

## **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

### **Vorlesungen über theoretische Physik**

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

**Helmholtz, Hermann von**

**Leipzig, 1897**

Vierter Theil. Die Beugung des Lichtes

## Vierter Theil. Die Beugung des Lichtes.

### Erster Abschnitt. Allgemeines.

#### § 46. Die physikalischen Bedingungen der Beugungs- erscheinungen.

Die bisher bei den Raumintegralen angenommenen Grenzen brauchen gar keine physischen Grenzen zu sein, sondern wir können auch eine nur gedachte Grenzfläche als solche behandeln. Wenn wir also in der Oberfläche irgend eines Raumes an den einzelnen Stellen die Werthe von  $\varphi$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  kennen, so können wir mittels

der früher abgeleiteten Sätze die Werthe von  $\varphi$  an einer beliebigen Stelle im Innern des Raumes finden. Von Wichtigkeit sind nun besonders diejenigen Fälle, bei welchen die bestehende physische Grenzfläche nicht ganz vollständig ist.

Eine Scheidewand  $AB$  (Fig. 21), die den Punkt  $O$ , von dem die Lichtbewegung ausgeht, nur unvollständig umschliesst, weil sie die Oeffnung  $mn$  enthält, können wir durch eine gedachte Fläche  $mn$  vervollständigen und den Raum jenseits derselben als durch sie begrenzt betrachten.

Für die hier folgende Untersuchung werde angenommen, dass die Wellen, welche auf einen solchen un-

durchsichtigen Schirm auftreffen, an ihm vollständig vernichtet werden. Diese Annahme ist zwar nicht experimentell zu verwirklichen, denn

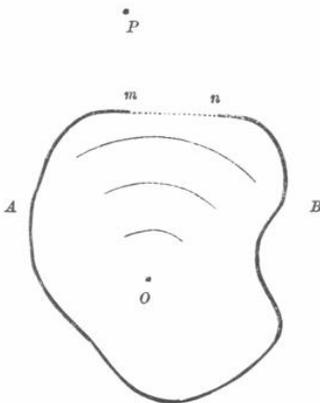


Fig. 21.

die Lichtwellen werden selbst von den schwärzesten und undurchsichtigsten Körpern, die wir ihnen entgegen stellen können, nur unvollständig zerstört; aber es giebt doch Körper, die sehr nahehin die Eigenschaft haben, die auf sie auffallenden Lichtstrahlen weder durchzulassen, noch in merklichem Grade zu reflectiren. Wenn wir also diese Eigenschaft bei unserem Schirme als vollständig vorhanden annehmen, so kann man die Werthe der Function  $\varphi$  und ihrer Differentialquotienten in der idealen Grenzfläche als durch die hier einfallenden Wellen gegeben betrachten und völlig von den Lichtbewegungen absehen, welche auf die anderen Theile des Schirmes treffen. Für alle Punkte, welche jenseits, d. h. außerhalb des Schirmes liegen, sind dann die Punkte dieser Fläche als die Punkte einer Erregungsfläche anzusehen, in der die Differentialquotienten von  $\varphi$  und die Function  $\varphi$  selbst für jeden Punkt der idealen Grenzfläche als Functionen der Zeit gegeben sind. Durch Berechnung der Integrale kann man dann die Bewegungen finden, welche in einem beliebigen Punkt  $P$  des äußeren Raumes durch die Anstöße erregt worden, welche von der Fläche der Oeffnung  $m n$  ausgehen.

Die sich hier ergebenden Erscheinungen sind diejenigen, welche man in der Optik als Beugung oder Diffraction des Lichtes bezeichnet. Sie sind namentlich deshalb von Wichtigkeit und Interesse, weil sich durch ihre eingehendere Betrachtung zeigen wird, weshalb sich die Lichtstrahlen in den meisten Fällen, die wir in alltäglicher Erfahrung vor Augen haben, in gerader Richtung fortbewegen, und weshalb nur ausnahmsweise Erscheinungen sichtbar werden, bei denen Lichtstrahlen um die Ecke herum zu gehen scheinen.

§ 47. Vereinfachung des Huyghens'schen Princips durch ausschließliche Berücksichtigung großer Abstände von der beugenden Oeffnung.

Als wir in § 43 den GREEN'schen Satz für Functionen entwickelten, welche der Differentialgleichung (188)

$$\Delta \varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$$

genügen, fanden wir die allgemeine Gleichung (193)

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega$$

Je nachdem wir nun in § 44 einmal

$$\psi = \frac{\cos kr}{r}$$

und das andere Mal

$$\psi = \frac{\sin kr}{r}$$

setzten, ergaben sich die Gleichungen (206 a) und (209)

$$4\pi\varphi_0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\cos(kr)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(kr)}{r} \cdot d\omega$$

und

$$0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin(kr)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\sin(kr)}{r} \cdot d\omega$$

worin  $\varphi_0$  den Werth von  $\varphi$  in dem Punkte  $r = 0$ , also in dem Punkte, von dem aus  $r$  gerechnet wird, bezeichnet.

Wir wollen in diese Gleichungen nun wieder den Factor einführen, der die behandelten Bewegungen als einfache pendelartige Schwingungen charakterisirt. Wir nehmen dazu aber nicht wie früher  $\cos(nt)$  bez.  $\sin(nt)$ , sondern fügen noch eine beliebige Phasenconstante  $\delta$  hinzu, und multipliciren die erste Gleichung mit  $\cos(nt + \delta)$ , die zweite mit  $\sin(nt + \delta)$ . Da diese beiden Factoren gar nicht von  $r$  abhängen, so können wir die Multiplication unter dem Differentialzeichen vornehmen und erhalten dann durch Addition beider Gleichungen und geeignete Zusammenfassung

$$4\pi\varphi_0 \cdot \cos(nt + \delta) = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r} \cdot d\omega \quad (210)$$

Dadurch werden die Functionen wieder abhängig von der Zeit, und zwar wechselt der Factor, welcher diese Abhängigkeit ausdrückt, in seinem absoluten Betrage zwischen 0 und 1.

Was nun das erste Integral der rechten Seite betrifft, so haben wir früher schon gesehen, dafs Integrale dieser Form in zwei Theile zerfallen. Der eine Theil hat  $r$  in erster Potenz im Nenner, und stellt also eine Wellenbewegung dar, deren Amplitude wie  $\frac{1}{r}$  abnimmt. Es ist dieses die langsamste Art der Abnahme, welche beim Fortschreiten kugelförmiger Wellen vorkommt; der andere Theil enthält den Factor  $\frac{1}{r^2}$ ; die durch ihn dargestellten Wellen nehmen also schneller ab und verschwinden in größerer Entfernung gegen die erst genannten Glieder, so dafs man in Entfernungen, welche relativ groß gegen die Wellenlänge sind, diese Glieder, welche  $r^2$  im Nenner haben, gegen die anderen im allgemeinen vernachlässigen

kann. Es tritt nämlich in dem zweiten Theile noch der Factor  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  hinzu, welcher selbst sehr groß ist, und wir können daher die folgende Betrachtung darüber anstellen, von wann an diese Vernachlässigung gestattet ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cdot \cos(kr - nt - \delta) - \frac{k \cdot \sin(kr - nt - \delta)}{r} \\ &= -\frac{1}{r^2} [\cos(kr - nt - \delta) + kr \cdot \sin(kr - nt - \delta)] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial r}} \right\} (211)$$

Da nun nach Gleichung (187)

$$kr = \frac{2\pi \cdot r}{\lambda}$$

so wird dieser Factor des zweiten Gliedes, sobald  $r$  im Vergleich zu der Wellenlänge  $\lambda$  unendlich groß, ebenfalls unendlich groß, und wir können dann das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen. Wenn also die Wellenlänge unendlich klein gegen die Entfernung  $r$  ist, reducirt sich das erste Integral auf der rechten Seite unserer Gleichung (210) auf

$$-\int \varphi \cdot \frac{k \cdot \sin(kr - nt - \delta)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega$$

und es erhält demnach dieses Integral, von dem wir früher (§ 45) sahen, daß es als das Wellenpotential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die längs der betreffenden Oberfläche liegt, aufgefaßt werden konnte, nunmehr die Form des Wellenpotentials einer einfachen Schicht. Die Gleichung (210) können wir jetzt schreiben:

$$\begin{aligned} 4\pi \varphi_0 \cdot \cos(nt + \delta) &= -\int \varphi \cdot k \cdot \frac{\sin(kr - nt - \delta)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \\ &\quad - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r} \cdot d\omega \end{aligned} \quad \left. \vphantom{4\pi \varphi_0} \right\} (212)$$

#### § 48. Allgemeine Betrachtungen über die vorkommenden Integralformen.

Die trigonometrischen Functionen, über welche wir in den hier vorkommenden Gleichungen zu integriren haben, wechseln zwischen den Werthen  $+1$  und  $-1$ , und zwar wechseln sie in der Regel sehr schnell zwischen diesen Grenzwerten; da sie jedesmal den ganzen

