Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1897

Erster Theil. Elastische Schwinungen in continuirlich verbreiteten Medien

urn:nbn:at:at-ubi:2-7079

Erster Theil.

Elastische Schwingungen in continuirlich verbreiteten Medien.

§ 6. Ebene Wellen.

Zur Einführung in die Lehre von den Schwingungen beginnt man am besten mit den oscillatorischen Bewegungen ponderabler Körper, wie sie z. B. bei der Schallbewegung vorkommen. Wir wissen aus der Erfahrung, daſs solche Oscillationen sich bis in groſse Entfernungen ausbreiten, und daſs diese Verbreitung, wenn sie nach allen Seiten regelmäſsig geschieht, im Wesentlichen so verläuft, daſs die Flächen, in denen eine bestimmte Phase der Bewegung gleichzeitig ankommt, Kugelflächen sind. Je weiter die Bewegung sich von ihrem Erregungscentrum entfernt hat, je gröſser also die Kugelfläche wird, desto ähnlicher wird jedes Quadratcentimeter dieser Kugelfläche einem Theil einer Ebene. Hier wollen wir nun annehmen, daſs der Radius der Kugelfläche so groſs sei, die Bewegung also bereits soweit von ihrem Erregungspunkte sich entfernt habe, daſs wir den Unterschied von einer Ebene völlig vernachlässigen können.

In dem unendlich ausgedehnten Medium, in dem sich die betrachtete Bewegung vollzieht, bezeichnen wir die Orte der einzelnen bewegten Punkte durch die Coordinaten x, y, z, und zwar soll x diejenige Richtung bezeichnen, nach welcher die Wellen sich fortpflanzen. In Richtung der y und z besteht dann kein Unterschied, sondern alle Punkte einer Schicht, die in der Ebene $x = 0$ oder in einer dieser parallelen Ebene liegen, bewegen sich in gleicher Weise, d. h. die Werthe ihrer Verschiebungen sind nur Functionen der Coordinate x und der Zeit t, dagegen unabhängig von y und z.

§ 7. Ebene Longitudinalwellen.

Bei allen uns bekannten Körpern, bei gasförmigen sowohl wie bei flüssigen und festen, können Longitudinalschwingungen vorkommen, d. h. Schwingungen, bei denen die schwingenden Punkte sich in derselben Richtung bewegen, in welcher der Wellenzug sich fortpflanzt. Wir wollen nun solche Schwingungen hier voraussetzen. Dann geschehen die kleinen Verschiebungen, welche die einzelnen Körpertheile während der Bewegung erleiden, alle in der Richtung der x-Axe; wir wollen sie mit ξ bezeichnen. Wenn nun diese ξ-Verschiebungen der verschiedenen Schichten verschieden grofs sind, so wird an einzelnen Stellen des Körpers die Substanz, welche zwischen zwei der Ebene $x = 0$ parallelen Ebenen liegt, bald zusammengedrängt bald gedehnt werden, je nachdem die Grenzflächen der betreffenden Schicht sich einander nähern oder von einander entfernen. Bei der Wellenbewegung mufs nun immer der Werth des ξ eine continuirliche Function von x sein, d. h. die Function von x, welche ξ darstellt, mufs continuirlich sein und überall endliche Differentialquotienten nach der Coordinate x haben. Eine discontinuirliche Function würde nämlich entweder Zerreifsung des Zusammenhangs oder Ineinanderdringen verschiedener Schichten anzeigen.

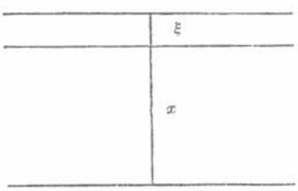

Fig. 4.

Wenn wir eine horizontale Schicht (Fig. 4) von so geringer Dicke in's Auge fassen, dafs wir innerhalb derselben ξ durch eine lineare Function von x ausdrücken können, so wird die Dickenänderung dieser Schicht davon abhängen, ob die ξ-Verschiebung der oberen Fläche gröfser oder kleiner ist, als die der unteren Fläche. Bezeichnen wir die Dicke dieser Schicht mit dx, so wird nach der Veränderung zu dx noch die Differenz der Verschiebungen hinzugekommen sein, welche die beiden Grenzflächen erlitten haben. Wenn wir jetzt einmal mit ξ die Verschiebung an der unteren Fläche bezeichnen, so wird die Verschiebung an der oberen Grenzfläche $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} . dx$ sein, und die veränderte Dicke der Schicht wird sein

$$dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} . dx = dx . \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Da die Grundfläche der Schicht unverändert bleibt, so wird die Volumenänderung, welche jedes Raumelement dieser Schicht unter solchen Umständen erleidet, ebenfalls durch diese Gröfse dargestellt sein.

