Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1897

Dritter Theil. Kugelförmige Wellen

Dritter Theil.

Kugelförmige Wellen.

Erster Abschnitt.

Integrale der Wellengleichung.

§ 33. Die einfachste Form der Kugelwellen.

Nachdem wir im Vorhergehenden die ebenen Transversalwellen als besonderen Fall der Lösung unserer Differentialgleichungen (113) und (116), die wir in die „Wellengleichung" genannte Form:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 . \Delta \varphi \tag{126}$$

zusammenfassen können, gefunden haben, wollen wir nunmehr weniger specielle Formen der Lösung suchen, und zwar solche, welche uns erlauben, die allgemeinen Integrale daraus zusammenzusetzen. Wir finden sie in den sich kugelförmig ausbreitenden Wellen, welche von einem bestimmten Erregungspunkte aus in den Raum hinein laufen.

Um die Gesetze derselben kennen zu lernen, wollen wir voraussetzen, dafs die Function φ, welche in der allgemeinen Form (126) unserer Differentialgleichungen vorkommt, aufser von der Zeit nur von dem Radius vector r abhängig sei, der von irgend einem festen Punkte, den wir zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen wollen, gerechnet wird. Es stellt dann also φ eine Form der Bewegung dar, welche nach allen Richtungen des Raumes sich gleichmässig ausbreitet.

Für die Function $r . \varphi$ wollen wir ein besonderes Zeichen, nämlich ψ einführen, welches also ebenfalls eine Function von r und t bezeichen wird. Dann ist

$$\varphi = \frac{\psi}{r} \tag{127}$$

Wir haben nun die Differentialquotienten zu bilden, welche in der Gleichung (126) vorkommen. Legen wir den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems $x y z$ in denjenigen Punkt, von dem aus wir r rechnen, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \cdot \frac{x}{r}$$

$$= \left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) . x \tag{127a}$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$$

$$= -\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{3\,\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) \tag{127b}$$

Die zweiten Differentialquotienten nach den anderen Coordinaten werden analog gebildet, indem an Stelle von x^2 jetzt y^2 bez. z^2 tritt. Wir können daher gleich die Summe der drei zweiten Differentialquotienten bilden und erhalten:

$$\Delta \varphi = -\frac{3\,\psi}{r^3} + \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}\left(\frac{3\,\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= -\frac{3\,\psi}{r^3} + \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + r . \left(\frac{3\,\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{128}$$

Da in dem Werthe von φ nur der Zähler von der Zeit abhängt, so ist der zweite Differentialquotient nach der Zeit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{129}$$

Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (126) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{130}$$

Ist r von Null verschieden, so können wir auf beiden Seiten mit r multipliciren und erhalten

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{131}$$

In jedem Falle bedarf es nun noch einer besonderen Untersuchung, ob diese Gleichung auch im Punkte $r = 0$ gültig ist.

Diese Gleichung (131) hat dieselbe Form, wie wir sie früher für die ebenen Wellen gefunden haben. Nur ist hier der Radius r an Stelle einer der Coordinaten x, y oder z getreten. Auf der einen Seite steht der zweite Differentialquotient nach der Zeit, auf der anderen der zweite Differentialquotient nach einer Länge, und wir können aus unseren früheren Ergebnissen schliefsen, dafs wir eine Lösung dieser Gleichung erhalten, wenn wir ψ gleich einer Function von $r + at$ oder $r - at$ setzen, also

$$\psi = F_{(r \pm at)} \tag{132}$$

und daraus folgt:

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot F_{(r \pm at)} \tag{132a}$$

Nun würde eine Function von $r - at$ Wellen anzeigen, welche in der Richtung von r mit der Geschwindigkeit a fortlaufen, so dafs also diese Lösung Wellen darstellt, welche in der Richtung der wachsenden Werthe von r, d. h. nach allen Seiten vom Erregungspunkte aus sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Soweit der Factor $F_{(r - at)}$ in Betracht kommt, würden die Phasenzustände in der weiterlaufenden Welle sich unverändert wiederholen; nun wird aber der zweite Factor, $\frac{1}{r}$, kleiner und kleiner, je gröfser r wird, so dafs wir es also mit Wellen zu thun haben, die immer kleinere Amplitude bekommen, je weiter sie von dem Erregungspunkte sich entfernen, und zwar nimmt ihre Amplitude umgekehrt proportional r ab.

Andererseits würden Functionen von $r + at$, welche ja auch zulässig sind, Wellen anzeigen, die von gröfseren Werthen von r gegen den Mittelpunkt, d. h. gegen den Punkt $r = 0$ hinlaufen und schliefslich im Mittelpunkte ankommen.

In diesem Punkte aber ist, wie wir schon wissen, unsere Lösung nicht ohne weiteres gültig. Wir werden untersuchen müssen, in welcher Art die Wellen dort unendlich werden, und dazu wird nöthig sein, dafs wir zunächst die Form der Wellen für sehr kleine Werthe von r untersuchen. Wenn sich dann zeigt, dafs für diese die Elongationen endlich bleiben, dann werden wir dies auch für $r = 0$ schliefsen dürfen. Es ist sofort ersichtlich, dafs ein einfaches System von Wellen, die etwa gegen den Mittelpunkt zusammenlaufen, allein hier keinen endlichen Werth geben kann; denn der Werth von $F_{(r \pm at)}$ kann nicht in demselben Mafse dauernd verschwindend klein werden, wie r. Wir werden aber später finden, dafs, wenn zwei Wellensysteme bestehen, von denen das eine von dem Mittelpunkte ausläuft, das andere in den Mittelpunkt hinein, in der That continuirliche und endliche Zustände im Mittelpunkt eintreten können.

§ 34. Zusammengesetzte Formen der Kugelwellen.

Die Differentialgleichung (126), von der wir ausgegangen sind, ist linear und homogen. Da in ihr die zweiten Differentialquotienten von φ sowohl nach den Coordinaten als nach der Zeit vorkommen, so ist eine Lösung nur dann für uns von Werth, wenn diese Differentialquotienten gebildet werden können und einen physikalischen Sinn haben. Werden sie an einer bestimmten Stelle unendlich, so zeigt das im Allgemeinen eine Discontinuität der ersten Differentialquotienten an, aber wir würden dieses doch immer noch als Uebergang aus einer continuirlichen Function betrachten können. Es kann ja z. B. eine continuirliche Function, die wir uns in Fig. 19 als Ordinaten aufgetragen denken, irgendwo eine Ecke bilden. Dann würde an dieser Stelle der erste Differentialquotient einen Sprung machen und der zweite Differentialquotient würde keinen Sinn haben. Man würde aber untersuchen müssen, ob man die Ecke als einen Uebergang aus einer immer mehr der Ecke sich nähernden Rundung betrachten darf. Ist dies möglich, so kann man solche Fälle oftmals noch zulassen, wenn auch im Allgemeinen die zweiten Differentialquotienten endlich sein müssen. Wenn aber die Function selbst an einer Stelle eine plötzliche Aenderung erleidet, Fig. 20, so würde dort schon der erste Differentialquotient unendlich werden, und der zweite gar nicht mehr ermittelt werden können. In diesem Falle könnte unsere Differentialgleichung nicht angewendet werden. Wir werden später sehen, dafs man die Flächen, an denen die Differentialquotienten unendlich werden, als Grenzflächen behandeln und dadurch die Bedingung der Continuität der Function φ umgehen kann. Abgesehen

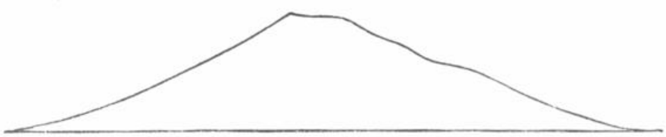

Fig. 19.

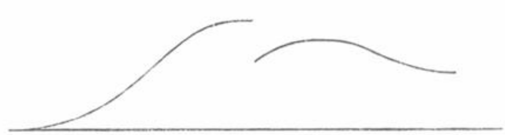

Fig. 20.

von diesen Einschränkungen kann die Function φ und damit auch die Function F vollkommen willkürlich sein.

Wenn man nun eine solche homogene lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten hat, so kann man neue Differentialgleichungen daraus bilden, indem man sie nach x oder nach y oder z oder t differentiirt. Differentiiren wir z. B. nach x, so können wir die dadurch entstehende Differentialgleichung, da bei continuirlichen Functionen die Ordnung der Differentiationen vertauscht werden kann, schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = a^2 . \Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{133}$$

Es ist dann $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ auch eine Function, welche unserer Differentialgleichung (126) genügt, und dasselbe gilt von den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Da diese nun Lösungen unserer Differentialgleichung sind, so kann man sie wieder nach x, y, z, t differentiiren, und bekommt dadurch die zweiten Differentialquotienten als weitere Lösungen. In dieser Weise kann man zu beliebig hohen Differentialquotienten fortschreiten. Dabei ist nur darauf zu achten, dass von den Differentialquotienten, die man als Lösungen der Gleichung nimmt, auch immer noch der nächste und zweitnächste Differentialquotient gebildet werden kann. In der Beziehung ist also das Verfahren beschränkt, und wenn wir eine Function haben, welche nach irgend einer Anzahl von Differentiationen discontinuirliche Differentialquotienten giebt, so würde darin eine Grenze liegen für die Reihe der Differentialquotienten, die wir als neue Lösungen der Differentialgleichung für F benutzen können.

Werden die Differentialquotienten von φ als Lösungen verwendet, so besteht für die Amplitude der Wellen ausser der Abhängigkeit von der Grösse des Radius vector noch eine andere Abhängigkeit. Für den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ wird der Cosinus des Winkels α zwischen r und der Richtung der x-Axe überall als Factor auftreten; denn wenn wir in Gleichung (127a) x durch seinen Werth $r . \cos \alpha$ ersetzen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) . \cos \alpha \tag{134}$$

Nun ist aber der Werth von $\cos \alpha$ auf der einen Seite der Kugel positiv, auf der anderen negativ, und dazwischen liegt eine Aequatorialzone, in welcher er gleich Null ist. Es würde sich also ergeben, daſs auf der einen Kugelhälfte stets die entgegengesetzten Bewegungen stattfinden, wie auf der anderen, und daſs beide Kugelhälften durch eine Ebene getrennt sind, für welche der Werth von φ gleich Null ist, also keine Bewegung stattfindet. Die Amplitude nimmt von den Polen, d. h. den beiden Schnittpunkten der x-Axe mit der Kugelfläche nach der Aequatorialebene hin stetig ab.

Nehmen wir als Lösung den zweiten Differentialquotienten von φ nach x, dann erhalten wir aus Gleichung (127b), indem wir wieder für x den Werth $r . \cos \alpha$ einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \Big(\frac{3\psi}{r^3} - \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \Big) . \cos^2 \alpha \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Wir haben also erstens ein nur von r abhängiges Glied, welches eine Bewegung darstellt, die sich nach allen Richtungen gleichmäſsig fortpflanzt, und ein zweites Glied, welches mit $\cos^2 \alpha$ multiplicirt ist, also eine Bewegung repräsentirt, die sowohl in Richtung der positiven als auch der negativen x-Axe positive Werthe hat, dazwischen liegt aber eine Aequatorialzone, in der $\cos^2 \alpha = 0$ wird, und die von diesem Factor freien Glieder allein übrig bleiben. Durch die Lösung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ wird demnach eine Bewegung angezeigt, die als aus zwei Bewegungen superponirt angesehen werden kann: die eine Bewegung läuft nach allen Richtungen gleichmässig aus, die andere aber ist Null in der yz-Ebene und nimmt nach beiden Polen hin symmetrisch zu; in der Aequatorialzone herrscht die erste Art der Bewegung vor, gegen beide Pole hin überwiegt dagegen für gröſsere Werthe von r die zweite Form.

Man kann nun, indem man in dieser Weise weitergeht und höhere Differentialquotienten bildet, und zwar bald nach x, bald nach y u. s. w. zu immer zusammengesetzteren Formen kommen. Wenn wir z. B. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ bilden, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{x . y}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big(- \frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big) \tag{136}$$

Bezeichnen wir mit α ebenso wie früher die Poldistanz und mit θ den Winkel zwischen dem Meridian des betreffenden Punktes und der xy-Ebene, also gleichsam die geographische Länge auf der Wellenfläche, so ist

$$x \,.\, y = r^2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\theta$$

und es würde dadurch eine andere, viel verwickeltere Vertheilung der Kugelwellen angezeigt sein. Es ist nun leicht zu erkennen, dafs bei jeder weiteren Differentiation die Factoren immer höhere Dimension bekommen, und wir immer complicirtere Functionen der Winkel erhalten.