Cyclus durchlaufen, wenn die Entfernung  $r$  um die Wellenlänge  $\lambda$  zu- oder abnimmt. Die Entfernungen, welche hier für gewöhnlich in Betracht kommen, sind nun aber, verglichen mit den Wellenlängen des Lichtes, sehr groß, da die letzteren Größen sind, welche den tausendsten bis dreitausendsten Theil eines Millimeters bilden, also sehr klein im Vergleich zu allen sichtbaren Dimensionen sind. Es kommen nur ausnahmsweise einzelne Erscheinungen vor, bei denen wir das Verhältniß der sonstigen in die Rechnung eingehenden Entfernungen zu den Wellenlängen nicht als unendlich groß anzunehmen haben. In unseren Integralen wechselt also der eine Factor in sehr kurzen Zwischenräumen zwischen positiven und negativen Werthen, stellt dabei aber immer einen echten Bruch dar, während die anderen in dem Integral vorkommenden Factoren sich verhältnißmäßig langsam ändern. Die Integrale selbst werden dadurch in eine Reihe von Schichten und Streifen zerlegt, welche abwechselnd entgegengesetztes Zeichen haben und sich also bei der Addition gegenseitig von einander abziehen, so daß im allgemeinen, abgesehen von jenen Ausnahmefällen, sich die Werthe dieser Integrale auf sehr kleine Größen reduciren. Wenn wir ein solches Integral haben, z. B.

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \cos(kx) \cdot dx$$

so können wir dasselbe, vorausgesetzt, daß  $\varphi$  eine continuirliche Function von  $x$  ist, immer durch partielle Integration umformen, indem wir den Factor  $\cos(kx)$  nach  $x$  integriren; wir erhalten dann:

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \cos(kx) \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \cdot \varphi(x) - \frac{1}{k} \int_a^b \sin(kx) \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \cdot dx \quad (213)$$

Wenn nun  $\varphi(x)$  lauter endliche Werthe hat, so würde das erste Glied endlich sein, da man diese endlichen Werthe für die beiden Grenzen mit  $\sin(kx)$  zu multipliciren und dann von einander zu subtrahiren hat, wodurch sie also auch nur eine endliche Differenz geben können. Wenn  $\varphi(x)$  für  $a$  und  $b$  von Null verschieden ist, so würde dieser erste Theil also gleich sein

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \cdot \varphi(x) = \frac{1}{k} \cdot \sin(kb) \cdot \varphi(b) - \frac{1}{k} \cdot \sin(ka) \cdot \varphi(a) \quad (214)$$

Es könnte im allgemeinen noch vorkommen, daß auch innerhalb der Integration Sprünge in dem Werthe von  $\varphi(x)$  eintreten, die dann als Grenzen des Integrationsintervalls berücksichtigt werden müßten.

Das zweite Glied ist dem ursprünglichen Integral sehr ähnlich; für  $\varphi_{(x)}$  ist der Differentialquotient  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  eingetreten, und außerdem ist noch der Factor  $\frac{1}{k}$  hinzugekommen. Indem wir wieder partiell integrieren, ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} \cdot \int_a^b \frac{\partial \varphi_{(x)}}{\partial x} \sin(kx) dx &= - \frac{1}{k^2} \cos(kx) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{k^2} \int_a^b \cos(kx) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

Es ist also:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \varphi \cdot \cos(kx) dx &= \frac{1}{k} \cdot \varphi_{(x)} \cdot \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial \varphi_{(x)}}{\partial x} \cdot \cos(kx) \\ &- \frac{1}{k^2} \int_a^b \frac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial x^2} \cdot \cos(kx) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (213a)$$

Durch weitere Integration tritt also jedesmal der Factor  $\frac{1}{k}$  hinzu, und da nun

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

eine sehr kleine Größe ist, so verschwinden die folgenden Glieder, vorausgesetzt, daß bei fortgesetzten Differentiationen nicht Unstetigkeiten der höheren Differentialquotienten hinein kommen, die dann weiter berücksichtigt werden müssen. In den meisten Fällen kann man schon nach dem ersten Gliede die Reihe abbrechen und die folgenden Glieder vernachlässigen. Es wäre dann also

$$\int_a^b \varphi \cdot \cos(kx) \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \varphi_{(x)} \cdot \sin(kx) \quad (213b)$$

Wenn aber die eine Grenze  $x = 0$  ist, und an der anderen Grenze  $\varphi = 0$ , so würde das erste Integral überhaupt verschwinden, und es müssen dann die folgenden Glieder beachtet werden. Dergleichen Fälle kommen vielfach vor.

Die partielle Integration darf man immer nur so lange fortsetzen, als die entstehenden Differentialquotienten innerhalb der

ganzen Ausdehnung der Integration endlich sind. Sobald man auf einen Differentialquotienten stößt, der unendlich ist, muß die Entwicklung abgebrochen werden.

Im allgemeinen sind die Integrale, auf welche wir bei der Beugung geführt werden, sehr schwierig und erfordern zum Theil eine weitläufige Rechnung. Es war zuerst ein deutscher Physiker, SCHWERD, welcher diese Rechnungen in grofser Breite durchgeführt und eine Menge von einzelnen Fällen behandelt hat. In dem Handbuche der Optik von G. RADICKE sind ebenfalls sehr viele specielle hierher gehörige Integrationen ausgeführt.

Man kann eine ganze Anzahl von verschiedenartigen Figuren herstellen, die sich zur Beobachtung der Diffraction eignen, z. B. geradlinige Schirme mit Ausschnitten oder ohne Ausschnitte, die selbst wieder die verschiedensten Formen haben können, bald quadratische, bald rechteckige, bald dreieckige. Sie können theils einzeln, theils zu Systemen verbunden, benutzt werden. Dadurch wird eine ungeheure Mannigfaltigkeit der Erscheinungen hervorgerufen. Die wichtigsten Folgerungen knüpfen sich an die Benutzung rechtwinkliger Oeffnungen.

Bevor wir aber hierauf eingehen, wollen wir zunächst den einfacheren Fall einer runden Oeffnung behandeln.

---

## Zweiter Abschnitt.

### Beugung an einer einzelnen Oeffnung.

---

#### § 49. Beugung ebener Wellen an einer runden Oeffnung.

Wir wollen annehmen, es sei ein Zug ebener Wellen, der von einem unendlich entfernten Punkte ausgeht, bis zu einer bestimmten Grenzfläche gekommen, welche eine Oeffnung in einem schwarzen Schirm ausfüllt. Die Fortsetzung dieses Wellenzuges auf der anderen Seite des Raumes können wir dann, wie gezeigt ist, als Folge der Erschütterungen auffassen, in welche die Punkte dieser Grenzfläche gekommen sind. Nach der Betrachtung, die wir eben gemacht haben, müfste dann eine Intensität der Erregung an dieser Grenzfläche angenommen werden, welche abhängig ist von  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ ,  $\varphi$  und  $\frac{\partial r}{\partial N}$ .

Nun haben  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  und  $\varphi$  bei einem Zug ebener Wellen in der ganzen Breite der Oeffnung constanten Werth, und  $\frac{\partial r}{\partial N}$  würden wir, wenn die Oeffnung klein ist gegen die in Betracht kommenden Entfernungen  $r$ , und wenn die Entfernung des Punktes, in dem man die Lichtbewegung untersuchen will, von einer auf der Oeffnung errichteten Normalen im Verhältniss zu  $r$  klein ist, als sehr wenig von 1 verschieden annehmen können. Wir können demnach die in Gleichung (212) vorkommenden Factoren, welche die Grösse der Amplitude in der Oeffnung bedingen, in eine Constante  $A$  zusammenfassen. Da es ferner in diesem Falle nicht nöthig ist, die Abhängigkeit von der Zeit besonders zu berücksichtigen, und da es hier auf eine allen Schwingungen hinzugefügte constante Phasendifferenz nicht ankommt, so kann man für einen solchen Punkt die Bewegung ausdrücken durch die Gleichung.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int A \cdot \frac{\cos(kr)}{r} \cdot d\omega \quad (216)$$

worin  $r$  die Entfernung des Punktes, auf den sich  $\varphi$  bezieht, von den einzelnen Punkten der Oeffnung, und  $d\omega$  ein Element der letzteren bezeichnet. Die Oeffnung, über welche das Integral auszudehnen ist, wollen wir uns durch Polarcoordinaten zerlegt denken. Wir bezeichnen mit  $\rho$  die Entfernung eines Punktes der Oeffnung von dem Fußpunkte des Lothes, welches von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen, auf die ebene Grenzfläche gefällt ist. Wir wollen ferner von dem Fußpunkte des Lothes zwei Gerade gezogen denken, welche das Winkelement  $d\alpha$  einschliessen; dann wäre ein Flächenelement gleich  $\rho \cdot d\alpha \cdot d\rho$  zu setzen. Ist  $z$  die Länge des Lothes, welches von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen, auf die Ebene gefällt ist, so ist

$$r^2 = z^2 + \rho^2$$

und daraus folgt durch Differentiation, da für die einzelnen Punkte der Oeffnung die Entfernung  $z$  unveränderlich bleibt

$$2r \cdot dr = 2\rho \cdot d\rho$$

so dafs wir also für das Oberflächenelement  $d\omega$  erhalten:

$$d\omega = r \cdot dr \cdot d\alpha$$

Setzen wir nun diesen Werth für  $d\omega$  in das Integral der Gleichung (216) ein, so hebt sich  $r$  im Zähler und Nenner, und es ergibt sich das verhältnismäfsig einfache Integral:

$$\varphi = \frac{A}{4\pi} \iint \cos(kr) \cdot dr \cdot d\alpha \quad (216a)$$

wobei die Integrationen über  $\alpha$  und  $r$  in den Grenzen auszuführen sind, welche der Oeffnung entsprechen.