Nun wissen wir, dafs alle ponderablen Substanzen bei einer Compression sich wieder auszudehnen streben, indem sie einen Druck ausüben, der ihrer Volumenänderung entgegengesetzt gerichtet ist.

Wenn wir als Druck diejenige Kraft definiren, welche auf die Einheit der Oberfläche wirkt, so kann man für alle uns bekannten ponderablen Substanzen annehmen, dafs die dabei auftretende Zunahme des Druckes proportional dem Bruchtheil ist, um welchen das Volumen verändert wird, vorausgesetzt, dafs dieser Bruch klein genug gegen Eins ist. In dem hier betrachteten Falle ist nun $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ der betreffende Bruchtheil, und der Druck, der bei positivem $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ein negativer Druck ist, da er sich im Widerstreben gegen die Expansion äufsert, bei negativem $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ein positiver, mufs dem negativen Werthe dieser Aenderung des Volumens proportional gesetzt werden. Indem wir mit c^2 irgend eine positive Constante bezeichnen, deren Gröfse von der Natur der Substanz abhängt, können wir die Gleichung bilden:

$$p = -c^2 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{11}$$

Wir haben hierin einen Ausdruck für die Kraft, mit welcher der elastische Körper der Volumenänderung der betrachteten Schicht widerstrebt. Was nun für die eine Schicht gilt, gilt auch für jede andere. Die Gesammtkraft, welche auf eine im Innern liegende Schicht wirkt, wird von dem Zustande der Compression in den beiden über und unter ihr liegenden Schichten abhängen. Der Druck der oberen Schicht strebt, diese Zwischenschicht nach unten zu drängen, er wird also in der negativen Richtung der x-Axe wirken; hingegen wird der Druck der unteren Schicht nach oben, also in der Richtung der zunehmenden x-Werthe drängen. Es sind aber diese beiden Drucke nicht gleich. Den positiv wirkenden Druck der unteren Schicht, für welche $dx = 0$ gesetzt wurde, wollen wir mit p bezeichnen; dann ist der in der negativen Richtung wirkende Druck der oberen Schicht gleich $p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$. Somit würde die auf die Einheit der Fläche wirkende Gesammtkraft X, welche die Schicht zu verschieben strebt, den Werth haben:

$$\begin{aligned} X &= p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Setzen wir nun aus Gleichung (11) für p den eben abgeleiteten Werth ein, so erhalten wir:

$$X = c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . d x . \tag{12a}$$

Nun können wir nach dem NEWTON'schen Bewegungsgesetz andererseits die Bewegungskraft, welche auf die Schicht wirkt, auch durch das Product ihrer Masse und ihrer Beschleunigung messen. Indem wir hier die Ausdrücke überall auf Stücke der Schichten beziehen, welche in ihrer horizontalen Ausdehnung sich über eine Flächeneinheit erstrecken, finden wir die Masse der Schicht, wenn wir ihre Dicke mit der Dichtigkeit ihrer Substanz multipliciren. Hier handelt es sich nun um die Masse, welche nicht durch die Volumänderung beeinflufst wird. Wir können also das Volumen und die Dichtigkeit in demjenigen Zustande nehmen, bei dem sich die Schicht in der Gleichgewichtslage befindet. Wir wollen die Dichtigkeit mit h bezeichnen; dann ist die Masse der Schicht gleich $h . d x$. Die Geschwindigkeit ist gleich $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ und die Beschleunigung gleich $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Die bewegende Kraft ist also $h . d x . \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, und wir erhalten demnach als Bewegungsgleichung:

$$c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . d x = h . d x . \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

oder

$$c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = h \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{13}$$

welche Gleichung wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{13a}$$

wenn wir $\frac{c^2}{h} = a^2$ setzen. Da h stets positiv ist, so wird auch die Constante a^2 stets positiv sein. Die so erhaltene Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung; sie wird erfüllt, wenn wir die Annahme machen, dafs ξ eine beliebige Function der zusammengesetzten Variablen $q = x + a t$ sei, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} \xi &= F_{(q)} \\ &= F_{(x + a t)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

zu setzen ist. Die Function F ist demnach abhängig von q, und q wiederum abhängig von den Werthen x und $a t$, die sonst in der Function F nicht vorkommen. Dadurch ist eine besondere Art der

