, igitur duę superficies $G F$ & $F K$, constant ex $G C$, in duplum $C A$, & quadratū $G C$ est $F H$, ex corrolario quartę secundi elementorū, igitur patet propositum, si igitur $A D$ sit $\bar{q}d'\bar{q}d^m$ & $C D$ ac $D E$, 3 quadrata, & $D F$ 9, erunt $B A$ 1 quadratum, & $B C$ 3 necessario, cum igitur uoluerimus addere $\bar{q}d$ rata aliqua, ad $D C$ & $D E$, & fuerint $C L$ & $K M$, erit ad cōplendum quadratum totum necessaria superficies $L N M$, quę ut demonstratum est, constat ex quadrato $G C$ numeri quadratorum dimidiati, nam



nam c L est superficies ex g c in a b , ut ostensum est, & a b est 1 qdratum, quia ponimus, a d 1 qd' qdratum, f l uero & m n , fiunt ex g c in c b , ex 42^a primi elementorum, quare superficies L N M , & est numerus addendus, fit ex g c in duplum c b , id est in numerum quadratorum, qui fuit 6 , & g c in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

4 Hoc peracto, semper reduces partem qd' qdrati ad r , id est addendo tantum utriq; parti, ut 1 qd' qdratum cū quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ sint plus, in ambabus æquationibus, nam secus, trinomium seu Binomium redactum ad trinomium, necessario careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res faciat trinomium habens r quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utriq; parti, quo habito, ab utroq; extrahes r quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p : numero, uel m : numero, ex alia, 1 positio uel plures p : numero, uel m : numero, uel numerus m : positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propositum.

QVÆSTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes proportionales, ex quarum ductu primæ in secundam, producantur 6 . Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solui non posse, ego uero dicebam, eam posse solui, modum tamē ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 positionem prima erit $\frac{6}{1 \text{ pos.}}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, quare hæc æquantur 10 , ducendo omnia in 6 positiones, habebimus 60 positiones, æquales 1 qd' qdrato p : 6 quadratis p : 36 , adde ex quinta regula, 6 quadrata utriq; parti, habebis 1 qd' qdratum p : 12 quadratis p : 36 , æqualia 6 quadratis p : 60 positionibus, nam si æqualibus æqualia ad datur, tota fient æqualia, habent autem 1 qd' qdratum p : 12 quadratis p : 36 , radicem & est, 1 quadratū p : 6 , quā si haberent 6 quadrata p : 60 positionib' iam

$1 \text{ qd' qd. } p: 6 \text{ qd. } p: 36$ 6 qd. $1 \text{ qd' qd. } p: 12 \text{ qd. } p: 36$ 2 pos.	$\text{æqualia } 60 \text{ pos.}$ 6 qd. $\text{æq̃lia } 6 \text{ qd. } p: 60 \text{ pos.}$ $1 \text{ qd. } p: 12 \text{ pos.}$
--	---

haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati & numerus idem ex utraq; parte, ut in priore relinquatur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, fit igitur numerus quadratorum

torum 1 positio, & quia, ut uides in figura tertiæ regulæ, c l & m k, fiunt ex duplo g c in a b, & g c est 1 positio, ponam numerum quadratorum addendorum semper 2 positiones, id est duplū g c, & quia numerus addendus ad 36, est l n m, & ideo quadratum g c cum eo quod fit ex g c duplicato in c b, seu ex g c in duplum c b, & est 12, numerus quadratorum priorum, ducam igitur 1 positionem, dimidium numeri qdratorum additorū, semper in numerum qdratorū priorū, & in se, & fient 1 qdratum p: 12 positionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 positiones pro numero quadratorum, habemus igitur iterum ex communi animi sententia, quantitates infra scriptas, inuicem æquales, & utraq; habent radicem, prima ex regula tertia, sed secunda quantitas ex supposito, igitur ducta prima

1 qd' qd. p: 2 pos. p: 12. qd* p: 1 qd. p: 12
pos. additi numeri p: 36 æqualia.
2 pos. 6 qdratorū, p: 60 pos. p: 1 qd. p: 12
pos. numeri additi.

trinomi, quia igitur ex dimidio secundæ in se, fiunt 900, quadrata, & ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 positionibus quadratorum, similiter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuisa, producant æqualia, ut 2 cu. p: 30 quadratis p: 72 positionibus æquantur 900, quare 1 cubus p: 15 quadratis p: 36 positionibus æquantur 450.