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch davon gemacht, daß wir die Gestalt der Oeffnung kreisförmig angenommen haben. Dieses wollen wir nunmehr berücksichtigen und außerdem festsetzen, daß der Punkt, für welchen die Bewegung untersucht werden soll, auf dem Lothe liege, welches im Mittelpunkt des Kreises errichtet ist. Dann können wir ohne weiteres nach  $\alpha$  integriren, weil jeder Ringstreifen in ganzer Länge in der Oeffnung enthalten ist. Das Integral bekommt dadurch den Factor  $2\pi$ , und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{2} \int \cos(kr) \cdot dr \\ &= \frac{A}{2k} \cdot \overline{\sin(kr)} \end{aligned} \quad (217)$$

Die obere Grenze der Integration ist gegeben durch den Rand und die untere durch den Mittelpunkt der Oeffnung. Den Werth von  $r$  für den Rand wollen wir nun mit  $R$  bezeichnen; dann erhalten wir, da der Werth von  $r$  für den Mittelpunkt schon mit  $x$  bezeichnet ist,

$$\varphi = \frac{A}{2k} \cdot [\sin(kR) - \sin(kx)] \quad (217a)$$

Hierin ist  $\frac{A}{2k}$  ein constanter Factor, während die Differenz der beiden Sinuswerthe mit der Lage des Punktes sich ändert. Beziehen wir unseren Werth auf verschiedene Punkte in der Axe, so ist zwar stets  $R$  größer als  $x$ , und damit auch  $kR$  größer als  $kx$ ; aber der Unterschied wird immer kleiner, je weiter wir von der Oeffnung abgehen. Jedesmal, wenn  $kR$  und  $kx$  um  $2\pi$  oder ein Vielfaches von  $2\pi$ , also  $R$  und  $x$  um  $\lambda$  oder ein Vielfaches von  $\lambda$  differiren, wird die Differenz der beiden Sinus verschwinden. Es giebt also in der Axe eine Reihe von Stellen, in denen der Werth von  $\varphi$  gleich Null wird, d. h. keine Lichtbewegung vorhanden ist; dazwischen liegen Strecken, wo einer der beiden Sinuswerthe überwiegt, und wo demnach Bewegung besteht. Das Phänomen zeigt sich also wesentlich darin, daß in der Länge der Axe hinter einander eine Reihe von Nullpunkten auftreten, die nicht vorhanden sein würden, wenn die vorhandenen Wellen sich einfach weiter fortpflanzen würden.

Für sehr entfernte Punkte auf der Axe wird  $R$  ebenso lang sein wie  $x$ , und es werden daher in sehr großem Abstand von der Oeffnung solche Unterbrechungen nicht mehr eintreten. Der erste, d. h.

der entfernteste Punkt, in dem die Lichtbewegung verschwindet, wird derjenige Punkt sein, wo  $R$  um eine Wellenlänge größer ist als  $\lambda$ , die anderen, welche da liegen, wo diese Differenz zwei, drei Wellenlängen beträgt, rücken immer näher und näher zu einander, bis sie endlich nur eine Wellenlänge von einander entfernt sind, denn dicht vor der Mitte der Oeffnung wird die Entfernung von der Peripherie sich gar nicht mehr ändern.

Wir haben hier einen der einfachsten Fälle, in welchem sich zeigt, daß die Wirkungen, die von verschiedenen Theilen der Oeffnung ausgehen, sich gegenseitig aufheben können.

### § 50. Aufstellung der Gleichung für die Beugung kugelförmiger Wellen an einer beliebigen Oeffnung.

Wir wollen nun voraussetzen, daß in dem Schirm eine beliebig gestaltete Oeffnung sich befindet, deren Größe klein ist im Vergleich zu ihrer Entfernung sowohl von dem leuchtenden Punkte, als von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen. Die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Oeffnung sei aber doch endlich, so daß an dieser keine ebenen, sondern kugelförmige Wellen anlangen. In die Ebene der Oeffnung legen wir die  $xy$ -Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und zwar legen wir, weil man später eine Reihenentwicklung nach den

Coordinaten der Oeffnung ausführen muß, und es vortheilhaft ist, die Glieder derselben möglichst klein zu halten, den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung. Es sei dann (Fig. 22)  $x_1 y_1 z_1$  der leuchtende Punkt, und  $x_0 y_0 z_0$  derjenige, für welchen die Wirkung gesucht wird.

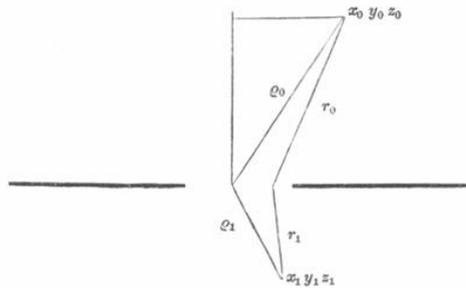


Fig. 22.

Die Punkte bez. die Flächenelemente in der Oeffnung haben die laufenden Coordinaten  $x y$ , weil für sie  $z = 0$  ist. Die Entfernung von einem Flächenelemente  $x y$  bis zum Punkte  $x_1 y_1 z_1$  sei mit  $r_1$ , und bis zum Punkte  $x_0 y_0 z_0$  mit  $r_0$  bezeichnet. Der Zug von Kugelwellen, welcher von dem leuchtenden Punkte  $x_1 y_1 z_1$  ausgegangen ist, möge das Wellenpotential:

$$\varphi_1 = \frac{\cos(k r_1 - n t - \delta)}{r_1} \quad (218)$$

besitzen. In diesem Werthe ändert  $r_1$  seine Länge mit der Lage des Punktes in der Oeffnung; aber der Einfluss, welchen diese Aenderung im Nenner auf den Werth von  $\varphi_1$  ausübt, verschwindet gegenüber dem Einfluss, welchen die Aenderung im Zähler bewirkt; denn in letzterem wird eine sehr kleine Lagenänderung schon den Werth des Cosinus von  $-1$  in  $+1$  verwandeln können, während eine eben solche Veränderung für den Nenner verschwindet. Wir können daher den Nenner  $r_1$  bei kleiner Oeffnung als eine Constante behandeln. Dasselbe ist der Fall mit der Neigung von  $r_1$  gegen die verschiedenen Theile der Oeffnung. Wir erhalten ferner:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = -k \cdot \frac{\sin(kr_1 - nt - \delta)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \quad (219)$$

Denn beim zweiten bei der Differentiation auftretenden Gliede fehlt erstens der Factor  $k$  und zweitens erscheint im Nenner die zweite Potenz von  $r_1$ , so dass dies Glied gegen das erste verschwindet.

Bezeichnen wir nun mit  $\Phi_0$  das Wellenpotential im Punkte  $x_0 y_0 z_0$  selbst, so muss in der Oeffnung  $\Phi_0$  in jedem Augenblicke mit  $\varphi_1$  übereinstimmen. Das giebt uns die Möglichkeit,  $\Phi_0$  zu bestimmen. Wir denken uns zu dem Zweck  $\varphi_1$  in die beiden Theile zerlegt:

$$\varphi_1 = \frac{\cos kr_1}{r_1} \cos(nt + \delta) + \frac{\sin kr_1}{r_1} \sin(nt + \delta)$$

und dementsprechend wie in (219)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = -k \frac{\sin kr_1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cos(nt + \delta) + k \frac{\cos kr_1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} \sin(nt + \delta)$$

und wenden auf jeden Theil die Gleichung (212) an. Um sie auf den zweiten Theil anzuwenden, ist in (212)  $\delta$  durch  $\delta - \frac{\pi}{2}$  zu ersetzen, wodurch  $\cos(nt + \delta)$  in  $\sin(nt + \delta)$ ,  $\sin(kr - nt - \delta)$  in  $\cos(kr - nt - \delta)$  und  $\cos(kr - nt - \delta)$  in  $-\sin(kr - nt - \delta)$  übergeht. Da  $r$  in (212) bedeutet die Entfernung vom Punkte  $x_0 y_0 z_0$ , die wir hier mit  $r_0$  bezeichnen wollen und die Normale ist nach derjenigen Seite der Oeffnung gezogen, auf der der Punkt  $x_0 y_0 z_0$  liegt. So erhalten wir

$$\begin{aligned} 4\pi \Phi_0 = & - \int \frac{\cos kr_1}{r_1} \cdot k \frac{\sin(kr_0 - nt - \delta)}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} d\omega \\ & + \int k \frac{\sin kr_1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\cos(kr_0 - nt - \delta)}{r_0} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int \frac{\sin k r_1}{r_1} \cdot k \frac{\cos(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} d\omega \\
 & + \int k \frac{\cos k r_1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\sin(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} d\omega
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, daß die Linien  $r_0$  und  $r_1$  nahezu auf der Oeffnung senkrecht stehen. Dann ist bis auf Gröfsen zweiter Ordnung  $\frac{\partial r_1}{\partial N} = +1$  und  $\frac{\partial r_0}{\partial N} = -1$ , und es wird

$$4\pi\Phi_0 = \frac{2k}{r_1 r_0} \int \sin(k(r_1 + r_0) - n t - \delta) d\omega \quad (220)$$