Abhängigkeit der drei Gröſsen von einander festgesetzt. Wir haben nun nach den Grundprincipien der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial q} . \frac{\partial q}{\partial x} .$$

Da nun

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 1 ,$$

so ist also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{14a}$$

folglich ist $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ebenfalls eine Function von q. Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

Wenn wir die Differentialquotienten nach der Zeit bilden, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= a \cdot \frac{\partial F}{\partial q} \end{aligned}\right\} \tag{14c}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a . \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= a^2 . \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} . \end{aligned} \tag{14d}$$

Da nun

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

war, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{15}$$

Durch die gemachte Annahme über ξ wird also unserer Differentialgleichung genügt.

Wenn wir statt a den Werth $(-a)$ setzen, so bleibt der Werth von a^2 unverändert. Es wird also sowohl:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= F_{(x+at)} \\ \text{als} \qquad \xi &= G_{(x-at)} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

eine Lösung jener Differentialgleichung sein.

Ueber die physikalische Bedeutung dieser Lösungen ist nun Folgendes zu bemerken:

Wenn in der Function $F_{(x+at)}$ der Werth von x um eine Strecke, die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet sein mag, vergröfsert wird, und gleichzeitig der Werth von t um einen solchen Betrag τ abnimmt, dafs

$$\mathfrak{x} = a \,.\, \tau \tag{17}$$

ist, so wird der Werth von q, also auch von F sich nicht ändern. Wenn aber x um eine gewisse Strecke $\mathfrak{x}$ wächst, so heifst das: man beobachtet die Veränderung ξ an einer Stelle, die einem um $\mathfrak{x}$ gröfseren Werthe von x entspricht; nimmt t um τ ab, so heifst das: die Beobachtung bezieht sich auf einen um das Zeitintervall τ zurückliegenden Zeitmoment. Wenn also $\xi = F_{(x+at)}$ bei den genannten Aenderungen von x und t ungeändert bleibt, so ist also vor der Zeit τ derselbe Zustand, beziehlich derselbe Werth von ξ in einer Schicht vorgekommen, welche einem gröfseren Werthe von x entspricht. Aendert sich der Werth von x regelmäfsig, aber gleichzeitig auch die Zeit, und zwar so, dafs immer die Gleichung (17) besteht, so wird für alle diese Stellen ξ in den verschiedenen Zeitmomenten denselben Werth haben. Dieser Zusammenhang zwischen $\mathfrak{x}$ und τ ist nun derselbe, welcher bei einer gleichmäfsigen Bewegung vorkommt, die in gerader Linie mit der Geschwindigkeit a fortschreitet, so dafs also gewissermafsen der Werth von ξ, welcher für die ursprünglichen Werthe des x und t gegeben ist, mit der gleichmäfsigen Geschwindigkeit a sich in der Substanz fortpflanzt, und zwar in der entgegengesetzten Richtung, in welcher x steigt.

In der anderen Lösung dagegen, wo wir die Veränderung ξ mit $G_{(x-at)}$ bezeichnet haben, mufs t um τ zunehmen, wo wieder

$$\mathfrak{x} = a \,.\, \tau$$

ist, wenn ξ unverändert bleiben soll. Die gleichartigen Zustände rücken also hier in der Richtung der steigenden Werthe von x mit steigender Zeit fort.

Die Lösung $\xi = F_{(x+at)}$ bezeichnet also eine Welle, welche mit zunehmender Zeit in Richtung der abnehmenden Werthe von x fortschreitet, während die Lösung $\xi = G_{(x-at)}$ eine Welle bezeichnet, welche mit zunehmender Zeit in der Richtung der steigenden Werthe von x voranschreitet.

Beide Integrale bezeichnen eine Bewegungsweise, wie wir sie beim Schall und bei den Wasserwellen, wo eine gegebene Form der Welle auf der Wasseroberfläche fortläuft, beobachten. In letzterem

Falle können wir uns leicht mechanisch davon überzeugen, dafs das was auf dem Wasser fortschreitet, nur die Form der Bewegung, die Form der Oberfläche ist, die sich aber fortdauernd aus neuen Wassertheilen zusammensetzt, während jedes einzelne Wassertheilchen nur um seine Gleichgewichtslage schwingt, im wesentlichen also an derselben Stelle bleibt. Ebenso läuft auch eine Schallwelle mit constanter Geschwindigkeit durch den Luftraum, und eine Lichtwelle durch den Aether, während die einzelnen Theilchen der Luft, beziehlich des Lichtäthers, nur kleine Bewegungen ausführen. Es ist dieses das charakteristische Zeichen für solche in einem elastischen Medium voranschreitende Oscillationen.