Abnahme der Amplitude bei wachsendem r. Die Function ψ behält gleich grosse Phasen, während diese für die Wellenbewegung selbst, welche ja durch φ dargestellt wird, abnehmen; im einfachsten Fall hatten wir gefunden wie $\frac{1}{r}$. Wenn wir aber $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ als Lösung nahmen, so erhielten wir (Gleichung 134):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r}\right] . \cos\alpha$$

Die Bewegung setzt sich also zusammen aus zwei Gliedern, von denen das erste abnimmt wie $\frac{1}{r}$, das andere aber schneller, nämlich wie $\frac{1}{r^2}$. Ist der zweite Differentialquotient von φ, also $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, die Lösung, so haben wir (Gleichung 135) r^3, r^2 und r als Nenner der verschiedenen Glieder, und es ergiebt sich ebenso wie vorhin, dafs der höchste Differentialquotient von ψ mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt ist. Dieses ist nun auch bei weiteren Differentiationen der Fall; denn das letzte Glied wird immer nur dadurch verändert, dafs die Differentiation an der Gröfse ψ selbst auszuführen ist, wodurch also immer höhere Differentialquotienten von ψ hinein kommen, während der Factor, der von r allein abhängig ist, durch diese letzte Differentiation nicht verändert wird. Es kann dieses Glied aber mit soviel Winkelfunctionen $\cos\alpha$, oder $\sin\alpha \,.\, \cos\theta$, beziehlich $\sin\alpha \,.\, \sin\theta$ multiplicirt sein, als der Grad des Differentialquotienten beträgt, so dafs für dieses höchste Glied eine immer mannigfachere Theilung der Kugeloberfläche eintritt. Es ist aber stets dasjenige, gegen welches in gröfserer Entfernung die anderen Glieder, welche höhere Potenzen von r im Nenner haben, und in verhältnifsmäfsig stärkerer Weise abnehmen, verschwinden.

Im Allgemeinen kann also durch eine Zusammensetzung solcher verschiedenen Formen bewirkt werden, dafs man in sehr grofser

Entfernung ungemein mannigfaltige Theilungen der Kugeloberfläche in Felder mit abwechselnd positiven und negativen radialen oder auch tangentialen Bewegungen erhalten kann. Wir wollen eine solche Winkelfunction n^{ten} Grades mit P_n bezeichen; dann ist $\frac{1}{r} \cdot P_n \cdot \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n}$ die allgemeine Form des in sehr grossen Entfernungen allein stehen bleibenden Gliedes.

Bei sehr grossen Entfernungen werden nun aber Stücke der Kugelfläche von endlicher Ausdehnung schliefslich als eben betrachtet werden können, und es läfst sich durch die Entwickelung dieser Winkelfunction P_n, welche in der Lehre von den sogenannten Kugelfunctionen als ein Theil der Potentialtheorie behandelt zu werden pflegt, zeigen, dafs in sehr grofser Entfernung in einer gegebenen begrenzten Ebene alle möglichen Vertheilungen von positiven und negativen Wellenamplituden durch eine solche von einem entfernten Mittelpunkte ausgehende Wellenbewegung entstehen können.

Während man also diese Glieder mit höheren Potenzen von r in grofser Entfernung vernachlässigen kann, müssen sie berücksichtigt werden, wenn man die Bewegung in der Nähe des Mittelpunktes, von dem die Welle ausgegangen ist, untersuchen will.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen kugelförmigen Wellen.

§ 35. Die allgemeinen Gleichungen für gleichzeitig bestehende elektrische und magnetische Wellensysteme.

Wir haben bisher Lösungen für φ gesucht, ohne weiter nach ihrer physikalischen Bedeutung zu fragen und den Zusammenhang zu berücksichtigen, welchen verschiedene Functionen dieser Art unter einander haben müssen.

Nach den von uns gemachten Festsetzungen können sowohl die elektrischen Kräfte und Momente, als auch die magnetischen durch die Function φ dargestellt werden. Es besteht nun aber ein bestimmter Zusammenhang zwischen den magnetischen und elektrischen Oscillationen, den wir noch auffinden müssen, und wir wollen nunmehr untersuchen, wie beide neben einander vor sich gehen. Zu diesem Zwecke ist es nothwendig, auf unsere ersten Gleichungen, die MAXWELL'schen Grundgleichungen, zurückzugreifen. Dabei wollen wir voraussetzen, dafs innerhalb desjenigen Raumes, für den wir unsere Bewegungsgleichungen bilden, die dielektrische sowohl wie die magnetische Constante überall den gleichen Werth habe und auch unabhängig von den Richtungen sei, d. h. wir wollen die Fortpflanzung der Bewegung in einem mit homogener und isotroper Substanz gefüllten Raume untersuchen. Dann können wir in den Gleichungen (49) ε als constanten Factor vor die Differentialquotienten setzen und erhalten

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y} \\ A\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} \\ \text{und}\quad A\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Die analoge Reihe der Gleichungen lautet unter der entsprechenden Voraussetzung, dafs μ eine Constante ist,

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z} \\ A\mu\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x} \\ \text{und}\quad A\mu\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Diese Gleichungen sprechen also bestimmte Beziehungen zwischen den magnetischen und elektrischen Momenten aus.

Wir wollen nun einmal annehmen, dafs wir die elektrischen Gröfsen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gefunden hätten. Wir wissen dann schon, dafs

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] = 0 \tag{139}$$

oder dafs der Werth dieser Summe eine der Zeit nach constante Gröfse ist; das Letztere zeigt an, dafs ein bestimmtes Quantum fest haftender Elektricität an einer bestimmten Stelle des isolirenden Raumes liegt und an den Aetherschwingungen nicht weiter Theil nimmt, und wir uns also bei der Untersuchung der Schwingungen nicht weiter darum zu bekümmern brauchen. Wir können daher stets unsere Schlüsse über die Theorie der Lichtbewegung unter der Voraussetzung machen, dafs

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0 \tag{139a}$$

ist; denn was weiter hinzu kommen würde, wäre nur eine von der Zeit unabhängige Function der Coordinaten, die keinen Einflufs auf die Oscillationen hat.

Als wir in § 16 Lösungen für die Maxwell'schen Gleichungen suchten, fanden wir, dafs sich die Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ausdrücken liefsen in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} \\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

worin U, V, W und ψ Functionen der Coordinaten bezeichneten, die wir später aber auch als Functionen der Zeit betrachten wollten. Wir hatten damals gesehen, dafs wir, ohne die Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu verändern, diese Functionen U, V, W auch so bestimmen können, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ist. Dann hatten wir schon gesehen, dafs unter diesen Umständen

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\Delta\psi$$

war, und wenn also festgesetzt wird, dafs die Gleichung (139a) erfüllt ist, so ergiebt sich daraus unmittelbar, dafs

$$\Delta\psi = 0 \tag{141}$$

ist. Wir haben nun auch schon gesehen, dafs, wenn diese Gleichung ausnahmslos gültig ist, und ψ in unendlicher Entfernung wie $\frac{1}{r}$ abnimmt, die Function ψ im ganzen Raume gleich Null sein mufs. Es ist somit

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Wenn wir also ψ in den Werthen für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ (Gleichungen 140) ganz weglassen, so ist dadurch in der That bedingt, daſs die wahre Dichtigkeit der Elektricität in dem ganzen Raume gleich Null ist; wie sich sofort ergiebt, wenn wir aus den Gleichungen (142) die Werthe für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ in die Gleichung (139a) einsetzen.

Ebenso wie früher (Gleichung 53) ist dann auch hier

$$A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - \Delta U. \quad (143)$$

Da nun die elektrischen Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Wellengleichung erfüllen sollen, so wird dieses am einfachsten erreicht, indem jeder der Factoren U, V, W der Wellengleichung entspricht. Die andere Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

steht mit der Wellengleichung nicht im Widerspruch, sondern wird gleichzeitig erfüllt werden. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 . \Delta U \quad (144)$$

und dadurch verwandelt sich Gleichung (143) in:

$$A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (143a)$$

Andererseits hatten wir schon gefunden (Gleichung 41), daſs, wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bezeichnet,

$$\frac{1}{a^2} = A^2 . \mu . \varepsilon$$

ist, und dadurch ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (143b)$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\mathfrak{L} = - A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial U}{\partial t} + \Phi_{(x, y, z)} \quad (143c)$$

worin $\Phi_{(x,\,y,\,z)}$ eine beliebige Function der Coordinaten bezeichnet. Es würde aber ein von Null verschiedener Werth von $\Phi_{(x,\,y,\,z)}$ nur anzeigen, dafs eine gewisse constante Magnetisirung vorhanden ist. Berücksichtigen wir nun ausschliefslich die veränderlichen Momente, so sind diese vollständig dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= -A\,.\,\mu\,.\,\varepsilon\,.\,\frac{\partial U}{\partial t}\\
\mathfrak{M} &= -A\,.\,\mu\,.\,\varepsilon\,.\,\frac{\partial V}{\partial t}\\
\mathfrak{N} &= -A\,.\,\mu\,.\,\varepsilon\,.\,\frac{\partial W}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Wenn wir also unsere Gröfsen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in der Form der Gleichungen (142) darstellen und passende Functionen U, V, W gefunden haben, dann bekommen wir die zugehörigen magnetischen Momente unmittelbar dadurch, dafs wir sie den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten von U, V, W, mit $-A\,.\,\mu\,.\,\varepsilon$ multiplicirt, gleichsetzen, so dafs also auf diese Weise die zu den veränderlichen elektrischen Momenten gehörigen magnetischen Momente ebenfalls gegeben sind.

§ 36. Die einfachste Form gleichzeitig vorhandener elektrischer und magnetischer Wellen.

Nunmehr gehen wir zur Untersuchung derjenigen Wellenformen über, welche bestehen, wenn sich gleichzeitig elektrische und magnetische Oscillationen von demselben Mittelpunkt aus verbreiten.

Wir wollen zu diesem Zwecke möglichst einfache Annahmen über U, V und W machen, wobei wir natürlich berücksichtigen müssen, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

sein mufs. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir

$$\left.\begin{aligned}
U &= 0\\
V &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}\\
W &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

setzen, wo φ eine Function bezeichnet, die der Wellengleichung (126)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2\,.\,\Delta\,\varphi$$

genügt und nur von t und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängen soll. Dann ergiebt sich zufolge unserer Gleichungen (142)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

und ferner zufolge unserer Gleichungen (145):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Führen wir die Differentiationen aus, so erhalten wir für die elektrischen Momente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{2}{r}.\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{y^2 + z^2}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -x.\frac{y}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -x.\frac{z}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \end{aligned}\right\} \tag{147 a}$$

und für die magnetischen Momente

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\frac{z}{r}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\frac{y}{r}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{148 a}$$

Für die magnetischen Schwingungen folgt hieraus:

$$\mathfrak{L}.x + \mathfrak{M}.y + \mathfrak{N}.z = 0 \tag{149}$$

oder

$$\mathfrak{M}.y + \mathfrak{N}.z = 0 \tag{149 a}$$

Die Richtung der magnetischen Oscillationen steht also senkrecht auf dem Radius r. Da aber keine Componente vorhanden ist, welche in die Richtung der x-Axe fällt, so geschehen die Verschiebungen in Richtung der Parallelkreise.

Ihre Gröfse ist gegeben durch den Werth

$$\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = A \,.\, \mu \,.\, \varepsilon \,.\, \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \,.\, \partial t} \tag{150}$$

Nun ist aber $\sqrt{y^2 + z^2}$ gleich dem Radius des betreffenden Parallelkreises, so dafs also die Oscillationen in einer gemeinsamen Winkelverschiebung der ganzen mit Nord- bez. Südmagnetismus belegten Kugelschale um die x-Axe bestehen. Ihre lineare Gröfse ist demnach an den Polen gleich Null und erreicht am Aequator ein Maximum.

Aus den Werthen für die elektrischen und magnetischen Momente (Gleichungen 147a und 148a) ergiebt sich ferner:

$$\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} \,.\, \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} \,.\, \mathfrak{N} = 0 \tag{151}$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs die Richtungen der magnetischen und elektrischen Oscillationen bei der Lichtbewegung auf einander senkrecht sind.

Wenn wir nun in dem Werthe von $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ zunächst nur das zweite Glied berücksichtigen und

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon} = \frac{y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \tag{152}$$

setzen, so besteht die Gleichung

$$\mathfrak{X}_1 \,.\, \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} \,.\, \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} \,.\, \mathfrak{N} = 0\,, \tag{153}$$

aus welcher hervorgeht, dafs die Resultante der Componenten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, die also nur einen Theil der gesammten elektrischen Verschiebung bildet, auf der Richtung der magnetischen Oscillationen, den Parallelkreisen, senkrecht steht. Ferner ist aber

$$x \,.\, \mathfrak{X}_1 + y \,.\, \mathfrak{Y} + z \,.\, \mathfrak{Z} = 0 \tag{154}$$

so dafs jene Resultante also auch auf dem Radius senkrecht steht. Beides ist aber zugleich nur möglich, wenn ihre Richtung mit der Richtung der Meridiane zusammenfällt.

