Hieronymi Cardani, praestantissimi mathematici, philosophi, ac medici Artis magnae, sive de regvlis algebraicis, lib. unus

Cardano, Geronimo

Norimbergae [Nürnberg], 1545

VI. De modis inueniendi capitula noua

urn:nbn:at:at-ubi:2-864

fuit ℞: 64, quæ est 8, & sic effugisti q̃d'q̃d^{ti}, ponendo ℞ positionum.

QVÆSTIO X.

Quest. decima

Fuerunt homines in tribus societatibus, & numeri illorum proportionales, ductoq́ numero secundæ societatis, in numerum tertiæ, consurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in hoc considerare, quòd perabsurdum est, ut tales numeri sint irrationales, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur in qua proportione quadratũ dimidij producti ex secunda in tertiam superat aggregatum omnium in numero aliquo q̃drato, & inuenies quòd in dupla, capiendo, 1, 2, 4. productum ex dimidio 8, qui fit ex 2 in 4, & est 4 in se, excedit 7 aggregatum in 9 numero q̃drato, & hoc uenaberis ex alia positione simplici. Pones igitur totidem res pro his numeris, scilicet 1 pos^{o}, 2 pos^{es}, 4 pos^{es}, harum aggregatũ est 7 pos^{es}, adde his cubum 1 pos^{is}, & fiet 1 cubus p: 7 pos^{b9}, & hoc ęquatur 8 q̃dratis, producto secundæ in tertiam, deprime partes per pos^{es}, fit 1 q̃d^{m} p: 7 æq̃le 8 pos^{b9}, quare per tertiam regulam, duc 4 dimidiũ numeri pos^{um} in se, fit 16, abijce 7 numerum, relinquitur 9, huius ℞ addita uel detracta à 4 dimidio numeri rerum, ostendit 7, & 1 æstimationes rei. sed quia 1 non est numerus societatis, ideo dicemus quòd res fuit 7, & hic est numerus hominum primæ societatis, secũda igitur habebit homines quatuordecim, tertia 28, constat autem quòd cubus, 7 cum aggregato numerorum est 392, & tantum producitur ex 14 secundo numero in 28 tertium.

1 pos. cubus p^{e}.	1 cub.
2 pos. aggreg.	7 pos.
4 pos. ꝑduc. 3^{e} in 2^{am}	8 q̃d.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.

1 CVm uero diligenter considerassem in his, uisum est mihi, ut etiam ultra transgredi liceret, itaq́ exemplo deriuatiuorum, quæ iam inuenta fuerant, q̃d'q̃drati & q̃d^{ti} æqualium numero, tum etiam cub'q̃drati & cubi æqualium numero, ac reliquorum quatuor, capitulum constituerem q̃d'q̃d'q̃d^{ti}, & q̃d'q̃d^{ti} & numeri, inuicem æqualium, indeq́ æstimatio rei ℞'℞ est, æstimationis principalium eis correspondentium, uelut si 1 q̃dratum p: 1 pos^{ne} est æqualis 12, & æstimatio rei est 3, si 1 q̃d'q̃d'q̃d^{um} p: 1 q̃d'q̃d^{to} æquantur 12, ęstimatio rei erit ℞'℞ 3, indeq́ ad excogitanda reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uero ad alia me transtuli, uisumq́ oportunum, ut æquationum naturam spectarẽ, cumq́ & primi coniuncti (sic enim binomiũ) & apo-

& apotomæ primæ (sic enim recisum uocamus) originem intuerer, uisum est, ut in his duæ essent diuersorum generum quantitates, numerus, & irrationalis pars, seu radix, porrò cum ad q̄dratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in se, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uero constituitur in parte irrationali, ex triplo quadrati numeri, cum quadrato radicis in radicem. Igitur proportio partis irrationalis in cubo, ad partem irrationalem in q̄drato, est uelut tripli quadrati partis, quæ est numerus, cum quadrato partis quæ est radix, ad duplum numeri. at proportio tripli q̄drati numeri, ad duplum numeri, est ipse numerus cum dimidio. proportio etiam q̄drati radicis, ad duplum numeri, est quæ prouenit diuiso tali q̄drato per idem duplum, igitur ipsa proportio, est numerus ipse cum dimidio sui, & tali prouentu, quare assumptis totidem q̄dratis, erunt partes irrationales æquales, quare tot q̄drata æquabuntur cubo & numero, uelut in hoc casu, diuido 3 quadratū radicis, per 4, exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, q est ęqualis numero & dimidio, fit $3\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac ęstimatiōe $3\frac{3}{4}$ q̄drati æquabuntur cubo & alicui numero, & est numerus ipse $\frac{1}{4}$.

