Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1897

Zweiter Theil. Elektromagnetische Schwingungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-7079

Zweiter Theil.

Elektromagnetische Schwingungen.

Erster Abschnitt.

Die Maxwell'schen Gleichungen.

§ 9. Die elektromagnetische und die magnetoelektrische Induction.

Wir wollen nunmehr zu der Betrachtung von elektromagnetischen Wellen übergehen. Während elastische Transversalwellen ausschliefslich in starr-elastischen Körpern zu Stande kommen können, sind die elektromagnetischen in allen Aggregatzuständen ponderabler Substanz und selbst in dem scheinbar leeren Weltenraume möglich.

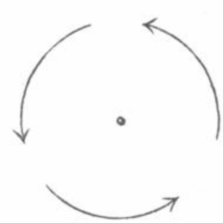

Fig. 6.

Wenn ein positiver elektrischer Strom senkrecht durch die Ebene der Zeichnung (Fig. 6) von hinten nach vorne hindurchgeht, so erzeugt er in seiner Umgebung eine magnetische Kraft, welche einen nordmagnetischen Pol in der entgegengesetzten Richtung des Uhrzeigers im Kreise herumzuführen strebt; denn nach der Ampère'schen Regel sieht eine menschliche Figur, die in diesen Strom so eingeschaltet ist, dafs ihre Füfse nach hinten und ihr Kopf nach vorn gerichtet ist, und die nach einer Magnetnadel blickt, den Nordpol, also überhaupt die nordmagnetischen Partikelchen nach links abgelenkt. Diese Richtung ist in Fig. 6, in welcher der Querschnitt des Stromleiters durch einen Punkt dargestellt ist, durch die Pfeilrichtung bezeichnet. Die magnetische Kraft in der Umgebung des Stromleiters dauert so lange, als der Strom besteht. Wir wissen aus der Erfahrung, dafs auch bei ganz kurz dauernden Strömen dieselbe Kraft auftritt. In den Faraday-Maxwell'schen Anschauungen ist diese Regel auch auf elektrische Ströme von so geringer Dauer übertragen worden, wie sie in den Molekeln isolirender Körper dadurch entstehen, dafs plötzlich in den sie begrenzenden Leitern sich ein Quantum Elektricität sammelt und eine elektrostatische Kraft hervorruft, die auf den Isolator einwirkt. Nach der FARADAY-MAXWELL'schen Vorstellung sind nun die Isolatoren und selbst der Aether, d. h. das hypothetische Medium, welches den Weltraum auch da erfüllt, wo keine ponderable Substanz mehr vorhanden ist, nicht indifferent gegen elektrische und magnetische Kräfte, sondern sie werden dielektrisch polarisirt durch elektrische, und magnetisirt durch magnetische Kräfte.

Wenn also durch das Vorhandensein eines elektrischen Stromes magnetische Kräfte auf den den Stromleiter umgebenden Raum wirken, so wird der Aether magnetisirt, und es entsteht eine magnetische Vertheilung in ihm, ähnlich in der Anordnung, wenn auch von viel geringerer Stärke, wie die im Eisen. Es ist durch Messungen festgestellt worden, dafs das Product aus der hierbei wirkenden Kraft und der Länge des geschlossenen Weges, längs dessen sie wirkt, immer einen bestimmten endlichen Betrag hat, welcher von der Stärke des durchgehenden Stromes abhängt. Demgemäfs hat also auch die Arbeit, welche eine solche Kraft hervorbringt, wenn sie die Einheit des Magnetismus einmal rings um den Stromleiter herum führt, einen bestimmten Werth, der nur von der Stromintensität abhängt, und den man als Maafs für diese benutzen kann.

Denken wir uns in der Entfernung r von der Axe des Stromes einen Kreis, und bezeichnen wir mit J die Intensität des elektrischen Stromes, so ist die Intensität der entstehenden magnetischen Kraft bei einem unendlich langen geraden Draht proportional $\frac{\alpha \, . \, J}{r}$, worin α eine nur von den gewählten Maafseinheiten abhängige Constante ist. Die Arbeit wird erhalten, indem wir die Kraft mit $2 \pi r$, der Länge des Weges, multipliciren, so dafs also die Arbeit proportional dem Product $2 \pi J \alpha$ und unabhängig von r ist. Die von WILHELM WEBER eingeführte Festsetzung der elektromagnetischen Maafseinheit für den elektrischen Strom J ist nun so getroffen, dafs $\alpha = 2$ gesetzt ist, und also für die Arbeit A, welche der Strom leistet, wenn er die nordmagnetische Einheit in der Richtung der Kraft längs des kreisförmigen Weges um sich herumführt, die Gleichung:

$$A = 4 \pi J \tag{24}$$

besteht. Man kann nun aber das Integral über die Kraft multiplicirt mit der Weglänge auch bilden auf jedem anderen Kreise oder theilweise auf der Peripherie verschiedener Kreise, wenn wir etwa einen Theil des Weges auf einem Kreise von gröfserem Radius zurücklegen und dann längs eines Radius auf einen Bogen von geringerem Radius übergehen; denn die Kraft hat immer die Richtung der Peripherie und die Kraftcomponente ist Null auf dem Wegstück, welches die Richtung des Radius hat. Gehen wir nun bald in der Richtung des Radius vorwärts, bald zurück, bald in tangentialer Richtung, so würden alle diejenigen Stücke oder Componenten, welche in Richtung des Radius gelegen sind, keinen Beitrag zu dem Werthe der Arbeit liefern.

Das Integral der Kraft, welche der Strom in seiner Nachbarschaft hervorbringt, multiplicirt mit dem Wegelement, auf welchem man vorwärts geht, wollen wir mit $\int k.ds$ bezeichnen; es ist für einen ganzen Umlauf, d. h. für eine geschlossene Linie, welche den Draht umgiebt, nur von der Intensität J abhängig, und es wird auch keinen Unterschied machen, wenn wir die Führung des durchlaufenen Weges aus der Ebene heraus verlegen, indem wir zeitweise in einer Strecke vorwärts gehen, welche senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht; denn ein geradliniger Strom bringt in solchen Richtungen keine magnetische Kraft hervor. Das Integral hat demnach, wie wir auch den Weg um den Stromleiter wählen mögen, immer den Werth $4\pi J$, vorausgesetzt, dafs der Sinn der Umkreisung derselbe ist. Dabei wird unter k die in die Richtung von ds fallende Componente der magnetischen Kraft verstanden. Der Werth dieses Integrals $\int k.ds$, erstreckt von einem Punkte x, y, z bis zu einem festen Punkte, den man im allgemeinen ins Unendliche verlegt, hängt zusammen mit dem Begriffe derjenigen Function $\varphi_{(x,y,z)}$, welche man Potentialfunction des Magnetismus im Orte x, y, z zu nennen pflegt.

Dann ist

$$k.ds = -d\varphi. \tag{25}$$

Integriren wir nun über eine den Strom in dem angegebenen Sinne einmal umkreisende geschlossene Bahn, deren Anfang mit dem Index 0, und deren Ende mit dem Index 1 bezeichnet sein möge, so erhalten wir:

$$-\int_0^1 d\varphi = \int_0^1 k.ds = \varphi_0 - \varphi_1 = 4\pi J. \tag{25a}$$

Der Werth der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke J, multiplicirt mit 4π, fällt also zusammen mit der Abnahme der magnetischen Potentialfunction, welche sich einstellt, wenn man den Strom einmal in dem angegebenen Sinne umkreist. Diese Potentialfunction ist also in der Umgebung des Stromleiters keine eindeutige Function, wie sie es in der Umgebung von magnetischem Stahl oder Eisen ist, sondern wir müssen, um sie eindeutig zu machen, uns eine Fläche durch den Stromleiter gelegt denken, die von dem Stromleiter ringsum begrenzt ist, oder wenn der Stromleiter unendlich ist, sich an der einen Seite ins Unendliche erstreckt. An der Fläche selbst macht die Potentialfunction einen endlichen Sprung ihres Werthes. Wenn wir z. B. in der Richtung des Pfeiles in Fig. 7 herum gehen, wo die Linie (0,1) einen Schnitt der Trennungsfläche bezeichnet, und der Punkt a einen des Stromleiters, so kann die magnetische Potentialfunction überall im ganzen Raume als continuirlich betrachtet werden; nur beim Durchgang durch die Fläche (0, 1) erleidet sie einen Sprung, während die Componenten der magnetischen Kraft auch in und auf beiden Seiten der Fläche durchaus continuirlich sich fortsetzen.

Ampère hat zuerst nachgewiesen, dafs man die magnetischen Wirkungen eines geschlossenen Stromleiters vollkommen gleich setzen könne denen, welche durch eine gewisse Vertheilung entgegengesetzter Magnetismen auf beiden Seiten einer solchen Fläche hervorgebracht werden würden. Nur in der Fläche selbst tritt eine Abweichung ein für die Raumpunkte, welche zwischen den beiden Schichten ihrer imaginären magnetischen Belegung liegen. Rings um diese

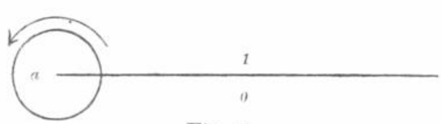

Fig. 7.

Fläche auf der Aufsenseite des Stromleiters bleibt noch ein zusammenhängender Raum; aber der gesammte den Stromleiter umgebende Raum wird durch jene Fläche aus einem (nach Riemann'scher Ausdrucksweise) zweifach zusammenhängenden in einen einfach zusammenhängenden verwandelt, in welchem die Potentialfunction nun eindeutig und continuirlich ist, wie die magnetisirter Eisenmassen.

Wir haben gesehen, dafs der Potentialsprung zwischen der einen und der anderen Seite dieser Fläche, wo man auch von einem Punkt zu demselben Punkt der anderen Seite hinüber geht, immer den gleichen Werth hat. Eine solche Fläche, welche an ihren beiden Seiten zwei verschiedene Werthe des Potentials besitzt, kann physikalisch hergestellt werden, indem man sie mit einer Doppelschicht des betreffenden Agens belegt. Ein Stahlblech, welches durch senkrecht zu seiner Fläche gerichtete Magnetkräfte magnetisirt wäre, würde ein Beispiel dafür sein; oder auf elektrischem Gebiete ein Condensator, welcher auf der einen Seite positiv und auf der anderen Seite negativ geladen ist, der also nach der ersten Seite hin positives Potential hervorbringt, und negatives Potential nach der anderen Seite. Der Condensator könnte aufserordentlich dünn sein; nur müfste dann auch die elektrische Dichtigkeit auf den beiden Platten entsprechend gesteigert werden.

Die Potentialtheorie lehrt, dafs der Potentialunterschied $\varphi_0 - \varphi_1$, φ_0 auf die magnetisch positive, φ_1 auf die magnetisch negative Fläche bezogen, in einem solchen Falle gleich ist 4π multiplicirt mit derjenigen Gröfse, welche man das Moment der magnetischen Doppelschicht für die Flächeneinheit nennt. Dieses Moment m ist, wenn für die Flächeneinheit das magnetische Quantum $+\mu$ auf der einen Seite und $-\mu$ auf der anderen im Abstand d zu der ersteren parallelen Seite liegt (Fig. 8), gleich

$$m = \mu \,.\, d,$$

so dafs also

$$\varphi_0 - \varphi_1 = 4\pi m = 4\pi J \tag{26}$$

und demnach

$$m = J \tag{26a}$$

ist.

Die völlig analogen Beziehungen gelten für eine elektrische Doppelbelegung, wenn eine Schicht positiver Elektricität auf der einen Seite, und eine gleich dichte Schicht negativer Elektricität auf der anderen Seite der Fläche sich befindet.

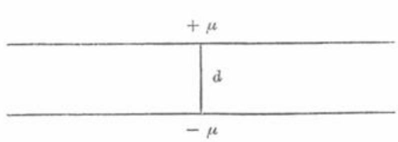

Fig. 8.

Da der Potentialsprung für alle Punkte der Fläche beim Durchgang durch dieselbe gleich ist, so forderte Ampère, dafs seine Hülfsfläche, die er sich durch den Stromleiter gelegt und durch ihn begrenzt dachte, in jeder Flächeneinheit das gleiche magnetische Moment haben müfste. Es wirkt in diesem Falle die doppelt belegte Fläche gerade so auf die Magneten ihrer Umgebung wie ein elektrischer Strom.

Wenn eine elektrische Bewegung in Richtung eines solchen Stromleiters geschieht, so werden also dadurch magnetische Kräfte in der nächsten Umgebung hervorgebracht, und solche magnetischen Kräfte werden in jedem magnetisirbaren Medium auch Magnetisirung erzeugen, d. h. die Vertheilung des Magnetismus in den Molekeln ändern, und wir wissen andererseits aus den diamagnetischen und paramagnetischen Untersuchungen, dafs alle bekannten ponderablen

Körper der Magnetisirung durch magnetische Kräfte unterworfen sind. Da es eine Reihe von Körpern giebt, die diamagnetischen, welche sich in der Gegenwart von Magneten gerade so verhalten, wie es schwach magnetische Körper thun, welche von einer stärker magnetisirbaren Flüssigkeit umgeben sind, so werden wir dadurch zur Annahme einer Magnetisirbarkeit auch des Luftraumes und sogar des Aethers geführt, da die diamagnetischen Versuche ebenfalls im Vacuum gelingen, und müssen uns diese Magnetisirbarkeit des Aethers sogar gröfser als die des Wismuth oder andrer diamagnetischer Körper vorstellen.

Während wir bisher annahmen, dafs die Elektricität in Bewegung war und fanden, dafs diese bewegte Elektricität Magnetismus erzeugte, können wir uns auch den umgekehrten Vorgang denken, dafs nämlich Magnetismus erzeugt wird, oder dafs er seine Stärke ändert, wodurch dann inducirte elektrische Ströme auftreten. Deutlich wahrnehmbar sind diese nur, wenn wir starken Magnetismus schwinden oder entstehen lassen; aber wir können auch bei schwach magnetischen Körpern, je weiter unsere Beobachtungsmethoden verfeinert werden, desto deutlicher nachweisen, dafs beim Aufhören oder Eintreten der Magnetisirung in der Umgebung elektrische Bewegungen hervorgebracht werden. Es entstehen also elektrische Kräfte immer, wenn längs irgend eines magnetisirbaren Fadens eine Veränderung seines Magnetismus eintritt. Denkt man sich nun an Stelle jenes auf der Ebene der Zeichnung (in Fig. 6 auf S. 27) senkrecht stehenden Leiters, den wir uns von einem elektrischen Strom durchflossen dachten, ein lineares magnetisirbares Gebilde, etwa einen Stahl- oder Eisendraht, so hat jede Veränderung seiner Magnetisirung zur Folge, dafs nun um diesen magnetisirten Faden in derselben Weise elektrische Kräfte wirken werden, in der dort magnetische Kräfte auftraten. Sie werden nachweisbar, sobald ein leitender Draht vorhanden ist, in dem diese Kräfte einen Strom erzeugen können. Die Richtung dieses elektrischen Stromes ist aber entgegengesetzt derjenigen, welche ein dauernder Strom haben müfste, um den Draht in derselben Weise zu magnetisiren, wie es bei der Erregung des inducirten Stromes geschieht. Wenn der zur Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Stab sich so magnetisirt, dafs sein Nordpol nach vorne, sein Südpol nach hinten liegt, so wird er einen elektrischen Strom induciren, in welchem die positive Elektricität im Sinne des Uhrzeigers ihn umkreist, während umgekehrt ein Strom, der jene Art der Magnetisirung erregen soll, gegen den Sinn des Uhrzeigers kreisen müfste.

§ 10. Die Wechselwirkung zwischen Schichten von elektrischen und magnetischen Stromfäden.

Denken wir uns eine Reihe von neben einander gelagerten elektrischen Strömen, welche untereinander parallel und senkrecht zur Ebene der Zeichnung, die wir uns vertical vorstellen, nach vorne gerichtet sind, so erzeugen sie alle magnetische Kräfte in der Art, wie wir es eben ausgeführt haben, und wie es in Fig. 9 durch die kleinen Pfeile dargestellt ist. Zwischen den Leitern treffen dann diese magnetischen Kräfte in entgegengesetzter Richtung zusammen und heben sich dadurch auf, während sie oberhalb und unterhalb alle gleich gerichtet sind. Wir werden also durch die von uns vorausgesetzte ebene Schicht von elektrischen Strömungen eine Magnetisirung bekommen, die oben nach der einen und unten nach der entgegengesetzten Richtung gerichtet ist, wie es die langen horizontalen Pfeile in Fig. 9 andeuten. Dieses wird nun in der ganzen Länge jener elektrischen Ströme stattfinden, und es wird also oberhalb und unterhalb eine Schicht von magnetischen Fäden liegen, in der die Fäden jeder einzelnen Schicht alle in der gleichen Richtung magnetisirt sind. Das Entstehen dieser Magnetismen wird

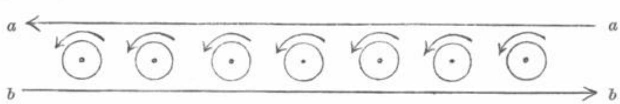

Fig. 9.

abermals ringförmige elektrische Ströme um jeden einzelnen dieser Längsfäden *aa* und *bb* erzeugen, und wiederum werden diejenigen Ströme, welche von gleich gerichteten, derselben Schicht angehörenden Magnetisirungsfäden herrühren, zwischen diesen in entgegengesetzter Richtung auf einander stofsen, also sich aufheben, während die oberhalb und unterhalb der Schicht inducirten elektrischen Ströme gleichgerichtet sind, und zwar quer gegen die magnetischen Kraftlinien, d. h. parallel mit den ursprünglich vorhandenen Stromfäden; und zwar sind diejenigen, welche an den Ort der ursprünglich vorhandenen elektrischen Stromfäden fallen, diesen nach der vorher angegebenen Regel entgegengesetzt gerichtet und schwächen sie; an den äufseren Seiten überwiegen die von der näheren Schicht herrührenden, den ursprünglichen Stromfäden gleichgerichteten Ströme, so dafs nun dort Ströme derselben Richtung neu erscheinen, während dieselben an ihrem ursprünglichen Orte schwinden.

Die eigenthümliche Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Bewegungen, wonach elektrische Bewegung magnetische

Kräfte in querer Richtung und magnetische Bewegung elektrische Kräfte wieder quer gegen die vorigen, also parallel den ersten hervorrufen, bedingt in diesem Falle, daſs die anfänglichen Bewegungen schwinden und dafür neue derselben Art und Richtung, aber an einer anderen Stelle auftreten. Die secundär entstandenen elektrischen Bewegungen wirken dann im Aether, sei er nun gemischt oder ungemischt mit wägbaren Substanzen, von ihrem neuen Orte aus gerade so weiter, wie es die primären Ströme thaten, so daſs die Störung des Gleichgewichts sich nach beiden Richtungen fortschreitend ausbreitet, und an den vorher gestörten Stellen immer wieder ausgeglichen wird.

Bei diesem Vorgange sind also nothwendig immer gleichzeitig magnetische und elektrische Polarisationen vorhanden, beide senkrecht zu einander; und die Fortpflanzung der Wellen geschieht in einer Richtung, die wiederum senkrecht zu der Ebene der elektrischen und magnetischen Verschiebungen ist. Die Oscillationen sind also als transversal zu bezeichnen, wie sie auch in der elastischen Undulationstheorie angenommen werden; aber sie bewegen nicht nothwendig die Substanz ihres Trägers, des Aethers, und sind vollkommen unabhängig von der Art der Festigkeit desselben.

Dieses ist im Wesentlichen die Vorstellung von der Art der Wechselwirkung zwischen magnetischer und elektrischer Bewegung, wie sie durch Maxwell ausgebildet worden ist. Es ist dabei zu bemerken, daſs diese Vorstellung in der dargelegten Form sich nur auf den reinen Aether oder auf elektrisch isolirende Medien übertragen läſst, in denen keine anderweitigen elektrischen Bewegungen vorkommen können, welche die Vertheilung der Elektricität wesentlich verändern, wie das in den leitenden Körpern der Fall ist. Später werden wir sehen, wie die Zustände und Vorgänge in den leitenden Körpern von den hier geschilderten verschieden sind.

§ 11. Die Maxwell'schen Grundgleichungen.

Wir wollen nun die soeben erörterten Verhältnisse quantitativ untersuchen. Wir haben auseinandergesetzt, daſs das Integral der magnetischen Kraft, genommen über einen bestimmten geschlossenen Weg, gleich zu setzen ist der mit 4π multiplicirten Intensität des Stromes, der durch das Innere dieses Weges hindurchgeht, so daſs also

$$\int k \, . \, d s = 4 \pi \, J.$$

Nun können wir uns den Weg beliebig gestaltet denken. Nehmen wir einmal an, wir hätten in der $y z$-Ebene ein Rechteck, dessen eine Seite in der Richtung von y liegt, die andere in der Richtung von z, wobei die in Fig. 10 durch Pfeile bezeichneten Richtungen als positiv gerechnet werden. Dann wollen wir die magnetischen Kräfte, beziehlich ihre Componenten nach den Coordinaten x, y, z, welche in der betreffenden Gegend des Raumes auf die Einheit der magnetischen Menge ausgeübt werden, mit L, M, N bezeichnen.

Die magnetische Kraft ist ursprünglich durch die magnetische Anziehung und Abstofsung nach dem System von Gauss gemessen worden, und zwar sind die Versuche, auf welche er seine Messungen stützte, im Luftraum gemacht. Seitdem hat man gefunden, dafs der Sauerstoff paramagnetisch ist, in demselben Sinne wie das Eisen. Es kann also eine genaue Uebereinstimmung zwischen den Messungen im Luftraum und denen im Vacuum nicht stattfinden; aber der Unterschied ist so klein, dafs man bis jetzt nicht geglaubt hat, ihn beachten zu müssen. Man wendet daher die in dem lufterfüllten Raume gemachten Bestimmungen ohne Weiteres auf das Vacuum an.

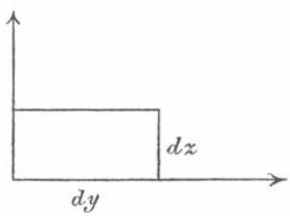

Fig. 10.

Gauss fand durch seine Messungen das Gesetz, dafs zwei Quanta Magnetismus, von denen das eine mit m, das andere mit m_1 bezeichnet sein mag, gegenseitig auf einander mit einer Kraft

$$\frac{m \cdot m_1}{r^2}$$

wirken, genau bestätigt. Dieses Gesetz war zuerst von Coulomb für die Elektricität und den Magnetismus, freilich ohne strenge Prüfung, aufgestellt worden. Für die Elektricität läfst es sich durch die Phänomene ihrer Bindung mit äufserster Genauigkeit bestätigen. Wenn ein elektrisirter Körper, der auf einer Metallplatte durch einen isolirenden Fufs getragen wird, mit einer vollkommen leitenden Hülle irgend welcher Art und Form umgeben ist und man leitet diese Hülle und die Platte, auf der das Ganze ruht, zur Erde ab, so ist aufserhalb keine Spur von elektrischer Wirkung zu beobachten. Es ist dieses nur dann möglich, wenn die Anziehung und Abstofsung beider Elektricitäten im Luftraum nach dem Coulomb'schen Gesetze vor sich gehen, und die auftretenden Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Beim Magnetismus treten Complicationen ein durch den Umstand, dafs wir einen einzelnen magnetischen Pol nicht von seinem Gegenpol trennen können. Indessen ist diese Schwierigkeit bei den Messungen von Gauss, welche mit Magnetstäben gemacht sind, durch Gebrauch langer Stäbe und theoretische Berechnung des Einflusses des anderen Pols umgangen. Es liefsen sich die Bedingungen der Versuche so wählen, dafs man ihre Ergebnisse unter Anbringung passender Correctionen genau mit den Folgerungen aus den vorausgesetzten mathematischen und geometrischen Vorstellungen vergleichen und zeigen konnte, dafs auch für den Magnetismus das Gesetz vollständige Gültigkeit hat.