Die Gröfse dieser Verschiebung ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\mathfrak{X}_1{}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} &= \frac{\sqrt{y^4 + 2\,z^2\,y^2 + z^4 + x^2\,y^2 + x^2\,z^2}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\
&= \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2)}{r^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\
&= \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)
\end{aligned} \tag{155}$$

Sie ist demnach auf derselben Kugelschale an jeder Stelle der dort vorhandenen magnetischen Verschiebung proportional.

Das bisher in dem Werthe von $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ nicht berücksichtigte Glied $\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ stellt eine auf der ganzen Kugelschale gleichmäfsige Verschiebung in der x-Richtung dar, so dafs sich also die gesammte elektrische Verschiebung zusammensetzt aus

1. einer Verschiebung in der Richtung der Meridiane, deren Gröfse an jeder Stelle dem Lothe auf die Axe (nach unserer Annahme auf die x-Axe) proportional ist, und

2. einer Verschiebung in der Richtung der Axe, die auf der ganzen Kugelfläche gleiche Gröfse hat.

Wegen der Symmetrie der Gleichungen können wir nun die Gleichung, welche wir bisher auf die elektrischen Verschiebungen angewendet haben, auch auf die magnetischen Verschiebungen übertragen und umgekehrt. Es würden dann die elektrischen Schwingungen in Parallelkreisen verlaufen, und die magnetischen Schwingungen theils in Richtung der Meridiane geschehen, theils der x-Axe parallel sein.

Die beiden Bewegungsformen, welche hier stets mit einander verbunden auftreten, kommen bei den elastischen Schwingungen getrennt von einander vor. Wenn man bei diesen die einfachsten Formen kugelförmig sich ausbreitender Wellen sucht, so findet man erstens, dafs jede Kugelschicht, als wäre sie vollkommen starr, kreisende Bewegungen als Ganzes um eine beliebige Axe ausführen kann. Zweitens ist eine Bewegung in Richtung der Meridiane möglich; aber da hierbei eine Bewegung nach einem Pol hin stattfindet, wird dort die Masse der elastischen Substanz zusammengedrängt und, indem diese ausweicht, entsteht gleichzeitig eine Bewegung in Richtung der Axe.

§ 37. Elektromagnetische Kugelwellen mit sehr grossem Radius.

Die bisher besprochenen Formen der elektrischen und magnetischen Schwingungen beziehen sich auf den Fall, dafs der Radius der Kugelschale einen endlichen Werth hat.

Indem wir nun zu Kugeln mit sehr grofsem Radius übergehen, wollen wir zunächst die Winkel zwischen dem Radius r und der positiven Richtung der Coordinataxen einführen. Wir bezeichnen sie mit α, β und γ; dann ist:

und

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{r}\\ \cos\beta &= \frac{y}{r}\\ \cos\gamma &= \frac{z}{r}\end{aligned}\right\}\quad(156)$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhalten unsere Gleichungen (148a) die Form

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L} &= 0\\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\cos\gamma.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t}\\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\cos\beta.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(157)$$

und unsere Gleichungen (147a)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{2}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r} + (\cos^2\beta + \cos^2\gamma).r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\beta.r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\gamma.r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).\end{aligned}\right\}\quad(158)$$

Wir haben nun oben in § 33 gesehen, dafs bei Kugelwellen

$$\varphi = \frac{1}{r}.\psi$$

zu setzen ist, wo ψ eine beliebige Function von $r \pm a t$ bezeichnet.

Benutzen wir diesen Werth und führen die Differentiationen etwas weiter aus, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L} &= 0.\\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\cos\gamma.\left(-\frac{1}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}\right)\\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\cos\beta.\left(-\frac{1}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}\right)\end{aligned}\right\}\quad(157\text{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= -\frac{2}{r^3}.\psi + \frac{2}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r} + (\cos^2\beta + \cos^2\gamma)\left(\frac{3}{r^3}.\psi - \frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\beta.\left(\frac{3}{r^3}.\psi - \frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\gamma.\left(\frac{3}{r^3}.\psi - \frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(158\text{a})$$

Wird der Radius der Kugel nun sehr grofs, so brauchen wir nur diejenigen Glieder, welche den Factor $\frac{1}{r}$ enthalten, zu berücksichtigen, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\cos\gamma.\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} \\ \mathfrak{N} &= \quad A.\mu.\varepsilon.\cos\beta.\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (157\text{b})$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= (\cos^2\beta + \cos^2\gamma).\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\beta.\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\gamma.\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \end{aligned}\right\} \quad (158\text{b})$$

zu setzen ist.

Indem wir in diese Gleichungen (157b und 158b) nun wiederum die Werthe für die Winkelfunction (Gleichungen 156) einführen, ergiebt sich aus einer der im vorigen Paragraphen angestellten völlig analogen Discussion, dafs die Resultante der magnetischen Verschiebungen in die Richtung der Parallelkreise und diejenige der elektrischen in die Richtung der Meridiane fällt. Bei den letzteren ist also durch den Uebergang zu unendlich grofsen Kugelschalen die Componente weggefallen, welche auf der ganzen Kugelschale dieselbe Gröfse hat und der x-Axe parallel ist.

Es vollziehen sich demnach hier alle Oscillationen in der Oberfläche der Kugelschale, und ihre Gröfse ist der Entfernung r von ihrem Erregungspunkt umgekehrt proportional.

In unendlich grofsen Entfernungen gehen nun begrenzte Kugelstücke in Ebenen über, und wir haben dann ebene Wellen, welche zwei senkrecht zu einander und senkrecht zur Richtung ihrer Fortpflanzung vor sich gehende Schwingungen enthalten. Es ist also die Möglichkeit polarisirter Strahlen durch diese einfachste Form der Bewegung bereits gegeben.

Dritter Abschnitt.

Das Huyghens'sche Princip.

§ 38. Die Bedeutung des Huyghens'schen Princips.

Wenn der Aether aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt ist, oder wenn, wie bei den Lichtschwingungen, in ihm die magnetischen und elektrischen Momente verändert sind, so wird dieser veränderte Zustand sich irgendwie ausgleichen und damit weitergehende Störungen verursachen, deren Verlauf von dem Anfangszustande abhängt. Denken wir uns nun andererseits den Aether begrenzt, und nehmen wir an, dafs an irgend welchen Grenzflächen, Grenzlinien oder Grenzpunkten während der Zeit, wo jene Bewegung abläuft, noch äufsere Einwirkungen auf die Grenzflächen stattfinden, so werden diese weitere Abänderungen der bestehenden Bewegung hervorbringen. Alle diese Einwirkungen und die durch sie verursachten Bewegungen können sich nun, wie schon früher hervorgehoben wurde, superponiren, weil die Differentialgleichungen, die sich auf die hier bestehende Bewegung beziehen, linear und homogen sind.

Wir müssen zunächst zeigen, dafs die Integrationsformen, welche wir bisher gefunden haben, wirklich auch dem allgemeinsten Falle genügen, und dafs wir eine beliebige Wellenbewegung, welche in einem Raume vor sich geht, allgemein als Superposition einer Reihe von kugeligen Wellen betrachten können, deren jede von einem Mittelpunkte ausgeht, beziehlich von Gruppen einander sehr nahe gelegener Erregungspunkte positiver und negativer Art, deren Wellenpotentiale wir durch Differentiation des Ausdruckes $\frac{1}{r} \cdot \psi_{(r \mp at)}$ nach den Coordinaten schon bilden gelernt haben.

Gleichartige Erregungspunkte können wir uns namentlich an Flächen in einfacher Schicht continuirlich angelagert denken. Neben solchen spielen noch eine wichtige Rolle die Doppelschichten, welche als durch zwei Schichten von Erregungspunkten gebildet angesehen werden können, von denen die eine positiv ist, die andere negativ, und welche normal in verschwindend kleinen Abständen dN von der betreffenden Fläche abstehen, so dafs auf beiden Seiten jedes Flächenelements $d\omega$ gleiche Mengen entgegengesetzter Erregungscentra vorkommen.

Dieses Princip der Zerlegung bestehender Wellensysteme ist zuerst von HUYGHENS gebraucht worden und wird deshalb vielfach als HUYGHENS'sches Princip bezeichnet. Es hat seinen besonders grofsen Nutzen in der Lehre von der Diffraction des Lichtes entfaltet.

§ 39. Die Ableitung des Huyghens'schen Principes.

Um den Beweis für die Richtigkeit des HUYGHENS'schen Principes durchzuführen, müssen wir den GREEN'schen Satz verallgemeinern, indem wir ein viertes auf die Zeit bezügliches Glied hinzufügen. Wir gehen hierbei aus von einem Integral, das demjenigen analog ist, welches wir der Ableitung des GREEN'schen Satzes zu Grunde legten. Es soll sich ebenso wie damals über einen abgegrenzten Raum erstrecken, in dessen Innern in einem Punkte eine Unstetigkeit stattfindet. Dieser Integrationsraum soll sich aber auch unter Umständen in den unendlichen Raum erweitern können. Aufserdem soll aber hier nach der Zeit integrirt werden, und zwar von einer bestimmten Anfangszeit t_0 bis zu einer bestimmten Endzeit t_1. Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} d\,t \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx\,.\,dy\,.dz$$

können wir durch partielle Integration umformen, vorausgesetzt, dafs dieselben Bedingungen der Continuität für die Functionen selbst und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten eingehalten sind, die wir schon früher in § 23 erörtert haben. Indem wir die partielle Integration nach den Coordinaten x, y, z für die drei ersten Glieder ausführen, erhalten wir für dieselben nach dem GREEN'schen Satze:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} . dx\,.\,dy\,.\,dz \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\,\omega \frac{\partial \varphi}{\partial N} \,.\, \psi - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \psi \,.\, \Delta \varphi \,.\, dx\,.\,dy\,.\,dz \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

Das letzte Glied unseres Integrals wollen wir nun ebenfalls partiell nach der Zeit integriren, und es ergiebt sich dann für dasselbe

$$\begin{aligned} &- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot dx\,.\,dy\,.\,dz \\ &= - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\psi \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} . dx.dy.dz + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \psi \,.\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} . dx.dy.dz \end{aligned} \quad (160)$$

Wir bekommen also die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx.dy.dz \\
&= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega . \frac{\partial \varphi}{\partial N} . \psi - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \psi . \varDelta \varphi . dx . dy . dz \\
&\qquad - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} \cdot dx . dy . dz \\
&\qquad + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \psi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \cdot dx . dy . dz
\end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Bei dieser Umformung haben wir die Differentialquotienten von ψ integrirt; wir können nun ein völlig analoges Verfahren einschlagen, indem wir die Differentialquotienten von φ integriren. Es ergiebt sich dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx.dy.dz \\
&= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega . \frac{\partial \psi}{\partial N} . \varphi - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varphi . \varDelta \psi . dx . dy . dz \\
&\qquad - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\varphi . \frac{\partial \psi}{\partial t}}} \, dx . dy . dz \\
&\qquad + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \varphi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot dx . dy . dz
\end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Wenn wir nun die Forderung stellen, daſs die beiden Functionen φ und ψ in dem ganzen Raume der Wellengleichung genügen sollen, so heben sich sowohl in Gleichung (161) wie in Gleichung (162) auf der rechten Seite die zweiten und vierten Glieder gegen einander auf, und wir erhalten durch Vereinigung beider Gleichungen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \psi \cdot d\omega + \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} . dx . dy . dz = \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot \varphi . d\omega$$

$$+ \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}}} . dx . dy . dz$$

oder

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d\omega = \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\left\{ \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}}}_{t_0}^{t_1} dx . dy . dz \qquad (163)$$

Es bleiben demnach nur Integrale übrig, welche entweder sich auf die Grenzen des Raumes beziehen, und über die Zeit zu integriren sind, — entsprechend solchen Einwirkungen, die von den Grenzen des Raumes aus während der ganzen Dauer der Zeit stattfinden, wo die Welle verläuft, — oder sich auf die Grenzen der Zeit beziehen, aber über den ganzen Raum zu nehmen sind. Letztere stellen den Ablauf solcher Veränderungen dar, die durch einen gegebenen Anfangs- und Endzustand in dem freien Raum bestimmt sind.