res 2 p: ℞ 3
q̄d. 7 p: ℞ 48
cu. 26 p: ℞ 675

Demum uolens diligentius rem perscrutari, posui 10 q̄drata æqualia cubo, & alicui numero, & posui partem primam binomij (sic enim usus gratia appellabo coniunctum) esse, gratia exempli, 3, & cōstitui partem secundam 1 pos^{em}, & hæc est radix. quadratum igitur, est 9 p: 1 q̄drato, & hoc totum est numerus & 6 pos^{es}, & hoc est radix, at in cubo ut dictum est fit pars irrationalis ex triplo q̄drati 3, & est 27, & q̄drato 1 pos^{is} q̊d est 1 q̄dratum, in partem quæ est irrationalis, id est in 1 pos^{em}, igitur 27 pos^{es} p: 1 cubo, ęquātur 10 q̄dratis, in parte irrationali, id est decuplo 6 pos^{um}, quod est 60 pos^{es}, igit̄ dicemus, quòd cubus æquatur 33 pos^{bus}, igitur deprimendo per pos^{es}, q̄dratū æquatur 33, igitur res est ℞ 33.

3 p: 1 pos.
9 p: 1 q̄d. p: 6 pos.
27 pos. p: 1 cu.
60 pos.
1 cu. æq̄lis 33 pos.

REGVLA.

Ex his tandem hæc formatur regula breuissima. Adde primo numero dimidium sui, & totum abijce ex numero q̄dratorum, residuū duces in duplum prioris numeri, & producti ℞ est secunda pars coniuncti. Exemplum, est cubus qui cum numero ęqualis est 12 q̄dratis, & prima binomij pars est 5, adde dimidium 5 ad 5, fit $7\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit $4\frac{1}{2}$, duc $4\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius ℞ est secunda pars coniuncti, igitur 12 q̄drata & 5 p: ℞ 45, ęqualia sunt cu bo & 40. Eadem ratione inueni, quod numerus æquationis, scilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in q̄dratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, est differentia.

Post hæc deuolui consilium ad explorandum qualitatem capitulorum cub' q̄drati, rerum & numeri, uidiq́ꝫ, quòd si dixero, cubus & 3 q̄drata, æqualia sunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædã intellecta, æstimatio rei, cuius prima pars sit numerus, secunda uero quantitas, alia pars irrationalis. Et sit gratia exempli, hic 1 p: ℞ 5, cõstat autem quòd coniungendo partes irrationales cubi & q̄drati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, seu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq́ꝫ ex triplo q̄drati numeri, & q̄drato irrationalis partis, hoc est autem æquale, in capitulo cub' q̄drati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroqꝫ pars rationalis talis sit, ut si iungantur, duplum numeri q̄dratorum, & etiam triplum sui quadrati, cum quadrato alterius partis, constituat numerum rerum. Et si pars rationalis uel numerus esset minus, oporteret ut esset differentia dupli numeri q̄drati, & tripli quadrati partis, quę est ℞ cum quadrato partis quæ est numerus, ipse numerus rerum. Exemplum, si 1 cubus p: 6 q̄dratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomæ, sit m: 2, tunc ducemus 6 numerum q̄dratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod est 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & ℞ 42 est pars prima apotomæ, quare res ualet ℞ 42 m: 2.

