

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über Theorie der Wärme

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1903

Erster Theil. Reine Wärmelehre

Erster Theil.

Reine Wärmelehre.

Erster Abschnitt.

Grundlagen.

Erstes Kapitel.

Ueber die Temperatur.

§ 1. Kennzeichen der „Warmheit“ eines Körpers, ungleicher und gleicher Temperatur verschiedener Körper.

Die Theorie der Wärme bietet gegenüber den anderen Kapiteln der Physik manches Eigenthümliche, bedingt durch die völlige Verschiedenheit der Anschauungen vom Wesen der Wärme in früherer und jetziger Zeit. Die ältere Ansicht entsprang lediglich aus der nächstliegenden Erfahrung, nach welcher die Wärme Einfluß hat auf die Empfindung, die ein berührter Körper in uns hervorruft. Wir finden, daß Körper verschiedene Stufen der „Warmheit“ annehmen können: wir wollen diesen Namen wählen, da das Wort „Wärme“ einen quantitativ bestimmten anderen physikalischen Sinn bekommen hat. Durch das Gefühl für „Warmheit“ oder für die Intensität des Wärmezustandes, oder für „Temperatur“ erkennen wir die Aenderung, daß ein kalter Körper wärmer wird, und erkennen auch, daß die Ursache dieser Aenderung von einem Körper auf den anderen übergehen kann. Wir finden dann weiter, daß ein Körper, der uns wärmer erscheint, auch in manchen objectiven physikalischen Eigenschaften sich ändert, und zwar auch in solchen, deren Veränderungen wir der Größe nach messen können. Das auffallendste und allgemeinste Phänomen dieser Art ist eine Volumenveränderung, fast stets in dem Sinne, daß das Volumen eines Körpers wächst, wenn er gesteigerte Empfindung der Warmheit giebt, bei unveränderten sonstigen Bedingungen, zu welchen namentlich

der Druck gehört. (Nur einige wenige Körper ziehen sich innerhalb gewisser enger Temperaturgrenzen bei Erwärmung zusammen.)

Die Volumenveränderungen können nun unabhängig von der Empfindung objectiv constatirt und ihrem Betrage nach gemessen werden; an dem Volumen eines Körpers können wir zunächst objectiv erkennen, ob er zu verschiedenen Zeiten wiederholt einen bestimmten Grad der Warmheit besitzt. Weiter finden wir auch, daß ein Körper, welcher bei Erwärmung unter constantem Druck sich ausdehnt, andererseits, wenn man ihn an dieser Ausdehnung verhindert, gesteigerten Druck zeigt. Diese Druckerhöhung ist ebenfalls sehr geeignet als Kennzeichen für die Temperaturhöhe ein und desselben Körpers zu dienen. Endlich sehen wir, daß bei Aenderungen der Temperatur auch solche des Aggregatzustandes eintreten: Uebergang aus dem festen in den flüssigen und aus diesem in den gasförmigen Zustand, und umgekehrt. Diese Uebergänge finden für eine bestimmte Substanz, wenn man die äußeren Umstände ungeändert hält, immer bei gleichzeitig constant bleibender Warmheit statt, so daß auch sie dazu dienen können, objectiv bei wiederholter Erwärmung immer wieder das Erreichen einer bestimmten Temperatur bei einem Körper zu erkennen. Es sei bemerkt, daß ausnahmsweise diese Uebergänge verzögert werden können, indem Zustände labilen Gleichgewichts eintreten; z. B. kann Abkühlung einer Flüssigkeit bis unter die normale Erstarrungstemperatur vorkommen. Kommt die Flüssigkeit dann in Berührung mit einem Krystalle derselben Substanz — und wenn er auch nur von mikroskopischer Größe ist — so erstarrt sie sofort. Eine solche Verzögerung des Erstarrens bei Abkühlung kann daher vermieden werden, wenn man dafür Sorge trägt, daß Krystalle derselben Substanz vorhanden sind. Man hat sich daraus die Regel gebildet, nur dann mit Sicherheit das Vorhandensein der Uebergangstemperatur anzunehmen, wenn gleichzeitig fester und flüssiger Aggregatzustand nebeneinander vertreten sind. Auch der Niederschlag von Dämpfen, der Uebergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand bei Abkühlung, kann sich verzögern; diese Verzögerung kann u. a. vermieden werden, wenn Contactkörper vorhanden sind (Staub), an denen die ersten erzeugten Tropfen adhäriren, welche Contactkörper in diesem Falle nicht aus derselben Substanz zu bestehen brauchen.¹⁾

¹⁾ Ueber andere Ursachen, welche die verzögerte Condensation von Dämpfen auslösen, siehe ROBERT v. HELMHOLTZ, WIED. ANN. 32, p. 1, 1887; und d. anschließenden Arbeiten ebenda 40, p. 163, 1890; 59, p. 592, 1896 u. a. Vgl. auch diese Vorlesung § 78.

Volumenänderungen, Veränderungen des Druckes und des Aggregatzustandes haben im Wesentlichen seit alter Zeit die Grundlage für die Untersuchung der Wärmeerscheinungen gebildet. Wir können aber sagen, daß außer diesen fast alle diejenigen Eigenschaften, welche verschiedenartigen Körpern in verschiedenem Grade oder in verschiedener Weise zukommen, auch durch Temperaturänderungen beeinflusst werden. So die Elasticität fester Körper; die Winkel, unter welchen die Flächen eines Krystalls an einander stoßen; die magnetischen und dielektrischen Eigenschaften der Körper; ihr Leitungsvermögen für galvanische Ströme und für Wärme; ihre optischen Constanten u. s. w.

An solchen meßbaren Veränderungen können wir erkennen, ob ein und derselbe Körper eine gleiche Temperatur, wie diejenige, die er zu einer bestimmten Zeit einmal hatte, zu einer späteren Zeit wieder erlangt.

Unsere nächste Aufgabe wird nun sein, gleiche Temperaturen verschiedener Körper als gleich wieder zu erkennen. Ob dies Verlangen überhaupt einen Sinn hat, ist nicht von vornherein selbstverständlich.

Wenn wir zwei Körper in einer bestimmten Beziehung als gleich anerkennen wollen, so verlangen wir damit, daß in dieser Beziehung die beobachteten Thatsachen dem Axiom genügen: „Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.“ Es muß dasselbe Kennzeichen, dasselbe Merkmal, dasselbe Verhalten, durch welches wir ein Verhältniß der Gleichheit zwischen einem ersten und zweiten, sowie zwischen einem ersten und dritten Körper erkennen, nach derselben Vergleichsmethode auch zwischen dem zweiten und dritten Körper Gleichheit ergeben. Dies Verhalten muß ausnahmslos als zutreffend befunden werden; es ist die Definition eines Verhaltens, welches wir als Gleichheit in gewisser Hinsicht bezeichnen. Diese Bezeichnung beruht also auf ganz bestimmten Beobachtungen und ist nichts weniger als abstract.

Wenn wir drei Cirkel haben und ihre Spitzen in solche Stellungen bringen, daß die Spitzen des ersten gleich weit von einander entfernt sind oder sich congruent berühren können mit denen des zweiten, und andererseits sich auch congruent berühren können mit denen des dritten, so wissen wir erfahrungsmäßig, daß dann auch die Spitzenpaare des zweiten und dritten Cirkels sich congruent berühren können; dies beweist, daß wir von einer Gleichheit der Entfernungen zwischen den beiden Spitzen bei diesen Cirkeln sprechen

und sie durch congruente Berührung prüfen können. — Ob zwei Körper gleiches Gewicht haben, erkennen wir daran, daß eine richtig eingerichtete Wage im Gleichgewicht bleibt, wenn wir die beiden Körper auf ihre Wagschalen legen. Die beiden Körper können übrigens sehr verschieden sein, aus verschiedenen Substanzen in verschiedenen Aggregatzuständen bestehen; nur in Bezug auf die besondere Eigenschaft des Gewichts, die sich allein auf die Wirkung der Schwerkraft bezieht, nennen wir sie gleich. Dazu sind wir berechtigt, weil wir aus langer Erfahrung und außerordentlich vielen zu der größten Genauigkeit der Prüfung getriebenen Versuchen wissen: Wenn an einer richtigen Wage sich ein Paar von Körpern a und b als gleich an Gewicht erwiesen hat, und ebenso ein zweites Paar a und c , dann erweisen sich auch b und c als gleich in Bezug auf ihr Gewicht. In diesem Falle kann das aus unzähligen Beobachtungen als zutreffend befundene Kennzeichen der Gleichheit umgekehrt auch benutzt werden zur Prüfung der Methode, durch welche wir die Gleichheit constatiren, also zur Prüfung, ob eine bestimmte Wage richtig d. h. im Stande ist, Gleichheit von Gewichten in der zu Anfang angegebenen Weise zu constatiren. Ist eine falsche, ungleicharmige Wage im Gleichgewicht, wenn a und b auf ihren beiden Schalen liegen, und auch wenn wir c statt b auflegen, so ist sie nicht mehr im Gleichgewicht, wenn wir dann a wegnehmen, und durch b ersetzen, obwohl b und c gleich sind. In diesem Falle würde das zuvor als zutreffend erkannte Axiom die Unrichtigkeit des Apparates erweisen.

Folgendes Beispiel zeigt eine Wirkung, die nicht als Kennzeichen von Gleichheit benutzt werden kann. Betrachten wir eine Reihe von vollkommen gleich beschaffenen und geformten Stahlstäben, alle genau in derselben Weise zu Magneten gemacht. Wir nehmen an, es sei uns bekannt, daß sich Pole anziehen können; dagegen hätten wir noch nicht erkannt, daß sich Pole auch abstoßen können; wir halten also alle Pole für gleich. Wir wollen versuchen, die gegenseitige gleichgroße Anziehung der Pole als Kennzeichen der Gleichheit für sie anzusehen und prüfen, ob unser Axiom anwendbar ist. Wir finden: ein Pol a zieht irgend einen, b , der anderen Pole in bestimmter Entfernung mit einer gewissen Kraft an, ebenso einen Pol c eines dritten Stabes; dann aber finden wir weiter, daß sich nicht auch b und c mit derselben Kraft anziehen, sondern daß sie sich abstoßen. Also ist das Axiom nicht anwendbar. In der That sind auch nicht alle drei Pole gleich, sondern nur die Pole b und c ; der Pol a ist ein ihnen entgegengesetzter. — Ebenso wenig kann das Aufeinander-

passen der Oberflächen von Körpern als Kennzeichen der Gleichheit der körperlichen Grenzfläche benutzt werden, wie man aus folgendem erkennt: wenn eine concave Oberfläche eines Körpers auf die convexe eines anderen paßt, und ebenso auf eine zweite, dann passen doch die beiden convexen Oberflächen nicht auf einander. Man darf also nicht auf Grund des Aufeinanderpassens zweier Körperoberflächen von ihrer Gleichheit sprechen.

Für die Temperatur kann man nun in der That Gleichheit constatiren durch Untersuchung, ob Wärmegleichgewicht zwischen zwei unabhängig von einander erwärmten Körpern existirt. Gleiche Temperatur haben Körper, deren Temperaturgrad durch engste Berührung mit einander nicht geändert wird. Diesen Zustand nennen wir Wärmegleichgewicht. Ist dagegen Wärmeaustausch vorhanden, so nennen wir denjenigen Körper, welcher Wärme abgibt, den wärmeren; und denjenigen, welcher Wärme aufnimmt, den kühleren. Wir dürfen den Zustand des Wärmegleichgewichts als Kennzeichen für Gleichheit der Temperatur nur dann betrachten, wenn wir uns überzeugt haben, daß zwei Körper, von denen jeder mit demselben dritten in Wärmegleichgewicht ist, auch unter einander keine Wärme austauschen. Als den gemeinsamen Vergleichskörper wählt man gewöhnlich einen solchen, an dem sichtbare Aenderungen als Folge von denen der Temperatur eintreten: ein Thermometer. Wir bringen es mit dem einen Körper *A* in Berührung und warten, bis beispielsweise die Quecksilbersäule des Thermometers stillsteht, d. h. Wärmegleichgewicht mit *A* eingetreten ist. Mit demselben Thermometer prüfen wir, ob bei demselben Volumen der Quecksilbersäule Gleichgewicht mit einem zweiten Körper *B* vorhanden ist. Ist dies der Fall, dann sind, wie die Erfahrung lehrt, auch *A* und *B* unter einander im Temperaturgleichgewicht. Damit haben wir also ein Kennzeichen gefunden, welches der Bedingung entspricht, daß überhaupt von Gleichheit der Temperatur zwischen verschiedenen Körpern die Rede sein kann.

Es ist keineswegs von vornherein klar, daß man von Gleichheit der Temperatur sprechen kann, unabhängig von der Verschiedenheit der Vorgänge, welche die betreffende Temperatur hervorgebracht haben können. Z. B. kann die Erwärmung durch Berührung mit einer Flamme, oder auch durch Absorption einer Strahlung hervorgerufen werden. Im letzteren Falle können die absorbirten Strahlen von ganz verschiedenen Stellen des Spektrums herrühren, d. h. ganz verschiedene Wellenlänge und im Uebrigen ganz verschiedene physikalische Wirkung haben. In Bezug auf die Temperatur dagegen zeigt

sich kein Unterschied, der abhängig wäre von der besonderen Herkunft der Wärme, die dem Körper mitgetheilt ist. Haben wir durch sie einen bestimmten Temperaturgrad erreicht, so sind auch alle anderen Zustände, die wir physikalisch untersuchen können, vollkommen dieselben; sie sind einzig und allein abhängig von dem Grade der Temperatur, wie ihn das Thermometer anzeigt, mit dem wir also eine vollkommen ausreichende Definition des Wärmezustandes des Körpers haben.

In dem einfachen Umstande, daß die früheren Physiker von Gleichheit der Temperatur reden und diesen Begriff consequent in fortdauernder Uebereinstimmung mit den beobachteten Thatsachen durchführen konnten, liegt schon eine große Reihe von thatsächlichen Beobachtungen verborgen, von denen man nie geredet hat, weil sie sich einfach immer bestätigten. Was in diesem Falle besonders deutlich hervortritt, sieht man auch in vielen anderen Gebieten der empirischen Wissenschaften und auch in den nicht wissenschaftlich umfaßten alltäglichen Beobachtungen. Wenn man nicht den Quellen und dem vollständigen Sinne einer Definition und Namengebung nachgeht, dann findet man sehr häufig nicht die eigentliche Fülle von Thatsachen, die ihr zu Grunde liegen. Das liegt aber in dem Verfahren unserer Sprachbildung; denn es hat keinen Zweck, sich Namen und Worte zu bilden für Dinge und Begriffe, von denen man nicht häufig und zwar in übereinstimmender Weise zu sprechen hat. Deswegen liegen in unserer Sprachbildung viele Naturbeobachtungen des alltäglichen Lebens verborgen. Wer nicht bemerkt, auf welche Weise solche Begriffe in die Sprache hineingekommen sind, glaubt dann, der Begriff, wie er im Geiste des Menschen existirt, regiere die Welt.

§ 2. Messung der Temperatur. Principien der Thermometrie.

Für eine Messung der Temperatur, wie jeder Größe, genügt es nun aber noch nicht, daß wir Entscheidung über Gleichheit oder Ungleichheit geben können, sondern wir müssen auch eine Methode finden, vermöge deren wir Temperaturen als solche meßbar zahlenmäßig angeben können. Das ist dasselbe wie die Zurückführung der Beziehung zweier Temperaturen auf einen Additionsprozeß, da wir ja die Temperatur eines wärmeren Körpers angeben wollen als zusammengesetzt aus der Temperatur eines kälteren und einer bestimmten Temperaturdifferenz. Daß in der That ein physikalischer Prozeß,

der als Addition betrachtet werden kann, jeder Messung zu Grunde liegt, zeigt z. B. das Verfahren bei einer Wägung; man setzt das Gewicht eines Körpers gleich der Summe der Gewichte auf der anderen Wagschale, und für diese Summe gelten alle Regeln der Addition: die Unabhängigkeit von der Reihenfolge und die Möglichkeit, irgend eine Gruppe von zweien der Gewichte zu ersetzen durch eines, welches gleich ist ihrer Summe. Unseren bisherigen Begriffsbestimmungen für die Temperatur fehlt noch die Angabe einer Methode, bei welcher verschiedene auf einanderfolgende Erwärmungen eine Temperaturerhöhung hervorbringen, die unabhängig von der Reihenfolge und gruppenweisen Zusammenfassung der einzelnen Temperatursteigerungen zahlenmäfsig gleich ist deren Summe.

An einem „Thermometer“ zur Messung solcher Wirkungen müssen Temperaturschwankungen gut bestimmbare Veränderungen hervorrufen, welch' letztere im Uebrigen aber sehr verschiedener Art sein können. Nur mufs man noch von dem thermometrischen Körper verlangen, dafs er, nachdem die Temperaturänderung vorübergegangen ist, auch wieder in den früheren Zustand zurückkehrt, so dafs keine Aenderungen in seinem Zustande stattfinden, welche unabhängig sind von der augenblicklichen Temperatur.

Seit langer Zeit benutzt man mit Vorliebe das Quecksilber als thermometrische Substanz und mifst seine thermische Ausdehnung in einer Glasröhre. Dafs es deren Wände nicht benetzt, ist ein Vorzug vor anderen Flüssigkeiten, bei welchen der an den Röhrenwänden haftende Theil die Angaben unsicher machen kann. Wie alle Flüssigkeiten hat es vor den festen Körpern den Vortheil, dafs sicher auf Wiederherstellung der inneren Structur nach vorausgegangenen Erwärmungen zu rechnen ist. Die Ausdehnung des Quecksilbers ist nur klein; damit sie gut sichtbar werde, läfst man eine gröfsere in einer Glaskugel befindliche Menge sich in eine angeschmolzene enge Röhre hinein ausdehnen. Diese Röhre mufs nun mit einer Scale für den Stand des Quecksilbers versehen werden, und hierzu ist die erste Aufgabe, zwei feste Punkte anzugeben, um nachher zwischen ihnen theilen zu können. Bekanntlich benutzt man als solche meist den Gefrierpunkt und den Siedepunkt des Wassers; Temperaturen, die man leicht und sicher immer wieder herstellen kann. Dabei mufs das Wasser rein sein, da gelöste Substanzen jene beiden Grenztemperaturen beeinflussen; und aus demselben Grunde mufs der Druck entsprechen dem als normal betrachteten Barometerdruck von 760 mm Quecksilber, genommen bei 0° und bei der als normal betrachteten irdischen Schwere auf

Meeresniveau in einer geographischen Breite von 45° . Die wechselnde Gröfse des Atmosphärendruckes ändert zwar den Schmelzpunkt nur sehr wenig; sehr stark aber den Punkt des Siedens. Denn dieses findet statt, wenn die Spannung des Dampfes durch Erwärmung gleich geworden ist dem Luftdruck, abgesehen von der Möglichkeit, dafs nur der erste Anfang des Siedens etwas verzögert werden kann durch eine zu starke Adhäsion reinen Wassers an sehr reine Gefäfs-wände.

Auf der an der Röhre angebrachten Scale teilt man nun weiter den Abstand der beiden Fundamentalpunkte, den „Fundamentalabstand“, in hundert gleiche Theile. Ist die Röhre an allen Stellen gleich weit, so liegen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Theilstrichen gleiche Volumenabschnitte von ihr. Ob sie überall gleich weit ist, kann man durch Hin- und Herschieben eines abgelösten Quecksilberfadens controliren, und wenn jenes, wie gewöhnlich, nicht der Fall ist, die an den Theilstrichen anzubringenden Correctionen berechnen. Diese Operation nennt man das Calibrieren des Thermometers. Wenn nun beim Erwärmen das Quecksilber um eine gleiche Anzahl von (corrigirten) Theilstrichen steigt, so nimmt sein Volumen um gleichviel zu. (Wir werden nachher sehen, inwiefern dies einer kleinen Berichtigung bedarf). Man betrachtet dann als Temperatur eine Gröfse, welche in derselben Weise proportional zunimmt wie das Volumen des Quecksilbers, so dafs man die Zahlen, welche die so definirten Temperaturgrade angeben, unmittelbar an den Theilstrichen der Scale anbringen kann. Außer den obengenannten Vorzügen hat Quecksilber auch noch den, dafs es verhältnismäfsig leicht sich zu sehr hoher Reinheit bringen läfst, so dafs man sicher ist, immer wieder eine Substanz zu erhalten, die sich in übereinstimmender Weise ausdehnt. In Folge dessen zeigen verschiedene Quecksilberthermometer, nach bestimmten Methoden hergestellt und nach den gegebenen Vorschriften getheilt, von einander nur sehr kleine Abweichungen in ihren Angaben, so dafs die einzelnen Thermometer nicht einzeln, Jedes mit Jedem, verglichen zu werden brauchen. Darauf beruht im Wesentlichen die Industrie unserer Thermometerverfertigung.

Zwei Gründe stehen dem Erreichen voller Uebereinstimmung bei Quecksilberthermometern entgegen.

Erstens: man nimmt nicht die reine Ausdehnung des Quecksilbers wahr, sondern nur die Differenz zwischen der stärkeren Ausdehnung des Quecksilbers und der des Glases. Nun haben aber verschiedene Glasarten verschiedene chemische Zusammensetzung

und darum auch verschiedene Ausdehnung; diese ist auch nicht für eine einzelne Glassorte bei allen Temperaturen derselbe Bruchtheil von der Ausdehnung des Quecksilbers. Es ist also der Gang der Ausdehnung des Glases ein etwas anderer als der des Quecksilbers, und zwar weicht der Gang für die eine Glassorte in der einen Weise, für eine andere in anderer Weise von dem des Quecksilbers ab. Z. B. kann die Ausdehnung einer Glassorte bei niedrigeren Temperaturen ein größerer Bruchtheil von der des Quecksilbers sein als bei höheren; bei einer anderen Glassorte kann es umgekehrt sein. Hierdurch entstehen Unterschiede in den Scalen verschiedener Thermometer, sodass Einstellung auf dieselbe Ziffer nicht genau derselben Temperatur entspricht. Die Temperaturen Null und Hundert Grad stimmen natürlich bei allen richtig hergestellten Thermometern überein; aber die weiteren Punkte der Scale sind durch die Theilung des Fundamentalabstandes gewonnen, und wenn der Gang der Ausdehnung des Glases bei zwei Thermometern verschieden ist, so entsprechen die zwischenliegenden Grade bei beiden nicht derselben Ausdehnung des Quecksilbers. Man bekommt dadurch Abweichungen in den Angaben, die sich namentlich in der Gegend von 50° am stärksten entwickeln; und bei Fortsetzung der Scale unter 0° und besonders über 100° hinaus entstehen so noch viel grössere, mit steigender Temperatur immer höher und höher werdende Abweichungen. Uebrigens kann man doch auch die Ausdehnung des Quecksilbers und anderer Flüssigkeiten befreit von der Ausdehnung des Gefäßes ermitteln, z. B. durch Vergleichung des specifischen Gewichtes zweier verschieden erwärmter Säulen in communicirenden Röhren.

Noch viel einflussreicher ist zweitens die sogenannte thermische Nachwirkung des Glases. Es hat sich nämlich gezeigt, daß Glas ebenso wie eine Reihe von Metallen z. B. Zink nach einer Erwärmung oder Abkühlung erst nach verhältnißmäßig langer Zeit wieder in sein ursprüngliches Volumen zurückgeht, so dass z. B. unmittelbar nach einer Erhitzung der Eispunkt ein anderer als vorher ist. Wesentlich diese thermische Nachwirkung vereitelt die Erreichung eines höheren Grades von Sicherheit der thermometrischen Messungen als etwa bis auf $\frac{1}{100}$ Grad. Eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ Grad ist zwar von einigen Beobachtern angestrebt worden; aber es sieht nur in seltenen Fällen so aus, als ob dieses Ziel erreicht wäre. In neuerer Zeit hat die Glasfabrikation ganz besondere Aufmerksamkeit darauf verwendet, Glasflüsse zusammenzusetzen, welche möglichst frei sein sollen von thermischer Nachwirkung; in dieser Beziehung

war zuerst vortheilhaft bekannt ein Pariser Hartglas („verre dur“) von TONNELOT und neuerdings das Jenaer „Normalglas“ aus der SCHOTT'schen Glashütte.

Von einem Theil dieser Beeinträchtigungen der Genauigkeit kann man sich frei machen, wenn man andere thermometrische Körper wählt, nämlich die Gase. Deren Ausdehnung (bei gleichbleibendem Druck) ist außerordentlich viel größer als die des Quecksilbers, so daß ihr gegenüber die Ausdehnung des Glases und die von ihr herrührende Unsicherheit viel mehr verschwindet als gegenüber der Ausdehnung des Quecksilbers. Man geht daher bei genauen Untersuchungen zurück auf Gasthermometer, und vergleicht die Scale der Quecksilberthermometer sorgfältig mit der Scale der Gasthermometer. Deren Anwendung ist aber viel mühsamer; denn man muß bei der Gasmasse, welche man der Erwärmung unterwirft, gleichzeitig stets den Druck genau bestimmen. Das erfordert barometrische Bestimmung des äußeren Luftdruckes, und manometrische des Ueberdruckes, welcher auf die eingeschlossene thermometrische Gasmasse von der abschließenden Quecksilbersäule ausgeübt wird. Die Gasthermometer haben aber auch noch insofern einen gewissen Vorzug, als ihre Angaben für verschiedene Gase, wenn man nur nicht in die Nähe ihres Condensationspunktes kommt, fast genau übereinstimmen. Man hat also in ihnen eine Klasse von Körpern von besonders regelmässigem Verhalten, welche außerordentlich nahe übereinstimmende Scalen geben. Aus diesen Gründen hat man insbesondere die schwer condensirbaren Gase, wie namentlich den Wasserstoff und den Stickstoff, als normale Thermometersubstanzen gewählt.

Statt durch Messung der Ausdehnung bestimmt man die thermometrische Scale bei Gasen gewöhnlich durch die Steigerung des Druckes bei Erwärmung, während das Volumen des Gases constant gehalten wird. Beide Definitionen der Scale stimmen fast vollkommen überein. Hat man zuvor nach der gewöhnlichen Regel aus der Volumenvergrößerung eines Gases bei constantem Druck die CELSIUS'sche Scale definirt, so findet man auch, wenn man diese Scale jetzt auf die Drucksteigerung bei unverändertem Volumen anwendet, daß diese mit weit reichender Genauigkeit der Temperatursteigerung proportional verläuft. Es sei bei einer solchen Messung p_0 der Anfangsdruck bei der Temperatur ϑ_0 in Celsiusgraden; p_c der Druck bei der Temperatur ϑ_c ; dann findet man:

$$p_c = p_0 \cdot [1 + \alpha (\vartheta - \vartheta_0)],$$

wo α eine Constante ist (Spannungscoefficient), die für die verschiedenen Gase nur außerordentlich kleine und fast zweifelhafte Unterschiede zeigt, solange man hinreichend weit von dem Condensationspunkte entfernt bleibt; und welche Constante außerordentlich nahe denselben Werth hat in dem analogen Ausdruck für die Volumenvergrößerung (Ausdehnungscoefficient). Nimmt man als ϑ_0 die Temperatur des schmelzenden Eises, so ist bei der Celsiusscale (und auch bei der Réaumur'schen) $\vartheta_0 = 0$, und mit kleiner Umformung wird:

$$p_c = p_0 \cdot \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_c \right),$$

$p_0 \cdot \alpha$ ist eine Constante, die gleich P gesetzt werde; also:

$$p_c = P \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_c \right).$$

Wenn diese Formel, welche das GAY-LUSSAC'sche Gesetz, übertragen auf die thermische Druckänderung, ausdrückt, bis zu den niedrigsten Temperaturen angewandt werden darf, so folgt, daß

bei $\vartheta_c = -\frac{1}{\alpha}$ der Druck des Gases gleich Null werden würde.

Dieses $-\frac{1}{\alpha}$ ist ungefähr gleich -273 Celsiusgraden; diese Tem-

peratur, bei welcher der Druck des Gases vollständig verschwinden würde, wäre eine ideale Grenze; man nennt sie den absoluten Nullpunkt des Gasthermometers. Erreicht ist diese Temperatur experimentell nicht, so sehr auch die Physiker Fortschritte gemacht haben in der Erreichung niedriger Temperaturen. Die von jenem „absoluten“ Nullpunkt an gerechnete Zahl der Celsiusgrade, also $\left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_c \right)$, nennt man die absolute Temperatur des Gasthermo-

mers. Es darf aber nicht vergessen werden, daß die so festgesetzte Temperaturscale mit einer gewissen Willkür von besonderen Eigenschaften besonders geeigneter Körper, nicht aber von dem Wesen der Wärme, hergeleitet ist. Wir könnten daher auch jede beliebige Function der so festgesetzten Temperatur ebenso gut als Temperatur wählen, wozu aber keine Veranlassung vorliegt; denn unsere Ueber-einkunft ist nach besonders zweckmäßigen Regeln getroffen worden. Erst später (aus dem 2. Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie) werden wir ein von der Natur der Wärme selbst gegebenes Maß der Temperatur finden (§ 57).

Die Gasgesetze lassen sich bei Einführung der absoluten Tem-

peratur $\left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta_c\right)$, die wir mit Θ bezeichnen wollen, in vereinfachter Form zusammenfassen. Es wird zunächst der Druck p bei der absoluten Temperatur Θ

$$p = P \cdot \Theta.$$

Nur für unverändert gehaltenes Volumen ist P eine Constante. Läßt man aber bei unveränderter Temperatur das Volumen abnehmen, comprimirt man das Gas, so wächst nach BOYLE und MARIOTTE der Druck umgekehrt proportional dem Volumen V , so daß also P gleichzusetzen ist einer von Volumen und Temperatur unabhängigen Constanten R dividirt durch V , und wir dadurch bekommen:

$$p \cdot V = R \cdot \Theta.$$

Mit großer Annäherung trifft diese Gleichung für alle gasförmigen Körper zu, mit um so weitergehender Annäherung, je geringer ihre Dichtigkeit und je höher ihre Temperatur ist, je weiter diese Größen also auch von denjenigen Werthen entfernt sind, bei denen Verflüssigung des betreffenden Gases eintreten würde.

Wenn wir nach Festsetzung unserer Scale die Volumina irgend welcher Körper in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur ausdrücken wollen, so können wir sie uns in einer TAYLOR'schen Reihe nach Potenzen der Temperatur entwickelt denken:

$$v = v_0 + v' \cdot \vartheta_c + \frac{v''}{2} \cdot \vartheta_c^2 + \dots,$$

wo v' , $v'' \dots$ der erste, zweite $\dots$ Differentialquotient des Volumens nach der Temperatur sind, und ϑ_c die Temperatur in Celsiusgraden des Gasthermometers von einer beliebigen Temperatur ϑ_0 an gerechnet, für welche letztere das Volumen gleich v_0 ist. Für kleine Temperatursteigerungen ϑ_c können fast immer die quadratischen und höheren Glieder der Reihe vernachlässigt werden. Bei den Gasen ist für beliebige ϑ_c nach der Definition der Scale v' , $v'' \dots = \text{Null}$. Aber es zeigt sich auch für größere Temperaturdifferenzen bei manchen anderen Substanzen außer den Gasen, eine so schnelle Convergenz der Reihe, daß der lineare Ausdruck genügt. Beim Quecksilber ist dies wenigstens sehr nahe der Fall, und wenn man zwei verschiedene Substanzen hat, für welche dies nahezu zutrifft, so gilt für die eine $v = v_0 + v' \vartheta_c$ und für das Volumen der anderen $w = w_0 + w' \vartheta_c$, so daß man übereinstimmend die Temperatur darstellen kann durch:

$$\vartheta_c = \frac{v - v_0}{v'} = \frac{w - w_0}{w'}.$$

Insofern dies also erlaubt ist, kann man auch andere thermometrische Körper anwenden; auch andere Eigenschaften, welche sich mit der Temperatur linear ändern, kann man benutzen als Mittel zur Messung der Temperatur. Zum mindesten innerhalb kleiner Temperaturintervalle sind daher sehr viele Eigenschaften thermometrisch brauchbar, z. B. der elektrische Widerstand (Bolometer) oder die elektromotorische Kraft einer thermoelektrischen Kette. Völlig ausgeschlossen sind aber solche Eigenschaften, welche im betreffenden Temperaturintervalle ein Minimum oder Maximum haben, in dessen Nähe das lineare Glied in der TAYLOR'schen Reihe sehr klein wird und das quadratische nicht vernachlässigt werden darf. Dies wäre z. B. der Fall für das Volumen des Wassers zwischen 0 und 10° , welches bei 4° ein Minimum hat, so daß v' dann verschwindet, während man v' von 0 bis 4° , wenn man nicht das quadratische Glied hinzunimmt, kleine negative, von 4 bis 10° kleine positive Werthe geben müsste, die aber schnell wechseln. Eine lineare Annäherungsformel ist also in diesem Intervall nicht brauchbar; stellt man aber das Volumen durch einen Ausdruck zweiten Grades dar, so findet man ϑ aus dem Volumen durch eine quadratische Gleichung, unzulässiger Weise also zweideutig.

Zweites Kapitel.

Ueber die Wärmemenge.

§ 3. Quantität des Wärmestoffes; Wärmecapacität; spezifische Wärme.

Wir müssen nun weiter herauszufinden suchen, was die Ursache des veränderten Verhaltens eines Körpers im erwärmten gegenüber dem kälteren Zustand ist. Da sehen wir zunächst einen gewissen Grad der Beständigkeit einer Erwärmung; es dauert immer eine Weile, bis der Körper wieder kühl wird, bis der Zustand höherer „Warmheit“ aus ihm verschwindet. Bei aufmerksamerer Untersuchung finden wir, daß gleichzeitig die ihn unmittelbar berührenden Körper wärmer werden. Ebenso zeigt sich, daß ein kalter Körper, in eine wärmere Umgebung gebracht, selbst an Warmheit gewinnt, die er den ihn berührenden Körpern entzieht. Bei der Abkühlung eines warmen Körpers tritt also keine Vernichtung des Agens ein, welches die Wärmeerscheinungen hervorgebracht hat, sondern nur ein Uebergang. Das erwärmende Agens hat eine gewisse Beständigkeit seiner Existenz;

verhält sich aber so, als ob es das Bestreben habe, sich auszubreiten in seiner Umgebung und überzugehen auf die benachbarten kühleren Körper. Dieses Ausbreitungsbestreben kann aber immer nur gehen bis zum Ausgleich der Temperaturen der sich berührenden Körper. Alle diese Phänomene führen dazu, die Frage aufzuwerfen: ist das nicht ein Agens, was da die Wärmeerscheinungen hervorbringt, welches unzerstörbar ist und in unveränderlicher Quantität weiter besteht, aber überfließen kann vom wärmeren Körper zum kälteren? Das ist die einfachste und naheliegendste Hypothese. Die älteren Physiker nahmen kurzweg an, daß ein solches stoffliches Wärmeagens existire, welches in erwärmten Körpern condensirter angesammelt sei, in kälteren in geringerer Dichtigkeit, so daß der Uebergang gleichsam ein Ausgleich von Druckunterschieden war. Der Wärmestoff mußte feiner sein als jede stoffliche Materie, als jedes Gas, da Gase nicht durch Metalle, Glas u. s. w. hindurch dringen können, während der Wärmestoff durch alle Substanzen in vollkommen zusammenhängendem Zustande hindurch zu gehen die Fähigkeit hatte. Sonst sollte dieser Stoff nicht direct wahrnehmbar sein, insbesondere sollte er unwägbare sein. Vielleicht, kann man sagen, war es ein Glück, daß die älteren Physiker noch nicht hinreichend feine Wagen hatten, um etwa Versuche zu machen, diesen Wärmestoff zu wägen. Sie wären dann unzweifelhaft zu der Ansicht gekommen, daß er negative Schwere habe. Denn ein warmer Körper, auf eine sehr empfindliche Wage gesetzt, hat scheinbar ein leichteres Gewicht, als ihm wirklich zukommt, was durch die aufsteigenden Luftströme bedingt ist, welche er um sich herum in dem Raum der Wage hervorruft.¹⁾

Im Wesentlichen war schon in der alten chemischen Theorie von SCHEELE das Phlogiston der Vertreter dessen, was nachher Wärmestoff genannt wurde. Für SCHEELE waren die reinen Metalle Verbindungen der Metalloxyde, deren Sauerstoff er noch nicht kannte, mit Phlogiston. Die Verbindung mit Phlogiston gab den reducirten Metallen die Brennbarkeit, und da der Erwerb dieser Eigenschaft mit Gewichtsabnahme verbunden war, mußte das Phlogiston mit negativer Schwere begabt sein. Beim Verbrennen scheidet nach SCHEELE das Phlogiston, der Feuerstoff, aus, geht auf andere Körper über und erwärmt sie: ganz so wie vom Wärmestoff anzunehmen.²⁾

¹⁾ Vgl. die Anmerkung auf Seite 55 des 19. Jahrgangs der Zeitschrift für Instrumentenkunde; Februarheft 1899. A. d. H.

²⁾ Die Phlogistontheorie geht wohl noch ein halbes Jahrhundert weiter zurück bis auf STAHL (1723). A. d. H.

Zunächst war es nun eine natürliche Annahme, daß bei einer gleichartigen, durch alle ihre Theile gleichmäÙig erwärmten Substanz in jeder Gewichtseinheit das gleiche Quantum zugeführten Wärmestoffs stecke; oder mit anderen Worten, daß die Menge Wärmestoffes, welche zu einer gewissen Erwärmung einer gegebenen Substanz nöthig ist, der Menge m der Substanz proportional sei. Weiter setzte man voraus, daß die bei einer Erwärmung zugeführte Wärmemenge proportional sei der Temperaturerhöhung, wenigstens wenn letztere klein war, so daß die Eigenschaften des Körpers sich nur wenig durch sie änderten. Endlich konnte die Wärmemenge auch noch von der Natur der Substanz abhängen. Es war nicht nöthig, daß zu gleichen Temperatursteigerungen von einer Anfangstemperatur ϑ_0 auf eine Endtemperatur ϑ_1 gleich großer Gewichte verschiedener Stoffe dieselben Wärmequantum nöthig waren. Der Proportionalitätsfactor c , mit welchem Temperaturerhöhung $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ und Menge m zu multipliciren ist, damit man die zugeführte Wärmemenge Q erhält, ist von der Natur des Körpers abhängig; es ist seine Capacitätsconstante für Wärme. Es wird also bei diesen Bezeichnungen:

$$Q = m \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_0) \cdot c. \quad (1)$$

Die Einheiten für c und Q sind zunächst noch unbestimmt. Man kann für irgend einen Körper einen willkürlichen Werth von c festsetzen; als diesen Körper hat man wieder das stets in gleicher Reinheit leicht zu gewinnende Wasser gewählt und seine spezifische Wärmecapacität c gleich 1 gesetzt. Beschränkt man die Temperaturerhöhung $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ auf einen Grad, und erwärmt man die Masseneinheit ($m = 1$) Wasser, so muß man wegen der Festsetzung $c = 1$ auch $Q = 1$ setzen, d. h. als Einheit der Wärmemenge ist dann diejenige zu betrachten, welche der Masseneinheit Wasser zuzuführen ist, um die Erwärmung von einem Grad hervor zu bringen.¹⁾ Nach französischem Vorgange nennt man diese Wärmeeinheit „Calorie“. Als Masseneinheit nimmt man dabei entweder 1 g oder 1 kg, und muß entsprechend unterscheiden zwischen der „kleinen“ und der „großen“ Calorie. Dann ist die spezifische Wärmecapacität, oder, wie man kürzer sagt, die „spezifische Wärme“ irgend eines anderen Stoffes diejenige Wärmemenge, oder diejenige Anzahl von Calorien, welche nöthig ist, um 1 g (bezw. 1 kg) dieses anderen Stoffes zu erwärmen um 1°.

Hatte man zwei verschiedene Körper, einen wärmeren und einen

¹⁾ Vergleiche hierzu die Anmerkung auf Seite 17.

kälteren, die mit einander in Berührung kamen, und fand also wirklich Austausch eines stofflichen und in seiner Quantität unveränderlichen Agens statt, so mußte der Verlust des wärmeren Körpers an Wärmemenge gleich sein dem Gewinn des kälteren. Hieraus ergibt sich dann, daß der eine Körper in einem gewissen Verhältniß an Temperatur gewinnt, was der andere an ihr verliert, wobei es aber nicht bloß auf ihre Massen ankommt, sondern auch auf das Verhältniß ihrer specifischen Wärmen. Haben schließlic beide dieselbe Endtemperatur ϑ_1 und hat der zweite, sich abkühlende, Körper die Masse m' , Anfangstemperatur $\vartheta'_0 (> \vartheta_1)$, die specifische Wärme c' , so giebt die Identität des Wärmequantums, welches dem ersten zugeführt wird, dem zweiten verloren geht, die Gleichung:

$$m.(\vartheta_1 - \vartheta_0).c = m'.(\vartheta'_0 - \vartheta_1).c'$$

oder:

$$\frac{c'}{c} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta'_0 - \vartheta_1}. \quad (2)$$

In dieser Weise würde man aus Beobachtung der rechts stehenden Größen für zwei Körper das Verhältniß der specifischen Wärmecapacitäten nach der sogenannten Mischungsmethode finden, auch ohne Festsetzung einer willkürlichen Einheit; ebenso wie man aus Wägungen und Volumenmessungen auch das Verhältniß von specifischen Gewichten finden kann, bevor man eine Einheit gewählt hat. Beiderlei specifische Constanten sind auch insofern vergleichbar, als es sich beide Mal um Dichtigkeitsverhältnisse in verschiedenen Körpern handelt, einmal der ponderablen Materie, einmal des Wärmestoffes (die Menge des letzteren bezogen auf gleiche Temperaturerhöhung ausgehend von einer Temperatur, für welche der Wärmeinhalt gleich Null ist).

Die gemachten Voraussetzungen lassen sich nun sogleich in der Weise controliren, daß man durch Versuche mit einem ersten und einem zweiten Körper für sie das Verhältniß c'/c bestimmt; dann durch Versuche mit demselben ersten und einem dritten das Verhältniß c''/c ; endlich durch Versuche mit dem zweiten und dem dritten das Verhältniß c'/c'' . Dann muß sich ergeben:

$$\frac{c'/c}{c''/c} \text{ gleich dem direct bestimmten } \frac{c'}{c''}.$$

Ferner müssen Versuche mit verschiedenen Wärmequellen bei sonst gleichen Bedingungen stets zu denselben Werthen der specifischen Wärmecapacitäten für dieselben Körper führen, und haben auch dazu geführt.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß die durch vorstehende Betrachtungen eingeführten Verhältniszahlen, die specifischen Wärmen, in der That feste Werthe haben für kleine Gebiete der Versuchstemperaturen $\vartheta_0, \vartheta'_0, \vartheta_1$. Nimmt man ein solches kleines Temperaturgebiet aber einmal in Gegenden von hoher, ein andermal in Gegenden niedriger Temperatur, so findet man, daß die Werthe der c sich im Allgemeinen etwas mit der Temperatur ändern. Es bleibt also die Gleichung (1) nur richtig, wenn $(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ sehr klein ist, gleich $d\vartheta$, so daß auch die zuzuführende Wärmemenge nur klein ist, gleich dQ , und wir müssen schreiben:

$$dQ = m \cdot c \cdot d\vartheta, \quad (3)$$

wo nun c innerhalb enger Temperaturgrenzen als constant betrachtet werden darf, im Allgemeinen aber nur annähernd unabhängig von der Temperatur, vielmehr streng genommen Function derselben ist. Gerade beim Wasser ist die Veränderlichkeit der specifischen Wärme ziemlich auffallend und verursacht eine Complication in der Definition der Calorie.¹⁾

Mit den entwickelten Voraussetzungen unter Hinzunahme dieser Modification stimmten, wie gesagt, die Untersuchungen der specifischen Wärme bei Wärmeaustausch stets überein, soweit sie von den älteren Physikern durchgeführt wurden und durchgeführt werden konnten. Sie beschränkten sich eben wesentlich auf solche Fälle, wo man es nur zu thun hatte mit dem freiwillig erfolgenden Uebergang der Wärme von wärmeren zu kälteren Körpern, während keine anderweitigen Arbeitsleistungen von den warmen Körpern erfordert werden. Wenn letzteres aber der Fall ist, so kann man die Wärme, wie wir später sehen werden, nicht mehr als materielles Agens betrachten; es ändern sich für solche Fälle auch wesentlich die Werthe der Verhältniszahlen der specifischen Wärme.

§ 4. Latentwerden des Wärmestoffs bei Aenderungen des Aggregatzustandes.

Es kam bei weiterer Ausdehnung der Betrachtungen über den Wärmestoff die merkwürdige Erscheinung der sogenannten latenten Wärme bei Aenderungen des Aggregatzustandes in Betracht, die eine Ausnahme für die Unzerstörbarkeit der Wärme, soweit sie

¹⁾ Siehe hierüber das Referat über die Wärmeeinheit von E. WARBURG, auf der Münchener Naturforscherversamml. erstattet. Leipzig, bei Joh. Ambr. Barth. 1900.

durch das Thermometer nachweisbar war, darbot. Brachte man z. B. einen warmen Körper in Berührung mit Eis von 0° , so fand man, dass es nicht gelingt das Eis über 0° zu erwärmen, sondern das Eis schmolz zum Theil (wenn in genügender Menge vorhanden) zu Wasser von 0° , der warme Körper kühlte sich auch auf 0° ab, so daß die ganze von ihm abgegebene Wärmemenge, wie es schien, spurlos verschwand. Ebenso zeigte sich bei Wasser von 100° , dem man durch eine Flamme fortwährend Wärme zuführt, daß es in einem offenen Gefäße nicht über 100° erwärmt werden konnte, jedoch durch Sieden theilweiser Uebergang in Dampf eintrat, der aber auch nicht wärmer als 100° war. Indessen erkannte man auch bald, daß, wenn man das Schmelzwasser von 0° in Eis von 0° zurückverwandeln wollte, man ihm Wärme entziehen mußte, und zwar konnte man die ganze vorher beim Schmelzen verschwundene Wärmemenge jetzt wieder dem Wasser entziehen. Auch wenn man Dampf von 100° hineinleitete in Kühlröhren, in welchen er sich in Wasser von 100° verwandelte, so gab er dabei an die Kühlröhren Wärme ab; und zwar dieselben beträchtlichen Mengen, die dem Wasser beim Verdampfen zuzuführen waren, wie das bei industriellen und häuslichen Heizungsapparaten neuerdings vielfach benutzt wird. Aus diesen Beobachtungen schloß man, daß beim Schmelzen und Verdampfen der Wärmestoff nicht verloren ginge, daß er aber in eigenthümlicher Weise durch die ponderable Masse, in der er verweilte, so gebunden wurde, daß er unfühlbar wurde für Thermometer und die menschliche Haut; man bezeichnete die Wärme in diesem Zustande als latente Wärme. Sie war nicht vernichtet; denn bei der entgegengesetzten Aggregatzustandsänderung kam sie wieder zum Vorschein. Je nach dem Aggregatzustande dachte man sich verschiedene Quanta des hypothetischen Wärmestoffes als gleichsam mit zur Constitution des betreffenden ponderablen Körpers gehörig, so daß also Wasser betrachtet wurde als Eis von 0° verbunden mit einer gewissen überschüssigen Quantität Wärmestoffes, eine Verbindung, die man sich einer chemischen sehr ähnlich dachte. Ebenso konnte man innerhalb gewisser Grenzen wenigstens die Wasserdämpfe betrachten als Verbindung des Wassers mit einem noch größeren Quantum Wärmestoff.

In letzterem Falle hätte man dann berücksichtigen müssen, daß der Siedepunkt erheblich abhängig ist vom Druck, und daß mit der Siedetemperatur zugleich auch die latente Wärme des Dampfes vom Druck abhängig ist, wie man in folgender Weise erkennt. Der Wärmehalt der Masseneinheit Dampf von der Temperatur ϑ ist

jedenfalls um ein bestimmtes Wärmequantum größer als derjenige derselben Masse im flüssigen Zustande bei der niedrigeren Temperatur ϑ_0 . Einmal kann ich nun die Flüssigkeit bei ϑ_0 verdampfen, wozu die latente Wärme L_0 erforderlich ist, und dann den Dampf von ϑ_0 bis ϑ erwärmen; ein anderes Mal kann ich zuerst (unter gleichzeitiger Verhinderung des Verdampfens) die Flüssigkeit von ϑ_0 bis ϑ erwärmen und sie dann erst verdampfen, wozu L_ϑ erforderlich sei. Die Vermehrung des Wärmeinhaltes ist in beiden Fällen (wenn sonst keine Wirkungen der Wärme geleistet werden) dieselbe; daraus folgt, wenn ich mit c die spezifische Wärme der Flüssigkeit, mit c' die des Dampfes bezeichne:

$$L_0 + c'(\vartheta - \vartheta_0) = c(\vartheta - \vartheta_0) + L_\vartheta$$

oder:

$$L_\vartheta = L_0 + (c' - c) \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$$

und da nun im Allgemeinen keineswegs $c' = c$, d. h. da die specif. Wärmen von Flüssigkeit und Dampf im Allgemeinen verschieden sind, muß auch $L_\vartheta \geq L_0$ sein. Die latente Wärme wäre also abhängig von der Siedetemperatur und mit dieser vom Druck.

Die Quantität der latenten Wärme konnte durch dieselben calorimetrischen Methoden gefunden werden wie das Verhältniß von specifischen Wärmen nach Gleichung (2). Durch solche Mischungsversuche von Eis mit warmem Wasser fand man, wie viel Calorien einem Gramm Eis von 0° zugeführt werden mußten, um es in Wasser von 0° zu verwandeln. Es war nun weiterhin eine wesentliche Verbesserung der Calorimetrie, diese Wärmemenge sozusagen als neue secundäre Einheit zu wählen, und ein Wärmequantum zu messen durch die Menge Eis, die es zum Schmelzen bringen konnte. Das hat schon LAPLACE versucht mittels seines Eiscalorimeters bei Bestimmung der Wärmeentwicklung durch Verbrennung. In vollkommenerer Weise ist dieses Princip neuerdings von ROBERT BUNSEN ausgeführt worden. Seine Methode hat zu viel genaueren und sichereren Messungen geführt, als die älteren Mischungsmethoden, bei denen es schwer ist zu verhindern, daß nicht anderweite Wärmemengen durch Zuleitung oder Ableitung diejenige verfälschen, welche man messen will. Auch ein Dampfcalorimeter ist von BUNSEN gebaut worden, welches die latente Wärme des Dampfes benutzt als secundäre Einheit für die Messung anderer Wärmemengen; es ist allerdings nicht so scharf, und so bequem zu gebrauchen, wie sein Eiscalorimeter.

Die Erscheinung des Latentwerdens von Wärme findet sich

nicht blofs beim Schmelzen und Sieden, sondern auch bei Aenderungen des krystallinischen Gefüges (allotrope Modificationen); ebenso wenn ein festes Salz sich auflöst in einer Flüssigkeit, z. B. Wasser, und bewirkt dann eine Abkühlung, vorausgesetzt, dafs keine sehr energische chemische Verwandtschaft zwischen Salz und Wasser sich geltend macht. Auch wenn mit dem Eintritt einer chemischen Verbindung zwischen verschiedenartigen Substanzen Aggregatzustandsänderungen verknüpft sind, so sind das Vorgänge, welche unter denselben Gesichtspunkten betrachtet werden können wie Aenderungen der latenten Wärme. So gelangt man auch zu der Vorstellung, dafs Metalle, die sich unter der Einwirkung von elektrischen Strömen in einer Säure auflösen, dafs auch diese ein gewisses Quantum latenter Wärme aufnehmen müssen beim Uebergang in den neuen Zustand. Bisher sind diese Uebergänge meist noch nicht unter den Begriff der latenten Wärme gestellt worden; die Beziehungen, für welche es passend ist, sie in dieser Weise zu betrachten, werden erst später zu entwickeln sein. (Vgl. § 66).