Zunächst müssen wir nun die Werthe von  $r_1$  und  $r_0$  nach Potenzen der Gröfsen  $x$  und  $y$  entwickeln, welche in ihnen enthalten sind. Es ist:

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + x_1^2 \\
 &= x_1^2 + y_1^2 + x^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + x_0^2 \\
 &= x_0^2 + y_0^2 + x^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun mit  $\varrho_1$  bez.  $\varrho_0$  die Entfernung der Punkte  $x_1 y_1 x_1$  bez.  $x_0 y_0 x_0$  von dem Anfangspunkt der Coordinaten, so erhalten wir:

$$r_1^2 = \varrho_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x^2 + y^2 \quad (221)$$

und

$$r_0^2 = \varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x^2 + y^2 \quad (222)$$

Nun ist aber zu berücksichtigen, daß unter den gemachten Annahmen  $x^2$  und  $y^2$  gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt werden können, da sie Quadrate von innerhalb der Oeffnung gelegenen Punkten und daher unendlich klein vom zweiten Grade sind. Wir erhalten also in ausreichender Annäherung:

$$r_1^2 = \varrho_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \quad (221a)$$

und

$$r_0^2 = \varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 \quad (222a)$$

Indem wir nun hieraus nach dem binomischen Lehrsatz die Werthe für  $r_1$  und  $r_0$  entwickeln, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \varrho_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{2xx_1}{\varrho_1^2} - \frac{2yy_1}{\varrho_1^2}} \\
 &= \varrho_1 \cdot (1 - x \cdot \frac{x_1}{\varrho_1^2} - y \cdot \frac{y_1}{\varrho_1^2} - \dots)
 \end{aligned}$$

und ein analoger Werth für  $r_0$ . Wenn wir nun die weiteren Glieder als unendlich klein von höherer Ordnung fortlassen, so ist:

$$r_1 = \varrho_1 \cdot \left( 1 - x \cdot \frac{x_1}{\varrho_1^2} - y \cdot \frac{y_1}{\varrho_1^2} \right) \quad (221b)$$

und

$$r_0 = \varrho_0 \cdot \left( 1 - x \cdot \frac{x_0}{\varrho_0^2} - y \cdot \frac{y_0}{\varrho_0^2} \right) \quad (222b)$$

Da nun  $x_1$  und  $y_1$  klein gegen  $r_1$ , bez.  $x_0$  und  $y_0$  gegen  $r_0$ , so stellen die Quotienten  $\frac{x_1}{\varrho_1}$ ,  $\frac{y_1}{\varrho_1}$ ,  $\frac{x_0}{\varrho_0}$  und  $\frac{y_0}{\varrho_0}$  die Winkel dar, welche durch Projection der Winkel  $(\varrho_1, x)$  und  $(\varrho_0, x)$  auf die  $xz$ - bez.  $yz$ -Ebene entstehen. Bezeichnen wir nun mit  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  die positiv oder negativ gerechneten Größen dieser Winkel, indem wir dabei die Richtung von  $\varrho_1$  und  $\varrho_0$  so festsetzen, wie die Wellen laufen und die Projectionen positiv rechnen, wenn sie auf die Seite der positiven  $x$ - oder  $y$ -Axe fallen, so ist

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{x_1}{\varrho_1} & \beta_1 &= -\frac{y_1}{\varrho_1} \\ \alpha_0 &= \frac{x_0}{\varrho_0} & \beta_0 &= \frac{y_0}{\varrho_0} \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Wir erhalten so

$$r_1 = \varrho_1 + x \cdot \alpha_1 + y \cdot \beta_1 \quad (221c)$$

und

$$r_0 = \varrho_0 - x \cdot \alpha_0 - y \cdot \beta_0 \quad (222c)$$

oder

$$r_1 + r_0 = \varrho_1 + \varrho_0 + x \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + y \cdot (\beta_1 - \beta_0) \quad (224)$$

Setzen wir nun diesen Werth in Gleichung (220) ein, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_1 r_0} \cdot \int \sin \{ k(\varrho_1 + \varrho_0) + kx(\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt - \delta \} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (220a)$$

Da nun unsere Phasenconstante  $\delta$  ganz willkürlich zu bestimmen ist, so können wir

$$\delta = k(\varrho_1 + \varrho_0) - \frac{\pi}{2}$$

setzen. Hierdurch haben wir nur den Anfangspunkt der Zeit, also den Zeitmoment, wo die Lichtbewegung mit einem Maximum von dem leuchtenden Punkte  $x_1 y_1 z_1$  ausgeht, festgelegt, und es wird

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_0 r_1} \cdot \int \cos \{ kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt \} \cdot d\omega \quad (220b)$$

oder, wenn wir das Oberflächenelement mit  $dx \cdot dy$  bezeichnen und

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_0 r_1} = C$$

also gleich einer Constanten setzen:

$$\Phi_0 = C \cdot \iint \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt\} \cdot dx \cdot dy \quad (220c)$$

$$= C \cdot \left. \begin{aligned} & \left[ \iint \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \cos nt \cdot dx \cdot dy \right. \\ & \left. + \iint \sin \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \sin nt \cdot dx \cdot dy \right] \end{aligned} \right\} (220d)$$

§ 51. Ausführung der Integration bei einer rechteckigen Oeffnung.

Wir wollen nun annehmen, daß die Oeffnung rechteckig ist, ihre Seiten den Coordinatrichtungen  $x$  und  $y$  parallel sind, und ihr Mittelpunkt Anfangspunkt der Coordinaten ist; dann liegt der eine Rand der Oeffnung eben so weit von dem Anfangspunkte der Coordinaten ab, wie der andere, so daß man also von einem bestimmten negativen Werthe von  $x$  bis zu einem gleich großen positiven Werthe von  $x$ , und ebenso von einem negativen  $y$  bis zu einem gleich großen positiven  $y$  zu integrieren hat. Da nun der Sinus entgegengesetzte Zeichen für gleiche Werthe des  $x$  und  $y$  auf den beiden Hälften der Oeffnung hat, so hebt sich dieser Theil des Integrals weg, und es bleibt nur derjenige Theil bestehen, der die Cosinuswerthe enthält. Indem wir nun  $\cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\}$  zerlegen in  $\cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cdot \cos ky(\beta_1 - \beta_0) - \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cdot \sin ky(\beta_1 - \beta_0)$ , fällt wieder aus demselben Grunde der Theil des Integrals, der das zweite Glied enthält, fort.

Indem wir den ersten Theil integrieren, ergibt sich:

$$\Phi_0 = C \cdot \frac{1}{k(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \overline{\sin kx(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{1}{k(\beta_1 - \beta_0)} \cdot \overline{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)} \cdot \cos nt \quad (225)$$

Nun wollen wir annehmen, daß  $x$  für eine Seite der rechteckigen Oeffnung gleich  $+A$  sei, für die andere gleich  $-A$ , so daß also  $2A$  die Breite der rechteckigen Oeffnung in der Richtung der  $x$ -Axe ist. Dann ist

$$\overline{\sin kx(\alpha_1 - \alpha_0)} = 2 \sin kA(\alpha_1 - \alpha_0)$$

und wenn wir  $2B$  als Breite der Oeffnung in Richtung der  $y$ -Axe annehmen, ganz analog:

$$\overline{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)} = 2 \sin kB(\beta_1 - \beta_0).$$

Wir erhalten also

$$C. \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{2 \sin k B (\beta_1 - \beta_0)}{k (\beta_1 - \beta_0)}$$

als allgemeinen Werth für die Amplitude des gebeugten Lichtes.

### § 52. Die Erscheinungen bei der Beugung kugelförmiger Wellen durch eine rechteckige Oeffnung.

Die Intensität des Lichtes würde durch das Quadrat der Amplitude darzustellen sein. Dieses wird nun gleich Null, so oft die Gröfsen, die unter dem Sinuszeichen stehen, gleich Null werden. Das sind aber Gröfsen, welche theils von der Wellenlänge, theils von der Breite der Oeffnung, theils von den Winkeln abhängen, welche die beiden Verbindungslinien von der Mitte der Oeffnung nach den Punkten  $x_1 y_1 z_1$  und  $x_0 y_0 z_0$  mit der Normale der Oeffnung machen. Je nach der Gröfse dieser Winkel werden die beiden Sinuswerthe bald gleich Null werden, bald einen von Null verschiedenen Werth haben. Da bei der Intensität nur das Quadrat des Werthes in Betracht kommt, so brauchen wir auf den Wechsel der Vorzeichen nicht weiter zu achten.