Wenn man für eine Differentialgleichung, die in jedem Gliede die abhängige Variable — hier also ξ — selbst oder ihre Differentialquotienten nach den unabhängigen Variablen — hier x und t —, nur einmal enthält (d. i. eine **lineare homogene Differentialgleichung**) zwei Lösungen gefunden hat, so kann man auch immer neue Lösungen bilden, indem man solche Integrale mit willkürlichen Constanten multiplicirt und algebraisch addirt.

In unserem Falle erhalten wir also, wenn wir mit A und B zwei willkürliche Constanten bezeichnen, die allgemeine Lösung

$$\xi = A \, . \, F_{(x + a t)} + B \, . \, G_{(x - a t)} , \tag{18}$$

deren Richtigkeit man leicht nachweisen kann, indem man aus ihr die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ bildet. Sie stellt eine Bewegung dar, bei welcher gleichzeitig ein Zug Wellen in Richtung der zunehmenden x, und ein anderer in Richtung der abnehmden x fortschreitet. In ihr ist die allgemeinste Form der Lösung dieser Differentialgleichung gegeben.

Die hier besprochene Form der Bewegung kann sich in allen ponderablen Körpern entwickeln; denn diese besitzen alle die Eigenthümlichkeit, dafs sie der bei steigendem Drucke eintretenden Compression widerstehen. Viele von ihnen, nämlich sowohl die festen als auch, was gewöhnlich nicht beachtet wird, die flüssigen Körper besitzen auch die Eigenschaft, dafs sie dem Zug einer dehnenden Kraft Widerstand leisten. Flüssigkeiten sind in dem Zustande, in dem wir sie gewöhnlich finden, lufthaltig und zerreifsen daher sehr leicht; wenn man sie aber mit einiger Sorgfalt luftfrei macht, so vermögen sie einen ganz erheblichen negativen Druck oder Zug auszuhalten, ohne dafs eine Trennung ihrer Theile eintritt. Man kann eine Quecksilbersäule in dem Barometer so luftfrei machen, dafs man schliefslich durch eine Luftpumpe die Luft unten wegnehmen kann, ohne dafs das Quecksilber weder in sich zerreifst, noch von der Glaswand abreifst.

§ 8. Ebene Transversalwellen.

Wir gehen wieder von der Voraussetzung eines Zuges ebener Wellen aus, welche sich in Richtung der x fortpflanzen, setzen aber voraus, dafs in der betrachteten Schicht, die wir uns ebenso wie vorhin (siehe Fig. 4 auf S. 18), horizontal gelegt denken, keine Verschiebungen nach oben oder unten eintreten, sondern ausschliefslich Verschiebungen parallel der yz-Ebene. Zunächst wollen wir annehmen, dafs die Verschiebungen η nur in der Richtung der y geschehen, und zwar sollen sie in der ganzen Ausdehnung der Schicht gleich grofs sein, so dafs η nur als Function von x und t zu betrachten ist. Bei Flüssigkeiten werden solche Verschiebungen keinerlei Gegenkräfte erregen, vorausgesetzt, dafs die Flüssigkeit nicht von den Wänden zurückgehalten wird. Andererseits wissen wir aber, dafs in starrelastischen Körpern bei solchen Verschiebungen Gegenkräfte entstehen; denn solche Körper behaupten nicht nur ihr Volumen, sondern auch ihre besondere Form.

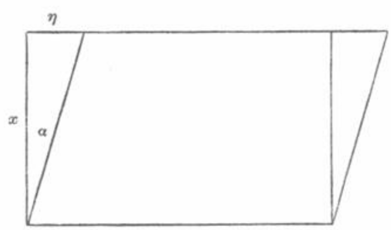

Fig. 5.