§ 5. Der Wärmestoff bei chemischen Processen.

Weiter fügte sich in den Vorstellungskreis vom Wesen der Wärme als eines materiellen Imponderabile auch die Erzeugung von Wärme durch chemische Processe, insoweit bei solchen nicht Arbeit anderer Art geliefert oder vernichtet wird. Aus den Erfahrungen des täglichen Lebens ist Jedem bekannt, dafs viele chemische Processe, namentlich alle diejenigen, welche unter dem Einflusse einer energischen Verwandtschaft vor sich gehen, mit gleichzeitiger Wärmeentwicklung verbunden sind, die meist um so gröfser ist, je gieriger die Substanzen sich zu verbinden streben. In dieser Weise entwickeln wir uns die gröfsten zu praktischen Zwecken ausgebeuteten Wärmemengen, nämlich durch Verbrennungsprocesse. Nicht jede chemische Wärmeerzeugung ist mit Feuer- und Lichterscheinungen verbunden; ohne solche finden z. B. starke Erhitzungen statt bei der Verbindung von concentrirter Schwefelsäure, Kalihydrat, gebranntem Kalk mit Wasser, zu welchem diese Substanzen eine energische Verwandtschaft haben. Auf chemischen Processen beruht auch ein Theil der Wärme, welche sich im Innern des Erdkörpers findet,¹⁾ und

¹⁾ In Steinkohlengruben findet sich häufig durch langsame Oxydation eingeschlossenen Eisenkieses starke lokale Wärmeerzeugung, die bis zur „Selbstentzündung“ der Kohle steigen kann. In den unteritalienischen Schwefelgruben herrscht erhöhte Temperatur in Folge einer Art spontanen Hüttenprocesses in

schliesslich sogar die Wärme unseres eigenen Körpers. Es giebt aber auch chemische Processe, und zwar solche, welche bei Berührung der betreffenden Körper zwischen ihnen von selbst und ohne weitere Unterstützung vor sich gehen, bei welchen im Gegensatz zu den bisher erwähnten Vorgängen Wärmemengen gebunden werden. Meistens geht bei diesen Fällen einer der reagirenden Körper aus dem festen in den flüssigen, oder aus diesem in den gasförmigen Aggregatzustand über; man kann dann annehmen, daß das Wärmequantum, welches durch die Aggregatzustandsänderung latent wird, gröfser ist als dasjenige, welches durch die chemische Verbindung an und für sich entwickelt werden kann. So bei den Kältemischungen.

Ursprünglich wurden nun auch diese Phänomene theoretisch unter die Voraussetzung von der stofflichen Natur des Wärmeagens gebracht. Deren Durchführbarkeit bei der chemischen Wärmeentwicklung läfst sich zurückführen auf die Vorstellung, das jedes chemische Element und jede Verbindung nothwendig ein bestimmtes Quantum des Wärmestoffes gleichsam in chemischer Bindung enthält, welches festgehalten wird, solange nicht (entweder der Aggregatzustand oder) der Zustand chemischer Bindung wechselt. Zwei Körper mit grofser chemischer Verwandtschaft geben bei ihrer Vereinigung einen Theil ihres Wärmestoffes ab, es bleibt ein geringeres Quantum in der Verbindung zurück, welches bei noch weiteren Verbindungen möglicher Weise auch noch frei gegeben werden und ausscheiden kann.

War diese Anschauung zulässig, so mußte es für die Menge an Wärme, welche bei einem bestimmten chemischen Vorgang entwickelt werden kann, ganz allein ankommen: erstens auf das Quantum und den Zustand der Körper, welche vor dem Eintritt der chemischen Verbindung vorhanden sind und in diese eingehen; und zweitens auf die Endprodukte und den Zustand, in welchem sie sich bilden. Dem Anfangszustand entspricht ein gewisses constitutionell gebundenes Wärmequantum, dem Endzustand ebenfalls. Was zwischen Anfangs- und Endzuständen liegt, durch welche Zwischenstadien die Verbindungen hindurchgehen, die Art, Form und Schnelligkeit des Ueberganges muß ohne allen Einfluß auf das Quantum an

dem Gestein, welches aus bituminösem Material und Gyps besteht: der gediegene Schwefel selbst ist das Product dieses Processes; den Gebieten des Schwefelvorkommens entspringen häufig warme Quellen. Auch möge noch die auf langsamere Oxydation beruhende abnorme Wärme der Asphaltgruben von Lobsann im Elsaß erwähnt werden.

A. d. H.

Wärmestoff sein, welches bei dem Processe disponibel wird und abgegeben werden kann. Dies hat sich in der That mit großer Genauigkeit und bei einer ins Ungeheure gewachsenen Zahl von Fällen bestätigt. Man pflegt bei der Angabe der chemischen Wärmeentwicklung oder „Wärmetönung“ die zu verbindenden Körper im Anfang auf dieselbe Temperatur zu bringen, und auf ebendieselbe auch die Endproducte, so daß man unabhängig ist von dem Ueberschuß oder Mangel an Wärmeinhalt, welcher einer höheren bezw. niedrigeren Temperatur entspricht.

Am schlagendsten zeigt sich der Sinn dieses Gesetzes vielleicht durch die über die physiologische Wärmeerzeugung angestellten Versuche. Man kann Nahrungsmittel einmal im Feuer verbrennen und die dabei erzeugte Verbrennungswärme bestimmen, wenn diese der Hauptsache nach kohlenstoff-, wasserstoff- und stickstoffhaltigen Substanzen zu Kohlensäure und Wasser verbrannt werden, während noch freier Stickstoff gebildet wird. Im thierischen Körper findet nun auch eine theilweise Verbrennung der Nahrungsmittel statt, verhältnißmäßig sehr langsam und über eine große Menge verschiedenartiger Organe vertheilt; die nur unvollständig verbrannten Reste und die stickstoffhaltigen Substanzen werden in den Auswurfstoffen ausgeschieden. Man kann nun die im thierischen Körper durch eine gewisse Menge von Nahrungsmitteln physiologisch erzeugte Wärmemenge bestimmen, kann dann die Excremente verbrennen zu Kohlensäure, Wasser (unter Abscheidung von freiem Stickstoff) und die Verbrennungswärme ebenfalls bestimmen; dann erhält man dieselbe Summe, wie wenn dasselbe Quantum an Nahrungsmitteln, in demselben Zustande von Dichtigkeit, Aggregatzustand, chemischer Verbindung direct zu denselben Endproducten verbrannt wird.

Die Schwierigkeiten, die ganze Menge der verschiedenartigen Nahrungsmittel zu bestimmen und die Auswurfstoffe vollständig zu gewinnen, verhindert, daß man bei diesem Versuch die äußerste Genauigkeit erreicht; dies ist aber der Fall bei unzähligen rein chemischen Processen, so complicirt sie auch sein mögen. Man kann z. B. ausgehend von gegebenen äquivalenten Mengen Zink, Sauerstoff, Wasserstoff, Schwefelsäure (verdünnt mit viel Wasser) einmal den Sauerstoff mit dem Wasserstoff zu Wasser verbinden, mit diesem die Schwefelsäure noch weiter verdünnen, und dann in ihr das Zink auflösen (wobei Wasserstoff wieder entweicht); ein anderes Mal zuerst das Zink oxydieren und dies Zinkoxyd in der verdünnten Schwefelsäure lösen; beide Male ist die Wärmetönung dieselbe. Diese Forderung, welche aus der Voraussetzung hergeleitet

werden muß, daß wir es in jeder chemischen Verbindung mit einer ihr in bestimmtem Verhältniß unveränderlich zukommenden Vereinigung mit dem hypothetischen Wärmestoff zu thun haben, bestätigt sich also in der That.

In allen bisher angeführten verschiedenartigen Thatsachen stiefs man noch auf keinen Widerspruch gegen die Hypothese des Wärmestoffes als einer imponderablen Substanz. Wie dies Gebiet von den älteren Physikern unter dieser Annahme behandelt wurde, so kann es auch immer noch behandelt werden. Die alte Anschauung versagt erst bei Processen, bei welchen auf Kosten des Wärmeagens auch andere Arten von Arbeitsleistungen hervorgebracht werden, indem z. B. die betreffenden Körper ihr Volumen ändern und dabei einen Druck überwinden, oder indem wir die chemischen Processe zur Erzeugung arbeitsfähiger galvanischer Ströme benutzen. Solche Processe wollen wir aber zunächst von der Betrachtung ausschließen.

Zweiter Abschnitt.

Wärmeleitung.

Erstes Kapitel.

Aufstellung der zu erfüllenden Gleichungen.

§ 6. Der Wärmestrom, seine Componenten, seine Dichtigkeit und seine Intensität.

Wir wollen nun, unsere Vorstellungen auf den Uebergang der Wärme von einem Körper zum anderen anwendend, diesen mathematisch auszudrücken suchen. Das Resultat dieses Ueberganges ist, wie wir gesehen haben, immer Ausgleichung der Temperaturdifferenzen, und das muß auch für die analytische Formulirung der Ausgangspunkt sein. Von den Arten des Wärmeüberganges soll zunächst die Leitung betrachtet werden. Ihre Theorie ist namentlich von FOURIER ausgearbeitet worden; er hat wichtige und interessante Methoden entwickelt, um die verschiedenen Vertheilungen der Wärme, welche während der Leitung in verschiedenen Augenblicken eintreten, kennen zu lernen. Uebrigens hat schon ISAAC NEWTON die ersten Axiome für eine Theorie der Wärmeleitung aufgestellt.

Wenn wir die Bewegung einer stofflichen Substanz beschreiben, so fassen wir einzelne materielle Punkte ins Auge, welche während der Fortbewegung identisch bleiben; die aufeinander folgenden Orte in der wechselnden Zeit bilden die Bahn eines materiellen Theilchens; in jedem Augenblick kommt ihm eine bestimmte Geschwindigkeit zu. Wenn nun auch die Vorstellung der Wärme als eines substantiellen Agens in vieler Hinsicht zutrifft, so fragt es sich doch, ob wir von einer Fortleitung von einzelnen Theilchen dieses Agens reden dürfen. Dazu haben wir in der That keine Berechtigung; denn wir haben kein Mittel, um einzelne „Wärmepunkte“ als solche einzeln zu erkennen und in ihrer Bewegung zu verfolgen; es hat also auch keinen Sinn, von einer Geschwindigkeit der Wärmethelchen zu sprechen, da wir überhaupt nicht wissen, ob solche existiren. Auch das wird uns den Schluß nahe legen, daß die Wärme wahrscheinlich überhaupt kein stoffliches Agens ist, wenn sie auch in einem bestimmten Thatachenbereich sich wie eine unzerstörbare Substanz verhält. Uebrigens befinden wir uns auch gewissen anderen physikalischen Agentien, z. B. der Elektrizität gegenüber in ähnlicher Lage; auch bei ihr wäre es eine unbegründete Hypothese, wenn wir an ihre Fortbewegung im galvanischen Strome die gewöhnlichen Begriffe anlegen wollten, wie wir sie bei ponderablen Körpern brauchen. Bei solchen Agentien, wie es die Wärme und die Elektrizität sind, können wir sinnlich nur erkennen, daß in einer bestimmten Zeit durch eine bestimmte Fläche im Innern eines Körpers oder durch die Trennungsfläche zweier Körper hindurch ein gewisses Quantum des Agens hindurchgegangen ist. Das ist das einzige Phänomen, welches wir verfolgen können, und insofern nur können wir davon reden, daß diese Agentien strömen.

Bei einem Wärmestrom durch eine physisch gegebene kleine Fläche, können wir fragen, welches Wärmequantum wird durch ein willkürlich großes Element $d\omega$ der kleinen Fläche hindurch von einer Seite auf die andere Seite während eines beliebigen Zeitelementes dt hindurchgegangen sein. Diese Menge wird der Größe des Flächenelementes $d\omega$ und der Dauer des Zeitelementes dt proportional sein; denn der Strom kann durch eine kleine Fläche, von welcher $d\omega$ ein Element ist, hindurch als gleichmäßig verbreitet und während dt als ungeändert betrachtet werden. Außerdem wird nun aber noch an ein und derselben Stelle bei ungeänderter Größe der Fläche das hindurchtretende Wärmequantum abhängen von ihrer Richtung. Den von ihr abhängigen Factor in dem Werthe jenes Quantums wollen wir q_n nennen, wo n die Normale auf $d\omega$ bedeutet,

durch deren Richtung die von $d\omega$ bestimmt ist; dann ist das Quantum also gleich: $q_n \cdot d\omega \cdot dt$. Es läßt sich nun zeigen, daß q_n als die in die Richtung n fallende Componente einer Resultante aufgefaßt werden kann, ganz wie bei der Geschwindigkeit eines Massenpunktes. Wir denken uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem; an irgend einer Stelle drei Ebenen parallel den Coordinatenebenen, und unendlich nahe dem Schnittpunkt jener drei Ebenen eine sie schneidende vierte Ebene, so daß von der rechtwinkligen Ecke ein kleines Tetraeder abgegrenzt wird. Die auf der schrägen vierten Ebene abgeschnittene Fläche sei das obige $d\omega$. Das kleine Tetraeder liege von $d\omega$ aus nach der Seite der positiven Coordinatenrichtungen hin. Die rechtwinkligen drei anderen Dreiecke sind gleich den Projectionen von $d\omega$ auf die Coordinatenebenen, also ihr Flächeninhalt gleich $d\omega$ multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Ebene von $d\omega$ mit der betreffenden Coordinatenebene bildet. Dieser Cosinus ist nun gleich dem Cosinus des Winkels, den die Normale auf $d\omega$ mit der Normalen auf jener Coordinatenebene bildet,

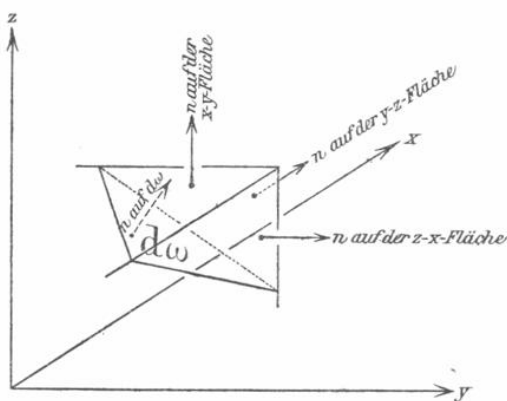


Fig. 1.

wenn wenigstens dieser Winkel ein spitzer ist. Ob dies der Fall ist, hängt von der Festsetzung über die Richtung der Normalen ab, welche ja auf jeder Fläche nach deren einer oder anderen Seite hin genommen werden kann. Wir nehmen n auf $d\omega$ nach dem Inneren des kleinen Tetraeders hin gerichtet (Fig. 1). Als Richtung der Normalen auf der y - x -Ebene nehmen wir die der positiven x -Richtung parallele, und entsprechend für die anderen Coordinatenebenen. Die Flächeninhalte der drei rechtwinkligen Dreiecke werden dann

$$\begin{aligned}
 &\text{parallel der } y\text{-}x\text{-Ebene: } d\omega \cdot \cos(nx) \\
 &\text{,, ,, } x\text{-}x\text{-Ebene: } d\omega \cdot \cos(ny) \\
 &\text{,, ,, } x\text{-}y\text{-Ebene: } d\omega \cdot \cos(nz)
 \end{aligned}$$

Ferner denken wir uns die Wärme durch $d\omega$ in das Innere des Tetraeders eintreten, durch die drei rechtwinkligen Dreiecke austreten. Analog dem Ausdrucke $q_n \cdot d\omega \cdot dt$ für das während dt durch $d\omega$ hindurchtretende Wärmequantum tritt dann in derselben Zeit durch diejenige der Tetraederseiten, welche

$$\begin{aligned}
 &\text{parallel ist der } y\text{-}x\text{-Ebene, das Quantum: } q_x \cdot d\omega \cos(nx) dt \\
 &\text{,, ,, ,, } x\text{-}x\text{-Ebene, ,, ,, } q_y \cdot d\omega \cos(ny) dt \\
 &\text{,, ,, ,, } x\text{-}y\text{-Ebene, ,, ,, } q_z \cdot d\omega \cos(nz) dt
 \end{aligned}$$

Insgesamt tritt also während dt in das Innere des Tetraeders mehr ein als aus ihm heraus das Wärmequantum:

$$[q_n - q_x \cdot \cos(nx) - q_y \cdot \cos(ny) - q_z \cdot \cos(nz)] \cdot d\omega \cdot dt,$$

oder in der Zeiteinheit (den Wärmestrom während ihr ungeändert fortgesetzt gedacht):

$$[q_n - q_x \cdot \cos(nx) - q_y \cdot \cos(ny) - q_z \cdot \cos(nz)] \cdot d\omega$$

Diese Vermehrung des Wärmehaltes des kleinen Tetraeders kann bei der selbstverständlichen Voraussetzung einer stets endlichen Wärmedichtigkeit¹⁾ nur unendlich klein sein von derselben Größenordnung wie das Volumen des kleinen Tetraeders, also von 3. Ordnung; da aber $d\omega$ nur von 2. Ordnung unendlich klein ist, muß der Klammerausdruck von 1. Ordnung unendlich klein sein, nämlich von derselben Ordnung, wie die Kanten des kleinen Tetraeders. Läßt man dessen rechtwinklige Ecke in die Fläche $d\omega$ hineinrücken, so bleibt die Richtung der Flächen und die Bedeutung der q ungeändert und der Klammerausdruck wird gleich Null:

$$q_n = q_x \cdot \cos(nx) + q_y \cdot \cos(ny) + q_z \cdot \cos(nz) \quad (4)$$

Das ist der Zusammenhang des Factors q für eine Fläche von beliebiger Normalenrichtung n mit den besonderen Werthen, die er annimmt für drei Flächen an derselben Stelle des Körpers, aber mit Normalenrichtungen parallel der x -, der y -, der z -Axe. Die Gleichung (4) sagt aus, daß q_n aufgefalist werden kann als die in

¹⁾ Unendlich große Wärmedichtigkeit würde unendlich hohe Temperatur bedeuten.

die Richtung von n fallende Componente einer Resultante, deren Componenten nach den drei Coordinatenrichtungen q_x , q_y , q_z sind. Denn wenn ich mir q_x als Strecke in der x -Richtung, und entsprechend q_y , q_z vom selben Punkt aus in der y - bzw. z -Richtung abgetragen denke, und die aus ihnen nach den Regeln der Zusammensetzung von gerichteten Strecken gebildete Resultante mit q_r und ihre Richtung als die r -Richtung bezeichne, so ist

$$q_x = q_r \cdot \cos(r, x), \quad q_y = q_r \cdot \cos(r, y), \quad q_z = q_r \cdot \cos(r, z) \quad (5)$$

Diese Werthe in (4) eingesetzt, giebt

$$q_n = q_r \cos(r, x) \cdot \cos(n, x) + q_r \cdot \cos(r, y) \cdot \cos(n, y) + q_r \cdot \cos(r, z) \cdot \cos(n, z)$$

oder:

$$q_n = q_r \cdot \cos(r, n) \quad (6)$$

Also erscheint q_n als die Projection von q_r auf die n -Richtung oder kann als die in letztere Richtung fallende Componente von q_r angesehen werden. Der Zusammenhang zwischen q_x , q_y , q_z , q_n einerseits und q_r andererseits ist also den Gleichungen (5) und (6) zu Folge sowohl nach Gröfse wie Richtung derselbe, wie zwischen den Componenten der Geschwindigkeit eines Massenpunktes und deren Resultante. Daher nennt man q_x , q_y , q_z die in die Richtungen der Coordinatenaxen fallenden Componenten des Wärmestromes, q_r die resultirende Strömung und r deren Richtung.

Nun hängen die Factoren q_n in der Weise zusammen mit der Wärmemenge, welche während dt durch $d\omega$ hindurchtritt, daß diese gleich $q_n \cdot d\omega \cdot dt$ ist. Steht $d\omega$ senkrecht auf der Richtung r der resultirenden Strömung, so hat gegenüber allen anderen Stellungen von $d\omega$ jene Wärmemenge den größten Werth und ist gleich $q_r \cdot d\omega \cdot dt$, oder für die Zeiteinheit gedacht, gleich $q_r \cdot d\omega$. Daraus ist ersichtlich, daß $q_r \cdot d\omega$ dem entspricht, was man Stromintensität nennt, und q_r der Stromdichtigkeit. Steht $d\omega$ schräg gegen die Richtung r der resultirenden Strömung, so ist das während dt durchtretende Wärmequantum gleich $q_r \cdot \cos(n, r) d\omega \cdot dt$. Denselben Werth erhält man, wenn die in die Richtung von n fallende Componente der in Wirklichkeit schräg durch $d\omega$ hindurchfließenden Gesamtströmung, also wenn $q_r \cdot \cos(n, r)$ als die Gröfse einer senkrecht durch $d\omega$ hindurchtretenden Strömung aufgefaßt wird. Letztere Auffassung ist von Wichtigkeit für die folgende Ableitung.

§ 7. Zusammenhang von Wärmestrom und Temperatur.

Wir wollen jetzt das Gesetz aufstellen, nach welchem sich durch einen Wärmestrom die Temperatur eines Elementarvolumens innerhalb eines Körpers ändert. Wir denken uns dieses als rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind und die Längen dx , dy , dz haben. Zu seiner Erwärmung um eine kleine Temperatursteigerung $d\vartheta$ ist eine Wärmemenge dQ erforderlich gleich dem Producte aus $d\vartheta$ mit der Wärmecapacität des Volumenelementes, welch' letztere wiederum gleich ist der specifischen Wärmecapacität c der Substanz multiplicirt mit der Masse des Elementarvolumens. Ist die Masse der Substanz gleichmäßig vertheilt (homogen), und ihre Dichtigkeit gleich ε , so ist

$$dQ = \varepsilon \cdot c \cdot dx dy dz \cdot d\vartheta$$

Verstehen wir unter $d\vartheta$ die Temperaturänderung im Zeitelement dt , so wird:

$$dQ = \varepsilon \cdot c \cdot dx dy dz \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot dt, \quad (7)$$

wo der partielle Differentialquotient zu schreiben ist, weil ϑ aufer von t auch noch von den Coordinaten abhängt, letztere Abhängigkeit für das ruhende Volumenelement aber nicht in Betracht kommt. Obigen Werth von dQ haben wir gleich zu setzen dem Ueberschuss der in das kleine Parallelepiped einströmenden Wärme über die ausströmende. Der resultirende Wärmestrom ist in irgend einer Richtung zu den Flächen des Parallelepipeds geneigt; statt seiner betrachten wir die durch die einzelnen Flächen senkrecht ein- bzw. austretenden Componenten gemäß dem Schlufssatze des vorigen Paragraphen. Durch die untere der rechteckigen Flächen $dx dy$ (die Coordinatenaxen wie in Figur 1 gedacht) ströme Wärme ein; die in der Richtung der positiven z während dt einströmend gedachte Menge ist: $q_z \cdot dx dy \cdot dt$. Die durch die obere der Flächen $dx dy$ in der positiven z -Richtung ausströmende Wärmemenge braucht nicht gleich zu sein jener einströmenden. Die Strömung kann am Orte der oberen Fläche dichter oder dünner sein, als an dem der unteren; es kann also q_z zwischen beiden Flächen seinen Werth ändern. In der oberen Fläche hat z einen um dz größeren Werth; es wird daher bei Vernachlässigung höherer Potenzen von dz , wenn q_z für die untere Fläche gilt, an der oberen statt dessen zu setzen sein:

$$q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

und es tritt also während dt durch die obere Fläche $dx dy$ in der $+z$ -Richtung aus die Wärmemenge:

$$\left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy \cdot dt$$

Für die Strömung durch dieses Flächenpaar ergibt sich also eine Vermehrung des Wärmeinhalts gleich der durch die untere Fläche einströmenden minus der durch die obere ausströmenden Menge, also gleich

$$- \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \cdot dx dy \cdot dt$$

Ganz entsprechend findet man für die Vermehrung in Folge der Strömung durch das Flächenpaar parallel der y - z -Ebene

$$- \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy dz \cdot dt$$

und durch das Flächenpaar parallel der x - z -Ebene:

$$- \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \cdot dz dx \cdot dt$$

Insgesamt ist also die Zunahme dQ des Wärmequantums in dem Volumenelement durch die Strömung:

$$dQ = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (8)$$

Die Gleichsetzung der Ausdrücke (7) und (8) liefert:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = - \epsilon \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (9)$$

Diese erste Gleichung, welche wir gewonnen haben, sagt aus, daß die Anhäufung von Wärme stets und überall gleich ist dem Ueberschuß der zuströmenden über die abfließende Wärme. Sie ist analog der „Continuitätsgleichung“ der Hydrodynamik.

Die weiteren Gleichungen, die wir zu bilden haben — es sind ihrer noch drei —, müssen aussagen, daß Wärmebewegungen nur da vorkommen, wo Temperaturunterschiede vorhanden sind, und in ihrer Richtung diesen entsprechen. Die Temperaturunterschiede zwischen zwei sehr nahen Punkten sind jedenfalls nur klein, und deshalb kann die Stärke der Strömung den kleinen Temperatur-

unterschieden einfach proportional gesetzt werden. Wenn ferner ein Temperaturgefälle nur in der x -Richtung vorhanden ist, so kann auch nur in ihr ein Wärmestrom stattfinden, nicht aber in der y - oder z -Richtung, in welcher letzterer dann Punkte von gleicher Temperatur neben einander liegen. Wenn nun allgemeiner auch in der y - und z -Richtung Temperaturunterschiede herrschen, so ist anzunehmen, daß die in eine Richtung fallende Componente des Wärmestroms dem Temperaturgefälle in derselben einen Richtung proportional ist. Letzteres ist nun z. B. für die x -Richtung wiederum proportional dem partiellen Differentialquotienten von ϑ nach x . Der Wärmestrom fließt in Richtung der abnehmenden Temperatur; bezeichnet also k einen positiven Proportionalitätsfactor, so werden wir zu setzen haben:

$$q_x = -k \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad (10)$$

Das so eingeführte k ist der Wärmeleitungscoefficient, der für verschiedene Substanzen verschiedene Werte hat. Seine Bedeutung ist anschaulich erkennbar, wenn man annimmt, daß ϑ nur von einer Coordinate, etwa von x abhängig und zwar eine lineare Function von ihm sei, so daß $d\vartheta/dx$ constant ist. Dann fließt die Wärme nur in der x -Richtung, und die Stärke des Stromes ist überall dieselbe. Denken wir uns einen Würfel, dessen Kanten parallel den Coordinatenaxen und gleich der Längeneinheit sind. Dann hat $d\vartheta/dx$ den Werth 1, wenn die beiden auf der x -Richtung senkrechten Flächen eine Temperaturdifferenz von 1° gegen einander haben. Die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch eine dieser Flächen hindurchströmt, ist allgemein (abgesehen vom Vorzeichen) gleich $k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$. Also folgt: das „absolute Wärmeleitungsvermögen“ k ist gleich der Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch eine Seite eines Würfels strömt, dessen Kante = 1, wenn die in der Stromrichtung einander gegenüberliegenden Seiten einen Temperaturunterschied von 1° haben.

Man macht gewöhnlich mit NEWTON die Annahme, daß k von der Temperatur unabhängig sei, was für kleine Temperaturbereiche jedenfalls erlaubt ist, nicht aber für größere. Wenn wir die Abhängigkeit des k von der Temperatur berücksichtigen wollten, so könnten wir setzen $k = f \cdot \varphi(\vartheta)$, wo f nun von ϑ unabhängig wäre; die Temperaturfunction $\varphi(\vartheta)$ können wir uns aber auch als Differen-

tialquotienten einer anderen $f(\vartheta)$ denken, so daß $k = \mathfrak{k} \cdot (df(\vartheta)/d\vartheta)$ wird. An Stelle der Gleichungen (10) treten dann:

$$q_x = -\mathfrak{k} \cdot \frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \text{ u. s. w. oder:}$$

$$q_x = -\mathfrak{k} \cdot \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial x}, \quad q_y = -\mathfrak{k} \cdot \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial y}, \quad q_z = -\mathfrak{k} \cdot \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial z}$$

Da nun, wie wir im zweiten Paragraphen sahen, auch irgend eine eindeutige Function der dort schließlic festgesetzten Temperatur als solche definirt werden könnte, ist keine fundamentale Aenderung der Gleichungen (10) durch vorstehende Verallgemeinerung eingetreten. Im Folgenden wollen wir uns immerhin NEWTON's Annahme der Constanz von k aneignen.

Die Gleichungen (10) erlauben noch eine sehr anschauliche Schlußfolgerung. Wir wollen uns Flächen $\vartheta = \text{const}$ denken; für jeden Wert der Constante erhalten wir eine andere Fläche; für alle möglichen Werthe der Constante erhalten wir eine Flächen-schar; keine Fläche durchschneidet eine andere; denn das würde die Absurdität bedeuten, daß an der Durchschnittsstelle $\vartheta = \text{const}_1$ und auch $= \text{const}_2$ wäre, die Temperatur also zwei Werthe hätte. Die Flächen $\vartheta = \text{const}$ nennt man: Isothermen. Wenn $f(x, y, z) = \text{const}$ die Gleichung einer Fläche ist, so gilt für die Cosinus der Winkel, den die Normale ν auf der Fläche an einer Stelle mit den Coordinatenrichtungen bildet, die Doppelgleichung:

$$\cos(\nu, x) : \cos(\nu, y) : \cos(\nu, z) = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

Für eine Normale auf einer Isothermenfläche ist also:

$$\cos(\nu, x) : \cos(\nu, y) : \cos(\nu, z) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} : \frac{\partial \vartheta}{\partial y} : \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

Aus den Gleichungen (10) folgt weiter:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} : \frac{\partial \vartheta}{\partial y} : \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = q_x : q_y : q_z$$

Nach den Gleichungen (5) ist:

$$q_x : q_y : q_z = \cos(r, x) : \cos(r, y) : \cos(r, z)$$

Also wird:

$$\cos(\nu, x) : \cos(\nu, y) : \cos(\nu, z) = \cos(r, x) : \cos(r, y) : \cos(r, z),$$

woraus folgt, daß die Richtungen von r und ν übereinstimmen;

d. h. der resultirende Wärmestrom steht überall senkrecht auf den isothermen Flächen.

Weiter ist noch zu bemerken, daß die Gleichungen (10) in der Form aufgestellt sind, wie sie für isotrope Medien gelten. Bei krystallinischen Medien außer denen des regulären Systems würde zum Mindesten darauf Rücksicht zu nehmen sein, daß die Wärmeleitungsfähigkeit k für verschiedene Richtungen, also auch für die x -, y - und z -Richtung verschiedene Werthe haben kann. Zur Vermeidung der daraus erwachsenden großen Verwicklungen unserer Theorie beschränke ich meine Darstellung auf den Fall von isotropen Medien.

Führen wir nun die drei Gleichungen (10) in (9) ein, so werden die q eliminiert, und wir bekommen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = \varepsilon \cdot c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}; \quad (11)$$

k , ε und c sollen gegebene Functionen der Coordinaten sein, wenn sie überhaupt von ihnen abhängen, so daß allein ϑ als unbekannte zu suchende Function der Coordinaten und der Zeit vorkommt. Die abgeleitete partielle Differentialgleichung für ϑ ist allen weiteren Untersuchungen über die Wärmeleitung zu Grunde zu legen; sie giebt das Gesetz an, nach dem die Temperatur sich dem Raume und der Zeit nach ändert.

§ 8. Ueber die „Art“ oder „Dimension“ der vorkommenden Größen.

Wir wollen uns noch darüber klar werden, inwieweit sich die vorkommenden Größen in absolutem Mafse messen lassen. Alle Größen, welche man überhaupt physikalisch vollständig bestimmen kann, lassen sich zurückführen auf die absoluten Mafseinheiten der Länge, der Zeit und der Masse. Als solche werden in wissenschaftlichen Untersuchungen gewöhnlich benutzt Centimeter, Gramm und die Secunde mittlerer Sonnenzeit. In derselben Weise, wie die Einheit einer abgeleiteten Gröfse zusammengesetzt ist aus jenen drei Grundeinheiten, ist auch die Größenart oder die „Dimension“ dieser Gröfse zusammengesetzt aus Länge L , Zeit T und Masse M . Nach der begrifflichen Fassung soll nun $q_n \cdot d\omega \cdot dt$ eine Wärmemenge bezeichnen. Allgemein sind die Differentiale physikalischer Größen immer von derselben Größenart, wie die endlichen Werthe derselben Art; denn die Kleinheit ist dabei gleichgültig. Es ist

also $d\omega$ eine Fläche, oder das Quadrat einer Länge, und dt ist eine Zeit. Solche Aussagen über die Größenart pflegt man in der Weise als Formeln zu schreiben, daß man sowohl die abgeleitete GröÙe, wie auch die Grundeinheiten in der Potenz, in welcher sie vorkommen, in eckige Klammern einschließt. Es ist also: $[d\omega] = [L^2]$ und $[dt] = [T]$ und folglich:

$$[q_n] = \frac{[\text{Wärmemenge}]}{[L^2] \cdot [T]}$$

Von einer Wärmemenge haben wir gesehen, daß sie gewonnen wird durch das Product einer Masse mit ihrer specifischen Capacität und mit ihrer Temperatursteigerung. Die Größenart des Productes einer specifischen Capacität c mit einer Temperatur ϑ können wir noch nicht weiter zurückführen auf absolutes Maß; dazu würden wir erst später im Stande sein. Wir erhalten daher für die Componenten des Wärmestromes folgende Zusammensetzung von Größen:

$$[q_n] = \frac{[M] \cdot [c \cdot \vartheta]}{[L^2] \cdot [T]}$$

Die Gleichungen (10) werden wir weiter benutzen können, um das Wesen der Leitungsfähigkeit k herauszufinden; sie ergeben:

$$[k] \cdot \frac{[\vartheta]}{[L]} = \frac{[M] \cdot [c \cdot \vartheta]}{[L^2] \cdot [T]} \quad \text{oder} \quad [k] = \frac{[M] \cdot [c]}{[L] \cdot [T]}$$

Die Gleichung (11), welche das Gesetz der Wärmeleitung zusammenfaßt, denke ich mir durch c dividirt. Wenn k constant ist, tritt es vor die Differentiationszeichen; und die beiden Größen kommen nur in der Verbindung k/c vor. Deren Größenart ist nach dem Vorhergehenden:

$$\left[\frac{k}{c} \right] = \frac{[M]}{[L] \cdot [T]}$$

Die Natur des in der Wärmeleitungsgleichung auftretenden Quotienten k/c läßt sich also vollständig auf absolutes Maß zurückführen; und ebenso selbstverständlich dieser Quotient noch dividirt durch die Dichtigkeit ε , also durch den Quotienten einer Masse durch ein Volumen¹⁾:

¹⁾ Der Quotient $\frac{k}{c \cdot \varepsilon}$, der unter der obigen Voraussetzung als einheitliche Constante in der Differentialgleichung (11) auftritt, wird „Temperaturleitvermögen“ genannt. A. d. H.

$$\left[\frac{k}{c \cdot \varepsilon} \right] = \frac{[M]}{[L] \cdot [T]} \cdot \frac{[L^3]}{[M]} \\ = \frac{[L^2]}{[T]} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Zeit}}.$$

(Wenn k nicht constant ist, treten noch Verbindungen von der Form $\frac{\partial k}{\partial x} / c$ auf, deren Dimension $\frac{[M]}{[L^2][T]}$ wird.)

Durch solche Betrachtungen, welche aus den ursprünglichen Gleichungen eines Problems hervorgehen, muß man die Art der Größen finden, mit welchen man jedesmal zu thun hat; diese ist immer zu berücksichtigen, sobald man zu eigentlichen physikalischen Messungen übergeht und die Theorie auf solche anwendet, wie wir auch noch weiterhin sehen werden.

§ 9. Verhalten der Wärmeströmung an der Berührungsfläche zweier Wärmeleiter.

Es fragt sich zunächst, ob und unter welcher Bedingung die Differentialgleichung (11) auch den Verlauf der Temperatur beschreibt an Stellen, wo zwei Körper von verschiedenem Leitungsvermögen aneinanderstoßen.

Ein Resultat ergibt sich dann schon aus der bloßen Betrachtung der Form der Differentialgleichung. Wenn sie analytisch einen Sinn haben soll — und das muß sie immer; denn sie hat ja einen einfachen physikalischen Sinn — müssen die vorkommenden Differentiationen möglich sein. ϑ wird im Allgemeinen immer sich continuirlich ändern. Allerdings kann man von Anfangsmomenten ausgehen, bei welchen an Grenzstellen jähe Temperatursprünge vorkommen; z. B. kann man zwei getrennte Körper vorher auf ganz verschiedene Temperaturen und erst in einem gegebenen Moment in Berührung mit einander bringen. Indessen verschwindet dann unmittelbar nach der Berührung der jähe Sprung und geht sofort über in einen zwar sehr schnellen Abfall der Temperatur, der aber doch immerhin continuirlich ist und die Bildung des ersten Differentialquotienten von ϑ erlaubt. Das genügt aber noch nicht; es müssen zur Gültigkeit von (11) auch noch die Producte $k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ u. s. w. differentiirbar sein. Wenn wir nun zwei zusammenhaftende Körper von verschiedenem Leitungsvermögen betrachten, so ist k an der Grenze discontinuירlich. Wir denken uns vorüber-

gehend, für die augenblickliche Betrachtung, die y - z -Ebene parallel der Grenzfläche, oder, wenn letztere gekrümmt ist, parallel ihrer Tangentialebene an der betrachteten Stelle. In deren Nähe ist dann k nach y und z continuirlich, nach x aber beim Durchgang durch die Grenzfläche selbst discontinuirlich. Die x -Richtung ist dann die Richtung der Normale auf der Grenzfläche, und soll deshalb als N -Richtung bezeichnet werden, auf welcher ein Längenelement dN dem dx entspricht. Damit nun $\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial N} \left(k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \right)$ auch beim Durchgang durch die Grenzfläche, trotz der Discontinuität von k einen Sinn behält, muß $k \frac{\partial \vartheta}{\partial N}$ continuirlich bleiben, oder unendlich nahe der Grenzfläche auf ihren beiden

Seiten denselben Werth haben. Ich denke mir nun die Normalenrichtung, wie es gewöhnlich geschieht, in einem betrachteten Körper jedesmal von der Grenzfläche aus nach seinem Innern hin gerichtet, und denke mir N jedesmal in dieser Richtung wachsend. Dann hat für den Körper 1 mit der Leitungsfähigkeit k_1 die Normale N_1 auf der Berührungsfläche

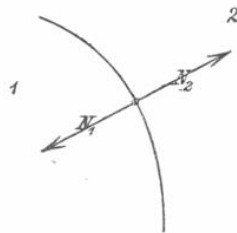


Fig. 2.

an derselben Stelle entgegengesetzte Richtung wie die Normale N_2 für den anderen Körper 2 mit der Leitungsfähigkeit k_2 (Fig. 2). Unser

obiges Resultat, daß $k \frac{\partial \vartheta}{\partial N}$ (wo N seine Richtung nicht wechselte)

beim Durchgang durch die Grenzfläche continuirlich bleibt, kann daher auch in den Formen geschrieben werden, daß auf beiden Seiten der Grenzfläche sein muß:

$$k_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial N_1} = -k_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial N_2} \quad \text{oder:} \quad k_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial N_1} + k_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial N_2} = 0 \quad (12)$$

Diese Bedingung für den Wärmestrom an solchen Stellen, wo verschiedene Körper sich gegenseitig berühren, geht auch unmittelbar aus unseren Vorstellungen über das Strömen der Wärme hervor. Die Wärmemenge, welche aus dem einen Körper nach der Grenzfläche hinfließt, muß gleich sein derjenigen, welche auf der anderen Seite abfließt. Denn die Grenzfläche als ein geometrisches Gebilde vom Volumen Null hat keine von Null verschiedene endliche Capacität für Wärme. Wäre daher der Zustrom zu ihr aus dem einen Körper größer oder kleiner als der Abstrom in den anderen, so müßte momentan eine unendlich große Temperatursteigerung bzw.

Abkühlung in der Grenzfläche eintreten. Das muß physikalisch als unmöglich bezeichnet werden. Nehmen wir an — was aber gleichgültig ist — der Zustrom geschehe vom Körper 1 her; dann fließt die Wärme der Richtung von N_1 entgegen, und die Stärke des Zustromes ist also gleich $-q_{N_1}$ (bezogen auf die Flächen- und die Zeiteinheit). Der Abfluß nach dem Körper 2 hin geschieht in Richtung von N_2 , und seine Stärke ist daher gleich $+q_{N_2}$. Es muß also sein:

$$-q_{N_1} = +q_{N_2}$$

Denke mir nun wieder vorübergehend die x -Richtung senkrecht zur Grenzfläche, so ist nach den Gleichungen (10):

$$q_{N_1} = -k_1 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N_1}, \quad q_{N_2} = -k_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N_2},$$

so daß wir auch so zu der Gleichung (12) kommen. Die Erfüllung von (12) bedeutet also, daß in der Grenzfläche keine Anhäufung von Wärme stattfindet. Dann gilt aber die „Continuitäts“-Gleichung (9) ungestört auch über solche Berührungsflächen hinweg, und da (11) aus (9) hervorging, giebt also (12) die Bedingung an für die Gültigkeit von (11) auch beim Durchgang durch Flächen, in welchen zwei verschieden leitende Körper zusammenstoßen; beide zusammen können dann als ein leitendes System betrachtet werden.¹⁾

§ 10. Zeitliche Anfangsbedingungen und körperliche Grenzbedingungen.

Zur Vervollständigung der Grundlagen ist nun noch hinzuzufügen, daß durch die partielle Differentialgleichung (11) allein noch nicht ϑ als Function von x, y, z und t bestimmt ist. Vielmehr kann in den einzelnen Fällen der Temperaturverlauf noch außerordentlich verschieden sein, je nach dem gegebenen Anfangszustand, und je nach den Bedingungen für die Grenzflächen des betrach-

¹⁾ Aus der Gleichung (12) folgt ein Brechungsgesetz für die Isothermen ähnlich wie KIRCHHOFF aus der analogen Gleichung für strömende Elektrizität ein Brechungsgesetz für deren Stromlinien abgeleitet hat. (Vorlesungen über Elektrizität u. Magnetismus S. 123.) Methoden zur Sichtbarmachung dieser Isothermenbrechung und ihre Benutzung zum Vergleich von Wärmeleitfähigkeiten, siehe WIED. ANN. 64, p. 95, 1898: W. VOIGT mit Benutzung von Elaidinsäure; mit Benutzung von Kupfer-Quecksilberjodid: Sitz.-Ber. d. Naturforsch. Ges. zu Marburg, 1902, 25. Juni; Naturw. Rdsch. 17, Nr. 38, 18. September 1902.

teten Körpers. Damit ϑ bestimmt sei, muß erstens die Temperaturvertheilung im Innern des Körpers für den ersten Zeitaugenblick, von welchem ab wir die Wärmebewegung berechnen wollen, als Function der Coordinaten bekannt sein. Je nach den vorhergehenden äußeren Einwirkungen können darin ja die größten Verschiedenheiten herrschen. Damit ist aber der weitere Verlauf der Temperaturen an jeder Stelle noch nicht festgelegt; sondern es muß zweitens noch angegeben sein, ob dem betrachteten Körper an seinen Grenzflächen Wärmemengen zugeführt oder entzogen werden, oder ob er seine Wärme durch Ausstrahlung verliert, oder unter welchen anderen Bedingungen seine Grenzflächen stehen. Dann erst ist durch (11) ϑ in seiner Abhängigkeit von Ort und Zeit gegeben. Die Differentialgleichung allein beschreibt zwar den Ablauf der Temperaturänderungen, aber insofern unbestimmt, als die Lösungen jedem beliebigen Anfangszustand und allen möglichen Grenzverhältnissen anpaßbar sein müssen. Mit den wichtigsten Fällen der körperlichen Grenzbedingungen wollen wir uns nun zunächst befassen.

Es kann als Bedingung gestellt sein, daß für gewisse Teile der Oberfläche die Temperatur constant erhalten wird, z. B. durch Bepflügelung mit Wasser von bestimmter Temperatur. Oder aber, es kann auch allgemeiner die Temperatur an der Oberfläche künstlich gleich einer gegebenen Function der Coordinaten und der Zeit erhalten werden. Hierzu ist vorläufig weiter nichts zu bemerken.

Grenzbedingung für einen wichtigen Fall ist die, daß die Oberfläche des betrachteten Körpers oder Körpersystems Wärmestrahlen aussendet gegen eine in der Entfernung ihr gegenüberstehende Fläche. In Bezug auf die Strahlung begnügt man sich in der Regel mit der zuerst von NEWTON gemachten Annahme, daß ihre Intensität proportional sei dem Unterschiede der Temperaturen der beiden einander zustrahlenden Flächen. Diese Annahme, welche der für die Wärmeleitung zu Grunde gelegten völlig analog ist, paßt aber nur für kleine Temperaturunterschiede. Wir schließen uns ihr aber an, und setzen also, wenn $\bar{\vartheta}$ die Temperatur der strahlenden Oberfläche, bzw. eines bestimmten Flächenelementes derselben, ϑ_a die constante der gegenüberstehenden bestrahlten Hülle ist, die ausgestrahlte Wärmemenge proportional $(\bar{\vartheta} - \vartheta_a)$. Sie wird ferner ceteris paribus der Ausdehnung der Fläche und der Zeit proportional sein. Die vom Flächenelement $d\omega$ während dt ausgestrahlte Wärmemenge setzen wir mithin gleich:

$$h \cdot (\bar{\vartheta} - \vartheta_a) \cdot d\omega \cdot dt,$$

wo h ein Proportionalitätsfactor ist, den wir die Strahlungsconstante der gegebenen Oberfläche nennen können. In derselben Zeit strömt dem Flächenelement $d\omega$ aus dem Innern des Körpers zu die Wärmemenge:

$$-q_N \cdot d\omega \cdot dt = k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \cdot d\omega \cdot dt,$$

wo N wieder nach dem Innern hin wachsend gedacht ist. Aus denselben Gründen wie vorhin muß nun die der Grenzfläche zufließende Wärmemenge gleich sein der abgegebenen, so daß für diesen Fall sich die Grenzbedingung ergibt:

$$k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h(\bar{\vartheta} - \vartheta_a) \quad (13)$$

Von derselben Form würde die Grenzbedingung sein, wenn — etwa durch lebhaftes Umrühren einer den Körper berührenden Flüssigkeit — die Temperatur der Umgebung constant auf ϑ_a erhalten wird, und ein endlicher Temperaturüberschuß der Grenzfläche des Körpers gegen seine Umgebung als möglich angesehen wird. Der Factor h bedeutet dann die „äußere“ Wärmeleitungsfähigkeit.

Eine besonders einfache Form nimmt die Grenzgleichung (13) an, sobald ϑ_a constant ist, und festgesetzt wird, daß das variable ϑ von ϑ_a aus gerechnet werde, so daß $\vartheta_a = 0$ zu setzen ist. Es wird dann

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h \cdot \bar{\vartheta} \quad (13a)$$

Durch diese Festsetzung des Nullpunktes wird in allen anderen vorkommenden Ausdrücken nichts geändert, da sie alle nicht die Temperatur selbst, sondern nur ihre Differentialquotienten enthalten.

Die Gleichung (13) oder (13a) gilt für diese wichtigen Fälle der Grenzverhältnisse. Aber wir werden auch auf Probleme stoßen, in denen noch ganz andere Bedingungen gegeben sind; z. B. kann die Grenzfläche gleichzeitig eine Zuführungsstelle für Wärmemengen sein, die in der Nachbarschaft erzeugt und dem betrachteten Körper zugeführt werden. An solchen Stellen ist der Abfluß an Wärme in das Innere des Körpers hinein gleich der gegebenen von außen zugeführten Menge. Letztere kann an verschiedenen Punkten der Oberfläche und auch zu verschiedenen Zeiten verschieden sein, ist also eine Function φ der Coordinaten und der Zeit. In analoger Weise, wie (13) hergeleitet wurde, folgt daher jetzt für solche Zuführstellen:

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = \varphi(x, y, z, t) \quad (14)$$

Ein Specialfall würde sein, daß weder Strahlung noch anderweitige Wärmeentziehung oder Zufuhr an der Oberfläche stattfindet. Aus (13) und (14) folgt dann übereinstimmend:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial N} = 0$$

wie auch aus (12) folgen würde, wenn der betrachtete Körper an einen anderen vom Leitungsvermögen $k_2 = 0$ anstößt. $\partial \vartheta / \partial N = 0$ bedeutet, daß $q_N = 0$ ist: es fließt keine Wärme aus dem Innern zur Grenzfläche hin.

Zweites Kapitel.

Ueber die Möglichkeit, aus bekannten Lösungen neue zu gewinnen.

§ 11. Superposition der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen.

Für die Lösungen der Differentialgleichung (11) ist von besonderer Wichtigkeit, daß sie homogen und linear ist. Unter homogenen linearen Differentialgleichungen versteht man solche, in denen jedes einzelne der additiv mit einander verbundenen Glieder entweder die zu suchende Function (hier ϑ) selbst oder einen ihrer Differentialquotienten einmal und nur einmal als Factor enthält. Dies ist der Fall in der Differentialgleichung (11), in der Uebergangsbedingung (12) und auch in der Grenzgleichung (13a). Wenn unter geänderten physikalischen Bedingungen in einer der Grenzgleichungen anstatt (13a) Glieder sich hinzufügen, welche frei sind von ϑ , aber die unabhängigen Variablen x, y, z, t oder bekannte Functionen von ihnen enthalten können, wie in (14), so würden wir die Gleichung noch als lineare bezeichnen, aber nicht mehr als homogene.

In der theoretischen Physik sind eigentlich breit entwickelt nur diejenigen Gebiete, welche auf lineare Differentialgleichungen zurückgeführt werden können; Differentialgleichungen von höherem Grade werden nur sehr selten behandelt und können nur ausnahmsweise auf ihre Integrale geprüft werden. In Folge dessen spielt eine wichtige im Folgenden auseinandergesetzte gemeinsame Eigenschaft

der linearen Gleichungen auch eine hervorragende Rolle in fast sämtlichen physikalischen Untersuchungen.