Diejenigen Stellen, wo  $\Phi_0$  für beliebige Werthe von  $t$  verschwindet, also Dunkelheit herrscht, werden, wie aus dem Werthe der Amplitude ersichtlich, in jeder zur Oeffnung parallelen Ebene auf geraden Linien liegen, die den Seiten der Oeffnung parallel laufen. Wir haben zwei Systeme von parallelen Geraden, in denen

$$\left. \begin{array}{l} \text{bez.} \\ k \cdot A (\alpha_1 - \alpha_0) = a \cdot \pi \\ k \cdot B (\beta_1 - \beta_0) = b \cdot \pi \end{array} \right\} (226)$$

ist, wo  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen bezeichnen, und in allen Punkten dieser Geraden ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{bez.} \\ \sin k \cdot A (\alpha_1 - \alpha_0) = 0 \\ \sin k \cdot B (\beta_1 - \beta_0) = 0 \end{array} \right\} (226 a)$$

also einer der beiden in dem Werthe von  $\Phi_0$  vorkommenden Factoren gleich Null; auf den Schnittpunkten sind beide Factoren gleich Null.

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die Argumente selbst verschwinden, in den Gleichungen (226) also  $a$  oder  $b$  gleich Null ist, d. h.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bez.} \\ \alpha_1 = \alpha_0 \\ \beta_1 = \beta_0 \end{array} \right\}$$

Dann werden auch die im Nenner des Ausdruckes für  $\Phi_0$  vorkommenden Differenzen  $\alpha_1 - \alpha_0$  bez.  $\beta_1 - \beta_0$  gleich Null. Nun ist aber

$$\text{und } \left. \begin{aligned} \left[ \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \right]_{\alpha_1 - \alpha_0 = 0} &= 2 A \\ \left[ \frac{2 \sin k B (\beta_1 - \beta_0)}{k (\beta_1 - \beta_0)} \right]_{\beta_1 - \beta_0 = 0} &= 2 B \end{aligned} \right\} (227)$$

so daß also für  $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$  und  $\beta_1 - \beta_0 = 0$

$$\Phi_0 = 4 C . A . B . \cos n t \quad (228)$$

wird.

Um die Gesamtheit der Erscheinungen am leichtesten übersehen zu können, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß  $\alpha_1 - \alpha_0$  und  $\beta_1 - \beta_0$  die beiden Winkel darstellen, welche durch Projection des Winkels, den  $\rho_1$  mit der Verlängerung von  $\rho_0$  bildet, auf der  $x$ - bez.  $y$ -Ebene entstehen. Wenn die beiden Strahlen in gerader Linie liegen, also  $\rho_0$  eine geradlinige Fortsetzung von  $\rho_1$  ist, so daß der Mittelstrahl geradlinig durch die Oeffnung nach dem Punkte  $x_0 y_0 z_0$  hingeht, dann ist  $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$  und  $\beta_1 - \beta_0 = 0$ . Wie aber die letzte Gleichung angiebt, ist die Amplitude an dieser Stelle gleich  $4 C . A . B$ , also gleich der mit  $C$  multiplicirten Fläche der rechtwinkligen Oeffnung.

Wir haben oben schon gesehen, daß Dunkelheit auf den Geraden herrscht, die in Abständen, welche den Werthen

$$k . A (\alpha_1 - \alpha_0) = a . \pi$$

und

$$k . B (\beta_1 - \beta_0) = b . \pi$$

entsprechen, den Seiten der Oeffnung parallel laufen. Die Maschen dieses bis auf die in jeder der beiden Richtungen fehlende Mittelinie regelmässigen rechtwinkligen Systems von dunklen Linien sind nun leuchtende Felder verschiedener Intensität.

Die Intensität des centralen Feldes haben wir soeben kennen gelernt. Wenn wir nun zunächst die Reihe der Felder verfolgen, für welche  $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$  ist, so erhalten wir hier die in der Mitte eines jeden Feldes gelegene Helligkeit, die sehr nahe gleich der maximalen Helligkeit des Feldes ist, wenn wir berücksichtigen, daß für  $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$

$$\frac{2 . \sin k A . (\alpha_1 - \alpha_0)}{k . (\alpha_1 - \alpha_0)} = 2 A$$

wird, und dafs wir hier

$$k B \cdot (\beta_1 - \beta_0) = (2 \flat + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

zu setzen haben. Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin k \cdot B(\beta_1 - \beta_0)}{k(\beta_1 - \beta_0)} &= \frac{2}{\frac{2 \flat + 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{B}} \\ &= \frac{4 B}{(2 \flat + 1) \cdot \pi}; \end{aligned}$$

also ist für diese Reihe

$$\Phi_0 = \frac{8 A \cdot B}{(2 \flat + 1) \cdot \pi} \cdot C \cdot \cos n t \quad (229)$$

worin wir für  $\flat$  die Reihenfolge der natürlichen Zahlen einzusetzen haben, um die den einzelnen Feldern zukommenden Werthe zu erhalten.

Analog ergibt sich für die Reihe, in der  $\beta_1 - \beta_0 = 0$  ist

$$\Phi_0 = \frac{8 \cdot A \cdot B}{(2 \alpha + 1) \pi} \cdot C \cdot \cos n t \quad (230)$$

Für Felder, welche weder in einer Reihe liegen, in der  $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ , noch in einer Reihe, in der  $\beta_1 - \beta_0 = 0$ , ist ganz allgemein die Amplitude

$$\begin{aligned} C \cdot \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{2 \sin k B (\beta_1 - \beta_0)}{k (\beta_1 - \beta_0)} &= C \cdot \frac{2}{\frac{2 \alpha + 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{A}} \cdot \frac{2}{\frac{2 \flat + 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{B}} \\ &= \frac{16 A \cdot B}{(2 \alpha + 1) \cdot (2 \flat + 1) \cdot \pi^2} \cdot C \end{aligned} \quad (231)$$

Die Figur 23 auf S. 181 stellt die ganze Erscheinung in schematischer Weise dar. Die horizontalen und verticalen Striche entsprechen den durch die Beugung entstehenden dunkeln Linien, und der der Mitte jeden Feldes zukommende Betrag der Amplitude ist in dasselbe eingetragen. Es entsteht also eine Reihe von rechteckigen Lichtflecken, von denen die beiden Mittelreihen die breitesten und auch die hellsten sind, während in den Seitenreihen die Intensitäten schnell abnehmen.

Das hier theoretisch Abgeleitete stimmt nun in der That völlig mit dem überein, was man wahrnimmt, wenn man durch eine sehr kleine rechteckige Oeffnung nach irgend einem kleinen leuchtenden Punkte blickt. Eine solche Oeffnung kann man sich durch Aufkleben von Stanniolblättchen auf eine Glasplatte zurecht machen. Der

leuchtende Punkt muß aber sehr klein sein, damit man die Erscheinung deutlich sieht, weil sich sonst statt jedes Lichtpunktes ausgebreitete Lichtflächen bilden, die dann zum Theil die dunkeln Linien überdecken und das Ganze verwaschen machen, wodurch die Intensitätsunterschiede der hellen und dunkeln Partien verschwinden. Sehr viel größer und deutlicher sieht man die Erscheinung, wenn man eine etwas größere rechteckige Oeffnung vor das Objectivglas eines Fernrohres bringt, welches man auf den Lichtpunkt einstellt.

$\frac{16 \cdot AB}{49 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{7 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{49 \pi^2} \cdot C$
$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{25 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{5 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{25 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$
$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{9 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{3 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{9 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$
$\frac{8 \cdot AB}{7 \pi} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{5 \pi} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{3 \pi} \cdot C$	$4 \cdot ABC$	$\frac{8 \cdot AB}{3 \pi} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{5 \pi} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{7 \pi} \cdot C$
$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{9 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{3 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{9 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$
$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{25 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{5 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{15 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{25 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$
$\frac{16 \cdot AB}{49 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{8 \cdot AB}{7 \pi} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{21 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{35 \pi^2} \cdot C$	$\frac{16 \cdot AB}{49 \pi^2} \cdot C$

Fig. 28.

### Dritter Abschnitt.

#### Die Beugung an einem Gitter.

§. 53. Ausführung der Integration für mehrere neben einander gelegene gleiche äquidistante rechteckige Oeffnungen.

Von großer praktischer Wichtigkeit für die Messung der Wellenlängen des Lichtes ist der Fall geworden, wo eine Reihe solcher völlig congruenter neben einander liegender äquidistanter Oeffnungen vorhanden ist.