Sufficit igitur deducendo ad regulam, habere semper 1 cubum p: numero priorum quadratorum, addita ei quarta parte p: numero positionum tali, qualis est numerus equationis primus, ut si habuerimus 1 qd' qdratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p: 60 positionibus, habebimus 1 cubum p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, dimidio quadrati dimidij numeri positionum, & si haberemus 1 qd' qdratum p: 16 quadratis p: 64 æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 20 quadratis p: 64 positionibus æqualia 800, & si haberemus 1 qd' qdratum p: 20 quadratis p: 100, æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 25 quadratis p: 100 positionibus æqualia 800, igitur hoc habito, in priore exemplo habuimus, 1 cub. p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, igitur rei æstimatio, per 17^m capitulum, est r: v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ p: r: 80449 $\frac{1}{4}$, p: r: v: cubica 287 $\frac{1}{2}$, m: r: 80449 $\frac{1}{4}$ m: 5, hic igitur est numerus quadratorū, qui duplicatus, est addendus ex utraq; parte, quia supponuntur 2 res addendæ, & numerus addendus ex utraq; parte, ex demonstratione, est quadratum huius, cum eo quod fit ex hoc in 12, numerum quadrato-

rum, manifestum est autem, quod R quadrata primi aggregati, semper est 1 quadratum p : dimidio numeri quadratorum, absq; alio, id est p : R v : cubica $287\frac{1}{2}p$: R $80449\frac{1}{4}p$: R v : cub. $287\frac{1}{2}m$: R $80449\frac{1}{4}p$: 1 , & hoc quia dimidium prioris numeri quadratorum fuit 6 , & in addito trinomio fuit m : 5 , igitur totum fuit, ut dixi, uerū reliqua pars, fuit quadrata $6p$: duplo huius numeri, igitur fuit numerus quadratorum R v : cubica $2300p$: R $5148752p$: R v : cubica $2300m$: R $5148752m$: 4 , & numerus rerum ex supposito fuit 60 , & numerus est (ut ostensum est) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipsius quantitatis, uerum quia ex supposito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiso 900 quadrato dimidij numeri rerum, per numerum quadratorum, exhibet numerus, quantitates igitur sunt hæc, ut uides, & quia latus $A G$ est compositū ex lateribus duorum quadratorū $A D$ & $D H$ di-

$$\begin{array}{r} \text{quadrata } R v: \text{cubica } 2300p: R 5148752p: R v: \text{cubica } 2300m: R 5148752m: 4 \\ \text{res} \qquad \qquad \qquad 60 \\ \hline \text{numerus } R v: \text{cubica } 2300p: R 5148752p: R v: \text{cubica } 2300m: R 5148752m: 4 \end{array}$$

missis supplementis, erunt R primæ & tertiæ harum quantitatum iunctæ inuicem, R v : totius aggregati, quare R primæ & tertiæ quantitates, æquantur 1 quadrato p : R v : cubica $287\frac{1}{2}p$: R $80449\frac{1}{4}p$: R v : cubica $287\frac{1}{2}m$: R $80449\frac{1}{4}p$: 1 , sed R primæ quantitatis, est numerus rerum, quia est R totidem quadratorum, & R tertiæ quantitatis est numerus, quia tertia quantitas est numerus, habemus igitur 1 quadratum p : numero, æqualia rebus & numero, minue minorem numerum de maiore, accipiendo R , id est accipiendo R denominatoris & numeratoris, habebis 1 quadratum p : hoc numero toto, m : numero in fra-scripto æq̃lia numero rerū, huic scilicet, R uniuersalissima R v : cu-

$$\begin{array}{r} R v: \text{cubica } 287\frac{1}{2}p: R 80449\frac{1}{4}p: R v: \text{cubica } 287\frac{1}{2}m: R 80449\frac{1}{4}p: 4 \\ \text{30} \\ R v: m^2 R v: cu: 2300p: R 5148752p: R v: cu: 2300m: R 5148752m: 4 \end{array}$$

bicæ $2300p$: R $5148752p$: R v : cubica $2300m$: R $5148752m$: 4 , nec refert, quod numerus ille sit compositus ex p : & m : nam tantum refert dicere, 1 quadratum p : 8 , æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum p : $10m$: 2 , æquatur 6 rebus, sequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in se, & auferendo numerum æquationis, inde residui sumendo R uniuersalissimam, quam addes dimidio numeri re-

ri rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum proportiona-
lium quæſitorum.