Wenn wir eine der möglichen Lösungen der Differentialgleichung (11) haben, die wir mit ϑ_1 bezeichnen wollen, so können wir sie zunächst mit einer Constanten A_1 multipliciren; dann ist $A_1 \vartheta_1$ ebenfalls wieder eine Lösung. Denn, denke ich mir (11) hingeschrieben für die specielle Function ϑ_1 von x, y, z und t , und denke mir dann alle Glieder mit A_1 multiplicirt, so kann letzteres unter die Differentiationszeichen gezogen werden, und ich habe

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial A_1 \vartheta_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial A_1 \vartheta_1}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial A_1 \vartheta_1}{\partial z} \right) = \varepsilon \cdot c \frac{\partial A_1 \vartheta_1}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Hier steht $A_1 \vartheta_1$ an Stelle des allgemeinen ϑ in (11), ist also eine Lösung dieser Differentialgleichung. Finden wir eine andere Lösung — ich will sie ϑ_2 nennen —, so können wir auch sie mit einer anderen Constanten A_2 multipliciren, dann ist in derselben Weise:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial A_2 \vartheta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial A_2 \vartheta_2}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial A_2 \vartheta_2}{\partial z} \right) = \varepsilon \cdot c \frac{\partial A_2 \vartheta_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Addiren wir die beiden Gleichungen (15) und (16), so kann man Glied für Glied addiren, und die Summe folgendermaßen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\partial z} \right] = \varepsilon \cdot c \frac{\partial (A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Dies ist wiederum eine Gleichung von demselben Schema wie (11), aber genommen für $(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)$, welcher Ausdruck also ebenfalls der Differentialgleichung (11) genügt. Daraus ergibt sich die Regel: Wenn wir für eine lineare homogene Differentialgleichung mehrere ihr genügende Functionen der unabhängigen Variablen gefunden haben, so können wir jede mit einer beliebigen Constanten multipliciren, und diese Einzelproducte zu einander addiren (oder subtrahiren); dann ist die Summe wieder Lösung der Differentialgleichung. Das gilt nicht nur für zwei, sondern für beliebig viele einzelne Lösungen: jeder aus ihnen homogen und linear zusammengesetzte Ausdruck $\sum_a (A_a \vartheta_a)$ ist eine neue Function, welche der gegebenen

Gleichung genügt. Man bezeichnet im Allgemeinen einen solchen Vorgang, welcher als die algebraische Summe zweier ihm gleichartiger Einzelvorgänge betrachtet werden kann, als deren Superposition. Alle Bewegungen, Veränderungen, Vorgänge, welche in der Physik dargestellt werden können durch die Lösung von linearen homogenen Differentialgleichungen, haben die Eigenschaft mit einander gemein, daß verschiedene Lösungen, entsprechend verschiedenen Veränderungen, sich additiv „superponiren“, zu einander fügen können. Dabei können wir es zu thun haben nur mit einer IntensitätsgröÙe, die in einem Punkte einen bestimmten Werth hat, wie die Temperatur; oder auch mit einer gerichteten GröÙe, der an jeder Stelle auÙer Intensität noch eine bestimmte Richtung zukommt. Letzterer Fall liegt uns hier ebenfalls vor, wie wir sogleich erkennen werden.

Der einfachste Fall von solchen GröÙen, welche vollständig erst durch Intensität und Richtung charakterisirt werden, sind schon gerichtete Strecken, also Längen, die etwa Verschiebungen eines materiellen Punktes bezeichnen. Mehrere solche nacheinander eintretende Verschiebungen desselben Punktes setzen sich zusammen zu einer Gesamtverschiebung nach dem Gesetze der geometrischen Addition, indem jede Einzelverschiebung ihre ursprüngliche Länge und Richtung bewahrt und ihre Enden aneinander gesetzt werden. (Parallelogramm der Verschiebungen.) Die Resultante, welche aus dieser Construction hervorgeht und die Anfangslage des betrachteten Punktes mit seiner Endlage verbindet, kann betrachtet werden als eine Gesamtbewegung, in der noch alle einzelnen Bewegungen ungestört durch die übrigen vorhanden sind, sowie in einer Summe noch die einzelnen Glieder vorhanden sind, jedes mit unveränderter EinzelgröÙe. Nach demselben Gesetze der geometrischen Addition setzen sich die Wege eines materiellen Punktes während sehr kurzer Zeit, also Geschwindigkeiten, zu einer Resultante zusammen; dann auch Beschleunigungen (Parallelogramm der Geschwindigkeiten, der Beschleunigungen); ebenso auch die Geschwindigkeiten von Drehungen um bestimmt gerichtete Axen. Analytisch findet dies seinen Ausdruck darin, daß die Projectionen der Resultante auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen gleich sind der algebraischen Summe der Projectionen der Einzelstrecken auf dieselben Axen.

Das bezeichnet man als die Superposition von Bewegungen, welche einzeln vor sich gehen können, zu einer Gesamtbewegung.

In analoger Weise fügen sich einzelne Zustandsänderungen bei

Problemen, die auf die Lösung linearer homogener Differentialgleichungen zurückgeführt werden können, durch Superposition zu einer Gesamttänderung zusammen, wie wir dies in den Gleichungen (15), (16) und (17) gesehen haben. Und zwar sahen wir dies bereits für die bloße Intensitätsgröße, die Temperatur; indem die Einzelfälle in (15) $\vartheta' = A_1 \vartheta_1$; in (16) $\vartheta'' = A_2 \vartheta_2$; die Superposition beider in (17) $\vartheta''' = A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2$ waren. Die Superposition gilt aber auch für die gerichtete Größe, den Wärmestrom. Dessen Componenten sind im Falle von Gleichung (15):

$$q_x' = -k \frac{\partial \vartheta'}{\partial x}; \quad q_y' = -k \frac{\partial \vartheta'}{\partial y}; \quad q_z' = -k \frac{\partial \vartheta'}{\partial z},$$

im Falle von Gleichung (16):

$$q_x'' = -k \frac{\partial \vartheta''}{\partial x}; \quad q_y'' = -k \frac{\partial \vartheta''}{\partial y}; \quad q_z'' = -k \frac{\partial \vartheta''}{\partial z},$$

im Falle von Gleichung (17):

$$q_x''' = -k \frac{\partial \vartheta'''}{\partial x}; \quad q_y''' = -k \frac{\partial \vartheta'''}{\partial y}; \quad q_z''' = -k \frac{\partial \vartheta'''}{\partial z}$$

und da $\vartheta''' = \vartheta' + \vartheta''$, so sind auch:

$$q_x''' = q_x' + q_x'', \quad q_y''' = q_y' + q_y'', \quad q_z''' = q_z' + q_z'',$$

das heißt: die Componenten der zusammengesetzten Wärmeströmung nach den Coordinatenrichtungen sind gleich der algebraischen Summe der Componenten der beiden einzelnen Strömungen; es findet also einfache Superposition statt. Wärmeströmungen kann man mithin geometrisch addiren wie gerichtete Strecken.

Die Superponirbarkeit von Lösungen ϑ , die durch die Differentialgleichung (11) der Wärmeleitung immer erlaubt ist, bleibt auch durch die körperlichen Grenzbedingungen ungestört, so lange diese linear und homogen in Bezug auf ϑ und seine Differentialquotienten sind, wie (13a). Es lassen sich dann auch die Gleichungen wie (13a) für $\vartheta' = A_1 \vartheta_1$ und für $\vartheta'' = A_2 \vartheta_2$ addiren und geben eine von derselben Form für $\vartheta''' = \vartheta' + \vartheta''$.

Es ist verhältnißmäfsig sehr viel einfacher, dergleichen physikalische Probleme zu behandeln, bei deren Lösungen Superposition gilt, als wenn das Hinzukommen neuer Einzelvorgänge die bereits vorhandenen stört, so daß sich die einzelnen nicht unverändert zusammensetzen. Dies sieht man sogleich ein, wenn man bedenkt,

daß man Lösungen der Differentialgleichung (11) sucht, welche nicht nur bestimmten körperlichen Grenzbedingungen, sondern auch gegebenen Anfangszuständen entsprechen. Eine partielle Lösung ϑ' giebt für die Ausgangszeit eine bestimmte anfängliche Temperaturvertheilung; eine andere Lösung ϑ'' giebt eine andere Anfangsvertheilung u. s. f. Eine durch Superposition der einzelnen Lösungen erhaltene neue Lösung $\vartheta''' = \vartheta' + \vartheta''$ giebt auch für die Anfangszeit eine Vertheilung der Temperatur, bei welcher diese an jedem Ort gleich der Summe der beiden Werthe ist, die sie in den Einzelfällen hatte. Die allgemeinste Superposition $\sum_a A_a \vartheta_a$ partieller Lösungen läßt sich also einer außerordentlich großen Mannigfaltigkeit von Anfangszuständen anpassen. Wir können sogar kurzweg sagen: bei solchen Aufgaben, wo wir die partiellen Lösungen für eine genügende Anzahl von Einzelfällen finden können, kann die vollständige Lösung für jeden willkürlich gegebenen Anfangszustand angegeben werden. Diese Behauptung werden wir später mehrfach bewahrheiten.

§ 12. Die Grenzbedingungen seien nicht homogen.

In denjenigen Fällen, wie z. B. in denen von Gleichung (14), wo die Grenzbedingungen nicht homogen sind, gilt auch in Bezug auf diese nicht mehr die directe Superponirbarkeit mehrerer Lösungen. Es sei ϑ' eine Lösung der Differentialgleichung (11), welche zugleich einem gegebenen System der Wärmezuführung, also der aus (14) für den vorliegenden speciellen Fall hervorgehenden Gleichung:

$$k \frac{\partial \vartheta'}{\partial N} = \varphi_1(x, y, z, t) \quad (18)$$

genügt.

Für eine andere Anordnung und Stärke der Wärmezuführung sei ϑ'' eine Lösung, so daß

$$k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = \varphi_2(x, y, z, t) \quad (19)$$

Die Addition beider Gleichungen giebt für $\vartheta''' = \vartheta' + \vartheta''$ die neue Gleichung:

$$k \frac{\partial \vartheta'''}{\partial N} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (20)$$

Die Summe ϑ''' der Einzellösungen entspricht also einer geänderten Aufgabe, nämlich der, daß die Wärmezuführung von außen

nach Stärke und Vertheilung die Summe derjenigen ist, welche in den beiden Einzelfällen stattgefunden haben. Wenn also im ersten Falle allein einer bestimmten Stelle der Grenze Wärme zugeführt wird, im zweiten allein einer anderen bestimmten Stelle, so giebt die Summe die Temperaturvertheilung, wenn beiden Stellen der Grenze jene Wärmemengen gleichzeitig zugeführt werden.

Besonders wichtig ist noch die Combination von Fällen, bei deren einem in der Grenzbedingung ein nicht homogenes Glied vorkommt, wie in (18); während letzteres bei dem anderen Falle fehlt, in (19) also $\varphi_2 = 0$ gesetzt wird, so daß $k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = 0$ wird, welche Bedingung auch aus (12) für $k_2 = 0$ oder aus (13) für $h = 0$ hervorgehen würde. Es ist dann ϑ'' eine Lösung der Differentialgleichung (11) unter Hinzutritt homogener körperlicher Grenzbedingungen, so daß ich, wenn ich mehrere Lösungen ϑ'' finde, diese unbeschränkt superponiren kann. Die Addition der Gleichung (18) und der jetzt an Stelle von (19) tretenden

$$k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = 0 \quad (19a)$$

giebt statt (20):

$$k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = \varphi_1(x, y, z, t) \quad (20a)$$

so daß die Summe ϑ''' jetzt derselben äußeren Wärmezufuhr entspricht, wie die Einzellösung ϑ' . Haben wir daher eine einzige Lösung ϑ' für die Differentialgleichung (11) und die nicht-homogene Gleichung (18) gefunden, so können wir dazu addiren eine Superposition $\sum_a A_a \cdot \vartheta''_a$ aller uns bekannten Lösungen für (11) und die homogene Gleichung (19a), welche aus jener dadurch hervorgeht, daß das nicht-homogene Glied gleich Null gesetzt wird. [Umgekehrt läßt sich ja auch leicht einsehen, daß zwei Lösungen ϑ'_1 und ϑ'_2 von (11) und derselben nicht-homogenen Gleichung (18) sich nur unterscheiden können um Functionen, welche eine Lösung der homogenen Gleichung (19a) bilden. Denn die Subtraction der beiden Gleichungen:

$$k \frac{\partial \vartheta'_1}{\partial N_1} = \varphi_1 \quad k \frac{\partial \vartheta'_2}{\partial N} = \varphi_1$$

giebt $k \frac{\partial (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)}{\partial N} = 0$, wo also $(\vartheta'_1 - \vartheta'_2)$ entspricht dem ϑ'' in (19a).] Auf diese Weise gewinnen wir auch sehr viel vollständigere

Lösungen der nicht homogenen Gleichung für dieselbe durch φ_1 gegebene äußere Wärmezufuhr. Das Entsprechende gilt übrigens ganz allgemein für die Vervollständigung der Lösungen von nicht-homogenen linearen Differentialgleichungen. Es ist meist sehr viel leichter, Lösungen für die homogenen Gleichungen zu finden; wir werden suchen müssen, ihrer möglichst viele zu gewinnen; auf dem eben angegebenen Wege kommen wir dann in vielen Fällen auch für die bei vorgeschriebener Wärmezufuhr nicht-homogenen Gleichungen dazu, derartig verallgemeinerte Lösungen zu finden, daß sie jedem möglichen gegebenen zeitlichen Anfangszustand angepaßt werden können.

§ 13. Complexe Lösungen.

Ich will noch auf einen Kunstgriff aufmerksam machen, welcher das Aufsuchen der allen Bedingungen genügenden Lösung häufig erleichtert. Bei der Superposition zweier Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung ϑ_1 und ϑ_2 zu $A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2$ können wir den einen der constanten Factoren imaginär nehmen, und schreiben $i \cdot A_2$ statt A_2 ; die superponirte Lösung $\vartheta''' = A_1 \vartheta_1 + i A_2 \vartheta_2$ ist dann complex. Die Gleichung (17) zerfällt dann in die beiden Gleichungen (15) und (16), aus denen sie hervorgegangen ist. Gehen wir von reellen Lösungen aus, so wäre also durch ihre complexe Zusammensetzung weiter nichts gewonnen. Finden wir aber direct eine complexe Lösung, so haben wir in ihr sogleich zwei reelle Lösungen, indem der reelle Theil für sich allein eine Lösung sein muß, und ebenso der imaginäre (bei welchem der Factor i wegzulassen ist). Durch reelle Superposition der beiden reellen Lösungen haben wir dann auch wieder eine allgemeinere reelle Lösung. Derselbe Kunstgriff läßt sich bei nicht-homogenen Gleichungen ebenfalls mit Nutzen anwenden. Multiplicire ich z. B. (19) mit der imaginären Einheit, und addire es zu (18), so resultirt:

$$k \frac{\partial (\vartheta' + i \vartheta'')}{\partial N} = \varphi_1 + i \varphi_2$$

Daraus folgt, daß bei einer complexen Lösung einer nicht-homogenen Gleichung der reelle Theil dem Falle entspricht, das der reelle Theil φ_1 des nicht-homogenen Gliedes zur homogenen Gleichung hinzugegetreten ist; dem Falle des Hinzutritts des imaginären Gliedes $i \cdot \varphi_2$ entspricht der imaginäre Theil der Lösung. Dies würden immerhin schon Vortheile der Einführung complexer Größen sein; es ist

aber auch noch zu bemerken, daß durch das Operiren mit diesen in sehr vielen Fällen die Rechnungen erheblich leichter werden. Wenn wir z. B., wie es in der That häufig vorkommt, eine Lösung haben $\vartheta_1 =$ irgend welchen Factoren $\times \cos f(x, y, z, t)$, wo das Argument des cosinus eine Function von x, y, z, t ist; und eine weitere Lösung $\vartheta_2 =$ denselben Factoren $\times \sin$ desselben Arguments, so wird die complexe Lösung:

$$\vartheta_1 + i \vartheta_2 = \text{denselben Factoren} \times e^{i \times f(x, y, z, t)}$$

Bei den trigonometrischen Functionen kommt man nun vom sinus durch Differenziren auf den cosinus, beim nochmaligen Differenziren wieder auf den sinus. In (11) und den Grenzgleichungen muß man dann mit diesen beiden verschiedenen Functionen neben einander rechnen; das läßt sich ja natürlich durchführen; aber sehr viel einfacher wird die Behandlung bei der Exponentialfunction mit imaginärem Exponenten. Da bleibt diese in allen Differentialquotienten bestehen und es treten nur noch Factoren zu ihr hinzu.

Soviel über die Lehre von der Superposition.

Drittes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Lösungen des Problems.

§ 14. Der Green'sche Satz.

Um gewisse wesentliche Eigenschaften aller Lösungen des Wärmeleitungsproblems abzuleiten, will ich nun einen Satz beweisen, der in fast allen Zweigen der theoretischen Physik immer wieder gebraucht wird. Wenn er daher auch jedem geläufig sein wird, der schon ein anderes Gebiet dieser kennt, so will ich ihn doch wegen seiner Wichtigkeit und allgemeinen Anwendbarkeit auch hier wieder entwickeln. Es ist der sogenannte GREEN'sche Satz. Er giebt für Producte von Differentialquotienten zweier Functionen der Coordinaten eine Methode partieller Integration nach denselben, und zwar für einen beliebigen begrenzten Raum.

Es seien Φ und V zwei Functionen von xyz . Wir stellen uns die Aufgabe, das Integral zu bilden:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V) \cdot dx dy dz \quad (21)$$

ausgedehnt über einen Raum, der von einer beliebig unregelmäßigen Fläche (F in Fig. 3) nach allen Seiten hin begrenzt ist. Die Integration nach x allein genommen erstreckt sich parallel der x -Richtung, bei festgehaltenen Werthen von y und z , über ein Prisma von überall gleichem Querschnitt $dy dz$ (in der Figur ist die Axe „ y, z “ als der Durchschnitt der yz -Ebene mit der Ebene der Zeichnung zu denken). Die Integration nach x läßt sich unmittelbar ausführen; und wenn wir den kleinsten Werth von x , soweit das unendlich dünne Prisma innerhalb des betrachteten Raumes liegt, mit x_0 bezeichnen, den größten mit x_1 , so wird:

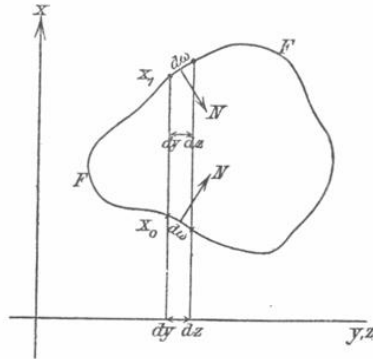


Fig. 3.

$$dy dz \int \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V) dx = \overline{\Phi \cdot V}_{x_0}^{x_1} dy dz \quad (22)$$

wo $\overline{\Phi \cdot V}_{x_0}^{x_1}$ die Differenz der Werthe von $\Phi \cdot V$ für die obere und untere Integrationsgrenze bedeutet. Für die Ausführung der Integration ist nun aber voraus zu setzen, daß an allen Stellen des Integrationsintervalles $\frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V)$ endlich und stetig (und eindeutig siehe unten S. 51) sei, oder höchstens in der Weise unendlich für irgend eine Stelle, daß das Integral nach x doch noch endlich wird. Es würden z. B. gebrochene negative Potenzen, deren Exponent also kleiner ist als 1, wie etwa $1/\sqrt{(x-a)}$ zwar für $x=a$ unendlich werden; aber trotzdem $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{(x-a)}$ für $x=a$ nicht unendlich werden. Solche an einzelnen Punkten „integrirbar unendliche“ Functionen sind also auch für $\frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V)$ zulässig; für sie behält doch das Integral $\overline{\Phi \cdot V}$ seinen Sinn.

Der prismatische Raum, über welchen die Integration nach x ausgedehnt ist, wird oben und unten durch unendlich kleine Flächenstücke begrenzt. Bezeichnen wir mit $d\omega$ allgemein ein Element der Oberfläche F des betrachteten Raumes, so können wir die Endflächen des Prismas $(d\omega)_{x_1}$ und $(d\omega)_{x_0}$ nennen. Auf eine der yz -Ebenen parallele

Ebene projicirt geben sowohl die obere wie die untere Endfläche die Gröfse des Querschnittes $dy dz$. Es ist also jedesmal das Product von $d\omega$ multiplicirt mit dem $\cos$ des immer als spitzer zu nehmenden Winkels, den $d\omega$ mit dem Querschnitt des Prismas bildet, gleich $dy dz$. Dieser Winkel ist gleich demjenigen, welchen die Normale N auf $d\omega$ bildet mit der Normalen auf dem Querschnitt $dy dz$, vorausgesetzt, dafs letzterer Winkel der beiden Normalen ebenso wie jener der beiden Flächen ein spitzer ist. Ob dies der Fall ist, hängt davon ab, ob man die Normalen nach der einen oder der andern Seite ihrer Fläche gerichtet nimmt. Nimmt man ihre Richtung so, dafs der Winkel jener beiden Normalen nicht ein spitzer, sondern ein stumpfer ist, so ist er dem Winkel der beiden Flächen nicht gleich, sondern ergänzt sich mit ihm zu 180° . Als die Normale auf dem Querschnitt $dy dz$ nehmen wir nun die positive x -Richtung. Die Normale N auf $d\omega$ denken wir uns jedesmal nach dem Innern des betrachteten Körpers gerichtet; diese Festsetzung ist für die physikalischen Verhältnisse die zweckmässigere, da wir später unter Φ und V Functionen verstehen werden, die im Innern des Körpers eine bestimmte Bedeutung haben. Bei diesen Festsetzungen ist der Winkel (x, N) am unteren Ende des Prismas, bei x_0 , ein spitzer; am oberen dagegen, bei x_1 , ein stumpfer.

$$\text{Bei } x_0 \text{ wird daher: } d\omega \cdot \cos(x, N) = dy \cdot dz$$

$$\text{„ } x_1 \text{ „ „ : } -d\omega \cdot \cos(x, N) = dy \cdot dz$$

und weiter:

$$\overline{\Phi \cdot V \cdot dy \cdot dz}_{x_0}^{x_1} = \left[-\Phi \cdot V \cdot d\omega \cdot \cos(x, N) \right]_{x=x_1} - \left[\Phi \cdot V \cdot d\omega \cdot \cos(x, N) \right]_{x=x_0}.$$

Die beiden Elemente $d\omega$, welche der Mantel des Prismas aus der Oberfläche des betrachteten Körpers ausschneidet, liefern also jedes in (22) den Beitrag $(-\Phi \cdot V \cos(x, N) \cdot d\omega)$. Wenn wir nun wieder auf (21) zurückkommen wollen, so müssen wir noch nach allen für den Körper in Betracht kommenden Werthen von y und z integrieren, oder über alle unendlich dünnen Prismen, in welche der durch Schnitte parallel zur x -Axe zerlegt werden kann. Jedes Körper Prisma liefert dann durch (22) einen Beitrag durch ein Flächenelement auf der Oberseite, und durch ein anderes auf der Unterseite. Alle Prismen zusammen liefern daher alle Flächenelemente sowohl der Ober- wie der Unterseite, so dafs wir erhalten:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \int \Phi \cdot V \cdot \cos(x, N) \cdot d\omega$$

Dabei ist die Integration auf der rechten Seite als einfache geschrieben, da das Oberflächenelement als ein Differential $d\omega$ geschrieben ist; letzteres ist aber ein Differential zweiter Ordnung und die Integration ihrem Wesen nach eine doppelte.

Bei den wichtigsten Anwendungen dieser Formel nimmt man die Function V selbst schon als Differentialquotienten einer anderen Function an, die wir Ψ nennen wollen; und zwar würde man zunächst einmal in dem bisher betrachteten Falle $V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ setzen können. Schreiben wir zugleich statt des bisher als parallelepipedisch angenommenen Raumelements, welches auch jede beliebige andere Form haben kann, also statt $dx dy dz$ allgemeiner $d\tau$, und schreiben entsprechend die Integration über den Raum kurz als einfache, obwohl sie ihrem Wesen nach eine dreifache ist, so wird:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) d\tau = - \int \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \cos(x, N) \cdot d\omega \quad (23a).$$

Man würde auch $V = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ oder $= \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ setzen können und dann durch die analogen Operationen auch bekommen:

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\tau = - \int \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \cos(y, N) \cdot d\omega \quad (23b)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = - \int \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \cos(z, N) \cdot d\omega \quad (23c)$$

und durch Addition dieser drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \int d\tau \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} \\ &= - \int \Phi \cdot d\omega \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \cos(x, N) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \cos(y, N) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \cos(z, N) \right\} \end{aligned}$$

Nennen wir nun dN ein unendlich kleines Stück auf der Normalen N von dem Flächenelement $d\omega$ aus gerechnet, und dx , dy , dz die Projectionen von dN auf die Coordinatenachsen, so ist:

$$\cos(x, N) = \frac{dx}{dN}; \quad \cos(y, N) = \frac{dy}{dN}; \quad \cos(z, N) = \frac{dz}{dN}$$

Betrachten wir ferner die Aenderung von Ψ , wenn wir von $d\omega$ ausgehend auf der Normalen um dN fortschreiten, so ist diese:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N} dN = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dN} dN + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dN} dN + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dN} \cdot dN$$

mithin:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos(x, N) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos(y, N) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos(z, N) = \frac{\partial \Psi}{\partial N}$$

und die zuletzt abgeleitete Gleichung für das Raum- und das Oberflächenintegral wird:

$$\left. \begin{aligned} \int d\tau \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} = - \int d\omega \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial N} \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

Auf der linken Seite der Gleichung können die Differentiationen der Producte ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Phi \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Die Operation $\left(\frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} \right)$ bezeichnet man kurz mit $\Delta \dots$; bei Einführung dieses Zeichens wird also schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \int d\tau \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \\ + \int d\tau \Phi \cdot \Delta \Psi = - \int d\omega \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial N} \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

Die Gleichung (24a) oder (24b) pflegt man den GREEN'schen Satz zu nennen.

Nach Aufstellung der Gleichung (22) haben wir bereits bemerkt, daß sie nur gilt, wenn $\frac{\partial}{\partial x} (\Phi \cdot V)$ in dem ganzen betrachteten Raume endlich, oder höchstens integrirbar unendlich und stetig ist. Nach Einführung von Ψ ist dasselbe also für $\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$ und die beiden analogen Differentialausdrücke nach y und z zu verlangen. Man denke sich nun, wie bei Ableitung des GREEN'schen

Satzes in der Form (24b), die Differentiationen an Φ und $\partial\psi/\partial x$ getrennt ausgeführt. Es müssen dann auch die dabei auftretenden Operationen möglich sein. Es muß also zunächst Φ endlich und stetig sein und an jeder Stelle bestimmte Differentialquotienten haben, welche ihrerseits integrierbar unendlich sein dürfen; ferner müssen die ersten Differentialquotienten $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ u. s. f. endlich, stetig und noch einmal differenzierbar sein, damit $\Delta\psi$ einen bestimmten angebbaren Werth hat, der endlich oder höchstens wiederum integrierbar unendlich ist.

Es ist aber noch auf eine weitere bisher stillschweigend gemachte Voraussetzung aufmerksam zu machen. Nach Addition der drei Gleichungen (23 a, b, c) wurden die Werthe von Φ je für denselben Ort als gleich betrachtet, einerlei aus welcher der drei Gleichungen der Werth herrührt; dies ist z. B. vorausgesetzt, wenn in der unmittelbar aus jener Addition hervorgehenden Gleichung auf der linken Seite Φ als gemeinsamer Factor herausgezogen ist. Dasselbe ist für jeden der ersten Differentialquotienten von ψ einzeln genommen stillschweigend geschehen. Wir haben damit die Voraussetzung gemacht, daß Φ und die Differentialquotienten von ψ eindeutige Functionen der Coordinaten sind. In der Wärmelehre werden wir zwar kaum auf Fälle stoßen, in denen dies nicht erfüllt wäre. Aber in der Lehre von den elektrischen und anderen Erscheinungen kommt der Fall vor, daß die in Betracht zu ziehenden Functionen mehrdeutig sind. Das sind dann solche Fälle, in denen physikalisch eindeutige Definition nur den Differentialquotienten der vorkommenden Functionen zukommt, z. B. den Kraftcomponenten beim Potential. Die Function selbst, die durch Integration der eindeutigen Differentiale gefunden werden muß, kann sich dann vieldeutig ergeben, wie z. B. gewisse eindeutige algebraische Differentiale zu den vieldeutigen cyclometrischen Functionen als Integralen führen. In solchen Fällen wäre nicht ausgeschlossen, daß man bei den im GREENS'schen Satz vorkommenden Integrationen ausgehend von Werthen, welche für einen Ort eines Volumenelements $d\tau$ gegeben sein mögen, zu verschiedenen Werthen der Function für ein und dasselbe Oberflächenelement $d\omega$ gelangt, je nach dem Wege, auf welchem man es erreicht, das heißt: je nachdem man zuerst die Integration nach x , oder zuerst die nach y , oder die nach z ausführt. Solche Fälle kommen allerdings in der Wärmelehre nicht in Betracht, wo (im Gegensatz zum Potential) die Temperatur immer eine eindeutige Function ist.

Schreiben wir den GREEN'schen Satz in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \int d\tau \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \\ = - \int d\tau \cdot \Phi \cdot \Delta \Psi - \int d\omega \cdot \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial N} \end{aligned} \right\} \quad (24c)$$

und vertauscht man die beiden Functionen Φ und Ψ mit einander, so ändert die linke Seite der vorstehenden Gleichung ihren Werth nicht, da sie symmetrisch nach ihnen ist. Also ändert auch die rechte Seite durch diese Vertauschung ihren Werth nicht, und man erhält:

$$\int d\tau \cdot \Phi \cdot \Delta \Psi + \int d\omega \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial N} = \int d\tau \cdot \Psi \cdot \Delta \Phi + \int d\omega \cdot \Psi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial N} \quad (25)$$

Indessen, wenn wir bisher voraussetzen mußten, daß Φ und die ersten Differentialquotienten von Ψ eindeutig, endlich und differenzirbar seien, kehrt sich mit der Vertauschung von Φ und Ψ auch diese Bedingung um, so daß für die aus (24a) durch den Tausch entstehende Gleichung zu verlangen ist, daß Ψ und die ersten Differentialquotienten von Φ in demselben Raume eindeutig, endlich und differenzirbar seien. Die aus der Combination beider Fälle folgende Gleichung (25) gilt daher nur, wenn sowohl Φ als Ψ und ihre ersten Differentialquotienten eindeutig, endlich und differenzirbar sind. Dadurch sind also diese Functionen in ihrem Wesen gewissen Einschränkungen unterworfen.

Sollten Stellen in unserem Raume vorkommen, in denen die Werthe von Φ und Ψ selbst, oder ihre ersten Differentialquotienten Sprünge machen, so kann über solche Stellen nicht ohne Weiteres hinweg integrirt werden: vielmehr muß an ihnen eine Grenze für die Integration gebildet werden, und das Verhalten an einer solchen Grenze besonders untersucht werden.

§ 15. Constanz der Wärmemenge.

Aus dem GREEN'schen Satze lassen sich gewisse Eigenschaften der Temperaturverhältnisse bei der Wärmeströmung herleiten. Bei dieser Anwendung haben wir es in der Temperatur ϑ und in dem Wärmeleitungsvermögen k zu thun mit Functionen, von welchen wir in vielen Fällen annehmen können, daß sie in gegebenen Räumen, in gegebenen Körpern den für Φ und Ψ vorgeschriebenen Bedingungen genügen.

Wenn wir Zufuhr- oder Entziehungs-Punkte oder -Linien für die Wärme annehmen wollen, so würde in solchen der sonst endliche Wärmestrom sich unendlich dicht zusammendrängen; er würde auch in solchen Punkten oder den Punkten solcher Linien nach allen Seiten hin gerichtet sein; es werden in ihnen also die den Componenten des Wärmestroms proportionalen Differentialquotienten $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ unendlich groß und unbestimmt werden. Solche Punkte und Linien dürfen also nicht im Innern eines Raumes liegen, auf den wir den GREEN'schen Satz mit der Temperatur und ihren Ableitungen als Φ oder Ψ anwenden wollen. Wir müssen sie viel mehr von einem solchen Raume absondern durch kleine, sie umschließende Kugeln oder Cylinder, deren Flächen dann Oberflächen des betrachteten Raumes werden, und durch die hindurch dann der Zu- und Abstrom mit endlicher Dichtigkeit und an jeder Stelle eindeutig bestimmter Richtung vor sich geht.

An den Grenzen zweier Medien von verschiedenem Leitungsvermögen k bleibt, wie wir in § 9 sahen, die Gleichung (11) gültig (wenn noch die durch (12) ausgedrückte Bedingung erfüllt ist). In den folgenden Anwendungen kommt nun k , wenn es differenziert wird, nur in derselben Verbindung wie in der linken Seite von (11) vor, für welche dann jedesmal die rechte Seite eingesetzt wird, was auch unberührt von der Discontinuität von k an solchen Grenzflächen geschehen kann. Die Unstetigkeit des nicht differenzierten k hat dann in den auftretenden Integralen nur eine Teilung des Integrationsgebietes für die Teile mit verschiedenem k zur Folge; im Uebrigen gelten die folgenden Ableitungen aber mithin ungeändert auch, wenn das System aus Körpern von verschiedenem Leitvermögen zusammengesetzt ist.

Die Differentialgleichung (11) der Wärmeleitung war:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = \epsilon \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

Diese Gleichung denken wir uns mit dem Volumenelement $d\tau$ multiplicirt und über einen bestimmten begrenzten Körper oder Körpertheil integrirt. Der auf der linken Seite auftretende Ausdruck wird identisch mit der linken Seite von (24a), wenn in ihr $\Phi = k$ und $\Psi = \vartheta$ gesetzt wird. Es läßt sich also auch auf die linke Seite von (11) die durch den GREEN'schen Satz gegebene Umformung

in ein Integral über die Oberfläche des betrachteten Körpers anwenden, und wir erhalten:

$$-\int d\omega \cdot k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = \int d\tau \cdot \varepsilon \cdot c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (26)$$

Nach den Erörterungen, welche den Gleichungen (10) zu Grunde liegen, hat die Wärmeströmung senkrecht durch $d\omega$ nach dem Innern des Körpers hin den Wert:

$$q_N = -k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N}$$

Dies mit $d\omega$ multiplicirt ist also die durch $d\omega$ in der Zeiteinheit eintretende Wärmemenge, und das auf der linken Seite von (26) stehende Integral bedeutet die gesammte durch die Oberfläche des betrachteten Körpers von aussen her eintretende Wärmemenge (bezogen auf die Zeiteinheit). Auf der rechten Seite ist $\varepsilon \cdot d\tau$ die Masse des Volumenelementes und diese multiplicirt mit $c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ ist die zur Erwärmung des Massenelementes in der Zeiteinheit gebrauchte Wärmemenge; das Integral ist also die Zunahme des Gesamtwärmeinhalts des Körpers, ebenfalls bezogen auf die Zeiteinheit. Gleichung (26) spricht mithin den Satz aus, daß Vermehrung der in einem Körper oder Körpertheile enthaltenen Wärmemenge nur dadurch stattfinden kann, daß solche durch die ihn begrenzende Oberfläche eintritt. Das ist uns nichts Neues; aber daß wir es als Folgerung finden, bestätigt uns die Richtigkeit unserer Voraussetzungen, nämlich der Betrachtungen über die Wärmeströmung durch einzelne Flächenelemente und durch Volumenelemente im Innern einer Substanz, von welchen ausgehend wir das in Gleichung (11) aufgestellte Gesetz der Wärmeleitung gewonnen haben.

§ 16. Satz von der Ausgleichung der Unterschiede.

Eine zweite Anwendung des GREEN'schen Satzes wird uns zu einem weiteren allgemeinen Gesetze führen. In der Gleichung (24a) nehmen wir die Function $\Phi = k \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ und $\Psi = \vartheta$; dann lautet sie:

$$\begin{aligned} \int d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} \\ = - \int d\omega \cdot k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} & \int d\tau \cdot k \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z \partial t} \right\} \\ &= - \int d\tau \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} \\ & - \int d\omega \cdot k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned}$$

Auf der linken Seite ist zunächst die Klammer gleich:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

da k zwar an verschiedenen Stellen des Raumes verschiedene Werthe haben kann, an jeder einzelnen Stelle aber einen constanten Werth haben soll, von der Zeit t also unabhängig ist, darf dann weiter die Differentiation nach t auf der linken Seite vor das Integralzeichen genommen werden. In dem ersten Integral auf der rechten Seite wird die geschweifte Klammer wieder gleich $\varepsilon \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$; und es wird also:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &= - \int d\tau \cdot \varepsilon \cdot c \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 - \int d\omega \cdot k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wir nehmen nun an, daß wir einmal einen Körper haben, für dessen ganze Oberfläche $\frac{\partial \vartheta}{\partial N} = 0$ ist, oder kein Temperaturabfall gegen den Rand hin stattfindet; dies bedeutet, wie wir wissen, daß an der ganzen Oberfläche $q_n = 0$ ist, oder nirgends Wärme aus ihr austritt oder durch sie zufließt. Dann verschwindet das zweite Integral auf der rechten Seite, und es bleibt:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \cdot k \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &= - \int d\tau \cdot \varepsilon \cdot c \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

In dem rechts noch übrig bleibenden Integral sind ε , c und $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2$ nothwendig positiv; also wird die ganze rechte Seite negativ. Der

Differentialquotient des auf der linken Seite stehenden Integrals nach der Zeit muß im betrachteten Falle negativ sein; auch auf der linken Seite stehen unter dem Integralzeichen lauter positive Größen; mithin muß der absolute Werth des Integrals fortwährend abnehmen. In Folge dessen kann nun zwar an einzelnen Stellen vorübergehend die GröÙe $\left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\}$ zunehmen; das Integral aber muß abnehmen. Dessen Bedeutung läßt sich folgendermaßen veranschaulichen. Wenn die Richtung des resultirenden Wärmestroms wie früher mit r bezeichnet wird, folgt aus $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = q_r^2$ auch:

$$\left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)^2$$

$\partial \vartheta / \partial r$ kann „Temperaturgradient“ in Richtung des resultirenden Wärmestroms genannt werden. Wenn k als constant angesehen und vor das Integrationszeichen genommen würde, und wenn die ganze Gleichung durch das constante Volumen $\int d\tau$ des betrachteten Körpers dividirt wird, würde auf der linken Seite auftreten:

$$\int d\tau \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} / \int d\tau$$

oder der Mittelwerth des Quadrates des obigen Temperaturgradienten für den ganzen Körper. Dieser Werth, oder allgemeiner das Integral auf der linken Seite von Gleichung (28) nimmt also fortschreitend ab, wenn die einmal in dem Körper vorhandene, anfangs beliebig unregelmäßig in seinem Innern vertheilte Wärmemenge in ihm eingeschlossen bleibt und auch keine neue zugeführt wird. Dabei können, wie wir allgemein sahen, verschiedene Stellen verschiedenes Leitungsvermögen haben. Im Ganzen werden die ursprünglich vorhandenen örtlichen Unterschiede der Temperatur kleiner und kleiner, so daß die Temperatur sich immer mehr ausgleicht, und schließlich überhaupt keine Temperaturänderungen mehr vorhanden sein werden. Dieser Ausgleich ist ein charakteristisches Zeichen der Wärmebewegung, wie wir zunächst für die Leitung erkennen.

Ein analoges Resultat können wir weiter auch ableiten, wenn der Körper Wärme abgibt bzw. aufnimmt durch Strahlung seiner Grenzflächen gegen umgebende Hüllen von einer Temperatur ϑ_a , die niedriger bzw. höher ist als diejenige $\bar{\vartheta}$, welche an der Stelle des Oberflächenelementes $d\omega$ herrscht. Für solche Fälle gilt die

Grenzbedingung (13), oder wenn ϑ_a als Nullpunkt gewählt wird (13 a):

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h \cdot \bar{\vartheta}$$

Dies wäre alsdann in das letzte Integral von (27) einzusetzen; der Strich über ϑ kann dabei weggelassen werden, da es selbstverständlich ist, daß in dem Integral der Werth von ϑ für die Stelle von $d\omega$ zu nehmen ist. Es wird mithin:

$$\int d\omega \cdot k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = \int d\omega \cdot h \cdot \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \int d\omega \cdot \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vartheta^2)$$

und da h sich zwar von Stelle zu Stelle ändern kann, aber nicht an derselben Stelle mit der Zeit ändern soll, darf die Differentiation nach t vor das Integralzeichen gesetzt werden. Aus (27) wird demnach in diesem Falle:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \int d\omega \cdot h \cdot \vartheta^2 \right] \\ = - \int d\tau \cdot \varepsilon \cdot c \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die rechte Seite ist, wie wir schon gesehen haben, negativ. Also nimmt die links in die eckige Klammer eingeschlossene GröÙe fort-dauernd ab. Diese ist die Summe von lediglich positiven GröÙen; sie umfaßt jetzt — multiplicirt mit positiven constanten Factoren — die Quadrate sämmtlicher Temperaturverschiedenheiten im Innern und die Quadrate der Temperaturverschiedenheiten der Oberfläche gegen die als Nullpunkt gewählte constante Temperatur der äußeren Umgebung. In Uebereinstimmung mit der Erfahrung ergibt sich also, daß auch hier eine Ruhe und ein Endzustand immer nur in dem Sinne eintreten kann, daß die Temperaturunterschiede zwischen verschiedenen Theilen des eingeschlossenen Systems durch Leitung und auch zwischen ihm und seiner Umgebung durch Einstrahlung oder Ausstrahlung immer mehr verschwinden, vorausgesetzt, daß natürlich die äußere bestrahlte oder strahlende Hülle ihre Temperatur unverändert beibehält.

§ 17. Eindeutigkeit der Lösungen.

Die vorhin gewonnene Gleichung (27) kann man noch weiter benutzen um zu untersuchen, ob die Wärmebewegung in einem gegebenen leitenden System eindeutig bestimmt ist durch die

Differentialgleichung (11), dem gegebenen Anfangszustand, und die gegebenen Grenzbedingungen gemäß (13), (13a), (14) oder indem die Temperaturen an der Oberfläche gegeben sind. — Es seien fürs Erste gegeben die Wärmeabflüsse und -Zuflüsse an den körperlichen Grenzen wie in Gleichung (14). Angenommen, für diese und für den gegebenen Anfangszustand hätten wir zwei Lösungen ϑ' und ϑ'' der Differentialgleichung (11). Dann wissen wir zunächst, daß auch $(\vartheta' - \vartheta'')$ eine Lösung von (11) ist. Da ferner beide dasselbe (14) befriedigen, ist

$$k \frac{\partial \vartheta'}{\partial N} = \varphi(x, y, z, t) \quad \text{und} \quad k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = \varphi(x, y, z, t)$$

also:

$$k \frac{\partial (\vartheta' - \vartheta'')}{\partial N} = 0$$

Das heißt: $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ würde dem Falle $\varphi = 0$ entsprechen, daß nämlich keinerlei Abgabe oder Zufuhr von Wärme durch die Oberfläche stattfindet. Da ferner ϑ' und ϑ'' beide für denselben Anfangszustand gelten sollen, sind zur Anfangszeit $\vartheta' = \vartheta''$ und also

$$\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'') = 0 \quad \text{für } t = 0$$

und zwar für alle Punkte des betrachteten Körpers. Wir wollen nun die Gleichung (27) anwenden auf dies $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$. Dann verschwindet das letzte Integral auf der rechten Seite wegen $\partial \vartheta / \partial N = 0$, es resultirt die Gleichung (28), und es muß, wie früher gezeigt, das links stehende Integral

$$\int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

fortschreitend abnehmen, wenn es sich überhaupt verändert. Nun ist $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ für $t = 0$ im ganzen betrachteten Körper überall gleich Null, also auch seine Differentialquotienten nach den Coordinaten, und es verschwindet auch das vorstehende Integral zur Zeit $t = 0$.

Das Integral ist eine Summe von Quadraten, multiplicirt mit den ihrem Wesen nach positiven Factoren k und $d\tau$; es kann also überhaupt nur positiv oder gleich Null sein, niemals aber negativ. Zur Zeit $t = 0$ ist es gleich Null und kann, wenn es sich überhaupt verändert, nur kleiner werden; daraus folgt, daß das Integral immer gleich Null bleibt. Es muß also auch das allein noch auf der rechten Seite von (28) übrig gebliebene $\int d\tau \cdot \varepsilon \cdot c \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2$ dauernd

gleich Null sein, und da auch dieses die Summe von Quadraten $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2$ mit den positiven Factoren $\varepsilon.c.d\tau$ ist, welch letztere selbst von Null verschieden sind, folgt, daß $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ für alle Volumenelemente

$d\tau$ immer gleich Null sein muß. $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ behält also seinen Werth bei, und da es zur Anfangszeit verschwindet, verschwindet es immer und an allen Stellen. Stets und überall ist also $\vartheta'' = \vartheta'$, oder diese beiden Lösungen sind identisch. Es ist also keine zweite Lösung ϑ'' möglich, welche von der ersten ϑ' verschieden wäre. Durch den Anfangszustand der Temperatur im ganzen Leitersystem und die Ein- bzw. Ausströmung der Wärme für die Oberfläche ist also der ganze Ablauf der Leitung vollständig eindeutig bestimmt.

Ganz analog wird der Beweis der Eindeutigkeit für den Fall, daß die Temperatur an der Oberfläche vorgeschriebene Werthe haben soll, entweder constante, oder nach Ort und Zeit in gegebener Weise veränderliche. Es mögen ϑ' und ϑ'' wieder zwei Lösungen der Differentialgleichung (11), dieser Grenzbedingungen und eines gegebenen Anfangszustandes sein. Dann ist $\vartheta = \vartheta' - \vartheta''$ eine Lösung der Differentialgleichung für den Fall, daß an der Oberfläche überall dauernd $\vartheta = 0$ sein solle, da ja ϑ' und ϑ'' beide an der Oberfläche denselben gegebenen Functionen gleich sein müssen.

Dann ist für dieses ϑ auch an der ganzen Oberfläche stets $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, und bei Anwendung von (27) auf dieses $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ verschwindet nun das zweite Integral auf der rechten Seite aus diesem Grunde. Es resultirt wieder (28), und die weiteren Schlußfolgerungen bleiben wie sie waren.

Ein dritter Fall wäre, daß für die Oberfläche Strahlung gegen eine äußere Umgebung von bestimmter Temperatur ϑ_a gegeben ist, so daß die Grenzgleichung (13) gilt. Wir nehmen wieder an, wir hätten zwei Lösungen ϑ' und ϑ'' gefunden, welche beide demselben Anfangszustand und denselben Grenzbedingungen genügen, so daß also:

$$k \frac{\partial \vartheta'}{\partial N} = h(\bar{\vartheta}' - \vartheta_a) \quad \text{und} \quad k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = h(\bar{\vartheta}'' - \vartheta_a)$$

Dann ist¹⁾

$$k \frac{\partial (\vartheta' - \vartheta'')}{\partial N} = h.(\bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}'')$$

¹⁾ Dabei kann auch ϑ_a für die Umgebung an verschiedenen Stellen der Oberfläche verschiedene Werthe haben; z. B. kann die eine Seite einer unend-

und es wäre $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ eine Lösung für den Anfangszustand: $\vartheta = 0$ zur Zeit $t = 0$ an allen Stellen; und für Ausstrahlung der Oberfläche gemäß der Gleichung:

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h \cdot \overline{\vartheta}$$

also entsprechend dem Falle der Ausstrahlung gegen Umgebung von der überall gleichen Temperatur Null.

Diese Gleichung ist auch die der Herleitung von (29) zu Grunde liegende Voraussetzung; letztere kann also auf unser jetziges ϑ angewendet werden. Es ergeben sich weiter die analogen Schlüsse wie vorhin; die in die eckige Klammer eingeschlossene Gröfse auf der linken Seite von (29) kann, wenn sie sich überhaupt verändert, nur abnehmen; zur Zeit $t = 0$ ist ϑ überall gleich Null; mithin verschwindet die eckige Klammer zur Zeit $t = 0$, und also auch immer. Folglich wird auch wie vorhin die rechte Seite gleich Null, und es muß $\partial \vartheta / \partial t$ für alle $d\tau$ verschwinden. Also bleibt ϑ überall und stets gleich Null, oder die beiden Lösungen ϑ' und ϑ'' können sich nicht von einander unterscheiden.¹⁾

Dasselbe Resultat gilt schliesslich, wenn für einzelne Stellen der Oberfläche die Wärmezufuhr oder -abfuhr, für einzelne die Temperatur, für andere Stellen Strahlung gegeben ist. In Gleichung (27) verschwinden dann für $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ diejenigen Theile des rechtsstehenden Oberflächenintegrals, welche sich auf die Stellen mit gegebenem Wärmezufuhr oder mit gegebener Temperatur beziehen; die anderen Stellen, an welchen Strahlung nach aussen stattfindet, treten in das Oberflächenintegral der linken Seite von (29) ein, so dafs an unseren Schlüssen nichts geändert wird.

Diese eindeutige Bestimmtheit ist sehr wichtig. Ich habe schon früher darauf aufmerksam gemacht, dafs für gegebene Grenz-

lichen Platte von einer Umgebung höherer Temperatur bestrahlt werden; die andere Seite gegen Umgebung von niedrigerer Temperatur ausstrahlen.

A. d. H.

¹⁾ In diesem Falle läfst sich auch folgendermafsen schliessen. Nachdem man erkannt hat, dafs die eckige Klammer auf der linken Seite von (29) immer gleich Null ist, sieht man, dafs also

$$\text{immer} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{für alle } d\tau,$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{für alle } d\omega.$$

Aus Letzterem combinirt mit Ersterem folgt, dafs überall immer $\vartheta = 0$ ist.

A. d. H.

bedingungen, aber unbestimmten Anfangszustand im Allgemeinen unendlich viele Lösungen möglich sind, welche verschiedenen Anfangszuständen entsprechen würden. Wenn wir verschiedene solche particuläre Integrale gefunden haben, müssen wir diese so zu einem allgemeineren Integral zusammenzusetzen suchen (bei nicht homogenen Grenzbedingungen in der auf Seite 44 aus einander gesetzten Weise), daß wir letzteres auch noch jedem gegebenen Anfangszustand anpassen können. Wenn das gelungen ist, so wissen wir nach dem Vorigen: es giebt nothwendig nur dieses einzige Integral, welches im vorliegenden Falle den Gang der Temperatur darstellt. Dadurch ist also dieses künftig anzuwendende Verfahren gerechtfertigt, durch welches wir zu Lösungen für gegebenen Anfangszustand und gegebene Grenzbedingungen gelangen können.

§ 18. Besondere Form der Sätze für stationäre Strömungen.

Nun will ich noch einige Sätze hinzufügen, die sich auf stationäre Strömungen beziehen. Wenn bei irgend einem leitenden System die Einströmung der Wärme an den einen Stellen, die Ausströmung an anderen gleichmäßig eine genügende Zeit hindurch unterhalten wird, so tritt ein „stationärer“ Zustand ein, bei welchem zwar die verschiedenen Punkte des Körpers verschiedene Temperatur haben, die Temperatur an jedem Punkt aber dauernd dieselbe bleibt. In solchen Fällen ist also ϑ nur Function der Coordinaten, nicht auch der Zeit. Es wird dann $\partial \vartheta / \partial t = 0$; $\partial \vartheta / \partial x$, $\partial \vartheta / \partial y$, $\partial \vartheta / \partial z$ werden ebenfalls von der Zeit unabhängig, so daß in Gleichung (27) von vornherein alle Glieder einzeln verschwinden und Nichts aus ihr gefolgert werden kann. Es bleibt aber zunächst der allgemeine Satz, der sich auf Ein- und Austritt der Wärmemengen durch die Oberfläche bezieht und durch die Gleichung (26) ausgedrückt wurde. Wird in ihr $\partial \vartheta / \partial t = 0$, so bleibt

$$\int d\omega \cdot k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = 0 \quad (30)$$

oder in Worten: bei einer stationären Wärmeströmung muß die (algebraische) Gesamtsumme der durch die Oberfläche einfließenden Wärme gleich Null sein, oder es muß fortdauernd ebenso viel Wärme einströmen als abströmt.