Zur Berechnung der in diesem Falle auftretenden Erscheinungen müssen wir auf Gleichung (220 e)

$$\Phi_0 = C \left[ \iint \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \cos nt. dx. dy \right. \\ \left. + \iint \sin \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \sin nt. dx. dy \right]$$

zurückgehen. Wir wollen annehmen, daß das benutzte Coordinatensystem wieder den Seiten der rechteckigen Oeffnungen parallel sei, und zwar soll die Richtung der  $x$ -Axe mit der Richtung der parallelen Nebeneinanderlagerung der Oeffnungen übereinstimmen. Legen wir dann wieder den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der Ausdehnung nach der  $y$ -Richtung, so fallen, ähnlich wie in § 51, diejenigen Theile des Integrales fort, die den Faktor  $\sin ky.(\beta_1 - \beta_0)$  enthalten, und es wird also

$$\Phi_0 = C \left\{ \iint \cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos ky(\beta_1 - \beta_0) \cos nt. dx. dy \right. \\ \left. + \iint \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos ky(\beta_1 - \beta_0) \sin nt. dx. dy \right\} \quad (232)$$

Wir können nun sofort die Integration nach  $y$  ausführen, und es ergibt sich:

$$\Phi_0 = C \frac{1}{k(\beta_1 - \beta_0)} \frac{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)}{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)} \cdot \left[ \int \cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos nt. dx \right. \\ \left. + \int \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) \sin nt. dx \right] \quad (232a)$$

Ist wieder  $2B$  die Ausdehnung der einzelnen Oeffnungen in der Richtung der  $y$ -Axe, so wird

$$\Phi_0 = C \cdot \frac{2 \cdot \sin k B (\beta_1 - \beta_0)}{k \cdot (\beta_1 - \beta_0)} \cdot \left. \begin{aligned} & \left[ \int \cos k x (\alpha_1 - \alpha_0) \cos n t \cdot dx \right. \\ & \left. + \int \sin k x (\alpha_1 - \alpha_0) \sin n t \cdot dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (232b)$$

Im Folgenden wollen wir uns nun darauf beschränken, die Erscheinung für diejenigen Punkte zu berechnen, in denen  $\beta_1 - \beta_0 = 0$ ; dann wird, wenn wir zugleich die beiden Integrale in eines zusammenfassen,

$$\Phi_0 = C \cdot 2 B \int \cos \{k x (\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} dx \quad (233)$$

oder, wenn wir

$$C' = C \cdot 2 B$$

setzen

$$\Phi_0 = C' \int \cos \{k x (\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} dx \quad (233a)$$

Dieses Integral ist nun über die ganze Reihe der Oeffnungen auszuführen. Wir wollen den Nullpunkt der  $x$ -Axe in die Mitte der mittleren Oeffnung legen und annehmen, daß  $e$  der Abstand der Mitten je zweier benachbarter Oeffnungen sei. Dann unterscheiden sich die übrigen Oeffnungen von der ersten dadurch, daß zu allen Werthen ihrer  $x$ -Coordinaten noch  $e, 2e, 3e$ , u. s. w. bez.  $-e, -2e, -3e$  u. s. w. hinzuzufügen ist. Wenn wir daher mit  $2A$  die Breite der Oeffnungen in Richtung der  $x$ -Axe bezeichnen, so kommt zu dem Integral, welches zwischen den Grenzen  $+A$  und  $-A$  genommen ist, noch eine Reihe von anderen Integralen hinzu, die sich auf diese Seitenöffnungen beziehen und zwischen den Grenzen  $e + A$  und  $e - A, 2e + A$  und  $2e - A$ , u. s. w. bez.  $-e + A$  und  $-e - A, -2e + A$  und  $-2e - A$  u. s. w. zu nehmen sind, so daß wir also haben

$$\Phi_0 = C' \int_{-A}^{+A} \cos \{k x (\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} dx + C' \int_{e-A}^{e+A} \cos \{k x (\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} dx + C' \int_{-e+A}^{-e-A} \cos \{k x (\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} dx + \dots \left. \right\} \quad (233b)$$

Nun kann man aber setzen:

$$\left. \begin{aligned} \int_{c-A}^{c+A} \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx &= \int_{-A}^{+A} \cos \{k(x+c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx \\ \int_{-c-A}^{-c+A} \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx &= \int_{-A}^{+A} \cos \{k(x-c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx \\ \int_{2c-A}^{2c+A} \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx &= \int_{-A}^{+A} \cos \{k(x+2c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} dx \end{aligned} \right\} (234)$$

u. s. w. Daher lassen sich die in Gleichung (233b) vorkommenden Integrale in eins zusammenfassen, und wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= C' \int_{-A}^{+A} \left\{ \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} + \cos \{k(x+c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} \right. \\ &\quad \left. + \cos \{k(x-c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} + \cos \{k(x+2c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} + \dots \right\} dx \end{aligned} \right\} (233c)$$

Nun ist aber

$$\left. \begin{aligned} \cos \{k(x-c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} + \cos \{k(x+c)(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} \\ = 2 \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} \cos kc(\alpha_1 - \alpha_0) \end{aligned} \right\} (235)$$

Analoge Gleichungen bestehen, wenn  $c$  durch  $2c$ ,  $3c$ ,  $4c$ ,  $5c$  u. s. w. ersetzt ist. Wir können daher unseren Ausdruck für  $\Phi_0$  in eine Summe umformen, in der die Größe  $c$  nach einander die sämtlichen Werthe ihrer Multipla annimmt, soweit die Reihe der Oeffnungen sich erstreckt. Nehmen wir an, es seien aufer der mittleren Oeffnung, von der wir ausgehen und in deren Mitte der Anfangspunkt der Coordinaten liegt, auf jeder Seite  $n$  Oeffnungen vorhanden, so lassen sich immer je zwei, welche gleiche Entfernung von der Mitte haben, in analoger Weise zusammenfassen, wie wir in Gleichung (235) die auf die beiden nächst liegenden bezüglichen Glieder zusammengegriffen haben. Der Factor  $\cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}$  bleibt in allen diesen Gliedern stehen, und wir können ihn daher herausziehen, wenn wir die Summation vornehmen. Es ergibt sich dann:

$$\Phi_0 = C' \int_{-A}^{+A} \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\} \left[ 1 + 2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \cos k \cdot \alpha \cdot c(\alpha_1 - \alpha_0) \right] dx \quad (233d)$$

worin  $\alpha$  die durchlaufende Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis  $n$

bezeichnet. Statt des Cosinus können wir nun imaginäre Potenzen einführen und

$$2 \cos k a c(\alpha_1 - \alpha_0) = e^{i k a c(\alpha_1 - \alpha_0)} + e^{-i k a c(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

setzen. Wir bekommen dann zwei Summen, deren Summanden nach den Potenzen von  $e^{i k c(\alpha_1 - \alpha_0)}$  bez.  $e^{-i k c(\alpha_1 - \alpha_0)}$  fortschreiten. Wenn wir nun berücksichtigen, daß

$$\sum_{a=0}^{a=n} x^a = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ist, so ergibt sich

$$\Phi_0 = C' \cdot \int_{-A}^{+A} \cos \{k x(\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} \cdot \left[ \frac{1 - e^{i k c(\alpha_1 - \alpha_0)(n+1)}}{1 - e^{i k c(\alpha_1 - \alpha_0)}} + \frac{1 - e^{-i k c(\alpha_1 - \alpha_0)(n+1)}}{1 - e^{-i k c(\alpha_1 - \alpha_0)}} - 1 \right] dx \quad (233e)$$

Dadurch ist unsere Reihe in einen geschlossenen Ausdruck umgeformt. Bringt man die beiden Brüche auf gleichen Nenner, formt die Exponentialfunctionen wieder in trigonometrische Functionen um und setzt zur Vereinfachung der Schreibweise

$$c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) = x \quad (236)$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= C' \cdot \int_{-A}^{+A} \cos \{k x(\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} \cdot \left\{ \frac{2 - 2 \cos k x - 2 \cos(n+1) k x + 2 \cos k n x}{2 - 2 \cos k x} - 1 \right\} dx \\ &= C' \cdot \int_{-A}^{+A} \cos \{k x(\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} \cdot \left\{ \frac{-\cos(n+1) k x + \cos k n x}{1 - \cos k x} \right\} dx \quad (233f) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\cos k n x - \cos(n+1) k x = 2 \sin(n + \frac{1}{2}) k x \cdot \sin \frac{1}{2} k x$$

und

$$1 - \cos k x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} k x;$$

mithin

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= C' \cdot \int_{-A}^{+A} \cos \{k x(\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} \cdot \frac{2 \sin(n + \frac{1}{2}) k x \cdot \sin \frac{1}{2} k x}{2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} k x} dx \\ &= C' \cdot \int_{-A}^{+A} \cos \{k x(\alpha_1 - \alpha_0) - n t\} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) k x}{\sin \frac{1}{2} k x} dx \quad (233g) \end{aligned}$$

Indem wir nun den Cosinus zerlegen und nach  $x$  integrieren, die Grenzen einführen und für  $z$  aus Gleichung (236) seinen Werth schreiben, erhalten wir:

$$\Phi_0 = C' \cdot \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) \cdot k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)} \cos nt, \quad (233h)$$

so dafs also der Ausdruck

$$C' \cdot \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) k \cdot c (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)}$$

die Amplitude der Schwingungen in dem für die Sammlung der Strahlen gewählten Punkte darstellt.