QVÆSTIO VI.

Inuenias numerum, qui ſit æqualis radici ſuæ quadratæ, & dua-
bus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur ſi talis numerus fue-
rit cu' quadratum radix ſua quadrata neceſſario eſt 1 cubus, & duæ ra-
dices cubicæ ſunt 2 q̄d. igitur 1 cu' q̄dratum, æquabitur 1 cubo p: 2
q̄dratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit
1 q̄d' q̄dratum æquale 1 poſitioni p: 2, poſui aut 2 radicibus cubicis,
quia cum regula ſit generalis, hoc tamē modo dupliciter ſolui poteſt,
ut patebit. Namq; ſi 1 q̄d' q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, igitur 1
q̄d' q̄dratum m: 1 æquabitur 1 poſitioni p: 1, nam ab æqualibus æqua-
lia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 poſitionem p: 1, commu-
nem diuiſorem, habebis 1 cubum m: 1 q̄drato p: 1 poſitione m: 1, æ-
qualia 1, igitur 1 cubus p: 1 poſitione,
æquatur 1 quadrato p: 2, igitur ex 18^o
capitulo, rei æſtimatio eſt R: v: cubica R:
 $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: R: v: cub. R: $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p:
 $\frac{1}{3}$, & cu' q̄dratū huius eſt numerus quæ-
ſitus, cuius R: quadrata, & 2 radices cu-
bicæ ſunt illi æquales, & tales radices ſunt duplum quadrati huius
quantitatis cum ſuo cubo.

1 q̄d' q̄d. m:	1
1 poſ. p:	1
1 poſ. p:	1
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 poſ. m:	1

At regula generali ſic faciemus quia enim 1 q̄d' q̄dratum æqua-
tur 1 poſitioni p: 2, addemus ad utramq; partem, 2 poſitiones quadra-
torum, cui ſubſcripſimus q̄d. ut intelligas non eſſe ex genere priorum
denominationum, ſed eſſe poſitiōes
quadratorū, igitur numerus adden-
dus, eſt 1 quadratum numeri q̄dra-
torum, & hoc eſt, ut in tertia regula
huius capituli, quadratum D F, nam
hic additio ſupplementorum eſt ut
D C, A C, D E, ad quadratū ſimplex
A D, igitur ſufficit addere quadratū
D F, abſq; additione ſuperficierum
F L & M N, quæ erant neceſſariæ in exemplo quintæ quæſtionis, quia
igitur additis 2 poſitionibus p: 1 quadrato numeri quadratorum, ad
1 poſitionem p: 2, ſit totum 2 poſitiones numeri q̄dratorum p: 1 poſ.
p: 2, p: 1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet
ut quadratum dimidij mediæ quantitatis, quæ eſt 1 poſitio, æque-

1 q̄d' q̄d. p: 2 poſ. p: 1 q̄d.	1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.	numeri q̄d.
2 poſ. p: 1 poſ. p: 2 p: 1 q̄d.	1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.	numeri q̄d.
$\frac{1}{4}$ q̄d. 4 poſ. p: 2 cub.	numeri q̄d.
$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p: 4 poſ.	
$\frac{1}{8}$ æq̄tur 1 cu. p: 2 poſ.	