Auch die Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenem Zu- und Abfluß läßt sich zeigen, und zwar einfacher als sie sich im allgemeinen Falle durch die jetzt versagende Gleichung (27) beweisen

liefs. Wenn wir nämlich im GREEN'schen Satz in der Form von Gleichung (24a) einsetzen:

$$\Phi = k \cdot \vartheta \text{ und } \Psi = \vartheta$$

so wird:

$$\begin{aligned} \int d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} \\ = - \int d\omega \cdot k \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned}$$

und wenn die Differentiationen der Producte auf der linken Seite zum Theil ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ = - \int d\tau \cdot \vartheta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} \\ - \int d\omega \cdot k \cdot \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer in dem ersten Integral der rechten Seite ist wieder nach (11) gleich $c \cdot \varepsilon \cdot \partial \vartheta / \partial t$, und wir erhalten zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} \int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ = - \int d\tau \cdot \vartheta \cdot c \cdot \varepsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \int d\omega \cdot k \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \end{aligned}$$

Bei stationärer Strömung wird aber $\partial \vartheta / \partial t$ gleich Null, und es bleibt nur:

$$\int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} = - \int d\omega \cdot k \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N} \quad (31)$$

Sind nun die zu- und abgeführten Wärmemengen gegeben wie in Gleichung (14), und sind ϑ' und ϑ'' zwei Lösungen, so ist wieder

$$k \frac{\partial \vartheta'}{\partial N} = q \text{ und auch } k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = q$$

Nehmen wir analog § 17 ϑ in (31) gleich $\vartheta' - \vartheta''$, so entspricht dieses ϑ der Grenzbedingung:

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = 0$$

und es muß mit der rechten Seite von (31) auch die linke verschwinden. Sie kann dies als Summe von lauter Quadraten multiplicirt mit wesentlich positiven Factoren nur, indem die $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ einzeln für alle $d\tau$ verschwinden, d. h. ϑ muß im ganzen Körper denselben Werth haben, oder die beiden Lösungen ϑ' und ϑ'' können sich nur um eine Constante unterscheiden. Die Temperaturvertheilung ist also bestimmt bis auf eine willkürliche Constante, deren Hinzutritt als Summand in der That nichts ändert an der Störung, die nur von den Differentialquotienten der Temperatur abhängt. Werthe der letzteren selbst, wie sie in den früheren Problemen durch den gegebenen Anfangszustand bestimmt waren, sind für die stationäre Strömung bei vorgeschriebenem Zu- und Abfluß zunächst nicht gegeben. Ist aber noch der Werth der Temperatur für einen einzigen Punkt des Körpers festgegeben, so muß für diesen Punkt, und damit auch für alle anderen, die Constante verschwinden, um welche sich die beiden Lösungen ϑ' und ϑ'' unterscheiden können. Dann giebt es keine zwei verschiedenen Lösungen für die stationäre Strömung im Innern des Leiters.

Dasselbe gilt auch, wenn zweitens die Temperatur an der Oberfläche gegeben ist, bei einem stationären Zustande als Function der Coordinaten allein. Wenn dann ϑ' und ϑ'' zwei Lösungen sind, die beide an der Oberfläche dieser gegebenen Function der Coordinaten gleich sind, ist $\vartheta = \vartheta' - \vartheta''$ an der ganzen Oberfläche gleich Null, und die rechte Seite von (31) verschwindet aus diesem Grunde. Es folgt dann, wie soeben zunächst, daß ϑ' und ϑ'' sich nur durch eine Constante unterscheiden können; dann aber, da sie an der Oberfläche gleich sein müssen, daß diese Constante verschwindet, daß also die Lösung völlig bestimmt ist.

Ebenso verhält es sich auch, wenn drittens bei stationärer Strömung die Wärmezufuhr oder -Abgabe durch Ein- oder Ausstrahlung geschieht. Für zwei Lösungen ϑ' und ϑ'' wäre dann nach (13):

$$k \frac{\partial \vartheta'}{\partial N} = h \cdot (\bar{\vartheta}' - \vartheta_a) \quad \text{und} \quad k \frac{\partial \vartheta''}{\partial N} = h (\bar{\vartheta}'' - \vartheta_a)^1)$$

¹⁾ Vergl. die Anmerkung auf Seite 59. Wenn ein stationärer Wärmestrom nur durch Ein- und Ausstrahlung erhalten werden soll, muß sogar ϑ_a für die Umgebung an verschiedenen Theilen der Oberfläche des betrachteten Körpers verschiedene Werthe haben, wie in dem an jener Stelle angeführten Beispiele.

und für $\vartheta = \vartheta' - \vartheta''$ also (wie Gleichung 13a):

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial N} = h \cdot \bar{\vartheta}$$

Dies in die rechte Seite von (31) eingeführt, giebt [ähnlich wie bei (29)]:

$$\int d\tau \cdot k \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right\} + \int d\omega \cdot h \cdot \vartheta^2 = 0 \quad (32)$$

Auch hier haben wir die Summe von Quadraten multiplicirt mit positiven Factoren. Es müssen daher $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ und jetzt auch ϑ selbst für alle $d\tau$ verschwinden; es ist also an allen Orten $\vartheta' = \vartheta''$. Hier ist aber auch wieder durch die Strahlung eine Bedingung für Temperaturen selbst hinzugetreten, nämlich durch die gegebenen ϑ_a , so daß auch hier keine additive Constante willkürlich bleibt.

Ist endlich für einige Stellen der Oberfläche die zugeführte Wärmemenge oder die Temperatur gegeben, für andere Stellen Strahlung, so verschwindet für die Differenz $\vartheta = (\vartheta' - \vartheta'')$ zweier Lösungen der von dem gegebenen Zufluß oder den gegebenen Temperaturen herrührende Theil der rechten Seite von (31); der Theil der Oberfläche mit Strahlung giebt einen Beitrag, der als das zweite Integral in (32) auftritt, aus welcher Gleichung dann derselbe Beweis der Eindeutigkeit der Lösung hervorgeht.

Viertes Kapitel.

§ 19. Stationäre Strömungen in unbegrenzten Körpern.¹⁾

Die in den vorigen Kapiteln abgeleiteten allgemeinen Eigenschaften der Wärmeleitung werden uns näher vor Augen treten, wenn wir jetzt zur Betrachtung bestimmter Einzelfälle übergehen.

Das allgemeine Gesetz der Leitung, die Differentialgleichung (11), vereinfacht sich, wenn wir k nicht nur wie bisher als von der Zeit, sondern auch als von den Coordinaten unabhängig annehmen, und wenn wir, wie auf Seite 50, das Operationszeichen Δ einführen; es wird dann:

$$k \cdot \Delta \vartheta = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (33)$$

¹⁾ Nach dem Notizbuch ausgearbeitet.

Zunächst wollen wir die betrachteten homogenen Körper von vornherein als unbegrenzt ansehen, und bei jeder einzelnen Lösung von (33), die wir finden, nachträglich zusehen, welche Flächen wir uns für die Ein- bzw. Ausströmung der Wärme den Körper begrenzend denken können oder müssen. Und zwar wollen wir dieses Verfahren einschlagen bei Fällen von stationären Wärmeströmungen, bei welchen also die Temperatur nur Function der Coordinaten, nicht der Zeit ist. Es wird dann $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$ und aus (33) wird einfach

$$\Delta \vartheta = 0 \quad (34)$$

Die Functionen, welche dieser Gleichung genügen, geben Scharen von isothermen Flächen; die einer Reihe von bestimmten Temperaturen entsprechenden Isothermen-Flächen behalten ihre Lage bei den stationären Strömungen dauernd bei. Bei jeder Lösung von (34), die wir finden, können zunächst etwa irgend zwei isotherme Flächen als Oberfläche eines zwischen ihnen liegenden Körpers gedacht werden, für welchen vorgeschrieben ist, daß die eine Oberfläche auf der constanten höheren Temperatur erhalten wird und Einströmungsfläche ist, während die andere beständig auf der niedrigeren Temperatur erhalten wird und Ausströmungsfläche ist.

Eine erste Gruppe von Functionen, welche der Differentialgleichung (34) genügen, sind alle linearen Functionen der Coordinaten, da deren zweite Ableitungen einzeln verschwinden. Nimmt man an, daß ϑ nur Function einer Coordinate, etwa von x , sei, so wird

aus (34) einfach $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0$, woraus durch zweimalige Integration:

$$\vartheta = Ax + B \quad (35)$$

Dies bedeutet, daß die isothermen Flächen Ebenen sind senkrecht auf der x -Axe; daß die Temperatur (bei positivem A) von größeren zu kleineren x -Werthen fällt; daß der Temperaturabfall oder der Werth von $(d\vartheta/dx)$ überall derselbe ist; daß also auch die Dichtigkeit des überall parallel zur x -Axe gerichteten Wärmestroms allenthalben dieselbe GröÙe hat: ein Fall, wie er z. B. bei der anschaulichen Interpretation der Bedeutung des Wärmeleitungsvermögens k auf Seite 30 angenommen wurde. Dabei gilt nun, wie man nachträglich sieht, die Lösung (35) auch für den Fall, daß man nicht einen unendlichen Körper hat, sondern einen cylindrischen von beliebiger Querschnittsform, dessen Mantelfläche parallel der x -Axe ist, und umgeben von wärmeundurchlässigem Material; denn (35)

erfüllt ja die Bedingung, daß durch eine solche Grenzfläche keine Wärme hindurchtritt, vielmehr die Wärmestromung an ihr überall längs derselben verläuft. Der Cylinder kann ferner begrenzt sein von zwei senkrechten Endebenen als isothermen Flächen, deren eine die Zufuhr- die andere die Ableitungsfläche der Wärme bildet. Die willkürlichen Constanten A und B der Gleichung (35) sind dann etwa durch die gegebenen Temperaturen der beiden Endebenen bestimmt, deren eine z. B. beständig auf 100° , die andere auf 0° erhalten wird.

Verläuft der Wärmestrom in einer zu den Coordinatenachsen schrägen Richtung, so ist die allgemeinste Form des dem Wesen nach gleichen Falles

$$\vartheta = Ax + By + Cz + D$$

Andere Lösungen von (34) sind die Ausdrücke $(x^2 - y^2)$, $(y^2 - x^2)$, $(x^2 - z^2)$, wie man sogleich erkennt. Von ihnen bedeutet z. B.

$$\vartheta = x^2 - y^2$$

wie aus der Vergegenwärtigung der isothermen Flächen hervorgeht, eine Strömung die überall parallel der x - y -Ebene verläuft, von positiv und negativ unendlichen Werthen des x ausgeht und nach solchen des y hingeeht. Das ließe sich beispielshalber verwirklichen bei einer sehr großen quadratischen Säule, bei welcher das eine Paar gegenüberliegender Flächen auf einer höheren, das andere Paar auf einer niedrigeren Temperatur erhalten wird; wenn man die Schnittlinie der Diagonalfächen der Säule als x -Axe wählt, so entspricht die Temperaturvertheilung in ihrer Nähe dem obigen ϑ , oder vielmehr allgemeiner dem Ausdrucke:

$$\vartheta = A(x^2 - y^2) + B$$

Durch bloße Drehung der xy -Axen um 45° findet man aus der Lösung $(x^2 - y^2)$ als andere Form derselben, daß auch $\vartheta = xy$, und ebenso yz und xz die Gleichung (34) befriedigen.¹⁾

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß ϑ nur Function ist des Abstandes ρ von einer gegebenen Geraden, etwa der x -Axe. Die zu ihr coaxialen Kreis-Cylinder sind dann Isothermen; die

¹⁾ Die aus den Isothermen $\vartheta = A(x^2 - y^2) + B$ durch Drehung um 45° hervorgehende congruente Hyperbelschaar giebt die zu ihnen gehörigen Stromlinien an. Zu letzteren gehören auch die Coordinatenachsen selbst. In diesen kann die Platte daher zerschnitten gedacht werden; die Strömung läuft die rechtwinkligen Ecken aus, die dann Begrenzung je eines der Plattenstücke bilden. A. d. H.

Wärmeströmung geschieht radial; und zwar, wenn die inneren Cylinderflächen der höheren Temperatur entsprechen, von innen nach außen. Die Stromlinien verlaufen alle in Ebenen senkrecht zur x -Axe; durch diese Ebenen tritt also keine Wärme hindurch; jede solche Ebene kann daher als Begrenzung gegen einen Nichtleiter der Wärme gewählt werden; nimmt man zwei solche Ebenen zu Grenzflächen, so hat man das dem obigen analoge Problem für eine zunächst in zwei Dimensionen unendliche Platte: von der x -Axe ausgehende radiale Strömung. Die partielle Differentialgleichung (34) muß in unserem Falle in eine totale für $\vartheta = f(\rho)$ übergehen, wo

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{woraus} \quad \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = x \quad \text{und} \quad \rho \frac{\partial \rho}{\partial y} = y \quad \text{folgt.}$$

Es wird dann

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{x^2}{\rho^3}$$

und ebenso:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} \cdot \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{1}{\rho} - \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{y^2}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0.$$

Also:

$$\begin{aligned} A \vartheta &= \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d \vartheta}{d \rho} - \frac{d \vartheta}{d \rho} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d \vartheta}{d \rho} \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} + \frac{d \vartheta}{d \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d \rho} \left(\rho \frac{d \vartheta}{d \rho} \right) \end{aligned}$$

und an Stelle von (34) tritt also in diesem Falle

$$\frac{d}{d \rho} \left(\rho \frac{d \vartheta}{d \rho} \right) = 0 \quad (36)$$

woraus durch Integration:

$$\rho \frac{d \vartheta}{d \rho} = -A$$

$$\frac{d \vartheta}{d \rho} = -\frac{A}{\rho} \quad (36a)$$

$$\vartheta = C - A \log \rho \quad (36b)$$

A und C sind willkürliche Constanten. Wenn die Strömung von innen nach außen gerichtet sein soll, muß A positiv sein. Durch A ist, wie aus (36a) ersichtlich, der Werth von $d\vartheta/dr$, also des Temperaturgefälles und damit derjenige der Stromdichtigkeit bestimmt. In der x -Axe, also für $\varrho = 0$, wird die Richtung des Wärmestroms („radial“) unbestimmt, seine Dichtigkeit unendlich groß. Der Wärmestrom würde aus der x -Axe nach allen Richtungen hin herausdringen. Das ist physikalisch unmöglich; wir denken uns daher aus dem Körper einen (kleinen) Kreiscylinder um die x -Axe ausgespart; dann geschieht die Wärmezufuhr aus dem Innern dieses Hohlzylinders her, etwa indem seine Wände auf constanter erhöhter Temperatur erhalten werden, oder indem sich in seinem Innern ein galvanisch geprüelter Draht befindet. Ist im letzteren Falle die pro Secunde erzeugte Wärmemenge bekannt, so ist damit die Intensität des Wärmestroms und die Constante A gegeben. Die Constante C bleibt in dem letzten Falle zunächst willkürlich, entsprechend den allgemeinen Bemerkungen über stationäre Probleme auf Seite 63. Wenn aber für irgend einen anderen Cylinder vom Radius $\varrho = R$, welcher die äußere Abflußfläche der Wärme bildet, die constante Temperatur gegeben ist, etwa indem die Oberfläche dieses Cylinders durch ein Bad auf einer bestimmten niedrigeren Temperatur erhalten wird, so ist damit auch die Constante C gegeben.

Der betrachtete Fall regt weiter an zu der Annahme, daß ϑ nur Function sei des Abstandes r von einem gegebenen Punkte, etwa dem Anfangspunkte der Coordinaten, so daß Kugelflächen um ihn die Isothermen sind. In diesem Falle ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{x}{r} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{x^2}{r^3}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{dy^2} &= \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{y^2}{r^3} \\ \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} &= \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{z^2}{r^3} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta &= \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{1}{r} = \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \\ &= \frac{1}{r} \left(r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + 2 \frac{d\vartheta}{dr} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2(r\vartheta)}{dr^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

und an Stelle von (34) tritt jetzt:

$$\frac{d^2(r\vartheta)}{dr^2} = 0$$

woraus durch Integration:

$$\frac{d(r\vartheta)}{dr} = C$$

$$r \cdot \vartheta = Cr + A$$

$$\vartheta = C + \frac{A}{r} \quad (37a)$$

An diese Lösung würden sich die entsprechenden Ueberlegungen anknüpfen wie an (36a); sie brauchen nicht mehr im Einzelnen ausgeführt zu werden.

Aus den angeführten speciellen Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\vartheta = 0$ können wir sogleich allgemeinere ableiten durch lineare Superposition derselben; jede solche ist, wie wir wissen, ebenfalls wieder eine Lösung. In dieser Weise erhält man z. B. die Lösungen für eine Einströmungs- und eine Ausströmungsstelle in einer unendlichen Platte, oder in einem dreidimensionalen Leiter u. s. w.

Fünftes Kapitel.

Wärmeleitung in Stäben von begrenzter Länge.

§ 20. Differentialgleichung bei Berücksichtigung der seitlichen Wärmeabgabe.

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung von Strömungen, die im Allgemeinen nicht stationär sind, wobei aber gelegentlich auch wieder stationäre Strömungen zur Besprechung kommen. Die einfachsten der folgenden Fälle sind das Mittel gewesen, die Werthe des Wärmeleitungsvermögens für verschiedene Körper mit einander zu vergleichen und weiterhin auch sie nach Ziffern zu ermitteln.

Den Ausgangspunkt soll wieder die Differentialgleichung der Wärmeleitung in der vereinfachten Form (33) bilden:

$$k \cdot \Delta\vartheta = c \cdot s \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (33)$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Wärmebewegung nur nach

einer Richtung hin geschieht, als welche die x -Richtung genommen werde. Das kommt vor in ausgedehnten Massen, denen von einer Seite her Wärme zugeleitet wird, wie z. B. dem Erdboden durch die Sonnenstrahlen. In solchen Fällen ist also ϑ von y und z unabhängig, und die Differentialgleichung wird:

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = c \cdot \varepsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (38)$$

Aehnlich wird auch die Wärmebewegung in einem cylindrischen Stabe sein, dessen Dicke gegen die Länge verschwindet. Wenn er so dünn ist, daß wir innerhalb eines Querschnitts keine Temperaturunterschiede zu untersuchen brauchen, können wir ϑ als nur in der Längsrichtung variabel betrachten. Streng genommen ist dies nicht richtig; denn der Wärmeverlust durch Ausstrahlung der Mantelfläche bewirkt, daß das Innere des Stabes etwas wärmer ist, als die oberflächlichen Schichten. Die dadurch verursachten kleinen Temperaturunterschiede sollen aber vernachlässigt werden, so daß bei Verlegung der x -Richtung in die Längsrichtung des Stabes ϑ außer von t nur Function von x ist. Die Wärmemenge, welche durch den Mantel nach außen abgegeben wird, darf aber nicht vernachlässigt werden; denn sie ist bei dünnen Stäben mit relativ großer Oberfläche im Allgemeinen von derselben Größenordnung, wie die in der Längsrichtung des Stabes durch den kleinen Querschnitt fließenden Mengen. — Multiplicirt man die Gleichung (38) mit dem Volumenelement $d\tau$:

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} d\tau = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} d\tau \quad (38a)$$

so bedeutet die rechte Seite den Zuwachs von $d\tau$ an Wärmeinhalt während der Zeiteinheit. Die linke Seite giebt an, inwiefern dieser Zuwachs durch die in der x -Richtung stattfindende Strömung verursacht wird. Als $d\tau$ nehmen wir ein Stück des Stabes zwischen zwei sehr nahe benachbarten Querschnitten; wenn q deren überall gleiche Flächengröße ist, und dx der Abstand der beiden Querschnitte, so wird

$$d\tau = q \cdot dx$$

Die Mantelfläche dieses Volumenelementes ist gleich $p \cdot dx$, wenn p die Peripherie des Stabquerschnitts bezeichnet, welcher übrigens nicht nothwendig kreisförmig zu sein braucht. Die Umgebung, gegen welche der Stab strahlt, habe die Temperatur ϑ_a ; dann

strahlt von der Mantelfläche des Volumenelementes in der Zeiteinheit — analog wie bei Ableitung der Gleichung (13) — die Wärmemenge $h \cdot (\vartheta - \vartheta_a) \cdot p \cdot dx$ aus. Da die Temperatur eines ganzen Querschnitts als gleich betrachtet wird, kann statt $\bar{\vartheta}$ einfach die Temperatur ϑ an der betreffenden Stelle des Stabes gesetzt werden. Die dem Volumenelement $d\tau$ durch Strahlung verloren gehende Wärmemenge ist in (34a) auf der linken Seite als negativer Zuwachs hinzuzufügen, so daß wir erhalten:

$$k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot q \cdot dx - h(\vartheta - \vartheta_a) \cdot p \cdot dx = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot q \cdot dx$$

oder nach Division durch dx :

$$k \cdot q \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - h \cdot p (\vartheta - \vartheta_a) = q \cdot c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

Dies wäre die Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem dünnen Stabe unter den angegebenen Verhältnissen. Die Gleichung, welche in dieser Form durch das constante, ϑ nicht enthaltende Glied $h \cdot p \cdot \vartheta_a$ nicht homogen ist, kann homogen gemacht werden, wenn wir wie in (13a) die Temperatur der Umgebung als Nullpunkt der Skala nehmen, also $\vartheta_a = 0$ setzen, wovon die Werthe der Differentialquotienten unberührt bleiben:

$$k \cdot q \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - h \cdot p \cdot \vartheta = q \cdot c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (39)$$

Betrachten wir außer der Leitungsfähigkeit k auch das Strahlungsvermögen h und die spezifische Wärme c als Constante, so ist dies eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Integrale derselben findet man immer, wenn man die gesuchte abhängige Variable gleichsetzt einer Constanten multiplicirt mit einer Exponentialfunction der unabhängigen Variablen. Wir haben zwei unabhängige Variable, x und t ; in Bezug auf beide muß ϑ die angegebene Form haben, so daß es also dem Product zweier Exponentialfunctionen gleich zu setzen ist:

$$\vartheta = A \cdot e^{n \cdot t} \cdot e^{l \cdot x} = A \cdot e^{nt + lx} \quad (40)$$

Um die Werthe von n und l zu finden, muß die für ϑ aufgestellte Function eingesetzt werden in die Differentialgleichung (39), welche dann ergiebt:

$$k \cdot q \cdot l^2 \cdot A e^{nt + lx} - h \cdot p \cdot A \cdot e^{nt + lx} = q \cdot c \cdot \varepsilon \cdot n A e^{nt + lx}$$

Alle Glieder enthalten den gemeinsamen Factor $A.e^{nt+lx} = \vartheta$, welchen wir wegheben können:

$$k.q.l^2 - h.p = q.c.\varepsilon.n \quad (41)$$

Nur diese eine Gleichung zwischen l und n muß erfüllt sein; dann ist ϑ eine Lösung der Differentialgleichung. Es giebt also unendlich viele Werthepaare für n und l , und ihnen entsprechende Lösungen ϑ , welche auch superponirt werden können. Für ein bestimmtes Problem sind aber jedesmal außer der Differentialgleichung auch noch die Grenzbedingungen zu erfüllen; die dadurch beschränkte specielle Lösung des Problems muß immerhin bei nicht-stationären Fällen noch so allgemein sein, daß sie auch noch gegebenen Anfangszuständen angepaßt werden kann.

§ 21. Stationäre Strömung. Versuche von G. Wiedemann und Franz.

Wir wollen zuerst nach denjenigen Fällen fragen, in denen die Bewegung stationär ist. Das tritt z. B. ein bei einer häufig ausgeführten Versuchsanordnung, bei welcher ein langer Stab umgeben ist von einer Hülle H (Figur 4), die durch Abkühlung etwa mit Eis

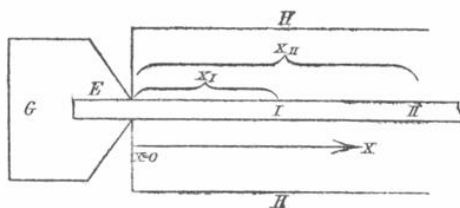


Fig. 4.

fortdauernd auf einer Temperatur von 0° gehalten wird, während gleichzeitig das herausragende Ende E des Stabes durch kochendes Wasser in einem Gefäße G beständig auf 100° erwärmt wird. Dann entsteht ein Wärmestrom vom erhitzten Ende E des Stabes aus nach dem anderen weit entfernten Ende hin. Es muß schließlich ein stationärer Zustand der Temperaturvertheilung eintreten, wenn die angegebenen Bedingungen gleichmäßig ungeändert erhalten bleiben. Dann wird ϑ von der Zeit unabhängig sein; in (39) verschwindet die rechte Seite, und aus der partiellen Differentialgleichung wird eine totale:

$$k \cdot q \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - h \cdot p \cdot \vartheta = 0 \quad (42)$$

In deren Integral (40) ist $n = 0$ zu setzen:

$$\vartheta = A \cdot e^{lx} \quad (43)$$

Aus (41) wird dann:

$$k \cdot q \cdot l^2 - h \cdot p = 0$$

oder

$$l = \pm \sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot q}}$$

Da alle Größen unter dem Wurzelzeichen ihrer Natur nach positiv sind, wird l reell; später werden wir Fälle kennen lernen, in welchen es imaginär und auch complex wird. Wir finden also zwei Werthe für l , und also auch nach (43) zwei Lösungen, in denen die Constante A verschiedene Werthe haben kann:

$$\vartheta_1 = A_1 \cdot e^{x\sqrt{h p / k q}} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = A_2 \cdot e^{-x\sqrt{h p / k q}}$$

Die Superposition beider Lösungen $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ enthält zwei willkürliche Constanten A_1 und A_2 , ist also das allgemeine Integral von (42). ϑ_1 stellt eine mit wachsendem x immer höher steigende, ϑ_2 eine fallende Temperatur dar. Zählen wir die Länge x von der Stelle ab, von welcher an in unserem speciellen Falle Wärmeabgabe durch Ausstrahlung beginnt (siehe Figur), so daß die wachsenden x mit der Richtung des Wärmestroms übereinstimmen, so muß die Temperatur in dieser Richtung abfallen und muß schließlich bei hinreichender Länge des Stabes, also bei großen Werthen von x , bis auf die Temperatur Null der umgebenden Hülle herabsinken. Diesem Temperaturverlauf entspricht ϑ_2 . [ϑ_1 würde den Fall darstellen, daß nur das andere Ende des Stabes erwärmt würde, und daß er sich in der negativen x -Richtung weithin erstreckt; in dieser Richtung strömt dann auch die Wärme und die Temperatur fiel dorthin ab bis auf Null. Die Superposition $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ würde dem entsprechen, daß beide Enden des Stabes gleichzeitig erwärmt werden.] Für unseren Versuch haben wir also:

$$\vartheta = A e^{-x\sqrt{h p / k q}}$$

Fassen wir zwei Stellen des Stabes ins Auge, für welche $x = x_1$ bzw. $= x_{II}$ ist, so sind die Temperaturen an diesen Stellen:

$$\vartheta_1 = A \cdot e^{-x_1\sqrt{h p / k q}} \quad \vartheta_{II} = A \cdot e^{-x_{II}\sqrt{h p / k q}}$$

Dann ist das Verhältniß dieser beiden Temperaturen:

$$\frac{\vartheta_I}{\vartheta_{II}} = e^{(x_{II} - x_I) \cdot \sqrt{h p / k q}} \quad (44)$$

$(x_{II} - x_I)$ ist die zwischen den beiden Punkten liegende Stablänge. Schreitet man auf dem Stabe („in arithmetischer Proportion“) um gleiche Längen $(x_{II} - x_I)$ fort, so fällt jedesmal die Temperatur in demselben Verhältniß („in geometrischer Proportion“) $\vartheta_I : \vartheta_{II}$ ab. Dieser Gang der Temperatur, dargestellt durch eine Exponentialfunction, ist durch Messungen bestätigt, welche leicht angestellt werden können durch Anlegen kleiner Thermoelemente an verschiedene Stellen des Stabes.

Durch solche Messungen kann man auch den Werth des Exponenten in der Gleichung (44) ermitteln, welcher hierzu zweckmäßiger die Form gegeben wird:

$$\log \vartheta_I - \log \vartheta_{II} = (x_{II} - x_I) \cdot \sqrt{h p / k q}$$

oder:

$$\sqrt{\frac{k}{h}} = \frac{x_{II} - x_I}{\log \vartheta_I - \log \vartheta_{II}} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \quad (45)$$

Der Abstand $(x_{II} - x_I)$, die Temperaturen ϑ_I und ϑ_{II} , die Peripherie p und die Fläche q des Stabquerschnitts lassen sich in jedem Falle messen. [Das Verhältniß p/q wird für einen kreisförmigen Querschnitt $= 2 r \pi / r^2 \pi = 2/r$.] Man kann also durch solche Versuche das auf der linken Seite der Gleichung stehende Verhältniß k/h für einen gegebenen Stab bestimmen. Versuche an verschiedenen Stäben liefern nicht ohne weiteres das Verhältniß der Werthe des Leitungsvermögens k , da für jeden derselben im Allgemeinen auch das Strahlungsvermögen h einen anderen Werth haben kann. G. WIEDEMANN und R. FRANZ¹⁾ haben in der Weise bewirkt, daß h (bei gleichen Temperaturunterschieden gegen die Umgebung) für Stäbe aus verschiedenen Substanzen denselben Werth hat, daß sie die Stäbe von ganz gleicher Größe und Gestalt herstellten und ihnen allen strahlende Oberflächen von gleicher Art gaben durch Versilbern. Die sehr dünne Silberschicht kam für die Wärmeleitung im Innern nicht in Betracht. Für einen Stab aus der Substanz α ergab dann die Anwendung von (45) auf ihre mit großer Genauigkeit ausgeführten Versuche das Verhältniß k_α/h ; für einen anderen aus der Substanz β das Verhältniß k_β/h ; und die Division beider Werthe

¹⁾ G. WIEDEMANN und R. FRANZ, Pogg. Ann. d. Physik u. Ch., Bd. 89; 1853.

dann das Verhältniß k_α/k_β . Durch solche Beobachtungen erhielten G. WIEDEMANN und FRANZ das relative Verhältniß der Leitungsfähigkeiten verschiedener Substanzen.

§ 22. Letztes Ausklingen einer anfänglichen Erwärmung.
Versuche von F. Neumann.

Wir wollen weiter den Verlauf der Temperatur in dem Stabe ermitteln bei Zuständen, die nicht stationär sind, sondern von der Zeit abhängen. Wir nehmen an, daß nach einer vorausgegangenen Wärmezufuhr solche weiterhin nicht mehr stattfindet; dann wird schließlich die Temperatur des ganzen Stabes gleich derjenigen der Hülle werden; dieser Temperatur wird sich diejenige an allen Punkten des Stabes asymptotisch nähern; n in (40) muß also negativ sein. Denn positives n würde eine mit wachsender Zeit unbegrenzt wachsende Temperatur bedeuten. Da ferner die äußere Wärmeabgabe (das Strahlungsvermögen) h in Wirklichkeit immer klein ist, stoßen wir damit auf einen Fall, in welchem aus (41) negatives l^2 folgt. Es wird also l imaginär $= i\lambda$, und die in § nach (40) auftretende Exponentialfunction der Coordinate x wird:

$$e^{lx} = e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x) \quad (46)$$

Durch die Ueberlegungen von § 13 ist uns bekannt, daß wir solche complexe Lösungen nicht zu scheuen brauchen; der reelle und der imaginäre Theil einzeln geben uns dann gleich zwei Integrale.

Der von der Zeit abhängige Temperaturzustand, den wir betrachten wollen, tritt auf bei einer von FRANZ NEUMANN (der ältere NEUMANN, Physiker in Königsberg † 1895) angegebenen Methode, welche nicht bloß relative, sondern auch absolute Werthe der Leitungsfähigkeiten zu ermitteln zuläßt. Er benutzte cylindrische Stäbe von endlicher Länge, deren Oberfläche irgend welche nur constant bleibende Beschaffenheit hatte. Ein solcher Stab wird aufgehängt an zwei möglichst dünnen und die Wärme möglichst wenig leitenden Fäden, oder auf derartige Unterlagen gestützt, und hineingebracht in einen Raum, dessen Wände auf constanter Temperatur gehalten werden. Diese wird wieder zum Nullpunkt der Skale gewählt. Im Anfang wird der Stab in irgend welcher Weise erwärmt, etwa dadurch, daß das eine Ende in eine Flamme hineingehalten wird. Die anfänglichen schroffen Temperaturdifferenzen innerhalb des Stabes werden sich dann allmählich mildern und gleichzeitig auch insgesamt Wärmeverlust durch Strahlung gegen

die Umgebung eintreten. Hierbei ist zu bemerken, daß bei sehr dünnen Stäben der Strahlungsverlust an Wärme durch die kleinen Endflächen unmerklich ist. Mit genügender Annäherung¹⁾ kann dann der Fall so behandelt werden, als ob Wärmeverlust durch die Endflächen nicht stattfindet. Allgemein ist, wie wir bei Ableitung der Gleichung (13) gesehen haben, der Wärmeverlust durch eine Oberfläche proportional dem Temperaturabfall im Innern gegen die Oberfläche hin; in Bezug auf die Endflächen stimmt letztere Richtung mit der x -Richtung überein. Also wird der Wärmeverlust durch die Endflächen in unserem Falle proportional $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$; und da er verschwindend klein ist, müssen wir an beiden Enden des Stabes dauernd:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

setzen, und nach solchen Lösungen suchen, welche dies erfüllen. Hierzu führen wir zunächst in den Werth von (40) für ϑ gemäß (46) die für $l = i\lambda$ an Stelle von e^{lx} tretenden Functionen $\cos(\lambda x)$ oder $\sin(\lambda x)$ ein. Nehmen wir für die beiden Enden des Stabes $x = 0$ und $x = L$, so ist wegen $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$ für $x = 0$ nur der $\cos(\lambda x)$ brauchbar, nicht der $\sin(\lambda x)$, und es wird also zunächst specieller:

$$\vartheta = A \cdot e^{n \cdot t} \cos \lambda x \quad (47)$$

Aber auch noch für $x = L$ muß $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$ sein, woraus

$$\sin(\lambda L) = 0$$

oder:

$$\lambda = \frac{a\pi}{L}$$

folgt, wo a irgend eine ganze Zahl ist, und L gemäß seiner Definition die Länge des Stabes. Indem wir für a mit Null beginnend die Reihe der ganzen Zahlen setzen, bekommen wir eine Reihe von Werthen λ_a , mit welchen wir in (41) eingehend die zugehörigen Werthe von n erhalten:

$$n_a = -\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} - \frac{k}{c \cdot \varepsilon} \cdot \lambda_a^2$$

¹⁾ Die genaue Theorie siehe z. B. in KIRCHHOFF's Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von M. PLANCK, p. 35. A. d. H.

also:

$$\begin{aligned} n_0 &= -\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} \\ n_1 &= -\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} - \frac{k}{c \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \\ &\dots \dots \dots \\ n_a &= -\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} - \frac{k}{c \cdot \varepsilon} \cdot \frac{a^2 \pi^2}{L^2} \end{aligned}$$

Die Superposition der entsprechenden einzelnen Lösungen ϑ ist dann:

$$\vartheta = \sum_{a=0}^{a=\infty} A_a \cdot e^{n_a t} \cos\left(\frac{a \pi}{L} x\right) \quad (48)$$

Die n_a sind alle negativ, d. h. mit der Zeit nehmen alle Glieder ab, um für $t = \infty$ alle einzeln gleich Null zu werden; schliesslich wird also $\vartheta = 0$, d. h. der Stab nimmt die als Nullpunkt angenommene Temperatur der umgebenden Hülle an. Je grösseren absoluten Werth der Exponent n_a hat, um so schneller verschwindet das betreffende Einzelglied; die Summanden mit höherer Ordnungszahl a verschwinden also schneller, als die ersten Glieder. Nach Ablauf einiger Zeit werden als bemerkbare Grösse nur übrig bleiben die Glieder, welche den kleinsten Werthen des a entsprechen. Das erste derselben, für $a = 0$, nämlich:

$$A_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} t} \quad (49)$$

entspricht einer für alle Punkte des Stabes gleichen Temperatur, deren zeitliche Abnahme von der Strahlung h abhängt. Bei dem nächsten Gliede, für $a = 1$, nämlich:

$$A_1 \cdot e^{-\left(\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} + \frac{k \cdot \pi^2}{c \cdot \varepsilon \cdot L^2}\right) t} \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (50)$$

hängt die Abnahme ausser von der Strahlung auch noch von dem inneren Leistungsvermögen k ab; es entspricht ferner einer für die verschiedenen Punkte verschiedenen Temperatur; der cosinus ist auf der einen Seite, für die kleineren x , positiv; auf der anderen, für die grösseren x , negativ. Wenn A_1 positiv ist, wäre also die Seite der kleineren x diejenige, welche zu Anfang stärker erhitzt wurde, auch weiterhin die wärmere Seite bleibt, aber ihre Temperatur mit der anderen Seite um so schneller ausgleicht, je besser das Leistungsvermögen k ist.

Wenn die höheren Glieder mit $\alpha = 2$ u. s. f. nach einiger Zeit vernachlässigt werden dürfen, würde die Temperatur durch die Uebereinlagerung der beiden ersten Glieder dargestellt werden. Für das Stabende

$$\text{bei } x = 0 \text{ würde dann: } \vartheta_0 = A_0 e^{-\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} \cdot t} + A_1 e^{-\left(\frac{h p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} + \frac{k \pi^2}{c \cdot \varepsilon L^2}\right) t}$$

$$\text{bei } x = L \text{ wird } \vartheta_L = A_0 e^{-\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} t} - A_1 e^{-\left(\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} + \frac{k \pi^2}{c \cdot \varepsilon L^2}\right) t}$$

Daraus folgen Summe und Differenz der Endtemperaturen:

$$\vartheta_0 + \vartheta_L = 2 A_0 e^{n_0 t} = 2 A_0 e^{-\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} t}$$

$$\vartheta_0 - \vartheta_L = 2 A_1 e^{n_1 t} = 2 A_1 e^{-\left(\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} + \frac{k \pi^2}{c \cdot \varepsilon L^2}\right) t}$$

Beide werden also einfache Exponentialfunctionen der Zeit. Die Temperaturen der Endflächen kann man, ohne ihnen merklich Wärme zu entziehen, leicht dadurch bestimmen, daß man sie mit dünnen Thermoelementen in Berührung bringt. Aus den letzten theoretischen Resultaten ist dann die Regel abzuleiten, daß man von Zeit zu Zeit Summe und Differenz der Temperaturen an den beiden Stabenden untersucht, und wartet, bis sich die gefundenen Werthe einfachen Exponentialfunctionen anschließen. Die Beobachtungen ergeben dann deren Exponenten n_0 und n_1 . Der Abfall der mittleren Temperatur $\frac{\vartheta_0 + \vartheta_L}{2}$ liefert die Bestimmung von n_0

und damit von h , welches uns aber nicht so sehr interessirt. Der Verlauf von $(\vartheta_0 - \vartheta_L)$ liefert aber auch n_1 , und die Differenz beider Exponenten $(n_0 - n_1)$ ergiebt den Werth von k des betreffenden Stabes für sich allein genommen, nicht verbunden mit dem Strahlungsvermögen h , und in Folge dessen auch nicht wie bei G. WIEDEMANN und FRANZ bloß relative Werthe von k für verschiedene Substanzen, sondern für deren jede eine absolute Bestimmung. Dadurch ist F. NEUMANN'S Methode praktisch sehr wichtig.

§ 23. Vollständiger Verlauf der Temperatur bei beliebig gegebenem Anfangszustand. Fourier'sche Reihen.

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, nicht nur das letzte Ausklingen der ursprünglichen asymmetrischen Erwärmung, wie es durch die Summe der beiden ersten Glieder (49) und (50) der unendlichen Reihe (48) genügend beschrieben wird, sondern den voll-

ständigen Verlauf der Temperaturvertheilung in dem Stabe anzugeben. Dazu muß die ursprüngliche, vollkommen willkürliche Temperaturvertheilung angegeben sein, die höchst unregelmäßig sein kann, wenn man z. B. mit einer Flamme zwar vornehmlich das eine Ende des Stabes, mit ihr hin- und hergehend, aber auch andere Stellen nach Belieben erhitzt hat. Fürs Erste wollen wir auch noch absehen von der Bedingung, daß für die beiden Stabenden $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$ sein muß; sondern zunächst auch andere Bedingungen für die Stabenden zulassen. Dann würden wir nach (46) auch $\sin(\lambda x)$ an Stelle von $e^{\lambda x}$ in (40) einführen können, und erhalten dann außer den Lösungen (47):

$$\vartheta = A \cdot e^{n t} \cdot \cos(\lambda x)$$

auch noch solche

$$\vartheta = B \cdot e^{n t} \sin(\lambda x) \quad (51)$$

Es könnte z. B. der Stab innerhalb der ihn umgebenden Hülle keine Enden haben; vielmehr könnten diese, ähnlich wie das eine Ende in Figur 4, S. 72, aus der Hülle herausragen und etwa dauernd auf der Temperatur Null erhalten werden. Wenn die am meisten rechts bzw. links gelegenen Stellen des innerhalb der Hülle befindlichen Stücks mit $x = 0$ und $x = L$ bezeichnet werden, muß alsdann dauernd $\vartheta = 0$ sein für $x = 0$, wodurch in diesem Falle der $\cos(\lambda x)$ unbrauchbar wird als Lösung, während $\sin(\lambda x)$ diese Bedingung erfüllt. Es würde noch hinzukommen, daß jetzt $\vartheta = 0$ sein soll auch für $x = L$, woraus wieder folgt:

$$\lambda = \frac{\alpha \pi}{L}$$

Für diese Grenzbedingungen würde die Superposition der verschiedenen Einzellösungen (51) ϑ_a für verschiedene Werte λ_a dann statt zu (48) zu einer analogen verallgemeinerten Lösung führen:

$$\vartheta = \sum_a B_a e^{n_a t} \cdot \sin\left(\frac{\alpha \pi}{L} x\right) \quad (52)$$

Wenn wir daher weiterhin vorläufig über die Grenzbedingungen gar nichts festsetzen wollen, würden wir als noch allgemeinere Lösung die Summe der Reihen (48) und (52) annehmen dürfen:

$$\vartheta = \sum_a A_a e^{n_a t} \cos\left(\frac{\alpha \pi}{L} x\right) + \sum_a B_a e^{n_a t} \sin\left(\frac{\alpha \pi}{L} x\right) \quad (53)$$

Zur Zeit $t = 0$ würde sich dann ergeben:

$$\vartheta_{t=0} = \sum_a A_a \cos\left(\frac{a\pi}{L}x\right) + \sum_a B_a \sin\left(\frac{a\pi}{L}x\right) \quad (54)$$

wo die Coefficienten A_a und B_a zunächst noch unbestimmt sind. Es fragt sich nun, können sie derartig bestimmt werden, daß diese unendliche, durch (54) angegebene Reihe jeden willkürlich gegebenen Anfangszustand der Temperaturvertheilung in dem Stabe, wie er sich durch die voraufgegangene Erhitzungsweise gebildet hat, darstellen kann? Und würde speciell in dem NEUMANN'schen Falle, wo wegen der Bedingung $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$ für $x = 0$ und für $x = L$ nur die erste Reihe von Gliedern mit den cosinus nach den Gleichungen (47) und (48) anwendbar ist, für $t = 0$ die Summe:

$$\vartheta_{t=0} = \sum_a A_a \cos\left(\frac{a\pi}{L}x\right) \quad (55)$$

durch Verfügung über die A_a jeder willkürlich gegebenen Anfangsvertheilung der Temperatur angepaßt werden können?

Es läßt sich in der That zeigen, und zwar in einfacher Weise, daß und wie die Coefficienten bestimmt werden müssen, damit die Reihen diese Aufgabe erfüllen. Ist das geschehen, so giebt die Lösung (53), im NEUMANN'schen Falle (48), den weiteren Gang des Temperaturverlaufs als Function der Zeit für jeden Punkt des Stabes.

Unsere Aufgabe ist also, eine willkürliche Function, das wäre hier $\vartheta_{t=0}$, als Function von x , wie es ganz unregelmäßig als irgend welche Vertheilung gegeben ist, darzustellen in einer Reihe von der Form (54), deren Glieder fortschreiten nach cosinus und sinus der ganzen Vielfachen eines Bogens $\left(\text{hier } \frac{\pi}{L}x\right)$, welcher der unabhängigen Variablen (x) proportional ist. Diese Aufgabe ist zuerst in klarer Weise gestellt und vollständig gelöst von FOURIER in seiner zu Anfang des 19. Jahrhunderts ausgearbeiteten Theorie der Wärmeleitung; die Reihen dieser Art sind nach ihm FOURIER'sche Reihen genannt worden und tragen auch heute noch seinen Namen. Sie finden auch in vielen anderen Gebieten der Physik Anwendung, wo es sich darum handelt gegebene willkürliche Functionen, welche durch allerlei mögliche Zufälligkeiten bestimmt sein können, für irgend eine Grenze darzustellen in einem analytischen Ausdruck, der

ihre Werthe vollständig wiedergiebt. In unserem Falle ist jene Grenze die Grenze der Zeit; in der Lehre von den Potentialfunctionen beziehen sich die Grenzwerte meist auf die Grenzen eines Körpers oder auf Flächen, für welche die Potentialfunctionen durch FOURIER'sche Reihen dargestellt werden sollen. Diese haben noch viel größere Wichtigkeit auch in ihren Einzelheiten gewonnen in der Optik und besonders in der Akustik, in der Lehre von den Wellen.

§ 24. Berechnung der Coefficienten in einer Fourier'schen Reihe.

Ich will zunächst nur zeigen, wie man gegebenen Falls die Coefficienten ihrer Glieder finden kann; dazu müssen wir gewisse Sätze der Integration von trigonometrischen Functionen ableiten. Wir bilden das Integral:

$$I = \int_a^{a+2L} \cos \left(\frac{a \pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{b \pi x}{L} \right) dx \quad (56)$$

Dabei sind a und b ganze Zahlen; a ist irgend ein unterer Werth von x ; die Integration ist zu erstrecken von ihm an bis zu einem oberen Werthe, der um $2L$ größer ist (oder in unserem besonderen Falle um die doppelte Stablänge). Für dieses Intervall durchlaufen die Argumente der beiden cosinus a mal bzw. b mal eine Periode von 2π , mindestens also eine ganze Periode, wenn a und b von Null verschieden sind. Das unbestimmte Integral wird:

$$\frac{1}{2} \int \left\{ \cos \frac{(a+b)\pi x}{L} + \cos \frac{(a-b)\pi x}{L} \right\} dx = \frac{L}{2(a+b)\pi} \sin \frac{(a+b)\pi x}{L} + \frac{L}{2(a-b)\pi} \sin \frac{(a-b)\pi x}{L} \quad (57)$$

Nun sind $(a+b)$ und $(a-b)$ auch ganze Zahlen, positive oder negative, außer wenn $a=b$ ist, in welchem Falle $(a-b)$ verschwindet; während $(a+b)$ nur dann keine positive ganze Zahl, sondern gleich Null wird, wenn $a=b=0$ ist. Von diesen Fällen vorläufig abgesehen, sind also $(a \pm b)$ ganze Zahlen, und das Integral, zwischen seinen um $2L$ verschiedenen Grenzen genommen, giebt für die Argumente der beiden sinus Werthe, die um eine ganze Anzahl von vollen Perioden verschieden sind, für die sinus selbst also an der oberen Integralgrenze denselben Werth wie an der unteren; für die

Differenz der Endwerthe also Null. Im Allgemeinen verschwindet demnach das in (56) angegebene Integral I .

Wenn aber $a = b$ ist, nimmt das zweite Glied auf der rechten Seite von (57) die unbestimmte Form Null dividirt durch Null an. Lasse ich für einen Augenblick außer Acht, daß für uns a und b ganze Zahlen sind; sondern denke ich mir vielmehr $(a - b)$ von sehr kleinen Werthen ausgehend sich der Null nähern, so wird der sinus eines sehr kleinen Bogens gleich diesem selbst, und das zweite Glied auf der rechten Seite von (53) wird:

$$\frac{L}{2(a-b)\pi} \cdot \frac{(a-b)\pi x}{L} = \frac{x}{2}$$

und dies zwischen den Grenzen a und $(a + 2L)$ genommen giebt L .

Für $a = b$ wird also: $I = L$.

Einen besonderen Ausnahmefall bildet noch derjenige, daß $a = b = 0$; dann ist direct aus (56) ersichtlich:

$$I = 2L$$

Ganz ähnliche Resultate erhält man für:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{a+2L} \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2L} \left\{ -\cos\frac{(a+b)\pi x}{L} \right. \\ &\quad \left. + \cos\frac{(a-b)\pi x}{L} \right\} dx \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Die Einzelglieder auf der rechten Seite sind hier wieder dieselben wie auf der linken von (57); nur hat das erste jetzt negatives Vorzeichen. Im Allgemeinen wird das Integral wieder gleich Null. Zwar tritt hiervon jetzt keine Ausnahme mehr ein für $a = b = 0$, wie aus der ursprünglichen Form direct ersichtlich. Aber für $a = b$ (jedoch ≥ 0) haben wir wieder dasselbe Verhalten wie vorhin, und es wird das Integral dann ebenso wieder $= L$.

Daß die Integrale (56) und (58) für $a = b$ nicht verschwinden können, sieht man direct daraus, daß sie werden:

$$\int_a^{a+2L} \cos^2\left(\frac{a\pi x}{L}\right) dx \quad \text{bezw.} \quad \int_a^{a+2L} \sin^2\left(\frac{a\pi x}{L}\right) dx$$

also Summen von nur positiven Summanden sind. Auch erkennt man ohne Rechnung, daß beide einander gleich sind, da $\cos^2$ und

$\sin^2$ für eine ganze Anzahl von vollen Perioden dieselben Werthe, nur in anderer Reihenfolge durchlaufen; und da endlich die Summe der beiden vorstehenden Integrale gleich $2L$ ist, muß also jedes den Werth L haben.

Betrachten wir endlich:

$$\int_a^{a+2L} \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_a^{a+2L} \left\{ \sin\frac{(a+b)\pi x}{L} + \sin\frac{(a-b)\pi x}{L} \right\} dx \quad (59)$$

so treten hier überhaupt keine Ausnahmen davon ein, daß das Integral verschwindet; denn für $a = b$ verschwindet schon vor der Integration das zweite Glied der rechten Seite für alle Werthe von x , welches Glied in (57) und (58) die Ausnahmen verursachte.

Wir setzen nun voraus, daß eine willkürlich gegebene Function $f(x)$, wie die Anfangsvertheilung der Temperatur $\vartheta_{t=0}$ in dem Stabe, darstellbar sei durch eine FOURIER'sche Reihe von der durch (54) angegebenen Art; daß eine solche Reihe für einen jeden Wert des x zu einem bestimmten Wert convergire, welcher dem gegebenen $f(x)$ für das betreffende x gleich wird. Unter diesen für uns noch unbewiesenen Voraussetzungen können wir auf Grund der vorhergehenden Ueberlegungen über die Integrale (56) bis (59) die Coefficienten der einzelnen Glieder folgendermaßen finden.

Zunächst ist die willkürliche Function $f(x)$, die so unregelmäßig sein kann, wie sie will, für den Fall des Stabes nur gegeben für dessen Länge, also für einen Bereich des x von der Länge L , etwa von $x = 0$ bis $x = +L$; sie sei etwa durch das eine Stück der folgenden Curve dargestellt:

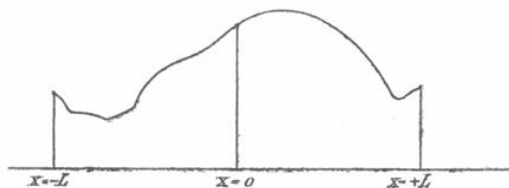


Fig. 5.

Wir denken uns dies $f(x)$ nun noch in ganz beliebiger Weise continuirlich fortgesetzt nach der Seite der negativen x , etwa bis $x = -L$. Diese continuirliche Fortsetzung unterliegt nur einer

Beschränkung: wenn wir $f(x)$ durch eine Reihe, wie die auf der rechten Seite von (54) darstellen wollen, so muß es, wie diese, eine periodische Function von x mit der Periode $2L$ sein. Wir müssen also $f(x)$ für den Bereich von $x = 0$ bis $-L$ so fortsetzen, daß der Werth für $x = -L$ derselbe ist, wie für $x = +L$; im Uebrigen ist die Fortsetzung beliebig.