#### § 54. Die Lage und Anordnung der Helligkeitsmaxima und -minima.

Der im vorigen Paragraphen abgeleitete Werth für die Amplitude der durch das Gitter austretenden Strahlen enthält einen Factor  $\frac{\sin [kA(\alpha_1 - \alpha_0)]}{k(\alpha_1 - \alpha_0)}$ , welcher auch in dem Werthe der Amplitude bei der Beugung an einer einzelnen Oeffnung vorkam (Gleichung 225 a). Er bedingt in unserem Werthe also dieselbe Ausdehnung und Vertheilung der Helligkeit. Wir werden daher die gleichen dunkeln Striche haben, welche eine einzelne Oeffnung geben würde. Bei den gewöhnlich benutzten Gittern sind nun aber die einzelnen Oeffnungen aufserordentlich fein, und es ist daher der mittlere helle Streifen nach der Seite, d. h. in der Richtung der  $x$ -Coordinaten, sehr weit ausgebreitet. Man findet zwar bei genauer Betrachtung manchmal noch weitere seitwärts gelegene Minima und Maxima, aber gewöhnlich wird die ganze Erscheinung von dem ersten durch diesen Factor bedingten Minimum in ziemlich großer Entfernung von der Mitte begrenzt.

Die Intensitätsvertheilung in dem hellen Streifen ist nun aber thatsächlich doch nicht dieselbe, wie bei einer einzelnen Oeffnung. Denn es tritt durch die Wiederholung der Oeffnungen in dem Ausdrücke der Amplitude noch ein zweiter Factor,  $\frac{\sin (n + \frac{1}{2}) k c (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)}$ , hinzu. Der im Zähler stehende Sinus wird Null werden, so oft

$$(n + \frac{1}{2}) \cdot k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) = a \cdot \pi \quad (237)$$

wird, wo  $a$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Wir werden also wiederum eine Reihe von äquidistanten dunkeln Linien haben; aber da

hier  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  multiplicirt ist mit  $(n + \frac{1}{2}) \cdot c$ , d. h. der halben Breite des ganzen Gitters, so stehen diese dunkelen Linien sehr viel näher an einander, weil bei dem größeren Factor durch Zunahme des Winkels  $(\alpha_1 - \alpha_0)$  der Werth  $\pi$  schneller immer wieder erreicht wird. Die zwischen diesen Stellen völliger Dunkelheit liegenden Maxima werden, da der Zähler sich viel rascher ändert als der Nenner, wenn dieser nicht verschwindet, nahezu da erreicht, wo der Zähler sein Maximum hat, also für:

$$\sin(n + \frac{1}{2}) \cdot k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) = 1,$$

und es ist für sie daher:

$$\Phi_0 = C' \cdot \frac{2 \cdot \sin k \cdot A(\alpha_1 - \alpha_0)}{k \cdot (\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{2} k \cdot c(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos n t. \quad (238)$$

Bei zahlreichen Oeffnungen sind nun diese Maxima, verglichen mit den sogleich zu betrachtenden Hauptstellen größter Helligkeit, so schwach und undeutlich, daß man sie gar nicht zu sehen bekommt, wenn man ihnen nicht besondere Aufmerksamkeit schenkt und sorgfältig gereinigtes monochromatisches Licht benutzt.

Eine Ausnahme in der regelmässigen Folge der zwischen diesen schwachen und undeutlichen Maxima gelegenen Minima tritt für diejenigen Stellen ein, wo nicht nur

$$\left. \begin{aligned} \sin(n + \frac{1}{2}) k c (\alpha_1 - \alpha_0) &= 0, \\ \sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

sondern zugleich

ist. Dieses ist zunächst der Fall, wenn  $\alpha_1 = \alpha_0$  ist, d. h. wenn wir den gerade hindurch gehenden Strahl ins Auge fassen. Es ist dann

$$\left( \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0)} \right)_{\alpha_1 = \alpha_0} = 2n + 1. \quad (240)$$

Weitere derartige Ausnahmestellen liegen dort, wo

$$\left. \begin{aligned} (n + \frac{1}{2}) \cdot k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) &= a \cdot \pi \\ \frac{1}{2} k \cdot c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) &= b \cdot \pi \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

und zugleich

ist, wenn wir mit  $a$  und  $b$  zwei ganze Zahlen bezeichnen. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich aber

$$b = \frac{a}{2n + 1}. \quad (241 a)$$

Wächst also die Winkeldifferenz  $\alpha_1 - \alpha_0$  stets, so wird  $\sin(n + \frac{1}{2}) k c (\alpha_1 - \alpha_0)$   $2n$  mal, d. h. so oft, als die um 1 verminderte Zahl der Oeffnungen

in dem Gitter beträgt, den Werth Null erlangen, bevor da, wo in regelmässiger Folge das  $(2n + 1)$ te Minimum liegen müfste, eine der Ausnahmestellen eintritt, an denen die Sinuswerthe im Zähler und Nenner zugleich verschwinden.

Der Werth des Factors

$$\frac{\sin(n + \frac{1}{2})k.c.(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2}k.c.(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

ist in diesen Ausnahmestellen ebenso grofs, wie er (Gleichung 240) für  $\alpha_1 = \alpha_0$  ist, d. h. gleich  $2n + 1$ , gleich der Anzahl von Oeffnungen, welche in dem ganzen Gitter enthalten sind, und daher ist für alle diese Ausnahmestellen

$$\Phi_0 = C.(2n + 1) \cdot \frac{2 \sin kA(\alpha_1 - \alpha_0)}{k(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos nt. \quad (242)$$

Die Amplitude nimmt in Folge ihres letzten Factors nach der Seite hin ab, ist aber stets beträchtlich gröfser, als die in der Gleichung (238) dargestellte Amplitude der zahlreichen übrigen Maxima.

Die Erscheinung ist nun in der That auch eine solche, dafs man in der Mitte ein helles Lichtbild wahrnimmt, neben dem dann in bestimmten Entfernungen Nebenbilder erscheinen, welche allmählich an Helligkeit abnehmen. Dazwischen ist bei den Gittern, welche zahlreiche Oeffnungen enthalten, ein Schein ausgebreitet, der durch sehr schwache undeutliche, abwechselnd helle und dunkle Linien gebildet wird. Sind die Oeffnungen weniger zahlreich, so löst sich der Lichtschein in die einzelnen von der Theorie geforderten Linien auf.

Man kann nun auch für alle beliebigen Formen von Oeffnungen, für kreisförmige, elliptische, dreieckige Gruppen u. s. f., oder Gruppen von Dreiecken, welche pyramidenförmig über einander gestellt sind u. s. f., diese Integrationen ausführen, wie wir es hier nur für eine einzige Reihe rechteckiger Oeffnungen gethan haben. Es kommen dabei nur Quadraturen vor, wenigstens, wenn man bei der ersten Annäherung stehen bleibt und sich mit der Annahme begnügt, dafs der leuchtende Punkt und der Sammelpunkt, in welchem man die Erscheinung beobachten will, beide von dem Gitter so weit entfernt liegen, dafs die Dimensionen des Gitters selbst sehr klein sind gegen die Länge der Strahlen.

Es läfst sich noch in anderer Weise eine kürzere anschaulichere Bedingung für die Lage der hellen und dunkeln Linien ableiten, wozu wir nun übergehen wollen. Dabei wird sich auch ergeben,

welche Aenderungen in allen diesen Erscheinungen eintreten, wenn entweder die Wellenlängen sehr groß sind im Vergleich zu der Größe der beugenden Oeffnungen, oder wenn das Umgekehrte der Fall. Die letztere Betrachtung führt uns dann zu der Beantwortung der Frage, wann wir berechtigter Weise von einer Fortpflanzung des Lichtes in geradlinigen Strahlen sprechen können. Es wird sich zeigen, daß dieses als Grenzfall eintritt, wenn die Wellenlängen unendlich klein sind sowohl im Vergleich zu der Größe der Oeffnung als auch im Vergleich mit der Weglänge, durch welche das Licht sich fortpflanzt.