HIERONIMI CARDANI

rum, manifestum est autem, quod $\frac{R}{2}$ quadrata primi aggregati, semper est 1 quadratum $\frac{p}{2}$ dimidio numeri quadratorum, absq; alio, id est $\frac{p}{2} : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} p : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : \frac{R}{2} v : \text{cub. } 287 \frac{1}{2} m : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : 1$, & hoc quia dimidium prioris numeri quadratorum fuit 6, & in addito trinomio fuit $m : 5$, igitur totum fuit, ut dixi, uerū reliqua pars, fuit quadrata 6 $\frac{p}{2}$ duplo huius numeri, igitur fuit numerus quadratorum $\frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 p : \frac{R}{2} 5148752 p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 m : \frac{R}{2} 5148752 m : 4$, & numerus rerum ex supposito fuit 60, & numerus est (ut ostensum est) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipsius quantitatis, uerum quia ex supposito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiso 900 quadrato dimidij numeri rerum, per numerum quadratorum, exibit numerus, quantitates igitur sunt hæc, ut uides, & quia latus A G est compositū ex lateribus duorum quadratorū A D & D H di-

$$\begin{array}{r} \text{quadrata } \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 p : \frac{R}{2} 5148752 p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 m : \frac{R}{2} 5148752 m : 4 \\ \text{res} \qquad \qquad \qquad 60 \end{array}$$

$$\text{numerus } \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 p : \frac{R}{2} 5148752 p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 m : \frac{R}{2} 5148752 m : 4$$

missis supplementis, erunt $\frac{R}{2}$ primæ & tertiæ harum quantitatum iunctæ inuicem, $\frac{R}{2} v : \text{totius aggregati}$, quare $\frac{R}{2}$ primæ & tertiæ quantitates, æquantur 1 quadrato $\frac{p}{2} : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} p : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} m : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : 1$, sed $\frac{R}{2}$ primæ quantitatis, est numerus rerum, quia est $\frac{R}{2}$ totidem quadratorum, & $\frac{R}{2}$ tertiæ quantitatis est numerus, quia tertia quantitas est numerus, habemus igitur 1 quadratum $\frac{p}{2}$: numero, æqualia rebus & numero, minue minorem numerum de maiore, accipiendo $\frac{R}{2}$, id est accipiendo $\frac{R}{2}$ denominatoris & numeratoris, habebis 1 quadratum $\frac{p}{2}$: hoc numero toto, m : numero in fra-scripto æq̃lia numero rerū, huic scilicet, $\frac{R}{2}$ uniuersalissima $\frac{R}{2} v : \text{cu}$

$$\frac{R}{2} v : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} p : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 287 \frac{1}{2} m : \frac{R}{2} 80449 \frac{1}{4} p : 4$$

$$\frac{R}{2} v : m^2 \frac{R}{2} v : \text{cu. } 2300 p : \frac{R}{2} 5148752 p : \frac{R}{2} v : \text{cu. } 2300 m : \frac{R}{2} 5148752 m : 4$$

bicæ 2300 $\frac{p}{2} : \frac{R}{2} 5148752 p : \frac{R}{2} v : \text{cubica } 2300 m : \frac{R}{2} 5148752 m : 4$, nec refert, quod numerus ille sit compositus ex $\frac{p}{2}$ & m : nam tantum refert dicere, 1 quadratum $\frac{p}{2} : 8$, æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum $\frac{p}{2} : 10 m : 2$, æquatur 6 rebus, sequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in se, & auferendo numerum æquationis, inde residui sumendo $\frac{R}{2}$ uniuersalissimam, quam addes dimidio numeri re-

QVÆSTIO VII.

Si quis igitur dicat, inuenias numero qui ductus in $\sqrt[3]{x}$ cubicam suam p:6, faciat 64, dices igitur, posito eo numero 1 cubo, habebimus 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ dratum p:6 cubis æqualia 64, quare per septimam transmutandi regulam septimi capituli huius habebimus 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d. æquale 6 rebus p:4, unde habita æstimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiusdem capituli, habebimus intentum. Et quibusdam adeo uidebuntur difficiles hæ operationes, ut uix eas ueras esse credant, nos autem ostendimus modum, quo quantitates istæ irrationales æquiuales numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonstrationē utramq; & Geometricam à causa, & Arithmetica ab effectu.

QVÆSTIO VIII.

Fac ex 6 tres partes proportionales, quarum quadrata primæ & secundæ iuncta simul faciant 4, ponemus primam 1 positionem, quadratum eius est 1 quadratum, residuum igitur ad 4, est quadratum secundæ quantitatis, id est 4 m: 1 quadrato, huius radicem, & 1 positionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta prima in tertiam, habebis 6 positiones m: 1 quadrato m: $\sqrt[3]{x}$ v: 4 quadratorum m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d. æqualia 4 m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ drato secundæ, abijce 1 $\sqrt[3]{x}$ dratum m: ex partibus, habebis 4 æqualia 6 positionibus m: $\sqrt[3]{x}$ v: 4 quadr.