Sind m und m_1 einander gleich, so mufs die auftretende Kraft gleich $\frac{m^2}{r^2}$ sein; daraus folgt, wie schon oben auseinander gesetzt worden:

$$\frac{m}{r} = \sqrt{\text{Kraft.}}$$

In diesem Sinne sind also die magnetischen Kräfte absolut gemessen.

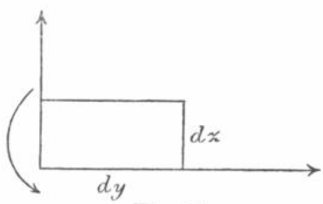

Fig. 11.

Wenn wir nun das Integral $\int k.ds$ hier um den Umfang eines Elementarrechteckes in der yz-Ebene bilden wollen, so kommen für uns in Betracht in der y-Richtung die Componente M, in der z-Richtung die Componente N. Wir werden also, wenn wir in der Richtung des gekrümmten Pfeiles (Fig. 11) herumgehen, zunächst das Glied $(-N.dz)$ zu bilden haben. Für die gegenüberliegende Seite ist derjenige Werth von N, welcher für die um dy vermehrte Coordinate gilt, also $N + \frac{\partial N}{\partial y} dy$, mit positivem Vorzeichen zu nehmen und ebenfalls mit dz zu multipliciren. Analog werden die beiden anderen Glieder gebildet, so dafs wir also erhalten:

$$\int k.ds = -N.dz + M.dy + \left(N + \frac{\partial N}{\partial y} dy\right) dz - \left(M + \frac{\partial M}{\partial z} dz\right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dy.dz \qquad (27)$$

Dieser Werth giebt durch 4π dividirt nach der Gleichung (25a) die elektromagnetisch gemessene Intensität eines Stromes an, der durch das betrachtete Flächenelement dringt, und zwar auf den Leser zu, wenn der Werth positiv ist, von dem Leser fort, wenn er negativ. Wir bezeichnen nun die sogenannte Dichtigkeit der Strömung, d. h. die Elektricitätsmenge (elektromagnetisch gemessen), die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit der yz-Ebene strömt, mit U, wobei U positiv sein soll, wenn der positive Strom auf den Leser zu gerichtet ist, eine Richtung, die wir von jetzt an als die positive Richtung der x-Axe annehmen wollen. Die Bedeutung dieses Zeichens unterscheidet sich von der des J in Gleichung (25a), welches wir die Intensität des Stromes nannten, dadurch, daſs abgesehen von der Einschränkung auf die der x-Axe parallele Richtung, J den Strom durch den gesammten Querschnitt des Leiters zusammenfaſste, während U hier also die Componente der Stromdichtigkeit, welche der x-Axe parallel ist, in der Flächeneinheit des Querschnittes bezeichnet.

Um diejenige Menge zu finden, welche in der Zeiteinheit durch die Fläche $dy.dz$ flieſst, werden wir U mit $dy.dz$ zu multipliciren haben, so daſs wir erhalten:

$$\int k.ds = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dy.dz = 4\pi\, U.dy.dz. \tag{28}$$

Die Erfahrungen, welche zu dieser Formel geführt haben, sind aber nur an Leitern gewonnen. In einem isolirenden Raum, wie wir ihn hier voraussetzen, wird die allein mögliche Bewegung der Elektricität darin bestehen, daſs die Polarisation in der x-Richtung wächst, was einer Strömung der Elektricität im Innern der einzelnen Molekeln gleich zu achten ist. Die elektrischen Polarisationen seien mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, die magnetischen Momente mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, und die elektrischen Kräfte mit X, Y, Z bezeichnet, wobei wir die Momente stets auf die Volumeneinheit beziehen.

Denken wir uns ein Volumen, was parallel der yz-Ebene constanten Querschnitt hat, so werden wir ihm ein Moment $\mathfrak{X}$ zuschreiben können, wenn es abgetrennt von den benachbarten Elementarvolumina für höhere und geringere Werthe des x, an seinen beiden Endflächen $dy.dz$ elektrische Flächenbeläge $\pm e.dy.dz$ hat, sodaſs:

$$e.dy.dz.dx = \mathfrak{X}.dx.dy.dz.$$

Da wir bei der Annahme isolirender Substanz in den betrachteten Theilen des Raumes die Annahme des Ueberganges freier Elektricität von einem zum anderen Raumelement ausschlieſsen, so müssen wir diese elektrischen Ansammlungen an den beiden Endflächen des Volumenelements durch Verschiebung des ihm ursprünglich angehörigen Gehalts neutralisirter positiver oder negativer Elektricität entstanden denken, und jeder Zunahme des Moments $d\mathfrak{X}$ wird ein entsprechender Fluſs des positiven Quantum de von der negativen Grenzfläche zur positiven entsprechen müssen, sodaſs in der That die Gröſse

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . dt = \frac{\partial e}{\partial t} . d t$$

einer elektrischen Strömung entspricht, deren Dichtigkeit U durch $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ gemessen wird. Wir erhalten also:

$$\int k . d s = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) . d y . d z = 4 \pi \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . d y . d z \tag{29}$$

Die Gleichung würde in dieser Gestalt stehen bleiben können, wenn wir hier die Elektricität nach elektromagnetischen Stromeinheiten messen wollten. Da wir aber auch noch die elektrostatischen Wirkungen zu betrachten haben, so ist es rathsam, dafs wir einerseits die magnetischen Gröfsen nach dem durch Gauss eingeführten und auf den Messungen im Luftraum begründeten magnetischen Maafse messen, und andererseits die elektrischen Gröfsen nach elektrostatischem Maafse. Wir werden also noch diejenige Constante einführen müssen, welche uns das elektromagnetische Maafs in elektrostatisches umwandelt; wir wollen sie mit A bezeichnen. Wir bekommen also die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) . d y . d z = 4 \pi A . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . d y . d z . \tag{29a}$$

Auf beiden Seiten können wir nun durch $d y . d z$ dividiren.

Es ist ersichtlich, dafs sich für Strömungen der Elektricität in der Richtung der y- und z-Axe völlig symmetrische Gleichungen ergeben, so dafs wir also erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Diese Gleichungen gelten streng genommen nur für den Luftraum; denn unsere bisherigen Messungen der Gröfse A sind im Luftraum gemacht worden, wie denn überhaupt alle bisherigen Bestimmungen der elektrischen und magnetischen Einheiten sich stets auf den Luftraum beschränkten. Wir werden sehen, dafs man beim Uebergang auf andere Körper noch gewisse Factoren hinzufügen mufs, die der abweichenden Beschaffenheit dieser Körper entsprechen.

Ganz dieselbe Betrachtungsweise gilt für die Aenderung der magnetischen Momente. Wenn die Magnetisirung eines Stabes sich plötzlich ändert, also wächst oder abnimmt, so entstehen ringsum elektrische Kräfte. Dieses würde zu einer ähnlichen Reihe von Gleichungen führen. Es ist dabei nur zu bemerken, wie schon vorher hervorgehoben wurde, dafs in der Beziehung des bewegten Magnetismus zu den elektrischen Kräften ein Unterschied insofern besteht, als die elektrische Bewegung, welche durch entstehenden Magnetismus hervorgebracht wird, entgegengesetzt ist derjenigen elektrischen Bewegung, welche nöthig ist, um diesen Magnetismus hervorzubringen. Das hat nun hier zur Folge, dafs wir beim Aufstellen der Gleichungen für elektrische Kräfte, also für diejenigen Kräfte, die wir als elektromotorische Inductionskräfte kennen gelernt haben, und die sich in den metallischen Leitern sehr kräftig wirksam zeigen, die Differenzen umkehren müssen. Wir bekommen also z. B.:

$$4\pi B \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Wenn wir als Einheiten für die hier vorkommenden elektrischen und magnetischen Gröfsen die erwähnten elektrostatischen und die von Gauss definirten magnetischen benutzen, so fordert das Gesetz von der Constanz der Energie, dafs die Constante B gleich der in den Gleichungen (30) vorkommenden Constante A ist[1]. Wir gelangen demnach hier zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\
4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\
4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Die Gleichungen (30) und (31) sind die sechs ursprünglichen Maxwell'schen Gleichungen für die Fortpflanzung dieser elektrischen und magnetischen Wirkungen durch den Aether.

§ 12. Ein particuläres Integral der Maxwell'schen Gleichungen.

Die empirischen Untersuchungen über die Einwirkung der magnetischen Kräfte auf magnetisirbare Substanzen und elektrischer Kräfte auf elektrische Isolatoren haben ergeben, dafs innerhalb einer

---

1) Siehe Bd. IV dieser Vorlesungen.

gewifsen Grenze der Kraftintensitäten die Polarisationen, welche durch eine gegebene Kraft entstehen und in die Richtung dieser Kraft hineinfallen, wenigstens bei isotropen Körpern, d. h. Körpern, die nach allen Richtungen dieselben Eigenschaften zeigen, der einwirkenden Kraft proportional sind, dafs man also die dielektrischen Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der elektrischen Kraft, welche diese Momente hervorzubringen strebt, proportional setzen kann. Um sie zu erhalten, mufs man also die Kraft mit einer Constanten multpliciren, welche von der Natur der Substanz abhängt, und die wir mit $\frac{\varepsilon}{4\pi}$ bezeichnen wollen. Im reinen Aether würde $\varepsilon = 1$ zu setzen sein.

Gemäfs der gewählten Bezeichnung bilden wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi.\mathfrak{X} &= \varepsilon.X \\ 4\pi.\mathfrak{Y} &= \varepsilon.Y \\ 4\pi.\mathfrak{Z} &= \varepsilon.Z \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Da andererseits für die magnetischen Polarisationen die analogen Beziehungen gelten, so ergiebt sich bei Einführung der entsprechenden Constante μ:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi.\mathfrak{L} &= \mu.L \\ 4\pi.\mathfrak{M} &= \mu.M \\ 4\pi.\mathfrak{N} &= \mu.N \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Nun wollen wir annehmen, dafs die vorkommenden Kräfte und Momente nicht von y und z, sondern nur von x und t abhängen; dann sind alle Differentialquotienten nach y und z gleich Null zu setzen. Unter dieser Annahme verwandeln sich die Gleichungen (30) in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= 0, \text{ also } \mathfrak{X} = 0 \text{ oder constant nach der Zeit.} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= -\frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

und das Gleichungssystem (31) in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= 0, \text{ also } \mathfrak{L} = 0 \text{ oder constant nach der Zeit.} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Functionen $\mathfrak{M} = \frac{\mu . M}{4\pi}$ und $\mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon . Z}{4\pi}$ einerseits, und $\mathfrak{N} = \frac{\mu . N}{4\pi}$ und $\mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon . Y}{4\pi}$ andererseits kommen nun in getrennten Gleichungspaaren unabhängig von einander vor. Wir können daher jedes einzelne Paar unabhängig vom andern auflösen. Wenn wir

$$\left.\begin{array}{c} M = 0 \\ \text{und} \quad Z = 0 \end{array}\right\} \quad (36)$$

setzen, so haben wir nur für die beiden auf N und Y bezüglichen Gleichungen

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Lösungen zu suchen.

Wir wollen jetzt

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 . e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}, \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_0 . e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}, \\ \text{und} \\ Y = Y_0 . e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 . e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}, \end{array}\right\} \quad (37)$$

setzen, worin N_0, $\mathfrak{Y}_0$, Y_0 und $\mathfrak{N}_0$ eventuell complexe Werthe haben können. Es ist dann:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{in}{h} N_0 e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = 4\pi A in \mathfrak{Y}_0 e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)} \\ \text{und} \\ -\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{in}{h} Y_0 e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = 4\pi A in \mathfrak{N}_0 e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}, \end{array}\right\} \quad (38)$$

also

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{h} N_0 = 4\pi A \mathfrak{Y}_0 \\ \frac{1}{h} Y_0 = 4\pi A \mathfrak{N}_0 \end{array}\right\} \quad (39)$$

Nun folgt aus den Gleichungen (32) und (33) für $t = \frac{x}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi \mathfrak{Y}_0 = \varepsilon . Y_0 \\ 4\pi \mathfrak{N}_0 = \mu . N_0 \end{array}\right\} \quad (40)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (39) ein und multiplicirt diese dann miteinander, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{h^2} = A^2 . \varepsilon . \mu . \quad (41)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so stellen die von uns angenommenen Werthe, welche ja sowohl Functionen der Zeit als auch des Ortes sind, Bewegungen dar, die den abgeleiteten Formeln entsprechen. In den eingeführten Werthen ist überall der Factor $e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}$ enthalten, der eine Function von $x-ht$ ist. Wir haben nun aber in § 7 gesehen, dafs jede derartige Function eine Bewegung darstellt, welche in Richtung der positiven Werthe von x mit der Geschwindigkeit h fortrückt. Der Werth von h ist aber in Gleichung (41) durch die Constante A und durch ε und μ gegeben.

Zerlegen wir jede der Lösungen in ihren reellen und imaginären Theil, so kommt in ersterem der Factor $\cos n\left(t-\frac{x}{h}\right)$, in letzterem der Factor $\sin n\left(t-\frac{x}{h}\right)$ vor. Beide Theile stellen also der Zeit nach periodische Bewegungen dar, die in Richtung der x fortschreiten, während die elektrischen Oscillationen $\mathfrak{Y}$ in Richtung der y, die magnetischen $\mathfrak{N}$ in Richtung der z geschehen; beide sind also normal zu einander und normal zu derjenigen Richtung, in der die Wellen voranschreiten.

Es zeigt sich demnach in der That, dafs elektrische und magnetische Transversalwellen vor sich gehen können.

In dem anderen Falle, den die Gleichungen (34) und (35) zulassen, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ von Null verschieden gesetzt werden, geschehen umgekehrt die elektrischen Schwingungen in der z-Richtung, die magnetischen in der y-Richtung; aber während $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ in Gleichung (39) gleiches Vorzeichen haben, würden $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{Z}_0$ entgegengesetztes Vorzeichen bekommen, falls nicht gleichzeitig die Fortpflanzungsgeschwindigkeit h negativ wird. Auch in diesem Falle pflanzen sich die elektrischen wie die magnetischen Oscillationen mit gleicher absoluter Geschwindigkeit h in der x-Richtung fort und zwar mit derselben wie das zuerst gefundene System.

Da übrigens die Gleichung (41) nur den Werth von h^2 giebt, so kann man als Wurzel davon ebenso gut $+h$ wie $-h$ wählen, die Fortpflanzung kann also ebenso wohl in der Richtung der zunehmenden wie der abnehmenden Werthe von x geschehen. Die Gröfse dieser Geschwindigkeit h hängt von der Constanten A ab, welche sich auf die Reduction der elektrostatischen Einheit auf die elektromagnetische Einheit bezieht, und welche somit direct auf elektromagnetischem Wege zu bestimmen ist.

Aus den Vorzeichen von $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ oder von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{Z}_0$ folgt, dafs, wenn der Beschauer in Richtung der Fortpflanzung der Wellen auf eine Schicht hinblickt, in der positive Elektricität sich parallel seiner Längsaxe von seinen Füſsen nach seinem Kopfe bewegt, der Nordmagnetismus dieser Schicht in der Bewegung nach rechts begriffen sein muſs. Beide Arten der Polarisation müssen ihre Maxima und Minima gleichzeitig in jeder Schicht erreichen. Umkehrung der magnetischen Bewegung, ohne solche der elektrischen, würde auch die Fortpflanzungsrichtung umkehren. Gleichzeitige Umkehrung beider Oscillationen würde die Fortpflanzungsrichtung ungeändert lassen, denn die Gleichungen (39) bleiben bei Verwandlung von N_0 in $-N_0$ und $\mathfrak{N}_0$ in $-\mathfrak{N}_0$ und bei ungeänderten $\mathfrak{Y}_0$ und Y_0 nur bestehen, wenn zugleich h in $-h$ verwandelt wird.

§ 13. Die erforderlichen Eigenschaften des Aethers.

Was bei den Schwingungen sich verändert, sind die elektrischen oder magnetischen Polarisationen des Mediums, in welchem die Schwingungen sich vollziehen. Um nun die Fortpflanzung des Lichtes in dem Raum zwischen den Gestirnen, der frei von allen Spuren ponderabler Materie ist, erklären zu können, muſs auch die elektromagnetische Theorie des Lichts ein Medium annehmen, welches den Weltraum auch da, wo ponderable Materie nicht nachzuweisen ist, erfüllt. Es muſs also insofern dieselbe Annahme, wie bei der Undulationstheorie gemacht werden; aber während diese dem Aether die Eigenschaften eines fest-elastischen Körpers zuschreiben muſs, braucht man in der elektromagnetischen Theorie über die Art seines inneren Zusammenhanges gar keine Annahme zu machen. Es genügt, daſs der Aether fähig ist, magnetisirt und in der Weise eines Isolators elektrisirt zu werden, nämlich so, daſs in seinen kleinsten Theilchen eine gewisse elektrische Vertheilung, eine sogenannte dielektrische Polarisation, wie sie Faraday genannt hat, möglich ist.

In Bezug auf die Abhängigkeit der magnetischen und dielektrischen Momente von den sie bewirkenden Kräften wissen wir, daſs eine magnetisirungsfähige Substanz desto stärker magnetisch wird, je gröſser die magnetische Kraft ist, welche auf sie einwirkt; aber die Gröſse der Magnetisirung ist bei gleicher einwirkender Kraft im Allgemeinen sehr verschieden. Eisen und eisenähnliche Metalle nehmen auſserordentlich hohe Magnetisirungen an, die meisten anderen Körper hingegen nur sehr schwache. Es giebt auſserdem, wie schon bemerkt, eine Klasse von Körpern, die diamagnetischen, welche bei oberflächlicher Betrachtung unter dem Einfluſs einer magnetisirenden Kraft eine entgegengesetzte Magnetisirung annehmen wie das Eisen.

Die diamagnetischen Substanzen dürfen wir für schwächer magnetisirbar halten als den Aether.

Stets nehmen mit der magnetischen Kraft auch die magnetischen Momente in den Substanzen zu, und bei kleinen Magnetisirungen und kleinen magnetisirenden Kräften sind die Momente den magnetisirenden Kräften, durch welche sie hervorgerufen werden, annähernd proportional. Oben haben wir schon in unseren Gleichungen (33) eine solche Annahme der Proportionalität gemacht. Genau trifft dieses, wenigstens bei den stark magnetischen Körpern, nicht zu; es ist sogar die Magnetisirung bei ihnen nicht allein von der Kraft abhängig, welche zur Zeit einwirkt, sondern auch von den vorausgegangenen Zuständen, so daſs stets eine gewisse Annäherung an die letzteren besteht. Beim Stahl und dem mit geringen Mengen anderer Substanzen, wie Kohle, Wolfram, Kiesel, Phosphor, versetzten Eisen reden wir in diesem Sinne von den Wirkungen einer sogenannten Coercitivkraft, welche den vorausgegangenen Zustand gegen die zur Zeit einwirkenden Kräfte gleichsam zu erhalten strebt, so daſs also z. B. durch schwache magnetische Kräfte der Stahl verhältniſsmäſsig schwach magnetisirt wird, schwächer als weiches Eisen, indem ein Rest seines früheren unmagnetischen Zustandes bestehen bleibt. Ist Stahl aber durch groſse magnetische Kräfte einmal magnetisirt worden, so kehrt er, auch wenn die magnetisirende Kraft aufhört, nicht ganz wieder in den unmagnetischen Zustand zurück.

Es mag hier schon darauf hingewiesen sein, daſs wir in der Optik fast nur schwach magnetische Körper zu berücksichtigen haben, wo mit groſser Annäherung die Annahme genügt, daſs das in dem Elementarvolumen der Substanz entstehende magnetische Moment der magnetischen Kraft proportional ist.

Bei den elektrisch polarisirbaren Substanzen scheint diese Annahme der Proportionalität im Ganzen viel besser zuzutreffen; aber es besteht auch da eine Wirkung, welche wir als elektrische Nachwirkung zu bezeichnen pflegen, indem ebenfalls die vorausgegangenen Zustände sich bis zu einem gewissen Grade erhalten und nur langsam verschwinden.

Die magnetische Coercitivkraft hat mehr den Charakter einer haftenden Reibung, die bis zu einer gewissen Grenze schwachen bewegenden Kräften widersteht, sie verhindert, eine Bewegung hervorzubringen, wie dieses etwa bei der Reibung eines schweren Körpers der Fall ist, der ohne abzugleiten auf einer rauhen wenig geneigten Fläche liegt; während die elektrische Nachwirkung mehr dem Widerstande ähnlich ist, der bei einer zähen Flüssigkeit vorkommt.

Abgesehen von dieser magnetischen Nachwirkung oder der magnetischen Coercitivkraft sind aber auch bei starken magnetischen Kräften die Magnetisirungen nicht genau den Veränderungen der wirkenden Kräfte proportional. Es zeigt sich vielmehr, dafs z. B. $\mathfrak{L}$ eine Function von L ist, welche zwar anfangs bei Zunahme der magnetisirenden Kraft dieser ziemlich proportional wächst, später jedoch sich einem Maximum nähert. Aber auch selbst bei ganz schwachen Magnetisirungen ist die Magnetisirung der einwirkenden Kraft nicht genau proportional. Unter diesen Umständen ist die oben eingeführte Constante $\frac{\mu}{4\pi}$ eigentlich als der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial L}$ anzusehen. In diesem Sinne würde $\frac{\mu}{4\pi}$, wenn wir unsere Betrachtung nur auf kleine Aenderungen der Magnetisirung beschränken, durch die Tangente der Neigung der in der Fig. 12 dargestellten Curve gegeben sein. Da wir es aber, wie schon erwähnt, in der Optik nur mit sehr schwachen Aenderungen der Magnetisirung zu thun haben, so können wir ohne beachtenswerthen Fehler die einfachere Annahme der völligen Proportionalität zwischen der Gröfse der Magnetisirung und der Gröfse der magnetischen Kraft beibehalten, wie sie Poisson in seiner Theorie des Magnetismus ursprünglich eingeführt hat.

Die völlig analogen Betrachtungen und Annahmen gelten auch hinsichtlich der dielektrischen Polarisation des Aethers.

§ 14. Die magnetische und elektrische Dichtigkeit während der Schwingungen.

Die Maxwell'schen Gleichungen sagten aus, dafs eine Constante, multiplicirt mit der Aenderung des magnetischen Momentes in Richtung der x-Axe gleich ist der Differenz zweier Differentialquotienten der elektrischen Kraft, wobei vorausgesetzt ist, dafs die Gröfse der Momente immer auf die Volumeneinheit des betreffenden Körpers bezogen ist, und dafs die magnetisirende Kraft durch die Anziehungskraft gemessen wird, welche von ihr auf die

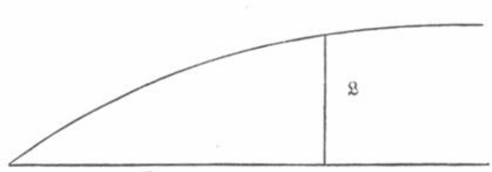

Fig. 12.