Wir bilden nun das Integral:

$$\int_{-L}^{+L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx$$

wo b eine bestimmte ganze Zahl ist. Nach unseren (unbewiesenen) Annahmen können wir für $f(x)$ eine FOURIER'sche Reihe wie (54) einsetzen; dann erhalten wir:

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) \cdot \sum_a A_a \cos\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \cdot dx + \int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) \cdot \sum_a B_a \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \cdot dx$$

Was zunächst das zweite dieser Integrale betrifft, so verschwinden alle einzelnen Integrale für die verschiedenen Glieder der nach a zu nehmenden Summe, da sie alle von der Form (59) sind, wo die beliebige untere Grenze a gleich $-L$ zu setzen ist. Auch die einzelnen Integrale, in welche das erste der vorstehenden zerfällt, verschwinden, da sie von der Form (56) sind, für alle Glieder der $\sum_a$, bei denen das $a \geq b$. Es wird nur ein einziges Glied bleiben, nämlich dasjenige, in welchem die Zahl a gleich ist dem b . Dieses eine Glied der $\sum$ giebt den Werth:

$$A_b \cdot \int_{-L}^{+L} \cos^2\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx$$

und dies wird, außer für $b = 0$, wie wir sahen, gleich $A_b \cdot L$. Somit erhalten wir:

$$A_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx \quad (60)$$

In dieser Weise können wir nach einander alle Coefficienten A finden für verschiedene b , indem wir das gegebene $f(x)$ multipliciren mit $\cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right)$ und nach x integriren über eine ganze Periode von der GröÙe $2L$.

Für den Fall, daß $b = 0$ genommen wird, ist:

$$\int_{-L}^{+L} \cos^2 \left(\frac{b \pi x}{L} \right) dx = 2L$$

und wir erhalten:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx \quad (61)$$

Bilden wir weiter das Integral:

$$\int_{-L}^{+L} f(x) \sin \left(\frac{b \pi x}{L} \right) dx$$

so finden wir ganz entsprechend (60):

$$B_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cdot \sin \left(\frac{b \pi x}{L} \right) \cdot dx \quad (62)$$

während $B_0 = 0$ wird.

So kann man jeden der Coefficienten A_a und B_a einzeln finden durch Ausführung der in (60) (61) und (62) auftretenden Quadraturen. Dabei brauchen die unbestimmten Integrale keineswegs nothwendig angebar zu sein. Es kann zwar $f(x)$ algebraisch gegeben sein; aber etwa für verschiedene Theile des ganzen Intervalls von $-L$ bis $+L$ durch ganz verschiedene Formen. Doch auch nicht einmal das ist erforderlich; wenn nur in irgend einer Weise $f(x)$ bekannt ist, sei es auch nur dadurch, daß eine Tabelle gegeben ist über die Functionswerthe für eine Reihe von Einzelwerthen des x . Dann können ja immer noch jene Integrale durch Interpolation berechnet werden.

Daß alle Coefficienten endlich sind und die FOURIER'sche Reihe für uns jedenfalls nur aus endlichen Gliedern besteht, kann man wenigstens sogleich erkennen. Denn nach seiner Bedeutung als Temperatur ist $f(x) = \vartheta_{t=0}$ jedenfalls immer endlich, a fortiori seine Producte mit den echten Brüchen $\cos$ und $\sin$; ferner ist auch die Gröfse $2L$ des Integrationsintervalls endlich, und somit alle aus (60) bis (62) folgenden Coefficienten endlich.

Definirt man die A_a und B_a durch diese drei Gleichungen und bildet eine FOURIER'sche Reihe:

$$\sum_a A_a \cos \left(\frac{a \pi x}{L} \right) + \sum_a B_a \sin \left(\frac{a \pi x}{L} \right)$$

so läßt sich in der That beweisen, daß diese Reihe in allen Fällen mit einer Einschränkung convergent ist, und zwar absolut convergent, so daß sie einen vollständig bestimmten Werth giebt, welcher Werth für jedes x gleich ist dem gegebenen $f(x)$. Diesen Beweis wollen wir erst im Paragraph 26 erbringen.

Wenn nun die Coefficienten der FOURIER'schen Reihe, welche die gegebene Anfangsvertheilung der Temperatur $\vartheta = f(x)$ wie in $t=0$ Gleichung (54) darstellt, in der angegebenen Weise gefunden sind, giebt die Gleichung (53) den Verlauf der Temperatur für weitere Zeiten als Function von t und x an.

§ 25. Besonderheiten der Reihen, welche nur die Cosinus oder nur die Sinus enthalten.

Kehren wir zu dem Problem des NEUMANN'schen Stabes zurück, so war für diesen die Aufgabe zu lösen, eine FOURIER'sche Reihe, welche wie (55) nur die cosinus enthält, anzupassen dem für die Länge des Stabes, also von $x = 0$ bis $x = L$, willkürlich gegebenen Anfangszustand. In diesem besonderen Falle gilt nun bei der Fortsetzung des $f(x)$ für negative x , wie sie in Fig. 5 auf Seite 83

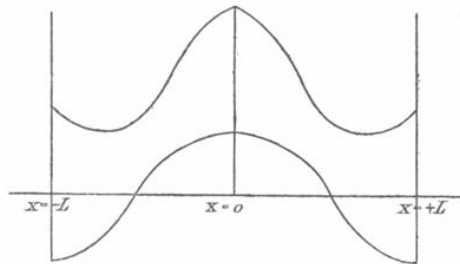


Fig. 6.

ausgeführt wurde, eine Bedingung, die daraus folgt, daß nur die cosinus auftreten. Wir müssen nämlich dann die Function in der Weise fortsetzen, daß wir ihr für negative x dieselben Werthe geben, wie für die absolut genommen gleich großen positiven x , wie folgende Fig. 6 (obere Curve) zeigt; nur dann kann sie als Summe lediglich von cosinus-Gliedern dargestellt werden. Im Uebrigen geschieht dann die Bestimmung der Coefficienten A aus dem gegebenen Anfangszustande gerade so wie früher in dem allgemeineren Falle; und nach vollzogener Bestimmung kennt man aus (48) den weiteren Verlauf der Temperaturen für NEUMANN's Aufgabe vollständig.

Der Coefficient A_0 ist nach (61) gleich dem Mittelwerth der Function für die volle Periode, der im Allgemeinen von Null verschieden sein wird, wie aus der vorstehenden Figur ersichtlich ist. Aus ihr ist ebenso auch anschaulich, daß im Allgemeinen der Coefficient A_1 nicht verschwindet; er entsteht nach (60) durch Multiplication der Function mit $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ und Integration — (unterhalb der Curve $f(x)$ ist in der Fig. 6 der $\cos$ eingetragen). — Das Product $f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ hat für gleich- und entgegengesetzte Werthe von x denselben Werth; im Allgemeinen ist also das Integral über dieses Product von $-L$ bis $+L$ von Null verschieden; in dem gezeichneten Falle erhält es offenbar einen positiven Werth. Die Multiplication mit dem sinus dagegen würde auf beiden Seiten entgegengesetzt gleiche Werthe des Productes mit $f(x)$ ergeben und daher nothwendig für alle Coefficienten B nach (62) den Werth Null.

In dem anderen besonderen Falle, für welchen die Gleichungen (51) und (52) gelten würden, würde aus letzterer zur Ausgangszeit folgen:

$$\vartheta_{t=0} = \sum_a B_a \sin\left(\frac{a \pi x}{L}\right) \quad (63)$$

und es muß eine solche Reihe sich ebenfalls einer Anfangsvertheilung der Temperatur anpassen lassen, die in diesem Falle für $x = 0$ und für $x = L$ den Werth Null, dazwischen aber irgend welchen will-

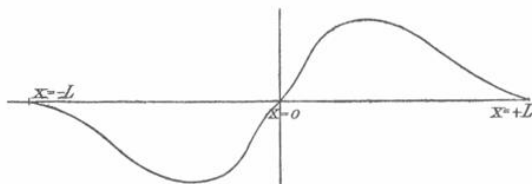


Fig. 7.

kürlich gegebenen Verlauf hat. In diesem Falle folgt für die Fortsetzung nach der negativen Seite der x daraus, daß nur die sinus auftreten, eine andere Vorschrift: wir müssen uns $f(x) = \vartheta_{t=0}$ für negative x so fortgesetzt denken, daß wir ihm Werthe geben, welche denen für die gleich großen positiven x entgegengesetzt gleich sind, wie in folgender Fig. 7. Auch hier sieht man anschaulich, welche der Coefficienten, A oder B , verschwinden, welche nicht. Multiplicirt man $f(x)$ mit $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, so hat bei positivem x das Product $f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

denselben Werth und dasselbe Vorzeichen, wie für gleiches, aber entgegengesetztes x : es wird also im Allgemeinen B_1 von Null verschieden sein, während alle A verschwinden, auch A_0 , welches gleich dem Mittelwerthe für eine volle Periode wäre.

Ob man nun in verschiedenen Fällen der Anwendung den Verlauf der gegebenen Function durch eine Reihe von cosinus, oder durch eine von sinus darstellen kann, hängt von den Vorschriften für die Enden $x=0$ und $x=L$ bei dem jedesmaligen physikalischen Problem ab. Durch eine Reihe von cosinus und sinus kann man jede continuirliche Function für ein bestimmtes Intervall darstellen. Im Allgemeinen ergibt die Berücksichtigung der Grenzbedingungen, welche Art der Darstellung als zweckmäfsigste gewählt werden kann.

Uebrigens werden wir in § 30 noch bei einer zweiten Gelegenheit auf die Darstellung beliebig vorgeschriebener Functionen durch FOURIER'sche Reihen zurückkommen; und zwar handelt es sich dort um willkürlich gegebene Functionen der Zeit.

§ 26. Beweis der Convergenz der Fourier'schen Reihen.¹⁾

Wir wollen nun noch den Beweis nachholen, dafs die FOURIER'schen Reihen auch wirklich convergiren, und zwar nach den vorgeschriebenen Werthen der gegebenen Function hin. Zunächst rufen wir uns in die Erinnerung, dafs man zwei Klassen von convergenten Reihen unterscheidet:

1. Absolut convergente Reihen. Entweder:

- a) die Reihe besteht aus lauter positiven oder lauter negativen Gliedern und hat eine endliche und bestimmte Summe, oder:
- b) sie besteht aus theils positiven, theils negativen Gliedern; die positiven Glieder für sich bilden eine Reihe von der Art (1a); ebenso die negativen für sich allein genommen. Dann ist die Summe auch der ganzen Reihe endlich, und die Reihenfolge der Glieder gleichgültig. Dieselbe Bedingung kann auch in der Weise formulirt werden: die Summe der absoluten Werthe aller Glieder mufs endlich sein.

2. Bedingt convergente Reihen. Bei ihnen ist die Summe der positiven Glieder für sich genommen unendlich; ebenso die der negativen. Durch Aenderung der Reihenfolge, in welcher

¹⁾ Nach dem Notizbuch ausgearbeitet. A. d. H.

ich die Glieder summire, kann ich dann zu jedem beliebigen Werthe der Summe kommen.

Zur Entscheidung über bedingte und unbedingte Convergenz dient folgendes Kennzeichen. Es sei R_n der absolute Werth des n^{ten} Gliedes einer Reihe, C eine bestimmte, endliche, angebbare Constante, ε eine positive Gröfse. Wenn von einem bestimmten Gliede ab für alle folgenden Glieder:

$$R_n < \frac{C}{n^{1+\varepsilon}}$$

so ist die Reihe absolut convergent. Denn ich kann dafür auch schreiben, wenn s eine Integrationsvariable ist:

$$R_n < \frac{C}{n^{1+\varepsilon}} \int_{n-1}^n ds \quad \text{oder} \quad R_n < C \int_{n-1}^n \frac{ds}{s^{1+\varepsilon}}$$

In dem Intervall zwischen $(n-1)$ und n ist s stets kleiner als n . Ich vergrößere also den Werth des Bruches unter dem Integrationszeichen, wenn ich s schreibe statt n . Es ist mithin a fortiori:

$$R_n < C \int_{n-1}^n \frac{ds^\varepsilon}{s^{1+\varepsilon}} \quad \text{oder} \quad R_n < C \cdot \overbrace{\left(-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{s^\varepsilon} \right)}^{s=n}_{s=n-1}$$

$$R_n < \frac{C}{\varepsilon} \left[\frac{1}{(n-1)^\varepsilon} - \frac{1}{n^\varepsilon} \right]$$

Ebenso wird dann auch:

$$R_{n+1} < \frac{C}{\varepsilon} \left[\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right]$$

u. s. f.

Durch Addition von n auf einander folgenden solchen Ungleichungen ergibt sich:

$$\sum_n^{n+n} R_n < \frac{C}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{(n-1)^\varepsilon} - \frac{1}{(n+n)^\varepsilon} \right]$$

Ist nun, wie vorausgesetzt, ε positiv (wenn auch noch so klein), so verschwindet für $n = \infty$ der zweite Bruch in der Parenthese auf der rechten Seite, und es wird:

$$\sum_n^\infty R_n < \frac{C}{\varepsilon (n-1)^\varepsilon}$$

C und ε sollten endliche angebbare Gröſsen sein; die rechte Seite ist also endlich. Wesentlich war im Beweis ferner, daſs ε positiv ist; in diesem Falle ist also die Summe der absoluten Werthe R_n aller Glieder vom n ten an endlich. Da nun die Summe der endlichen Zahl der dem n ten Gliede vorhergehenden Glieder sicher endlich ist, so ist in diesem Falle, wie oben behauptet, die Reihe absolut convergent.

Wäre aber $\varepsilon = 0$, so würde C/ε unendlich werden; und wäre ε negativ, so würde $1/(a+n)^\varepsilon$ für $n = \infty$ nicht nur nicht verschwinden, sondern ebenfalls unendlich werden. In beiden Fällen kann nicht geschlossen werden, daſs $\sum_n R_n$ unterhalb eines bestimmten endlichen Werthes bleibt. Die Bedingung:

$$R_n < \frac{C}{n^{1+\varepsilon}}$$

bedeutet in Worten, daſs die Glieder im Nenner eine höhere als die erste Potenz der Ordnungszahl tragen müssen; oder daſs sie schneller abnehmen müssen als die minus ersten Potenzen der Ordnungszahlen. Thun sie das, so ist, wie bewiesen, ihre Summe absolut convergent.

Wie verhält sich nun die FOURIER'sche Reihe dem angegebenen Kriterium gegenüber? Nach (60) und (62) waren ihre Coefficienten:

$$A_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx \quad \text{und} \quad B_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx$$

In der FOURIER'schen Reihe selbst sind diese Coefficienten zu multipliciren mit:

$$\cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) \quad \text{bzw. mit} \quad \sin\left(\frac{b\pi x}{L}\right)$$

also mit Factoren, deren absoluter Werth stets ≤ 1 ist. Betrachten wir daher statt der FOURIER'schen Reihe selbst die Reihe ihrer Coefficienten A_b und B_b , so convergirt erstere a fortiori absolut, wenn dies für letztere nachgewiesen ist.

Wir denken uns die Theil-Reihe der B_b mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt, zur Theil-Reihe der A_b addirt und je zwei Glieder mit gleicher Ordnungszahl b zusammengefaſst; dann erhalten wir Exponentialfunctionen mit imaginären Exponenten; das Operiren mit solchen ist bedeutend einfacher als das mit den trigonometrischen Functionen. Die auftretenden Exponentialfunctionen lauten:

$$\cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) + i \sin\left(\frac{b\pi x}{L}\right) = e^{\frac{ib\pi x}{L}}$$

Wir bilden zunächst:

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) e^{\frac{ib\pi x}{L}} \right) = \frac{df}{dx} e^{\frac{ib\pi x}{L}} + f(x) \cdot \frac{ib\pi}{L} \cdot e^{\frac{ib\pi x}{L}}$$

woraus durch Multiplication mit dx und Integration von $-L$ bis $+L$:

$$\frac{f(x) \cdot e^{\frac{ib\pi x}{L}}}{\substack{x=+L \\ x=-L}} = \int_{-L}^{+L} \frac{df}{dx} e^{\frac{ib\pi x}{L}} dx + \frac{ib\pi}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{\frac{ib\pi x}{L}} dx \quad (64)$$

Indem die Integration auf der linken Seite ausgeführt wurde, ist stillschweigend vorausgesetzt, daß $f(x)$ zwischen $-L$ und $+L$ stetig ist. Anderenfalls ist das Intervall der Integration zu teilen und es sind auch noch die Zwischenwerthe von $f(x)$ an den Sprungstellen zu berücksichtigen. Wir nehmen zuerst an, daß $f(x)$ in der That im ganzen Intervall stetig sei.

Ferner ist, wie auf Seite 84 (oben) aus einander gesetzt, $f(x)$ periodisch mit der Periode $2L$; dasselbe trifft für die Exponentialfunction zu; also werden die Werthe für die obere und die untere Grenze auf der linken Seite der letzten Gleichung einander gleich, und es wird:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{\frac{ib\pi x}{L}} dx = - \frac{1}{ib\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{df}{dx} e^{\frac{ib\pi x}{L}} dx$$

Trenne ich nun auf beiden Seiten reelles und imaginäres, so finde ich:

$$A_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx = - \frac{1}{b\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{df}{dx} \cdot \sin\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx \quad (65)$$

und einen analogen Ausdruck für die Coefficienten B_b .

Wenn nun $\frac{df}{dx}$ überall endlich (oder höchstens integrirbar unendlich, siehe Seite 47) und stetig oder nur an einzelnen Stellen unstetig ist, so kann ohne weiteres noch einmal partiell integrirt werden, und es wird:

$$A_b = \frac{L}{b^2 \pi^2} \cdot \frac{\frac{df}{dx} \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right)}{\substack{x=+L \\ x=-L}} - \frac{L}{b^2 \pi^2} \int_{-L}^{+L} \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right) dx \quad (66)$$

Bilde ich $\frac{df}{dx}$ aus dem Ausdrucke (54)

$$f(x) = \sum_a A_a \cos\left(\frac{a\pi}{L}x\right) + \sum_a B_a \sin\left(\frac{a\pi}{L}x\right)$$

so ist offenbar, daß auch $\frac{df}{dx}$ eine nach x periodische Function von der Periode $2L$ ist. Also verschwindet wieder das erste Glied auf der rechten Seite, wenn $\frac{df}{dx}$ stetig ist. Physikalisch ist aber der Fall sehr wohl möglich, daß $\frac{df}{dx}$ Sprünge macht; z. B. wenn die Curve für die Temperatur als Ordinate zu x als Abscisse zwar durchaus continuirlich ist, aber eine Ecke bildet. In diesem Falle ist in dem ersten Gliede der rechten Seite von (66) für eine solche Ecke, die etwa bei $x = \xi$ liege, das Intervall zu unterbrechen:

$$\frac{L}{b^2\pi^2} \left\{ \frac{\frac{df}{dx} \cdot \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right)}{x = -L} + \frac{\frac{df}{dx} \cdot \cos\left(\frac{b\pi x}{L}\right)}{x = \xi} \right\}$$

Es bleiben dann in A_b Glieder, die das Quadrat der Ordnungszahl b im Nenner tragen. Eine Reihe von solchen A_b ist aber, wie wir sahen, absolut convergent.

Ist nun aber auch noch $\frac{df}{dx}$ überall stetig, so verschwindet das erste Glied der rechten Seite von (66) völlig; auf das allein noch übrig bleibende Integral kann nochmals partielle Integration angewendet werden, und es treten in A_b nur Glieder auf, die mindestens die dritte Potenz der Ordnungszahl b im Nenner tragen; die Reihe convergirt also noch schneller. Führt man in dieser Weise fort, so sieht man: je mehr weitere Differentialquotienten von $f(x)$ noch stetig sind, um so schneller convergirt die Reihe der A_b .

Alles über die Coefficienten A_b Gesagte gilt offenbar ebenso für die B_b . A fortiori gilt es für die Glieder der FOURIER'schen Reihe selbst, in welcher die Coefficienten A und B noch multiplicirt sind mit cosinus und sinus.

Wir haben also das Resultat: wenn nur die darzustellende Function $f(x)$ selbst stetig ist, convergirt die FOURIER'sche Reihe absolut, einerlei ob die Ableitungen von $f(x)$ stetig sind; sie con-

vergirt um so schneller, je weiter hinauf die Ableitungen von $f(x)$ ebenfalls stetig sind.

In dem Falle aber, daß $f(x)$ selbst Sprünge macht, verschwindet die linke Seite von (64) nicht; sondern es bleiben die Beiträge von der Unterbrechung der Integration an der Discontinuitätsstelle. Diese Beiträge treten dann auch neben dem Integral auf der rechten Seite von (65) mit dem Factor $\frac{1}{b\pi}$ auf; auf sie erstreckt sich nicht

diejenige Umformung durch partielle Integration, welche zu (66) führt. Es bleiben dann also in A_b solche Glieder, die die erste Potenz der Ordnungszahl b im Nenner enthalten; eine Reihe von solchen ist aber, wie wir sahen, nicht absolut convergent.

Es ist in der That von vornherein klar, daß an den Sprungstellen selbst, an denen die Function zwei Werthe hat, sie nicht durch eine Reihe dargestellt werden kann, die zu einem Werth hin convergirt. Sind solche Discontinuitätsstellen vorhanden, so convergirt die FOURIER'sche Reihe aber auch an allen anderen Stellen nicht mehr absolut, wie soeben bewiesen. Die Coefficienten A_b und B_b treten in den FOURIER'schen Reihen mit den Cosinus und

Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi x}{L}$ multiplicirt auf, welche theils positiv,

theils negativ sind. Wenn daher auch die FOURIER'schen Reihen für Functionen mit Sprungstellen zwar nicht absolut convergent sind, so können sie doch bedingt convergent sein. In der That stellen dann die FOURIER'schen Reihen noch bis zu beliebiger Nähe an die Sprungstelle heran die gegebenen Functionswerthe richtig dar, wie weiter unten gezeigt werden soll. Jedoch muß dann die Summation der Glieder in der Reihenfolge geschehen, wie sie durch die Ordnungszahlen a vorgeschrieben ist; es dürfen aber nicht Glieder mit höherer Ordnungszahl vorweggenommen werden zwischen die mit niederer. Diese Vorschrift hat physikalisch keinen Sinn; denn es kann niemals in den physikalischen Bedingungen eine Bestimmung liegen für die Ordnung, in welcher man die Glieder der Reihe addiren muß. Man sieht deshalb zunächst noch nicht ein, weshalb man die FOURIER'sche Reihe, wenn sie nur bedingt convergirt, nicht mit anderer Reihenfolge der Glieder summiren solle, wodurch man einen anderen Werth für ihre Summe erhalten würde.

Auch über diese Schwierigkeit kommt man hinweg wenn man sich klar macht, was aus den in gegebenen Anfangszuständen etwa auftretenden Discontinuitäten im weiteren Verlaufe der Erscheinung wird. Bei der Temperatur kann z. B., wie bei dem auf Seite 34

bereits erwähnten Falle, daß ein kalter und ein warmer Körper plötzlich mit einander in Berührung gebracht werden, im ersten Augenblick ein Temperatursprung anzunehmen sein; aber sobald nur ein Augenblick des Austausches durch Leitung vorübergegangen ist, ist die Temperatur schon continuirliche Function der Coordinaten. Dann könnte man so vorgehen, daß man diese Temperaturvertheilung ganz unmittelbar hinter dem ersten Augenblick als gegebenen Anfangszustand betrachtet. Da in diesem dann die Temperatur keine Discontinuitäten mehr darbietet, muß dann auch die sie darstellende FOURIER'sche Reihe absolut convergiren. Analytisch ausgedrückt: Wenn wir in der FOURIER'schen Reihe für ϑ , Gleichung (54), $t=0$

die Coefficienten berechnen für Anfangszustände mit Unstetigkeiten, so ist zwar diese Reihe nicht absolut convergent. Betrachten wir die Reihe (54) aber als Grenzfall von (53) für sehr kleine, aber doch von Null verschiedene Werthe von t , so ist die darzustellende Function stetig, und entsprechend muß auch die Reihe absolut convergent sein für jeden noch so kleinen Werth von t , wenn er nur nicht absolut gleich Null ist. [Daß in der That die durch (53) definirten Reihen unter allen Umständen absolut convergent sind, und zwar infolge des Hinzutritts der Exponentialfunction $e^{n^2 t}$ zu den Gliedern der FOURIER'schen Reihe, werden wir im nächsten Paragraphen noch direct zeigen. Und zwar gilt das für jeden positiven, wenn auch noch so kleinen Werth der Zeit t . A. d. H.] Mit dem Grenzwert, den diese Reihe für unendlich kleines t liefert, muß der Werth der bedingt convergirenden Reihe bei t absolut $= 0$ übereinstimmen; dadurch sind die Zweifel über deren Werth gehoben.

Mit der Bedingung für die absolute Convergenz hängt auch die schon auf Seite 84 aufgestellte Vorschrift zusammen, daß

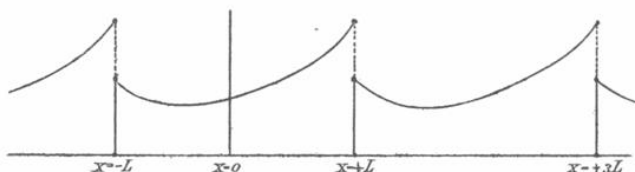


Fig. 8.

das $f(x)$, wie dort in Figur 5 gezeichnet, über die halbe Periode von $x = 0$ bis $x = L$ hinaus auf der Seite der negativen x so fortgesetzt wird, daß es zu Anfang und am Ende der Periode von $2L$

dieselben Werthe hat. Wenn das nicht der Fall wäre, wie in folgender Fig. 8, so würde $f(x)$, wenn wir seine Werthe durch Wiederholung der Periode nach beiden Seiten hin fortsetzen, an den Stellen $x = -L$, $x = +L$, u. s. f. jedesmal einen Sprung machen. Dann würde es auch nicht durch eine absolut convergente FOURIER'sche Reihe darstellbar sein; wohl aber, wenn es jener Vorschrift gemäß fortgesetzt wird, und auch sonst keine Unstetigkeitsstellen in $f(x)$ vorhanden sind. Aus entsprechenden Gründen musste in Anknüpfung an Gleichung (63) für die Functionen, die allein durch Sinus darstellbar sein sollten, verlangt werden, daß sie am Ende jeder halben Periode den Werth Null annehmen, wenn wenigstens die Reihe absolut convergiren soll.

§ 27. Beweis der richtigen Darstellung gegebener Functionen durch Fourier'sche Reihen.¹⁾

Wir haben nun bewiesen, daß in der Mehrzahl der physikalisch vorkommenden Fälle die FOURIER'schen Reihen absolut convergiren; und daß in den Ausnahmefällen, in denen sie nur bedingt convergiren, sie als Grenzfall von absolut convergenten Reihen betrachtet werden können. Es fragt sich aber noch, ob die Reihe mit den Coefficienten, wie wir sie fanden, auch gerade zu den vorgeschriebenen Werthen von $f(x)$ hin convergirt. Es soll hierfür der von Sir WILLIAM THOMSON angegebene Beweis erbracht werden, der zugleich zeigt, daß auch in den Fällen bedingten Convergirens der FOURIER'schen Reihen sie in der Reihenfolge der Ordnungszahlen summirt den richtigen Werth geben.

Für die Coefficienten A_a und B_a setzen wir ihre Werthe nach (60), (61), (62) ein; nennen aber die Integrationsvariable in ihnen s ; dann wird also behauptet, es sei:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds + \sum_{a=1}^{a=\infty} \left\{ \frac{1}{L} \cos\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \cdot \int_{-L}^{+L} f(s) \cos\left(\frac{a\pi s}{L}\right) ds \right\} + \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \cdot \int_{-L}^{+L} f(s) \sin\left(\frac{a\pi s}{L}\right) ds \right\} \quad (67)$$

Wir fassen zuerst den Fall ins Auge, daß die nach a zu nehmenden Summen absolut convergent sind. Die Integrale sind ebenfalls

¹⁾ Wie der vorige Paragraph nach dem Notizbuch ausgearbeitet. A. d. H.

Summen, deren Werth von der Reihenfolge der Summation unabhängig und ein ganz bestimmter endlicher ist, wenn:

$$\int_{-L}^{+L} f(s) ds$$

endlich ist, wenn also der Mittelwerth von $f(s)$ endlich ist, was in den physikalischen Problemen immer erfüllt ist. Daher kann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht werden, und die rechte Seite von (67) wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \left[1 + 2 \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{a\pi x}{L} \cos \frac{a\pi s}{L} + \sin \frac{a\pi x}{L} \sin \frac{a\pi s}{L} \right\} \right] \\ = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \left[1 + 2 \sum_{a=1}^{\infty} \cos \frac{a\pi(x-s)}{L} \right] \end{aligned} \right\} (67a)$$

In dieser Form läßt sich die Summirung der Reihe wirklich ausführen und ergibt in der That den Werth $f(x)$; die Ableitung gilt dann aber zunächst nur für den Fall der absoluten Convergenz. Um den Fall der bedingten Convergenz von vorneherein mit zu umfassen, fügte Sir WILLIAM THOMSON in jedes Glied einen Factor ein, der die Reihe absolut convergent macht, und den er schließlich wieder gleich 1 setzen kann. Es sei ε ein positiver echter Bruch. Dann setzen wir analog (67):

$$\left. \begin{aligned} f(x, \varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds + \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \cos \left(\frac{a\pi x}{L} \right) \cdot \varepsilon^a \cdot \int_{-L}^{+L} f(s) \cdot \cos \left(\frac{a\pi s}{L} \right) ds \right\} \\ + \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \sin \left(\frac{a\pi x}{L} \right) \cdot \varepsilon^a \cdot \int_{-L}^{+L} f(s) \cdot \sin \left(\frac{a\pi s}{L} \right) ds \right\} \end{aligned} \right\} (68)$$

Wir müssen dann beweisen, daß das so definirte $f(x, \varepsilon)$ für $\varepsilon = 1$ gleich $f(x)$ wird. — Die beiden in (68) vorkommenden Summen nach a sind absolut convergent, selbst wenn $f(s)$ Discontinuitätsstellen hat; denn:

$$\frac{1}{L} \cdot \cos \left(\frac{a\pi x}{L} \right) \cdot \int_{-L}^{+L} f(s) \cdot \cos \left(\frac{a\pi s}{L} \right) ds$$

ist unter allen Umständen kleiner als:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(s) \cdot ds$$

wofür wir C schreiben wollen. C ist aber endlich, wenn nur, wie vorauszusetzen, $f(s)$ endlich (oder selbst integrirbar unendlich) ist, mag letzteres auch discontinuirlich sein. Die in (68) vorkommenden Summen nach a sind also kleiner als:

$$\sum_{a=1}^{\infty} C \varepsilon^a$$

oder a fortiori kleiner als:

$$\sum_{a=0}^{\infty} C \varepsilon^a$$

oder, da $0 < \varepsilon < +1$, auch kleiner als:

$$C \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

Durch Einfügung der Factoren ε^a sind also die Reihen jedenfalls absolut convergent geworden.¹⁾

¹⁾ Die Einfügung der Factoren ε^a entspricht ganz dem, daß wir nicht den Augenblick $t = 0$, sondern einen unendlich wenig späteren betrachten. Wie wir im vorigen Paragraphen auf Seite 94 sahen, sind dann bereits alle Discontinuitäten, die ursprünglich in $f(x)$ vorhanden gewesen sein können, verschwunden. An Stelle der Reihe (54) tritt dann (53), aber für sehr kleine Werthe von t . Die Glieder von (53) enthalten die Factoren $e^{n_a t}$, wo nach den der Gleichung (48) vorangeschickten Definitionsgleichungen:

$$n_a = n_0 + (n_1 - n_0) a^2$$

Es wird also:

$$e^{n_a t} = e^{n_0 t} \cdot e^{(n_1 - n_0) a^2 t}$$

$e^{n_0 t}$ ist ein von der Ordnungszahl unabhängiger Factor, mit dem alle Glieder der ganzen Reihe in gleicher Weise multiplicirt sind, so daß er an der Convergenz nichts ändert. Ferner ist $(n_1 - n_0) = -\frac{k}{c \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\pi^2}{L^2}$ negativ; also $e^{(n_1 - n_0) t}$ für endliche t kleiner als 1, und convergirt, wenn wir schliesslich $t = 0$ werden lassen zum Werthe 1, wie obiges ε . Es wäre also:

$$e^{(n_1 - n_0) a^2 t} = \varepsilon^{a^2}$$

Diese Factoren, die in (53) hinzutreten, erhöhen aber wegen des Exponenten a^2 die Convergenz der Reihe (54) noch stärker, als die Factoren ε^a , die wir in (68) gegenüber (67) hinzugefügt haben, und die diese Reihe jedenfalls schon absolut convergent machten. Es folgt also a fortiori, daß (53) absolut convergent ist für jeden noch so kleinen Werth der Zeit t . In diesem Sinne ist also die Hinzufügung der Factoren ε^a in physikalischer Beziehung dem Verfahren analog, daß wir nicht von vornherein den Moment $t = 0$ betrachten, sondern t von kleinen Werthen anfangend erst am Schlusse der Betrachtung verschwinden lassen.

A. d. H.

Ebenso wie wir vorhin in (67) die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen konnten, dürfen wir dies also auch in (68) thun, und erhalten in derselben Weise jetzt:

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \left[1 + 2 \sum_{a=1}^{\infty} \varepsilon^a \cdot \cos \frac{a \pi (x-s)}{L} \right]$$

und indem wir $2 \cos \omega = e^{i\omega} + e^{-i\omega}$ benutzen:

$$\begin{aligned} f(x, \varepsilon) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \cdot \left[1 + \sum_{a=1}^{\infty} \varepsilon^a \cdot e^{\frac{a \pi i (x-s)}{L}} + \sum_{a=1}^{\infty} \varepsilon^a e^{-\frac{a \pi i (x-s)}{L}} \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \cdot \left[-1 + \sum_{a=0}^{\infty} \varepsilon^a \cdot e^{\frac{a \pi i (x-s)}{L}} + \sum_{a=0}^{\infty} \varepsilon^a e^{-\frac{a \pi i (x-s)}{L}} \right] \end{aligned}$$

Nun ist auch für complexe z :

$$\sum_{a=0}^n z^a = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

und wenn der Modul von z kleiner als 1 ist:

$$\sum_{a=0}^{\infty} z^a = \frac{1}{1 - z}$$

Bei den in der letzten Form von $f(x, \varepsilon)$ vorkommenden Summen ist ε der Modul, also in der That kleiner als 1, und es wird mithin:

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \left[-1 + \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot e^{\frac{\pi(x-s)}{L} i}} + \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot e^{-\frac{\pi(x-s)}{L} i}} \right]$$

Die eckige Klammer unter dem Integralzeichen wird:

$$\begin{aligned} & -1 + \frac{2 - \varepsilon \cdot \left\{ e^{\frac{\pi(x-s)}{L} i} + e^{-\frac{\pi(x-s)}{L} i} \right\}}{1 - \varepsilon \cdot \left\{ e^{\frac{\pi(x-s)}{L} i} + e^{-\frac{\pi(x-s)}{L} i} \right\}} + \varepsilon^2 \\ &= -1 + \frac{2 - 2 \varepsilon \cos \frac{\pi \cdot (x-s)}{L}}{1 - 2 \varepsilon \cos \frac{\pi(x-s)}{L} + \varepsilon^2} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2 + 4 \varepsilon \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{2L}} \end{aligned}$$

Dies eingesetzt wird:

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds \cdot \frac{(1 - \varepsilon) \cdot (1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + 4\varepsilon \sin^2 \frac{\pi(x-s)}{2L}}$$

Lasse ich nun ε sich der 1 nähern, so verschwindet der Integrandus, ausser wenn der Nenner des Bruches ebenfalls unendlich klein ist, d. h. wenn s unendlich wenig von x verschieden ist. Von dem ganzen Integrationsintervall liefert also nur das unendlich kleine Gebiet, wo s sehr nahe $= x$ ist, einen von Null verschiedenen Beitrag; es ist dann auch $f(s)$ nahe gleich $f(x)$ und kann s gegenüber in dem sehr kleinen Gebiet als constant betrachtet werden; ferner wird der Sinus des sehr kleinen Argumentes gleich dem Bogen; und bei Vernachlässigung von Gröfsen, die gegen $(1 - \varepsilon)$ und $(x - s)$ unendlich klein höherer Ordnung sind, wird:

$$\lim_{\varepsilon=1} f(x, \varepsilon) = \frac{f(x)}{2L} \int_{-L}^{+L} ds \cdot \frac{2 \cdot (1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \frac{\pi^2(x-s)^2}{L^2}}$$

Da bei ε nahe $= 1$ doch nur die Werthe von s sehr nahe bei x etwas zum Integral beitragen, kann die Integration auch von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden. Setze ich ferner:

$$\frac{\pi(s-x)}{L(1-\varepsilon)} = \xi$$

so wird:

$$\lim_{\varepsilon=1} f(x, \varepsilon) = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{f(x)}{\pi} \cdot \frac{\xi = +\infty}{\xi = -\infty} \text{ arc tg } \xi$$

und schliesslich:

$$\lim_{\varepsilon=1} f(x, \varepsilon) = f(x)$$

Damit ist also bewiesen, dass die FOURIER'sche Reihe in der That zu den gegebenen Functionswerten hin convergirt. Der Beweis beruht wesentlich auf der Eigenschaft, dass der nach s zu integrende Ausdruck:

$$\frac{1 - \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2 + \frac{\pi^2(s-x)^2}{L^2}}$$

für $s = x$ ein Maximum hat $= \frac{1}{1 - \varepsilon}$; dass dieses Maximum um so gröfser ist, je näher $\varepsilon = 1$ ist; dass aber der Werth des von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Integrals unabhängig ist von ε und auch für $\varepsilon = 1$

denselben Werth behält. Der Beweis gilt auch in dem Falle, daß $f(x)$ Discontinuitäten aufweist; nur darf beim Uebergange vom $f(x, \varepsilon)$ zu $\lim_{\varepsilon=1} f(x, \varepsilon)$ unter dem Integralzeichen nicht mehr $f(s) = f(x)$ gesetzt werden für dasjenige $x = x_1$, für welches $f(x)$ den Sprung macht. Vielmehr muß dann an dieser Stelle das Intervall der Integration nach s getheilt werden. Für die Werthe von s kleiner als x_1 tritt dann $f(x_1 - \delta)$ vor das Integralzeichen; für die Werthe von s größer als x_1 dagegen $f(x_1 + \delta)$, wo δ eine kleine Gröfse. Es wird dann:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=1} f(x_1, \varepsilon) &= \frac{f(x_1 - \delta)}{L} \int_{-L}^{x_1} ds \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \frac{\pi^2 (x_1 - s)^2}{L^2}} \\ &+ \frac{f(x_1 + \delta)}{L} \int_{x_1}^{+L} ds \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \frac{\pi^2 (x_1 - s)^2}{L^2}} \\ &= \frac{f(x_1 - \delta)}{\pi} \cdot \frac{\overbrace{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{L}}^{\frac{x=0}{x=-\infty}}}{\frac{x=0}{x=-\infty}} + \frac{f(x_1 + \delta)}{\pi} \cdot \frac{\overbrace{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{L}}^{\frac{x=+\infty}{x=0}}}{\frac{x=+\infty}{x=0}} \\ &= \frac{f(x_1 - \delta) + f(x_1 + \delta)}{2} \end{aligned}$$

Für eine Sprungstelle liefert die FOURIER'sche Reihe also den Mittelwerth der beiden Functionswerthe. Wir wissen, daß FOURIER'sche Reihen, die Functionen mit Sprungstellen wiedergeben sollen, nicht absolut convergente Reihen sind; summirt man die Glieder aber, wie in vorstehendem Beweis, in der Reihenfolge der Ordnungszahlen, so giebt die Summe auferhalb der Sprungstellen auch dann noch die vorgeschriebenen Functionswerthe richtig wieder, und in der Sprungstelle selbst den Mittelwerth der beiden Functionswerthe.

Sechstes Kapitel.

Temperaturwellen in einem Medium, dessen ebene Endfläche wechselnd erwärmt wird.

§ 28. Lösung des Problems mit Berücksichtigung der seitlichen Wärmeabgabe bei Stäben.

In einem weiteren interessanten und wichtigen Fall haben wir im Wesentlichen auch nur Leitung in einer geraden Richtung,

können also die Differentialgleichung (39) anwenden, in welcher, wenn äußere Wärmeabgabe nicht stattfindet, $h = 0$ gesetzt werden kann. Letzteres würde zutreffen bei einem Körper, der in allen zur Richtung des Wärmestroms senkrechten Seitenrichtungen, unseren bisherigen y - und z -Richtungen, unendlich ausgedehnt ist. Begrenzt sei dann der Körper nur von einer freien Oberfläche, einer Ebene senkrecht zur x -Richtung, etwa der Ebene $x = 0$, an welcher von außen her Temperaturschwankungen hervorgebracht werden können. Von dieser Außenfläche erstreckt sich der Körper nach der positiven x -Richtung hin ebenfalls bis zu sehr großen Entfernungen. Dies wäre Alles der Fall bei den oberflächlichen Schichten der Erde, bei welchen tägliche und jährliche Temperaturschwankungen der Außenfläche durch die Sonnenstrahlen bewirkt werden; in Folge dessen werden bis zu einem gewissen Grade auch die tieferen Schichten erwärmt. Diese Form der Wärmebewegung spielt eine große Rolle in der Geologie und in der Physik der Erde, weil aus ihr Schlüsse gezogen werden können auf das Leitungsvermögen der Erde.

Außerdem hängt in den wesentlichen Punkten mit demselben Leitungsproblem zusammen eine Methode, welche von A. J. ÅNGSTRÖM¹⁾ gebraucht wurde zu Untersuchungen des Leitungsvermögens von Stäben. Er benutzte einen sehr langen Stab in einer Anordnung, welche derjenigen von G. WIEDEMANN und FRANZ (siehe Fig. 4, Seite 72) ganz gleich ist bis auf den Punkt, daß das aus der Hülle H herausragende Ende E des Stabes abwechselnd in gleichen Zwischenräumen höheren und tieferen Temperaturen ausgesetzt wird, indem man es z. B. eine Minute lang mit siedendem Wasser, eine zweite Minute lang mit Eis in Berührung bringt, und damit weiter wechselt in denselben regelmäßigen Zwischenzeiten. So erzeugt man an dem äußeren Ende eine Reihe von Temperaturschwankungen, die von ihm her eindringen in den Stab hinein, wie in dem anderen Falle in die Tiefe der Erde. Sie pflanzen sich, wie wir sehen werden, in der Form von Temperaturwellen fort, die aber in ihrer Amplitude sehr schnell abnehmen. ÅNGSTRÖM bestimmte für seine Stäbe aus Messung der Wellenlänge, die durch gegebenes Tempo hervorgebracht wird, und aus dem Abnahmegrad der Amplitude die beiden Constanten: k die der inneren Leitung und h die der Ausstrahlung.

Beide Fälle des Temperaturverlaufs sind gegeben durch die

¹⁾ A. J. ÅNGSTRÖM, Pogg. Ann. d. Physik u. Ch. Bd. 114, 1861; Bd. 118, 1863; Bd. 123, 1864.

Differentialgleichung (39), und da bei ÅNGSTRÖM's Methode äußere Wärmeabgabe stattfand, soll der Allgemeinheit halber h zunächst nicht $= 0$ gesetzt werden. Als Nullpunkt der Temperatur ist in (39) die constante Temperatur ϑ_a der Hülle genommen. Da ϑ jetzt eine periodische Function der Zeit sein soll, muß das n im Exponenten der Lösung (40) imaginär werden; setzen wir also:

$$n = i \nu$$

dann wird:

$$e^{nt} = e^{i \nu t} = \cos(\nu t) + i \sin(\nu t)$$

Für $x = 0$, also in der Außenfläche, wird:

$$\vartheta_{x=0} = A (\cos(\nu t) + i \sin(\nu t)) \quad (69)$$

$\vartheta_{x=0}$ kann gleich dem reellen, oder gleich dem imaginären (durch i dividirten) Theile oder gleich einer Superposition beider gesetzt werden.

Es wird in der That, wie vorgeschrieben, $\vartheta_{x=0}$ eine periodische Function der Zeit; und zwar ist eine Periode vollendet, wenn das Argument νt der trigonometrischen Functionen um 2π , oder wenn t um:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \quad (70)$$

gewachsen ist. Für die periodische Erwärmung und Abkühlung der Außenfläche ist also T die „Schwingungsdauer“ und ν die „Schwingungszahl“ (aber in 2π Zeiteinheiten).

Um das in (40) vorkommende l zu berechnen, müssen wir in (41) $n = i \nu$ einführen, wodurch wir erhalten:

$$l^2 = \frac{h \cdot p}{k \cdot q} + \frac{i \cdot \varepsilon \nu}{k} i$$

Die rechte Seite bringen wir auf die Form:

$$\sigma^2 (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) = \sigma^2 e^{2i\beta}$$

indem wir setzen:

$$\frac{h \cdot p}{k \cdot q} = \sigma^2 \cos 2\beta \quad \frac{c \cdot \varepsilon \nu}{k} = \sigma^2 \sin 2\beta$$

woraus folgt:

$$\sigma^2 = + \sqrt{\left(\frac{h \cdot p}{k \cdot q}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \varepsilon \cdot \nu}{k}\right)^2} \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{c \varepsilon \nu q}{h \cdot p} \quad (71)$$

Dann können wir die Wurzel aus dem complexen Werth von l^2 ziehen und finden:

$$l = \sigma \cdot e^{i\beta} = \sigma (\cos \beta + i \sin \beta)$$

wo:

$$\sigma = \pm \sqrt[4]{\left(\frac{h \cdot p}{k \cdot q}\right)^2 + \left(\frac{c \varepsilon v}{k}\right)^2} \quad (71a)$$

oder der kürzeren Schreibweise halber:

$$l = m + i\mu$$

wo:

$$m = \sigma \cos \beta \quad \text{und} \quad \mu = \sigma \sin \beta \quad (72)$$

Wir erhalten also für ϑ aus (40):

$$\begin{aligned} \vartheta &= A e^{nt + lx} = A e^{i\nu t + (m + i\mu)x} \\ &= A e^{mx + i(\mu x + \nu t)} \\ &= A e^{mx} \cdot [\cos(\mu x + \nu t) + i \sin(\mu x + \nu t)] \end{aligned}$$

Damit haben wir zunächst zwei Lösungen mit zwei verschiedenen willkürlichen Constanten A und B :

$$\begin{aligned} \vartheta &= A e^{mx} \cos(\mu x + \nu t) \\ \text{und} \quad \vartheta &= B e^{mx} \sin(\mu x + \nu t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vartheta &= A e^{mx} \cos(\mu x + \nu t) \\ \vartheta &= B e^{mx} \sin(\mu x + \nu t) \end{aligned}} \right\} (73)$$

Wenn ich noch setze, was immer möglich ist:

$$A = C \sin \gamma \quad B = C \cos \gamma$$

wo C und γ zwei an Stelle von A und B tretende willkürliche Constante sind, so wird die Superposition der beiden einzelnen ϑ :

$$\vartheta = C e^{mx} \sin(\mu x + \nu t + \gamma) \quad (74)$$

Für $x = 0$ wird speciell:

$$\vartheta_{x=0} = C \sin(\nu t + \gamma) \quad (75)$$

Die Werte von $\vartheta_{x=0}$ schwanken zwischen $+C$ und $-C$ hin und her; C ist also die Amplitude der Temperaturoscillationen an der Grenzfläche. Durch γ ist, wie ersichtlich, die Phase innerhalb einer Periode bestimmt, in welcher Phase sich ϑ zu dem willkürlich festzusetzenden Anfangspunkt der Zeit, $t = 0$, befindet. Das Integral (74) entspricht dem Falle, daß die durch (75) gegebene periodische Temperatur des Endes wie eine einfache Sinusfunction mit der Zeit

verändert wird. Der Mittelwerth von $\vartheta_{x=0}$ ist Null, oder, nach der in (39) festgesetzten Annahme des Nullpunkts ist jener Mittelwerth gleichzusetzen der Temperatur ϑ_a der Hülle, gegen welche der Stab strahlt. Bei (74) und (75) würden wir also anzunehmen haben, daß zwar ursprünglich (etwa für $t = -\infty$) irgend welche Temperaturdifferenzen des Stabes in sich und gegen die Hülle vorhanden gewesen sein können, daß diese allein genommen sich aber nach dem Satz vom Ausgleich der Unterschiede (§ 16) bis zur constanten Temperatur $\vartheta_a = 0$ ausgeglichen hätten, so daß nur noch durch die Wirkung der künstlichen periodischen Erwärmungen der Fläche $x = 0$ überhaupt Abweichungen von dieser Mitteltemperatur auftreten.

Der in (74) auftretende sinus fällt unter die allgemeine Form einer Function von $(x + at)$, wo a ein von x und t unabhängiger Coefficient ist. Dies sieht man sogleich, wenn man das Argument in der Weise: $\mu(x + \frac{v}{\mu}t) + \gamma$ schreibt. Solche Ausdrücke bedeuten, wie gezeigt werden soll, ein System von neben einander liegenden Functionswerthen, welche bei wachsender Zeit fortschreiten mit der Geschwindigkeit a , in unserem Falle $= \frac{v}{\mu}$, und zwar in der negativen x = Richtung, wenn der Werth von a positiv ist. Das Argument $(x + at)$ bleibt nämlich ungeändert, wenn t um τ wächst, und gleichzeitig x um ξ abnimmt in einem solchen Verhältnis, daß $\xi = a\tau$. Es wird dann also auch:

$$f[x - \xi + a(t + \tau)] = f(x + at)$$

Derselbe Functionswerth, der zur Zeit t an der Stelle x vorhanden ist, ist also zur späteren Zeit $(t + \tau)$ an der Stelle $(x - \xi)$ vorhanden, wenn $\xi = a\tau$ ist. Dies gilt für beliebige Werthe von τ , wenn nur bei wachsendem τ zugleich ξ wächst und zwar stets proportional τ mit der Geschwindigkeit $\frac{\xi}{\tau} = a$. Der ins Auge gefasste Functionswerth schreitet also ungeändert in der negativen x -Richtung mit constanter Geschwindigkeit fort. Dasselbe gilt für den Werth der Function bei jedem beliebigen x ; alle neben einander liegenden Functionswerthe rücken als Ganzes von übrigens unveränderter Form vor nach der negativen x -Richtung mit der Geschwindigkeit a . Hätten wir eine Function von $(x - at)$, so rückt deren Werthsystem mit der Geschwindigkeit a nach der positiven x -Richtung fort.

Solche Functionen von $(x \pm at)$ treten vielfach in der theoretischen Physik auf, besonders in der Akustik, wo sie elastische Verschiebungen

der kleinsten Theilchen bedeuten. Hier handelt es sich jetzt um Aenderungen der Temperatur, welche in analoger Weise fortlaufen vom Ort ihrer Erregung aus.