Wir wollen nun zunächst für ψ eine bestimmte Function einführen, und zwar eine solche, die einem Zuge schmaler Kugelwellen entspricht, die von allen Seiten des Raumes her gleichmäfsig nach einem Punkte $r = 0$ zusammenlaufen und in diesem einen Punkte einen unendlich grofsen Werth für ψ geben. Da diese Function deshalb in diesem Punkte discontinuirlich wird, so ist dieser Punkt von dem Integrationsraume auszuschliefsen. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir:

$$\psi = \frac{F_{(s)}}{r} \qquad (164)$$

setzen, und unter s den Werth

$$s = r + a(t - t') \qquad (165)$$

verstehen, worin a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und t' zunächst nur den Zeitmoment darstellen soll, für den der Werth von φ gesucht wird. Ferner wollen wir noch die Abhängigkeit des $F_{(s)}$ von s so bestimmen, dafs für sehr kleine Werthe von s der Werth von F endlich wird, für gröfsere aber verschwindet. Zu dem Ende setzen wir:

$$F_{(s)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c}{c^2 + s^2} \qquad (166)$$

Doch es würden auch mancherlei andere Functionen von s dieser Bedingung genügen.

Wenn wir darin c sehr klein wählen, so wird der Nenner im wesentlichen nur durch den Werth von s^2 bestimmt, so lange dieses nicht selbst sehr klein ist; und zwar wird der Werth von $F_{(s)}$ mit wachsendem s sehr schnell abnehmen. Für sehr kleine s wird aber der Werth von $F_{(s)}$ wesentlich durch c bestimmt. Den für $s = 0$ entstehenden Werth von $F_{(s)}$ wollen wir mit F_0 bezeichnen. Dann ist

$$F_0 = \frac{1}{\pi c} \tag{166a}$$

Ist also c, wie wir annehmen wollen, eine sehr kleine Grösse, so würde F_0 einen hohen Werth erreichen.

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)}.ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c.ds}{\pi(c^2+s^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{s}{c}\right)}{\pi\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{s}{c}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}.\pi \\ &= 1 \end{aligned} \tag{167}$$

Während also der Werth der Function $F_{(s)}$ für jeden einzelnen bestimmten Werth von s gleichzeitig in hohem Grade von c abhängig ist, findet sich das eben berechnete Integral $F_{(s)}.ds$ zwischen unendlichen Grenzen genommen unabhängig von c.

An Stelle der hier benutzten Integrationsgrenzen $+\infty$ und $-\infty$ können wir nun aber, ohne den Werth des Integrales um merkliche Beträge zu verändern, beliebige andere Grenzen wählen, wenn sie nur dasjenige Intervall umschliessen, welches allein bei der Bildung des Integralwerthes merklich in Betracht kommt, und dazu gehört nur, dafs die Grenzwerthe von s verhältnifsmäfsig grofs verglichen mit c sind.

Es ist demnach $F_{(s)}$ eine Function, welche in um so geringerer Entfernung von der Stelle, wo $s = 0$ ist, schon verschwindend kleine Werthe hat, je kleiner wir c annehmen, während sie an der Stelle, wo $s = 0$ ist, einen verhältnifsmäfsig hohen Werth annehmen kann.

Ueberall, wo also die Function $F_{(s)}$, oder die $F_{(s)}$ als Factor enthaltende Function ψ (Gleichung 164) unter dem Integrationszeichen multiplicirt ist mit irgend einer Function der Zeit und der Coordinaten, z. B. mit φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, die sowohl dem Raume als der Zeit nach continuirlich, mit endlichen Differentialquotienten sich ändern, wird der Werth des genannten Integrals merklich nur von denjenigen Werthen des φ und seiner Differentialquotienten beeinflufst werden, für welche $s = 0$ oder mindestens sehr klein ist, während für alle übrigen Elemente von Zeit oder Raum der Factor $F_{(s)}$ verschwindend klein wird und dadurch den Einflufs der dortigen Werthe von φ und seiner Differentialquotienten verschwinden macht.

Wir gewinnen dadurch für die Wellenpotentiale ähnliche Vortheile, wie wir sie früher bei den Anwendungen des GREEN'schen Satzes dadurch erreichten, dafs wir die Funktion $\psi = \frac{1}{r}$ setzten, wodurch wir einen Theil des Integrals ausschliefslich von dem Werthe der Potentialfunction im Punkte $r = 0$ abhängig machen konnten.

Den verlangten Ausschlufs des Punktes $r = 0$ von dem Integrationsraume erreichen wir dadurch, dafs wir um den Punkt $r = 0$ als Mittelpunkt mit dem sehr kleinen Radius ϱ eine Kugel construirt denken, deren innerer Raum als ausgeschlossen betrachtet wird. Wir beschränken die Untersuchung hier auf zwei einfachere Fälle der besprochenen Aufgabe, mittels deren Hülfe sich übrigens auch der Verlauf in den verwickelteren dann verhältnifsmäfsig einfach übersehen läfst.

A. Der erste dieser Fälle betrifft die Bewegung, die im unendlichen unbegrenzten Raume durch irgend eine zur Zeit $t = t_0$ bestehende Störung des Gleichgewichtszustandes hervorgerufen wird; dabei sind Grenzen nur für die Zeit gegeben.

B. Im zweiten Falle nehmen wir an, dafs der Raum feste Grenzen in endlicher Entfernung hat, und dafs die Störung des Gleichgewichts innerhalb endlicher Zeit durch Einwirkungen, die von diesen Grenzen ausgehen, hervorgerufen wird. Dabei werden wir indessen voraussetzen, dafs wir die Werthe von φ und seiner Differentialquotienten an allen Punkten der Grenzen des Raumes für die ganze Zeit, die in Betracht kommt, vollständig kennen, namentlich auch für spätere Zeiten, wo Wellen, die von Grenzstellen ausgegangen waren, schon zu anderen Grenzstellen gelangt sind. Sobald letzteres stattfindet, treten von den Wänden des Raumes Gegenwirkungen gegen die Bewegungen des Mediums auf, welche von der Natur desselben, sowie der es berührenden Wand abhängen, und deren Berücksichtigung nicht entwickelt werden kann, ohne in die physikalische Theorie dieser Gegenwirkungen (Reflexion und Refraction der Wellen) einzugehen.

§ 40. Wellen im unendlichen Raume durch eine anfängliche Gleichgewichtsstörung erregt.

In der Gleichung (163) verstehen wir unter t_0 den Zeitmoment des Anfangszustandes der Bewegung, unter t_1 einen späteren Moment, für den der Werth von φ im Punkte $r = 0$ gefunden werden soll. Indem wir in diese Gleichung Polarcoordinaten einführen, also

$$x = r.\cos\alpha$$

$$y = r.\sin\alpha.\cos\vartheta$$

$$z = r.\sin\alpha.\sin\vartheta$$

setzen, woraus sich ergiebt:

$$dx.dy.dz = r^2.dr.\sin\alpha.d\vartheta.d\alpha,$$

können wir sie in die Form bringen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{\psi.\frac{\partial\varphi}{\partial N} - \varphi.\frac{\partial\psi}{\partial N}\right\} d\omega$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^\infty dr.\int_0^\pi \sin\alpha.d\alpha\int_0^{2\pi} r^2.\left[\left\{\varphi.\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\right]_{t_0}^{t_1} d\vartheta \tag{163a}$$

Hierin sind zunächst r, α, ϑ, t als unabhängige Variable zu behandeln.

Vermöge unserer Annahme über die Functionen F und s findet eine wichtige Beziehung zwischen ihren Differentialquotienten statt. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} = a.\frac{\partial F}{\partial s} \tag{168}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial s} \tag{168a}$$

so dafs für alle Werthe von r und t identisch

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169}$$

ist. Da nach Gleichung (164)

$$\psi = \frac{F}{r}$$

gesetzt ist, so ist ferner

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{F}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169b}$$

Nehmen wir an, dafs die Zeitdauer $(t_1 - t_0)$ endlich sei, und dafs zur Zeit $t = t_0$ die Werthe von φ nur in einem Raume, der überall endliche Entfernung von dem Punkte $r = 0$ hat, von Null verschieden seien, so werden auch zur Zeit $t = t_1$ noch keine endlichen Veränderungen der Werthe von φ bis zu $r = \infty$ hinausgedrungen sein. Also sind während der ganzen Zeitdauer $(t_1 - t_0)$ für letztere Grenze $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$, so dafs die äufsere Grenze des Raumes überhaupt keinen Beitrag zu dem Integralwerthe giebt, die Integration nach der Zeit also überhaupt nur für die innere Grenze des Raumes, für die Kugelfläche $r = \varrho$ zu bilden ist, deren Flächenelement mit $d\omega$ bezeichnet werde, dessen Werth $d\omega = \varrho^2 \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta$ zu setzen ist.

An der Oberfläche der kleinen Kugel ist $\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, und es tritt statt r im Nenner der beliebig klein zu nehmende Werth ϱ ein. Wenn wir also auf der linken Seite der Gleichung (163a) statt des Flächenelementes $d\omega$ das Flächenelement $\varrho^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta$ einführen, so hebt sich nur in einem Gliede ϱ ganz weg, während in allen andern ϱ im Zähler stehen bleibt und diese Glieder daher zugleich mit ϱ verschwinden. Wir erhalten daher

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left(\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right) d\omega = \int dt \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \,.\, F \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha . d\vartheta .$$

Für den constanten Werth $r = \varrho$, ist F in der That nur Function von t allein, da die Hilfsgröfse s sich auf $s = \varrho + a(t - t')$ reducirt. In dem beliebig eng zu machenden Zeitintervalle, in welchem F erheblich von Null verschiedene Werthe erreicht, kann φ als ein constanter Factor angesehen und vor das Integrationszeichen gestellt werden. Da nun nach Gleichung (167)

$$\int F_{(s)} . d s = 1$$

und hier

$$d s = a . d t$$

ist, so ergiebt sich

$$\int F . d t = \frac{1}{a}$$

Ferner ist

$$\int_0^\pi \sin \alpha . d \alpha . \int_0^{2\pi} d \vartheta = 4 \pi$$

Daher wird der Werth der linken Seite von (163a)

$$\int_{t_0}^{t_1} d t . \int \left\{ \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi . \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d \omega = \frac{4 \pi}{a} . \varphi_{\substack{t = t' \\ r = 0}} \tag{170}$$

Die hier gegebene Bestimmung der Werthe der unabhängig Veränderlichen t und r, für welche der gefundene Werth von φ gilt, ergiebt sich dadurch, dafs es der Werth ist, der in dem Augenblick für $r = \varrho$ herrscht, wo

$$s = \varrho + a(t - t') = 0$$

d. h., wenn wir ϱ als verschwindend klein ansehen, $t = t'$ ist.

In den Integralen der rechten Seite von Gleichung (163a) dagegen ersetzen wir nach Gleichung (169a) $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ durch $\frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}$. und haben, da $t = t_0$ beziehlich $t = t_1$ als Grenzwerthe der Zeit constant sind, F ausschliesslich als Function von r zu behandeln. Dann ergiebt sich, indem wir in Gleichung (163a) auf der linken Seite den in Gleichung (170) erhaltenen Werth einsetzen,

$$4 \pi a \varphi_{\substack{t = t' \\ r = 0}} = \int_0^\infty d r \int_0^\pi \sin \alpha . d \alpha \int_0^{2\pi} d \vartheta . r^2 \left[\left\{ \varphi . \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} \right]_{t_0}^{t_1} \tag{171}$$

Durch partielle Integration ist der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial r}$ zu beseitigen; der dadurch gewonnene Factor F ist an der Grenze $r = \infty$ nach den gemachten Annahmen gleich Null für beide Zeitgrenzen, an der anderen Raumgrenze $r = \varrho$ werden alle Glieder durch die Multiplication mit ϱ verschwindend klein. Es verschwinden also alle auf die Raumgrenzen und Zeitgrenzen gleichzeitig bezogenen

Glieder, und es bleibt nach der partiellen Integration nur das dreifache Integral stehen, in welchem nur dr noch zu integriren ist, nämlich:

$$4\pi a \varphi_{\substack{t=t' \\ r=0}} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin\alpha \,.\, d\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \,.\, \overline{\left\{ -a.F.\frac{\partial}{\partial r}(\varphi.r) - F.r.\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}}_{t_0}^{t_1} \quad (172)$$

Auf der rechten Seite kann nun die obere Grenze $t = t_1$ unberücksichtigt bleiben, weil für $t = t_1$ s für alle in Betracht kommenden Werthe von r mindestens gleich $a(t_1 - t')$ und mithin F verschwindend klein ist. Nur für die untere Grenze $t = t_0$ erreicht F hohe Werthe.