1 pos. v: $\sqrt[3]{x}$ 4 m: 1 $\sqrt[3]{x}$ d. 6 m: 1 pos. m: $\sqrt[3]{x}$ v: 4 m: 1 $\sqrt[3]{x}$ d.
6 pos. m: 1 $\sqrt[3]{x}$ d. m: $\sqrt[3]{x}$ v: 4 $\sqrt[3]{x}$ d. m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d.
4 6 pos. m: $\sqrt[3]{x}$ v: 4 quad. m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d.
6 pos. m: 4 æqual. $\sqrt[3]{x}$ v: 4 quad. m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d.
36 quad. p: 16 m: 48 pos. æquantur
4 quad. m: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d.
32 quad. p: 16 p: 1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d. æqualia 48 pos.
1 $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$ d. p: 32 quad. p: 256 æqualia 48
pos. p: 240

pos. p: 240, addes igitur 2 positiones quadratorum p: 1 quadrato p: 32 positionibus numeri quadratorum utriq; parti, prima igitur pars habent radicem necessario, & quia uolumus secundam etiam habere, quæ est 2 positiones quadratorum p: 48 positionibus, ex prioribus

bus p: 1 quadrato p: 32 positionibus numeri quadratorum p: 240, du-
 cemus primam partem trinomi in tertiam ut uides, & dimidium se-
 cundæ in se, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p: 64 quadratis p:
 480 pos. quadratorum igitur 288 æquantur 1 cubo
 p: 32 quadratis, p: pos. 240, quare per 17 capitu-
 lum huius, habebimus 1 cubum æqualē 101 $\frac{1}{3}$ re-
 rum p: 420 $\frac{1}{2}$, inde habita huius estimatione per suum capitulum, mi-
 nue 10 $\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, ut in eo 17° capitulo
 habes, & consurgit rei fictæ æstimatione, habebis igitur 1 quadratū p:
 16 p: dicta æstimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ sunt & du-
 pli æstimationis inuentæ p: & aggregati ex quadrato dictæ æstima-
 tionis, & eadem estimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc
 autem ut liquet, est minus priore numero, quia si loco 240 adderen-
 tur 256, essent æquales, igitur 1 quadratum p: æstimatione inuenta p:
 16 m: & v: illa trium quantitatum, id est quadrati æstimationis cum
 eadem ducta per 32, & cum 240 tanq̃ uno numero, æquantur rebus
 quæ sunt secundum radicem dupli æstimationis inuentæ, quod est
 propositum.

QUESTIO IX.

Inuenias numerum, cuius q̃d' q̃dratum, cum quadruplo sui, & 8
 æquetur decuplo sui quadrati, dicemus igitur 1 q̃d' q̃dratum p: 4 pos.
 p: 8, æquantur 10 quadratis. Quare semper positiones dabimus qua-
 dratis, & auferemus à q̃d' q̃drato, &
 habebimus 1 q̃d' q̃dratū p: 8, æqua-
 le 20 quadratis m: 4 positionibus, &
 quia uidemus numerum quadrato-
 rum esse magnum, & rerum paruū,
 ideo conabimur minuere numerum
 quadratorum potius, quàm augere,
 & faciemus ut diminutio sit ex utra-
 que parte 2 quad. nam à minori imò
 à 2 quadratis semper fermè est inci-
 piendū, quia non oportet ut uenias
 ad m: quad. ex parte rerum, quia
 sic non haberent radicem, subductis
 igitur 2 quadratis ex utraq̃ parte,
 habebis