Einheit des Magnetismus im Luftraum ausgeübt wird. Die betreffenden Gleichungen (31) lauteten:

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und dann alle addiren, so heben sich die Glieder der rechten Seite fort und es entsteht die weitere Gleichung:

$$4\pi A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right\} = 0 \qquad (42)$$

die also in den drei anderen bereits enthalten ist. Da A hier eine Constante bezeichnet, welche von dem Verhältnifs der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten der Elektricitätsmengen abhängt, so folgt aus der letzten Gleichung, dafs die Gröfse, von der hier der Differentialquotient nach der Zeit genommen ist, von der Zeit nicht abhängig sein kann, sondern an jeder einzelnen Stelle des Raumes eine Constante nach der Zeit sein mufs, die aber an verschiedenen Stellen des Raumes verschiedene Werthe haben kann. Wir wollen sie mit τ bezeichnen, so dafs also

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = \tau . \qquad (43)$$

Es würde somit τ eine von der Zeit unabhängige Function der Coordinaten sein. Wir werden nachher sehen, dafs diese Gröfse dem entspricht, was wir die magnetische Dichtigkeit der betreffenden Stelle nennen.

Das magnetische Moment $\mathfrak{L}$ sagt aus, dafs in einem bestimmten Elementarvolumen der Nord-Magnetismus je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{L}$ eine Verschiebung in der positiven oder negativen x-Richtung erlitten hat, so dafs auf der einen Seite des betreffenden Volumelements Nord-Magnetismus von seinem räumlichen Zusammentreffen mit Süd-Magnetismus frei wird. Andererseits können wir die Gröfse des magnetischen Momentes $\mathfrak{L}$ auch in der Weise auffassen, dafs, wenn

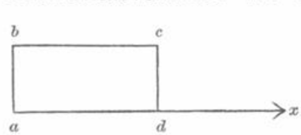

Fig. 13.

z. B. eine positive Polarisation $\mathfrak{L}$ besteht, ein bestimmtes Quantum von Nord-Magnetismus in der positiven x-Richtung vorwärts geschoben ist, während zugleich der Süd-Magnetismus in der negativen x-Richtung rückwärts geschoben ist. Die Gröfse $\mathfrak{L}$ mifst also in diesem Sinne das Quantum von positivem Magnetismus, welches durch den Querschnitt einer das Element schneidenden Fläche in der positiven x-Richtung hindurch gegangen ist, vermehrt um die absolute Menge von negativem Magnetismus, der in der negativen x-Richtung hindurch gegangen ist.

Wenn wir ein solches Volumelement haben und $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$ positiv ist, also die Werthe von x in Fig. 13 nach rechts hin wachsen, und $\mathfrak{L}$ eine Verschiebung des Magnetismus nach rechts bezeichnet, so würde bei Ausbildung dieser Polarisation $\mathfrak{L}$ durch die Fläche $ab = dy \,.\, dz$ in das Volumelement das Quantum $\mathfrak{L} \,.\, dy \,.\, dz$ von Magnetismus hineingeschoben, und auf der anderen Seite würde aus dem Volumen durch die Fläche $cd = dy \,.\, dz$ ein Quantum hinausgeschoben sein, welches aber nicht mehr demselben Werth von $\mathfrak{L}$ entspricht, der bei ab, wo $dx = 0$ ist, angegeben wurde, sondern welches gleich ist:

$$dy \,.\, dz \left(\mathfrak{L} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} dx \right) \cdot$$

Wenn wir diese beiden Glieder algebraisch addiren, so ergiebt sich

$$- \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \,.$$

Das ist also das Quantum Magnetismus, welches in das Volumen mehr eingetreten ist, als aus dem Volumen ausgetreten war. Das erste Glied von τ in Gleichung (43), würde demnach die Menge des Magnetismus bezeichnen, welche in der x-Richtung aus der Volumeinheit mehr ausgetreten, als in dieselbe eingetreten ist. Die beiden anderen Glieder sagen das Analoge hinsichtlich der y- und z-Richtung aus. Der ganze Werth von τ zeigt demnach an, wie viel Magnetismus bei der gesammten Verschiebung d. h. durch das Entstehen der Polarisationen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ aus dem Volumen mehr ausgetreten als eingetreten ist.

Die aus den MAXWELL'schen Grundgleichungen abgeleitete Gleichung (42) ergiebt also, dafs das in dem gegebenen Körperelement vorhandene gesammte Quantum von M a g n e t i s m u s, welches unabhängig von den magnetisirenden Kräften, die zur Zeit einwirken, dort besteht, unverändert bleibt. Nach dem Vorgange von H. HERTZ pflegt man dieses jetzt den w a h r e n Magnetismus des Volumelements zu nennen. Eine Anhäufung von wahrem Magnetismus, wie sie z. B. an den Polen eines Stahlmagneten vorhanden ist, würde also, soweit unsere Gleichungen gelten, unveränderlich bleiben müssen.

Die MAXWELL'schen Gleichungen beziehen sich also nur auf solche Veränderungen des Magnetismus, wie sie temporär durch elektrische Ströme, die auf diese Substanz anfangen einzuwirken, oder durch die Bewegung von Magneten und magnetisirbaren Körpern gegen einander, eintreten können.

Aehnliche Gleichungen lassen sich, wie wir gesehen haben, auch in Bezug auf die elektrischen Momente aufstellen, und aus ihnen folgt in analoger Weise, dafs

$$4\pi A . \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = 0 \tag{44}$$

ist, und dafs also, soweit diese Gleichungen gelten, in jedem Volumelement die Quantität der Elektricität der Zeit nach constant bleibt. Wir wollen hier

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = \sigma \tag{45}$$

setzen, so dafs also wiederum σ eine der Zeit nach constante Function der Coordinaten bezeichnet. Die Gleichung (44) sagt demnach zunächst aus, dafs die MAXWELL'schen Gleichungen (30) sich in der bisherigen Form nur auf elektrisch isolirende Körper beziehen können.

Wir werden später unsere Voraussetzungen erweitern und die hier abgeleiteten Sätze in allgemeinerer Form wieder finden, wobei wir sie auch auf leitende Medien ausdehnen können.

§ 15. Beziehungen zwischen verschiedenen Lösungssystemen der Maxwell'schen Gleichungen.

Wir haben soeben gefunden, dafs

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = \sigma$$

eine von der Zeit unabhängige Gröfse ist, die aber eine Function der Coordinaten sein kann. Ferner hat sich früher (§§ 12 und 13) ergeben, dafs in erster Annäherung die Werthe der elektrischen Momente, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, durch die Werthe der elektrischen Kräfte, X, Y, Z, multiplicirt mit einem geeigneten Factor, auszudrücken sind, so dafs wir also schreiben können:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.X\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Z\right)=\sigma \qquad (45\,\mathrm{a})$$

Fügen wir hierzu noch die Gleichungen (31)

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

so sind dieses vier Gleichungen, welche sich auf die Werthe der elektrischen Kräfte, X, Y, Z, beziehen.

Solche Differentialgleichungen aber, in denen die Unbekannten und die Differentialquotienten der Unbekannten nur so auftreten, dafs keines mit dem anderen multiplicirt ist, oder ins Quadrat oder in höhere Potenzen erhoben ist, nennen wir lineare Differentialgleichungen, und zwar homogene, wenn die veränderlichen Gröfsen oder deren Differentialquotienten in allen Gliedern als Factor einmal vorkommen. Dieses ist nun aber bei unseren Differentialgleichungen nicht der Fall, sondern sie sind nicht-homogene lineare Differentialgleichungen, da Glieder vorhanden sind, welche weder die zu suchenden Gröfsen X, Y, Z, noch deren Differentialquotienten enthalten.

Die Werthe der Unbekannten sind bestimmt durch die Functionen, die wir zunächst bei der weiteren Behandlung dieser Gleichungen als gegeben ansehen wollen, nämlich durch σ und die ersten Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{N}$.

Wenn wir zwei oder mehrere Systeme von Werthen X, Y, Z als Functionen der Zeit und der Coordinaten gefunden haben, welche in die Differentialgleichungen eingesetzt, diesen genügen, so läfst sich zunächst nachweisen, dafs die verschiedenen Integralwerthe für X, Y, Z sich nur um Gröfsen unterscheiden können, welche Differentialgleichungen genügen, die man aus den ursprünglichen erhält, indem man die gegebenen Functionen, nämlich σ und die drei Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$, gleich Null setzt.

Haben wir z. B. ein System von X, Y, Z gefunden, dem wir die bisherige Bezeichnung lassen wollen, und ferner ein zweites System X_0, Y_0, Z_0, so dafs also

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot X_0\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot Y_0\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot Z_0\right)=\sigma$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial Y_0}{\partial z}-\frac{\partial Z_0}{\partial y}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}=\frac{\partial Z_0}{\partial x}-\frac{\partial X_0}{\partial z}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}=\frac{\partial X_0}{\partial y}-\frac{\partial Y_0}{\partial x}$$

so würde aus diesen Gleichungen zunächst sich ergeben, dafs

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}&=\frac{\partial Y_0}{\partial z}-\frac{\partial Z_0}{\partial y}\\ \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}&=\frac{\partial Z_0}{\partial x}-\frac{\partial X_0}{\partial z}\\ \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}&=\frac{\partial X_0}{\partial y}-\frac{\partial Y_0}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Diese Gleichungen lassen sich nun auch schreiben in der Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(Y-Y_0)-\frac{\partial}{\partial y}(Z-Z_0)&=0\\ \frac{\partial}{\partial x}(Z-Z_0)-\frac{\partial}{\partial z}(X-X_0)&=0\\ \frac{\partial}{\partial y}(X-X_0)-\frac{\partial}{\partial x}(Y-Y_0)&=0\end{aligned}\right\}\quad(46\text{a})$$

Ferner folgt aus unseren beiden Systemen von Lösungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(X-X_0)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(Y-Y_0)\right\}&\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(Z-Z_0)\right\}&=0\end{aligned}\right\}\quad(45\text{b})$$

Aus den vier letzten Gleichungen (46a) und (45b) geht aber hervor: Wenn wir zwei Systeme von Lösungen dieser Differentialgleichungen haben, X, Y, Z und X_0, Y_0, Z_0, so sind die Differenzen dieser Lösungen, $X-X_0$, $Y-Y_0$, $Z-Z_0$, Lösungen derselben Differentialgleichungen, falls wir die in diesen als gegeben betrachteten Functionen gleich Null setzen.

Für dieses System von Differentialgleichungen (46a) und (45b) läfst sich nun eine allgemeine Lösung geben. Wenn nämlich zwischen drei von einander unabhängigen veränderlichen Gröfsen ein Gleichungssystem von der Form unserer Gleichungen (46 a) besteht, so wird es immer erfüllt werden können, wenn man

$$\left.\begin{aligned} X - X_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y - Y_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z - Z_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

und

setzt, wo φ irgend eine willkürliche Function der Coordinaten bezeichnet, von der nur vorausgesetzt ist, dafs ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endliche Werthe haben. Wenn wir jene Annahme machen, so würden die Gleichungen (46a) nunmehr lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (46\,\mathrm{b})$$

Diese Gleichungen sind richtig, sobald die unabhängigen Variablen, x, y und z wirklich von einander unabhängig sind. Die Gleichung (45 b) würde noch eine weitere Bestimmung der Function φ geben, indem sich dieselbe umformt in:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \quad (45\,\mathrm{c})$$

Um die Gleichungen ganz allgemein zu halten, haben wir bisher ε, die Constante für die dielektrische Polarisation, noch als Function der Coordinaten betrachtet. Darin war die Annahme enthalten, dafs der Raum mit Substanzen gefüllt ist, welche an verschiedenen Stellen verschiedene dielektrische Polarisationsfähigkeit haben. Wenn wir uns nun auf einen Theil des Raumes beschränken, in welchem die Substanz gleichartig ist, so dafs wir also ε als constant betrachten können, so verwandelt sich die Gleichung (45c) in

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot \Delta\varphi = 0$$

oder

$$\Delta\varphi = 0 \quad (48)$$

womit eine nähere Bestimmung der Function φ gegeben ist.

Dieses ist nun eine Gleichung, die in der Theorie der Potentialfunctionen von grofser Bedeutung ist.

Die verschiedenen Lösungen, welche den aufgestellten vier Differentialgleichungen (46a) und (45b) entsprechen, können sich nun von einander wiederum nur durch Werthe unterscheiden, welche Lösungen derselben Differentialgleichungen sind, d. h. derjenigen Differentialgleichungen, welche aus den ursprünglichen dadurch erhalten werden, dafs die in ihnen vorkommenden Functionen, durch welche sie nicht homogen sind, gleich Null gesetzt werden.

Um auf eine weitere Eigenschaft dieser Gleichungen hinzuweisen, wollen wir sie zunächst in ihrer Schreibweise vereinfachen, indem wir X, Y, Z statt $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$ setzen und somit erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (46\text{c})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Z\right) = 0 \quad (45\text{d})$$

Die Summe und die Differenz je zweier Lösungen dieser Gleichungen sind ebenfalls wieder Lösungen, weil nach unserer vorigen Darlegung zwei verschiedene Lösungen sich nur durch Lösungen dieses Gleichungssystems selbst unterscheiden können. Da wir somit jede Lösung zu sich selbst beliebige Male addiren können, so folgt daraus, dafs jede Lösung, also z. B. X_1, Y_1, Z_1, die als bestimmte Function der Zeit und der Coordinaten gefunden ist, auch eine richtige Lösung bleibt, wenn wir sie mit irgend einem Coefficienten multipliciren. Ebenso können wir sie aber auch zu irgend einer anderen Lösung addiren, die vorher aber ebenfalls mit irgend einem constanten Coefficienten multiplicirt sein darf, so dafs also, wenn X_1, Y_1, Z_1, und X_2, Y_2, Z_2 Lösungen sind, auch

$$a.X_1 + b.X_2$$

und

$$a.Y_1 + b.Y_2$$

$$a.Z_1 + b.Z_2$$

Lösungen sind, welche Werthe die Constanten a und b auch haben mögen.

Wenn ein System von Gleichungen, das zur Lösung eines physikalischen Problems aufgestellt ist, solche Beschaffenheit hat, daſs jede homogene lineare Function der für die verschiedenartigen Gröſsen gefundenen Werthe wieder ein den Gleichungen entsprechendes System von Werthen darstellt, so sagt man, die physikalischen Vorgänge, welche den verschiedenen Lösungen entsprechen, seien superponirbar.

In manchen Fällen läſst die sinnliche Anschauung direct die Superposition und das ungestörte Fortbestehen der einzelnen Glieder der Summe erkennen. So können z. B. verschiedene Wellensysteme auf einer Wasseroberfläche oder verschiedene Schallwellensysteme in der Luft gleichzeitig neben einander bestehen, ohne daſs die Systeme sich gegenseitig in ihrem Verlaufe stören.

Das ist eine sehr wesentliche Eigenschaft aller derjenigen physikalischen Processe, welche durch lineare homogene Differentialgleichungen dargestellt werden können.

Die bei der Superposition benutzten Coefficienten a und b können auch imaginär sein. Wenn wir etwa b durch den imaginären Coefficienten $b.i$ ersetzen, so wird dadurch weiter nichts angezeigt, als daſs der reelle Theil der gebildeten algebraischen Summe eine Lösung sein muſs, und der imaginäre ebenfalls. Wir kommen darauf später noch zurück, und werden davon gerade bei den Lichtschwingungen Gebrauch machen.

Wenn wir also Lösungen dieses einfacheren homogenen Systems und ferner eine Lösung der vollständigen nicht homogenen Differentialgleichungen gefunden haben, so können wir alle weiteren Lösungen des ursprünglichen Systems daraus herleiten, indem wir zu der einen gefundenen Lösung desselben die verschiedenen Lösungen des einfacheren Systems addiren.

Wir wollen nunmehr zunächst sehen, wie wir eine solche erhalten können.

§ 16. Reduction der Maxwell'schen Gleichungen auf die Form: $\Delta \varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$.

Um Lösungen der ursprünglichen MAXWELL'schen Grundgleichungen zu finden, ist es bequemer, wenn wir in die Gleichungen (31) die Momente selbst aus den Gleichungen (32) einfügen, so daſs wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

Dazu kommt dann noch die weitere Gleichung

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

Aus diesen vier Differentialgleichungen müssen wir die Werthe der Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu finden suchen. Obschon dieses Gleichungssystem ziemlich complicirt ist, so sind doch ausgebildete Methoden vorhanden, seine Lösung durchzuführen.

Wir haben zu diesem Zwecke die zu bestimmenden Gröfsen durch eine Reihe anderer Functionen darzustellen, und zwar durch vier neue Functionen von x, y, z, t, die mit U, V, W, ψ bezeichnet sein mögen. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

Da hier vier neue Functionen statt der drei zu bestimmenden eingeführt sind, so kann noch eine Bedingungsgleichung zwischen den neuen Functionen aufgestellt werden, und zwar wollen wir festsetzen, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{51}$$

sein soll.

Zunächst ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich gegebene Functionen der Coordinaten, wie es $\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$ sind, durch vier andere Functionen derselben Art, wie es U, V, W, ψ sind, unter Einhaltung der Gleichungen (50) und (51) darstellen lassen.

Nehmen wir zunächst an, die vier genannten Functionen U, V, W, ψ ließen sich so bestimmen, daß die Gleichungen (50) erfüllt seien, aber statt (51) ergäbe sich eine abweichende Gleichung, nämlich:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \chi$$

so würden wir an Stelle der drei Functionen U, V, W drei andere setzen können, die wir der Reihe nach bezeichnen wollen mit

$$U' = U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$W' = W - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichungen (50) auch durch Einsetzen von U', V', W' statt U, V, W erfüllt bleiben, da

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\end{aligned}$$

und ähnlich bei den übrigen.

Die Gleichung (51) aber nimmt die Form an

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = \chi - \Delta \varphi \tag{51 a}$$

Wenn sich also die Function φ so bestimmen läßt, daß im ganzen Raume

$$\Delta \varphi = \chi \tag{51 b}$$

wird, so würden U', V', W' Functionen sein, die statt U, V, W gesetzt, nicht bloss die Gleichungen (50), sondern auch (51) erfüllen. Wie Gleichung (51 b) zu lösen ist, werden wir weiter unten erörtern.

Damit ist der erforderliche Nachweis geführt, daß, wenn wir irgend welche Functionen U, V, W, ψ finden können, die den Gleichungen (50) genügen, auch solche Functionen sich finden lassen, die gleichzeitig auch (51) erfüllen. Um nunmehr auch die Gleichungen (50) zu erfüllen, differentiiren wir die erste dieser Gleichungen nach

x, die zweite nach y, die dritte nach z und addiren, so verschwindet die Summe der beiden ersten Glieder rechts, und wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot \Delta \psi \tag{52}$$

welches eine Gleichung derselben Form wie (51b) ist, und woraus man durch dieselbe unten zu besprechende Methode ψ finden kann, wenn $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ε bekannt sind. Wir setzen nunmehr die Werthe für $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}$ aus (50) in unsere Gleichungen (49) ein, so ergiebt sich zunächst für die erste derselben:

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}$$
$$= -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$$
$$= -\Delta U + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Nun war: $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ und daher wird:

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = -\Delta U$$

Die zweite Gleichung giebt ganz analog

$$A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\Delta V \tag{53}$$

und die dritte Gleichung

$$A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\Delta W$$

Wir sind also auf Differentialgleichungen von der Form gekommen, dafs eine als bekannt vorausgesetzte gegebene Function gleich gesetzt wird der Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten von einer der eingeführten Hilfsfunctionen U, V, W. Wenn in Gleichung (52) der Werth von ε constant ist, so erhält diese die Form:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi}\cdot \Delta \psi. \tag{52a}$$

Die auf der linken Seite in der Klammer stehende Gröfse ist nun eine Function, die wir schon kennen gelernt und mit σ bezeichnet haben. Sobald also der Werth von ε in dem Raume oder einem Theile des Raumes constant ist, kommen wir auch hier auf dieselbe Form der Gleichung, nämlich auf

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi} . \varDelta\psi \tag{52b}$$

so dafs also dann die volle Lösung unserer Gleichungen (49) für Räume mit constantem Werth des ε gefunden werden kann, wenn wir Gleichungen der Form

$$\varDelta\varphi = -4\pi . F_{(x,\,y,\,z)} \tag{54}$$

zu lösen vermögen, wo φ die zu findende Function, und $F_{(x,\,y,\,z)}$ eine gegebene Function der Coordinaten ist. Es mag hier gleich bemerkt sein, dafs die wegen der Constanz des ε zu machende Einschränkung bei den in diesem Bande zu behandelnden optischen Aufgaben kein Hindernifs abgiebt.

Die Gleichung (54) ist eine sehr viel behandelte Differentialgleichung, da sie die Grundgleichung der sogenannten Potentialfunctionen bildet. Sie kommt in der Theorie der Gravitation, des Magnetismus und der Elektrostatik unzählige Male vor, und auf ihrer Lösung beruht die Lösung des gröfsten Theiles der mathematisch-physikalischen Probleme.

In der That lassen sich für solche Differentialgleichungen dann immer vollständige Lösungen finden, wenn sie sich auf Functionen beziehen, deren Werth in der Ausdehnung des ganzen unendlichen Raumes gefunden werden soll, und von denen man weifs, dafs sie in der Unendlichkeit verschwindend klein werden, und zwar hierbei in der Art abnehmen, wie der Werth einer durch die Entfernung vom Mittelpunkte des Coordinatensystems dividirten Constante.

Falls aber für das Innere begrenzter Räume die Lösungen zu suchen sind, z. B. wenn wir die Vertheilung des Magnetismus oder der Elektricität innerhalb oder aufserhalb von leitenden Körpern finden wollen, so treten leider oft Schwierigkeiten in der Anpassung der allgemeinen Form der Lösung an die besonderen Grenzbedingungen des behandelten Falles ein. Es ist aber festzuhalten, dafs nur die Grenzbedingungen es sind, welche Schwierigkeiten machen, und dafs die allgemeinen Lösungen, welche für den unbegrenzten Raum gelten, meist einfach zu finden sind.

Indem wir also die Lösung der MAXWELL'schen Gleichungen auf diese Grundgleichung der Potentialfunction zurückgeführt haben, ist in Bezug auf die wirkliche Lösung der Gleichungen schon ein grofser Fortschritt gemacht. Ehe wir aber die Lösung selbst weiter ausführen, müssen wir wenigstens einige Sätze aus der Lehre von den Potentialfunctionen kennen lernen.

Zweiter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Lehre von den Potentialfunctionen.

---

§ 17. Die Gleichung $\Delta\varphi = 0$.