5 p: ℞ 45
5 — 12 — 15
7 3
25 45
175 — 135
40

res 1 p: ℞ 5
q̄d. 6 p: ℞ 20
cub. 16 p: ℞ 320

3 Est & modus alius, qui similitudinis dicitur, atqꝫ hic quadruplex. A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, sicq́ꝫ capitulo non uniuersalia inuenimus q̄d' q̄drati, rerum, ac numeri. A conuersione æquationum in naturam ei æquiualentẽ, ut exponemus infra. A modo pro ędendi ad æquatiões per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim sunt modi uariandi in uniuersum.

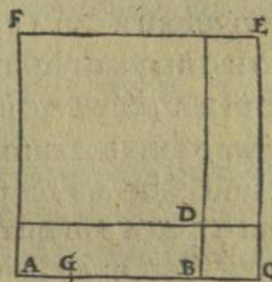
4 Est etiam transmutationis uia, qua ante demonstrationem uniuer

salia

salia capitula multa inueni, atq; inter reliqua, cubi æqualis q̄dratis & numero, & cubi cum q̄dratis, æqualis numero, uelut cū conamur hanc soluere quæstionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum æquale sit alterius q̄drato, & ex uno in alterum ducto, producatur 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 q̄drato p: 8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æstimatione, si diuiseris 8 per eam, prodibit reliqua ęquatio, ex qua in capituli illius cogitationem perueni. Quæstiones igitur alio ingenio cognitas ad ignotas transfer positiones, nec capitulorū inuentio finem est habitura, nō tamen extra hæc, ex una quæstione, generalia poteris assequi.

Cum autem intellexissem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mi 5
hi tradiderat, ab eo fuisse demonstratione inuentum Geometrica, cogitaui eam uiam esse regiā, ad omnia capitula uenanda. Itaq; ad eam tria supposita maxime utilia pręmittere institui, quorum dilucida declaratione, reliqua, quę & ipsa demonstrabuntur, facile erit intelligere, est autem horum hoc primum.

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis est, 6
cubis ambarum partium, triploq; productorum, uniuscuiusq; earū, uicissim in alterius q̄dratū. Quamuis hoc & reliqua duo quæ sequuntur in 7° nostro super Euclidem libro ostensa sint, ne tamen huic operi quicq; deesset, placuit hic denuo demonstrare. Sit igitur A C, diuisa in puncto B, & sit cubus totius A E, sint etiā in basi eius supficies distinctæ, D A, D C, D F, D E. manifestum est autem ex 4ª 2ⁱ elementorum, C D esse quadratum B C, & D F quadratum A B, & duo rectangula A D & D E, fieri ex A B in B C, singula, cubus autem totus constat ex A C linea, in q̄dratum A E, quare ex A C, in superficies D A, D C, D E, D F, componentes A E, quare cum A C constet ex A B &



B C, constabit cubus A E, ex octo corporibus, quorum quatuor constant ex A B linea in superficies D A, D C, D E, D F, reliqua quatuor, ex B C linea, in easdem quatuor superficies. At ex A B in F D, fit cubus A B, & ex B C in C D, cubus B C, constat igitur cubus A E, ex cubis A B & B C, & ex eo quod fit ex A B in D A, D C, D E, & eo quod fit ex C B in D A, D F & D E, at quod fit ex A B in C D, æquale est ei q̊d fit ex B C in D A, & quod fit ex B C in D F, ęquale ei, quod fit ex A B in A D, eo quòd altitudines & bases eædem sunt, parallelepipeda etiam ex A B in A D, uel D E æqualia sunt inuicem, similiter ex B C in A D, uel D E, inuicem

æqua-

æqualia, eo quòd D A & D E sunt æquales superficies, ex 43ª primi elementorum, igitur cubus A C constat ex cubis A B & B C, & triplo A B in quadratū B C, & triplo B C in quadratū A B, quod erat probandū.