Wenn jede höher liegende Schicht gegen die tiefer liegende in gleicher Weise verschoben wird, so wird η von der unteren Fläche bis zur oberen regelmäfsig zunehmen, und wir werden dasselbe daher dem Werthe von x proportional setzen können, was wir in der Form

$$\eta = b \, . \, x$$

schreiben wollen, so dafs die Constante b also gegeben ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta}{x} &= b \\ \text{oder} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} &= b. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ würde demnach die Tangente des Winkels α in der obenstehenden Fig. 5 sein. Nun leisten die elastischen starren Körper gegen solche Verschiebungen Widerstand in der Art, dafs Gegenkräfte entstehen, welche in unserem Falle die obere Fläche nach links und die untere Fläche nach rechts zu führen streben. Bei sehr kleinen Verschiebungen kann man die entstehenden Gegenkräfte der Constante b proportional setzen. Es ist leicht zu sehen, dafs diese Kraft eine Flächenkraft ist; denn wenn wir eine ausgedehnte Schicht eines solchen Körpers haben und sie in einzelne Theile zerlegen, so wird in jeder Flächeneinheit eine gleich grofse Kraft entstehen, und der Betrag der Gesammtkraft der Gröfse der Fläche proportional sein. Für die Flächeneinheit wird die Gröfse der Kraft, welche der Schiebung widerstrebt, zunächst von einer Constanten abhängen, welche durch die Natur des Körpers bedingt ist; ferner wird sie proportional der Gröfse der Schiebung sein. Die Kraft, welche auf die Flächeneinheit wirkt, würde man also durch

$$Y = \varkappa^2 . b = \varkappa^2 . \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{20}$$

ausdrücken können, worin $\varkappa^2$ eine von der Natur des deformirten Körpers abhängige stets positive Constante bezeichnet. Wenn also in einem Körper verschiedene Schiebungen in den über einander liegenden Schichten eingetreten sind, so werden wir für eine einzelne dieser Schichten die Gesammtkraft, welche auf sie ausgeübt wird, berechnen können, indem wir die Differenz nehmen zwischen der Kraft, welche an ihrer oberen Seite, und derjenigen, welche an der unteren auf sie wirkt. Bezeichnen wir diese Gesammtkraft mit $\mathfrak{Y}$, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= Y_{\text{oben}} - Y_{\text{unten}} = Y_{x+dx} - Y_x \\ &= \frac{\partial Y}{\partial x} . dx \end{aligned} \tag{21}$$

sein, und mit Benutzung der Gleichung (20) erhalten wir

$$\mathfrak{Y} = \varkappa^2 . \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} . dx . \tag{21a}$$

Die bewegende Kraft ist andererseits gleich zu setzen der Beschleunigung multiplicirt mit der Masse für die Flächeneinheit. Letztere ist aber das Product aus der Dichte h und der Dicke der Schicht dx. Es ergiebt sich also die bewegende Kraft gleich $h . dx . \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, und wir bekommen daher die Gleichung:

$$\varkappa^2 . \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = h . \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} , \tag{22}$$

oder, wenn wir $\frac{\varkappa^2}{h} = a^2$ setzen, so dafs also a^2 eine nothwendig positive Gröfse darstellt,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{22a}$$

welche dieselbe Form hat, wie die bei den Longitudinalwellen erhaltene Bewegungsgleichung (15).

Die Integralfunction, welche die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung darstellt, mufs daher auch genau dieselbe Form haben, die wir früher bei den Longitudinalwellen fanden, nämlich

$$\eta = A \,.\, F_{(x + a t)} + B \,.\, G_{(x - a t)}. \tag{23}$$

Es geschehen aber hier die Verschiebungen quer gegen die Richtung, in welcher sich die Wellen fortpflanzen.

Dieselbe Form der Bewegung ergiebt sich natürlich auch, wenn wir die ζ-Verschiebung in Richtung der x-Axe zu berechnen suchen, und jeder dieser Wellenzüge kann auch ungestört durch den anderen mit ihm zugleich bestehen.

Bei den Transversalwellen hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Constanten ab, welche den Widerstand gegen die Verschiebung mifst, während bei den Longitudinalwellen diejenige Constante in die Gleichung einging, welche den Widerstand gegen die Volumänderung mifst. Wir finden daher bei den festen Körpern, in denen beide Formen der Bewegung vorkommen können, meistentheils verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Longitudinal- und Transversalwellen.

Bei Körpern, welche gegen Schiebungen der Schichten keinen Widerstand leisten, bei den Flüssigkeiten, können also solche Transversalschwingungen nicht vorkommen. Hierin liegt, wie schon oben angegeben, der Grund, weshalb die ältere Undulationstheorie des Lichtes nothwendig forderte, dafs der Lichtäther ein fest-elastisches Medium sei.[1])

---

[1]) Eine vollständigere Ausführung der Theorie der elastischen Schwingungen wird im zweiten Bande dieser Vorlesungen gegeben.