Die einfachste Form der Gleichung (54)

$$\Delta\varphi = -4\pi \,.\, F_{(x,y,z)}$$

erhalten wir durch die Annahme

$$F_{(x,y,z)} = 0$$

so dafs dann also

$$\Delta\varphi = 0 \tag{55}$$

Für diese vielfach vorkommende Gleichung giebt es eine Reihe von sehr einfachen Lösungen. Wenn wir nämlich φ gleich einer constanten Masse m dividirt durch die von einem festen Punkte gerechnete Entfernung r, also

$$\varphi = \frac{m}{r} \tag{56}$$

setzen, so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

Sind nun ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes, von dem aus r gerechnet wird, so ist

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

also

$$r \,.\, \frac{\partial r}{\partial x} = x - \xi$$

Dann ergiebt sich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{x-\xi}{r} \tag{56a}$$

$$= -\frac{m}{r^3}(x-\xi)$$

und ferner

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot (x - \xi)$$

$$= -\frac{m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5} \cdot (x - \xi)^2 \tag{56b}$$

In analoger Weise können wir die Werthe von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ bilden. Indem wir nun diese drei Differentialquotienten addiren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varDelta\varphi &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5} \cdot [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2] \\ &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5} \cdot r^2 \\ &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^3} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{56c}$$

Hierbei ist aber zu beachten, daſs in dem Punkte, von dem aus r gerechnet wird, in welchem sich also die Masse m befindet, die Erfüllung der Gleichung zweifelhaft ist, indem dort

$$\varDelta\varphi = \infty - \infty$$

ist. In allen anderen Punkten des Raumes ist aber der angegebene Werth von φ eine völlig einwurfsfreie Lösung für diese Gleichung.

Wenn wir also nur für einen Theil des Raumes diese Gleichung zu lösen haben, so werden wir nach dem Principe der Superposition, da die zu Grunde liegende Differentialgleichung homogen und linear ist, auch das φ als eine Summe von verschiedenen ähnlich gebildeten Ausdrücken ansetzen können:

$$\varphi = \sum \frac{m_a}{r_a} \tag{57}$$

Nur müssen dann die Massen m_a alle auſserhalb desjenigen Raumes liegen, für welchen wir die Gleichung (55) erfüllen wollen. Für einen beschränkten Raum ist demnach die Möglichkeit gegeben, eine unendliche Anzahl von Lösungen zu finden, welche alle der Differentialgleichung $\varDelta\varphi = 0$ genügen.

Es ist noch zu bemerken, daſs wir unter m_a ebenso gut elektrische oder magnetische Quanta als ponderable Massen verstehen können.

§ 18. Die Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,y,z)}$.

Man bezeichnet im Allgemeinen die Function φ, welche der Gleichung (54)

$$\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,y,z)}$$

genügt, als die Potentialfunction der gegebenen Dichtigkeit $F_{(x,y,z)}$. Es zeigt sich nämlich, daſs die Potentialfunctionen von gravitirenden Massen oder ruhenden elektrischen Quantis, beziehlich ruhenden magnetischen Quantis, auch dieser Differentialgleichung genügen, und daſs hierbei der Werth von $F_{(x,y,z)}$ bald die Dichtigkeit der ponderablen Massen, bald die Dichtigkeit der ruhenden Elektricität, bald die Dichtigkeit des ruhenden Magnetismus, welche in dem bestimmten Raume vorhanden ist, oder welche man sich in ihm als vorhanden denkt, darstellt. In unserer Gleichung (52) ist also demnach ψ eine Potentialfunction von der Dichtigkeit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

und durch die Gleichungen (53) sind die Functionen U, V, W ebenfalls charakterisirt als Potentialfunctionen von bestimmten Dichtigkeiten, und zwar sind diese Dichtigkeiten die mit $\frac{A}{4\pi}$ multiplicirten Differentialquotienten nach der Zeit von den magnetischen Momenten, d. h. sie entsprechen den Componenten bestimmter magnetischer Aenderungen oder, wie wir auch sagen können, magnetischer Ströme, die in der Substanz vorkommen, wenn die Intensität des Magnetismus sich in ihr ändert. Man pflegt diese Potentialfunctionen, U, V, W, neuerdings — namentlich geschieht dieses von den englischen Physikern — als Vector-Potentiale zu bezeichnen, weil sie Potentialfunctionen von gerichteten Gröſsen sind, und als solche sich selbst auf eine bestimmte Richtung beziehen. $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und auch die Resultante derselben bezeichnet man in der Sprache der Quaternionen als Vectoren. Hier sind also von den Aenderungen der Componenten eines solchen Vectors die Potentialfunctionen gebildet worden.

Es kommen also hier vor: Potentialfunctionen von elektrischen Dichtigkeiten und Potentialfunctionen von den Componenten magnetischer Ströme.

Bei den übrigen bisher nicht weiter berücksichtigten Maxwell'schen Gleichungen, wo die Rollen der magnetischen und elektrischen

Momente sich vertauschen, bestehen ganz analoge Verhältnisse; man hat dann Potentialfunctionen von magnetischen Dichtigkeiten und Potentialfunctionen von den Componenten elektrischer Ströme.

§ 19. Die Potentialfunction einer mit Masse belegten Kugelschale.

Bei der Potentialfunction einer mit constanter Dichtigkeit gefüllten Kugel hat $\Delta\varphi$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth.

Um eine solche Potentialfunction zu bilden, wollen wir ausgehen von der Potentialfunction einer mit constanter Dichtigkeit belegten Kugelfläche vom Radius R, von der wir voraussetzen, dafs auf ihr in jeder Flächeneinheit das gleiche Quantum anziehender oder abstofsender Substanz e ausgebreitet ist. Die Potentialfunction auf einen

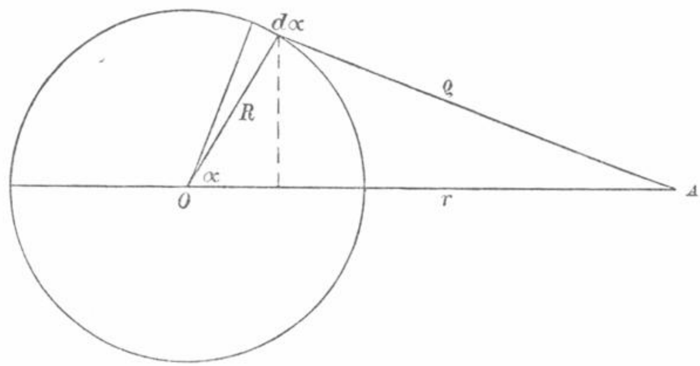

Fig. 14.

äufseren Punkt ergiebt sich, indem wir für alle Flächenelemente $d\omega$ der Kugelschale den Werth $\frac{e.d\omega}{\varrho}$ bilden, d. h. die Masse auf dem Flächenelement $d\omega$ der Kugelschale, durch ihre Entfernung ϱ von dem Punkte (x, y, z), für den wir die Potentialfunction finden wollen, dividiren und die so erhaltenen Werthe dann summiren. In dem vorliegenden Falle ist diese Summe ein Integral. Um dasselbe zu bilden, ziehen wir die Centrallinie von dem Mittelpunkte O der Kugel (Fig. 14) zu dem Punkt (x, y, z), den wir mit A bezeichnen wollen, und der je nach Umständen aufserhalb oder innerhalb der Kugelschale liegen kann.

Um ein Flächenelement der Kugelschale abzugrenzen, denken wir uns auf der Kugel ein System von Parallelkreisen construirt, dessen Axe mit der Centrallinie OA zusammenfällt. Sämmtliche Punkte eines jeden solchen Kreises haben dann die gleiche Poldistanz α von AO und den gleichen Werth von ϱ. Der Radius der

Kugel sei R, und mit r werde die Entfernung OA zwischen dem Mittelpunkte der Kugel und dem Punkte x, y, z bezeichnet.

Bei der Integration können wir gleich alle Flächenelemente zusammenfassen, die demselben zonenförmigen Ring der Kugeloberfläche angehören, der zwischen zwei der erwähnten Parallelkreise mit den Polabständen α und $\alpha + d\alpha$ liegen, da diese alle gleiche Werthe des Nenners ϱ haben. Die Länge, d. h. der Umfang dieses ringförmigen Abschnittes ist dann gleich $2\pi R . \sin\alpha$ und seine Breite gleich $R . d\alpha$, demnach seine Oberfläche gleich $2\pi R^2 . \sin\alpha . d\alpha$. Da die auf der Flächeneinheit liegende Masse mit e bezeichnet ist, so haben wir also für die Masse dieses Flächenelementes $2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha$. Nun ist die für alle Theile dieser Zone gleiche Entfernung ϱ vom Punkte A

$$\varrho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr . \cos\alpha}$$

und wir erhalten also für das Potential dieser Zone im Punkte A den Werth

$$\frac{2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha}{\varrho} = \frac{2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr . \cos\alpha}}$$

Dieses ist nun über die ganze Kugel zu integriren, wobei also α die Integrationsvariable ist. Indem α von 0 bis π wächst, kommen nach einander alle Ringe, welche durch die verschiedenen Parallelkreise auf der Kugel abgeschnitten werden, in das Integral hinein, und wir erhalten als Potential der gesammten Kugelschale im Punkte A

$$\varphi = \int_0^\pi \frac{2\pi e R^2 \sin\alpha . d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}} \tag{58}$$

Um dieses Integral auszuführen, können wir dasselbe umformen in:

$$\varphi = \int^\pi \frac{\pi e R}{r} . \frac{d(-2R . r \cos\alpha)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}} \tag{58a}$$

Da nun

$$\frac{dx}{\sqrt{a + x}} = d\left(2\sqrt{a + x}\right)$$

ist, so erhalten wir hier als Werth des unbestimmten Integrales

$$2\frac{\pi . e R}{r} . \sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}$$

Um den Werth des bestimmten Integrales zu erhalten, haben wir für diesen Ausdruck die Differenz zwischen den Grenzen zu nehmen.

Wir wollen dieses hier und fernerhin stets dadurch bezeichnen, daſs wir den Ausdruck zwischen zwei horizontalen Strichen einschlieſsen, so daſs also

$$\varphi = \overline{\underline{\frac{2\pi e R}{r} \cdot \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R \,.\, r \,.\cos\alpha}}} \tag{58b}$$

Für $\alpha = \pi$ ist nun

$$\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,.\,r\,.\cos\alpha} = \sqrt{R^2 + r^2 + 2\,R\,.\,r}$$
$$= \pm (R + r)$$

und für $\alpha = 0$

$$\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,.\,r\,.\cos\alpha} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,.\,r}$$
$$= \pm (R - r).$$

Welche von diesen Vorzeichen wir aber zu nehmen haben, bestimmt sich durch den Umstand, daſs ϱ die Entfernung zweier reeller Punkte im Raume bedeutet, d. h. also immer einen positiven Werth haben muſs. Für $(R + r)$ ist also jedenfalls das positive Zeichen zu nehmen, und für $\pm (R - r)$ immer das Zeichen, welches den Werth positiv macht, d. h. $(r - R)$, wenn A auſserhalb der Kugel liegt, dagegen $(R - r)$, wenn A in ihr liegt.

1. Der Punkt A befindet sich auſserhalb der Kugel.

Die entsprechende Potentialfunction nennen wir φ_a. An der oberen Grenze, d. h. für $\alpha = \pi$ liegt dann das betreffende Oberflächenelement an dem dem Punkte A abgewandten Pole; seine Entfernung ϱ von A ist daher

$$\varrho = R + r$$

An der unteren Grenze, d. h. für $\alpha = 0$ liegt aber das Flächenelement an dem zugewandten Pole, und es ist daher hier die Entfernung

$$\varrho = r - R$$

Setzen wir diese Grenzen ein, so ergiebt sich:

$$\varphi_a = \frac{2\,\pi\,e\,R}{r}\,[r + R - (r - R)]$$
$$= \frac{4\,\pi\,R^2\,.\,e}{r} \tag{59}$$

Nun ist aber $4\,\pi\,R^2$ gleich der Oberfläche der Kugel, und diese multiplicirt mit der Dichtigkeit der Flächenbelegung giebt das gesammte Massenquantum $4\pi R^2 . e$, welches auf ihr vorhanden ist. Die Potentialfunction einer solchen mit gleichmäſsiger Dichtigkeit belegten Kugelschale ist also ebenso groſs, als wenn die ganze Masse, welche auf der Oberfläche vertheilt ist, im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre.

2. Liegt der Punkt A im Innern der Kugel,

so haben wir andere Werthe für die Grenzen des Integrals. Für $\alpha = \pi$ wird auch hier (Fig. 15)

$$\varrho = r + R$$

jedoch haben wir für $\alpha = 0$ nunmehr

$$\varrho = R - r$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergiebt sich für die hier mit φ_i bezeichnete Potentialfunction

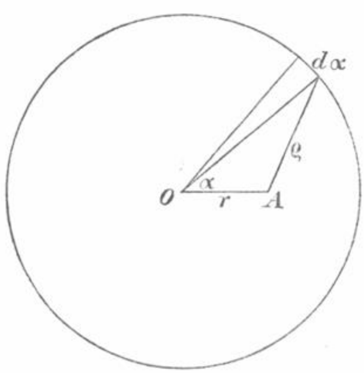

Fig. 15.

$$\varphi_i = \frac{2\pi e R}{r} [r + R - (R - r)]$$

$$= 4\pi e R \tag{60}$$

Die Potentialfunction φ_i ist also im ganzen Inneren der Kugel constant.

An der Oberfläche, wo $r = R$ wird, bekommen wir für die äuſsere Potentialfunction φ_a genau denselben Werth, der für alle inneren Punkte gilt, nämlich

$$(\varphi_a)_{r=R} = 4\pi e R, \tag{61}$$

so daſs also die Werthe beider Potentialfunctionen in der Kugelfläche continuirlich in einander übergehen.

Das vorliegende Problem ist insoweit sehr lehrreich, als daraus hervorgeht, daſs eine solche einfache Flächenschicht, wie sie hier auf der Kugeloberfläche liegt, erstens ein endliches Potential hat, trotzdem der Nenner ϱ für einzelne Punkte der Oberfläche gleich Null wird und zweitens, daſs die Potentialfunction selbst an einer solchen mit einer einfachen Schicht von endlicher Dichtigkeit belegten Fläche keinen Sprung macht, sondern continuirlich durch sie hindurch geht.

Anders ist es mit den Differentialquotienten nach einer Normale der Oberfläche, also nach r. Diese sind:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = 0 \tag{62}$$

und

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} = -\frac{4\pi R^2 e}{r^2} \tag{63}$$

An der Fläche selbst, wo $r = R$ ist, hat der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}$ den Werth

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = -4\pi e \tag{64}$$

Der Differentialquotient nach der äufseren Normale ist also auf der äufseren Seite der Kugel abhängig von der Dichtigkeit der Masse auf der Kugel; auf der inneren Seite ist er aber gleich Null, und es ist demnach ein Sprung im Betrage von $-4\pi e$ in dem Werth des Differentialquotienten der Potentialfunction an der Kugeloberfläche vorhanden. Da die Differentialquotienten die Kräfte darstellen, so haben also auch diese keinen continuirlichen Verlauf.

Es mag hier noch bemerkt sein, dafs die wesentlichen Ergebnisse dieser für eine gleichmäfsig belegte Kugel angestellten Betrachtungen, dafs nämlich die Potentialfunction an einer Flächenschicht auf beiden Seiten gleichen Werth hat, und, wenn die Dichtigkeit der Schicht endlich ist, auch endlich ist, und dafs der Differentialquotient nach der Normale einen endlichen Sprung an der Flächenschicht macht, nicht blofs für eine solche Kugel gelten, sondern ganz allgemein für Flächen mit continuirlicher Krümmung, welche mit einer einfachen Flächenschicht belegt sind.

§ 20. Die Potentialfunction einer Vollkugel mit constanter Massendichtigkeit.

Die gefundenen Werthe von φ_i und φ_a können wir auch benutzen, um bei einer Vertheilung von endlicher Dichtigkeit durch die ganze Kugel die Potentialfunction für einen äufseren und inneren Punkt zu bestimmen.

Wir gehen hierbei von dem einfachsten Falle aus, indem wir annehmen, dafs die ganze Kugel mit gleichmäfsiger Dichtigkeit erfüllt ist.

Für einen äufseren Punkt wird die Berechnung sehr einfach, wenn wir uns die Kugel in eine Reihe von concentrischen Schalen zerlegt denken. Es hat dann jede dieser Schalen gleiche Dichtigkeit und wird daher nach aufsen hin eine Potentialfunction hervorbringen, welche ebenso grofs ist, als wenn die ganze Masse dieser Schale in dem Mittelpunkt vereinigt wäre. Das wird sogar der Fall sein, wenn die verschiedenen concentrischen Kugelschalen nicht alle dieselbe Dichtigkeit haben.

Im Falle der von uns angenommenen gleichmäfsigen Dichtigkeit erhalten wir für das Potential φ_a somit

$$\varphi_a = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{R^3\,\varepsilon}{r} \tag{65}$$

worin ε die constante Dichtigkeit im Innern der Kugel bezeichnet. Denn der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$, ihre Gesammtmasse erhalten wir durch Multiplication mit ε und, um die Potentialfunction für den Punkt A zu bilden, ist dann noch durch seine Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel zu dividiren.

An der Oberfläche der Kugel, wo also $r = R$ ist, erhalten wir

$$(\varphi_a)_{r=R} = \frac{4}{3}\pi R^2\,\varepsilon \tag{65a}$$

Aus dieser Form der Potentialfunction (Gleichung 65), welche mit der im § 17 behandelten Form

$$\varphi = \frac{m}{r}$$

übereinstimmt, geht schon hervor, dafs $\Delta\,\varphi_a$ aufserhalb der Kugel überall gleich Null ist.

Für einen Punkt im Innern der Kugel wird die Sache dadurch verwickelter, dafs er für einen Theil der Kugelschichten ein äufserer Punkt ist, nämlich für alle diejenigen, welche einen kleineren Radius haben als r, während er für diejenigen Kugelschalen, deren Radius gröfser als r, ein innerer Punkt ist. Die Potentialfunction φ_i zerfällt demnach hier in zwei Theile. Bezeichnen wir die constante Dichte der Kugel wieder mit ε, so würde der erste Theil der Potentialfunction herrühren von einer Kugel vom Radius r, und daher den Werth

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3 \cdot \varepsilon}{r} = \frac{4\pi\varepsilon}{3} \cdot r^2$$

haben. Der zweite Theil bezieht sich auf die Kugelschalen, welche von dem betreffenden Punkte nach aufsen liegen. Das Potential dieser verschiedenen Kugelschalen hängt nun nur von ihrem Radius $\mathfrak{r}$ ab; dieser aber ist für die hinter einander liegenden Kugelschalen verschieden, und wir haben daher das Integral dieser Werthe $4\pi\mathfrak{r}\varepsilon$

von r bis R, also $4\pi\varepsilon\int\limits_r^R \mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}$, zu nehmen. Das Gesammtpotential ist demnach:

$$\varphi_i = \frac{4\pi\varepsilon}{3} r^2 + 4\pi\varepsilon \int\limits_r^R \mathfrak{r}\,.\,d\mathfrak{r}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon}{3} r^2 + 2\pi\varepsilon\,[R^2 - r^2]$$

$$= 2\pi\varepsilon R^2 - \frac{2\pi\varepsilon}{3} r^2 \tag{66}$$

An der Oberfläche der Kugel ist hierin r gleich R zu setzen, und es ergiebt sich also

$$(\varphi_i)_{r=R} = 2\pi\varepsilon R^2 - \frac{2}{3}\pi\varepsilon R^2$$

$$= \frac{4}{3}\pi\varepsilon R^2 \tag{67}$$

Das ist aber derselbe Werth, wie derjenige des äufseren Potentials an gleicher Stelle (Gleichung 65a). Beide gehen also continuirlich in einander über.

An der Oberfläche der Kugel ist ferner der Differentialquotient des äufseren Potentials:

$$\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{4\pi}{3}\varepsilon\,.\,R \tag{68}$$

und derjenige des inneren Potentials:

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{4\pi}{3}\varepsilon\,.\,R \tag{69}$$

so dafs also hier, trotzdem die Dichte an der Kugeloberfläche einen Sprung macht, doch der erste in Richtung des Radius genommene Differentialquotient continuirlich ist.

Wir haben oben (§ 17) gesehen, dafs bei einer Potentialfunction von der Form $\frac{m}{r}$ die Summe der zweiten Differentialquotienten gleich Null ist. Daher ist hier bei der Vollkugel

$$\Delta\varphi_a = 0 \tag{70}$$

Wenn wir $\Delta \varphi_i$ berechnen wollen, so formen wir am besten den erhaltenen Werth von φ_i (Gleichung 66) um in:

$$\varphi_i = 2\pi \varepsilon R^2 - \frac{2\pi\varepsilon}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

indem wir den Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel legen. Es ist dann der Theil von $\Delta \varphi_i$, welcher von dem ersten Gliede herrührt, gleich Null, während der zweite Theil, da

$$\Delta(x^2 + y^2 + z^2) = 6$$

ist, den Werth $-4\pi\varepsilon$ erhält. Es ist also

$$\Delta \varphi_i = -4\pi\varepsilon \tag{71}$$

Die Summe der drei zweiten Differentialquotienten macht also an der Kugeloberfläche einen Sprung. Ist demnach die Dichte der Vollkugel constant, so ist bei der Bildung von $\Delta \varphi_i$ der Werth von r ohne Einfluſs. Wir brauchen daher für den Mittelpunkt der Kugel, wo also $r = 0$, keine besondere Discussion anzustellen, und es bleibt auch für diesen Punkt der im ganzen Innern der Kugel gültige Werth $\Delta \varphi_i = -4\pi\varepsilon$ bestehen.

§ 21. Der Werth von $\Delta \varphi$ im Mittelpunkte einer Vollkugel, deren Dichtigkeit gleich ist dem Product einer Winkelfunction und einer Function des Radius.

In § 17 zeigte sich (Gleichung 56c), daſs ganz allgemein für jeden von Null verschiedenen Werth

$$\Delta \varphi = -\frac{3m}{r^3} + \frac{3m}{r^3}$$

wo r die Entfernung bezeichnet zwischen dem Punkte, auf den sich φ bezieht, und demjenigen, in dem sich die Masse m befindet. Nehmen wir nun an, daſs bei einer Vollkugel in jeder der um den Mittelpunkt concentrischen Kugelschalen die Dichte constant und zwar gleich einer Funktion des Radius dieser Schale, also gleich $f_{(r)}$ sei, so wird nach Einführung von Polarcoordinaten für eine solche Schale von der Dicke dr im Mittelpunkte der Kugel

$$\begin{aligned} \frac{dm}{r^3} &= dr \int \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \cdot f_{(r)} \cdot d\omega \\ &= 4\pi \frac{f_{(r)} \cdot dr}{r} \end{aligned} \tag{72}$$

Setzen wir hierin $f_{(r)}$ gleich einer Constanten, also

$$f_{(r)} = \varepsilon$$

so erhalten wir

$$\frac{dm}{r^3} = 4\pi\varepsilon\frac{dr}{r}$$

$$= 4\pi\varepsilon . d(\lg \text{nat} . r) \tag{73}$$

Wenn nun das $\Delta\varphi$ für eine Kugelschale von endlicher Dicke gebildet werden soll, so ist dieser Ausdruck (Gleichung 73) über r zu integriren. Das Integral wird dann, wenn der innere Radius sich Null nähert, unendlich, so daſs man also auf diesem Wege für $\Delta\varphi$ als Differenz zweier unendlichen Gröſsen keinen bestimmten Werth erhält. Wir haben jedoch soeben in § 20 für diesen Fall bereits in anderer Ableitung einen bestimmten Werth gefunden, nämlich

$$\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon.$$

Wenn dagegen

$$f_{(r)} = c . r^\alpha$$

ist, wo c und α zwei von Null verschiedene Constanten bezeichnen, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \int\frac{dm}{r^3} &= 4\pi c\int\frac{dr}{r^{1-\alpha}} \\ &= 4\pi c . \frac{1}{\alpha} . (R^\alpha - r^\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Ist α negativ, so würden wir für $r = 0$ für $\Delta\varphi$ wieder einen unbestimmten Werth

$$\Delta\varphi = \infty - \infty$$

haben, während für jeden positiven Werth von α im Punkte $r = 0$

$$\Delta\varphi = 0 - 0$$

wird. Es ist also im Mittelpunkt der Kugel $\Delta\varphi$ gleich Null für eine Dichtigkeitsvertheilung, bei der die Dichte der verschiedenen concentrischen Kugelschalen auszudrücken ist durch eine Function des Radius von der Form

$$f_{(r)} = c . r^\alpha$$

wenn

$$\alpha > 0$$

ist.