7 Ex hoc patet secundum, scilicet, quòd cubus A B, cum triplo A B in quadratum B C, superat cubum B C cum triplo B C in quadratū A B, in cubo differentiæ A B & B C, sit igitur A G æqualis B C, & erit differentia A B & B C, linea G B, constat autem ex precedente cubum A B, æqualem esse cubis A G & G B & triplo A G in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G, quare cubus A B cum triplo A B in quadratum B C, æqualis est cubis A G & G B, & triplo A B in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G, & triplo A B, in quadratum B C, uerū cubus A G æqualis est cubo B C, & triplum B G in quadratum A G, æquale est triplo B G in quadratum B C, & triplum A G in quadratum G B, æquale est triplo B C in quadratum B G, eo quòd B C æqualis est A G, cubus igitur A B, & triplum A B in quadratum B C, æqualia sunt cubo B C, & B G, & triplo B G in quadratum B C, & triplo B C in quadratum B G, & triplo A B in quadratum B C, at ex B G in quadratū B C, fit quantum ex B C in rectangulum ex B G in B C ter, igitur ex B G in quadratum B C, æquale ei quod fit ex B C in rectangulū ex B C in B G ter, eadem ratiõe, quod ex A B in B C quadratum ter, æquale ei quod ex B C in rectangulum ex A B in B C ter, cubus igitur A B, & triplum A B in quadratum B C æqualis est cubis B G & B C, & triplo B C in rectangulum B C in A B, & triplo B C in rectangulum ex B C in B G, & triplo B C in quadratum B G, at ex 4ª 2ⁱ elementorum, rectangulum ex B C in B A, & ex B C in B G, cum quadrato B G æquantur quadrato A B, igitur cubus B G cum cubo B C, & triplo B C in quadratum A B æqualia sunt cubo A B, & triplo A B in quadratum B C, quare cubus A B, cum triplo A B in quadratum B C, excedunt cubum B C, cum triplo B C in quadratum A B, in cubo differentiæ B G.

Corᵐ. primū. Ex hoc patet, quòd si B C ponatur m: quòd cubus A B constabit ex cubo A C & triplo A C in quadratum B C, addito per m: cubo B C, & triplo B C in quadratum A C, nam si B C fuisset p: differentia cubi A C cum triplo A C in quadratum B C, à cubo B C & triplo B C in quadratum A C, fuisset cubus A B, ex demonstratis. Sed posita B C m: tantum est quod aggregatur, quanta est differentia posita B C p: igitur cubus A B, est aggregatum cubi A C & tripli A C, in quadratū B C, & tripli B C in quadratum A C m: & cubi B C m: Et eodem modo, si A B poneretur m: cubus B C constaret ex cubo A C, & triplo A C in quadratū A B, & triplo A B, in quadratum A C per m: & cubo A B per m:

Eodem

Eodem modo, si A B ponatur m: cubus A B componetur ex cubo B C, & triplo B C in quadratum A C, & cubo A C per m: & triplo A C in quadratum B C per m: nam ut dictum est, cubus A B, est differentia talium partium per p: ex primo corrolario, igitur detracto maiore ex minore, fiet tantundem m: sed cubus A B m: est æqualis cubo A B p: in numero, ut em̄ 27 p: est cubus 3 p: ita 27 m: est cubus 3 m: igitur cubus A B m: est æqualis cubo B C & triplo B C in quadratum A C, & cubo A C m: & triplo A C in quadratum B C m: Cor^m. secūd.