Wieder können die mit F multiplicirten Factoren in dem engen Intervall, wo F hohe Werthe erreicht, constant gesetzt werden mit dem der Gleichung $0 = s = r + a(t_0 - t')$ entsprechenden Werthe, und da hier $\int F.dr = \int F.ds = 1$, so erhalten wir:

$$4\pi a \varphi_{\substack{r=0 \\ t=t'}} = \int_0^\pi \sin\alpha \,.\, d\alpha \int_0^{2\pi} \left[a \,.\, \frac{\partial}{\partial r}(\varphi.r) + r \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{\substack{r=a(t'-t_0) \\ t=t_0}} d\vartheta \quad (173)$$

Bisher sind die vier Variablen, die in den Functionen φ und ψ vorkommen, nämlich t, r, α, ϑ von einander unabhängig gewesen, und die partiellen Differentialquotienten derselben deshalb in dem gewöhnlichen Sinne genommen worden, wonach bei der Bildung jedes einzelnen vorausgesetzt wird, dafs die drei anderen Variablen unverändert bleiben. So sind sie auch noch in Gleichung (173) zu verstehen.

Ersetzen wir in Gleichung (173) den Buchstaben t' durch t_1, weil jetzt kein Grund mehr vorhanden ist, die beiden Gröfsen zu unterscheiden und dividiren wir durch a, so geht die Gleichung über in:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t_1 \\ r=0}} = \int_0^\pi \sin\alpha \,.\, d\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \,.\, \left\{ \left[\varphi + r \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \frac{r}{a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}_{\substack{t=t_0 \\ r=a(t_1-t_0)}} \quad (173\text{a})$$

Wenn wir die Bezeichnung $d\omega$ für das Flächenelement einer Kugel vom Radius r oder $d\Omega$ für das einer Kugel vom Radius 1 also

$$d\omega = r^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta = r^2 \,.\, d\Omega$$

einführen, so erhalten wir:

$$\varphi_{\substack{t=t_1\\r=0}} = \frac{1}{4\pi r^2}\int d\omega \left\{\frac{\partial}{\partial r}(\varphi r) + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{\substack{t=t_0\\r=a(t_1-t_0)}} \tag{173b}$$

oder

$$\varphi_{\substack{t=t_1\\r=0}} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \left\{\frac{\partial\,[r\,.\,\varphi]}{\partial r} + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{\substack{t=t_0\\r=a(t_1-t_0)}} \tag{174}$$

Wenn S irgend eine Function von r und den Winkeln α und ϑ ist, so kann man das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int S\,.\,d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int S\,.\,r^2\,.\,d\Omega$$

als den Mittelwerth der sämmtlichen in der Entfernung r vorkommenden Werthe von S bezeichnen. In diesem Sinne kann man das Resultat der Gleichung (173b) so aussprechen:

Wenn in einem unendlich ausgedehnten gleichmäſsigen Medium eine Wellenbewegung stattfindet, bei welcher die veränderliche Grösse φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\,.\,\Delta\varphi$$

ohne Discontinuität von $t = t_0$ bis $t = t_1$ genügt hat, so ist in jedem Punkte des Raumes zur Zeit $t = t_1$ der Werth von φ gleich dem Mittelwerth derjenigen Werthe, welche die Gröſse

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi\,.\,r) + \frac{r}{a}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

in einem vorausgehenden Augenblicke $t = t_0$ in den Punkten einer um $r = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche vom Radius $r = a(t_1 - t_0)$ gehabt hat.

Hierdurch ist der weitere Verlauf der Function φ in Raum und Zeit vollständig aus der Anfangsstörung φ_{t_0} und $\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ gegeben, da man jeden Punkt des unendlichen Raumes als den Punkt $r = 0$ wählen und zum Mittelpunkt von Kugelflächen machen kann. So weit diese die Gegend der von Null verschiedenen Anfangswerthe von φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ durchschneiden, werden sie Störungen anzeigen, die zur Zeit $t_1 = t_0 + \frac{r}{a}$ in dem Punkte $r = 0$ eintreten werden. Je weiter der Punkt $r = 0$ von der Region der Anfangsstörung sich entfernt, desto kleiner wird die Kegelecke $\int d\Omega$ im Verhältniſs zur ganzen Kugel 4π, wie dies der allmählichen Intensitätsabnahme in der Ferne entspricht. Nur ist bei dieser Form des Satzes die anfängliche Voraussetzung über die Continuirlichkeit der Function φ während der ganzen Zeit $(t_1 - t_0)$ und für den unendlichen Raum nicht zu vergessen.

§ 41. Zweiter Fall des Princips von Huyghens. Bestimmung der inneren Veränderungen aus den Veränderungen an der Grenzfläche eines geschlossenen Raumes.

Wir haben bisher nur Grenzen der Zeit angenommen, dagegen den Raum als unbegrenzt angesehen. Unsere Theoreme lehrten uns den weiteren Verlauf der Veränderungen im unendlichen Raume aus dem Anfangszustande herzuleiten. Zu dem Ende mufsten wir den Werth der Functionen φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für jeden Punkt des Raumes für die Zeit $t = t_0$ kennen. Dadurch waren dann auch die Werthe von $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ für diese Anfangszeit gegeben.

Das Problem, den Verlauf der Bewegungen durch die Aenderungen der Function φ auszudrücken, läfst sich in diesem zweiten Falle noch lösen, wenn uns die Werthe von φ (damit implicite auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$) und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ längs der Grenzen des Raumes vollständig für jedes Flächenelement der Grenze und für das Zeitintervall gegeben sind, das rückwärts von dem Endpunkt der Zeit $t = t'$ bis zu derjenigen Zeit t_0 reicht, für welche die längste gerade Verbindungslinie zweier Grenzpunkte $r_{max} = a(t' - t_0)$ ist.

Es handelt sich also bei dieser zweiten Form der Aufgabe darum, die inneren Aenderungen der bewegten Masse aus den Zuständen an ihrer Grenze herzuleiten, welche als bekannt vorausgesetzt werden. Diese Grenze wird immer als vollständig geschlossen zu betrachten sein, und über den Ursprung der eingetretenen Gleichgewichtsstörungen längs derselben wird nichts weiter vorausgesetzt; namentlich können dieselben theilweise Nachwirkungen sein von aufserhalb des Integrationsraumes früher erregten Wellen, die durch einen offenen Theil der Grenze eindringen, oder auch reflektirte Theile von Wellen, welche, nachdem sie durch den inneren Raum gelaufen sind, einen Theil der Grenze erreicht haben, deren explicite Bestimmung also erst durch Kenntnifs der Gesetze der Reflexion, Brechung und Absorption des Lichtes gewonnen werden kann.

Die Bezeichnung kann dieselbe bleiben wie in Gleichung (163), auch ist die Function ψ ebenso wie dort zu bilden

$$\psi = \frac{1}{r} F_{(s)}$$

$$s = r + a(t - t')$$

und wie dort ist der Punkt $r = 0$, in welchem ψ discontinuirlich wird, dadurch von dem Integrationsraume auszuschliefsen, dafs man um den Punkt $r = 0$ eine Kugel mit dem sehr kleinen Radius ϱ construirt denkt.

Die Grenzintegrale über die Oberfläche dieser kleinen Kugel sind zu bilden und zu transformiren ganz wie in dem früheren Falle. Nun werden wir die untere Grenze der Zeit t_0 so weit zurückverlegen, dafs

$$a(t' - t_0) > r_{max}$$

d. h. gröfser ist als die gröfseste Entfernung r, die zwischen Grenzpunkten des Integrationsraumes vorkommt. Unter diesen Umständen verschwindet die rechte Seite der Gleichung (163). Denn für $t = t_1$ wird s für alle Punkte des Raumes positiv und für $t = t_0$ wird s für alle Punkte des Raumes negativ sein; aber weder für t_1 noch für t_0 wird s verschwinden. Daher müssen F und $\frac{dF}{dt}$ verschwindend klein sein, und daraus folgt, dafs die rechte Seite der Gleichung (163) verschwindend klein ist.

Somit bleibt in diesem Falle nur das Integral links über die innere und äufsere Oberfläche des Raumes stehen. Der Werth desjenigen über die innere Oberfläche, nämlich die der kleinen Kugel $r = \varrho$, ist von genau demselben Werthe, wie er in Gleichung (170) gefunden ist. Die Gleichung (163a) reducirt sich also auf:

$$\frac{4\pi}{a} \cdot \underset{\substack{t = t_1 \\ r = \varrho = 0}}{\varphi} = -\int_{t_0}^{t_1} dt . \int \left\{ \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d\omega \tag{175}$$

Wenn wir für ψ seinen Werth einsetzen, ergiebt sich:

$$\frac{4\pi}{a} \cdot \underset{\substack{t = t' \\ r = \varrho = 0}}{\varphi} = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot F_{(s)} + \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\varphi}{r^2} \cdot F_{(s)} - \frac{\varphi}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right] \right\} d\omega \tag{175a}$$

Da für jedes einzelne $d\omega$ der Werth des r, den wir dementsprechend mit r_ω bezeichnen wollen, unveränderlich ist, so ist das in Gleichung (175a) vorkommende s in $F_{(s)}$ und $\frac{\partial F_{(s)}}{\partial s}$ nur noch als Function von t zu betrachten, indem zu setzen ist:

$$s = r_\omega + a(t - t')$$
$$ds = a\,.\,dt$$

Danach bekommt die genannte Gleichung die Form

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} = -\int_{t_0}^{t_1} a\,.\,dt \int \left\{F_{(s)}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial N}\cdot\frac{\varphi}{r^2}\right] - \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\varphi}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial N}\right\} d\omega \quad (175\text{b})$$

Wenn wir durch partielle Integration nach t das $\frac{\partial F}{\partial t}$ beseitigen, erhalten wir:

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} = -\int_{t_0}^{t_1} a\,.\,dt \int F_{(s)}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial N}\left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{ar}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\} d\omega \quad (175\text{c})$$

Denn das durch die partielle Integration eingeführte Integral verschwindet, weil, wie schon oben bemerkt, $F_{(s)}$ für die Zeitgrenzen verschwindet.

Mit Rücksicht auf die besonderen Eigenschaften der Function $F_{(s)}$, wonach sie nur für sehr kleine Werthe von s sich von Null unterscheidet, und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)}\,.\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)}\,.\,a\,.\,dt = 1$$

ist, können wir demnach die mit F unter dem Integralzeichen multiplicirten Gröfsen als constant den Werth behaltend, den sie für $s = 0$ haben, betrachten und erhalten

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} = -\int \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\partial r}{\partial N}\left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{ar}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}_{\substack{r=r_\omega\\ t=t'-\frac{r_\omega}{a}}} d\omega \quad (176)$$

Wir wollen statt t' wieder t_1 schreiben, weil jetzt kein Grund mehr vorhanden ist, die beiden Gröfsen zu unterscheiden. Bisher waren in unseren Integralen vier unabhängige Variable enthalten t, r und zwei Winkel, wie die oben als Coordinaten gewählten α und ϑ. Durch die neu hinzugekommene Gleichung

$$s = 0 = r_\omega + a(t - t_1)$$

werden aber t und r_ω von einander abhängig gemacht, und in der Gleichung (176) haben wir nur noch drei unabhängige Variable,

r oder t, neben α und ϑ, und wir können demnach φ als eine Function von α, ϑ und $t = t_1 - \frac{r_\omega}{a}$ auffassen. Dabei wird dann geschrieben werden können

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - a \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi_{t = t_1 - \frac{r}{a}}\right)$$

wenn wir uns denken, dafs die Variable r, soweit sie explicite in φ vorkommt, bei der Differentiation als unveränderlich angesehen wird und als veränderlich nur insofern sie in dem Ausdruck $t_1 - \frac{r}{a}$ vorkommt. Somit können wir schreiben

$$4\pi \varphi_{\substack{t = t_1 \\ r = 0}} = \int \left\{ \frac{\partial r}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} \cdot \varphi_{\left(t_1 - \frac{r}{a}\right)}\right] - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right\}_{r = r_\omega} d\omega \tag{177}$$

Die Gröfse $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$, welche noch vollkommen frei bestimmbar bleibt, wenn auch φ und dadurch auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ längs der ganzen Grenze von t_0 bis t_1 gegeben ist, hat hier eine wesentlich andere Bedeutung als die im ersten Gliede des Integrals vorkommenden Differentialquotienten nach N. Da nämlich φ abhängig ist von r, α und ϑ, ist explicite geschrieben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N}$$

während in das erste Glied des Integrals nur der erste dieser Theile eintritt.

Das Endglied des Integrals $- \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega$ hat ganz die Form eines Wellenpotentials, das von einer über die Grenze ausgebreiteten Schicht von Erregungspunkten ausgeht, und giebt den Werth, den dieses in dem von uns als $r = 0$ bezeichneten, aber übrigens beliebig zu wählenden Punkte haben würde. Das Anfangsglied entspricht in seiner Form dem Wellenpotential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die auf beiden Seiten der Grenzfläche mit entgegengesetzten Zeichen behaftet liegen.