Dieselbe Betrachtung bleibt gültig, wenn nach den verschiedenen vom Mittelpunkt ausgehenden Richtungen das Gesetz der Dichtigkeitszunahme verschieden ist, vorausgesetzt nur, daſs für jeden einzelnen Radius für kleinste Werthe von r

$$f_{(r)} < c . r^\alpha$$

ist, und $\alpha > 0$. Dabei würden also α und c beliebige Functionen der Winkel sein können, durch welche man die Richtung von r

definirt, und doch der Werth von $\Delta\varphi$ im Mittelpunkt der Kugel eindeutig gleich Null werden.

Unter diesen Bedingungen ist die Dichtigkeit im Mittelpunkte der Kugel aber stets gleich Null, und die Beiträge in dem Werthe von $\Delta\varphi$, welche aus der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes herrühren, verschwinden vollständig.

Daraus folgt nun, daſs, wenn an einer bestimmten Stelle des Raumes die Dichtigkeit den endlichen Werth a hat, und in den benachbarten Theilen diese Dichtigkeit um einen Betrag wächst, der angezeigt werden kann durch das Product irgend einer Potenz des Radius mit positivem Exponenten α und einer Winkelfunction Γ, welche natürlich auch gleich einer Constanten sein darf, also wenn

$$f_{(r)} = a + r^{\alpha}\,.\,\Gamma$$

ist, wir doch den Werth von $\Delta\varphi$ an jener Stelle finden können. Wir haben dann gewissermaſsen zwei superponirte Massenbelegungen des Raumes, eine mit der constanten Dichte a, und die zweite mit der variablen Dichte $r^{\alpha}.\Gamma$. Den Theil von $\Delta\varphi$, welcher von der ersten herrührt, haben wir im vorigen Paragraphen zu $-4\pi a$ bestimmt, und der zweite, von der veränderlichen Massenerfüllung herrührende, verschwindet, so daſs wir also in diesem Falle erhalten

$$\Delta\varphi = -4\pi a \tag{75}$$

In der Lehre von den Potentialfunctionen wird das hier berührte Problem allgemeiner und ausführlicher erörtert, und es werden dort die Convergenzbedingungen für die Potentialfunctionen und für $\Delta\varphi$ aufgesucht werden.

§ 22. Anwendung auf die Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\,.\,F_{(x,y,z)}$.

Um eine von den Differentialgleichungen zu lösen, die wir in § 16 abgeleitet hatten, und welche aussagten, daſs die Summe der zweiten Differentialquotienten der gesuchten Functionen nach den Coordinaten gleich irgend einer stets endlichen Function der Coordinaten ist, also Gleichungen von der Form

$$\Delta\varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$$

sind, genügt es, von der Function $F_{(x,y,z)}$ eine Potentialfunction über den ganzen Raum, für welchen die Function F gegeben ist, zu bilden, und wir können sogar, wenn der Raum begrenzt ist, auſserhalb dieses Raumes noch beliebige Vertheilungen der Dichtigkeit hinzunehmen.

Berechnen wir die Potentialfunction von diesen Dichtigkeiten, so mufs sie jener Differentialgleichung Genüge leisten.

Es ist noch zu beachten, dafs wir bei der Berechnung der Potentialfunctionen die Integrale, wenn sie für den unendlichen Raum gelten sollen, auch bis in unendliche Entfernung ausdehnen und also sicher sein müssen, dafs die Potentialfunctionen auch dann noch endliche Werthe behalten.

Wir führen wieder Polarcoordinaten ein und bezeichnen die Dichte jeder Kugelschale ebenso wie im vorigen Paragraphen mit $f_{(r)}$, dann ist die Masse einer Kugelschale von der Dicke dr gleich

$$4\pi \,.\, r^2 \,.\, f_{(r)} \,.\, dr$$

und die Potentialfunction im Mittelpunkt würde demnach sein

$$\varphi = 4\pi \int r \,.\, f_{(r)} \,.\, dr \tag{76}$$

Wenn wir nun also wiederum

$$f_{(r)} = c \,.\, r^n$$

setzen, wo n eine beliebige Constante und c eine beliebige Winkelfunction bezeichnet, die wir hier der Einfachheit halber, da sie für das Folgende ohne Bedeutung ist, wie eine Constante behandeln wollen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 4\pi c \int r^{1+n} \,.\, dr \\ &= \frac{4\pi c}{2+n} \,.\, \overline{\underline{r^{2+n}}} \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Damit dieser Werth für $r = \infty$ noch endlich bleibt, mufs $2 + n < 0$, also n negativ und seinem absoluten Betrage nach gröfser als 2 sein.

In unseren späteren Anwendungen haben wir es fast immer mit Wellen zu thun, die von einem bestimmten Punkte während endlicher Zeit ausgegangen sind. Sie brauchen unendliche Zeit, um die Unendlichkeit zu erreichen, und bis dahin ist in der Unendlichkeit noch Alles in Ruhe. Die Potentialfunction ist dabei von Werthen $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ u. s. w. zu nehmen, die nur innerhalb des bisher von den Wellen durchlaufenen Raumes endlich von Null verschieden sind; dann bleibt sicher die Potentialfunction endlich.

Wenn diese aus Gleichung (77) folgenden Bedingungen für die Dichtigkeiten eingehalten sind, so können wir für den unendlichen Raum unsere Differentialgleichung immer lösen. Das Berechnen der Potentialfunction ist eine Operation, die nur die Aufsuchung bestimmter Integrale erfordert, und die wir also immer ausführen können; wenn nicht durch analytische Formeln, so doch stets durch Quadraturen.

Damit ist nun die Möglichkeit gegeben, die Aufgabe, auf die wir gestofsen sind, wenigstens zunächst für den unbegrenzten Raum zu lösen und die gesuchten Potentialfunctionen zu finden, sobald diejenigen Functionen gegeben sind, welche wir als Dichtigkeiten zu berücksichtigen haben. Dieses waren aber einerseits die magnetischen Strömungen und andererseits die Function $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$. Wenn die Dichtigkeit, für welche die Potentialfunction gesucht wird, im Innern eines geschlossenen Raumes gegeben ist, so können wir noch beliebige Vertheilungen in dem äufseren Raume hinzu setzen, ohne dafs die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten in dem inneren Raum verändert wird; denn der von diesem herrührende Theil ist hier ja gleich Null. Ein solcher Zusatz wird nun bei einer grofsen Menge von Problemen dadurch nöthig, dafs an der Grenze des Raumes bestimmte Bedingungen für die Werthe der Potentialfunction und ihrer Differentialquotienten, die sogenannten Grenzbedingungen, zu erfüllen sind. Im Allgemeinen ist es viel schwieriger, diese Vertheilung im äufseren Raume auszuführen, als eine Reihe von Werthen für das Innere des Raumes zu finden, und die eigentliche Schwierigkeit der meisten Potentialaufgaben, auch der optischen Aufgaben, besteht darin, dafs die Erfüllung der Grenzbedingungen in vielen Fällen unmöglich ist. In einigen Fällen gelingt sie durch unendliche Reihen, deren Coefficienten sich durch besondere Methoden genau bestimmen lassen; oft genug ist man aber, um auch nur annähernd zum Ziele zu kommen, auf mehr oder weniger weitläufiges Probiren angewiesen.

Bei den Wellenbewegungen werden wir später ebenfalls auf eine allgemeine Differentialgleichung stofsen, die von sehr ähnlicher Form ist, wie die hier behandelte. Es kommt zwar noch die Zeit als weitere Variable hinein, aber in ähnlicher Form wie die Coordinaten.

Bevor wir jedoch an die Untersuchung dieser Gleichung herangehen, ist es nöthig, einen Hilfssatz, den sogenannten GREEN'schen Satz, zu erörtern, welcher in der Lehre von den Potentialfunctionen und auch von den Functionen, welche bei der Lichtbewegung vorkommen, vielfache Anwendung findet und eine grofse Menge sehr wichtiger Transformationen erleichtert.

§ 23. Der Green'sche Satz.

Dieser Satz wurde von G. Green, der in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts Professor in Cambridge war, zuerst aufgestellt und ist dann später hauptsächlich von Gauss zur Entwicklung der Lehre von den elektrischen Potentialfunctionen benutzt worden.

Der Green'sche Satz ist in Wirklichkeit nichts weiter, als die Anwendung der sogenannten partiellen Integration auf Gebilde von zwei oder drei Dimensionen, welche ringsum begrenzt sind, also auf begrenzte Flächen oder begrenzte Körpervolumina. Man mufs bei seiner Anwendung sorgfältig auf die verschiedenen Arten der Discontinuitäten achten, da diese hier von grofser Bedeutung sind. Deshalb wollen wir den Satz, obschon wir ihn bei den optischen Vorgängen nur in complicirterer Form benutzen werden, zunächst in einfacherer Form ableiten.

Wenn wir das Integral

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \cdot \psi) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

über einen geschlossenen Raum zu bilden haben, so können wir in demselben die Integration nach x ausführen. Dadurch erhalten wir das unbestimmte Integral

$$\iint \varphi \cdot \psi \cdot dy \cdot dz$$

und, um das bestimmte Integral zwischen den festgesetzten Grenzen zu erhalten, mufs man die Differenz der Grenzwerthe bilden, welche durch Einsetzen des höchsten und des niedrigsten Werthes von x gewonnen werden. Indem wir dieses wiederum (vergl. § 19) durch zwei horizontale Striche, oben und unten, bezeichnen, ergiebt sich:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \cdot \psi) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \underline{\overline{\iint \varphi \cdot \psi \cdot dy \cdot dz}} \tag{78}$$

Hierbei ändert sich in dem Integral nur der Werth von x, während y und z constant bleiben, weil nach ihnen nicht integrirt wird. Da $dy \cdot dz$ unverändert bleibt, so ist der Raum, über den hier integrirt wird, ein Prisma, dessen Axe der x-Axe parallel ist, während der Querschnitt desselben von der Fläche $dy \cdot dz$, also einem Rechteck oder Quadrat, dessen Seiten der y- und z-Axe parallel sind, gebildet wird.

Die Grenzwerthe, deren Differenz hier genommen werden mufs, sind die Producte der beiden Functionen φ und ψ an dem oberen und unteren Ende, multiplicirt mit dem gemeinsamen Querschnitte $dy . dz$ des prismatischen Raumes. Ist nun dieser Raum durch das Element $d\omega$ einer gekrümmten Fläche begrenzt, so ist $dy . dz$ gleich der Projection von $d\omega$ auf die yz-Ebene, und es ist eine bekannte Regel, dafs, wenn Stücke einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt werden, die Projection gleich ist dem projicirten Flächenstück multiplicirt mit dem Cosinus desjenigen Winkels, welchen beide Ebenen mit einander einschliefsen. Nun ist zwar das hier projicirte Flächenstück herausgenommen aus einer krummen Fläche; aber, da es unendlich klein, so können wir es als Stück einer Ebene betrachten. Der Winkel zwischen den beiden Flächen ist aber gleich dem Winkel, welchen ihre Lothe mit einander bilden. Das Loth auf der Projectionsebene ist parallel der x-Axe. Es ist hierbei vortheilhaft, dasjenige Loth der Fläche $d\omega$ zu nehmen, welches in den Raum hinein geht, über welchen wir die Integration ausführen, also die sogenannte innere Normale. Die äufsere Normale des Flächenstückes würde aus dem Raum heraus fallen, und da könnten möglicherweise die Werthe der Differentialquotienten ganz andere sein. Wir müssen also

$$d\omega . \cos a = dy . dz$$

setzen, worin a den Winkel bezeichnet, den die innere Normale des Flächenelementes $d\omega$ mit der steigenden x-Axe bildet.

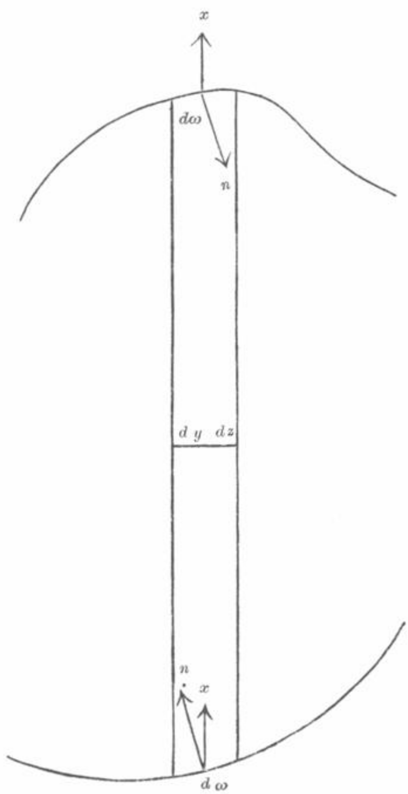

Fig. 16.

An dem oberen Ende des Prisma (vergl. die nebenstehende Figur 16) mufs dieser Winkel nothwendig ein stumpfer sein; denn wenn wir in der x-Axe aufsteigen, so mufs diese von innen her in das gegebene Endstück des Prisma eintreten, und es wird daher der Winkel zwischen der steigenden x-Axe und der inneren Normale gröfser als ein Rechter sein. Wollen wir also $dy . dz$ durch den Werth $\cos a . d\omega$ ersetzen, so wird $\cos a$ negativ zu nehmen sein, und wir bekommen demnach für das obere Flächenelement $-\varphi.\psi.\cos a.d\omega$. Für die untere Grenze ist der Winkel zwischen der steigenden x-Axe und der inneren Normale nothwendig ein spitzer, der Cosinus also positiv; aber den Theil des Integrals, der sich auf diese untere Fläche bezieht, müssen wir abziehen; daher bekommt er ebenfalls das negative Vorzeichen.

Für beide Grenzen stellt also $-\varphi.\psi.\cos a.d\omega$ denjenigen Werth dar, der als Grenzwerth der Integration zu nehmen ist. Zu diesem einen Prisma kommen noch andere ähnliche Prismen, welche daneben liegen und zusammen schliefslich den ganzen Raum einnehmen, über den wir zu integriren haben, und deren Enden die ganze begrenzende Fläche für diesen Raum bilden. Dieses ändert sich auch nicht, wenn die Prismen mehrfach die Fläche schneiden sollten. Wir müfsten dann jedes Element einer Schnittfläche als ein Stück der Grenzfläche behandeln und da, wo die steigende x-Axe in den Raum eintritt, hatten wir eine untere Grenze, und wo sie wieder heraustritt, würde eine obere Grenze sein, so dafs sich zwar die Ausdrücke mehrfach wiederholen, aber die Grenzwerthe, welche man durch Ausführung dieser Integration über den ganzen Raum bekommt, würden in dieselbe Form aufgenommen werden können. Wir erhalten also stets

$$\overline{\underline{\int\int \varphi.\psi.dy.dz}} = -\int \varphi.\psi.\cos a\, d\omega \tag{79}$$

Damit unser Integral $\int\int\int \frac{\partial}{\partial x}(\varphi.\psi).dx.dy.dz$ einen bestimmten Sinn hat, müssen die Differentialquotienten der beiden Functionen ψ und φ sich überall in dem Raum, über den die Integration ausgedehnt werden soll, bilden lassen, und einen bestimmten, und zwar eindeutig bestimmten endlichen Werth haben, beziehlich wenigstens nur in der Weise unendlich werden, dafs sie doch ein endliches Integral geben.

Indem wir die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführen, können wir nunmehr schreiben:

$$\int\int\int \varphi.\frac{\partial\psi}{\partial x}.dx.dy.dz + \int\int\int \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}.dx.dy.dz$$
$$= -\int \varphi.\psi.\cos a.d\omega \tag{80}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\iiint\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\,.\,dx.dy.dz = -\iiint\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\\ -\int\varphi\,.\,\psi\,.\cos a\,.\,d\omega\end{aligned}\right\}\quad(80\,\mathrm{a})$$

Dieses wäre die Umschreibung in die gewöhnliche Form der partiellen Integration. Bei ihr pflegen wir einen Factor zu haben, dessen Integration nicht direct ausführbar ist, einen zweiten, welcher als Differentialquotient geschrieben ist, und der also unmittelbar integrirt werden kann; wir bilden das Integral, das sich auf die Grenzen bezieht, und haben davon abzuziehen dasjenige Integral über denselben Raum genommen, bei welchem der integrirte Factor unverändert bleibt, während der andere Factor nach derjenigen Variabeln differentiirt wird, nach welcher wir vorher integrirt haben. Die Bedingungen für die Ausführbarkeit dieser Rechnungsweise bestehen hier darin, dafs die beiden Functionen, welche differentiirt werden sollen, eindeutig und differentiirbar sind, und Differentialquotienten geben, welche einen bestimmten Werth und Sinn haben und nicht an verschiedenen Stellen des Raumes theils negativ, theils positiv unendlich werden.

Zu dem hier behandelten Integrale können wir noch zwei andere, völlig analoge, hinzunehmen. Die erste, auf y bezügliche, analoge Gleichung lautet:

$$\left.\begin{aligned}\iiint\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz = -\iiint\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\\ -\int\varphi\,.\,\psi\,.\cos b.d\omega\end{aligned}\right\}\quad(81)$$

worin der Winkel zwischen der aufsteigenden y-Axe und der Flächennormale mit b bezeichnet ist.

Eine dritte Gleichung läfst sich bezüglich der z-Coordinate ableiten, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\iiint\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz = -\iiint\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\\ -\int\varphi\,.\,\psi\,.\cos c\,.\,d\omega\end{aligned}\right\}\quad(82)$$

Für die zweite und dritte Gleichung ist natürlich ebenso, wie für die erste Gleichung, vorauszusetzen, dafs die Functionen φ und ψ eindeutig und endlich sind, und eindeutige und endliche Differentialquotienten erster Ordnung haben.

Wir wollen nun die Form dieser drei Gleichungen (80a, 81 und 82) verändern, indem wir an Stelle von φ seine Differentialquotienten nach den Coordinaten setzen, und zwar $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ in Gleichung (80a), $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in Gleichung (81) und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ in Gleichung (82), und dann die Gleichungen addiren; dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\iiint\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]dx.dy.dz \\ = -\int\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos a+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos b+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos c\right)d\omega \\ -\iiint\psi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)dx.dy.dz \\ \left.\begin{aligned} = -\int\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos a+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos b+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos c\right)d\omega \\ -\iiint\psi.\Delta\varphi.dx.dy.dz\end{aligned}\right\}(83)\end{aligned}$$

Diese Umformung ist aber nur möglich, wenn die Function ψ im ganzen Raume für alle drei partiellen Integrationen eindeutig denselben Werth hat, und nicht nur die ersten Differentialquotienten der beiden Functionen φ und ψ, sondern auch die zweiten Differentialquotienten von φ einen bestimmten endlichen Werth haben oder wenigstens nur in der Weise unendlich werden, dafs sie doch endliche Integrale geben.

Die Klammer, welche die Differentialquotienten von φ nach den einzelnen Coordinatenrichtungen multiplicirt mit den Cosinus derjenigen Winkel, welche diese Coordinaten mit der inneren Normale n machen, enthält, ist gleich dem Differentialquotienten von φ, genommen in der Richtung der inneren Normale, also gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Es kann also die Gleichung (83) auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\iiint\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right].dx.dy.dz \\ = -\int\psi\frac{\partial \varphi}{\partial n}d\omega-\iiint\psi\Delta\varphi.dx.dy.dz \quad (83a)\end{aligned}$$

Da die linke Seite der Gleichung symmetrisch nach den beiden Functionen φ und ψ ist, so können wir die rechte Seite auch so schreiben, dafs die Differentialquotienten von φ integrirt werden, während ψ weiter differentiirt wird. So erhalten wir:

$$\iiint\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]dx\,.\,dy\,.\,dz$$
$$=-\int\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}.d\omega-\iiint\varphi.\Delta\psi.dx.dy.dz \quad (84)$$

Diese zweite Umformung verlangt nun für ihre Gültigkeit, daſs nicht bloſs die ersten Differentialquotienten beider Gröſsen eindeutig und endlich sind, sondern daſs beides auch gleichzeitig bei den zweiten Differentialquotienten von ψ der Fall ist.

Gleichzeitig gelten also beide Umformungen (83a) und (84) nur dann, wenn die zwei ersten Differentialquotienten von den beiden Functionen φ und ψ mit eindeutigem Sinne gebildet werden können und endlich oder wenigstens nur integrirbar unendlich sind.

Die linken Seiten der Gleichungen (83a) und (84) sind identisch; wir erhalten nun durch Gleichsetzen der rechten Seiten:

$$\int\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}d\omega+\iiint\varphi\,.\,\Delta\psi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz$$
$$=\int\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega+\iiint\psi\,.\,\Delta\varphi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz \quad (85)$$

Die Anwendung dieser Gleichung hat für diejenigen Functionen, bei denen die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten gleich Null ist, Vortheil, weil dann das Raumintegral verschwindet, also bloſs das Flächenintegral stehen bleibt.

Wenn eine der Functionen φ oder ψ an irgend einer Fläche einen plötzlichen Sprung ihres Werthes macht, so daſs sie etwa auf der einen Seite den Werth φ_1 und auf der anderen Seite den Werth φ_2 hat, dann läſst sich an dieser Stelle kein eindeutiger Differentialquotient bilden; denn um ihn quer durch die Fläche hindurch zu bilden, müſsten wir den Werth auf der einen Seite nehmen, von ihm den auf der entgegengesetzten Seite abziehen, und diese Differenz durch die Entfernung dn zwischen den Orten dieser beiden Werthe dividiren. Wenn eine wirkliche Discontinuität stattfindet, sodaſs also zwei verschiedene Werthe in einer Fläche ohne Uebergang zusammenstoſsen, so würde $dn = 0$ werden können, während $d\varphi$ noch einen endlichen Werth hat. Wir würden also für einen Differentialquotienten, welcher durch die Fläche hindurch genommen ist, einen unendlichen Werth bekommen, oder vielmehr würde das Verhältniſs zwischen $d\varphi$ und dn gar keiner bestimmten Grenze sich nähern, sondern, wenn wir dn immer kleiner und kleiner machen, steigen bis unendlich. Wir können also in diesem

Falle keine ersten Differentialquotienten bilden, und eine solche Fläche darf demnach durch den betreffenden Raum nicht hindurch gehen. Wenn aber eine solche vorhanden ist, müssen wir sie selbst als eine Grenze betrachten und die Integration auf beiden Seiten nur bis an die Fläche ausdehnen. Dann kommt eine solche Fläche in das Flächenintegral hinein, ebenso wie die Grenzflächen des Raumes.

Ferner werden auch $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$, wenn wir n durch die Fläche hindurch in derselben Richtung nehmen, ebensowenig einen Sprung machen dürfen, weil wir dann durch die Fläche hindurch keinen zweiten Differentialquotienten bilden könnten, wenigstens nicht in der Richtung der Normale.