$$\begin{array}{r}
 576 | \text{quad.} \\
 2 \text{ pos. p: } 48 \text{ pos. p: } 1 \text{ qd. p: } 32 \text{ pos. p: } 240 \\
 \text{quad.} \qquad \qquad \qquad \text{numeri quad.} \\
 \hline
 2 \text{ cub. p: } 64 \text{ quad. p: } 480 \text{ pos.} | \text{qd.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ qd' qd. p: } 4 \text{ pos. p: } 8 \\
 10 \text{ qd.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. p: } 8 | 10 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos.} \\
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ qd. p: } 8 \\
 8 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ qd. p: } 1 \\
 8 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos. m: } 7 \\
 \hline
 2 \text{ pos.} | 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ pos. m: } 2 \\
 \text{qd. p: } 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. p: } 1 \\
 8 \text{ qd. m: } 2 \text{ pos. qd. m: } 4 \\
 \text{pos. p: } 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. m: } 7
 \end{array}$$

habebis 1 qd' qdratum
m: 2 quadratis p: 8, æ
qualia 8 quadratis m:
4 positionibus, clarum
est aut, quod si 1 qd'
qdratum m: 2 quadra
tis debet habere radi
cem, oportet ut nume
r^o sit p: 1, sed erat p: 8,

8 m: 2 pos. qd. 4 pos.	1 qd. p: 2 pos. m: 7
4 quad.	8 m: 2 pos.
8 qd. p: 16 pos. m: 56 m: 2 cu. m: 4 quad.	
p: 14 pos. quad.	
4 quad. p: 30 pos. 60 p: 2 cub.	
1 cub. p: 30 æquatur 2 quad. p: 15 pos.	
pos. 2	

igitur oportebit auferre 7 ex utraq; parte, habebimus igitur 1 qd' qdratum m: 2 quadratis p: 1, æquale 8 quadratis m: 4 positionibus m: 7, addemus igitur per m: ut dictum est, 2 positiones quadratorum ad reliqua 2 qdrata m: ex regula, & addemus per p: ut in eadē, ad numerum 1 qdratū p: 2 positionibus ex utraq; parte, quare habebimus partes æqles, quæ enim adduntur & minuuntur sunt æqlia, igitur 8 m: 2 positionibus quadratorum m: 4 positionibus, p: 1 quadrato p: 2 positionibus m: 7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam partem, quæ est 8 m: 2 positionibus quadratorum, in tertiam, quæ est 1 quadratum p: 2 positionibus m: 7, fit illud quod uides à latere, pro numero quadratorum, & hoc æquale esse debet 4 quadratis, qui est numerus productus, ex dimidio mediæ partis in se, quare abijciendo quad. utrinq; fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem reductis partibus ad suas consimiles erunt 2 cubi p: 60, æquales 4 quadratis p: 30 positionibus, & 1 cubus p: 30, æqualia 2 quadratis p: 15 positionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam solo sensu experiendo.

Circa quod notanda sunt tria. Primum, quod reduxi rem ad ex^o Not^m. perimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, stultum est enim semper difficultatem addere difficultati, secundum, quod 1 cubus p: 30 equalis 2 qd. p: 15 rebus, habet aliam rei estimationē quā 2, quæ cognita est ex suo capitulo, sed pro nunc ne operatio longior euadat, eam relinquimus. Tertium notandum est, quod tu uides, demonstrationem sic tenere in m: sicut in p: & quod numerus semper est addendus necessario, quia consurgit ex quadrato numeri quadratorum cum numero quadratorum priorum, seu quadrata sint addenda seu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuendorū. Hoc stante, diximus quod rei æstimatio est 2, & addendæ sunt 2 res per m: quadratorū, igitur minuemus 4 quadrata ex utraq; parte, habebimus igitur 1 qd' qdratum m: 6 qdratis p: 1, æqualia 4 qua

dratis m:4 positionibus m:7, pro numero autem addendus est quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium est 2, quadratū cuius est 4, & similiter productum ex numero priorum quadratorum in rei æstimationem, quod productum est 4, igitur addemus 8 utriq; parti, & fient tandem ut uides, 1 qd' qdratum m:6 qdratis p:9, & quae

lia 4 qdratis m:4 positionibus p:1, manifestum est autem quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, sed facta reductione ueniunt necessario ad duo capitula, uel 1 qdratum æquale 2 positionibus p:2, uel 1 quadratum p:2 positionibus æqualia 4, horū capitulorum æstimationes sunt R:

1 qd' qd, m:6 qd. p:9	1 quad. m:3 3 m:1 quad.
4 quad. m:4 quad. p:1	2 pos. m:1 1 m:2 pos.
1 qd. æqual. 2 pos. p:2	R 3 p:1
1 qd. p:2 pos. æqual. 4	R 5 m:1
p ² æstimatio	
res R 3 p:1	res R 5 m:1
quad. 4 p:R 12	quad. 6 m:R 20
qd' qd. 28 p:R 768	qd' qd. 56 m:R 2880
4 res R 48 p:4	4 res R 80 m:4
qd' qd. R 768 p:28 p:8	qd' qd. m:R 2880 p:56 p:8
agg. R 1200 p:40	agg. 60 m:R 2000
10 quad. 40 p:R 1200	10 qd. 60 m:R 2000

3 p:1, & R 5 m:1, dico igitur quod in æstimationibus 1 qd' qdrati p:4 positionibus p:8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia positione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p:30, & quabatur 2 quadratis p:15 rebus, ad alias duas æstimationes, sed si te delectat operatio, per te ipsum potes illud inquirere.

Q V Æ S T I O X.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum sit 8, & quadratum tertij, sit æquale aggregato ex quadratis primi & secundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 pos. 1 quad. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 qd' qd. igitur 1 qd' qd. æquatur 1 qdrato p:1, quare ex capitulo deriuatiuorum 24^o, habebimus rei æstimationem R:V:R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, est eius quadratum, scilicet R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum est 1 $\frac{1}{2}$ p: R

1 $\frac{1}{4}$

meri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus numeri cu' quadrati, nā qd' qdratum in quadratum, producit cu' quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus numeri cu' qd, æqualia $2\frac{1}{4}$ cu' qdratis, igitur ut cu' qdratum, ad cu' qdratum in æqualitate, sic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus, æqualia $2\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p:64 positionibus æqualia 72, quare rei æstimation, p:R: v: cubica R: 11005 $\frac{1}{27}$ p: 36, m: R: v: cubica R: 11005 $\frac{1}{27}$ m: 36, & duplum huius pro qdratis addetur utriq; parti, radix igit, ex una parte est 8 p: rebus sub numero æstimationis rei, ex alia aut qdrata sub numero R: v: $\frac{1}{64}$ qdrati, huius æstimationis addito 1, m: positionibus sub numero R: dupli huius æstimationis.

QVÆSTIO XII.

Si quis dicat, 1 qd' qdratum p:3, æquatur 12 rebus, addes 2 positiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit R: quadratam sine numero ut clarum est, igitur addemus ex alia parte pro numero quadratorum 2 positiones, & pro numero

1 quad. m:3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æ-

$$\begin{array}{r} 1 \text{ qd' qd. p: 3 } | 12 \text{ pos.} \\ 2 \text{ pos. quad. p: 1 quad. m: 3} \\ \hline 1 \text{ qd' qd. p: 2 pos. p: 1 qd. } | 2 \text{ pos. } | 12 | 1 \text{ qd. m: 3} \\ 1 \text{ qd' qd. p: 6 quad. p: 9 } | 6 \text{ quad. p: 12 pos. p: 6} \end{array}$$

quales 6 rebus p:36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p:18, & res ualet 3, igitur partes sunt ut uides, & erit 1 quadratum p:3, R: primæ partis, æqualis rebus R: 6 p: numero R: 6, & res quæsitæ erit, R: v: R: 6 m: $1\frac{1}{2}$ p: R: $1\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias numerum, cuius qd' qdratum cum duplo cubi, sit 1 p: ipso numero, igitur dices, 1 qd' qdratum p:2 cubis æquantur ad 1 positionem p:1, hic non datur locus radici subtrahendæ, nec diuisioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum ad aggregatum secundi & tertij eandē habeant rationem, quam aggregatum secundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 pos. 1 quad. habebis igitur 1 qd' qdratum p:2 cubis p:1 quadrato, æqualia 1 quadrato p:1 positioni p:1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 qd' qdratum p:2 cubis, æqualia 1 positioni p:1, ergo iam scimus rationem quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, sit quadratum aggregati secundæ & tertij, igitur tale aggregatum est diuisum secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio est 1, igitur residuum (& est maior portio) est R: $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc equatur (ut supponitur) 1 qdrato p:1 positione, igitur quantitates sunt ut uides.

Mediæ