Daraus geht also der gewöhnlich als das Princip von Huyghens benannte Satz hervor, dafs jede Wellenbewegung im Innern eines von Erregungspunkten freien Raumes angesehen werden kann als die Superposition von kugelig sich ausbreitenden Wellen, deren Erregungscentra in der Oberfläche dieses Raumes, theils in einer einfachen Schicht, theils in einer Doppelschicht liegen. Die Axen der Doppelpunktpaare sind nach den Normalen der Grenzflächen orientirt, und daher ihrerseits ebenfalls unabhängig von der Lage des Punktes $r = 0$.

§ 42. Anwendung des Huyghens'schen Principes auf elektromagnetische Schwingungen.

Für die bisherigen mit φ bezeichneten Functionen, von denen wir nur vorauszusetzen brauchten, dafs sie der Wellengleichung genügten, wollen wir von jetzt an die Componenten der elektrischen und magnetischen Momente, also die Gröfsen, die wir früher mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnet haben, einsetzen. Diese elektrischen und magnetischen Bewegungen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern wir haben gesehen, dafs sie in gewisser Weise aneinander gekettet sind, und dafs stets gleichzeitig bestimmte Schwingungen elektrischer und magnetischer Natur im Raume erregt werden müssen, wenn der Wellenzug ungestört in sich selbst ablaufen soll, ohne sich weiter zu verändern, und zwar waren diese Beziehungen schon durch die elektrischen Grundgleichungen gegeben.

Wir wollen einmal annehmen, es seien in einem Theile des unendlichen Raumes die magnetischen und elektrischen Momente und deren Vertheilung gegeben. Wenn die Elektricität dann irgendwo zusammengeströmt ist, so dafs also die Dichtigkeit der wahren Elektricität an gewissen Stellen von Null verschieden ist, so bleibt, wie wir gesehen haben, in isolirenden Medien die Dichtigkeit trotz der vor sich gehenden elektrischen Schwingungen an der Stelle unverändert. Wenn also die Gröfse $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$ nicht von Anfang an überall Null ist, so bleibt sie in jedem einzelnen Volumelement des ruhenden Aethers unverändert, trotz der elektrischen Oscillationen, die in ihm vorgehen, und wir brauchen dieselbe also gar nicht zu berücksichtigen. Wir können vielmehr, wenn wir nur die Oscillationen zu bestimmen suchen, die genannte Gröfse gleich Null setzen, so dafs also die Annahme

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0$$

zulässig ist. Nun wollen wir weiter voraussetzen, dafs die elektrischen Momente in dem betreffenden Raume als continuirliche Functionen der Coordinaten in irgend welcher beliebigen, ganz willkürlichen Weise gegeben seien. Dann können wir sie, wie in § 16 gezeigt worden ist, setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so bekommen wir

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\Delta\Psi \tag{178a}$$

Es geht daraus hervor, dafs

$$\Delta\Psi = 0$$

sein mufs, und zwar würde es hier im ganzen unendlichen Raume gleich Null sein, woraus dann folgt, dafs

$$\Psi = 0$$

sein mufs, so dafs wir nunmehr setzen können:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{178b}$$

Es war dann weiter schon ausgeführt worden, dafs wir U, V, W so wählen können, dafs sie die gegebenen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ darstellen, und dabei auch noch die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{178c}$$

erfüllen.

Wenn wir ferner die Functionen U, V, W so wählen, dafs sie der Wellengleichung und der Gleichung (178c) entsprechen, so können wir aus ihnen berechnen, wie die Wellen, welche die Verbreitung der Functionen U, V, W im Raume darstellen, verlaufen, und dadurch bekommen wir durch Differentiirung die Ausbreitung der Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Die magnetischen Momente sind nun andererseits mit den elektrischen durch die folgenden Gleichungen (108) verbunden:

$$A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)$$

Die magnetischen Momente müssen ebenfalls den MAXWELL'schen Gleichungen und damit auch der Wellengleichung genügen, und können in derselben Weise dargestellt werden wie die elektrischen Momente. Wenn die magnetischen Momente also bekannt sind, so sind durch die MAXWELL'schen Gleichungen auch die Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gegeben. Diese brauchen wir aber, weil in der Gleichung, die das HUYGHENS'sche Princip ausspricht, Integrale vorkommen, welche den Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ enthalten. Es genügt uns also nicht, dafs wir die Anfangswerthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ kennen, sondern es müssen auch die Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ bekannt sein, und diese können gefunden werden, wenn man die Anfangswerthe der magnetischen Momente ebenfalls kennt. Die Kenntnifs der magnetischen Momente für den Anfangszustand ist also ebenso nöthig wie die der elektrischen, damit man die Differentiale nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ finden kann, welche von den Anfangswerthen dieser letzteren Gröfsen ganz unabhängig sind.

Man würde demnach von einer beliebigen Vertheilung der elektrischen und der magnetischen Momente im Anfangszustande ausgehen können, nachdem man sie in der Form der Gleichungen (178) dargestellt hat. Dann würde man aus den magnetischen Momenten die Differentialquotienten nach der Zeit von den elektrischen Momenten zu suchen haben, und hätte nun in Bezug auf die elektrischen Momente alles das für den Anfangszustand gegeben, was wir brauchen, um den ferneren Ablauf der Wellen mittels des HUYGHENS'schen Principes zu berechnen. Man sieht hieraus aber auch gleichzeitig, dafs die elektrischen Momente allein oder die magnetischen Momente allein nicht ausreichen, um den ganzen ferneren Ablauf der Wellen zu bestimmen.

Die Durchführung dieser Integralumformungen erfordert allerdings meist sehr verwickelte Quadraturen, und nur diejenigen Formen lassen sich praktisch verwenden, welche sich auf Schwingungen von bestimmter constanter Schwingungsperiode beziehen; aber es ist doch wünschenswerth, dafs man wenigstens die Ableitung dieser allgemeinsten Sätze kennen lernt, und deshalb ist sie hier gegeben. Beispiele einiger einfacherer Formen sind schon oben in § 12 aufgeführt.

§ 43. Einführung einfacher pendelartiger Schwingungen.

Wir haben bisher abgesehen von den kleinen Unterschieden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche zwischen optischen Wellen von verschiedener Schwingungsperiode vorkommen. Thatsächlich bestehen aber in den meisten durchsichtigen Medien, wenigstens in denen, die neben dem Aether noch schwere Masse enthalten, solche Unterschiede, und nur Wellen, deren sämmtliche Componenten mit gleicher Geschwindigkeit fortschreiten, behalten dabei auch unveränderte Form. Andernfalls trennen sich diejenigen Componenten der Schwingungen, welche ungleiche Fortpflanzung haben, bald auch dem Raume nach. Diejenigen Componenten, in welche ein zusammengesetzter Wellenzug dadurch zerfällt, pflegt man einfache oder auch pendelartige Schwingungen zu nennen. Man versteht darunter solche Schwingungen, bei denen die Elongation der schwingenden Theilchen in derselben Weise ab- und zunimmt, wie bei den Schwingungen eines Pendels, bei denen sie als Function der Zeit dargestellt werden kann, indem man ihre Amplitude entweder mit cos (nt) oder sin (nt) multiplicirt, wo n die Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche in 2π Sekunden ausgeführt werden. Dieselbe Form der Aenderung kann aber auch auf elektrische Schwingungen übertragen werden, obwohl wir es da wohl nicht mit der Bewegung einer Substanz zu thun haben.

Solche einfache Schwingungen kann man darstellen durch Wellenpotentiale von der Form:

$$(\Phi + \Psi . i) . e^{int},$$

wo Φ und Ψ von t unabhängig sind. Wenn man ein solches Wellenpotential in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt, so lautet der reelle Theil

$$\Phi . \cos(nt) - \Psi . \sin(nt)$$

und der reelle Factor des imaginären Theiles:

$$\Phi . \sin(nt) + \Psi . \cos(nt).$$

Aus diesen allgemeinen Formen setzen sich also die Wellenpotentialfunctionen solcher einfachen Schwingungen zusammen.

Wenn wir nun unter φ sowohl $\Phi . \sin(n t)$ wie $\Psi . \cos(n t)$ verstehen, so ist leicht ersichtlich, dafs

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - n^2 . \varphi \tag{179}$$

ist; denn Φ und Ψ sind selbst von der Zeit unabhängig, und wenn wir $\sin(n t)$ oder $\cos(n t)$ zweimal nach der Zeit differentiiren, so erhalten wir jedesmal den unveränderten Werth multiplicirt mit $- n^2$.

Setzen wir nun diesen Werth für $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 . \varDelta \varphi$$

ein, so entsteht dadurch für solche Wellenpotentiale, welche $e^{i n t}$ oder $\cos(n t)$ beziehlich $\sin(n t)$ als Factor enthalten, die neue Differentialgleichung:

$$a^2 . \varDelta \varphi + n^2 . \varphi = 0$$

oder

$$\frac{n^2}{a^2} \cdot \varphi + \varDelta \varphi = 0 \tag{180}$$

Wir haben oben in § 12 schon gesehen, dafs wir ebene Wellen erhalten, wenn wir

$$\varphi = A . e^{i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x \pm a t)} \tag{181}$$

oder, nur den reellen Theil beachtend,

$$\varphi = A . \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x \pm a t) \tag{182}$$

setzen.

Je nachdem wir das positive oder negative Vorzeichen wählen, geschieht die Fortpflanzung der Wellen in der Richtung der negativen oder positiven x-Werthe. Damals haben wir aber bereits gesehen, dafs es bei diesem Integral für ebene Wellen nur darauf ankommt, dafs dasselbe eine Function von $(x - at)$ oder $(x + at)$ sei.

In analoger Weise können wir nun auch bei den Kugelwellen die willkürlichen Functionen von $(r \pm a t)$ durch die bestimmte Function $e^{i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r \pm a t)}$ ersetzen und erhalten dann:

$$\varphi = A \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{\lambda} (r \pm a t)}{r} \tag{183}$$

$$= \frac{A \,.\, \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \,.\, \cos \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \mp \frac{A \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \tag{183a}$$

oder

$$\varphi = \frac{A \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda} (r \pm a t)}{r} \tag{184}$$

$$= \frac{A \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \,.\, \cos \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \pm \frac{A \,.\, \cos \frac{2\pi}{\lambda} r \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \tag{184a}$$

Die einfachen Schwingungen spielen sowohl in der Akustik als in der Optik eine grofse Rolle. In der Akustik sind verschiedene Systeme einfacher pendelartiger Schwingungen in ganz beliebig zusammengesetzten mechanischen Systemen möglich. Jedes von diesen Systemen einfacher Schwingungen ist mechanisch unabhängig von den anderen, und wenn es einmal erregt ist, kann es weiter bestehen, so dafs sich also die Gesammtbewegung betrachten lässt als algebraische Zusammensetzung der einzelnen Bewegungen, die den verschiedenen einfachen, pendelartigen Schwingungen angehören. Jedes einzelne erregt Resonanz, unabhängig von den anderen, und wird vom Ohre unabhängig wahrgenommen, obgleich bei den Schallwellen die spontane Scheidung der Wellen verschiedener Periode durch verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht eintritt.

Bei der Optik liegen die Verhältnisse völlig analog. Die verschieden farbigen Lichtstrahlen unterscheiden sich durch verschiedene Schwingungsdauer ihrer einfachen Schwingungen. Jede besondere Farbe, die im weifsen Lichte vorkommt, repräsentirt ein solches System von einfachen Schwingungen bestimmter Schwingungsdauer; aber jedes System mit seiner besonderen Schwingungsperiode pflanzt sich gesondert fort, so dafs die Einzelschwingungen desselben alle mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen und sich nicht von einander trennen. Dadurch läuft der ganze Wellenzug, welcher gleiche Schwingungsperiode hat, als continuirliches mechanisches Ganze fort, unabhängig von den gleichzeitig bestehenden Wellenzügen, welche andere Schwingungsdauer haben.

Es ist oben schon erwähnt worden, dafs die eingeführte Gröfse n gleich ist der auf 2π Secunden bezogenen Schwingungszahl oder gleich 2π dividirt durch die Schwingungsdauer T; es ist also

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{T} \\ \text{und} \quad \frac{n}{a} &= \frac{2\pi}{a \,.\, T} \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Da nun an jedem Punkte eines Wellenzuges in der Secunde so viel Wellen vorübergehen müssen, als in der Strecke enthalten sind, um welche sich die betreffende Wellenbewegung in der nächsten Secunde fortgepflanzt haben wird, so ist die Länge λ jeder einzelnen Welle gleich der Strecke, um welche sich die Welle in der Zeit T fortgepflanzt hat, d. h. es ist

$$\lambda = a \, . \, T \tag{186}$$

Daraus folgt:

$$\frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{186a}$$

und

$$n = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \tag{186b}$$

Wir wollen nun:

$$k = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{187}$$

setzen. Dann verwandelt sich unsere Differentialgleichung (180) in:

$$k^2 \, . \, \varphi + \Delta \varphi = 0 \tag{188}$$

und wir können nun von den in unseren Gleichungen (183) und (184) aufgestellten Ausdrücken für Wellenpotentiale, die sich kugelförmig von einem Punkt aus verbreiten, als gemeinsame Eigenschaft angeben, dafs sie aufser einer Constanten und demjenigen Factor, der sie als pendelartige Schwingungen charakterisirt, nämlich $\sin (n t)$ bez. $\cos (n t)$, nur noch einen der beiden Factoren $\frac{\cos (k r)}{r}$ oder $\frac{\sin (k r)}{r}$ enthalten.