Die Bedingung für die Möglichkeit der Anwendung des Green'schen Satzes ist demnach, dafs weder die Werthe der beiden Functionen φ und ψ selbst, noch deren erste Differentialquotienten an einer durch den Raum hindurch gehenden Fläche einen Sprung machen dürfen. Wenn ein solcher Sprung entweder bei den Functionen selbst oder den Differentialquotienten vorkommt, so müssen wir jene Fläche als Grenzfläche behandeln und an ihr dieselben Flächenintegrale bilden, welche sonst nur für die Grenzfläche zu bilden sind. Dabei würden wir, wenn wir z. B. die Differentialquotienten von ψ durch Integration aufheben, auf der einen Seite $\int \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} . d\omega$ bekommen, wo die Normale dieser Seite mit n_1 bezeichnet ist, und auf der anderen Seite $\int \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} . d\omega$, wo für die zweite Seite der Index 2 benutzt ist. Beide Werthe erhalten für die Integration über den betreffenden Raum das negative Vorzeichen, und wir bekommen also für eine solche Fläche, welche auf beiden Seiten von Räumen begrenzt ist, über welche integrirt werden soll, den Werth $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$. Die beiden Normalen sind hier in entgegengesetzter Richtung genommen. Wenn wir aber auf beiden Seiten nach derselben Richtung differentiiren, so würden wir bekommen $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$. Die erste Form, $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$, wo man also voraussetzt, dafs die Normale jedesmal in denjenigen Raum hinein gerichtet ist, für den die betreffenden Differentialquotienten gelten, ist diejenige, welche gewöhnlich benutzt wird. In der zweiten Form,

$$-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega,$$

wo wir die Richtung des n festhalten, bezeichnet die Differenz $\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}$ den Sprung in dem Werthe dieses Differentialquotienten in der Richtung von n. Es ist also die Gröſse der Discontinuität, welche hier als Factor eintritt.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daſs ψ auf beiden Seiten der Fläche gleichen Werth hat, aber der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ verschieden ist. Haben die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf beiden Seiten gleiche, hingegen ψ verschiedene Werthe, so würde das Flächenintegral lauten

$$-\int (\psi_1 - \psi_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega,$$

wobei nun $\psi_1 - \psi_2$ den Sprung der Function ψ darstellt.

§ 24. Besondere Fälle und Anwendungen des Green'schen Satzes.

I. Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, daſs ψ gleich einer Constanten, also

$$\psi = C$$

ist. Dann wird die linke Seite unserer Gleichung (83a) gleich Null und wir erhalten:

$$0 = -\int C \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - \iiint C \cdot \Delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{86}$$

Hier ist C gemeinsamer Factor aller Theile. Wenn er also nicht selbst gleich Null ist, sondern einen von Null verschiedenen Werth hat, so können wir dadurch dividiren, und es ergiebt sich

$$0 = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - \iiint \Delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{86a}$$

1. Daraus folgt zunächst, daſs wenn die Function φ der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügt, d. h. also, eine Potentialfunction im Innern eines von anziehender Masse leeren Raumes ist, das Integral über $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, genommen über die ganze Oberfläche, immer gleich Null, also

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega = 0 \tag{87}$$

sein wird; d. h. also, wenn an einem Theile der Fläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ positive Werthe hat, so wird es an dem anderen Theil der Fläche negative Werthe haben müssen, weil positive und negative Werthe so vertheilt sein müssen, dafs sie sich in der ganzen Fläche gegenseitig aufheben. Bei einem geschlossenen Raum können also nur dann an allen Theilen der Oberfläche Kräfte vorkommen, welche in demselben Sinne zur Oberfläche gerichtet sind, wenn im Innern des Raumes Massen liegen.

2. Wenn wir $\Delta\varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$ setzen, worin also die vorige Annahme als specieller Fall enthalten ist, so bekommen wir:

$$0 = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega + 4\pi \iiint F \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

oder

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega = 4\pi \iiint F \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{88}$$

Das Integral über die ganze Oberfläche eines solchen Raumes genommen, ist demnach, wie auch der Raum gestaltet ist, nothwendig gleich der mit 4π multiplicirten Quantität der gesammten anziehenden Masse, da F, wenigstens symbolisch, die Dichtigkeit bezeichnet. Eine solche Masse brauchte aber nur in einem Punkte dieses Raumes zu existiren, damit in gleichem Sinne gerichtete Kräfte an der ganzen Oberfläche des Raumes vorkommen können.

II. Nehmen wir andererseits an, dafs in Gleichung (83a) die beiden Functionen φ und ψ einander gleich sind, so ergiebt sich:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega - \iiint \varphi \cdot \Delta\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{89}$$

Ist nun φ eine Function, die im ganzen Innern des betreffenden Raumes der Bedingung $\Delta\varphi = 0$ genügt, dann fällt in dieser Gleichung (89) das zweite Integral der rechten Seite weg. Machen wir nun weiter die Annahme, dafs φ an der ganzen Oberfläche des Raumes gleich Null sei, so wird auch das erste Integral dieser Seite fortfallen, und es ergiebt sich, daſs das Raumintegral, welches die linke Seite bildet, seinem Gesammtbetrage nach gleich Null sein muſs, so daſs demnach:

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right].dx.dy.dz=0 \tag{89a}$$

wird. Nun ist dieses Integral aber über eine Summe von drei Quadraten genommen, und wenn wir wie bisher unter φ immer eine im ganzen Integrationsraume reelle Function verstehen, so sind die Differentialquotienten auch reell, die Quadrate also niemals negativ. Das Raumintegral kann also nur dann gleich Null werden, wenn an allen Stellen des gesammten Raumes, über den integrirt wird, sämmtliche drei nach den Coordinaten genommene Differentialquotienten gleich Null sind. Daraus folgt, daſs φ nothwendig eine constante Gröſse sein muſs, und zwar muſs es, da wir ja angenommen haben, daſs es an der Oberfläche gleich Null ist, durch den ganzen inneren Raum gleich Null sein.

Wenn wir demnach zwei Lösungen, φ_1 und φ_2, haben, welche beide der Bedingungsgleichung $\Delta\varphi=0$ im ganzen inneren Raume entsprechen, so daſs also $\Delta\varphi_1=0$ und $\Delta\varphi_2=0$ ist und sie sind an der Oberfläche einander gleich, so gilt für ihre Differenz $(\varphi_1-\varphi_2)$ ebenfalls die Gleichung $\Delta(\varphi_1-\varphi_2)=0$, und daraus folgt, daſs im ganzen Innern des Raumes $\varphi_1-\varphi_2=0$ sein muſs, d. h. also, wenn der Werth einer Function, welche der Differentialgleichung $\Delta\varphi=0$ genügt, an der Oberfläche eines geschlossenen Raumes gegeben ist, so giebt es nicht zwei verschiedene Lösungen für die Differentialgleichung, welche im Innern des Raumes von einander verschieden sein können. Es ist also die Differentialgleichung $\Delta\varphi=0$ mit Festsetzung der Werthe, welche φ an der Oberfläche des geschlossenen Raumes haben soll, zur vollständigen Bestimmung der Function φ durch das ganze Innere dieses Raumes genügend.

III. Nun wollen wir noch erörtern, wie sich in dieser Beziehung der äuſsere Raum verhält. Unter welchen Umständen werden die Integrale für den äuſseren Raum, der bis zu einer unendlich entfernten Grenzfläche, die wir uns durch eine Kugel von unendlich groſsem Radius gebildet denken können, hinausreicht, endliche Werthe haben, beziehlich Null werden? Die Antwort ist entscheidend dafür, ob wir den Green'schen Satz in einem gegebenen Fall auch auf den äuſseren Raum anwenden dürfen.

Wenn wir die einfachste Form solcher Functionen nehmen, nämlich $\frac{c}{r}$, so würde an einer unendlich entfernten Kugel der Differentialquotient nach der Normale, das wäre in diesem Falle also nach dem Radius der Kugel, abnehmen wie $\frac{1}{r^2}$. Da nach verschiedenen Richtungen die Werthe der Function verschieden sein können, so wollen wir uns eine Kegelecke herausgeschnitten denken, welche bei einer Kugel vom Radius 1 von dem Oberflächenelement $d\,\Omega$ begrenzt würde; dann wäre an einer Kugel vom Radius r ihre Oberfläche gleich $r^2 d\,\Omega$. In dem zu bildenden Producte, $\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} . d\omega$ würde φ also wie $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen, und $d\omega$ würde gleich $r^2 . d\,\Omega$ sein. Der Factor von $d\,\Omega$ würde also, soweit er von r abhängig ist, gleich $\frac{1}{r}$ sein. Wenn nun auch die Werthe in verschiedenen Kegelöffnungen sehr verschieden von einander sind, so würden doch die Oberflächenintegrale, die sich auf die Grenzen des unendlichen Raumes beziehen, mit unendlich werdendem r verschwinden, und in unseren Gleichungen nur mit dem Werthe Null in Ansatz kommen.

Die Potentialfunctionen, welche wir früher behandelt haben, und welche von der Form $\frac{1}{r}$ sind, würden also zulässig sein, und in noch höherem Grade diejenigen, welche in der Entfernung wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen. Letztere sind z. B. die Potentialfunctionen von Magneten oder von elektrischen Ansammlungen in endlichen Entfernungen, bei denen stets gleich viel positive und negative Elektricität frei gemacht wird. Dann ist nämlich für die Entfernung das Potential von der Form $\frac{\cos \alpha}{r^2}$, wenn der Radius r mit der magnetischen Axe eines solchen kleinen Magneten den Winkel α bildet. Falls Magnete von gleichem Momente, aber in umgekehrter Richtung, an verschiedenen Stellen des Raumes liegen, so tritt sogar die dritte Potenz von r in den Nenner. Es giebt demnach eine grofse Menge von Fällen, in denen die Potentialfunctionen in der Entfernung stärker als $\frac{1}{r}$ abnehmen.

Wenn wir nun dieselbe Voraussetzung über die Abnahme der Functionen in dem Falle machen, wo die beiden Functionen φ und ψ einander gleich sind, und fernerhin wieder voraussetzen, dafs im ganzen unendlichen Raume $\Delta \varphi = 0$ ist, so wird in Gleichung (89) das Oberflächenintegral $\int \varphi \, . \, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, . \, d\omega$ gleich Null werden, und ebenso wird auch das Raumintegral $\iiint \varphi \, . \, \Delta \varphi \, . \, dx . dy . dz$ verschwinden. Es würde daraus folgen, dafs auch das über den ganzen unendlichen Raum genommene Integral

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] . \, dx \, . \, dy \, . \, dz$$

gleich Null wird, und wir haben oben gesehen, dafs dieses nur möglich ist, wenn in allen Theilen des unendlichen Raumes φ constant ist: da es hier an den Grenzen aber gleich Null ist, so mufs es überall den Werth Null haben.

Daraus ergiebt sich nun weiter: Wenn zwei Functionen, die im Integrationsraume überall der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügen, und welche in der Unendlichkeit mindestens wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, und an allen geschlossenen Grenzflächen im Endlichen gleiche Werthe haben, so können sie im ganzen unendlichen Raum nicht von einander unterschieden sein. Wenn wir uns also auf Functionen beschränken, die in der Unendlichkeit in der angegebenen Weise nach Null convergiren, so gilt auch für den unendlichen Raum der Satz, dafs φ eindeutig gegeben ist, wenn es an den endlichen Grenzflächen gegeben ist.

IV. Es läfst sich zeigen, dafs alle Functionen, welche der Gleichung $\Delta \varphi = - 4 \pi F_{(x,y,z)}$ in einem geschlossenen Raume genügen, als Potentialfunctionen von Dichtigkeiten dargestellt werden können, die theils im Innern dieses Raumes, theils an seiner Oberfläche in einer einfachen Schicht, theils auf einer dort befindlichen Doppelschicht liegen. Zu dem Zwecke müssen wir wieder auf die ursprüngliche Form des Green'schen Satzes zurückgehen, in der die beiden Functionen φ und ψ noch von einander verschieden sind.

Wir nehmen von der Function φ an, dafs für sie überall $\Delta \varphi = - 4 \pi F_{(x,y,z)}$ sei; dagegen wählen wir für die Function ψ die Form $\frac{m}{r}$, wobei r von einem irgendwie bestimmten Punkte (ξ, η, ζ) bis zu dem veränderlichen Punkte x, y, z gerechnet wird. Unter diesen Umständen genügt ψ der Differentialgleichung $\Delta \psi = 0$ mit Ausnahme des Punktes ξ, η, ζ, in welchem die anziehende Masse m liegt. Wir wollen nun festsetzen, dafs von dem gesammten Raume eine kleine Kugel vom Radius ϱ ausgeschlossen werde, deren Mittelpunkt mit dem Punkte ξ, η, ζ zusammenfalle; dann haben wir einen äufseren Raum, in welchem die Function ψ überall der Bedingung $\Delta \psi = 0$ genügt, und auf den unsere Gleichung (85) angewendet werden kann. Es fällt in ihr auf der linken Seite das letzte Glied fort, und wir erhalten daher:

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - 4\pi \int\int\int \psi . F . dx . dy . dz \tag{90}$$

worin die Oberflächenintegrationen über alle Grenzflächen des äufseren Raumes auszudehnen sind. Diese Grenzflächen sind aber erstens die unendlich entfernte Grenzfläche und zweitens die Oberfläche der kleinen Kugel. Für die Function ψ ist nun aber durch die über sie gemachte Festsetzung bereits gegeben, dafs sie im Unendlichen verschwindend klein wird wie $\frac{1}{r}$.

Wir wollen nunmehr auch für die Function φ dieselbe Annahme machen, was unter der Bedingung der Fall sein wird, dafs F die endliche Dichtigkeit einer endlichen Masse ist, deren Theile alle im Endlichen liegen. Dann fallen beide Integrale an der unendlichen Grenzfläche fort. An der Oberfläche der kleinen Kugel, welche den zweiten Theil der Grenzfläche bildet, würde $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ gleich $-\frac{m}{\varrho^2}$ sein und $d\omega$ würde, wenn wir wieder wie oben die Kegelöffnung $d\Omega$ einführen, zu ersetzen sein durch $\varrho^2 . d\Omega$, so dafs wir also erhalten

$$\begin{aligned} \int \varphi . \frac{\partial \psi}{\partial n} . d\omega &= -\int \varphi . \frac{m}{\varrho^2} . \varrho^2 . d\Omega \\ &= -m \int \varphi . d\Omega \end{aligned} \tag{91}$$

Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \int \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega &= \int \frac{m}{\varrho} . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . \varrho^2 . d\Omega \\ &= m \int \varrho . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\Omega \end{aligned} \tag{92}$$

so dafs also nunmehr

$$m \int \varphi . d\Omega = -m \int \varrho . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\Omega + 4\pi m \int\int\int \frac{F}{r} . dx . dy . dz \tag{90a}$$

Da wir nun den Radius ϱ der Kugel beliebig klein werden lassen können, und φ nach den oben erörterten Bedingungen der Gültigkeit des GREEN'schen Satzes, als eine continuirliche Function zu betrachten ist, so kann man die auf der Oberfläche der verschwindend kleinen Kugel liegenden Werthe von φ als ununterschieden ansehen; wir wollen sie mit $\overline{\varphi}$ bezeichnen, so daſs also

$$m\int\varphi . d\,\Omega = \overline{\varphi} . m . \int d\,\Omega$$
$$= 4\,\pi . \overline{\varphi} . m \tag{93}$$

Das Glied $m\int\varrho . \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n} . d\,\Omega$ der Gleichung (90a) verschwindet aber, weil der unendlich kleine Factor ϱ darin enthalten ist, so daſs sich nunmehr ergiebt:

$$4\,\pi\,\overline{\varphi}\,m = 4\,\pi\,m\iiint\frac{F}{r} . d\,x . d\,y . d\,z$$

oder

$$\overline{\varphi} = \iiint\frac{F}{r} . d\,x . d\,y . d\,z \tag{90b}$$

Es kommt bei dieser Ableitung also heraus, was eigentlich im Voraus zu erwarten war, daſs nämlich φ in der Nähe eines beliebig gewählten Punktes dargestellt werden kann durch die Potentialfunction der im unendlich ausgedehnten Raume vertheilten Dichtigkeit.

Es ist nun noch zu zeigen, daſs mit einem Zusatz, der sich auf die Flächenbelegung bezieht, dieselbe Form der Lösung auch für begrenzte Räume gültig ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen beliebig begrenzten Raum S an, dessen Volumelement mit $d\,S$ bezeichnet sei. Den Punkt (ξ, η, ζ), auf den sich die Potentialfunction bezieht, denken wir uns wieder mit einer Kugel umgeben, deren Radius schlieſslich als verschwindend klein angenommen werden soll, und den Raum dieser Kugel nehmen wir aus von dem Raume S, über den sich die Integration erstreckt. Wenn wir nun die Gleichung (85) auf diesen Raum anwenden, so erhalten wir:

$$\int\varphi . \frac{\partial\,\psi}{\partial\,n} . d\omega + \int\varphi . \varDelta\,\psi . d\,S = \int\psi . \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n} . d\omega + \int\psi . \varDelta\,\varphi . d\,S \tag{94}$$

Wir wollen nun wiederum für die Function ψ einen bestimmten Werth setzen, nämlich $\psi = \frac{1}{r}$, wo unter r die Entfernung von dem Punkte (ξ, η, ζ) verstanden wird; dann ist auſserhalb jener verschwindend kleinen Kugel überall, also auch in dem Raume S, $\Delta\psi = 0$, und das zweite Integral der linken Seite in Gleichung (94) fällt weg. Es wird dieses aber auch noch der Fall sein, wenn wir später die Integration über den ganzen äufseren bis in die Unendlichkeit sich erstreckenden Raum ausdehnen, da auch dort $\Delta\psi = 0$ angenommen werden kann.

Das Oberflächenintegral $\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\omega$ bekommt unter der gegenwärtigen Annahme für die unendlich kleine Kugel, wenn wir die früher eingeführten Bezeichnungen auch hier benutzen, den Werth $-\int \varphi \,.\, d\,\Omega$. Bei der äufseren Grenzfläche von S wollen wir aber für das Flächenelement die Bezeichnung $d\omega$ fest halten; dann ist dieser Theil des Integrals gleich $+\int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega$.

Die Gleichung (94) verwandelt sich daher jetzt in

$$-\int \varphi . d\,\Omega + \int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} . d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega + \int \psi . \Delta\varphi . dS \tag{95}$$

Der Theil des ersten Integrales auf der rechten Seite, welcher sich auf die kleine Kugel bezieht, fällt wieder weg, weil er den unendlich kleinen Factor ϱ nach Einsetzung der Werthe $\psi = \frac{1}{\varrho}$ und $d\omega = \varrho^2 . d\,\Omega$ enthält, und es bleibt nur derjenige Theil stehen, der auf die äufsere Grenzfläche von S Bezug hat. Die rechte Seite der Gleichung (95) wird daher:

$$\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega + \int \frac{1}{r} \cdot \Delta\varphi . dS$$

Hierin repräsentirt $\Delta\varphi$ eine Dichtigkeit, welche wir gleich $-4\pi F$ gesetzt haben, so dafs sich nunmehr Gleichung (95) umformt in:

$$-\int \varphi . d\,\Omega + \int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \cdot d\omega = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega - 4\pi \int \frac{1}{r} . F . dS \tag{96}$$

Aus einer der vorhin angestellten völlig analogen Ueberlegung folgt auch hier, dafs wir für das erste Integral der linken Seite den Werth $-4\pi . \varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ erhalten, wo $\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ den Werth von φ im Mittelpunkte (ξ, η, ζ) der unendlich kleinen Kugel bezeichnet. Indem wir die Gleichung anders ordnen, erhalten wir daher:

$$-4\pi.\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = -\int \varphi . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}.d\omega + \int \frac{1}{r}.\frac{\partial \varphi}{\partial n}.d\omega - 4\pi.\int \frac{F}{r}.dS \quad (96a)$$

Die beiden letzten in dieser Gleichung vorkommenden Integrale sind zwei Potentialfunctionen gewöhnlicher Art, von denen die eine von der Raumdichtigkeit F, die andere von der Flächendichtigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ herrührt.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs das erste Integral nach seiner unmittelbaren Bedeutung das Potential einer Doppelschicht darstellen

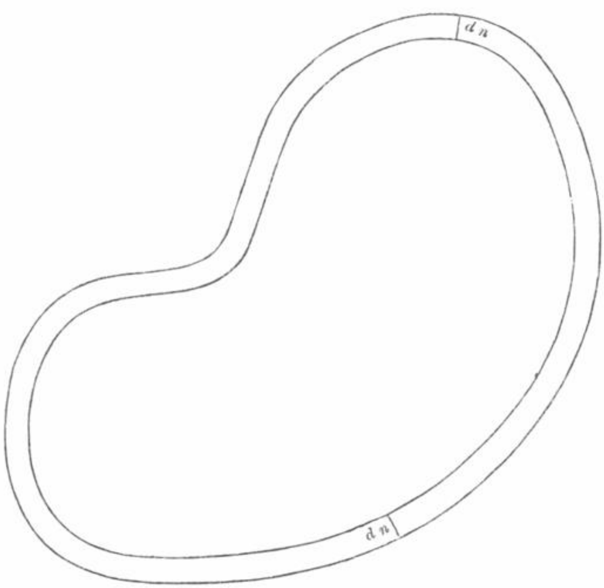

Fig. 17.

kann, welche die Oberfläche von S überzieht. Denkt man sich in einer verschwindend kleinen Entfernung, die mit dn bezeichnet sein möge, eine zweite der ersten parallele und immer in constanter Entfernung bleibende Fläche gelegt (Fig. 17), und die eine mit positiver Elektricität belegt, die andere mit eben so grofsen Quantitäten negativer Elektricität, so dafs also jedes Prisma, welches durch beiden Flächen gemeinsame Lothe begrenzt ist, aus beiden Flächen gleiche Quanta Elektricität, aber von verschiedenem Vorzeichen herausschneidet, so würde, wenn $\frac{\varphi}{dn}$ die Dichtigkeit der positiven Elektricität bezeichnet, die Potentialfunction der auf dem Flächenelement $d\omega$ liegenden Masse gleich $\frac{\varphi}{dn} \cdot \frac{1}{r} . d\omega$ sein. Dazu kommt aber das entgegengesetzte elektrische Quantum $-\frac{\varphi}{dn} . d\omega$ in einer Entfernung, welche etwas gröſser ist als r, so daſs wir statt $\frac{1}{r}$ jetzt $\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) . dn$ zu setzen haben. Also ist die von beiden Schichten herrührende Potentialfunction eines Flächenelementes gleich

$$\frac{\varphi}{dn} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\omega - \frac{\varphi}{dn}\left[\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) . dn\right] . d\omega = -\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) . d\omega$$

Es würde also das Integral $\int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} . d\omega$ der Gleichung (96a) die Potentialfunction einer solchen auf der Oberfläche von S liegenden Doppelschicht darstellen, und nach unserer früheren Definition (§ 9) würde das Moment dieser Doppelschicht gleich φ sein.

Nun können wir aber, wenn wir den äuſseren Raum mit hinzu nehmen, dieses Integral beseitigen, vorausgesetzt, daſs es möglich ist, eine Function φ_a zu finden, für welche im ganzen äuſseren Raum $\Delta \varphi_a = 0$ ist, und welche zugleich an der ganzen Grenze des Raumes S in ihren Werthen mit den Werthen der soeben behandelten Function, die wir mit φ_i bezeichnen wollen, zusammenfällt, so daſs also $\overline{\varphi_a} = \overline{\varphi_i}$ ist.