Ist allgemein die Function von $(x \pm at)$ eine periodische, z. B. eine trigonometrische, so ist sie zu einer bestimmten Zeit t eine periodische von x , die dann mit wachsender Zeit fortschreitet. Das bedeutet bei einer Wasseroberfläche Wellen, ebenso auch in der Luft Schallwellen, und zwar solche, welche Tönen entsprechen. In beiden Fällen bedeutet die Function mechanische Verrückung ponderabler Theilchen. In unserem Falle haben wir ebenfalls eine solche periodische Function:

$$\sin [\mu(x + at) + \gamma] \quad \text{wo} \quad a = \frac{v}{\mu} \quad (76)$$

welche sich auf den Zustand der „Warmheit“ bezieht, und finden also eine wellenförmige Vertheilung der Temperatur, welche mit der Geschwindigkeit a fortrückt. Die Strecke, nach welcher sich bei festgehaltener Zeit t die Functionswerthe in der x -Richtung wiederholen, nennt man die Wellenlänge λ . Für zwei Stellen, deren x -Werthe sich um λ unterscheiden, müssen die Werthe von μx sich um 2π unterscheiden, damit der Sinus für beide denselben Werth habe; es ist also:

$$\mu \cdot \lambda = 2\pi \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\mu} \quad (77)$$

woraus in Verbindung mit $a = \frac{v}{\mu}$ und (70) $T = \frac{2\pi}{v}$ die fundamentale Beziehung $\lambda = a \cdot T$ aller Wellenbewegungen hervorgeht.

Die Dauer T einer Periode für $\vartheta_{x=0}$ muß für einen bestimmten speciellen Fall gegeben sein oder auch nach (70) der Werth von v . Mit v hängen dann auch die in der Lösung (74) auftretenden Größen m und μ zusammen, indem vermöge (71) zunächst v eingeht in σ und β , dann diese durch (72) in m und μ .

Das allgemeine Argument $(x \pm at)$ ist in unserem ϑ :

$$x + \frac{v}{\mu} \cdot t$$

wo nach (72) $\mu = \sigma \sin \beta$. Wie aus (71) ersichtlich, ist $\tan 2\beta$ gleich dem Product von Größen, die ihrem Wesen nach sämmtlich positiv sind; 2β kann also zwischen 0 und $\pi/2$ liegend gewählt werden (man könnte ihm auch einen um ein beliebiges Vielfaches von π verschiedenen Werth beilegen); dann wird also auch $\sin \beta$ positiv; μ hat also dasselbe Vorzeichen wie σ ; nach (71a) kann σ aber

positiv oder negativ sein. Je nachdem wir σ positiv bzw. negativ wählen, haben wir eine in der negativen bzw. positiven x -Richtung fortschreitende Temperaturwelle. Wenn wir festsetzen, wie bei dem Stabe in Figur 4 auf Seite 72 geschehen, daß das abwechselnd erwärmte oder abgekühlte Ende, oder daß bei der Erde ihre Oberfläche dem x -Werthe Null entspricht, und daß der Stab oder die Erdmasse sich nach der Seite der steigenden x hin erstreckt, so kommt für uns nur die nach letzterem fortschreitende Welle in Betracht; wir müssen also σ negativ wählen.

Wenn unsere Lösung (74) von der Form wäre:

$$\vartheta = C \sin(\mu x + \nu t + \gamma)$$

würde sie eine Temperaturwelle von der Amplitude C bedeuten, die ungeändert fortrückt. Zu dem Sinus tritt aber noch der Factor:

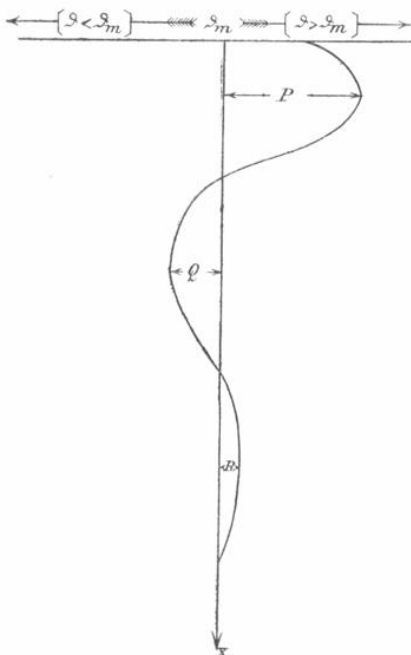


Fig. 9.

hinzu, in welchem m nach (72) dasselbe Vorzeichen hat wie σ ; bei unseren Festsetzungen also negatives. Die Amplitude der Wellen, welche für $x = 0$ gleich C ist, bleibt also nicht constant; sondern nimmt beim Vorücken der Welle zu größeren positiven x -Werthen ab in demselben Verhältniß wie die Exponentialfunction e^{mx} . Die Temperaturwellen erlöschen also allmählich, während sie fortschreiten wie folgende graphische Darstellung veranschaulicht (Figur 9) und zwar um so schneller, je größer der absolute Werth von m oder nach (72)

von $\sigma \cos \beta$ ist. Wenn wir nun zunächst den Fall des Stabes von ÅNGSTRÖM näher betrachten, so ist nach (71) sowohl $\cos \beta$, wie auch der absolute Werth des σ von dem Coefficienten h der seitlichen Strahlung abhängig, und zwar beide in der Weise, daß sie mit h wachsen. Je stärker also die Seitenflächen des Stabes ausstrahlen, um so größer ist die Dämpfung der fortlaufenden Wellen.

§ 29. Das Eindringen der jährlichen und täglichen Temperaturoscillationen in den Erdboden hinein.

Der zuletzt besprochene Theil der Dämpfung fällt fort, wenn wir die Fortpflanzung der Temperaturoscillationen in das Innere des Erdbodens hinein verfolgen, welcher als eine nach allen Seiten hin sehr ausgedehnte Schicht angesehen werden kann. Setzen wir entsprechend das $h = 0$, so wird nach (71):

$$\sigma = -\sqrt{\frac{c \cdot \varepsilon \cdot \nu}{k}} \quad \operatorname{tg} 2\beta = \infty$$

also $2\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$; $\sin \beta = \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und nach (72) der Abnahmekoeffizient:

$$m = \mu = -\sqrt{\frac{c \cdot \varepsilon \cdot \nu}{2k}} \quad (78)$$

Ferner nach (76) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (absoluter Werth):

$$a = \frac{\nu}{\mu} = \sqrt{\frac{2k\nu}{c \cdot \varepsilon}} \quad (79)$$

und die Wellenlänge (absoluter Werth) nach (77):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{2k}{c \cdot \varepsilon \cdot \nu}} \quad (80)$$

Die Temperaturschwankungen der Erdoberfläche hervorgebracht durch die Sonnenwärme haben nun eine Hauptperiode von der Dauer eines Jahres; dazu aber kommen noch die kleinen täglichen Oscillationen; beide rücken in die Tiefe hinein fort, indem sie sich ohne gegenseitige Störung superponiren. Die Superposition dieser beiden und auch irgend welch anderer Wellen würde aus (74) zu einer Lösung von folgender Form führen:

$$\vartheta = \sum_{\nu} C e^{m x} \sin (\mu x + \nu t + \gamma) \quad (81)$$

wo für jedes ν die zugehörigen Werthe von m und μ durch (78) gegeben, die C und γ dagegen zunächst willkürlich sind. Für $x = 0$ wird:

$$\vartheta_{x=0} = \sum_{\nu} C \sin (\nu t + \gamma) \quad (82)$$

Der Mittelwerth jedes einzelnen Gliedes der letzten Summe ist Null; dies ist also zunächst auch der Mittelwerth von $\vartheta_{x=0}$. Der Null-

punkt der Skala kann jetzt aber noch beliebig gewählt werden; denn die Hülle von der Temperatur ϑ_a , die bei ÅNGSTRÖM's Stab zum Nullpunkt genommen wurde, giebt es ja jetzt nicht. Entsprechend kann bei unserem jetzigen Problem die Mitteltemperatur ϑ_m der Ebene $x = 0$ ganz verschiedene Werthe haben. Und zwar wird dieser Werth abhängen von den ursprünglichen etwa zur Zeit $t = -\infty$ vorhandenen Temperaturverhältnissen, von deren Ausgleich her bis zur Zeit $t = 0$ eine überall gleiche und constante Mitteltemperatur ϑ_m herrühren würde. Dieses ϑ_m kann jetzt als Nullpunkt der Skale genommen werden. Dessen Wahl kann aber auch noch frei bleiben; denn in der Summe (82) kann ich ein Glied annehmen für $\nu = 0$ oder unendlich große Periodendauer, welches Glied dann von der Zeit unabhängig wird:

$$\vartheta_m = C_0 \sin \gamma_0 \quad (83)$$

und die mittlere Temperatur der freien Erdoberfläche bedeutet. Für dieses Glied in (82) würde in (81) ein Glied auftreten, in dem wegen $\nu = 0$ auch $m = 0$ und $\mu = 0$ wird, welches Glied also auch für alle anderen Werthe von x dasselbe constante ϑ_m ergibt.

Aus (78) ist nun ersichtlich, daß Wellen mit verschiedenen Werthen von ν auch verschiedene Werthe des m haben. Und zwar je größer ν ist, das heißt nach (70) je schneller die Schwankungen auf einander folgen, um so größer ist ihr Dämpfungscoefficient m beim Eindringen in die Erde. Allgemein werden also bei gleichzeitiger Erregung von Wärmeoscillationen verschiedener Periode an der Oberfläche diejenigen Wellen, welche von den langsamer auf einander folgenden ausgehen, weiter in die Tiefe eindringen. In welchem Verhältnisse die langsamen Oscillationen tiefer eindringen, als die schnellen erkennt man am einfachsten, wenn man auch noch die jedesmalige Wellenlänge λ ins Auge faßt. Diese ist nach (80) um so kleiner, je größer ν ist; und zwar ist dabei für verschiedene ν das Product $\lambda \mu$ oder nach (78) auch $\lambda \cdot m$ constant und sein Werth, da m negativ ist, gleich -2π . Von $x = 0$ bis $x = \lambda$ bis $x = 2\lambda$ u. s. f. nimmt daher der in der Amplitude auftretende Factor e^{mx} ab von 1 bis $e^{m\lambda} = e^{-2\pi}$ bis $e^{2m\lambda} = e^{-4\pi}$ u. s. f. Diese Abnahmeverhältnisse sind also unabhängig von ν ; oder Oscillationen von verschiedener Periode nehmen im gleichen Verhältniß ab für jede Wellenlänge, um welche sie weiter in die Tiefe der Substanz eindringen. Dabei ist aber die Wellenlänge um so größer, je länger die Dauer einer Periode ist. Der Zahlenwerth von $e^{-2\pi}$ ist gleich $1/535$; in diesem Verhältniß nimmt also die Stärke eines Temperatur-

maximums (P in Figur 9) bis zu dem im Boden nächst tieferen (R in Figur 9) ab. Die Abnahme auf eine halbe Wellenlänge beträgt $e^{-\pi} = 1/23$; der absolute Werth des P vorangegangenen nächst tieferen Minimums Q beträgt also nur $1/23$ von P . Die Abnahme ist also eine sehr starke und wir werden in keinem Falle im Stande sein, viele Wellen in das Innere des Erdbodens (und noch weniger in das Innere eines Stabes) hinein zu beobachten. Allgemein ergibt sich nun zunächst aus den vorhergehenden Ueberlegungen das Resultat, daß bei beliebiger Superposition von Wellen verschiedener Periode beim Eindringen in das Innere der Substanz schließlicly nur noch die Schwankungen von der längsten Periode merkbar sind, so daß dort der Verlauf der Temperatur einer einfachen Sinusschwingung entspricht, welche im Falle des Erdbodens eine jährliche Periode hat. In noch größerer Tiefe werden auch diese unmerkbar und es bleibt nur das ϑ_m von (83), die mittlere Temperatur der Erdoberfläche, die theils durch die gesammte Sonnenstrahlung, theils durch die aus dem Erdinnern seit Jahrtausenden in gleichmäßigem Strome nach der Oberfläche geleitete Wärme bedingt ist.

Es war schon im 17. Jahrhundert im Keller des Pariser Observatoriums beobachtet worden, daß man in seinen tieferen Theilen, zu denen kein Luftwechsel von außen gelangt, eine constante Temperatur hat, welche gleich der mittleren des Jahres ist.¹⁾

Ueber das Eindringen der oberflächlichen Wärmeschwankungen in das Innere des Erdbodens liegen Beobachtungen vor, namentlich von FORBES in Edinburgh²⁾ und von QUETELET in Brüssel.³⁾ Nach dem letzteren beträgt die halbe Wellenlänge für die jährliche Schwankung etwa $8\frac{1}{2}$ m; die ganze etwa 17 m. Zu derseben Zeit, zu welcher nämlich an der Oberfläche das sommerliche Temperaturmaximum eintritt, herrscht in einer Tiefe von $8\frac{1}{2}$ m das auf $1/23$ abgeschwächte Minimum des vorhergehenden Winters, und das vor einem Jahre an der Oberfläche vorhandene Sommer-Maximum ist bis auf 17 m in die Tiefe eingedrungen, aber mit einer auf $1/535$ verminderten Stärke der Schwankung, so daß von ihm nur durch sehr lange fortgesetzte Beobachtungen noch etwas merkbar ist. Man erhält in solchen Tiefen, wenn keine Störungen durch ein-

¹⁾ Vergl. S. GÜNTHER, Geophysik, 2. Aufl. Bd. 1, 1897; Seite 328.

²⁾ J. D. FORBES, Some experm. on the temperature of the earth at diff. depths and in diff. soils near Edinburgh. Edinb. Transact. Vol. XVI, 1849.

³⁾ A. QUETELET, Mémoire sur les variations diurnes, et annuelles de la température et en particulier de la température terrestre à différentes profondeurs; Mém. de l'Acad. de Bruxelles t. X, 1837; t. XIII, 1841.

dringendes Wasser vorhanden sind,¹⁾ außerordentlich nahe constant die mittlere Jahrestemperatur des Ortes. Die angegebenen Zahlen für die Länge der jährlichen Temperaturwelle gelten für festen trockenen Erdboden; in lockerem Boden ist die Wärmeleitung noch schlechter, k und damit die Wellenlänge λ kleiner, m größer, so daß die jährliche Schwankung in ihm in noch geringerer Tiefe schon verschwindet.

Für die tägliche Periode ergibt sich nach (80) eine Wellenlänge, welche sich zu derjenigen der Jahresschwankung umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus ν , oder also auch nach (70) direct wie diejenigen aus den Perioden verhalten, also wie $1:\sqrt{365}$ oder nahe wie $1:19$. Die Wellenlänge der Tagesschwankung wird daher $\frac{17}{19}$ m oder rund 1 m, in guter Uebereinstimmung mit den directen Beobachtungen. In der Tiefe von einem Meter ist die Tagesschwankung daher auch schon ebenso unmerklich geworden, wie die Jahresschwankung in etwa 17 m.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ist nach (79) für schnellere Schwankungen größer als für langsame. Damit hängt zusammen, daß die Wellenlänge nicht, wie bei elastischen Wellen proportional der ersten Potenz einer Oscillationsdauer ist; sondern, wie soeben in der Rechnung benutzt, proportional deren Quadratwurzel.

Ebenso wie ÅNGSTRÖM aus experimenteller Bestimmung von Abnahmekoeffizient m und Fortpflanzungsgeschwindigkeit a oder Wellenlänge λ für gegebene Periode, also für gegebenes ν , die Werte von k und h für seine Stäbe berechnen konnte, ebenso kann man aus der Beobachtung von m oder a oder λ für den Erdboden dessen Wärmeleitungsvermögen k berechnen. Bei dieser Berechnung müssen die zu Grunde gelegten Größen (m , a oder λ) in denselben Einheiten ausgedrückt werden, in welchen man k erhalten will. Aus (78) (79) oder (80) erhält man dann in absolutem Maße, wie ersichtlich, nicht k selbst, sondern den Quotienten $\left(\frac{k}{c}\right)$ oder $\left(\frac{k}{c \cdot \varepsilon}\right)$.²⁾ Von diesen wissen wir in der That schon durch die Ueberlegungen auf Seite 34, daß sich ihre Natur vollständig auf absolutes Maß zurückführen läßt, ohne daß über Größenart von Temperatur und Wärmemenge etwas bekannt zu sein braucht.

¹⁾ Und wenn man von der Zunahme der Temperatur im Erdinnern absieht.

²⁾ Das „Temperaturleitvermögen“; vergl. die Anm. auf S. 33.

Wollen wir die Beobachtungen QUETELET's zur Berechnung benutzen, so haben wir nach (80):

$$\sqrt{\frac{k}{c \cdot \varepsilon}} = \frac{\lambda \sqrt{\nu}}{2 \pi \sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{k}{c \cdot \varepsilon} = \frac{\lambda^2 \cdot \nu}{8 \pi^2}$$

Nach (70) war:

$$\nu = \frac{2 \pi}{T}; \quad \text{also:}$$

$$\frac{k}{c \cdot \varepsilon} = \frac{\lambda^2}{4 \pi T}$$

Nehmen wir die jährliche Periode, so fand QUETELET $\lambda = 17$ m; wählen wir 1 m zur Längeneinheit, 1 Jahr zur Zeiteinheit, so wird der Zahlenwert von:

$$\frac{k}{c \cdot \varepsilon} = \frac{17^2}{4 \pi} = 23$$

Sorgfältige Untersuchungen hat auch FORBES angestellt im Innern von grossen zusammenhängenden Basaltmassen bei Edinburgh, in welche Löcher gebohrt und Thermoelemente versenkt wurden. Ihr Resultat kann in folgender Form ausgesprochen werden: Die Wärmemenge, welche bei einem Temperaturgefälle von 1 Centigrad auf einen englischen Fufs während eines Jahres durch einen Querschnitt von einem Quadratfufs hindurchströmen würde, wäre im Stande einen Cubikfufs des Gesteins um etwa 400 Centigrad zu erwärmen.¹⁾ Dies würde bei Annahme von 1 engl. Fufs als Längeneinheit und 1 Jahr als Zeiteinheit, gemäfs der auf Seite 30 gegebenen anschaulichen Definition von k , identisch sein mit der Formel:

$$k = 400 \cdot c \cdot \varepsilon$$

Wenn man dieses Resultat auf 1 m als Längeneinheit umrechnet, findet man $k = 37 \cdot c \cdot \varepsilon$; die Abweichung von QUETELET kann in der verschiedenen Beschaffenheit der Bodenmassen begründet sein.

Wir werden später noch Gelegenheit haben, diese Zahl bei anderen Rechnungen zu benutzen (§ 36).

¹⁾ Berechnung von Sir WILLIAM THOMSON in: „On the Periodical Variations of Underground Temperature“. Trans. Roy. Soc. Edinb. March 1860.

§ 30. Die Temperatur der Oberfläche sei eine beliebig vorgeschriebene Function der Zeit.

In Vorstehendem ist stillschweigend die Annahme gemacht worden, man könne den Verlauf der Temperatur an der Erdoberfläche, welcher eine große jährliche und eine kleine tägliche Periode hat, als die Superposition zweier Sinusfunctionen der Zeit auffassen, entsprechend zweien Gliedern der nach ν zu nehmenden Summe in dem durch (82) gegebenen Ausdruck für $\vartheta_{x=0}$. Im Großen und Ganzen trifft dies auch zu, und es behalten daher die vorangehenden Schlussfolgerungen ihre Gültigkeit. Genauer betrachtet vertheilt sich aber die Schwankung der Temperatur auf eine der Zeitperioden viel ungleichmäßiger als einem glatten Sinusverlauf entspricht, und nähert sich nur letzterem um so mehr, je regelmäßiger das Ortsklima ist. Im Allgemeinen treten mannigfache Störungen auf, z. B. durch Dazwischenkunft von Wasserniederschlägen u. a. m. Wir werden daher auch nicht vollkommen die Temperaturschwankungen an der Oberfläche durch zwei Sinusfunctionen, die eine von täglicher, die andere von jährlicher Periode darstellen können.

Dies veranlaßt uns zur Betrachtung des allgemeineren Falles, daß für die Erdoberfläche ein ganz beliebiger zeitlicher Verlauf der Temperatur innerhalb eines Jahres vorgeschrieben sei, der sich aber nach Ablauf eines Jahres wiederhole. Die allgemeinsten Ausdrücke (81) und (82):

$$\vartheta = \sum_{\nu} C e^{m_{\nu} x} \sin(\mu_{\nu} x + \nu t + \gamma)$$

$$\vartheta = \sum_{x=0} C \sin(\nu t + \gamma)$$

wo nach (70):

$$\nu = \frac{2\pi}{T}$$

müssen dann Functionen sein, die nach der Dauer eines Jahres periodisch sind. Dies ist der Fall für dasjenige ν , bei welchem T gleich 1 Jahr gesetzt ist; es ist aber auch der Fall, wenn $T = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ oder allgemeiner gleich $(1/a)$ Jahr gesetzt wird, wo a eine beliebige ganze Zahl ist. Wenn wir daher unter T ein Jahr verstehen, darf sein

$$\nu_a = \frac{2\pi}{T} \cdot a \quad (84)$$

Die Temperatur an der Erdoberfläche sei nun gegeben als eine ganz beliebige nach T periodische Function der Zeit t :

$$\vartheta_{x=0} = f(t)$$

Dann entwickeln wir dies $f(t)$ in eine FOURIER'sche Reihe von der Form der rechten Seite der Gleichung (86). Wie wir deren Coefficienten A_n und B_n finden, wissen wir von früher. Diese setzen wir in (85) ein, und haben dann auch den zeitlichen Verlauf der Temperatur für jede andere — von 0 verschiedene — Tiefe x .

Wir würden nöthigenfalls uns auch noch befreien können von der Voraussetzung für $\vartheta_{x=0} = f(t)$, daß es eine periodische Function sei, und zwar, indem wir die Periodendauer T unendlich lang werden lassen. Dann gehen die FOURIER'schen Reihen in sogenannte FOURIER'sche Integrale über, welche wir im nächsten Kapitel kennen lernen werden.

Siebentes Kapitel.

In einem unbegrenzten Medium findet Wärmeströmung nur in einer Richtung statt.

§ 31. Das Fourier'sche Integral und seine Anwendung auf unser Problem.¹⁾

Es soll nun noch eine Gruppe von Fällen behandelt werden, die sich auf die besprochenen Lösungen durch FOURIER'sche Reihen zurückführen lassen. Wie auseinandergesetzt, kann eine Function, deren Werthe innerhalb eines gewissen Intervalles der unabhängigen Variablen gegeben sind, dargestellt werden durch eine FOURIER'sche Reihe, in welcher, wenn die Function keinerlei Symmetrie in ihrem Verlaufe darbietet, Sinus und Cosinus vorkommen und zwar so, daß die FOURIER'sche Reihe eine Function darstellt, die sich außerhalb des gegebenen Intervalles periodisch wiederholt. Bei dem NEUMANN'schen Stabe sind diese nach der Coordinate periodischen Wiederholungen jenseits der Enden des Stabes ohne physikalisches Interesse.²⁾ Bei dem Problem des Wärmeeindringens in die Erde entsprach

¹⁾ Nach dem Notizbuch ausgearbeitet.

A. d. H.

²⁾ Sie erhalten Bedeutung und Nothwendigkeit, wenn man die Betrachtung von dem geradlinigen Stab ausdehnt auf einen ringförmig in sich zurücklaufenden; vergl. z. B. KIRCHHOFF, Vorles. über d. Theorie d. Wärme, herausgegeben v. PLANCK, p. 38 ff.

A. d. H.

Zu jedem ν_a gehören nach (78) bestimmte Werthe von m_a und μ_a ; die C_a und γ_a bleiben zunächst noch willkürlich. Es wird dann:

$$\vartheta = \sum_{a=0}^{\infty} C_a e^{m_a x} \sin(\mu_a x + \nu_a t + \gamma_a)$$

$$\vartheta = \sum_{a=0}^{\infty} C_a \sin(\nu_a t + \gamma_a)$$

wo für $a = 0$ sich als Glied der Reihe nach (83) der constante Mittelwerth ϑ_m ergibt. Die Verschiedenheit der Phasenconstanten γ_a drückt aus, daß in $\vartheta_{x=0}$ die Nullwerte der verschiedenen Perioden zu verschiedenen Zeiten eintreten können; dasselbe kann auch ohne Hinzufügung von Phasenconstanten dadurch ausgedrückt werden, daß außer sinus — noch cosinus — Functionen der Zeit auftreten, indem wir auflösen:

$$C_a \sin(\nu_a t + \gamma_a) = C_a \sin \gamma_a \cdot \cos \nu_a t + C_a \cos \gamma_a \sin \nu_a t$$

Wir nennen nun:

$$C_a \sin \gamma_a = A_a \quad C_a \cos \gamma_a = B_a$$

Dann können wir schreiben:

$$\vartheta_{x=0} = \sum_{a=0}^{a=\infty} A_a \cos \nu_a t + \sum_{a=1}^{a=\infty} B_a \sin \nu_a t$$

und es wird:

$$\vartheta = \sum_{a=0}^{a=\infty} A_a e^{m_a x} \cos \nu_a t + \sum_{a=1}^{a=\infty} B_a e^{m_a x} \sin \nu_a t$$

oder, wenn wir nach (84) einführen:

$$\nu_a = \frac{2 \pi a}{T}$$

erhalten wir:

$$\vartheta = \sum_{a=0}^{a=\infty} A_a e^{m_a x} \cos \left(\frac{2 \pi a}{T} t \right) + \sum_{a=1}^{a=\infty} B_a e^{m_a x} \sin \left(\frac{2 \pi a}{T} t \right) \quad (85)$$

und für die Oberfläche $x = 0$

$$\vartheta_{x=0} = \sum_a A_a \cos \left(\frac{2 \pi a}{T} t \right) + \sum_a B_a \sin \left(\frac{2 \pi a}{T} t \right) \quad (86)$$

Diese Ausdrücke (85) und (86) sind ganz analog den früher für den NEUMANN'schen Stab gefundenen (53) und (54), aber mit Vertauschung von x und t . Damals war $\vartheta_{t=0}$ als eine nach x periodische Function von der Periodenlänge $2L$ zu denken; jetzt ist T die Periode nach t ; daher jetzt $(T/2)$ an Stelle des damaligen L .

die zeitliche Periodicität der Function in der That den physikalischen Verhältnissen.

Wenn wir nun z. B. eine für ein bestimmtes Intervall ($B \dots C$ der Fig. 10) thatsächlich gegebene Function haben, welche an den Grenzen des Intervalles gleich Null wird, so könnten wir sie uns jenseits dieser Grenzen zunächst noch für gewisse Strecken mit den Functionswerthen Null fortgesetzt denken (s. Figur 10, bis A bzw. D), und könnten dann die in dieser Weise für das erweiterte Intervall von A bis D definirte Function darstellen durch eine FOURIER'sche Reihe. Für diese ist dann $A \dots D$ die Länge einer Periode. In dieser Weise können wir die Periode der FOURIER'schen Reihe, durch welche wir die im Intervall $B \dots C$ gegebene Function darstellen, größer machen; und zwar beliebig größer, denn für die

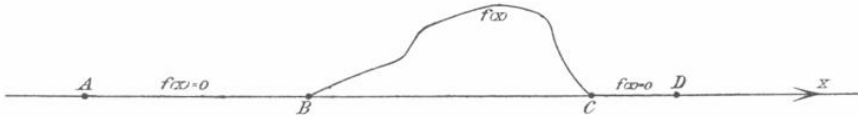


Fig. 10.

Verlängerungen AB und CD ist gar keine Grenze zu ziehen. Man kann also schließlich auch das Intervall $A \dots D$ unendlich groß nehmen, d. h. die in $B \dots C$ gegebene Function darstellen durch eine FOURIER'sche Reihe mit unendlich langer Periode. Bei einer derartigen Reihe sind die Unterschiede der auf einander folgenden

Vielfachen von $\frac{\pi x}{L}$, nach deren Sinus und Cosinus ja die Reihe fortschreitet, sehr klein; es schließen sich daher auch die successiven Werthe der Sinus und Cosinus für steigende Ordnungszahlen n unendlich nahe an einander an; zugleich werden die Coefficienten für jedes einzelne der Glieder verschwindend klein. Daher führt diese Erweiterung des Begriffs der FOURIER'schen Reihen, wie wir sogleich im Einzelnen erkennen werden, auf ein Integral, welches von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt ist: ein sogenanntes FOURIER'sches Integral.

Wir knüpfen an die Darstellung einer Function $f(x)$ von $-L$ bis $+L$ durch eine FOURIER'sche Reihe an, wie sie durch die Gleichung (67) mit der in (67 a) vorgenommenen Umformung von deren rechter Seite gegeben ist:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(s) \cos \frac{n\pi(x-s)}{L} ds \quad (87)$$

Wenn wir die Länge einer Periode von $-L$ bis $+L$ unendlich werden lassen, so wird:

$$\frac{\alpha \pi}{L} = \sigma,$$

eine für die auf einander folgenden ganzen Zahlen α in sehr kleinen Intervallen steigende Gröfse; wir können σ als eine Variable auffassen, die mit den Differentialen

$$d\sigma = \frac{\pi}{L}$$

schrittweise wächst. In der Summe von $\alpha = 1$ bis $\alpha = \infty$ wächst σ mit diesen Schritten von sehr kleinen bis zu sehr großen Werthen; die Summe geht also in ein Integral über. Wir setzen ferner noch fest, daß die darzustellende Function $f(s)$ der Bedingung genüge, daß das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds = F \quad (88)$$

einen endlichen Werth habe, wie es z. B. bei dem durch Fig. 10 (s. oben) dargestellten Verlauf der Fall ist. Lassen wir dann $L = \infty$ werden, so verschwindet das erste Glied der rechten Seite von (87); und nach dem Vorhergehenden wird:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) \cdot \cos[\sigma(x-s)] \cdot ds \quad (89)$$

Dies ist die Darstellung einer willkürlich gegebenen Function $f(x)$ durch ein FOURIER'sches Integral; hier braucht nichts von periodischer Wiederholung für die Function vorgeschrieben zu sein; nur die durch (88) ausgedrückte Bedingung muß erfüllt sein.

Wir wollen für das FOURIER'sche Integral noch einmal verificiren, daß es wirklich das gegebene $f(x)$ darstellt, obwohl dies ja schon für die FOURIER'sche Reihe bewiesen ist. Wir schreiben die rechte Seite von (89) in der Form:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} ds \cdot f(s) \cdot [e^{-i\sigma(x-s)} + e^{-i\sigma(x+s)}]$$

Nun wird ein ähnlicher Kunstgriff angewendet, wie in Gleichung (68). Statt mit dem dort eingeführten Factor $\varepsilon^\alpha = e^{\alpha \log \varepsilon}$, wo ε zuerst < 1

und sich nachher der Eins nähert, multipliciren wir jetzt entsprechend mit $e^{-\sigma\delta}$, wo wir δ später sich der Null nähern lassen. Den dadurch zunächst veränderten Werth des FOURIER'schen Integrals nennen wir $f(x, \delta)$, und haben also, wenn noch die Reihenfolge der Integration umgekehrt wird:

$$\begin{aligned} f(x, \delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) \int_0^{\infty} d\sigma \cdot [e^{-\delta\sigma + i\sigma(x-s)} + e^{-\delta\sigma - i\sigma(x-s)}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) \cdot \left[\frac{e^{-\delta\sigma + i\sigma(x-s)}}{-\delta + i(x-s)} + \frac{e^{-\delta\sigma - i\sigma(x-s)}}{-\delta - i(x-s)} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \end{aligned}$$

Beim Einsetzen der oberen und unteren Grenze $\sigma = \infty$ und $\sigma = 0$ ist zu beachten, daß in $e^{-\delta\sigma} e^{\pm i\sigma(x-s)}$ der zweite Factor trigonometrische Functionen bedeutet, die also auch für $\sigma = \infty$ nicht unendlich werden; der erste Factor $e^{-\delta\sigma}$ verschwindet aber für $\sigma = \infty$. Es bleibt also nur der Werth für $\sigma = 0$, und die zwischen den Grenzen genommene eckige Klammer wird:

$$- \left[\frac{1}{-\delta + i(x-s)} + \frac{1}{-\delta - i(x-s)} \right] = \frac{2\delta}{\delta^2 + (x-s)^2}$$

Also ist:

$$f(x, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) \frac{\delta}{\delta^2 + (x-s)^2}$$

Lasse ich nun δ sich der Null nähern, so hat der Quotient unter dem Integral nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn s sehr nahe $= x$ ist, und es wird [analog $\lim f(x, \epsilon)$ für $\epsilon = 1$ auf S. 99]:

$$\lim_{\delta=0} f(x, \delta) = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{\delta}{\delta^2 + (x-s)^2}$$

Setzt man jetzt $\frac{s-x}{\delta} = \xi$, so wird ganz wie damals:

$$\lim_{\delta=0} f(x, \delta) = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = f(x)$$

Womit also verificirt ist, daß das FOURIER'sche Integral in der That die gegebenen Functionswerthe darstellt.

Diese Form ist dadurch wichtig, dafs man durch sie die Lösung angeben kann für solche Aufgaben der Wärmeleitung, bei welchen die Temperatur nicht im Anfangszustand zu einer periodischen Function einer Coordinate ergänzt gedacht werden kann, sondern für ein in einer Richtung unendlich ausgedehntes Medium von $-\infty$ bis $+\infty$ als eine keinerlei periodische Wechsel darbietende Function gegeben ist, wie es z. B. der Figur 10 auf Seite 115 entspricht. Zu einem solchen Falle führte uns das Problem des NEUMANN'schen Stabes, wenn wir ihn als unbegrenzt lang denken. Gehen wir aus von der allgemeinen Lösung, wie sie damals in Gleichung (48) gefunden war:

$$\vartheta_{t,x} = \sum_{a=0}^{\infty} A_a e^{n_a t} \cos \frac{a \pi x}{L}$$

wo:

$$n_a = -\frac{h \cdot p}{q \cdot c \cdot \varepsilon} - \frac{k}{c \cdot \varepsilon} \cdot \frac{a^2 \pi^2}{L^2}$$

Wir wollen nun $h = 0$ setzen, d. h. wir denken uns die Seitenableitung des prismatischen Stabes verhindert; oder wir nehmen an, dafs auch in den auf der Richtung (x) des Wärmestromes senkrechten Richtungen der Leiter sehr grofse Ausdehnung hat. Nennen wir noch

$$\frac{k}{c \cdot \varepsilon} = \frac{1}{4 \alpha} \quad (90)$$

so wird also einfacher:

$$n_a = -\frac{a^2 \pi^2}{4 \alpha L^2}$$

und:

$$\vartheta_{t,x} = \sum_a A_a e^{-\frac{a^2 \pi^2}{4 \alpha L^2} t} \cos \frac{a \pi x}{L}$$

Gehen wir nun zu unendlich grofser Länge L über, so ist zunächst ersichtlich, dafs der Factor von t in der Exponentialfunction auch für grofse Ordnungszahlen a noch endlich bleibt, die Exponentialfunction selbst also nicht verschwindet. Es liefert also, auch wenn $t > 0$ ist, eine unendliche Reihe von Gliedern wesentliche Beiträge zu dem Werth der Summe, sobald L über jede Grenze wächst. Führen wir, wie auf Seite 116:

$$\sigma = \frac{a \pi}{L}$$

ein, so erhalten wir analog (87) und (89), aber mit Hinzutritt der Exponentialfunction der Zeit:

$$\vartheta_{t,x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} ds \cdot f(s) \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{4a}t} \cdot \cos[\sigma(x-s)] \quad (91)$$

Zur Zeit $t = 0$ wird dann in völliger Uebereinstimmung mit (89):

$$\vartheta_{t=0}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} ds \cdot f(s) \cdot \cos[\sigma(x-s)] = f(x)$$

wo $f(x)$ die ganz beliebig gegebene Anfangsvertheilung der Temperatur ist.

§ 32. Die anfängliche Erwärmung beschränke sich auf eine unendlich dünne Schicht.

Wir wollen nun annehmen, daß zu Anfang eine gewisse Wärmemenge angesammelt sei in einer unendlich dünnen Schicht begrenzt von zwei Querschnitten, welche Wärmemenge sich dann weiter nach beiden Seiten hin ausbreiten wird. Es soll also $\vartheta_{t=0} = f(x)$ nur in der unmittelbaren Nähe einer Ebene $x = a$ von Null verschieden sein; die Temperatur soll aber dort einen sehr großen Werth haben, so daß doch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_{t=0} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{einen endlichen Werth hat} = F \quad (92)$$

Diese Bedingung stimmt mit (88) überein; denn es ist offenbar gänzlich gleichgültig, wie wir die Integrationsvariable nennen, da sie ja doch herausfällt, wenn wir die Grenzen 0 und ∞ einführen. Infolge unserer Annahme liefert bei (91) in dem nach s zu nehmenden Integral wegen des Factors $f(s)$ nur diejenige Stelle einen Beitrag, bei welcher s nahe gleich a ist, so daß alsdann aus (91) bei Einführung der Constanten F sich ergibt:

$$\vartheta_{t,x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \cdot F \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{4a}t} \cos[\sigma(x-a)]$$

Setze nun:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{a}} \cdot \sigma = \xi$$

also:

$$d\sigma = 2 \sqrt{\frac{a}{t}} \cdot d\xi$$

so wird:

$$\vartheta_{t,x} = \frac{2F}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \cdot \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\xi^2} \cos \left[2\xi \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \cdot (x-a) \right]$$

Setze der Kürze halber:

$$2 \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \cdot (x-a) = \beta \quad (93)$$

so ist also:

$$\vartheta_{t,x} = \frac{2F}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \cdot \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\xi^2} \cos \beta \xi \quad (94)$$

Um den Werth des hier auftretenden bestimmten Integrals zu finden, gehen wir aus von demjenigen Integral, in welchem $\beta = 0$, also $\cos \beta \xi = 1$ gesetzt wäre. Dieses Integral, welches wir J nennen wollen,

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi$$

läßt sich durch einen eigenthümlichen Kunstgriff ausführen. Den Integrationsbuchstaben könnten wir, da die Grenzen constant sind, ebenso gut η nennen; es ist also auch:

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$

Multiplirciren wir die beiden Formen für J mit einander, so erhalten wir:

$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\xi^2 + \eta^2)} d\xi \cdot d\eta$$

Denken wir uns nun ξ und η als rechtwinklige Coordinaten eines in einer Ebene beweglichen Punktes, so ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

gleich dem Quadrate seines Abstandes vom Anfangspunkte der Coordinaten. $d\xi \cdot d\eta$ ist das Flächenelement. Wir haben also e^{-r^2} mit dem Flächenelemente zu multipliciren, und nach ξ sowohl wie η

von 0 bis ∞ , dafs heifst über einen Quadranten der ganzen Ebene zu integrieren. Führen wir nun Polarcordinaten r und φ ein, so wird das Flächenelement $= r d\varphi \cdot dr$, und die Integration ist zu erstrecken nach r von 0 bis ∞ , nach φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$; es wird also:

$$J^2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2} r \cdot dr$$

Jetzt können wir sogleich die unbestimmten Integrationen ausführen; es wird:

$$\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{\overline{-\frac{1}{2} e^{-r^2}}_{r=0}^{r=\infty}}{r=0} = \frac{1}{2}$$

und weiter:

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

mithin:

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Offenbar ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2J = \sqrt{\pi}$$

Nachdem wir den Werth dieses Integrals ermittelt haben, kehren wir zurück zu dem in (94) vorkommenden Integral, welches wir J_β nennen wollen:

$$J_\beta = \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\xi^2} \cdot \cos \beta \xi$$

Wir können dafür schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\xi \cdot \left\{ e^{-\xi^2 + i\beta\xi} + e^{-\xi^2 - i\beta\xi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \left\{ \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-(\xi - i\frac{\beta}{2})^2} + \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-(\xi + i\frac{\beta}{2})^2} \right\} \end{aligned}$$

Denke mir in dem zweiten Integral $\xi' = -\xi$ eingeführt, und dann wieder, da die Bezeichnung der Integrationsvariablen bedeutungslos ist, ξ statt ξ' geschrieben, so folgt:

$$J_\beta = \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot e^{-(\xi - i\frac{\beta}{2})^2}$$

Setze nun:

$$\xi - i\frac{\beta}{2} = \eta,$$

so wird:¹⁾

$$J_\beta = \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \cdot e^{-\eta^2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \cdot 2J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

In unserem Falle hat β den durch (93) angegebenen Werth; denselben eingesetzt, wird nach (94):

$$\vartheta_{t,x} = F \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \cdot e^{-\alpha \frac{(x-a)^2}{t}} \quad (95)$$

Das soll also der Ausdruck für die Temperatur sein, wenn sie in einem unendlich ausgedehnten Medium Function aufer der Zeit nur von der x -Coordinate ist, und wenn zu Anfang nur in unmittelbarer Nähe der Ebene $x = a$ die Temperatur von Null verschieden ist. Dabei sollte dann aber nach (92) dort die Temperatur so hoch sein, dafs:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_{t=0} dx = F$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth habe.

Diese Constante F hat einen einfachen physikalischen Sinn. Wir wollen die Wärmemenge berechnen, welche ursprünglich ihren Sitz hat in einem unendlich langen Prisma oder Cylinder parallel der x -Axe, dessen Querschnitt q ist. Die Wärmecapacität einer

¹⁾ Dies Verfahren führt zwar zum richtigen Resultat, könnte aber doch beanstandet werden. Völlig einwandfrei läßt sich das Integral J_β nach den fundamentalen Regeln für Integration durch complexe Werthe der Variablen ausführen, oder auch mit Hülfe von Reihenentwicklung wie bei RIEMANN-HATTENDORFF, partielle Differentialgleichungen, 2. Aufl., pag. 38; oder wie in HEINRICH WEBER's partiellen Differentialgleichungen, 1900, Bd. I, p. 144.

Scheibe von der Dicke dx dieses Cylinders ist gleich $c \cdot \varepsilon \cdot q \cdot dx$. Diejenige Wärmemenge, welche in dem Cylinder vorhanden sein muß, um die Temperatur Null hervorzubringen, werde außer Betracht gelassen; und nur der Wärmeüberschuß angegeben, welcher eine höhere Temperatur hervorbringt. Dieser Ueberschuß ist zu Anfang für jene Scheibe gleich:

$$\vartheta_{t=0} \cdot c \cdot \varepsilon \cdot q \cdot dx$$

und für den ganzen unendlich langen Cylinder ist diese überschüssige Wärmemenge:

$$W = c \cdot \varepsilon \cdot q \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_{t=0} \cdot dx$$

Es ist also $F \cdot c \cdot \varepsilon \cdot q = W$ und die Bedingung, daß das Integral F einen endlichen und von Null verschiedenen Werth habe, bedeutet mithin, daß der Wärmeüberschuß W in einem unendlich langen Cylinder oder Prisma von endlichem Querschnitt q ebenfalls einen endlichen und von Null verschiedenen Werth habe.

Da nun die Wärmeströmung nur parallel der x -Axe verläuft, bleibt jener Ueberschuß W für alle Zeiten in demselben Cylinder; es muß also auch nicht bloß zur Zeit $t = 0$, sondern zu jeder Zeit

$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta \cdot dx$ diesen selben endlichen Werth F haben. Dies läßt sich sogleich aus (95) verificiren. Wenn wir setzen:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{t}} \cdot (x - a) = \xi$$

so wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta \cdot dx = F \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{(x-a)^2}{t}} dx = \frac{F}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = F$$

wie verlangt.

Weiter wollen wir nun zeigen, daß die in (95) gefundene Lösung auch wirklich für einen sehr kleinen positiven Werth von t einer Vertheilung von der zuvor angenommenen Art entspricht. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Ebene $x = 0$ diejenige sei, in deren unmittelbarer Nähe allein zu Anfang die Temperatur von

Null verschieden sei; wir setzen also $\alpha = 0$. Ferner führen wir statt F eine andere Constante C ein, indem wir setzen:

$$F \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = C$$

Dann wird:

$$\vartheta = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\alpha \frac{x^2}{t}} \quad (96)$$

Für sehr kleine t hat $\frac{\alpha x^2}{t}$ bei jedem von Null verschiedenen x einen sehr großen Werth und die Exponentialfunction einen sehr kleinen. Zwar wird dann $(C/\sqrt{t})$ sehr groß; aber bei der Bestimmung seines Produktes mit der Exponentialfunction überwiegt deren Einfluß, wie über jede Potenz mit endlichem Exponenten. Es nähert sich also in der That ϑ bei sehr kleinen Werthen von t der Null, ausgenommen allein, wenn x^2 noch kleiner ist als t . In der unmittelbaren Nachbarschaft der Stelle $x = 0$ wird $\alpha x^2/t$ nicht überaus groß sein, die Exponentialfunction nicht verschwinden, der Einfluß von $(C/\sqrt{t})$ sich geltend machen, sogar überwiegen, und ϑ einen sehr großen Werth annehmen. Dann haben wir also einen solchen Anfangszustand mit discontinuirlicher Vertheilung der Wärme, wo im Punkte $x = 0$ im ersten Augenblick sehr hohe Temperatur, und gleich daneben die Temperatur Null herrscht.

Der Weg, auf dem wir zu der Lösung (96) gelangt sind, war ein so langwieriger, daß es von Interesse erscheint, zum Schlusse wieder zu verificiren, daß die Function überhaupt ein Integral der Differentialgleichung (38):

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = c \cdot \varepsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

ist. Um dies zu zeigen, bilden wir:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{C}{t\sqrt{t}} e^{-\alpha \frac{x^2}{t}} + \frac{C}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\alpha x^2}{t^2} \cdot e^{-\alpha \frac{x^2}{t}}$$

und andererseits:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{2\alpha x}{t} \cdot \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\alpha \frac{x^2}{t}}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -\frac{2\alpha C}{t\sqrt{t}} e^{-\alpha \frac{x^2}{t}} + \frac{4\alpha^2 x^2}{t^2} \cdot \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\alpha \frac{x^2}{t}}$$

Der Vergleich zeigt, dafs:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 4\alpha \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

und dafs also unser ϑ ein Integral der Differentialgleichung wird, wenn die Constante α so bestimmt ist, dafs:

$$4\alpha = \frac{c \cdot \epsilon}{k}$$

also gleich der Wärmecapacität der Volumeneinheit dividirt durch das Leitungsvermögen. Diese Vorschrift ist aber durch die Einführung von α nach Gleichung (90) bereits erfüllt.

Welche Anfangsvertheilung der Temperatur die Lösung (96) darstellt, wissen wir; der weitere Verlauf ist folgender. Sobald t einen endlich von Null verschiedenen Werth annimmt, ist $\vartheta_{x=0}$ nicht mehr unendlich groß:

$$\vartheta_{x=0} = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

nimmt mit wachsendem t beständig ab. Für jede andere Stelle $x \geq 0$ wird die Temperatur, die zu Anfang verschwindet, für kleine von Null an wachsende Werthe der Zeit einen von Null verschiedenen Werth annehmen, weil für sie die Exponentialfunction in (96) von Null beginnend wächst. Und zwar fängt die Temperatur überall sofort nach der Zeit $t = 0$ an zu steigen.¹⁾ Indem also die Wärme

¹⁾ Wie diese merkwürdige Schlussfolgerung zu Stande gekommen ist, erhellt m. E. aus einem Vergleich der Wärmeleitung mit dem analogen hydrodynamischen Problem der Diffusion. Wenn analog den Gleichungen (10) S. 30 die Componenten einer Diffusionsströmung, z. B. eines Salzes in Lösung, proportional dem Concentrationsgefälle gesetzt werden, so wird damit die Geschwindigkeit, nicht die Beschleunigung, ponderabler Theilchen proportional der wirkenden Kraft gesetzt. Dabei ist dann das Vorhandensein einer starken Reibung vorausgesetzt; aber auch dann gilt die Proportionalität von Geschwindigkeit und Kraft erst, wenn letztere so lange gewirkt hat, dafs die Geschwindigkeit ihren constanten Endwerth erreicht hat. Dies wird zwar in sehr kurzer, aber doch nicht der Null gleichen Zeit der Fall sein. Insofern würden also die den Gleichungen (10) analogen Gleichungen für die Diffusion, wie man erkennt, in ihrer Gültigkeit beschränkt sein. Wenn es sich nun auch bei der Wärme nicht direct um Trägheit ponderabler Materie handelt, so handelt es sich doch, wenn man dem Vorgang der Leitung auf den Grund geht, um Uebertragung molecularer Energie, und wie man sich diese auch denken mag, ob durch Stöße oder sonstwie vermittelt: Zeit wird zu ihr erforderlich sein. Wenn es sich also um einen nicht-stationären Zustand handelt, können die

von der Stelle $x = 0$, auf welche sie zusammengedrängt war, abfließt, verliert sie dort ihre hohen Werthe, während sie sich gleichzeitig auf Schichten von endlicher Dicke ausbreitet und sie erwärmt. Für grössere Werthe der Zeit t nimmt die Temperatur auch an den Stellen, für welche $x \geq 0$ ist, wieder ab; denn für wachsendes t nähert sich auch bei ihnen die Exponentialfunction dem Werthe 1, so daß dann auch an diesen Stellen der Einfluß des anderen Factors $\frac{C}{\sqrt{t}}$ überwiegt. Schliesslich, wenn für $t = \infty$ die Wärme sich in dem

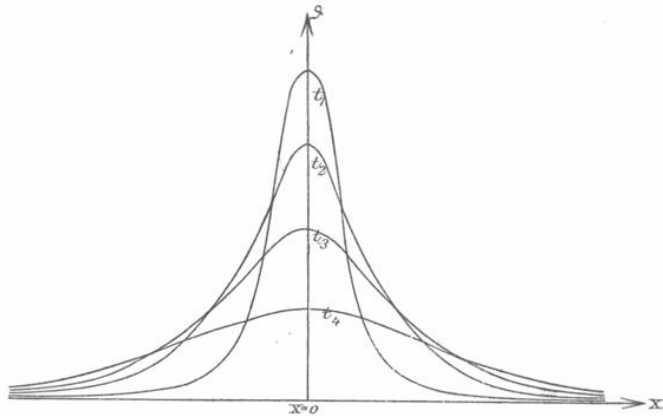


Fig. 11.

ganzen unendlich ausgedehnten Stabe oder Körper gleichmäfsig verbreitet hat, herrscht überall die Temperatur Null. Die Temperaturvertheilung für eine Reihe von auf einander folgenden immer größeren Zeiten t_1, t_2 u. s. w. veranschaulicht die folgende Zeichnung¹⁾ (Fig. 11).

§ 33. Die Anfangstemperatur sei eine beliebig gegebene Function einer Coordinate.

Nun wollen wir die Frage in Angriff nehmen, welche Function der einen Coordinate und der Zeit die Temperatur wird, wenn die Anfangsvertheilung in einem unbegrenzten Körper oder einem nicht-

Gleichungen (10) nicht absolut streng gültig sein. Im obigen Problem handelt es sich aber in den Momenten unmittelbar nach der Zeit $t = 0$ um einen extrem-nicht-stationären Zustand; daher jene merkwürdige Schlussfolgerung.

A. d. H.

¹⁾ Einen Anhalt für richtige Zeichnung der Curven bietet der Umstand, daß ihre Einhüllenden zwei gleichseitige Hyperbeln sind.

A. d. H.

leitend umhüllten unendlich langen Stab als eine ganz beliebige Function der x -Coordinate gegeben ist. Diese Frage kann beantwortet werden, indem wir die in (91) vorkommenden Quadraturen ausführen, wo $f(s)$ dieselbe Function der Integrationsvariablen s ist, wie die gegebene Anfangsvertheilung der Temperatur:

$$\vartheta(x) = f(x) \quad t=0$$

von x . — Wir können die Lösung aber auch direct hinschreiben in Anknüpfung an die der soeben betrachteten Aufgabe, wie sie in (95) oder (96) angegeben wurde.