Im ersten Falle, also bei dem Factor $\frac{\cos (k r)}{r}$, würde eine Bewegungsform bestehen, welche für $r = 0$ unendlich wird, und demnach in dem Punkte $r = 0$ einen besonders zu behandelnden Ausnahmspunkt hat. Ist hingegen in dem Werthe von φ der Factor $\frac{\sin (k r)}{r}$ vorhanden, so würde damit eine Bewegungsform dargestellt sein, welche für $r = 0$ keinen Ausnahmspunkt hat und dort nicht unendlich wird; denn wenn wir $\sin (k r)$ in eine Reihe entwickeln und durch r dividiren, so erhalten wir:

$$\frac{\sin (k r)}{r} = k - \frac{k^3 \, . \, r^2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + - \ldots\ldots$$

in welchem Werthe für $r = 0$ nur das erste constante und endliche Glied bestehen bleibt. In dieser Weise unterscheiden sich also die beiden Formen von φ, die wir unmittelbar durch Zerlegung der imaginären Potenzen gefunden haben.

Wir können nun weitere Integralformen erhalten, indem wir Differentialquotienten von diesen Formen nach x, y oder z bilden. Es wird z. B. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)$ multiplicirt mit $\cos(nt)$ oder $\sin(nt)$ ebenfalls eine brauchbare Form sein. Da der Ausdruck, welcher nach x differentiirt werden soll, von x nur insofern abhängig ist, als x in r enthalten ist, und da in ihm r die einzige Variable ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) = \frac{x}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \tag{189}$$

worin $\frac{x}{r}$ gleich ist dem Cosinus des Winkels, den r mit der x-Axe bildet. Analoge Formen haben die übrigen Integrale, welche durch Differentiation nach den anderen Coordinaten entstehen. Wie wir schon früher gesehen haben, hat die Amplitude dieser Schwingungen nicht nach allen Richtungen der Kugel die gleiche Gröſse, sondern es sind einzelne Richtungen bevorzugt.

§ 44. Erweiterte Form des Green'schen Satzes, bezogen auf Wellenpotentiale pendelartiger Schwingungen.

Viele der früher erlangten Resultate werden viel einfacher und übersichtlicher, wenn wir voraussetzen, daſs die vorhandenen Schwingungen einfache pendelartige Schwingungen sind.

Wir gehen aus von der Annahme, daſs wir zwei Functionen, φ und ψ haben, welche der Differentialgleichung (188)

$$k^2 . \varphi + \Delta \varphi = 0$$

entsprechen, und bilden das Raumintegral:

$$\iiint\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 . \varphi . \psi\right\} dx . dy . dz.$$

Die ersten Glieder können wir partiell integriren, und zwar ergiebt sich durch Integration von ψ ein Oberflächenintegral; es ist nämlich:

$$\iiint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dx . dy . dz$$

$$= -\int \psi\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\cos a + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\cos b + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\cos c\right] d\omega$$

$$-\int\!\!\int\!\!\int \psi \,.\, \Delta \varphi \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega - \int\!\!\int\!\!\int \psi \,.\, \Delta \varphi \,.\, dx . dy . dz \quad (190)$$

worin ebenso wie früher a, b, c die Winkel zwischen der nach dem Innern des Raumes gerichteten Normale N und den Coordinataxen bezeichnen. Wir erhalten durch Einsetzen dieses Werthes in unser obiges Integral:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega - \int\!\!\int\!\!\int \psi . (\Delta \varphi + k^2 . \varphi) dx . dy . dz \quad (191)$$

Wenn wir aber nach φ integriren, ergiebt sich:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega - \int\!\!\int\!\!\int \varphi . (\Delta \psi + k^2 . \psi) dx . dy . dz \quad (192)$$

Da nun nach unserer Voraussetzung sowohl φ wie ψ in dem ganzen Raum, über welchen die Integration ausgedehnt wird, die Differentialgleichung (188) erfüllt, so fällt in jeder der beiden Gleichungen (191) und (192) das letzte Integral fort, und es ergiebt sich:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (191\,\mathrm{a})$$

und

$$\int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (192\,\mathrm{a})$$

Durch Vereinigung dieser beiden Gleichungen erhalten wir nun:

$$\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (193)$$

oder

$$0 = \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) d\omega \quad (193\,\mathrm{a})$$

Von den hier erhaltenen Gleichungen wollen wir nunmehr in einigen besonderen Fällen Anwendung machen.

1. Wenn wir

$$\varphi = \psi$$

setzen, so verwandeln sich unsere Gleichungen (191a) und (192a) beide in

$$\left.\begin{aligned}\iiint\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2-k^2.\varphi^2\right\}dx.dy.dz\\ =-\int\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot d\omega\end{aligned}\right\}\quad(194)$$

Ist nun auch φ an der ganzen Oberfläche des Raumes, über den integrirt werden soll, gleich Null, so mufs zwar das Raumintegral ebenfalls gleich Null sein; aber wir dürfen hieraus nun nicht, wie früher (§ 24) schliefsen, dafs jetzt auch die einzelnen Glieder gleich Null sein müssen; denn eines derselben hat jetzt das negative Vorzeichen, und es ist also die Möglichkeit gegeben, dafs die Summe der Glieder gleich Null ist, ohne dafs jedes einzelne Glied gleich Null ist.

Dieses kann nun in der That bei Wellenpotentialen der Fall sein; denn wenn wir z. B. innerhalb einer Kugel

$$\varphi = \frac{\sin(kr)}{r}\cdot\sin(nt) \qquad (195)$$

setzen und den Radius der Kugel so wählen, dafs $\sin(kr)$ an der äufseren Oberfläche der Kugel gleich Null ist, so würde daraus durchaus nicht folgen, dafs die Function φ in der ganzen Kugel gleich Null ist. Wir haben dann sogenannte Eigenschwingungen der Kugel. Es ist das eine Art der Bewegung, die in der Kugel unendlich lange bestehen kann, ohne dafs sie von aufsen her unterhalten wird, wenn sie einmal eingeleitet ist. In Wirklichkeit kommt dieses in strengem Sinne nicht vor. Denn es wird sich z. B. eine Schallbewegung solcher Art in einer abgeschlossenen Kugel mit festen Wänden allerdings verhältnifsmäfsig lange halten können, aber schliefslich werden doch Erschütterungen der Wände entstehen; hierdurch wird dann die lebendige Kraft allmählich an den äufseren Raum abgegeben, der jenseits der Wände liegt, theils wird sie durch innere Reibung in Wärme umgesetzt, so dafs also thatsächlich eine solche Eigenschwingung zwar sehr lange, aber doch nicht ewig dauernd im Innern des Raumes nachhallen kann. Da nun $\frac{\sin(kr)}{r}$ nach jeder halben Wellenlänge einmal gleich Null wird, so läfst sich eine sehr grofse Menge von Wellenlängen angeben, die in derselben Kugel als Eigenschwingungen bestehen könnten.

Wenn wir die Differentialquotienten benutzen, also z. B. nach x differentiiren, so würden wir, wie wir eben gesehen haben, einen Ausdruck von der Form

$$\cos\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin k r}{r}\right)$$

erhalten. Das wäre nun eine andere Function von r, für welche man das r auch so wählen könnte, dafs sie an der Oberfläche der Kugel gleich Null wird. Führen wir die Differentiation aus und setzen den erhaltenen Werth gleich Null, so bekommen wir:

$$k \cdot \frac{\cos(k r)}{r} - \frac{1}{r^2} \cdot \sin(k r) = 0 \tag{196}$$

Diese Gleichung läfst sich leicht umformen in

$$\operatorname{tg}(k r) = k \,.\, r \tag{196a}$$

Das ist eine transcendente Gleichung, die durch eine unendliche Anzahl von Werthen für r erfüllt wird. Wenn $k r$ sehr grofs ist, so wird auch $\operatorname{tg}(k r)$ relativ sehr grofs sein müssen, d. h. der Winkel wird ein wenig kleiner sein, als eine ungerade Anzahl von rechten Winkeln. In der Nähe jedes ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ wird sich also ein Winkel finden lassen, für welchen die Tangente den vorgeschriebenen Werth bekommt. Es läfst sich demnach auch hier eine ganze Reihe verschiedener Schwingungsformen für Kugeln von bestimmten Radien angeben, welche Eigenschwingungen entsprechen und unter den oben erwähnten Einschränkungen in dem Innern der Kugel dauernd bestehen können, ohne dafs sie von aufsen her unterstützt zu werden brauchen.

Eine ähnliche Reihe von Werthen für φ ist möglich, wenn die rechte Seite unserer Gleichung (194) dadurch verschwindet, dafs wir $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ an der ganzen Oberfläche gleich Null annehmen.

2. Wenn wir auf der ganzen Oberfläche ψ gleich einer Constanten z. B. $= 1$ und $\varphi = \frac{1}{r}\sin(k r)$ setzen, so giebt Gleichung (193)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = 0 \tag{197}$$

Setzen wir dagegen $\varphi = \frac{1}{r} . \cos(k r)$ und umschliefsen den Punkt

$r = 0$ mit einer kleinen Kugel vom verschwindenden Radius ϱ, so wird wie in § 24

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial N} . d\omega = 4\pi \tag{198}$$

Es sind dies analoge Sätze wie wir sie oben für die Potentialfunctionen anziehender Massen gewonnen hatten, bei denen das über $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ genommene Oberflächenintegral durch die Summe der Massen auszudrücken war, die im Innern der betreffenden Oberfläche lag.

Die von uns gefundenen Formen der Lösungen sind superponirbar. Wir wollen nun einmal voraussetzen, daſs die beiden Bewegungsformen, welche durch Gleichung (183) dargestellt werden, zugleich bestehen, dann haben wir also zwei einander entgegenlaufende Wellen, und es ist:

$$\varphi = \frac{A . \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r - a t)}{r} + \frac{A . \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r + a t)}{r} \tag{199}$$

$$= \frac{2 A . \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot r\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a t\right)}{r} \tag{199a}$$

oder, wenn wir die Gleichungen (186b) und (187) berücksichtigen

$$\varphi = \frac{2 A . \cos(k r) . \cos(n t)}{r} \tag{199b}$$

Die aus beiden fortlaufenden Wellen resultirende Bewegung besteht also in einfachen Schwingungen, welche für verschiedene Werthe von r sehr verschiedene, zwischen Null und $2A$ liegende Amplituden haben. Zwischen den schwingenden Theilen finden wir auch solche, in welchen das φ unverändert bleibt, für welche nämlich $\cos(kr) = 0$ ist. Man nennt solche Wellen, bei denen die schwingenden Abtheilungen von einander durch Punkte oder Flächen mit ungeänderten Werthen von φ getrennt sind, „stehende Wellen," weil sie sich nicht regelmäſsig fortpflanzen wie die Wellen, die wir ursprünglich kennen gelernt haben, sondern an derselben Stelle stehen bleiben.

Für die Optik sind im allgemeinen die stehenden Schwingungen von sehr geringer Bedeutung. Erst in der neuesten Zeit sind Versuche ausgeführt worden, bei denen stehende Schwingungen des Lichtes in die Erscheinung treten. Hr. O. Wiener und später Hr G. Lippmann haben in Collodiumhäutchen, die mit Silbersalzen imprägnirt waren, Interferenzen, d. h. stehende Wellen durch Reflexion an einer Quecksilberfläche, die die Collodiumhäute dicht berührte, erzeugt. In den in regelmäſsigem Abstand auf einander folgenden Flächen, welche die Schwingungsbäuche enthielten, werden dann die Silbersalze zersetzt. Auf diese Weise hat Hr. G. Lippmann farbige Photographien hergestellt.

Sonst sind nach unserer bisherigen Kenntniſs die stehenden Schwingungen nur für die Akustik von Bedeutung.

§ 45. Das Huyghens'sche Princip unter der Voraussetzung pendelartiger Schwingungen.