Wenn in Gleichung (94)

$$\varphi = \varphi_a$$

gesetzt, und die Integration über den äuſseren Raum erstreckt wird, so hat man

$$\int \varphi_a \cdot \frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r}\right) . d\omega = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} . d\omega$$

Da φ_a auf der Fläche gleich φ_i ist, so können wir in Gleichung (96a) jetzt

$$\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega = -\int \varphi_a \cdot \frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r}\right) . d\omega$$

$$= -\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} . d\omega$$

setzen, und erhalten so

$$-4\pi.\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right)'.d\omega - 4\pi\int\frac{1}{r}.F.dS$$

oder wenn wir durch -4π dividiren:

$$\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = -\int\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right).d\omega + \int\frac{1}{r}.F.dS \tag{97}$$

In dieser Gleichung ist der Werth von $\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ dargestellt durch eine Potentialfunction, welche die Raumdichtigkeit des inneren Raumes S enthält, und eine zweite Potentialfunction, deren Integral sich über die Grenzfläche der beiden unterschiedenen Räume erstreckt, an welcher als Dichtigkeit die Gröſse $-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right)$ auftritt, so daſs also diese Oberfläche hier wirkt, als wäre sie mit einer Flächendichtigkeit belegt. Wenn wir diese mit e bezeichnen, so ist also e durch die Gleichung:

$$-4\pi e = \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_a} \tag{98}$$

bestimmt. Das Product $4\pi.e$ ist demnach gleich dem Sprung im Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ an der Grenze des mit S bezeichneten Raumes.

Jede Function φ, welche für einen begrenzten oder für den unendlichen Raum dadurch bestimmt ist, daſs der Werth von $\Delta\varphi$ gegeben ist, kann somit auf Potentialfunctionen von bestimmten Dichtigkeiten zurückgeführt werden, die theils durch die schon gegebene Raumdichtigkeit, theils durch die Unstetigkeiten der Differentialquotienten der Function für die Flächen, in denen diese Discontinuitäten stattfinden, gegeben sind.

Dritter Abschnitt.

Umformung der Maxwell'schen Gleichungen in die Form der Wellengleichung.

§ 25. Erweiterung der Maxwell'schen Gleichungen auf elektrische Leiter.

Die in der älteren Form der Elektricitätslehre aus der Annahme nach dem COULOMB'schen Gesetze anziehender und in discreten Punkten angehäufter elektrischen Quanten abgeleiteten Sätze und Gleichungen sind mit den in dem vorigen Abschnitt behandelten völlig identisch. Die MAXWELL'schen Gleichungen und Voraussetzungen führen eben ganz nothwendig auf dieselbe Form der Lösung, und da wir von diesen Gleichungen ausgingen, so war der Nachweis nöthig, dafs die durch die alte Elektricitätslehre gegebenen Formen der Lösungen auch hier zutreffen, und dafs man die durch die MAXWELL'schen Gleichungen ausgedrückten Beziehungen direct gebrauchen kann, um von ihnen aus die Potentialfunctionen zu entwickeln, welche die Vertheilungen der elektrischen und magnetischen Kräfte in dem Raume darstellen.

Nun hatten wir die bisherigen Gleichungen nur auf isolirende Räume, d. h. also, auf den Aether, beziehlich den mit dielektrisch oder magnetisch polarisirbarer, ponderabler Materie gefüllten Aether bezogen. Bisher haben wir nun die Möglichkeit von Elektricitätsleitern in diesen Räumen noch ganz aufser Betracht gelassen. Wir wissen aber, dafs aufser den elektrischen Veränderungen, welche in isolirenden Körpern bei der Einwirkung elektrischer Kräfte eintreten, noch andere Formen von elektrischen Aenderungen oder elektrischen Bewegungen in leitenden Körpern vorkommen können, nämlich solche, welche in der älteren Elektricitätslehre als galvanische Ströme bezeichnet worden sind. Nach den bisherigen Annahmen flofs in diesem Falle eine imponderable Substanz durch die Länge des Leiters hindurch. In der MAXWELL'schen Betrachtungsweise müssen natürlich solche Ströme ebenfalls berücksichtigt werden. Wir wissen, dafs sie dieselben magnetisirenden Kräfte hervorbringen, welche in der MAXWELL'schen Hypothese den molecularen Elektricitätsbewegungen in den Isolatoren zugeschrieben werden. Historisch liegt die Sache sogar so, dafs wir zuerst von den magnetischen Wirkungen elektrischer Ströme, die durch einen Leiter gehen, Kenntnifs erhalten haben. Bei ihnen entstehen rings um den Stromleiter herum kreisförmige magnetische Kräfte, und diese Eigenschaften sind dann erst später von MAXWELL auf die Ladungen der Isolatoren oder die polarisirenden Veränderungen in den Isolatoren hypothetisch übertragen worden. MAXWELL betrachtet wenigstens in Bezug auf die magnetischen Wirkungen also als gleichartige Processe die Strömungen der Elektricität durch einen Leiter, bei denen elektrische Quanta relativ grofse Strecken fortgeführt werden, und andererseits diejenigen Bewegungen der Elektricität, welche innerhalb der Molekeln stattfinden, wodurch das eine Ende des Molekels positiv, das andere negativ geladen wird.

Die früher (§ 11) gefundenen Gleichungen (30), welche die Abhängigkeit der Magnetkräfte von den elektrischen Momenten in Isolatoren darstellten, lauteten:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Nun würde aber, wenn wir Leiter im Felde haben, die in ihnen stattfindende Elektricitätsbewegung, die wir als galvanischen Strom zu bezeichnen pflegen, in gleicher Weise wie die polarisirenden Bewegungen in den Molekeln wirken, und ihre Wirkung würde sich zu derjenigen der letzteren addiren. Zu der Gröfse $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ würde also in dem betreffenden Querschnitt die nach x gerichtete Componente der Dichtigkeit des galvanischen Stromes hinzukommen. Der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ bezieht sich nun auf die Elektricitätsbewegung, welche durch das Flächenelement $dy \,.\, dz$ hindurch geht, und als Componenten des galvanischen Stromes bezeichnet man ebenfalls diejenigen Mengen von Elektricität, welche durch Flächenelemente hindurch gehen, die senkrecht zu der Strömungsrichtung der betreffenden Componente gerichtet sind, berechnet für die Einheit der Fläche. Wenn wir von dem Strom einer ponderablen Flüssigkeit reden, so haben wir dort materielle Elemente, welche sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit durch den Raum fortbewegen, und wir können daher von der Weggeschwindigkeit sprechen, mit der diese Elemente voranschreiten; bei der Elektricität, namentlich nach der MAXWELL'schen Betrachtungsweise, können wir aber von substantiellen Theilchen gar nicht reden, und es hat deshalb auch gar keinen Sinn, die Geschwindigkeit in die Gleichungen einführen zu wollen. Wir können nur von der Menge Elektricität reden, die durch ein gegebenes Flächenelement in gegebener Zeit hindurch fliefst, und wollen daher unter der Stromcomponente u die Menge Elektricität verstehen, welche in der Zeiteinheit durch diejenige Flächeneinheit hindurch fliefst, welche senkrecht zur x-Axe ist, vorausgesetzt, dafs die Strömung in allen Punkten der Fläche dieselbe ist.

Wir würden daher in der ersten dieser Gleichungen (99) zu dem Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ noch den Werth der Componente u hinzu setzen und in analoger Weise die zweite und dritte jener Gleichungen erweitern müssen, so dafs sich also ergäbe:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A.u + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
4\pi A.v + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
4\pi A.w + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Nun sagt das OHM'sche Gesetz aus, dafs die Intensität eines elektrischen Stromes durch einen bestimmten Querschnitt proportional sei der elektrischen Kraft, welche die Elektricität in der betreffenden Richtung vorwärts treibt, so dafs also hier u der elektrischen Kraft X im Innern des Leiters proportional ist. Wir würden demnach

$$u = \lambda . X$$

anzunehmen haben. In isotropen Substanzen, welche nach allen Richtungen die gleichen Eigenschaften zeigen, ist dieser Proportionalitätsfactor λ für die anderen Stromcomponenten derselbe, so dafs also

und
$$\left.\begin{aligned}
u &= \lambda . X \\
v &= \lambda . Y \\
w &= \lambda . Z
\end{aligned}\right\} \quad (101)$$

zu setzen ist. Nun ist aber ferner nach den Gleichungen (35):

$$X = \frac{4\pi}{\varepsilon} . \mathfrak{X}$$

$$Y = \frac{4\pi}{\varepsilon} . \mathfrak{Y}$$

und

$$Z = \frac{4\pi}{\varepsilon} . \mathfrak{Z}$$

und demnach erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{X} \\ v &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Y} \\ w &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Z} \end{aligned}\right\} \quad (101\text{a})$$

und

so dafs sich schliefslich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} 4(\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{X} + 4\pi A . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ (4\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Y} + 4\pi A . \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ (4\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Z} + 4\pi A . \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (102)$$

Dabei ist noch zu bemerken, dafs die Bewegung der Elektricität in Leitern ein Procefs ist, durch welchen die elektrische Energie zerstört und gleichzeitig auf Kosten derselben in den betreffenden Leitern Wärme entwickelt wird; es ist dies also ein nicht conservativer Procefs, im Gegensatz zu den in unseren bisherigen Gleichungen, die sich nur auf Isolatoren bezogen, berücksichtigten Vorgängen.

§ 26. Die elektrische Dichtigkeit.

Die Gröfsen auf der rechten Seite der Gleichungen (102) können wir fortschaffen, wenn wir die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und alle addiren. Wir erhalten dann rechts den Werth Null, und indem wir durch den allen Gliedern gemeinsamen Factor $4\pi A$ dividiren, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} . \mathfrak{X}\right] + 4\pi \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} . \mathfrak{Y}\right] + 4\pi \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} . \mathfrak{Z}\right] \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Den in der letzten Klammer stehenden Ausdruck haben wir in § 14 schon als die Raumdichtigkeit der Elektricität kennen gelernt und dort mit σ bezeichnet. Benutzen wir auch hier diese Bezeichnung, so erhalten wir zunächst für den Fall, dafs $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ durch den Raum constant ist:

$$0 = 4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{104}$$

Daraus folgt, wenn wir die Gleichung durch σ dividiren,

$$0 = 4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon} + \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}(\log\sigma) = -4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{104a}$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$\log\sigma = C - 4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot t \tag{104b}$$

so dafs also log σ als eine Function der Zeit gegeben ist. Wenn wir vom Logarithmus zu der Gröfse selbst übergehen, erhalten wir

$$\sigma = e^C . e^{-4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}.t} \tag{104c}$$

Daraus ergiebt sich die Abhängigkeit des Werthes σ von der Zeit.

Da nun $e^{-4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}.t}$ eine Function ist, die mit steigender Zeit immer kleiner wird — denn λ und ε sind ihrer Natur nach positive Gröfsen — und nach Null hin convergirt, so verschwindet die elektrische Dichtigkeit mit der Zeit, wenn sie in einem in Bezug auf das Leitungsvermögen und die dielektrische Constante gleichmäfsigen Raume von Null verschieden ist, dadurch, dafs in ihrer Nähe die Ströme u, v, w entstehen. Im Innern eines homogenen Leiters wird demnach die elektrische Dichtigkeit mit der Zeit immer gleich Null, und zwar ist dazu in Wirklichkeit bei den gut leitenden Körpern eine so kurze Zeit erforderlich, dafs wir gewöhnlich gar nicht im Stande sind, sie zu messen. Es zeigt also dies Verhalten an, dafs elektrische Dichtigkeit, die im Innern eines Leiters sich in einem gegebenen Augenblicke aufgehäuft haben sollte, nach kurzer Zeit verschwindet, indem sie sich in dem Leiter vertheilt. Wenigstens verschwindet sie, soweit der Leiter homogen ist. Falls er dies nicht ist, ergiebt Gleichung (103) dagegen:

$$0 = 4\pi\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\sigma + \mathfrak{X}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \tag{105}$$

was anzeigt, daſs $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ werden, also σ constant bleiben kann, ohne daſs es gleich Null wird, wenn auch $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ constante Werthe annehmen, was unter anderen Fällen nach Gleichung (101a) namentlich dann geschieht, wenn man die Stromcomponenten u, v, w in constanter Stärke unterhält. Dabei wird namentlich an der Grenze zweier Leiter von verschiedenem Leitungsvermögen eine elektrische Schicht dauernd angehäuft, die nicht verschwindet, so lange der Strom besteht, worauf wir hier nicht näher einzugehen brauchen.

In einem Nichtleiter ist die Leitungsfähigkeit $\lambda = 0$, und daher verwandelt sich bei einem solchen die Gleichung (104) in

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

die in Uebereinstimmung mit der früher (§ 14) gefundenen Gleichung (44) aussagt, daſs in diesem Falle die Dichtigkeit σ eine nach der Zeit constante Gröſse ist.

§ 27. Die Strömungen der Elektricität. — Sogenannte ungeschlossene Ströme.

Die Gleichung (103) können wir über einen begrenzten Raum integriren und dann nach dem Green'schen Satze dieses Raumintegral in ein Oberflächenintegral umformen. Da nun überall in dem betreffenden Raum die integrirte Gröſse gleich Null ist, so wird auch das ganze Integral gleich Null werden, und wir bekommen also

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \iiint\left\{4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z}\right)\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]\right\} dx\,.\,dy\,.\,dz \\ &= \int\left\{\left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X} + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right)\cos a + \left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\cos b\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\cos c\right\} d\omega \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Jedes Glied dieses letzten Integrales ist die in Richtung einer Coordinate fallende Componente des Gesammtstromes, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Normale der Oberfläche mit der betreffenden Componente der Strömung macht, und das Integral stellt also die Gesammtströmung dar, welche durch elektrische Leitung und molekulare Vertheilung entsteht und durch die Oberfläche des Raumes hindurch geht. Aus unserer Gleichung (106) ergiebt sich also, daſs sie immer gleich Null ist, d. h. also: Aus der MAXWELL'schen Vorstellungsweise folgt allgemein, daſs jede elektrische Strömung, auch eine solche, welche gegen das Ende eines Leiters hinführt, an keiner Stelle des Leiters wahre Elektricität anhäuft.

Wenn in einem Leiter positive Elektricität zu dem Ende des Leiters strömt, d. h. wenn an diesem Ende die Molekel ihre positiven Pole nach auſsen wenden, so würde von da aus unmittelbar eine weitere Polarisirung der umliegenden Molekeln erfolgen, die nun in den Raum hinein sich ausbreitet (Fig. 18), und wobei in den Isolator die Bewegung, welche in dem Leiter vorhanden war, fortgesetzt wird. Ein Unterschied besteht nur darin, daſs diese Ladung, sobald sie eintritt, auch gleich ein elektrisches Potential hervorbringt, welches auf den Leiter zurückwirkt, so daſs die bisher vorhandenen elektromotorischen Kräfte des Leiters diese Ladung nicht weiter fortsetzen können, und der Strom in dem Leiter also nothwendig aufhört.

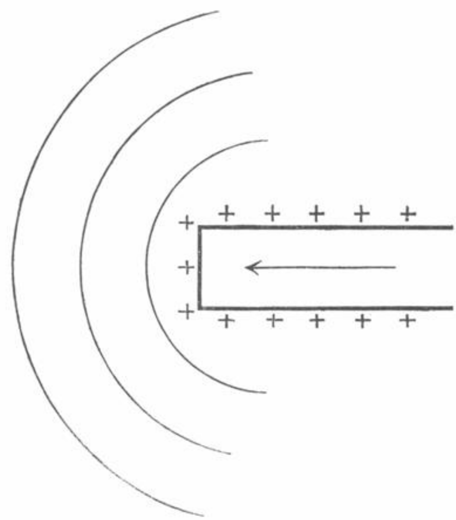

Fig. 18.

Es ist dies ein wichtiger Punkt in der MAXWELL'schen Theorie; nach dieser Theorie giebt es eben keine ungeschlossenen Ströme. Von jeder sich ladenden Grenzfläche eines Leiters setzt sich die elektrische Bewegung in den umliegenden Isolator fort, indem sie in diesem elektrische Momente ausbildet, und zwar, wie die letzte Gleichung (106) zeigt, in solcher Stärke, daſs schlieſslich die Menge Elektricität, welche durch jeden Querschnitt des umschlieſsenden Isolators in Form der entstehenden molekularen Ladungen tritt, immer gleich ist der Menge Elektricität, welche durch den Querschnitt des Leiters geflossen ist. Hierdurch sind die Schwierigkeiten beseitigt, welche den älteren Theorien in Bezug auf die Vorgänge anhaften, die nach dem Gesetze von der Constanz der Energie an dem Ende geschlossener Ströme vorkommen müſsten.

Es läſst sich, wie auch neuerdings von Hertz und den anderen Physikern, die seine Versuche wiederholt haben, experimentell gezeigt worden ist, in der That nachweisen, daſs jedes plötzliche Zuströmen der Elektricität an das Ende eines Leiters ein System von elektrischen Ladungen und elektromagnetischen Oscillationen in dem umliegenden Isolator erregt, wodurch diese Elektricitätsbewegung in die Ferne fortgesetzt wird.

§ 28. Die Constanz der elektrischen Quanten.

Aus den drei Gleichungen (102) haben wir in § 26 durch Differentiation nach x, bez. y, bez. z und Addition der dann entstandenen Gleichungen, nachdem wir den gemeinsamen Factor $4\pi A$ überall weggelassen, die Gleichung (103)

$$0 = 4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]$$

erhalten, welche innerhalb eines beliebig umgrenzten Raumes gilt.

Wir nehmen nun an, wir hätten einen Raum, in dessen Innerem ein Leiter mit irgendwie vertheilten elektrischen Zuständen liege, und seine Oberfläche sei von einer isolirenden Hülle umgeben, in welcher also das Leitungsvermögen $\lambda = 0$ zu setzen ist. Wenn wir daher diese Gleichung über den ganzen Raum integriren, so bekommen wir, wenn in dem letzten Integral statt der Klammer wieder σ geschrieben und die Reihenfolge der Integration und Differentiation vertauscht wird:

$$0 = 4\pi\int\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\left[\mathfrak{X}\,.\cos a + \mathfrak{Y}\,.\cos b + \mathfrak{Z}\,.\cos c\right]d\omega + \frac{\partial}{\partial t}\int\sigma\,.\,d\,S \qquad (107)$$

Unserer Annahme gemäſs haben wir längs der Oberfläche λ gleich Null zu setzen, und es wird also das erste Integral gleich Null, folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\sigma\,.\,d\,S = 0 \qquad (107\text{a})$$

Nun stellt aber das Raumintegral $\int\sigma\,.\,d\,S$ das Quantum wahrer Elektricität dar, welches in dem ganzen Raume enthalten ist, und die letzte Gleichung (107a) sagt also aus, daſs die Aenderung des Gesammtquantums der Elektricität in dem ganzen Raume gleich Null ist.

Es folgt also aus den Maxwell'schen Gleichungen, daſs in einem

Leiter, der von einer vollständig isolirenden Hülle umgeben ist, bei allen elektrischen und magnetischen Vorgängen, welche durch die hier aufgestellten Gleichungen umfaſst werden, und die auch das Vorhandensein elektrisch leitender Körper mit umschlieſsen, das Quantum der Elektricität unveränderlich bleiben muſs, so daſs also die Vorstellung bestehen bleibt, von welcher die ältere Theorie ausgeht, daſs nämlich die beiden Elektricitäten nach der dualistischen, oder die eine Elektricität nach der unitarischen Theorie, unzerstörbar sind, und nur durch ihre Vereinigung verschwinden können. Hier ist dieses aber die Folgerung aus einem System von Integrationen, es liegt nicht in den Voraussetzungen, sondern die Quantität der Elektricität tritt hier als eine Integrationsconstante auf, indem die ursprünglichen Gleichungen zunächst nur aussagen, daſs die Veränderung dieser Quantität gleich Null ist. Die unveränderliche Gröſse ist also eine Integrationsconstante von derselben Art, wie solche auch in der Dynamik ponderabler Körper auftreten, z. B. in den Gesetzen von der Constanz der Energie oder der Constanz der Bewegung des Schwerpunktes oder der Constanz des Rotationsmomentes für Körpersysteme, auf welche keine äuſseren Kräfte einwirken. In derselben Weise ergiebt sich also hier die Constanz des Quantums der Elektricität. Es ist dies wahrscheinlich der Hauptgrund, warum Maxwell's Behandlung der Elektricitätslehre für die Auffassung so viel Schwierigkeit gemacht und es so lange gedauert hat, bis sie allgemein verbreitet und verstanden worden ist.

Die Maxwell'schen Gleichungen sind also vollkommen vereinbar mit der Vorstellung, daſs an gewissen Körperelementen der isolirenden Körper, oder in Körpern, welche ringsum von isolirenden Hüllen umgeben sind, constante Quanta von Elektricität dauernd haften können. Damit ist eine der Grundvorstellungen der alten Elektricitätslehre auch für das Maxwell'sche System bestätigt, daſs nämlich von vorhandener Elektricität nur durch Leitung etwas verloren gehen kann, oder dadurch, daſs die eine Art der Elektricität von der entgegengesetzten neutralisirt wird.

§ 29. Weitere Umformung der Maxwell'schen Gleichungen in isolirenden Medien.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen untersuchen, welche sich auf unendlich kleine elektromagnetische Schwingungen im Aether oder in einer andern durchsichtigen Substanz beziehen, und zwar wollen wir uns dabei zunächst auf isolirende Substanzen beschränken.

Die Bewegungsgleichungen kann man in zwei verschiedenen Formen aufstellen, einmal indem man in ihnen die Kräfte, und das andere Mal die Momente benutzt.

Die Momente bezeichnen den geänderten Zustand im Aether; die Kräfte kann man zwar auch als Symptome dieses Zustandes betrachten, aber sie sind doch erst abgeleitete Gröfsen. William Thomson und Maxwell haben sie in ihren Darstellungen vorgezogen, weil sie als das unmittelbar wahrnehmbare Zeichen des veränderten Zustandes erscheinen.

Die letzte Form, in welche wir die Maxwell'schen Gleichungen gebracht hatten, war unsere Gleichungen (49). Wir wollen von ihnen hier ausgehen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) \\ \text{und} \qquad A \cdot \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Die analogen Gleichungen, welche die Veränderungen der elektrischen Momente ausdrücken, lauten, wenn wir $A = B$ setzen dürfen,

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) \\ \text{und} \qquad A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Da die beiden Gleichungssysteme dieselbe Form haben, so wollen wir die weitere Umformung nur an dem letzten System vornehmen. Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen nach t, so ergiebt sich:

$$A \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \tag{110}$$

oder, wenn wir die Ordnung der Differentiationen umkehren und berücksichtigen, dafs wenigstens im ruhenden Aether μ eine der Zeit nach constante Gröfse ist:

$$A \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right) \tag{110a}$$

Setzen wir nun die Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ aus den Gleichungen (108) ein, so erhalten wir

$$A \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)\right] - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = {} & \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)\right] \\ & - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (110\,\text{b})$$

Aus dieser Gleichung sind die magnetischen Gröſsen schon herausgeschafft, so daſs dieselbe nur eine Beziehung zwischen elektrischen Gröſsen ausdrückt. In ihr sind nun aber die dielektrischen und magnetischen Constanten in einer sehr verwickelten Form enthalten. Wir wollen sie daher zunächst unter der Voraussetzung weiter behandeln, daſs die Fortpflanzung, beziehlich der weitere Verlauf der betreffenden Bewegung in einem homogenen Felde geschieht, d. h. in einem Felde, in dessen ganzer Ausdehnung μ und ε die gleichen constanten Werthe besitzen, und dann erst später auf solche Felder übergehen, in denen verschiedene Werthe von μ und ε vorhanden sind. Bei den letzteren sind die praktisch wichtigen Fälle namentlich diejenigen, in denen in einer scharfen Grenze die Werthe von μ und ε plötzlich springen, wo also die betreffenden Räume mit zwei verschiedenen durchsichtigen Substanzen angefüllt sind.