Dazu fassen wir zunächst nur die Ausbreitung derjenigen Wärmemenge ins Auge, welche ursprünglich enthalten ist in der unendlich dünnen Schicht zwischen den beiden Querschnitten $x = a$ und $x = a + da$ (Figur 12). Deren Abfluß wird so geschehen, als ob in allen anderen Schichten gar keine Wärme vorhanden wäre, also durch einen Ausdruck von der Form (95) beschrieben werden. Solcher Schichten, von denen die Wärme nach diesem Gesetz ab-

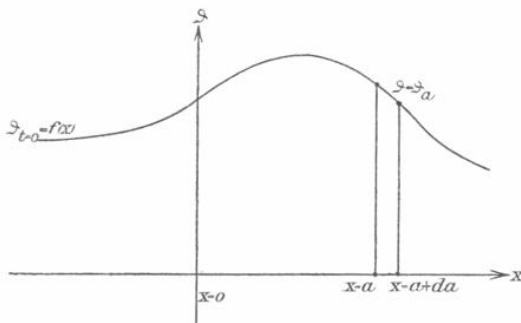


Fig. 12.

fließt, haben wir nun aber unendlich viele von $a = -\infty$ bis $a = +\infty$, alle mit einer gegebenen Anfangstemperatur neben einander liegend. Von jeder dieser Schichten fließt ihr Wärmehalt nach beiden Seiten hin ab; alle diese einzelnen Wärmeströme werden sich nach dem Principe der Superposition über einander lagern; so erkennt man, wie man aus (95) zur Lösung des allgemeinen Falles gelangt.

Wir wollen diese Superposition nun analytisch ausdrücken. Der Ausdruck (95) giebt ϑ als Function von x und t , wenn zur Zeit $t = 0$ alle Wärme in einer unendlich dünnen Schicht bei $x = a$ enthalten war. Ferner herrscht bei (95) in der Schicht, von welcher die Wärme ausgeht, ursprünglich eine unendlich hohe Temperatur,

durch deren Abfluß dann im übrigen Leiter weiterhin endliche Temperaturerhöhungen entstehen. Jetzt herrscht in der Schicht bei $x = a$ ursprünglich nur eine endliche Temperatur, deren Ausbreitung allein betrachtet nur unendlich kleine Temperaturerhöhungen im übrigen Leiter hervorrufen kann. Während bei (95) die Constante

$$F = \int_{t=0}^{+\infty} \vartheta dx \text{ zufolge (92) einen endlichen Werth hat, muß sie jetzt,}$$

wenn allein bei $x = a$ bis $a + da$ von Null verschiedenes $\vartheta_{t=0}$ angenommen wird, unendlich klein sein. Und zwar ist sie gleich dem Inhalte der zwischen Abscissenaxe, Curve $\vartheta = f(x)$ und den Ordinaten bei $x = a$ und $x = a + da$ liegenden Fläche; also $F = \vartheta_a \cdot da$. Wir erhalten mithin für die Temperatur als Function von x und t , wenn ursprünglich nur in der Schicht von $x = a$ bis $x = a + da$ Wärme vorhanden war, aus (95) den Ausdruck:

$$\vartheta_{da} = \vartheta_a \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \cdot e^{-a \frac{(x-a)^2}{t}} \cdot da$$

Die Superposition der Temperaturerhöhungen, welche durch alle derartigen Einzelschichten von $a = -\infty$ bis $a = +\infty$ hervorgerufen wird, giebt:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_a \cdot e^{-a \frac{(x-a)^2}{t}} \cdot da \quad (97)$$

Dies ist ϑ als Function von t und x , wenn ϑ_a die für die Zeit $t = 0$ als ganz beliebige Function der x -Coordinate a gegebene Temperaturvertheilung bedeutet.

§ 34. Zu Anfang sei an einer Ebene ein Temperatursprung vorhanden.

Von der in (97) gewonnenen Lösung können wir eine wichtige Anwendung machen auf einen Fall, in welchem anfänglich ein Temperatursprung an einer Stelle vorhanden ist. Wir nehmen an, daß wir einen Körper von ursprünglich überall gleicher Temperatur ϑ_1 haben, begrenzt von einer ebenen Fläche $A \dots B$ (siehe Figur 13) und von dieser aus sich nach einer Seite hin (nach links) ins Unendliche erstreckend; von einem gewissen Moment an bringen wir ihn mit einem zweiten Körper in Berührung, der sich von der Berührungsfläche $A \dots B$ aus nach rechts hin ins Unendliche erstreckt und

ebenfalls ursprünglich überall gleiche Temperatur ϑ_2 hat, aber höhere als der andere Körper. Dann ist die anfängliche Temperaturvertheilung graphisch dargestellt durch C (links im Unendlichen), DEF (rechts im Unendlichen). Im weiteren Verlauf wird dann in Folge der Leitung durch die Grenzfläche $A \dots B$ hindurch der Temperatursprung sofort verschwinden; wenn auf beiden Seiten von

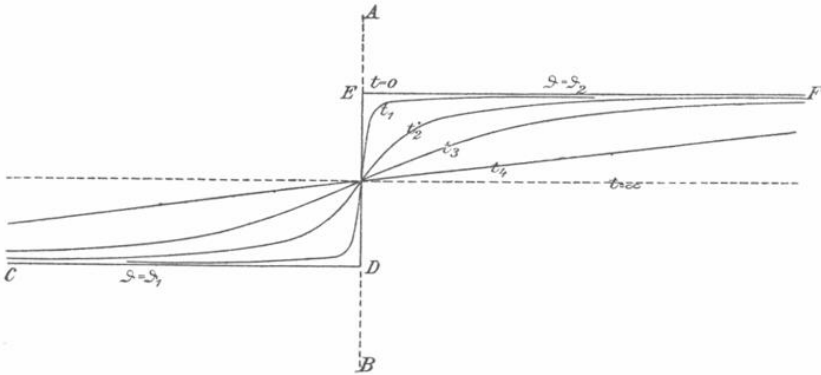


Fig. 13.

$A \dots B$ sich physikalisch alles symmetrisch verhält, wird in der Berührungsfläche sofort der Mittelwerth der Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 eintreten und weiterhin unverändert andauern. Gleichzeitig fließt andauernd Wärme durch die Berührungsfläche von rechts nach links, und der Abfall der Temperatur greift fortschreitend weiter nach rechts über, während nach links hin der Anstieg sich ausbreitet.

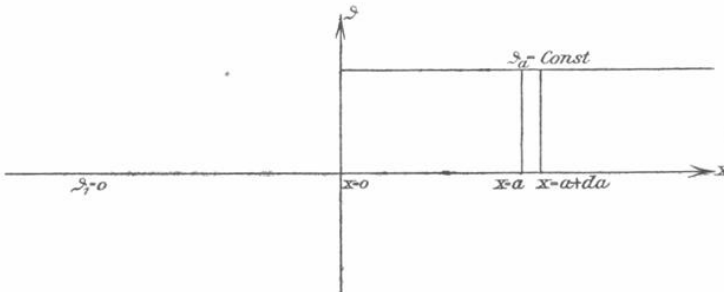


Fig. 14.

Dadurch entstehen die in der Figur gezeichneten successiven Temperaturvertheilungen für Zeitmomente t_1 , t_2 u. s. f.

Den Temperaturverlauf für diesen Fall können wir jetzt, von der Lösung (97) ausgehend, sogleich angeben. Die Temperatur des kälteren Körpers (in der Figur 13 mit ϑ_1 bezeichnet) nehmen wir

zum Nullpunkt der Scale (Figur 14); der ursprüngliche Temperaturprung sei an der Stelle $x = 0$ vorhanden, die positive x -Seite sei die des wärmeren Körpers.

Dann verschwindet in (97) ϑ_a von $-\infty$ bis 0. Von 0 bis $+\infty$ ist ϑ_a constant, tritt also vor das Integrationszeichen, und wenn wir eine neue Constante einführen, indem wir setzen:

$$C = \vartheta_a \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

erhalten wir:

$$\vartheta = \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{a=0}^{a=\infty} e^{-a \frac{(x-a)^2}{t}} \cdot da$$

Bei der Integration nach a sind x und t als Constante zu betrachten. Wir führen eine neue Integrationsvariable ein, indem wir setzen:

$$(a - x) \sqrt{\frac{\alpha}{t}} = \xi$$

woraus:

$$da = d\xi \sqrt{\frac{t}{\alpha}}$$

Ferner wird:

$$\text{für } a = 0 \quad \dots \quad \xi = -x \sqrt{\frac{\alpha}{t}}$$

$$\text{für } a = \infty \quad \dots \quad \xi = +\infty$$

Dies eingeführt, wird:

$$\vartheta = \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \int_{\xi = -x \sqrt{\frac{\alpha}{t}}}^{\xi = +\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi \quad (98)$$

welches ϑ in dieser Form nur durch die untere Integrationsgrenze Function von x und t ist. Der Werth des hier auftretenden bestimmten Integrals kann im Allgemeinen nicht in einem geschlossenen Ausdruck angegeben werden, sondern nur durch eine Reihenentwicklung. Nur in einem speciellen Fall läßt sich sein Werth direct angeben, nämlich dann, wenn wir ϑ suchen für die Grenzfläche $x = 0$. Denn in ihr wird:

$$\vartheta_{x=0} = \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi$$

Dies Integral ist dasselbe, welches wir auf Seite 120 mit J bezeichnet und auf Seite 121 gleich $\sqrt{\pi}/2$ gefunden haben. Es wird demnach:

$$\vartheta_{x=0} = \frac{C\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (99)$$

Nun war gemäß seiner Einführung auf vor. Seite $C = \vartheta_a \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ und es ist also:

$$\vartheta_{x=0} = \frac{\vartheta_a}{2} \quad (99a)$$

womit sich bestätigt, dass die von der Zeit unabhängige Temperatur der Berührungsebene nach den Ueberlegungen von S. 129 gleich ist dem Mittelwerthe der Temperaturen der beiden Körper (gleiche Werthe von α für beide vorausgesetzt).

Für Punkte, die nicht in der Berührungsfläche liegen, für die also $x \geq 0$ ist, gilt der allgemeine Ausdruck (98) für ϑ . Setzen wir der Kürze halber:

$$x \sqrt{\frac{\alpha}{t}} = z$$

so ist:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \int_{-z}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi \right\} \\ &= \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Im Vergleich mit $\vartheta_{x=0}$ ist das zweite Glied in der Klammer noch hinzugetreten; es ist gleichzeitig mit x größer oder kleiner als Null, und dadurch $\vartheta \geq \vartheta_{x=0}$ wie in Fig. 13.

Für dieses Glied wollen wir Reihenentwicklungen angeben. Wir können dasselbe schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^z e^{-z^2} dz &= \int_0^z \left(1 - z^2 + \frac{z^4}{1 \cdot 2} - \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) dz \\ &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \frac{z^7}{7 \cdot 3!} + \dots \end{aligned}$$

Dies ist eine absolut convergente Reihe, wie hoch auch die Werthe des z steigen mögen. Denn, wenn wir z als gemeinsamen Factor herausnehmen, bleibt die Reihe:

$$1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5 \cdot 2!} - \frac{x^6}{7 \cdot 3!} + \dots$$

eine Reihe, welche stärker convergirt als die Exponentialreihe für e^{-x^2} , da ja in den Nennern die von Glied zu Glied wachsenden Zahlen 1, 3, 5, 7... hinzugekommen sind. Da nun die Exponentialreihe immer convergirt, convergirt die Reihe für das Integral a fortiori. Schnell convergirt sie allerdings nur, wenn x klein ist; d. h. wenn entweder x klein ist, wenn wir also Stellen in der Nähe der Berührungsebene betrachten; oder wenn t groß ist, also schon viel Zeit verflossen ist von dem Anfang der Wärmebewegung ab. Und zwar je größer x ist, d. h. je weiter entfernt von der Grenzfläche die Stelle ist, für welche wir den Gang der Temperatur suchen, desto größer muß auch t sein, damit wir wieder ein kleines x haben. Im quadratischen Verhältniß zu der steigenden Entfernung von der Grenzfläche muß längere Zeit verfließen, ehe die Reihenentwicklung wieder gleich schnell convergirt.

Da die Reihe bei großen Werthen von x eine unbequeme Berechnung liefert, ist es rathsam, für diesen Fall, also für die ersten Zeiten und in größeren Entfernungen von der Grenzfläche, eine andere Form für das Integral zu suchen. Es ist:

$$\int_0^x e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-z^2} dz - \int_x^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_x^\infty e^{-z^2} dz$$

und das letzte Integral läßt sich durch wiederholte Anwendung partieller Integration in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-z^2} dz &= - \int_x^\infty \frac{d(e^{-z^2})}{2z} = - \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-z^2}}{2z^2} dz \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \int_x^\infty \frac{d(e^{-z^2})}{4z^3} = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4} \int_x^\infty \frac{e^{-z^2}}{z^4} dz \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3}{8} \int_x^\infty \frac{d(e^{-z^2})}{z^5} dz \end{aligned}$$

In dieser Weise kann man weitergehen und erhält:

$$\int_x^\infty e^{-z^2} dz = \frac{e^{-x^2}}{2x} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x^6} + \dots \right.$$

Wenn x verhältnißmäßig groß ist, ist dies eine gut convergirende Reihe; aber sie ist nicht absolut convergent. Zwar werden die Glieder im Anfange kleiner; aber da bei weiterem Fortschreiten im Zähler immer größere ungerade Zahlen hinzukommen, während im Nenner jedesmal dasselbe $2x^2$ hinzutritt, fangen von einem gewissen ab die Glieder wieder an größer zu werden. Die Reihe ist nur eine sogenannte semiconvergente. Summirt man die Glieder, so kommt man zunächst, wie sich beweisen läßt, immer näher heran an den Werth, den das Integral wirklich hat, und zwar wird wegen der abwechselnden Vorzeichen die Summe abwechselnd größer und kleiner. Summirt man bis zum kleinsten Glied, so kommt man am nächsten an den Werth des Integrals heran; bis dahin convergirt die Reihe. Nimmt man nur ein Glied mehr oder weniger, so erhält man Grenzen, zwischen denen der Werth des Integrals liegen muß. Summirt man weiter, so entfernen sich die Summen wieder von dem Werthe des Integrals und gehen abwechselnd nach oben und nach unten hin von ihm immer weiter aus einander. Zwar kann man nicht, wie bei einer vollkommen convergenten Reihe, ihren Werth mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen; aber durch Summation der Reihe, soweit sie convergirt, kann man doch mit einer Genauigkeit, die für große Werthe von x den praktischen Bedürfnissen genügend entspricht, ihren Werth berechnen.

Um uns eine vollständigere Vorstellung von dem Verlauf der Wärmeströmung zu bilden, wollen wir uns weiterhin vergegenwärtigen, welchen Werth der Abfall der Temperatur, also mit negativem Vorzeichen genommen $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, an den einzelnen Stellen und zu verschiedenen Zeiten hat. Dem örtlichen jedesmaligen Werthe von $\partial \vartheta / \partial x$ ist auch die dortige augenblickliche Intensität des Wärmestromes proportional.

Aus (100) folgt für:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{d \vartheta}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{C}{\sqrt{\alpha}} e^{-x^2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \text{ oder also:} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{t}} \end{aligned} \quad (101)$$

Das ist dieselbe Function, die wir in (96) für das damalige ϑ hatten und deren Verlauf wir damals discutirten. Es folgt jetzt entsprechend für den Abfall der Temperatur und die Intensität des

Wärmestromes: sie ist bei $x = 0$, d. h. in der Berührungsebene des heißen und des kalten Körpers im ersten Augenblick unendlich groß, und wird dort mit wachsender Zeit, je länger die Wärme schon geflossen ist, immer kleiner. Diese Abnahme geschieht umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus t . Nach unendlich langer Zeit, wenn völliger Temperatúrausgleich zwischen beiden Körpern eingetreten ist, wird auch die Strömung gleich Null.

An Stellen, die nicht in der Berührungsebene liegen, nimmt die Strömung von Null an zuerst zu, und nach Erreichung eines Maximums wieder bis zu Null ab. Je weiter die Stelle von der Ebene $x = 0$ entfernt ist, um so kleiner ist das Maximum der Strömung, welches erreicht wird, und um so länger dauert es bis zu seinem Eintritt. In der Berührungsebene herrscht jederzeit die stärkste Strömung im Vergleich mit allen anderen Stellen.

Das wäre eine Beschreibung der Art und Weise, wie der Ausgleich eines ursprünglich an einer Stelle vorhandenen jähen Abfalls der Temperatur erfolgt. Die genauere Betrachtung der Figur 13 auf Seite 129 läßt den beschriebenen Verlauf anschaulich erkennen.

§ 35. Eine Endfläche eines ursprünglich heißen Körpers wird dauernd auf constanter niedriger Temperatur erhalten.

Unsere Formeln geben ohne Weiteres auch die Lösung für einen anderen Fall. In der Ebene $x = 0$ herrscht — abgesehen vom Zeitpunkt t absolut gleich 0 — beständig die constante Temperatur (99) bzw. (99a):

$$\vartheta_{x=0} = \frac{C \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{\vartheta_a}{2}$$

Dabei war die Anfangstemperatur des auf der negativen x -Seite befindlichen Körpers gleich Null angenommen worden; die Anfangstemperatur des Körpers auf der positiven x -Seite war $\vartheta_a = 2 \vartheta_{x=0}$. Wir werden für letzteren Körper denselben Temperaturverlauf wie bisher erhalten, wenn wir, statt ihn mit einem anderen kälteren Körper in Berührung zu bringen, für ihn die Bedingung stellen, daß vom Augenblick $t = 0$ ab seine Oberfläche $x = 0$ auf einer constanten niedrigeren Temperatur gehalten wird.¹⁾ Wenn wir nun weiterhin letztere Temperatur als den Nullpunkt der Scale wählen,

¹⁾ Experimentelle Verwirklichung eines solchen Falles und Benutzung zur Bestimmung von Wärmeleitfähigkeiten siehe F. A. SCHULZE, Wied. Ann. d. Physik Bd. 66, 1898, S. 207.

so besaß der (jetzt allein betrachtete) Körper bis zum Augenblick $t = 0$ die überall gleiche Temperatur:

$$\Theta = \frac{\vartheta_a}{2} = \frac{C\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (102)$$

Auf die Werte von $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ nach (101) hat die Verlegung des Nullpunktes der Scale keinen Einfluß. Es wird also:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 2\Theta \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (101^*)$$

An Stelle von ϑ , wie es durch (100) gegeben war, tritt bei der Verlegung:

$$\vartheta^* = \frac{C}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\alpha}{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\alpha}{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \quad (100^*)$$

§ 36. Anwendung auf die säculare Abkühlung der Erde.

Bei dieser letzten modificirten Fassung des Problems läßt sich seine Lösung anwenden auf die Frage nach der Abkühlung des gesammten Erdkörpers. Aus vielen Gründen ist es sehr wahrscheinlich, daß die Erde sich ursprünglich in feuerflüssigem Zustande befunden hat. Sie kühlte sich von der Oberfläche her ab durch Ausstrahlung gegen den Weltraum von sehr tiefer Temperatur, während sie an Einstrahlung nur diejenige der Sonne und der Gestirne empfing, die weit kleiner war als jene Ausstrahlung. So lange nun die Erde sich noch in geschmolzenem Zustande befand, sanken die an der Oberfläche kälter und dichter gewordenen Schichten in die Tiefe,¹⁾ während aus dieser neue heißere Massen nach oben strömten. So konnte durch Convection die Temperatur des flüssigen Erdballes ausgeglichen werden. Allmählich sank die Temperatur so weit, daß an der Oberfläche eine Kruste erstarrte, wie es noch jetzt bei ähnlichem Material, aus Vulcanen ausfließender Lava sichtbar ist. Vielleicht barsten diese ersten Krusten noch, und sanken schollenweise in die Tiefe, bis sie ein Gerüst bildeten, welches schließlich die erneut gebildete Kruste hielt. Von da ab wurde die Wärme aus dem Innern nicht mehr durch Convection bis an die

¹⁾ Diesem Untersinken konnte eine Grenze dadurch gesteckt sein, daß die innersten Schichten der Erde eine größere mittlere Dichtigkeit besitzen, als die an der Oberfläche.

Oberfläche geführt, sondern konnte zu dieser nur vermittelt der recht schlechten Leitung durch die feste Kruste gelangen. Die starke Ausstrahlung der Oberfläche mußte dann zur Folge haben, daß verhältnißmäßig ganz kurze Zeit nach dem Erstarren der bleibenden Kruste diese an der Oberfläche schon abgekühlt war bis auf Temperaturen, welche den jetzt herrschenden sehr nahe lagen. Von der Zeit des Erstarrens der bleibenden Kruste ab geschah also der weitere Verlauf annähernd so, wie bei einem Körper von ursprünglich überall gleicher, hoher Temperatur, dessen Oberfläche von jenem Augenblicke ab auf constanter tieferer Temperatur gehalten wird.

Von der vorausgegangenen höheren Temperatur beobachtet man heutzutage als Folge nur noch die Zunahme der Temperatur, wenn man in das Innere der Erde dringt. Nach Sir WILLIAM THOMSON¹⁾ beträgt sie in demselben Gestein bei Edinburgh, in welchem FORBES die auf Seite 109 erwähnten Untersuchungen anstellte, 1° Celsius auf 90 englische Fuß Tiefe. Dies wäre der Werth von $\partial \vartheta / \partial x$ an der Stelle $x = 0$, für den die theoretische Beziehung (101*) auf vor. Seite ergibt, daß er der Quadratwurzel aus der verfloßenen Zeit umgekehrt proportional ist:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = 2\Theta \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \quad \text{oder} \\ \sqrt{t} = \frac{2 \cdot \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}} \Theta \quad (103)$$

Wenn die Anfangstemperatur Θ bekannt wäre, und ihr Werth sowie der von $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}$ für die Jetztzeit und der von α eingesetzt werden, kann man aus vorstehender Gleichung die Zeit berechnen, welche seit der Bildung der bleibenden starren Oberfläche verstrichen ist. Ehe wir dies ausführen, wollen wir (103) noch auf Homogenität der beiden Seiten bezüglich der Größenart prüfen.

Θ ist in derselben Scale wie der Zähler von $\partial \vartheta / \partial x$ anzugeben; dann fällt die Einheit der Temperatur vollkommen heraus. Nach

¹⁾ W. THOMSON: *secul. cooling of the earth*; Transactions Roy. Soc. Edinburgh; vol. 23, 1864; THOMSON und TAIT, *Handbuch d. theoret. Physik*, deutsch von HELMHOLTZ und WERTHEIM, Bd. I, Theil 2, p. 434. Dasselbst auch die Uebersetzungen, welche rechtfertigen, daß die obigen Formeln, die für ein eben begrenztes Medium gelten, auf die Erdkugel angewendet werden.

Gleichung (90) ist $\alpha = \frac{c \cdot \varepsilon}{4k}$ und nach den Ableitungen auf S. 33 u. 34 ist in Bezug auf die Dimensionen:

$$\left[\frac{k}{c \cdot \varepsilon} \right] = \frac{[L^2]}{[T]}$$

Also:

$$[\alpha] = \left[\frac{c \cdot \varepsilon}{k} \right] = \frac{[T]}{[L^2]}$$

$$[\sqrt{\alpha}] = \frac{[\sqrt{T}]}{[L]}$$

Dies, wie auf der rechten Seite von (103), multiplicirt mit der im Nenner von $\partial \vartheta / \partial x$ vorkommenden Länge von 90 Fufs giebt also in der That die Quadratwurzel einer Zeit, wie auf der linken Seite.

Wenn wir nun einen Zahlenwerth von α auf der rechten Seite einführen wollen, so haben ja allerdings die verschiedenen Gesteine, aus denen die Oberfläche der Erde besteht, nicht ganz gleiche Dichtigkeit ε , specifische Wärme c und Leitungsvermögen k ; aber die verschiedenen Werthe entfernen sich doch nicht sehr weit von einander, und wir können immerhin einen mittleren Werth für die Constante α annehmen.

Aus seinen Messungen über das Eindringen der Jahresschwankungen der äufseren Temperatur (S. 111) fand FORBES:

$$\frac{k}{c \cdot \varepsilon} = 400 \frac{[\text{engl. Fufs}]^2}{\text{Jahre}}$$

Es ist zunächst von Interesse anzugeben, wie grofs die Dichtigkeit ($-q_x$) des Wärmestromes ist, welcher dem jetzigen Abfall der Temperatur an der Oberfläche entsprechend aus dem Innern der Erde hervordringt. Diese Stromdichte ist gleich:

$$-q_x = k \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}$$

oder wenn wir $k = 400 \cdot c \cdot \varepsilon$ und $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{1 \text{ Centigrad}}{90 \text{ engl. Fufs}}$ einsetzen:

$$-q_x = k \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{400}{90} \cdot c \cdot \varepsilon = \text{rund } 4 \cdot c \cdot \varepsilon$$

Dies heifst in Worten: Die Wärmemenge, welche in einem Jahre durch einen Querschnitt von einem engl. Quadratfufs nach

oben dringt (linke Seite der Gleichung) würde einen Cubikfuß (Masse ϵ) des Gesteins um rund 4 Centigrad erwärmen können.

Diese Werthe in die Gleichung (103) eingesetzt ergibt bei Annahme eines plausiblen Werthes für die Anfangstemperatur $\Theta_{t=0}$, welche Zeit t vergangen sein müßte, damit der aus dem Innern der Erde dringende Wärmestrom auf seine jetzige Gröfse heruntergegangen ist. Man findet:

$$t = \frac{4 \alpha}{\pi \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2_{x=0}} \Theta^2$$

oder da nach (90): $4 \alpha = \frac{c \cdot \epsilon}{k}$

$$t = \frac{c \cdot \epsilon}{k} \cdot \frac{\Theta^2}{\pi \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2_{x=0}} = \frac{1}{400} \cdot \frac{90^2}{\pi} \cdot \Theta^2$$

$$= 6,44 \Theta^2$$

Nimmt man zunächst mit Sir WILLIAM THOMSON als Anfangstemperatur der soeben endgültig fest gewordenen Erdrinde 7000° Fahrenheit gleich rund 3900 Centigrad an, bei welcher Temperatur die am schwersten schmelzbaren Gesteine wohl noch festen Zustand haben könnten, so erhält man

$$t = 98 \text{ Millionen Jahre.}$$

Höhere Anfangstemperatur wird man schwerlich annehmen dürfen, und eine längere Zeit für die seit der ersten bleibenden Krustenbildung verstrichene dürfte daher, so weit die hier vorliegenden Erwägungen in Betracht kommen, ausgeschlossen sein. Nimmt man niedrigere Werthe für Θ an, so gehen die Werthe für t in quadratischen Verhältnissen herunter. Wenn Θ zur Hälfte des obigen Werthes, also zu 1950° Celsius angenommen wird, bei welcher Temperatur sicher viele Gesteine fest, andere flüssig gewesen wären, welche Annahme wohl die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben würde, so folgt:

$$t = 24\frac{1}{2} \text{ Millionen Jahre.}$$

Die Schätzungen der Geologen über die Zeiträume, welche zur Gesteinsbildung aus wässerigen Absätzen von Gneissen und Ur-schiefern an bis zum Alluvium erforderlich waren, lassen die Zeit von $24\frac{1}{2}$ Millionen Jahren hierfür als wohl möglich erscheinen.

Poisson hat nun eine andere Hypothese aufgestellt für die Herkunft des jetzt noch im Innern der Erde vorhandenen Wärmeverraths: daß nämlich in nicht allzu weit zurückliegender Zeit eine vorübergehende mächtige Erhitzung der Erde stattgefunden habe, welche die organischen Wesen nicht getödtet haben sollte; von dieser Erhitzung her sei das Innere noch nicht völlig abgekühlt. Ursache dieser mächtigen Erhitzung könnten etwa chemische Processe im Erdinnern gewesen sein; oder das ganze Sonnensystem könnte durch Annäherung anderer Weltkörper stark erwärmt worden sein. Auch bei dieser Hypothese müßte die obige Beziehung zwischen Anfangstemperatur, oder vielmehr zwischen dem Ueberschuß Θ über die als Nullpunkt gewählte Temperatur der Jetztzeit einerseits und der seit der Erwärmung verstrichenen Zeit t andererseits gelten. Nehmen wir kleinere Werthe für Θ an, so kommen wir bei $\Theta = 975^{\circ}$ Celsius auf $t = 6125000$ Jahre; aber eine so starke Erhitzung, bis zum Glühen, würde Poisson's Hypothese nicht annehmen wollen und schwerlich erklären können.

Bei Annahme eines $\Theta = 97,5^{\circ}$ wird $t = 61250$ Jahre. Diese Zeit ist für das Entstehen der sedimentären geologischen Formationen schon viel zu kurz; sie würde nicht einmal bis zur Tertiärepoche zurückgehen; und doch wäre bei der vorübergehenden Erwärmung alles organische Leben auf der Erde ausgestorben, im Widerspruch mit der Continuität der versteinerten Pflanzen und Thiere, die für jene Vergangenheit unzweifelhaft vorhanden ist. Erst wenn wir eine Anfangstemperatur $\Theta = 32,5^{\circ}$, also eine um $32\frac{1}{2}^{\circ}$ höhere Temperatur als die jetzige annehmen, so würde bei ihr an den Polen wenigstens sicherlich Flora und Fauna nicht zerstört worden sein. Aber diese Erwärmung hätte stattfinden müssen vor $t = 6806$ Jahren, also zu einer bereits in die Menschengeschichte hineinfallenden Zeit. Es ist aber unmöglich, daß zur Zeit des Pyramidenbaues in Aegypten, während in Europa Eisbären und Mammuths lebten, eine Erhitzung der Erdoberfläche um rund 30° über die jetzige Temperatur stattgefunden habe. Die Hypothese einer einmaligen vorübergehenden mächtigen Erhitzung der Erde wird also durch diese Schlußfolgerungen ausgeschlossen, und das ist jedenfalls schon von Wichtigkeit. Die Berechnung der Zeit, welche seit Bildung einer festen Oberfläche der ursprünglich feuerflüssigen Erde verstrichen ist, zu $24\frac{1}{2}$ bis 98 Millionen Jahre ist zwar höchst unsicher; doch widersprechen ihr nicht die geologischen Daten.

§ 37. Beziehungen der Probleme von § 32 und § 34 zu den analogen Problemen für Stäbe von endlicher Länge.¹⁾

Wir wollen nun noch kurz zurückkommen auf Probleme, die dem zuletzt behandelten für unbegrenzte Medien analog sind, aber jetzt wieder für endlich lange Stäbe bei Ausschluss äußerer Wärmeabgabe gestellt werden sollen. Für solche können wir die Fragen aufwerfen: wie wird der Verlauf der Temperatur, wenn diese zu Anfang nur in einer unendlich dünnen Querschicht von Null verschieden war, in ihr aber sehr hohe Werthe hatte? und welches ist ihr Verlauf, wenn die beiden Endflächen eines ursprünglich an allen Stellen gleich heißen Stabes von dem Augenblick $t = 0$ ab auf einer constanten niedrigeren Temperatur gehalten werden, welcher Fall dem in § 35 besprochenen analog ist? In Anknüpfung an die allgemeine Lösung für endliche Stäbe durch FOURIER'sche Reihen, wie sie im fünften Kapitel entwickelt wurde, kann man durch solche sich die gegebenen Anfangsvertheilungen darstellen und hat dann auch den ganzen weiteren Verlauf der Temperatur. Dabei wären dann die gegebenen Anfangstemperaturen $\vartheta_{t=0}$ über die endliche Länge des Stabes hinaus, rein mathematisch betrachtet, als periodisch sich wiederholende Functionen $f(x)$ fortgesetzt zu denken.

Das erste Problem wollen wir nur unter vereinfachenden Annahmen betrachten. Wir nehmen den Stab als von $-L$ bis $+L$ sich erstreckend an (nicht wie im fünften Kapitel von $x = 0$ bis $x = +L$). Wir bekümmern uns nicht um die an den Enden vorgeschriebenen Grenzbedingungen.²⁾ Solche würden auch garnicht vorgeschrieben

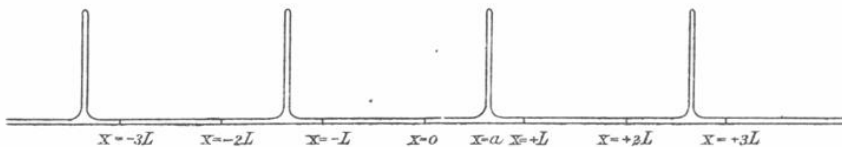


Fig. 15.

sein, wenn wir statt eines geraden Stabes einen dünnen Ring von der Länge $2L$ betrachten (siehe die Fußnote auf S. 114). Für ihn

¹⁾ Die in diesem Paragraphen ausgeführten Beziehungen hat HELMHOLTZ nur angedeutet. A. d. H.

²⁾ Es wäre nicht schwierig, an die folgenden Rechnungen auch noch solche für vorgeschriebene Grenzbedingungen anzuknüpfen; das würde aber allzuweit von den Andeutungen HELMHOLTZ' abliegen. A. d. H.

gelten die folgenden Betrachtungen in aller Strenge. Ursprünglich herrsche bei $x = a$ eine unendlich hohe, sonst überall verschwindende Temperatur. Dieser Verlauf von $\vartheta_{t=0} = f(x)$ von $-L$ bis $+L$ ist für jede Periode von $2L$ zu wiederholen (Fig. 15).

Festzusetzen ist dann noch [analog (88) bzw. (92)], wenn F eine von Null verschiedene endliche GröÙe bedeutet, daÙ:

$$\int_{-L}^{+L} \vartheta_{t=0} dx = \int_{-L}^{+L} f(x) dx = F$$

Zur Darstellung des Anfangszustandes durch eine FOURIER'sche Reihe benutzen wir deren Form, wie sie in (87) hingeschrieben war:

$$\vartheta_{t=0} = \frac{F}{2L} + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(s) \cos \left[\frac{a\pi(x-s)}{L} \right] ds$$

$f(s)$ ist von Null verschieden nur unendlich nahe bei $s = a$; vor das Integralzeichen tritt daher der Werth des cosinus für $s = a$; das Integral, welches noch bleibt, ist gleich F ; und es wird:

$$\vartheta_{t=0} = \frac{F}{2L} + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{F}{L} \cos \left[\frac{a\pi(x-a)}{L} \right]$$

In dieser Form dargestellt werden für $x = a$ alle Glieder der $\sum$ gleich F/L und ϑ in der That unendlich. Für alle von a verschiedenen Werthe von x wird der Werth der Summe unbestimmt; sie convergirt nicht, sondern oscillirt; absolute Convergenz ist ja auch bei dem vorgeschriebenen discontinuirlichen Verlauf nicht möglich. Diese Schwierigkeit fällt, wie wir wissen, weg, wenn wir ϑ für ein noch so kleines, von Null verschiedenes t bilden. Denn es wird für spätere Zeiten durch den Hinzutritt derselben Exponentialfunctionen von t wie auf Seite 118

$$\vartheta = \frac{F}{2L} + \frac{F}{L} \sum_{a=1}^{\infty} e^{n_a t} \cos \left[\frac{a\pi(x-a)}{L} \right] \quad (104)$$

wo:

$$n_a = -\frac{a^2 \pi^2}{4\alpha L^2}$$

und wo α die durch (90) eingeführte Abkürzung ist.

In der vorstehenden Summe sind solche Factoren $e^{n_a t}$ zu den Gliedern hinzugetreten, welche nach dem in § 26 für die FOURIER'schen Reihen geführten Beweis der Convergenz diese bewirken, auch

für jede noch so kleine Zeit. In (104) haben wir die Lösung unseres ersten Problems. Würden wir in ihr wieder die Stablänge $2L$ überaus groß werden lassen, so daß die Enden $\pm L$ ins Unendliche rücken, und führen wie auf Seite 116 oben und 118 unten ein:

$$\sigma = \frac{a\pi}{L} \quad d\sigma = \frac{\pi}{L}$$

so wird:

$$\vartheta = \frac{F}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \cdot e^{n_a t} \cdot \cos [\sigma(x-a)]$$

in Uebereinstimmung mit dem auf Seite 119, unten, gefundenen Werth für ϑ , für welchen weiterhin die Form (95) ausgerechnet wurde:

$$\vartheta = F \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \cdot e^{-a \frac{(x-a)^2}{t}} \quad (95)$$

Wir können nun auch von dieser Lösung für einen unendlich langen Stab ausgehend die Lösung für einen endlichen Stab angeben. Denn letztere stimmt, wie aus Figur 15 ersichtlich, mit derjenigen für einen unbegrenzten Stab, wenn in diesem Wärme ursprünglich angehäuft war nicht nur in der unendlich dünnen Schicht bei $x = a$, sondern auch bei $x = -2L + a$, bei $x = +2L + a$, bei $x = \pm 4L + a$ u. s. f. Wir haben also alle Lösungen (95) für diese Ausgangsschichten der Wärme bei $x = a \pm 2aL$ zu bilden und zu addiren; oder wir erhalten:

$$\vartheta = F \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \sum_{a=-\infty}^{a=+\infty} e^{-a \frac{(x-a+2aL)^2}{t}}$$

Diese Lösung ist gleich der in (104) gefundenen,¹⁾ und nur der Form nach von ihr verschieden.

Die zweite Frage, die wir auf Seite 140 aufwarfen, würde dem Anfangszustande entsprechen, daß für die ganze Länge des Stabes (jetzt nicht mehr von $x = -L$, sondern wieder:) von $x = 0$ bis $x = +L$ die Temperatur denselben Werth Θ (Bezeichnung wie in Gleichung 102 u. ff., 100*, 101*) hat, und daß weiterhin die Temperatur der beiden Stabenden dauernd auf einem niedrigeren Werth erhalten wird, den wir als Nullpunkt der Scale wählen

¹⁾ Wie aus der Theorie der linearen Transformation der Theta-Functionen bewiesen werden kann.

wollen. Schon aus bloßen Symmetriegründen ist ersichtlich, daß diese constante Temperatur für die Stabenden dauernd stattfindet, wenn wir beide letzteren in Berührung bringen mit ganz gleichen Stäben, die aber um Θ kälter sind als die verlangte constante Temperatur der Stabenden, analog den Ueberlegungen von § 35 (und wenn noch weiter in dieser Weise abwechselnd warme und kalte gleich lange mit den Endflächen einander berührende Stäbe folgen). Wir müssen uns also $\vartheta_{t=0} = f(x)$ in der Weise über die Stabenden

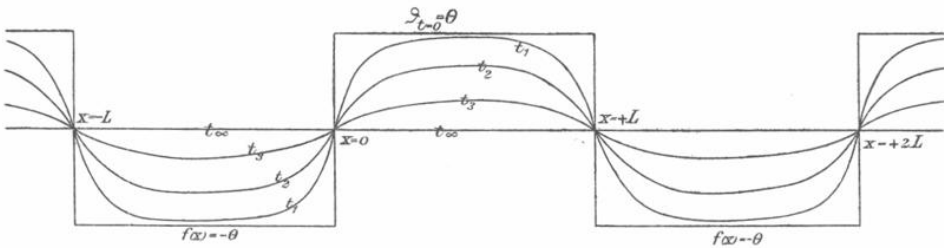


Fig. 16.

hinaus fortgesetzt denken, wie Figur 16 darstellt. Den weiteren Verlauf der Temperatur für spätere Zeiten $t_1, t_2, \dots, t_\infty$ stellen dann die entsprechend bezeichneten Curven dar.

Wollen wir $\vartheta_{t=0} = f(x)$ durch eine FOURIER'sche Reihe darstellen, so brauchen wir nur die Sinus-Glieder, da die Function von $x = 0$ bis $x = -L$ entgegengesetzt gleiche Werthe hat, wie von $x = 0$ bis $x = +L$. Wir werden also setzen:

$$\vartheta_{t=0} = \sum_a B_a \sin \frac{a \pi x}{L}$$

und es wird:

$$B_a = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \vartheta_{t=0} \cdot \sin \left(\frac{a \pi x}{L} \right) \cdot dx$$

Da $\vartheta_{t=0}$ sowohl, wie die Sinus von $-L$ bis 0 entgegengesetzt gleiche Werthe durchlaufen wie von 0 bis $+L$, wird auch:

$$B_a = \frac{2}{L} \int_0^L \vartheta_{t=0} \cdot \sin \left(\frac{a \pi x}{L} \right) dx$$

oder da $\vartheta_{t=0}$ von 0 bis L constant gleich Θ ist:

$$B_a = \frac{2\Theta}{L} \int_0^L \sin \left(\frac{a \pi x}{L} \right) \cdot dx = \frac{2\Theta}{a \pi} \cdot \left\{ -\cos \frac{a \pi x}{L} \right\}_{x=0}^{x=L}$$

Die zwischen den Grenzen genommene Klammer ist gleich $(1 - \cos a\pi)$, wird also, wenn a eine gerade Zahl ist, gleich Null; wenn a eine ungerade Zahl, gleich 2. Es wird also:

$$\vartheta_{t=0} = \frac{4\Theta}{\pi} \sum_{a=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{a} \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right)$$

Diese Reihe ist nur bedingt convergent: entsprechend dem discontinuirlichen Verlaufe von $f(x)$. Die Reihe für Werthe von $t > 0$ wird aber wieder absolut convergent:

$$\vartheta = \frac{4\Theta}{\pi} \sum_{a=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \quad (105)$$

Hiermit haben wir die Lösung für den Stab von der Anfangstemperatur Θ , dessen beide Enden von $t = 0$ ab beständig auf der Temperatur Null gehalten werden. Aus (105) können wir die Lösung für $L = \infty$ wiederfinden. Setzen wir wieder $\frac{a\pi}{L} = \sigma$, so wächst jetzt a in Schritten von je zwei Einheiten, also σ in Schritten von je $\frac{2\pi}{L} = d\sigma$, und es wird für über jede Grenze wachsende Stablänge:

$$\vartheta = \frac{2\Theta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{4\alpha} t} \cdot \sin(\sigma x)$$

In dem Integral tritt x nur als Parameter auf; also ist:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{2\Theta}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{4\alpha} t} \cdot \cos(\sigma x)$$

Dies ist dasselbe Integral wie auf S. 119 unten (hinter Gleichung 92), damals aber für ϑ selbst, wenn das dortige $F = 2\Theta$ und $a = 0$ gesetzt wird; also wird nach (94) und (95) jetzt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 2\Theta \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \cdot e^{-\alpha \frac{x^2}{t}}$$

und:

$$\vartheta = 2\Theta \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \cdot \int_0^x e^{-\alpha \frac{x^2}{t}} dx$$

wo als untere Grenze deshalb Null zu nehmen ist, weil für $x = 0$ auch $\vartheta = 0$ sein soll.

Dies wäre die Lösung für das Problem, wie es in § 35 definirt wurde. In der That sieht man leicht, daß das damalige ϑ^* der Gleichung (100*) gleich ist unserem jetzigen ϑ .

Für die Anwendung der Lösungen (104) und (105) auf sehr dünne Ringe gilt die Anmerkung auf S. 114. In (104) ist die Lösung gegeben für den Fall, daß eine Schicht eines Ringes von der Axenlänge $2L$ ursprünglich auf unendlich hohe Temperatur erwärmt war; in (105) für den Fall, daß die eine Ringhälfte die Temperatur $+\Theta$, die andere $-\Theta$ besaß.

Achtes Kapitel.

§ 38. Die Temperatur sei Function der Zeit und der Entfernung von einem gegebenen Punkte.¹⁾

Von nicht stationären Wärmeströmungen haben wir bisher nur solche Fälle behandelt, in denen die Temperatur außer von der Zeit noch von der Abmessung x in einer geradlinigen Richtung abhängig war. Zum Schluß unserer Betrachtungen über die Wärmeleitung wollen wir auch noch zeigen, wie man zu der Lösung gelangt für den Fall, daß ϑ Function ist außer von t noch vom Abstände r gerechnet von einem festen Punkt aus, etwa vom Anfangspunkte der Coordinaten. Die Isothermen sind dann concentrische Kugeln; aber im Gegensatz zu der stationären Strömung, die auf S. 68 u. 69 betrachtet wurde, haben zwar zu einer bestimmten Zeit alle Punkte einer Kugelfläche dieselbe Temperatur; deren Werth ist aber zu verschiedenen Zeiten verschieden.

Wir müssen Lösungen der Gleichung (33):

$$k \Delta \vartheta = c \cdot \varepsilon \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

für diesen Fall suchen. Für $\Delta \vartheta$ gilt dann der in (37) abgeleitete Werth:

$$\Delta \vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \vartheta)}{\partial r^2}$$

wo jetzt das Zeichen der partiellen Differentiation zu schreiben ist,

¹⁾ Nach dem Notizbuch ausgearbeitet.

da ϑ auch von t abhängt. Wir erhalten mithin die Differentialgleichung:

$$\frac{k}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \vartheta)}{\partial r^2} = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

oder da r unabhängige Variable ist, wie t , also t gegenüber constant:

$$k \cdot \frac{\partial^2 (r \vartheta)}{\partial r^2} = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial (r \vartheta)}{\partial t}$$

Nennen wir:

$$\varphi = r \cdot \vartheta$$

so muß sein:

$$k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = c \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Das ist für φ als Function von t und r dieselbe Differentialgleichung, wie (38) für ϑ als Function von t und x , oder wie (39), wenn $h = 0$ gesetzt wird. Es gilt daher auch eine Lösung analog (40):

$$\varphi = A \cdot e^{nt + lr}$$

wo wie (41) (für $h = 0$) sein muß:

$$k \cdot l^2 = c \cdot \varepsilon \cdot n$$

Es wird also jetzt:

$$\vartheta = \frac{A}{r} e^{nt + lr} = \frac{A}{r} e^{\frac{k l^2}{c \cdot \varepsilon} t + lr}$$

Damit haben wir den Ausgangspunkt für die Lösung von Strömungsproblemen in Kugeln, die den früher gelösten für Stäbe ganz analog sind. Setzen wir z. B. wie in (46):

$$l = i \lambda$$

so erhalten wir Lösungen von der Form:

$$\vartheta = \frac{A}{r} e^{-\frac{k \lambda^2}{c \cdot \varepsilon} \cdot t} \cos(\lambda r)$$

durch die wir Probleme lösen können, die denjenigen des NEUMANN'schen Stabes analog sind. Setzen wir wie vor Gleichung (69):

$$n = i \nu$$

so erhalten wir die Lösung für den Fall, daß an der Oberfläche der Kugel periodische Temperaturschwankungen erregt werden, die als Wellen ins Innere eindringen.

Die ausführliche Behandlung solcher Probleme findet man z. B. in RIEMANN'S Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, bearbeitet von HATTENDORFF, Braunschweig 1876, p. 151 u. ff.; 4. Aufl. selbständig bearbeitet von HEINRICH WEBER, ebenda 1901, p. 123—146.

Dritter Abschnitt.

Wärmestrahlung.

§ 39. Bestrahlung und Ausstrahlung von Flächenelementen.

Schon für die Möglichkeit, von „gleicher“ Temperatur zweier Körper überhaupt nur sprechen zu können, war das Axiom grundlegend, daß zwischen Körpern von „gleicher“ Temperatur kein Wärmeaustausch stattfindet. Im vorigen Abschnitt haben wir nun solche Elementargesetze für die Leitung der Wärme aufgestellt, daß, wie verlangt, zwischen gleich warmen Körpern kein Ueberströmen stattfindet, daß ferner die Wärme immer von den heißeren zu den kälteren Körpern oder Körperteilen fließt und daß hieraus ein fortschreitender Ausgleich der Temperaturunterschiede hervor geht. Dasselbe läßt sich nun auch für den Wärmeaustausch durch Strahlung durchführen, so daß auch auf den durch sie vorkommenden Austausch die Begriffsbestimmung der Temperatur noch paßt. Und zwar war es mein verstorbener Freund GUSTAV KIRCHHOFF, der zuerst die Frage aufgeworfen und beantwortet hat, welche Sätze für die Strahlung verschiedener Körper, bei verschiedenen Temperaturen und verschiedener Art der Wärmestrahlen erfüllt sein müssen, damit ein Uebergang der Wärme vom kälteren zum heißeren Körper unmöglich wird.

Wir wollen ausgehen von der Strahlung, welche Flächenelemente trifft, und von solchen ausgeht. Von einem Bündel paralleler Strahlen werde ein Teil aufgefangen von einem Flächenstück von der Größe $d\omega$, Fig. 17. Die Normale N auf der kleinen Fläche $d\omega$ bilde mit der Strahlenrichtung einen Winkel α , der immer als spitzer genommen wird. Dann ist der Querschnitt des von der weitergehenden Strahlung fortgenommenen Teiles $= d\omega \cdot \cos \alpha$. Sind die Strahlen nicht parallel, sondern gehen sie von einem Punkte A aus, so hängt die Bestrahlung von $d\omega$ nicht nur von dessen Größe und Neigung gegen die Strahlen, sondern auch von der Entfernung von

A ab. Die gesammte Strahlenmasse, welche vom Centrum *A* aus nach allen Richtungen hin gleichmäfsig sich ausbreiten möge, werde durch die Gröfse *J* bezeichnet. Um die Bedeutung dieser Gröfse zu erfassen, bedenken wir zunächst, dafs Strahlung von Körpern keineswegs blofs dann stattfindet, wenn sie leuchten; vielmehr ist die leuchtende Strahlung nur eine besondere Art der Strahlung überhaupt. Jeder Körper strahlt, auch ohne zu leuchten, Wärme aus; mehr, wenn er heißer ist; weniger, wenn er kälter ist. Die dunklen Wärmestrahlen befolgen ganz dieselben Gesetze, wie die leuchtenden; und alle folgenden Ueberlegungen gelten für die Wärmestrahlung schlechweg. Das Wesentliche ist nun dabei für uns, dafs eine Quelle von Strahlen beständig in Form der letzteren Ausgaben aus ihrem Inhalt an Wärme macht; die obige Gröfse *J* soll nun diejenige Wärmemenge bedeuten, welche das Strahlencentrum *A* pro Zeiteinheit ausstrahlt. Die Strahlung transportirt diese Wärmemenge, welche vollständig wiedergewonnen werden kann, wenn man

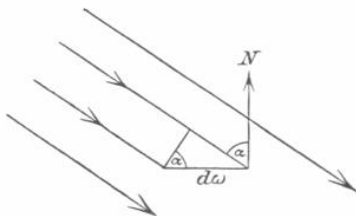


Fig. 17.

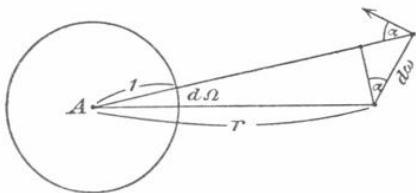


Fig. 18.

durch einen Körper, auf den sie fällt, die Strahlung ohne Verlust ganz absorbiren läfst. Wir construiren uns um *A* eine Kugel mit dem Radius 1; das Strahlenbündel, welches die Fläche *dω* trifft, schneide aus der Oberfläche dieser Kugel die Fläche *dΩ* aus. (Fig. 18.) Dann ist das in diesem Strahlenbündel pro Zeiteinheit ausgesandte Strahlungsquantum $= J \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$. Der Querschnitt des Strahlenbündels an der Stelle *dω*, also *dω* · cos α nach Figur 17, kann als Stück einer Kugeloberfläche betrachtet werden, die um *A* mit dem Radius *r* beschrieben ist, wo *r* die Entfernung der beleuchteten Fläche *dω* vom Strahlungscentrum ist. Dann verhält sich ersichtlich:

$$d\Omega : d\omega \cos \alpha = 1 : r^2$$

und es wird das auf *dω* pro Zeiteinheit auftreffende oder von ihm fortgenommene Strahlenquantum:

$$J \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} = J \frac{d\omega \cos \alpha}{4\pi r^2} \quad (106)$$

In dem ersten dieser Ausdrücke nennt man die Fläche $d\Omega$ auf der Kugelfläche vom Radius 1 die „Kegelecke“ des Strahlenbündels, ein Ausdruck, der von FRANZ NEUMANN bei Gelegenheit des elektromagnetischen Potentials von Stromleitern eingeführt wurde. Der zweite der Ausdrücke sagt aus, daß die Dichtigkeit der Strahlen auf einem Querschnitt des Bündels, oder daß die objective „Helligkeit“ abnimmt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Strahlencentrum. Denn die Größe des Querschnitts ist $d\omega \cos \alpha$, und die auf die Flächeneinheit des Querschnitts fallende Strahlenmenge oder die Dichtigkeit der Strahlen ist also:

$$\frac{J}{4\pi r^2} \quad (107)$$

Wir wollen nun weiter annehmen, daß wir statt des leuchtenden Punktes ein kleines Flächenstück haben, welches in allen seinen Punkten gleich stark leuchtet. Nehmen wir in ihm ein Flächenelement ds , so ist dessen Leuchtstärke zunächst proportional der Größe von ds . Ferner ist die von ihm ausgesendete Strahlenmenge nach dem LAMBERT'schen Gesetz proportional dem Cosinus des Winkels β , den die Strahlenrichtung mit der Normalen $\mathfrak{N}$ auf ds bildet. (Fig. 19.) Dieses Gesetz gilt für das Leuchten von matten, nicht polirten, continuirlichen und durchaus gleichmäßigen Flächen, sowohl wenn sie selbstleuchtend sind, wie auch wenn sie, durch fremdes Licht gleichmäßig beleuchtet, dieses nach allen Seiten hin diffus reflectiren.