Setzen wir

$$\psi = \frac{\cos(k\,r)}{r} \tag{200}$$

in welcher Annahme wir den Factor sin $(n\,t)$ bez. cos $(n\,t)$ fortgelassen haben, weil im Folgenden die Abhängigkeit der Function ψ von der Zeit nicht mehr in Betracht kommt, so wird dieser Werth für $r = 0$ unendlich; denn wenn wir cos $(k\,r)$ in eine Reihe entwickeln und durch r dividiren, so ergiebt sich

$$\frac{\cos(k\,r)}{r} = \frac{1}{r} - \frac{k^2 . r}{1.2} + \frac{k^4 . r^3}{1.2.3.4} - + \ldots \tag{201}$$

worin das erste Glied für $r = 0$ unendlich wird, und ebenfalls wird auch der Differentialquotient nach r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(k\,r)}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} - \frac{k^2}{1.2} + 3.\frac{k^4 . r^2}{1.2.3.4} - + \ldots \tag{201a}$$

für $r = 0$ unendlich.

Hätten wir es hier mit der Bewegung einer Flüssigkeit zu thun, so würde, wenn ψ das Geschwindigkeitspotential ist, $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ die Flüssigkeitsmenge bedeuten, welche in Richtung des Radius strömt, und es würde also im Punkte $r = 0$ eine Ausströmung nach allen Richtungen des Radius stattfinden müssen, was natürlich bei substantieller Flüssigkeit nie der Fall sein kann; aber wir wissen, daſs auch bei unseren elektromagnetischen Schwingungen ein solches Ausströmen der Elektricität von einem Punkte nach allen Richtungen hin nicht stattfinden darf, weil die Dichtigkeit der wahren Elektricität in jedem geschlossenen Raume unverändert bleiben muſs, was bei einem solchen gleichzeitigen Abflieſsen nach allen Seiten unmöglich ist.

Diese Form der Bewegung kann demnach nur unter Ausnahmsbedingungen für den Punkt $r = 0$ stattfinden, die für die anderen Punkte des Raumes nicht bestehen. Er wäre bei Bewegungen von Flüssigkeiten als ein Einströmungspunkt oder Ausströmungspunkt aus dem Raume zu bezeichnen.

Wenn wir daher nun in unsere Gleichung (193)

$$\int \psi \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial N} \,.\, d\,\omega = \int \varphi \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial N} \,.\, d\,\omega$$

für ψ den in unserer Gleichung (200) angegebenen Werth benutzen wollen, so müssen wir uns den Punkt $r = 0$ mit einer kleinen Kugel umgeben denken, deren innerer Raum von dem Raume, über den wir die Integration erstrecken, ausgeschlossen wird. Als Integrationsfläche haben wir dann neben der äusseren Grenze des Integrationsraumes auch noch die Oberfläche der kleinen Kugel. Uebrigens behalten wir uns vor, den Radius dieser kleinen Kugel schliefslich bis über jede endliche Grenze hinaus klein werden zu lassen.

An der kleinen Kugel, welche den Punkt $r = 0$ umschliefst, fällt die Normale mit dem nach aufsen gerichteten Radius zusammen, und wir haben daher hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial N} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \,.\, \cos(k r) - \frac{k \sin(k r)}{r} \end{aligned} \tag{200a}$$

Statt des Flächenelementes $d\,\omega$ wollen wir nun wieder das Element einer Kugelfläche vom Radius 1 einführen und dasselbe wie früher mit $d\,\Omega$ bezeichnen, so dafs wir also an der Oberfläche der kleinen Kugel haben

$$\begin{aligned} d\,\omega \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \left(-\frac{1}{r^2} \,.\, \cos(k r) - \frac{k \,.\, \sin(k r)}{r}\right) . \, r^2 \,.\, d\,\Omega \\ &= \left(-\cos(k r) - k \,.\, r \,.\, \sin(k r)\right) . \, d\,\Omega \end{aligned}$$

und für diese Oberfläche ergiebt sich

$$\int \varphi \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\,\omega = -\int \varphi \,.\, \{\cos(k r) + k \,.\, r \,.\, \sin(k r)\} \,.\, d\,\Omega \tag{202}$$

Lassen wir nun r sehr klein werden, so wird $\cos(k r) = 1$, während $k \,.\, r \,.\, \sin(k r) = 0$ wird, und es ist daher

$$\int \varphi \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\,\omega = -\int \varphi \,.\, d\,\Omega \tag{203}$$

Wenn die Kugel sehr klein, und die Function φ continuirlich ist, so wird kein Unterschied der Werthe von φ im Innern und an der Oberfläche der Kugel bestehen. Bezeichnen wir daher den Werth von φ im Punkte $r = 0$, also im Mittelpunkte der Kugel mit φ_0, so erhalten wir nunmehr für das Integral ausgedehnt über die Oberfläche der kleinen Kugel den Werth

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = -\varphi_0 \int d\Omega$$
$$= -4\pi \cdot \varphi_0 \qquad (204)$$

Hiermit ist aber das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (193) noch nicht vollständig gebildet; denn es kommt noch der Theil hinzu, welcher über die äufsere Grenzfläche des Raumes zu nehmen ist. Dieser ist aber

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \qquad (205)$$

Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (193) ein, so erhalten wir:

$$\int \frac{\cos(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = -4\pi \cdot \varphi_0 + \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \quad (206)$$

wo auch das Integral der linken Seite nur über die äufsere Oberfläche erstreckt zu werden braucht, weil für die kleine Kugel $\frac{d\omega}{r} = r\, d\Omega$ und daher das Integral Null wird, oder

$$4\pi\varphi_0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\cos(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega \qquad (206\text{a})$$

Bevor wir zu der physikalischen Interpretation dieser Gleichung übergehen, wollen wir dieselbe noch anders schreiben, indem wir wieder das Zeichen der Function ψ einführen. Wir erhalten dann

$$4\pi\varphi_0 = \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) \cdot d\omega \qquad (206\text{b})$$

Wenn wir also für ψ eine den Factor $\cos(kr)$ enthaltende Function einführen, so können wir den Werth φ_0, d. h. den Werth, welchen φ in dem Punkte $r = 0$ hat, durch dieses über die äufseren Grenzen zu nehmende Integral finden.

Wir kehren nunmehr wieder zu unserer Gleichung (206 a) zurück.

Den Werth der Function φ im Mittelpunkte oder eigentlich an der Oberfläche der kleinen Kugel, der aber mit dem Werthe in dem Mittelpunkte zusammenfällt, haben wir also dargestellt durch die Differenz zweier Integrale. Das zweite Integral können wir so auffassen, als wenn es von einer einfachen Schicht von Erregungspunkten herrührte, in deren Amplitude der Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ vorkommt.

Das erste Integral hat eine etwas abweichende Form. Grenzintegrale derselben Art sind schon in § 41 vorgekommen und auch ihre Bedeutung ist dort kurz erörtert. Da der jetzt vorliegende Fall einfacher ist, so wiederhole ich diese Deutung hier etwas eingehender und ausführlicher.

Denken wir uns zu der Grenzfläche eine ihr in dem verschwindenden Abstande dN parallele Fläche construirt und nehmen wir an, dafs die beiden an den Enden einer solchen Normale gelegenen Punkte stets in dem entgegengesetzten Schwingungszustand sich befänden, d. h. dafs in jedem Augenblick ihre Entfernung von der Gleichgewichtslage gleich grofs, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sei, so wird die Intensität ihrer Wirkung auf einen Punkt im Innern des Raumes sich nicht vollständig aufheben, sondern etwas verschieden sein, weil diese beiden Flächen etwas verschiedenen Abstand von ihm haben. Ist nun $-\frac{\varphi}{dN}$, wenn der Ausdruck erlaubt ist, gleich der Intensität der Bewegung in dem einen Erregungspunkte, so würde in dem Punkte, von dem aus r gerechnet wird, seine Wirkung gleich

$$-\frac{\varphi}{dN}\cdot\frac{\cos(kr)}{r}$$

sein; für den anderen, den äufseren Punkt, haben wir nun die Intensität $+\frac{\varphi}{dN}\cdot$ Aber es ist für diesen der Werth von r etwas gröfser, und es hat daher $\frac{\cos(kr)}{r}$ als Function von r einen etwas anderen Werth. Wir haben daher statt $\frac{\cos(kr)}{r}$ hier

$$\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right).dN$$

oder

$$\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}.dN$$

zu setzen. Die Differentiation in dem zweiten Gliede dieses Ausdrucks mufs nach N erfolgen, weil nur die Zunahme in Betracht kommt, welche der Werth von r erleidet, wenn man in Richtung der Normale um dN vorwärts geht.

Die Gesammtwirkung beider Punkte ist also gleich

$$-\frac{\varphi}{dN}\cdot\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\varphi}{dN}\left\{\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}\cdot dN\right\}$$

Die beiden ersten Glieder heben sich, und es bleibt nur dasjenige Glied stehen, welches sich auf den Unterschied der Lage der beiden Schichten bezieht, nämlich

$$\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(k r)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N}$$

Dieses ist aber die Gröfse, über welche das erste Oberflächenintegral in unserer Gleichung (206a) zu nehmen ist.

Wir können also in diesem Falle die ganze Bewegung im Innern, wenn nur die Function φ unserer Differentialgleichung (188) entspricht, auffassen als Superposition einer Reihe von kugelförmigen Wellen, welche von den Punkten der Grenzfläche ausgehen. Die Mittelpunkte dieser Wellensysteme bilden theils eine einfache Schicht, theils eine Doppelschicht, welche beide die Grenzfläche überziehen. Die Wellen der ersten Schicht sind in dem zweiten Integral dargestellt, und die Intensität derselben ist, wenn wir φ als Bewegungspotential auffassen, gleich der Intensität derjenigen Componente der Bewegung, welche senkrecht zur Grenzfläche steht. Die Intensität der Bewegung in der Doppelschicht von Erregungspunkten, von denen die eine positiv, die andere negativ genommen wird, ist gleich $\frac{\varphi}{d N}$.

Zur Charakterisirung des Unterschiedes zwischen den Wellenpotentialen und den Potentialfunctionen der anziehenden und abstofsenden Kräfte der Elektricität und des Magnetismus ist hier zu bemerken, dafs eine Potentialfunction der Elektricität im Innern eines abgegrenzten Raumes immer entweder als Potentialfunction einer einfachen Schicht, die längs der Oberfläche des Körpers liegt, oder als Potentialfunction einer Doppelschicht dargestellt werden kann; bei den Wellenpotentialen aber hat man keine solche freie Wahl, wie man schon daraus schliefsen kann, dafs Wellenpotentiale bestehen können, die im Innern einer Kugel von Null verschieden, und längs der ganzen Oberfläche gleich Null sind, so dafs also hier keine Bewegung vorhanden ist.

Setzen wir in unserer Gleichung (193)

$$\psi = \frac{\sin(k r)}{r} \tag{207}$$

so ist die ganze Untersuchung sehr ähnlich der soeben angestellten, nur brauchen wir keinen Punkt von dem betrachteten Raume auszuschliefsen. Bilden wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cdot\sin(kr) + \frac{k.\cos(kr)}{r} \tag{207a}$$

und multipliciren mit $r^2 . d\,\Omega$, so erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot r^2 . d\,\Omega = \left(-\sin(kr) + k.r.\cos(kr)\right) d\,\Omega \tag{208}$$

Für $r = 0$ verschwinden beide Glieder, das erste, weil $\sin(kr) = 0$ wird, und das zweite, weil es noch den Factor r enthält. Unter diesen Umständen wird auf der rechten Seite der Gleichung (193) das Integral über die Oberfläche der kleinen Kugel gleich Null, während in den beiden anderen Integralen nur $\cos(kr)$ durch $\sin(kr)$ zu ersetzen ist. Wir erhalten also

$$0 = \int \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}\cdot d\,\omega - \int\frac{\sin(kr)}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial N}\cdot d\,\omega \tag{209}$$

oder

$$\int \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}\cdot d\,\omega = \int\frac{\sin(kr)}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial N}\cdot d\,\omega \tag{209a}$$

Diese Gleichungen sagen aber nur aus, dafs diese beiden Integrale, wenn wir sie über einen begrenzten Raum ausdehnen, einander gleich sind. Sie bleiben unverändert, wenn wir in ihnen φ mit $\frac{\sin(kr)}{r}$ vertauschen. Da die Function $\frac{\sin(kr)}{r}$ ebenso wie die Function φ keinen Ausnahmspunkt hat, so war auch eigentlich kein anderes Ergebnifs zu erwarten.

Es könnten nun noch im Innern des betreffenden Raumes Erregungspunkte liegen, die dann für φ als Ausnahmspunkte zu betrachten sein würden. Das ergäbe ganz ähnliche Verhältnisse für φ, wie wir sie für ψ soeben besprochen haben. Es ist daher nicht nöthig, darauf noch besonders einzugehen.