Ex primo autem supposito, ostenditur etiam hoc tertium, quod est, proportionem aggregati ex cubis A B & B C ad triplum productorum A B in quadratum B C, & B C in quadratum A B esse, ut trium linearum in proportione continua, A B & B C existentium aggregati primæ & tertiæ, detracta secunda, ad triplum secundæ. constat em̄ ex 32ª 11ⁱ elementorum, quòd proportio cubi A B ad corpus ex A C in quadratum A B, est ut quadrati A B ad A D superficiem, quare ex pª. 6ⁱ. elementorum, ut A B ad B C, eadem ratione parallelepipedi ex B C in quadratum A B ad parallelepipedum ex A B in quadratum B C, proportio, ut A B ad B C, atq; rursus parallelepipedi, ex A B in quadratum B C ad cubum B C, ut A B ad B C. Quatuor igitur corpora, scilicet cubus A B, parallelepipedum, ex B C in quadratum A B, parallelepipedū ex A B in quadratum B C, & cubus B C sunt in continua proportione linearum A B & B C. Statuamur itaq; hæc corpora breuitatis causa in quatuor literis H, K, L, M, ita ut H sit cubus A B, & K parallelepipedum ex B C in quadratum A B & L parallelepipedū ex A B in quadratum B C, & M sit cubus B C, igitur cum ratio M ad L sit ea quæ L ad K, ut probatum est, item K ad L, ut H ad K, erit ex 24ª 5ⁱ elementorum, K M ad L, ut H L ad K, quare ex 12ª eiusdem, H K L M, ad K L, ut H L, ad K, quare ex 19ª eiusdem, H M ad K L, ut H L detracto K, ad K, quare ex 22ª eiusdem, H M ad triplum K L, ut H L dempto K ad triplum K, at cum H K L, sint in proportionē A B ad B C, ut probatū est, erit ex 11ª eiusdē 5ⁱ elementorum, cuborum A B & B C, simul iunctorū, ad triplum A B in quadratum B C, & B C in quadratum A B, uelut primæ & tertię trium linearū proportionalium, in proportione A B & B C, detracta media ipsarum, ad triplum ipsius mediæ. 8

H, K, L, M.

Ex hoc patet, quòd proportio tripli B C in quadratum A B, ad triplum A B in quadratum B C, est ut A B ad B C, ex 12ª 5ⁱ el. Cor^m. tertiū.

Atq; etiam, quòd proportio cuborum A B & B C, cum duplo B C in quadratum A B, & A B in quadratum B C, ad residuum totius cubi quartū Cor^m.

A C, est ut trium superficierum D C, D A, D F, ad D E superficiem, seu ut trium quantitatum proportionalium in proportiōe A B ad B C, ad mediam ipsarum, ac multa alia quæ breuitatis causa omitto.

De capitulorum transmutatione. Cap. VII.

1 CVm fuerit numerus & denominatio media, extremæ æqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes easdem, & sub eadem magnitudine numero æquales, uelut si dicam, quadratum æquatur 6 radicibus & 16, dicemus igitur etiam, quadratum & 6 radices, æquantur 16, manetq́ conuersa ratio, inde habita prima æquatione, detrahemus numerum radicum, & est 6, & habebimus secundam, uel secunda habita, addemus 6 numerum radicum, & fiet æquatio prima, uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non potest.

2 Verum generalis est regula, cum media denominatio, numero & extremæ denominationi æquatur, tunc conuertetur in aliam mediam denominationem, tantundem à numero distantem, quantum prior media ab extrema denominatione distabat. Sic pro exemplo, si cubus & numerus æquales sint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam ęquabitur, sed non sub rerum numero existentibus. Ratio uero habendi mediam denominationem est, deprime maiorem denominationem ex medijs, per minorem, & radicem numeri æquationis, sumptam secundum naturam denominationis extremæ, reduces ad denominationem quæ exijt, & cum eo numero, multiplicabis numerum denominationis mediæ proximioris maximæ denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero, & qui exit, numerus est denominationis mediæ, uelut si cubus & 16 æquentur 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16, æqualia rebus. harum numerum sic uenabimur, deprime q̄dratum per res, exeunt res, accipe ℞ cub: 16, nam cubus est extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res sit id, quod prouenit, diuiso quadrato per rem, fiet igitur ℞ cub. 16, quoniam res non auget nec minuit, igitur ducemus ℞ cub. 16 in 6 numerum quadratorum, qui sunt proximiores cubo, quàm numero, & fient res ℞ cub. 3456 æquales 1 cub. p: 16. Exemplum aliud, cubus & 8 æquantur 18 rebus, dices igitur, cubus & 8, æquantur quadratis, diuide igitur quadratum per rem exit res, accipe ℞ cubicam 8. quia cubus est maxima denominatio, & est 2, ea non est deducenda aliter, cum res sit denominatio exiens, fiet igitur 2 diuisor 18 numeri rerum,