Unter der von uns zunächst gemachten Voraussetzung kann man die Gröſsen μ und ε unter dem Differentiationszeichen wegnehmen und vor dasselbe setzen. Wir bekommen dann die Gleichung:

$$A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2}\right] - \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}\right] \quad (111)$$

und wenn wir zu beiden Gliedern der rechten Seite $\frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2}$ hinzufügen:

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = {} & \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2}\right] \\ & - \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\} \quad (111\,\text{a})$$

Mit den von uns schon angewendeten Bezeichnungen können wir nun diese Gleichung kürzer schreiben:

$$A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \tag{111b}$$

Weil sich nun in einem isotropen Medium die x-Componenten in keiner Weise von den y- und z-Componenten unterscheiden, so können wir die beiden anderen Gleichungen analog bilden, und erhalten demnach das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \\ A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{Y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \\ A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{Z} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Wir können nun aus diesen Gleichungen die Dichtigkeit σ, von der wir bereits wissen, daſs sie in den einzelnen Volumenelementen eines isolirenden Mediums nach der Zeit constant ist, eliminiren und die Gleichungen dadurch auf eine einfachere Form zurückführen. Zu diesem Zwecke ziehen wir je zwei Gleichungen von einander ab, nachdem wir jede nach derjenigen Coordinate differentiirt haben, welche in der anderen vorkommt, z. B. wenn wir die beiden ersten Gleichungen mit einander verbinden, die erste von ihnen nach y, die zweite nach x.

Es ergiebt sich dann das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \right) \\ A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \right) \\ \text{und} \qquad A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \right) \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Die weitere Fortführung dieser Untersuchung kommt also auf die Forderung hinaus, daſs wir Differentialgleichungen von der Form der Gleichungssysteme (112) und (113) lösen können. Es sind dieses aber dieselben Gleichungen, auf welche auch die elastische Lichttheorie, freilich in einer anderen Ableitung, geführt hat, und welche für die Wellenbewegung im Innern elastischer Medien überhaupt gelten. Denn bezeichnet man mit m die Volumdichte, mit σ die Volumdehnung und mit k und $2k(1+\theta)$ zwei gewisse elastische Constanten, so besteht dort für die in Richtung der Coordinataxen vor sich gehenden Verschiebungen ξ, η, ζ folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= k\,.\,\varDelta\,\xi + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\\
m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= k\,.\,\varDelta\,\eta + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\\
m\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= k\,.\,\varDelta\,\zeta + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

und aus diesem ergiebt sich durch eine der obigen völlig analoge Elimination von σ:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) &= k\,.\,\varDelta\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\\
m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) &= k\,.\,\varDelta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\\
m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) &= k\,.\,\varDelta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{115}$$

worin die in Klammern stehenden Ausdrücke gleich den doppelten Drehungswinkeln um die Coordinataxen sind.

Der Unterschied zwischen diesen Gleichungen (114) und (115) und den von uns abgeleiteten (112) und (113), worin die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ an Stelle der Verschiebungen ξ, η, ζ getreten sind, besteht nur in der anderen physikalischen Bedeutung der Constanten, und es wird sich später ergeben, daſs dieses für die Fortpflanzung der Oscillationen durch die Grenze zwischen verschiedenen durchsichtigen Medien von Bedeutung ist; denn die hier zu berücksichtigenden Grenzbedingungen fallen für die elektromagnetische Theorie anders aus, als für die elastische Undulationstheorie.

In einem Isolator hat die elektrische Dichtigkeit σ einen nach der Zeit constanten Werth, und bei der Aufsuchung der Gesetze für sehr schnelle Aenderungen, wie sie bei den Lichtschwingungen eintreten, kommt ein solcher nicht in Betracht. Vielmehr können wir nach den oben (§ 15) erörterten Eigenthümlichkeiten der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen das allgemeine Integral der Gleichungen (112) zusammensetzen aus einer Summe beliebiger Lösungen derselben Gleichungen, in denen $\sigma = 0$ gesetzt ist, nämlich

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu\,\varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{X}. \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu\,\varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{Y}. \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu\,\varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{Z}. \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

und je einer Lösung der Gleichungen, in denen σ eine gegebene Function der Coordinaten und unabhängig von der Zeit ist, wobei dann auch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ unabhängig von der Zeit erhalten werden können. Wenn wir nun Functionen gefunden haben, welche diesen vereinfachten Gleichungen (116) genügen, so werden, da die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden kann, auch die Differentialquotienten dieser Lösungen, soweit sie nicht Discontinuitäten erzeugen, ebenfalls Lösungen sein. Weil nun die Gleichungen homogen und linear sind und constante Coefficienten haben, so sind auch homogene lineare Functionen solcher Lösungen wiederum Lösungen derselben Gleichungen. Damit ist zugleich gegeben, dafs diese Lösungen für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in die Gleichungen (113) eingesetzt, diese ebenfalls erfüllen.

§ 30. Weitere Umformung der Maxwell'schen Gleichungen mit Berücksichtigung vorhandener Leiter.

Wenn Leitung vorhanden ist, so sind in den Gleichungen (112) noch gewisse Glieder einzusetzen, die wir früher (§ 25) schon kennen gelernt haben. Es mufste damals noch

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{X} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$$

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Y} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$$

und

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Z} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

hinzugefügt werden. Da in den Gleichungen nun aber nicht die ersten, sondern die zweiten Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ vorkommen, so treten in ihnen mit gleichzeitiger Berücksichtigung der anderen Coefficienten die Glieder

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$$

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$$

und

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

hinzu, so daſs wir also, wenn die betreffenden Medien elektrische Leitungsfähigkeit besitzen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu}\left[\Delta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right] \\
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu}\left[\Delta \mathfrak{Y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] \\
\text{und}\quad 4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu}\left[\Delta \mathfrak{Z} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (117)$$

erhalten.

Ebenso, wie wir im vorigen Paragraphen die Gleichungen (112) in (113) umgewandelt haben, können wir nun auch diese Gleichungen (117) auf eine Form bringen, in der σ eliminirt ist. Dieses geschieht hier durch die völlig gleiche rechnerische Operation wie damals, und wir erhalten dann das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] \\
= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \Delta\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] \\
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] \\
= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \Delta\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] \\
\text{und}\quad 4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right] \\
= \frac{1}{\mu \varepsilon} . \Delta\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Auſserdem aber folgt aus den Gleichungen (117), indem wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und dann alle addiren

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \qquad (118\text{a})$$

welche Gleichung sich übrigens auch aus der Gleichung (104) ergiebt. Das Integral der letzteren ist in (104c) schon gegeben.

§ 31. Beschränkung auf die Abhängigkeit von einer Coordinate. — Ebene Wellen.

Wir haben nun oben in §§ 7 und 8 schon ähnliche Gleichungen, wie die soeben abgeleiteten Gleichungen (116) behandelt, wo aber die zu suchende Gröfse nur von einer der Coordinaten abhängig war. In diesem Falle würde hier an Stelle von $\Delta \mathfrak{X}$ nur $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2}$ oder $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2}$ stehen bleiben. Es waren das die Gleichungen (13) und (22)

$$h \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

und

$$h \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

welche die einfachsten der verschiedenen Wellenbewegungen, nämlich ebene Wellen darstellten, so dafs also in den Differentialgleichungen (116), die wir hier gefunden haben, unter anderem die Bewegungen in ebenen Wellen enthalten sind, welche wir in §§ 6, 7 und 8 schon kennen gelernt haben. Wir fanden damals, dafs die Bewegung in der Richtung derjenigen Coordinate fortlief, von welcher die Gröfse der Verschiebung allein abhing, während gleiche Phasen in denjenigen Ebenen herrschten, die zu ihrer Fortpflanzungsrichtung senkrecht waren. In unseren Gleichungen (116) haben wir nun an Stelle der Verschiebungen elektrische (bez. magnetische) Polarisationen, und von diesen wissen wir bereits (§ 10), dafs sie sich stets in einer Richtung fortpflanzen, die senkrecht zu ihrer eigenen Richtung ist.

Nehmen wir nun an, dafs ihre Gröfse in einer auf der Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene in jedem Momente dieselbe ist, so werden, wenn z. B. die x-Richtung die Fortpflanzungsrichtung ist, nur Polarisationen nach y und z vorkommen können, so dafs wir also erhalten

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial x^2} \\ \text{und} \qquad A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Es war nun aber (§ 8) in unserer Gleichung (22)

$$h \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $\sqrt{\frac{k^2}{h}}$, so daſs also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen elektromagnetischen Wellen gleich $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon . \mu}}$ sein würde, was mit unserem früheren Ergebniſs (Gleichung (41) in § 12) in völligem Einklang steht.

§ 32. Die Strahlenrichtung als Fortpflanzungsrichtung maximaler Energiemengen.

Wir haben früher (§ 10) schon gesehen, daſs neben der elektrischen Polarisation immer noch eine magnetische Polarisation eintreten muſs, und zwar ist diese stets senkrecht zu der ersteren. Es ergab sich damals, daſs bei derartigen ebenen Wellen gleichzeitig immer zwei transversale Verschiebungen eintreten, Verschiebungen elektrischer und magnetischer Quanten, die senkrecht zu einander und senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stehen.

Die für diese beiden Verschiebungssysteme in § 11 abgeleiteten Gleichungen (30) und (31) lauteten

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

und

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Nun hatten wir angenommen, daſs die elektrischen und magnetischen Polarisationen proportional den sie erzeugenden Kräften seien, und zwar hatten wir nach den Gleichungen (32) und (33)

$$\mathfrak{X} = \frac{\varepsilon}{4\pi} . X$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon}{4\pi} . Y$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon}{4\pi} . Z$$

und

$$\mathfrak{L} = \frac{\mu}{4\pi} . L$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu}{4\pi} . M$$

$$\mathfrak{N} = \frac{\mu}{4\pi} . N$$

gesetzt. Wir können daher jene sechs Gleichungen umformen in:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Multipliciren wir nunmehr die erste dieser Gleichungen mit X, die zweite mit Y, die dritte mit Z, die vierte mit L, die fünfte mit M, die sechste mit N, addiren alle und integriren dann über den ganzen Raum, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} A . \iiint \Big[& \varepsilon \left(X \frac{\partial X}{\partial t} + Y \frac{\partial Y}{\partial t} + Z \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \\ & + \mu \left(L \frac{\partial L}{\partial t} + M \frac{\partial M}{\partial t} + N \frac{\partial N}{\partial t} \right) \Big] dx . dy . dz \\ = \iiint \Big\{ & \left[L \frac{\partial Y}{\partial z} + Y \frac{\partial L}{\partial z} - L \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial L}{\partial y} \right] \\ & + \left[M \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial X}{\partial z} - X \frac{\partial M}{\partial z} \right] \\ & + \left[N \frac{\partial X}{\partial y} + X \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial Y}{\partial x} - Y \frac{\partial N}{\partial x} \right] \Big\} dx . dy . dz \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Den Theil des Integrals der rechten Seite, welcher die erste eckige Klammer als Factor enthält, können wir schreiben:

$$\iiint \left[\frac{\partial}{\partial z}(LY) - \frac{\partial}{\partial y}(L\,Z)\right] dx\,.\,dy\,.\,dz$$

Da hierin vollständige Differentiale vorkommen, so können wir dieses Raumintegral nach den Methoden, die wir in § 23 kennen gelernt haben, in ein Oberflächenintegral umformen und erhalten dann:

$$\int \{(L\,Y)\,.\cos c - (L\,Z)\,.\cos b\}\,d\omega$$

worin b, bez. c den Winkel zwischen der auf dem Oberflächenelement $d\omega$ nach aufsen errichteten Normale n und der y-, bez. z-Axe der Coordinaten bezeichnet. Indem wir die anderen Glieder analog umformen, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A\,.\iiint\Big[&\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right) \\ &+ \mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\Big]\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz \\ &= \int\{(MZ - NY)\,.\cos a + (NX - LZ)\,.\cos b \\ &\qquad + (LY - MX)\,.\cos c\}\,d\omega \end{aligned}\right\}(122\text{a})$$

Wir bekommen also ein Oberflächenintegral, welches über die ganze Oberfläche des betreffenden Körpers auszudehnen wäre, eventuell sogar auch über die unendliche Oberfläche. Auf der linken Seite stehen die Differentialquotienten nach der Zeit von Quadraten der Kräfte; da nun die Grenzen des Integrals nicht von der Zeit abhängen, so können wir die vorgeschriebene Differentiation nach der Zeit, die unter dem Integralzeichen vollführt werden soll, als eine Differentiation des Integralwerthes auffassen, und daher das ganze Integral nach der Zeit differentiiren, nachdem wir unter dem Integralzeichen integrirt haben. Wir erhalten dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}A\frac{\partial}{\partial t}\iiint\{&\varepsilon\,[X^2+Y^2+Z^2]+\mu\,[L^2+M^2+N^2]\}\,dx\,.\,dy\,.\,dz \\ &= \int\{(MZ - NY)\cos a + (NX - LZ)\cos b \\ &\qquad + (LY - MX)\cos c\}\,d\omega \end{aligned}\right\}(122\text{b})$$

Diese Gleichung zeigt an, dafs die Summe der quadratischen Gröfsen im ganzen Raume der Zeit nach veränderlich ist, falls an den Grenzen dieses Raumes das Oberflächenintegral von Null verschieden ist.

Wenn wir uns nun an die oben in § 10 gegebene physikalische Erklärung der Entstehung und Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen erinnern, so ergiebt sich, daſs bei denselben die Gleichgewichtsstörung durch das Medium mit einer endlichen Geschwindigkeit fortläuft. Ist sie im Endlichen erregt worden, so gelangt die Welle erst in unendlicher Zeit an die unendlich entfernten Grenzen des Mediums; aber so lange die Welle dort noch nicht angekommen ist, also in jeder endlichen Zeit, ist in der unendlich entfernten Grenze des Mediums noch alles in Ruhe, und es sind dort keine elektrischen oder magnetischen Polarisationen vorhanden. Dann sind aber in diesen unendlich entfernten Theilen alle Kräfte, welche ja der Gröſse der Polarisationen proportional angenommen sind, gleich Null.

Es ist also nach Analogie der ebenen Wellen zu schlieſsen, daſs, so lange die erregte Bewegung noch nicht unendlich entfernte Theile des Raumes erreicht hat, d. h. während einer anfänglichen endlichen Zeit, die rechte Seite der Gleichung (122b), und damit auch die linke Seite, d. h. also der Differentialquotient des Raumintegrals nach der Zeit gleich Null ist. Das Integral selbst hat demnach während der Zeit wo die Bewegung ungestört weiter läuft, einen unveränderlichen Werth, und daraus werden wir schlieſsen dürfen, daſs die unter dem Integral stehende Summe in der That eine unveränderliche Gröſse repräsentirt, welche durch die Intensität der Bewegung gegeben ist. Sie stellt bis auf einen Zahlenfactor die Energie der elektrischen und magnetischen Bewegung dar, welche erst dann vermindert wird, wenn die Bewegung anfängt, über die Grenzen des Raumes hinaus zu laufen.

Sind leitungsfähige Theile vorhanden, so haben wir zu den linken Seiten der Gleichungen (120) noch je ein Glied hinzuzufügen, dessen Betrag wir ebenso, wie in §§ 25 und 30 ableiten können; nur sind hier die Kräfte an Stelle der Momente getreten.

Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A.\lambda.X + A.\varepsilon.\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi A.\lambda.Y + A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A.\lambda.Z + A.\varepsilon.\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Indem wir diese Gleichungen wieder mit X, bez. Y, bez. Z multipliciren und in derselben Weise wie oben mit den Gleichungen (121) zu einem Integral vereinigen, ergiebt sich nunmehr an Stelle der früheren Gleichungen (122a) und (122b), wenn wir berücksichtigen, dafs wir unter der gemachten Annahme für jede endliche Zeit die rechte Seite gleich Null setzen können:

$$A\iiint\left[4\pi\lambda.(X^2+Y^2+Z^2)+\varepsilon.\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+Y\frac{\partial Y}{\partial t}+Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right].dx.dy.dz=0$$

oder

$$\left.\begin{aligned}A\iiint 4\pi\lambda(X^2+Y^2+Z^2).dx.dy.dz+\frac{A}{2}.\frac{\partial}{\partial t}\iiint[\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\\ +\mu(L^2+M^2+N^2)].dx.dy.dz=0\end{aligned}\right\}(124)$$

In diesem Fall würde also der Differentialquotient nach der Zeit, genommen von dem Ausdruck, den wir, abgesehen von einem Zahlenfactor, als Energie aufgefafst haben, nicht gleich Null, die Energie selbst also nicht constant sein, sondern es würde dann auch, ehe noch die Bewegung die unendlich entfernten Grenzen erreicht hat, der negative Werth dieses Differentialquotienten gleich dem stets positiven Werthe des Integrals

$$8\pi\iiint\lambda(X^2+Y^2+Z^2).dx.dy.dz$$

sein. Dividiren wir den ersten Ausdruck durch 8π, so fällt auch in dem Differentialquotienten dieser Factor fort, und es wird dann also die auf die Zeiteinheit und Volumeinheit berechnete Verminderung gleich $\lambda(X^2+Y^2+Z^2)=1/\lambda(u^2+v^2+w^2)$, d. i. gleich dem Widerstande multiplicirt mit dem Quadrat der Stromstärke. Dies ist in der That, wie die Erfahrung lehrt, die Wärmemenge, die durch den elektrischen Strom in der Zeiteinheit und in der Volumeinheit erzeugt wird. Sie ist gleich dem Verlust der auf elektrischer und magnetischer Polarisation beruhender Energie, die wir demnach gleich

$$\frac{1}{8\pi}\iiint[\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)+\mu(L^2+M^2+N^2)]\,dx.dy.dz$$

setzen.

Wir wollen nunmehr wieder zu der Voraussetzung eines isolirenden Mediums zurückkehren, und uns die Oberflächenintegration in Gleichung (122b) nicht über eine unendlich entfernte, sondern über eine endliche Fläche ausgeführt denken.

Wenn wir dann in dem Oberflächenelement $d\omega$ durch die beiden

Resultanten der dort wirkenden magnetischen und elektrischen Kräfte eine Ebene legen, von dem Orte von $d\omega$ aus in ihren entsprechenden Richtungen und Längen diese beiden Resultanten eintragen und sie zu einem Dreieck schliefsen, so sind die Ausdrücke

$$MZ - NY$$
$$NX - LZ$$
und
$$LY - MX$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt der Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenflächen. Bildet nun die Normale ν dieses Dreiecks, dessen Inhalt wir mit D bezeichnen wollen, mit den Coordinatenrichtungen die Winkel α, β, γ so ist

$$\left.\begin{aligned} MZ - NY &= 2D.\cos\alpha \\ NX - LZ &= 2D.\cos\beta \\ LY - MX &= 2D.\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (125)$$

und

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (122b) ein, so wird auf der rechten Seite der mit dem Oberflächenelement $d\omega$ multiplicirte Factor gleich $D(\cos\alpha.\cos a + \cos\beta.\cos b + \cos\gamma.\cos c)$. Wird nun mit (n, ν) der Winkel zwischen der Normale n von $d\omega$ und der Normale ν des Dreiecks D bezeichnet, so ist

$$\cos(n, \nu) = \cos\alpha.\cos a + \cos\beta.\cos b + \cos\gamma.\cos c$$

Es ergiebt sich also, dafs der Factor von $d\omega$ gleich ist dem doppelten Flächeninhalte der Projection des Dreiecks D auf die Ebene von $d\omega$. Nun hängt aber am Orte von $d\omega$ die Gröfse des Dreiecks D nur von der Gröfse und Richtung der Kräfte ab, und die Projection wird am gröfsten werden auf eine Ebene, welche der Richtung der beiden Kraftresultanten, also dem Dreieck selbst, parallel ist. Es wird dann das Dreieck auf eine ihm parallele Ebene projicirt, und $\cos(n, \nu)$ hat den Werth 1. Wenn das Dreieck dagegen auf eine Ebene projicirt werden sollte, die darauf senkrecht steht, so würde die Projection Null werden.

Daraus ergiebt sich, dafs der Verlust an Energie der an einer bestimmten Stelle der Oberfläche stattfindet, und welcher durch den Factor von $d\omega$ auf der rechten Seite der Gleichung (122b) ausgedrückt ist, gemessen wird durch die Projection des zwischen den an dieser Stelle bestehenden Kräfteresultanten eingeschlossenen Dreiecks auf die Ebene der Oberfläche, und dafs diese Projection am gröfsten ist, und also am meisten Energie durch diese gegebene Stelle hindurch geht, wenn der betreffende Theil der Oberfläche sowohl der elektrischen wie der magnetischen Kraft parallel ist, diese beiden Kräfte also in die Tangentialebene der Oberfläche hineinfallen. Der Austritt der Energie aus einem Raume ist also am stärksten, wo die Bewegung an der Grenze auf eine Fläche auftrifft, die den beiden genannten Kräften selbst parallel liegt. Schon Gustav Kirchhoff hat in der älteren Undulationstheorie die Bestimmung der Fortpflanzungsrichtung der Wellen an einer bestimmten Stelle auf diese Beziehung zur Energie gegründet. Er betrachtet als Fortpflanzungsrichtung der Wellen diejenige Richtung, nach welcher die meiste Energie durch die Grenze hindurch geht, so dafs man also hiernach für die elektromagnetische Theorie behaupten kann: Die Fortpflanzungsrichtung der Energie steht in isotropen Medien senkrecht sowohl auf der Richtung der magnetischen Kraft, als auch auf der Richtung der elektrischen Kraft, die im Verlaufe der Bewegung eintreten.

Das Quantum Energie, was in dieser Weise sich fortpflanzt, wird an jeder Stelle gemessen durch den Inhalt jenes zwischen den Kräfteresultanten eingeschlossenen Dreiecks. Wenn man diesen nun als das halbe Product aus der Höhe und Grundlinie berechnet, so hat man dabei zu multipliciren entweder die elektrische Kraft mit derjenigen Componente der magnetischen Kraft, welche senkrecht zu der Richtung der elektrischen Kraft steht, oder die magnetische Kraft mit derjenigen Componente der elektrischen Kraft, welche senkrecht zur magnetischen Kraft steht, so dafs also auf das Resultat nur solche Componenten der beiden Arten von Kräften, der magnetischen und elektrischen Kräfte, Einflufs haben, welche auf einander und gleichzeitig auf der Fortpflanzungsrichtung der Energie senkrecht stehen. Wir haben demnach überall im Raume, soweit sich diese Bewegungen fortpflanzen, die Richtungen der elektrischen Kraft und der magnetischen Kraft und die Fortpflanzungsrichtung der Energie, die wir in ihrem allgemeinsten Sinne nehmen, in den isotropen Körpern als drei nothwendig auf einander senkrecht stehende Richtungen zu unterscheiden.