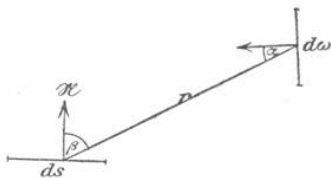


Fig. 19.

Zur Ableitung des LAMBERT'schen Gesetzes muß man sich die durch ein Oberflächenelement ds eines Körpers heraustretende Strahlung von einem System von strahlenden Punkten ausgehend denken, welche das Innere des Körpers erfüllen, und deren Strahlung dort noch Absorption erleidet, ehe sie bis an die Oberfläche gedrungen ist. Das bestrahlte Flächenelement $d\omega$ ist klein gegen seinen Abstand r von ds (AB in Fig. 20), so daß das ihm zugesandte Strahlenbündel als ein Kegel betrachtet werden kann, dessen Spitze in $d\omega$ liegt. Alle leuchtenden Molekeln innerhalb dieses Kegels liefern einen Beitrag zu der nach $d\omega$ gelangenden Strahlung. Wir be-

trachten ein Volumenelement $d\tau$ des Kegels zwischen zwei Querschnitten, die im Abstände ϱ und $\varrho + d\varrho$ von ds liegen. Wenn n die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit ist, ist $n \cdot d\tau$ die in

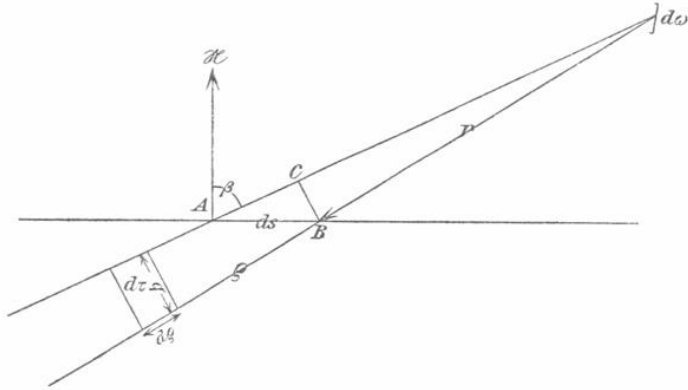


Fig. 20.

dem Volumenelement. Die von jeder einzelnen Molekel, allein betrachtet, herrührende Dichtigkeit der frei ausgesandten Strahlen sei wie oben (107) in der Entfernung r :

$$\frac{J}{4\pi r^2}$$

Hierin wäre aber r von der betreffenden leuchtenden Molekel aus zu rechnen; statt seiner ist also in der Bezeichnung von Fig. 20 zu setzen $(r + \varrho)$. Für die sämtlichen $n \cdot d\tau$ in $d\tau$ enthaltenen Molekeln wäre daher die an der Stelle von $d\omega$ hervorgebrachte Dichtigkeit der Strahlung, wenn diese frei ausgesandt würde:

$$\frac{J \cdot n \, d\tau}{4\pi (r + \varrho)^2}$$

Von dieser Strahlung wird bis zum Austritt aus der Oberfläche ein gewisser Bruchtheil absorbirt; nur der Rest tritt aus; wie viel übrig bleibt, ist von der Entfernung ϱ von ds abhängig; es wird daher die bei $d\omega$ herrschende Dichtigkeit der von den Molekeln in $d\tau$ herrührenden und durch ds austretenden Strahlung:

$$\frac{J \cdot n \, d\tau}{4\pi (r + \varrho)^2} f(\varrho)$$

Das Volumen von $d\tau$ ist gleich $q \cdot d\varrho$, wo q der Querschnitt des Kegels an der betreffenden Stelle ist. Der Querschnitt q verhält

sich zu dem Querschnitt bei BC wie $(r + \varrho)^2 : r^2$; der bei BC ist aber gleich $ds \cdot \cos \beta$; also folgt:

$$q : ds \cos \beta = (r + \varrho)^2 : r^2$$

$$d\tau = q \cdot d\varrho = \frac{(r + \varrho)^2 \cdot ds \cos \beta}{r^2} d\varrho$$

und die Dichtigkeit der von $d\tau$ herrührenden, aus ds austretenden Strahlung (an der Stelle von $d\omega$):

$$\frac{J \cdot n \cdot ds \cos \beta}{4 \pi r^2} f(\varrho) d\varrho$$

Für die aus allen Elementen $d\tau$ des Kegels entspringende Strahlung wird diese Dichtigkeit:

$$\frac{J n \cdot ds \cos \beta}{4 \pi r^2} \int_0^{\infty} f(\varrho) d\varrho$$

Das auftretende Integral wird eine spezifische Constante der betreffenden Substanz. Setze ich das von der Länge und Richtung von r , sowie von der Gröfse von ds unabhängige Product:

$$J \cdot n \int_0^{\infty} f(\varrho) \cdot d\varrho = 4i$$

so wird jene Strahlungsdichtigkeit gleich:

$$\frac{i \cdot ds \cdot \cos \beta}{\pi r^2}$$

An Stelle des J (107) in den früheren Ausdrücken für das von einem Punkte ausgehende, auf ein Flächenelement $d\omega$ fallende Strahlenquantum (106) tritt daher, wenn letzteres von ds ausgeht, ein Ausdruck: $4i \cdot ds \cdot \cos \beta$, wo i eine Constante ist, welche durch die „Leuchtintensität“ des leuchtenden Flächenelementes bestimmt ist. Jenes Strahlenquantum oder (wenn es sich um Lichtstrahlen handelt) jene „Lichtmenge“ wird alsdann:

$$L = i \frac{d\omega \cdot ds \cdot \cos \alpha \cos \beta}{\pi r^2} \quad (108)$$

Wenn wir die Kegeleke $d\Omega$ einführen, so wird:

$$L = i \frac{ds \cdot d\Omega \cdot \cos \beta}{\pi} \quad (108a)$$

Die Bedeutung von i können wir noch schärfer erkennen, wenn wir berechnen, welche Lichtmenge (in der Secunde) pro Flächeneinheit nach allen Seiten hin ausgesendet wird. Da zunächst L für die Fläche von der Größe ds gilt, ist (108a) durch ds zu dividiren, um die Lichtmenge pro Flächeneinheit zu erhalten. Das Flächenelement $d\Omega$ auf der Einheitskugel wollen wir in Polarcoordinaten ausdrücken. Als solche nehmen wir außer dem Winkel β noch den Winkel ϑ , den eine beliebige durch die Normale $\mathfrak{N}$ gelegte Ebene mit einer festen derartigen Ebene bildet. Dann ist:

$$d\Omega = \sin \beta \cdot d\vartheta \cdot d\beta$$

Dies ist in die durch ds dividirte rechte Seite von (108a) einzusetzen, und um die Gesamtstrahlung des isolirt gedachten Flächenelementes nach einer Seite hin zu erhalten, nach ϑ von 0 bis 2π , nach β von 0 bis $\pi/2$ zu integriren. Dann ergibt sich:

$$\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \cdot d\beta \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta = i \frac{\pi/2}{\sin^2 \beta} = i$$

Die „Leuchtintensität“ oder allgemeiner die „Strahlungsintensität“ i bedeutet also die Strahlenmenge, welche von der (isolirt gedachten) Flächeneinheit nach allen Richtungen einer Seite hin pro Zeiteinheit ausgesendet wird.

Die Leuchtintensität hängt nicht mehr von geometrischen Abmessungen, sondern nur von der Beschaffenheit der strahlenden Fläche und von ihrer Temperatur ab, indem sie jedenfalls mit letzterer zusammen wächst. —

Wenn wir nun umgekehrt die Strahlungsmenge angeben wollen, welche von $d\omega$ ausgeht und auf ds fällt, so ändert sich der durch die Configuration gegebene Quotient in L durch die Vertauschung von ds und $d\omega$ nicht; aber i kann einen anderen Wert i' haben, so daß wir erhalten:

$$L' = i' \frac{d\omega \cdot ds \cdot \cos \alpha \cos \beta}{\pi r^2} \quad (109)$$

Daß die Strahlen unter Umständen leuchtende sind, ist für uns hier Nebensache; uns kommt es nur darauf an, daß sie Wärme übertragen. Es würde also (108) die Menge der von ds auf $d\omega$, (109) die der von $d\omega$ auf ds gestrahlten Wärme sein, für jede Secunde Strahlungsdauer. Wie viel von der Strahlenmenge, die auf ein Flächenelement fällt, in ihm in Wärme verwandelt wird, hängt nun noch von seinem Reflexions- und Absorptionsvermögen ab.

§ 40. Emission und Absorption vollkommen schwarzer Flächenelemente und Körper.

In Hinsicht auf Reflexions- und Absorptionsvermögen hat KIRCHHOFF den Begriff von absolut schwarzen Körpern gebildet, die von den auf sie fallenden Strahlen nichts wieder fortlassen, sondern alles zurückhalten; sie reflectiren also keine und absorbiren alle Strahlen. Von den wirklich vorkommenden schwarzen Körpern können feine matte schwarze Pulver, oder Flächen, die mit Kienruß überzogen sind, und ähnliche Körper annähernd als „vollkommen schwarze“ angesehen werden; die Spuren von Reflexion, die an ihnen noch zu bemerken sind, sind sehr gering. Sie werfen deshalb noch ein wenig Licht zurück, weil sie ein größeres Brechungsverhältniß besitzen als die umgebende Luft. Sie würden daher dem Ideal noch viel näher kommen, wenn man sie einbetten würde in ein Medium von gleicher Brechbarkeit, so daß die Reflexion un wahrnehmbar würde. So kann man sich der Verwirklichung des vollkommen schwarzen Körpers beliebig nähern.¹⁾ In Bezug auf die Absorption ist zu bemerken, daß der Körper in der individuell gegebenen Dicke und Beschaffenheit zu nehmen ist; es genügt also, daß der Körper dick genug ist, daß kein Licht durchdringen kann bis zur anderen Seite. Wenn die schwarzen Körper selbst erhitzt werden und Wärmestrahlen aussenden, so strahlen sie sehr energisch (glühende Kohle!); wir werden sehen, daß ein Körper desto stärker strahlt, je „schwärzer“ er ist.

Die beiden zuvor betrachteten Flächenelemente $d\omega$ und ds sollen auch „absolut schwarz“ sein. Dann wird die ganze in (108) gegebene Strahlung, die von ds ausgeht, durch $d\omega$ absorbirt, während letzteres die in (109) gegebene Strahlung aussendet, die von ds absorbirt wird. Wenn nun $d\omega$ und ds gleiche Temperatur haben, so muß Gleichgewicht der Wärmestrahlung herrschen. Daraus folgt, daß für jedes Element die Einstrahlung gleich der Ausstrahlung sein muß; oder es ist $L = L'$. Daraus folgt dann $i = i'$; d. h. bei gleicher Temperatur ist die „Leuchtintensität“ für beide Flächen dieselbe, unabhängig von deren Beschaffenheit, wenn sie nur vollkommen schwarz sind. Hat dagegen das eine der Flächenelemente eine höhere Temperatur als das andere, so wird es sich abkühlen,

¹⁾ Auf einer Folgerung des noch abzuleitenden KIRCHHOFF'schen Gesetzes beruht eine Verwirklichung des „vollkommen schwarzen“ Körpers, die zuerst von W. WIEN und O. LUMMER ausgeführt worden ist; siehe WIED. ANN. 56, p. 453, 1895.

indem es mehr Wärme ausstrahlt, als es empfängt, entsprechend dem Verhalten von i mit steigender Temperatur zuzunehmen.

Man könnte nun daran Anstoß nehmen, daß ja isolirte Flächenelemente nicht existiren; aber wir können analoge Schlüsse, wie die vorstehenden, leicht auch ziehen für die Strahlung endlicher Flächen. Wir gelangen dann zum ersten Theil des KIRCHHOFF'schen Gesetzes, durch den ausgesprochen wird, daß jeder absolut schwarze Körper von jeder Flächeneinheit seiner Oberfläche bei gleicher Temperatur mit gleicher Intensität Wärmestrahlen aussendet.

Wir betrachten eine Hülle aus einem absolut schwarzen Körper, die einen anderen in ihrem Innern umschließt. Dann stehen diese beiden Körper nur unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Wärmezustrahlung. Die von der Hülle ausgehende Strahlung wird entweder andere Theile der Hülle treffen und von diesen absorhirt werden, also der Hülle verbleiben; oder zum Theil wird sie den inneren Körper treffen und von ihm verschluckt werden. Die Strahlen, die von dem kleineren eingeschlossenen Körper ausgehen, werden aber alle die Hülle treffen und von ihr absorhirt werden. Derjenige Theil der Gesamtstrahlung der schwarzen Hülle, der den inneren Körper trifft, muß nun gleich sein der gesammten Ausstrahlung des letzteren, wenn beide gleiche Temperatur haben. Denn sonst könnte deren Gleichheit nicht bestehen bleiben.

Der Berechnung der gegenseitigen Zustrahlung müssen wir die Ausdrücke (108) und (109) für diejenige von Flächenelementen zu Grunde legen. Allgemein würden wir dann ds als ein Element der Oberfläche der Hülle, $d\omega$ als ein solches des eingeschlossenen Körpers nehmen können; hätten den Werth der Zustrahlung für alle Flächenpaare mit freier Verbindungslinie zu bilden und diese sämmtlichen Werthe zu addiren. Aus (108) erhalten wir für die Strahlung der ganzen Hülle auf den ganzen inneren Körper:

$$\sum L = \frac{i}{\pi} \iint \frac{ds d\omega \cos \alpha \cos \beta}{r^2}$$

wo in den Integrationen jedes solche Paar von Flächenelementen ds und $d\omega$ einmal vorkommt, deren Verbindungslinie gemäß der Gestalt von Hülle und eingeschlossenem Körper völlig frei verläuft, so daß ds dem $d\omega$ zustrahlen kann. Aus (109) ergibt sich für die Strahlung des inneren Körpers auf die Hülle:

$$\sum L' = \frac{i'}{\pi} \iint \frac{ds d\omega \cos \alpha \cos \beta}{r^2}$$

wo das Doppelintegral dieselben Paare von Flächenelementen wie in $\sum L$ umfaßt, da für ebendieselben ds , welche $d\omega$ zustrahlen können, auch umgekehrt $d\omega$ dem ds zustrahlen kann. Die vorhin als nothwendig bewiesene Gleichheit von $\sum L$ und $\sum L'$ führt daher wieder zu dem Resultat:

$$i = i'$$

Der lebendigeren Vorstellung zu Liebe wollen wir die mit $\sum L$ und $\sum L'$ bezeichneten Zustrahlungen von Hülle und Körper für einen einzelnen Fall vollständig ausrechnen.

Wir nehmen den inneren Körper als Kugel vom Radius ϱ , die von einer concentrischen Hohlkugel vom Radius R als Hülle umschlossen wird (Figur 21). Wir berechnen zuerst die Strahlung der Hohlkugel gegen die umschlossene. In (108a) ist $d\Omega$ die Kegelecke, unter der ein Oberflächenelement $d\omega$ der inneren Kugel von ds aus erscheint, und β ist der Winkel des zu ds hingezogenen Radius mit der Verbindungslinie der beiden Oberflächenelemente. Wir führen mit ds als Anfangspunkt Polarcordinaten β und ϑ wie auf Seite 152 oben ein; dann ist wie dort $d\Omega = \sin \beta \cdot d\vartheta \cdot d\beta$, und die Strahlung, welche ds nach dem Oberflächenelement $d\omega$ der kleinen Kugel entsendet, wird:

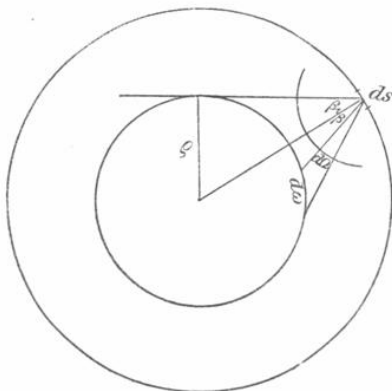


Fig. 21.

$$\frac{i \cdot ds}{\pi} \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot d\beta \cdot d\vartheta$$

Integriren wir nun über den von ds aus bestrahlten Theil, so ist dieser begrenzt durch den Kegel, den die von ds aus an die Kugel gelegten Tangenten bilden, umfaßt also die Werthe ϑ von 0 bis 2π und β von 0 bis zu einem Maximalwerthe β_1 ; und wir erhalten:

$$\frac{i \cdot ds}{\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\beta_1} \sin \beta \cos \beta d\beta = i ds \frac{\sin^2 \beta_1}{2} = i ds \sin^2 \beta_1$$

Es ist aber $\sin \beta_1 = \varrho/R$ und also die der kleinen Kugel von dem Elemente ds pro Zeiteinheit zugestrahlte Wärmemenge:

$$i \cdot ds \cdot \frac{\rho^2}{R^2}$$

Da dieser Ausdruck nichts enthält, was für verschiedene Lagen von ds verschiedene Werthe hätte, tritt an Stelle von ds bei der Integration über die ganze Innenfläche der Hohlkugel einfach $4\pi R^2$, und die von letzterer der umschlossenen Kugel zugesandte Strahlenmenge wird:

$$4 i \pi \rho^2 \quad (110)$$

Andererseits wird die von einem Element $d\omega$ der Oberfläche der kleinen Kugel nach allen Richtungen hin ausgesandte Strahlung, wie auf S. 152 (in der Mitte) abgeleitet:

$$i' \cdot d\omega$$

wo i' die „Leuchtintensität“ für die kleine Kugel ist. Die Ausstrahlung der ganzen Kugel wird also:

$$4 i' \pi \rho^2 \quad (111)$$

Soll nun die Hohlkugel der kleinen Kugel ebenso viel zustrahlen wie umgekehrt, so folgt auch jetzt, wie schon früher für beliebige Gestalt der Oberfläche von Hülle und eingeschlossenem Körper bewiesen, daß $i = i'$ sein muß für irgend zwei absolut schwarze Körper. Uebrigens wird die Allgemeinheit des Beweises, daß für zwei verschiedene schwarze Körper $i = i'$ ist, durch die specielle Wahl ihrer Form gar nicht berührt; denn die Werthe von i können nur von der Beschaffenheit und Temperatur des betreffenden Körpers abhängen; nicht aber von seiner Gestalt.

Die Bestimmung, daß die Strahlungsintensität pro Flächeneinheit bei gleicher Temperatur dieselbe sei für jeden absolut schwarzen Körper, unabhängig von seiner Natur, genügt allgemein für die Erhaltung des Wärmegleichgewichts zwischen ihnen.

§ 41. Emission und Absorption nicht-schwarzer Körper.

Wir fragen nun weiter, welches die Bedingung für Wärmegleichgewicht ist, wenn ein Körper nicht alle Wärme zurückbehält, die ihm zugestrahlt wird, wenn er also nicht absolut schwarz ist. Solch ein Körper möge die von der schwarzen Hülle umschlossene kleine Kugel der Fig. 21 sein. Von der Strahlung der Hülle auf sie wird dann in ihr nur ein Theil verschluckt; ein Theil dagegen

geht durch sie hindurch und kehrt wieder zur Hülle zurück. Es sei A der Bruchtheil der gesammten auffallenden Strahlung, der absorbiert wird; das so definirte A wird das Absorptionsvermögen des betreffenden Körpers genannt. Für einen absolut schwarzen Körper wäre $A = 1$; für jeden anderen ist $A < 1$. Von der durch (110) gegebenen Strahlung der Hülle auf die eingeschlossene Kugel absorbiert diese, wenn sie nicht schwarz ist, nur:

$$A \cdot 4 i \pi \varrho^2.$$

Andererseits sendet die eingeschlossene Kugel die durch (111) gegebene Strahlung auf die Hülle, die diese als vollkommen schwarz auch völlig absorbiert. Insgesamt hat die innere Kugel also den Gewinn:

$$A \cdot 4 i \pi \varrho^2 - 4 i' \pi \varrho^2$$

Sind nun Hülle und eingeschlossener Körper von gleicher Temperatur, so muß Wärmegleichgewicht herrschen; jener Gewinn der Kugel muß also verschwinden, oder es muß sein:

$$A i - i' = 0$$

$$\frac{i'}{i} = A \quad (112)$$

i'/i ist das Verhältniß zwischen der Strahlungsintensität i' eines nicht-schwarzen Körpers und derjenigen i eines absolut schwarzen, beide bezogen auf die Flächeneinheit. Diesen Quotienten wollen wir relatives Emissionsvermögen nennen und mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen. [KIRCHHOFF bezeichnet Größen, die i bzw. i' proportional sind, mit e bzw. E , und nennt sie Emissionsvermögen (schlechtweg) eines schwarzen bzw. nicht-schwarzen Körpers.] Das relative Emissionsvermögen bedeutet dann denjenigen Bruchtheil, welchen die von dem betreffenden Körper ausgehende Strahlung von der entsprechenden eines absolut schwarzen Körpers bei derselben Temperatur repräsentirt. Die Gleichung (112) oder:

$$\mathfrak{E} = A \quad (112a)$$

sagt dann aus, daß Emission und Absorption, in dieser Weise gemessen, einander gleich sind. Für einen schwarzen Körper sind beide gleich 1; für irgend einen nicht-schwarzen Körper sind sie gleich einem echten Bruch und zwar ein und demselben für einen bestimmten Körper bei gegebener Temperatur. Daraus, daß die Absorption aller anderen Körper schwächer ist als die von schwarzen Körpern, folgt also dasselbe auch für die Emission. Je durchlässiger ein Körper für Wärmestrahlen, je diathermaner er ist, um so ge-

ringer ist auch seine Emission, und zwar nach (112 a) immer so, daß das relative Emissionsvermögen gleich ist dem Absorptionsvermögen. Dies gilt zunächst nur für die Gesamtstrahlung, ohne Unterschied der Wellenlängen, als Bedingung, daß Temperaturgleichgewicht, wenn einmal vorhanden, bestehen bleiben muß.

Dieses Resultat ist offenbar nach den am Schluß des vorigen Paragraphen angestellten Ueberlegungen unabhängig von der speciellen Anordnung, die wir der Betrachtung zu Grunde gelegt haben. Hätten wir z. B. eine schwarze Hohlkugel vom Radius R , die eine nicht-schwarze concentrische Kugelschale vom Radius ρ umschließt, in der wiederum sich eine ebenfalls concentrische schwarze Kugel vom Radius r befindet, so emittirt die Kugelschale an die äußere Hülle nach (111) $4i'\pi\rho^2$, an die innere Kugel gemäß (110) $4i'\pi r^2$; sie absorbiert von der Strahlung der äußeren Hülle gemäß (110) $44i\pi\rho^2$ und von derjenigen der eingeschlossenen Kugel gemäß (111) $44i\pi r^2$; insgesamt nimmt sie also mehr auf:

$$44i\pi(\rho^2 + r^2) - 4i'\pi(\rho^2 + r^2).$$

Bei gleicher Temperatur muß dieser Ueberschuß verschwinden; also $4i = i'$ sein; es folgt also ebenso (112) oder (112a).

Wir können unsere Ueberlegungen auch wie auf S. 154 unten der analytischen Form nach unabhängig machen von irgend welchen speciellen Annahmen über die Gestalt von schwarzer Hülle und eingeschlossenem nicht-schwarzem Körper. Wir erhalten dann in der dortigen Bezeichnung: $A\sum L - \sum L' = 0$ und da die in $\sum L$ und $\sum L'$ vorkommenden Doppelintegrale identisch sind, folgt wieder $Ai - i' = 0$.

§ 42. Reciprocität für die gegenseitige Zustrahlung bei vorkommenden Reflexionen, Brechungen u. s. w.

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir stets nur die directe geradlinige Zustrahlung ins Auge gefaßt; wir wollen sie jetzt in der Richtung erweitern, daß wir für die Strahlen auch Reflexionen, Brechungen, Durchgang durch Polarisatoren u. A. vorkommen lassen. Hierzu will ich zunächst an einiges aus bekannten Gesetzen der Optik erinnern. In allen Fällen können Strahlen, die auf dem einen Wege von einem Punkte A ausgehend zu einem anderen Punkte B gelangt sind, auch rückwärts auf demselben Wege von B zu A gelangen. Nur bei ganz besonderen Verhältnissen treten Ausnahmen hiervon auf. Eine derselben wird durch die Fluorescenzerscheinungen ermöglicht. Wenn A violettes Licht aussendet,

welches z. B. auf eine Uranglasplatte auffällt, so wird es in ihr in grünes Fluorescenzlicht verwandelt, welches eine dahinter befindliche grüne Glasplatte nahezu ungeschwächt passiren und so zu einem Punkte *B* gelangen kann. Lassen wir umgekehrt von *B* her violettes Licht kommen, so wird dies schon von der grünen Platte absorbiert und kann nicht weiter gehen. Es folgt aus dieser Ausnahme nur, daß das Fluoresciren ein ganz anderer Proceß ist als das Leuchten durch erhöhte Temperatur. Das wissen wir ja auch aus anderen Eigenthümlichkeiten des Fluorescenzlichtes, z. B. daraus, daß wenigstens bei allen festen fluorescirenden Körpern das Leuchten länger dauert als die Belichtung, so daß sie eine nachträgliche Phosphorescenz zeigen, wenn diese auch manchmal nur sehr kurze Zeit dauert; auch dies ist keineswegs mit erhöhter Temperatur verbunden. — Ein anderes abweichendes Phänomen kann als Folge der magnetischen Drehung der Polarisationssebene auftreten. Ein Lichtstrahl gehe durch einen Polarisator, seine Polarisationssebene werde dann durch einen magnetisirten Körper um 45° gedreht; ein Analysator sei so gestellt, daß er dieses Licht ganz hindurchlasse. Wirft man nun durch einen Spiegel den Strahl wieder in seinen Weg zurück, so wird die Drehung nicht (wie es in einer schon ohne Magnetisirung drehenden Substanz geschehen würde) rückgängig gemacht, sondern wird im selben Sinne vermehrt, so daß bei der Wiederankunft am Polarisator kein Licht mehr durch ihn passiren kann. Auch hierbei müssen Processe auftreten, welche nicht unmittelbar unter die gewöhnliche unbeeinflusste Ausbreitung der Strahlen gehören.¹⁾

¹⁾ HELMHOLTZ spricht hier nur davon, daß die elektromagnetische Drehung eine Ausnahme von der Reciprocität des Strahlenganges hervorruft. Von einer durch sie veranlaßten Ausnahme von den KIRCHHOFF'schen Sätzen hat er, meines Wissens, nicht gesprochen. In der That wird eine solche durch die beschriebene Combination zweier Polarisatoren und eines zwischen ihnen befindlichen magnetisirten Mediums nicht geschaffen. Denkt man sich die Polarisatoren — um sie frei von Absorption zu haben — als Nicol'sche Prismen, so sind außer den in (nahezu) gerader Richtung durch das ganze System hindurchgehenden Strahlen auch noch bei jedem Prisma die durch totale Reflexion seitlich herausgeworfenen Strahlen zu beachten. Schließt man die Combination in eine Hülle ein, so gelten die den KIRCHHOFF'schen Sätzen zu Grunde liegenden Schlüsse ohne wesentliche Aenderung. Denn wenn Strahlung von einem Oberflächenelement *A* der Hülle (nahezu) geradlinig durch das System hindurch zu einem anderen Oberflächenelement *B* der Hülle gelangen kann, so kann *B* zwar nicht auf demselben Wege zu *A* zurückstrahlen; es sendet seinerseits aber Strahlung durch das System zu einem seitlich gelegenen Flächenelement *C*, dieses wiederum zu einem anderen seitlich gelegenen *D*, und dieses endlich zurück zu *A*. Zwischen

Von solchen Ausnahmen abgesehen können Strahlen, die von einer bestimmten Stelle A ausgegangen sind und irgend einen fernen Punkt B getroffen haben, immer auch auf demselben Wege zurückgehen. Die gewöhnliche Erfahrung zeigt ja schon, daß wenn ein bei A befindliches Auge eine bei B befindliche Lichtquelle in einer gewissen Helligkeit erblickt, bei Vertauschung des Ortes von Auge und Object dieses mit derselben Helligkeit erblickt wird. Und zwar findet dies statt, wenn unterwegs die Strahlen ganz beliebige Reflexionen und Brechungen erleiden. Denn zunächst läßt sich in Bezug auf die Richtung die Rolle von einfallendem und reflectirtem, einfallendem und gebrochenem Strahl ohne Weiteres vertauschen. Bei der Brechung findet zugleich Dispersion der Strahlen verschiedener Brechbarkeit statt: für die Strahlen jeder einzelnen Farbe trifft die Regel der Umkehrbarkeit des Weges zunächst in Bezug auf die Richtung genau zu. Sie trifft aber auch zu in Bezug auf die Quantität der Strahlung, oder die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge. Bei jedem Auftreffen eines Strahlenbündels auf eine Grenzfläche tritt eine Theilung in ein reflectirtes und gebrochenes Bündel ein. Das Verhältniß, in welchem das Bündel sich theilt, ist abhängig von dem Brechungsquotienten der beiden Medien für die besondere Strahlengattung, von dem Einfallswinkel und von dem Polarisationszustande.¹⁾ Berechnet man aus den FRESNEL'schen Formeln (für die Amplituden) die Intensitäten und weiter das Verhältniß der Quantitäten, in welche ein Strahlenbündel sich theilt, so ergibt sich, daß dieses Verhältniß ebenfalls unabhängig ist davon, ob derselbe Weg in der einen oder in der anderen Richtung durchlaufen wird, und daß es für die Rückkehr genau denselben Werth hat, wie für die Hinkehr. Die dabei vorkommenden Brechungen können auch Doppelbrechungen sein, bei denen sich die verschiedenen

diesen vier Elementen der Hülle herrscht dann Gleichgewicht der cyklisch verlaufenden Zustrahlung, und die KIRCHHOFF'schen Sätze gelten für das Ganze ungeändert. Es bleibt immerhin von Interesse, daß die KIRCHHOFF'schen Sätze nicht mehr gelten würden für die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente allein betrachtet. — Vergl. hierzu PLANCK, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, p. 206, 1900; Ann. d. Phys. 3, p. 764, 1900; BRILLOUIN, L'éclairage électrique 15, p. 265, 1898. A. d. H.

¹⁾ Streng genommen müßte HELMHOLTZ, wenn er die Strahlung bei der reinen Wärmelehre behandelte, die Hypothese vom Wärmestoff beibehaltend auch die Strahlung noch vom Standpunkt der Emanationstheorie aus betrachten und dürfte daher von Wellenlänge und von Polarisation nicht sprechen. Letzteres ist aber der Vollständigkeit halber hier und schon oben bei der elektromagnetischen Drehung nicht zu vermeiden. A. d. H.

Polarisationsrichtungen in der Brechung von einander trennen, und die verschiedenen polarisirten Strahlen ihre besonderen Wege einschlagen. Man kann daher in Bezug auf das polarisirte Licht folgende Regel aufstellen: Vom Punkte A gehe das Einheitsquantum an Licht von bestimmter Farbe, polarisirt nach einer bestimmten Richtung α , in einer solchen Strahlrichtung aus, daß nach einer Reihe von Spiegelungen und Brechungen schließlic in B das Quantum x ankommt, und zwar nach einer Richtung β polarisirt. Lassen wir nun von diesem Ziel rückwärts in der umgekehrten Richtung des Endstrahls das Einheitsquantum nach β polarisirten Lichtes von derselben Farbe ausgehen, so kommt nach allen jenen reciproken und reversiblen Vorgängen, die das Licht erleidet, dasselbe Quantum x , also derselbe Bruchtheil nach α polarisirten Lichtes am Ausgangsorte an.

Dasselbe Resultat gilt allgemein auch für die nicht-leuchtende Strahlung, bei der es übrigens auch Strahlen von verschiedener Art, von verschiedener Brechbarkeit oder „Farbe“ giebt: wir können die Bezeichnung „Farbe“ auch auf die Unterschiede der dunklen Wärmestrahlen übertragen (Thermochrose!).

Dieses allgemeine Reciprocitätsgesetz fand in dem speciellen Falle der ungestörten directen Zustrahlung seinen Ausdruck in den beiden Werthen von L (108) und L' (109). Denn sie sagen nichts anderes aus, als: Wenn das Flächenelement ds mit der Intensität i strahlt, gelangt ein Bruchtheil $\frac{L}{i}$ bei $d\omega$ an, welcher gleich ist dem Bruchtheil $\frac{L'}{i'}$, der bei ds anlangt, wenn $d\omega$ mit der Intensität i' strahlt. Erleiden die Strahlen auf dem Wege zwischen ds und $d\omega$ Reflexionen, Brechungen u. s. w., so wird der Werth jenes Bruchtheils ein anderer als der in (108) und (109) geltende, aber wir erhalten doch wieder zwei Ausdrücke von der Form:

$$L = i \Phi . d\omega ds \quad \text{und} \quad L' = i' \Phi . d\omega . ds$$

wo Φ ein von der Configuration, dem Brechungsexponenten u. s. w. abhängiger Factor ist, der aber in L und L' denselben Werth hat. Sind die beiden Flächenelemente vollkommen schwarz, so gelangt man ganz wie früher zu dem Schlusse $i = i'$, was auch wie auf Seite 154 für zwei vollkommen schwarze Körper aus:

$$\sum L = \sum L'$$

folgt. Und ebenso erhält man für nicht-schwarze Körper:

$$A \sum L - \sum L' = 0$$

und daraus das KIRCHHOFF'sche Gesetz $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$. Dieses giebt also auch, wenn die Strahlen beliebig reflectirt, gebrochen, polarisirt¹⁾ werden, die Bedingung dafür, daß zwischen den gleich temperirten Körpern Wärmegleichgewicht vorhanden sei.

§ 43. Das Kirchhoff'sche Gesetz für die einzelnen Strahlengattungen.

Die Gleichheit von Emission und Absorption, wie sie durch (112a) ausgedrückt wird, gilt nicht nur für die Gesamtstrahlung, sondern für die Strahlung von jeder Brechbarkeit (Farbe) einzeln genommen. Das folgt nicht ohne Weiteres; vielmehr wäre zunächst ja auch denkbar, daß Ungleichheiten von Emission und Absorption für die eine Farbe in dem einen Sinne, für die andere in dem anderen Sinne vorkämen, so daß für die Gesamtstrahlung doch die bewiesene Gleichheit stattfindet. Daß dies aber auch für jede homogene Strahlenart allein schon der Fall ist, kann zunächst gezeigt werden, indem man Emission und Absorption in den verschiedenen Schichten eines Körpers betrachtet.

Wenn eine homogene Strahlung durch eine Platte hindurchgeht, geschieht die Absorption, wie ihre Untersuchungen ergeben haben,

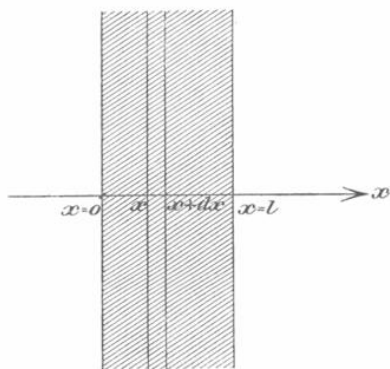


Fig. 22.

so, daß in gleich dicken Schichten immer der gleiche Bruchtheil der Strahlung weggenommen wird. Betrachten wir eine Schicht von der Dicke dx im Innern der Platte, begrenzt von zwei parallelen Ebenen in den Abständen x und $x + dx$ von der einen Oberfläche $x = 0$; wir nennen die in der positiven x -Richtung durch die Ebene x eintretende Strahlung J_x , die bei $x + dx$ austretende J_{x+dx} . Dann ist der durch Absorption weggenommene Bruch-

theil $(J_x - J_{x+dx})/J_x$. Dieser ist nach dem Obigen proportional der Dicke dx ; wenn daher α eine spezifische Constante der Substanz für

¹⁾ Vergl. hierzu die experimentelle Bestätigung von A. PFLÜGER, Ann. d. Physik, 1902, Bd. 7, p. 806, für die polarisirte Emission des Turmalin.

die betreffende Strahlenart bedeutet, die um so gröfser ist, je stärker diese absorbirt werden, so ist zu setzen:

$$J_x - J_{x+dx} = \alpha \cdot dx \cdot J_x$$

J_x ist als Function von x zu betrachten; daher kann statt der vorstehenden Gleichung geschrieben werden:

$$-\frac{dJ}{dx} dx = \alpha \cdot J \cdot dx$$

$$\frac{dJ}{J} = -\alpha \cdot dx$$

$$\log J + \text{Const.} = -\alpha \cdot x$$

Für die Integrationsconstante können wir, unbeschadet ihrer Allgemeinheit, $-\log C$ schreiben; dann wird:

$$\log \left(\frac{J}{C} \right) = -\alpha \cdot x$$

$$J = C \cdot e^{-\alpha \cdot x} \quad (113)$$

welches J in der That auch für Schichten von endlicher Dicke das Gesetz befolgt, daß in gleich dicken Schichten jedesmal derselbe Bruchtheil der Strahlung absorbirt wird. Für $x=0$ wird $J=C$, d. h. C bedeutet die in die Platte eintretende Strahlungsmenge; der von dieser durch Absorption einer Schicht von der Dicke x weggenommene Bruchtheil wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{C-J}{C} = 1 - e^{-\alpha \cdot x}$$

Dieser Werth entspricht dem Absorptionsvermögen einer solchen Schicht; und unserem früheren Absorptionsvermögen A der ganzen Platte entspricht daher:

$$A = 1 - e^{-\alpha \cdot l} \quad (114)$$

wenn l die Dicke der Platte ist.

Nun wollen wir deren Emission berechnen. Eine Strahlung, welche von allen Molekeln in der Schicht zwischen den Ebenen x und $x+dx$ ausgeht, ist zunächst proportional der Dicke dx dieser Schicht, wenn also e eine von der Natur und Temperatur des Körpers abhängige Constante bedeutet, kann die ungeschwächte Emission einer solchen Schicht gleichgesetzt werden:

$$e \cdot dx$$

Bis zum Austritt aus der Platte wird diese Emission nun aber theilweise absorbirt. Betrachten wir die durch die Fläche $x=0$ in der

negativen x -Richtung austretende Emission jener Schicht, so gelangt nach (113) von einer Strahlung C durch die Schicht von der Dicke x die Menge $C \cdot e^{-\alpha x}$ hindurch; von der Strahlung $e dx$, wenn sie eine solche Schicht durchsetzen muß, gelangt also ins Freie:

$$e \cdot e^{-\alpha x} dx$$

Von der Strahlung aller Schichten, von $x = 0$ bis $x = l$ gelangt daher durch die Oberfläche $x = 0$ heraus.

$$\begin{aligned} e \int_0^l e^{-\alpha x} dx &= e \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \right)_{x=0}^{x=l} = e \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha l} \right) \\ &= \frac{e}{\alpha} (1 - e^{-\alpha l}) \end{aligned} \quad (115)$$

Das wäre also die Strahlungsmenge, welche aus der Platte nach der Seite der negativen x hin austritt; und nach der anderen Seite hin tritt natürlich ebenso viel aus.

Wenn für eine Platte $e^{-\alpha l} = 0$ wird, wird nach (114) das Absorptionsvermögen $A = 1$, d. h. die Platte ist eine vollkommen schwarze. Das kann nun eintreten entweder wegen sehr großen Werthes von α , der Constanten der Absorption; oder auch wegen sehr großen Werthes von l , also bei sehr dicken Platten. Für einen solchen absolut schwarzen Körper wird die nach einer Seite ausgesandte Strahlung nach (115) einfach gleich e/α .

Ist der Körper nicht absolut schwarz, so ist $e^{-\alpha l} > 0$, und die Strahlung nach (115) kleiner. Sie wird dann nur ein Bruchtheil von der Strahlung eines schwarzen Körpers, und diesen Bruchtheil haben wir relatives Emissionsvermögen genannt und in (112a) mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Wir erhalten diesen Bruchtheil mithin, wenn wir (115) dividiren durch (e/α) :

$$\mathfrak{E} = 1 - e^{-\alpha l} \quad (116)$$

und nach (114) also:

$$\mathfrak{E} = A$$

in Uebereinstimmung mit (112a). Die vorstehende Ableitung des KIRCHHOFF'schen Gesetzes gilt aber für jede Strahlengattung, also für jede Farbe einzeln genommen; sie gilt sogar zunächst nur für eine homogene Strahlung, da nur für eine solche die Absorptionsconstante α einen bestimmten Werth hat, denselben in (114) wie in (116). Für andere Farben hat α einen anderen Werth; aber für jede einzelne wird dasselbe Resultat $\mathfrak{E} = A$ gefunden, und dies

gilt daher auch für die Summe aller Einzelstrahlungen, also für die Gesamtstrahlung, wie wir schon aus (112a) wissen.

Die Gültigkeit des KIRCHHOFF'schen Gesetzes für jede einzelne Strahlenart läßt sich nun auch, wie für die Gesamtstrahlung, aus dem Bestehen des Wärmegleichgewichtes zwischen Körpern von gleicher Temperatur herleiten. Wir beginnen mit der Betrachtung absolut schwarzer Körper. Wie wir bewiesen haben, ist die gesamte Strahlungsintensität i pro Flächeneinheit der Oberfläche für alle schwarzen Körper dieselbe. Es könnte nun aber trotzdem bei einem gewissen schwarzen Körper die partielle Strahlungsintensität für eine bestimmte Farbe f_1 von bestimmter Brechbarkeit größer sein als bei allen anderen schwarzen Körpern, wenn sie dann nur auch für irgend eine andere Farbe f_2 kleiner wäre als bei allen anderen: ohne daß das Wärmegleichgewicht durch die Gesamtstrahlung gestört würde. Nun kann man aber durch verschiedene optische Apparate, z. B. durch linierte Spiegel und durch Prismen, erreichen, daß Strahlen von bestimmter Spectralfarbe vorzugsweise eine Richtung einschlagen, Strahlen von einer anderen (reinen) Farbe eine andere. Denken wir uns

z. B. im Innern einer absolut schwarzen Hülle ein vollkommen durchsichtiges Prisma. Dann kann man durch geeignet aufgestellte, vollkommen spiegelnde Diaphragmen d (Fig. 23) erreichen, daß von der Strahlung der einen Seite der Hülle nur die von einem bestimmten Flächenelement F ausgehende als ein geradliniges Bündel allein auf das Prisma fällt, von

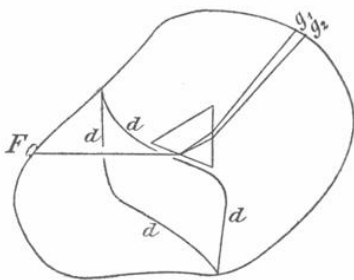


Fig. 23.

ihm gebrochen wird in der Weise, daß eine Stelle g_1 auf der anderen Seite der Hülle nur von denjenigen Strahlen des Bündels getroffen wird, deren Farbe f_1 ist, eine andere g_2 nur von solchen der Spectralfarbe f_2 . Nach der in § 42 entwickelten Reciprocität des Strahlenganges gelangen dann auch umgekehrt nur Strahlen der Farbe f_1 von der Stelle g_1 aus, und nur solche von f_2 von g_2 aus nach F . Die Stelle der Hülle bei g_1 und g_2 bestehe nun aus einer solchen schwarzen Substanz — wenn sich eine fände — für welche die Emission der Farbe f_1 größer sei, und die der Farbe f_2 kleiner als bei allen anderen schwarzen Körpern, während das Absorptionsvermögen von vornherein bei allen absolut schwarzen Körpern nach

deren Definition für alle Farben $= 1$ sein muß. Dann wird in Bezug auf die gegenseitige Zustrahlung von g_1 und F kein Gleichgewicht stattfinden, insofern, als ersteres mehr emittirt, als es von F erhält und absorhirt. Umgekehrt wird die von f_2 getroffene Stelle g_2 weniger emittiren als sie von F erhält und absorhirt. In Folge dessen müßte, wenn ursprünglich auch die Hülle überall gleiche Temperatur hatte, nun die von f_1 getroffene Stelle kälter werden, die von f_2 getroffene wärmer, im Widerspruch mit dem Postulate, daß zwischen den verschiedenen Theilen eines überall gleichmäßig temperirten Körpers Wärmegleichgewicht herrschen muß. Es kann also keine schwarze Substanz geben, für welche nicht die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität der Strahlung denselben Werth hätte wie für jeden anderen schwarzen Körper, auch in Bezug auf jede Farbe einzeln genommen.

Man sieht sogleich, daß es bei dieser Schlufsweise nur darauf ankommt, daß an jedem Orte dasjenige Verhältniß von Emission und Absorption stattfindet, bei welchem nirgends in dem betrachteten System Temperaturänderungen stattfinden; und zwar muß dasselbe Verhältniß, welches für die Gesamtstrahlung gilt, auch für jede einzelne Strahlengattung allein gelten. Bei nicht-schwarzen Körpern ist für die Gesamtstrahlung jene Bedingung erfüllt, wenn das relative Emissionsvermögen $\mathfrak{E}$ gleich ist dem Absorptionsvermögen A ; und durch Betrachtungen, die an eine Anordnung, wie die in Figur 23 dargestellte anknüpfen, erhält man auch bei ihnen denselben Schlufs, daß das KIRCHHOFF'sche Gesetz für beliebige beschaffene Körper:

$$\mathfrak{E} = A$$

auch für jede Strahlenart allein genommen gelten muß.

§ 44. Schlufsfolgerungen aus dem Kirchhoff'schen Gesetz.

Das KIRCHHOFF'sche Gesetz, welches als Consequenz des Axioms erscheint, daß Wärmeübergang nur stattfindet vom wärmeren zum kälteren Körper, nicht aber zwischen gleichwarmen Körpern, hat nun die weitgehendsten experimentellen Bestätigungen gefunden.

Zunächst in Bezug auf die Gesamtstrahlung sieht man allgemein, daß schwarze Körper, wenn sie glühen, weit lebhafter leuchten als nicht schwarze von derselben Temperatur; vorausgesetzt, daß kein Phosphoreszenz- oder Fluoreszenzleuchten mit ins Spiel kommt, auf welches, wie schon erwähnt, die entwickelten Gesetze für die

Strahlung in Folge erhöhter Temperatur keine Anwendung finden. Die Erfahrung zeigt, daß ein Körper um so stärker bei Erhitzung leuchtet, je undurchsichtiger er ist; ein auch bei hoher Temperatur vollkommen durchsichtiger Körper kann überhaupt nicht leuchten.¹⁾

Die auffallendsten Bestätigungen für das KIRCHHOFF'sche Gesetz in Bezug auf die Einzelstrahlung zeigen die Thatsachen der Spectralanalyse. Glühende Dämpfe emittiren Licht, welches spectral zerlegt starke Maxima der Intensität in der unmittelbaren Nähe bestimmter einzelner reiner Spectralfarben zeigt, während sie für alle anderen Farben gleich Null ist; sie geben ein Linienspectrum. Ein glühender Dampf hat nun für genau dieselben Spectralfarben, welche den hellen Linien seines Emissionsspectrums entsprechen, auch maximales Absorptionsvermögen. Dies zeigt sich, wenn man stärkeres Licht, welches ausgeht von einem anderen glühenden Körper, z. B. von der Sonne, hindurchgehen läßt durch den Dampf; dann erscheinen in Folge der maximalen Absorption dunkle Linien an genau denselben Stellen des Spectrums, an welchen im Emissionsspectrum die hellen liegen. Bedingung für diese Umkehr der Spectrallinien ist, daß die Lichtquelle für das continuirliche Spectrum (z. B. elektrisches Bogenlicht) höhere Temperatur hat als der absorbirende Dampf (z. B. Natriumdampf in einer Kochsalzflamme). Dies erkennen wir in folgender Weise. Es werde ein Bündel paralleler Strahlen ausgesondert (durch Diaphragmen) aus denen, die insgesamt von der als vollkommen schwarz betrachteten Lichtquelle ausgehen. Dann ist seine Intensität an allen Stellen dieselbe, da es ja nicht divergirt, und abgesehen von einem geometrischen Factor ist sie gleich i für die Gesamtstrahlung, oder gleich i_f für eine bestimmte reine Spectralfarbe f . Ist A_f das Absorptionsvermögen der Dämpfe für diese Farbe f , so wird in ihnen absorbirt $i_f A_f$; es bleibt als hindurchgehend also $i_f (1 - A_f)$. Nun emittiren die Dämpfe in der Flamme selbst auch, und zwar in dasselbe Strahlenbündel hinein, eine Intensität, welche, abgesehen von demselben obigen geometrischen Factor, gleich i'_f sei.

Die Addition beider Strahlungsintensitäten giebt:

$$i_f(1 - A_f) + i'_f$$

¹⁾ Siehe die von KIRCHHOFF in seiner Abhandlung „Ueber das Verhältniß zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht“ in § 15 u. ff. erwähnten Versuche. Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 594. A. d. H.

Hat nun die Quelle des continuirlichen Spectrums dieselbe Temperatur wie die Dämpfe, so gilt das KIRCHHOFF'sche Gesetz:

$$A_f = \frac{i'_f}{i_f}$$

und die Intensität des vereinigten Strahlenbündels von der Farbe f wird:

$$i_f - i_f \cdot \frac{i'_f}{i_f} + i'_f = i_f$$

also dieselbe als ob die Dämpfe gar nicht vorhanden wären; d. h. die Stelle von der Farbe f im Spectrum unterscheidet sich nicht von den übrigen Stellen des Spectrums. Damit an der betrachteten Stelle eine dunkle Linie erscheine, muß mithin sein:

$$i_f(1 - A_f) + i'_f < i_f$$

oder:

$$i'_f - i_f \cdot A_f < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{i'_f}{i_f} < A_f$$

Das heißt: i'_f muß kleiner sein als der Werth, den es für die Dämpfe dann hat, wenn sie gleiche Temperatur mit dem leuchtenden schwarzen Körper haben, oder die Temperatur der Dämpfe in der Flamme muß niedriger sein als die jener Lichtquelle. Dann geht auch Wärme über vom Körper der höheren zu dem der niederen Temperatur und trägt zu des letzteren Erwärmung bei.

Die genaue Uebereinstimmung der Stellen maximaler Emission und Absorption ist in den complicirtesten Spectren der mannigfachsten Gase und Dämpfe bis ins Einzelste der Vertheilung hinein nachgewiesen. Für uns liegt darin der Beweis, daß in der That auch die Strahlungserscheinungen niemals zwischen zwei Körpern gleicher Temperatur einen Wärmeübergang eintreten lassen, durch welchen die Temperatur des einen über diejenige des anderen erhöht würde; sondern immer nur von einem heißeren Körper zu einem kälteren.