---

### Vierter Abschnitt.

#### Die Beugungserscheinungen als Folge interferirender Wellensysteme anschaulich abgeleitet.

---

#### § 55. Die Erscheinungen bei einer einzelnen spaltförmigen Oeffnung.

Die bisher mathematisch berechneten Erscheinungen lassen sich noch in einer anderen, mehr anschaulichen Weise betrachten und als Folge der nach dem HUYGHENS'schen Princip stattfindenden Superposition der Wellen ableiten. Wir haben hierbei jeden einzelnen Punkt der Oeffnung oder der verschiedenen Oeffnungen in Folge der in ihm vom ursprünglichen Erregungspunkt anlangenden Wellen als neuen Erregungspunkt für ein Wellensystem aufzufassen, welches sich dann auf der anderen Seite des Schirmes ausbreitet. Durch Interferenz dieser Wellensysteme entstehen die Beugungserscheinungen.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Erregungs- und der Sammelpunkt der betrachteten Wellen soweit von dem beugenden Schirm abliegen, daß wir alle Strahlen als parallel ansehen können, d. h. also, daß im Vergleich zu dem Abstand von den beugenden Oeffnungen die Ausdehnung der letzteren verschwindend klein ist.

Fallen die Strahlen senkrecht auf den Schirm, so haben sie alle in der Ebene der beugenden Oeffnung dieselbe Phase, und eine Differenz der Weglänge zwischen den verschiedenen Strahlen besteht nur in dem zweiten Medium, d. h. hinter dem Schirm.

In Fig. 24 sei  $ab$  eine Oeffnung in dem Schirm,  $a'abb'$  das senkrecht einfallende Strahlenbündel und  $aa''b''b$  ein beliebiges auslaufendes Strahlenbündel, welches sich in einem unendlich weit entfernten Punkte vereinigt. Das Loth  $bc$ , welches von dem einen Rande  $b$  der Oeffnung auf den Grenzstrahl gefällt ist, der durch den Rand  $a$  hindurch geht, möge ein Stück  $ac$  abschneiden, welches einer halben Wellenlänge gleich ist. Es sind also gerade die entgegengesetzten Phasen eingetreten, und diese Wellen vernichten den Einfluß der Strahlen, welche durch den anderen Rand gegangen sind. Bis zu dieser Weglängendifferenz haben sich noch alle Strahlen verstärkt; wird sie größer, so fangen die Strahlen an, sich gegenseitig zu vernichten. Haben wir den Unterschied einer ganzen Wellenlänge, d. h. ist  $ac$  gleich einer ganzen Wellenlänge, dann besteht in der Mitte ein Unterschied von einer halben Wellenlänge, und es findet jeder Strahl, der in der ersten Hälfte der Oeffnung

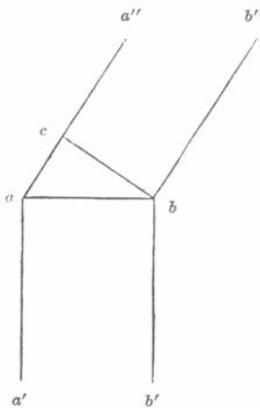


Fig. 24.

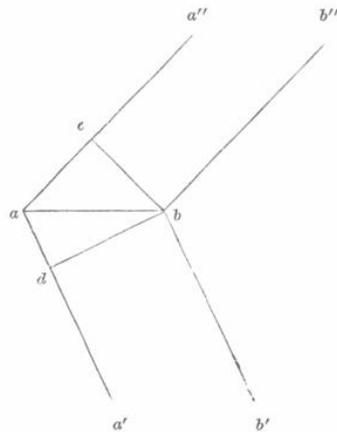


Fig. 25.

liegt, in der anderen Hälfte der Oeffnung einen anderen, durch den er vernichtet wird, und es wird also völlige Dunkelheit in der Richtung, welche dem so geneigten Bündel entspricht, eintreten.

Ist die Strecke  $ac$  gleich drei halben Wellenlängen, so können wir uns die Fläche der Oeffnung in drei Theile getheilt denken, von denen die Strahlen des ersten Theiles gerade aufgehoben werden durch die Strahlen des zweiten Theiles, welche entgegengesetzte Phasen besitzen. Es bleiben dann nur die Strahlen des dritten Theiles übrig, die sich gegenseitig verstärken. Aus dieser Betrachtung folgt also auch, daß die Gesamtamplitude der Lichtbewegung, welche in dieser Richtung bestehen bleibt, nur ein Drittel von der-

jenigen betragen wird, welche bei einem Unterschied der Weglängen von nur einer halben Wellenlänge besteht. Es können also in seitlicher Richtung überall da schwächere Maxima entstehen, wo eine ungerade Zahl von halben Wellenlängen in die Strecke  $ac$  hinein geht.

In den allgemeineren Fällen, wo beide Strahlenbündel, sowohl das einfallende wie das auslaufende, schräg gegen die Ebene der Oeffnung gerichtet sind, werden wir dieselbe Construction auf beiden Seiten der Oeffnung zu wiederholen haben, wie dieses in Fig. 25 ausgeführt ist. Es sind dann die beiden Strecken  $ac$  und  $ad$  zusammengenommen gleich der Differenz der Weglänge, und das Zustandekommen der Maxima und Minima ist dann dadurch bedingt, daß die Summe dieser beiden Strecken  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{2}{2}$  oder  $\frac{3}{2}$  u. s. w. Wellenlängen beträgt.

Aus dieser ganzen Betrachtung geht hervor, daß sowohl die Gröfse der Oeffnung als auch die Gröfse der Wellenlänge von Einfluß auf die Lage der verschiedenen Maxima und Minima der gebeugten Strahlen ist. Bei derselben Oeffnung werden kürzere Wellenlängen dichter neben einanderliegende Maxima haben, weil für sie die Zunahme von  $ac$  (Fig. 24) bez.  $ac + ad$  (Fig. 25) um eine gleiche Anzahl von Wellenlängen eine geringere Aenderung der Richtung erfordert, als für gröfsere Wellenlängen. Andererseits muß für dieselbe Wellenlänge bei einer kleineren Oeffnung eine stärkere Ablenkung des gebeugten Lichtes vorhanden sein, ehe die für die Maxima erforderlichen Wegdifferenzen eintreten. Maxima und Minima liegen also um so dichter an einander, je kleiner die Wellenlänge und je gröfser die Oeffnung ist. Wenn man nicht homogenes, sondern weißes Licht benutzt, so entstehen farbige Interferenzerscheinungen, weil die Maxima und Minima bei derselben Oeffnung für die verschiedenen Wellenlängen nicht auf die gleiche Stelle fallen.

#### § 56. Die Erscheinungen bei einem Gitter.

Wir wollen nun annehmen, daß mehrere gleich grofse spaltförmige Oeffnungen in gleichen Abständen vorhanden sind, und daß die einzelnen Oeffnungen selbst sehr schmal sind. Dann wird jede von ihnen weit auseinanderliegende Maxima und Minima ergeben, so daß bereits das mittlere Maximum allein ein weit ausgebreitetes Lichtfeld bildet. Die Maxima und Minima der verschiedenen Oeffnungen decken sich, weil wir die Gröfse des ganzen Gitters als klein gegenüber den sonstigen Entfernungen voraussetzen. Innerhalb jedes

einzelnen dieser Lichtfelder, von denen wir aber nur das mittlere näher berücksichtigen wollen, können nun die aus den verschiedenen Oeffnungen heraustretenden Strahlenbündel mit einander interferiren und dadurch in ihm wieder neue Maxima und Minima der Helligkeit erzeugen.

Fallen die Strahlen senkrecht auf das Gitter auf, so entsteht der ganze Wegunterschied bei der weiteren Fortpflanzung in dem zweiten Medium. Wenn wir nun von einem Punkte  $b$  der zweiten Oeffnung (Fig. 26) ein Loth  $mb$  auf einen Strahl fallen, welcher durch den entsprechenden Punkt  $a$  der ersten Oeffnung gegangen

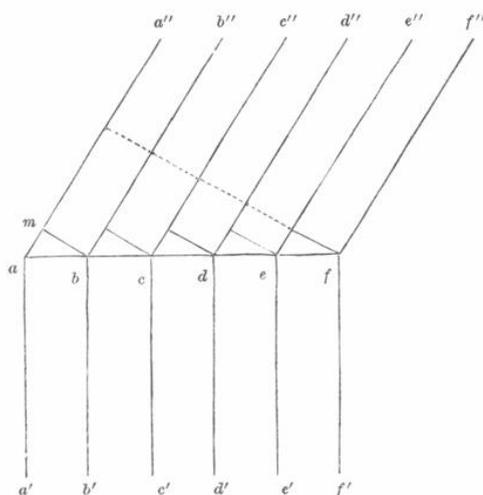


Fig. 26.

ist, und wir hierbei von ihm eine einer ganzen Wellenlänge gleiche Strecke  $am$  abtrennen, so wird der zweite Strahl dieselbe Phase wie der erste haben, und die Wirkungen werden sich addiren. Aber auch der dritte Strahl wird dann dieselbe Phase besitzen, und ebenso jeder folgende, so daß sämtliche Strahlen sich gegenseitig verstärken.

Es ist nun sofort ersichtlich, daß bei allen Wegdifferenzen, die einer ganzen Zahl von Wellenlängen gleich sind, die Strahlen einander verstärken. Man erhält also in ungefähr gleichen Abständen zu beiden Seiten der ungebeugt durchgehenden Strahlen eine Reihe von Maxima der Helligkeit. Dieses sind die hellen Linien, welche man wahrnimmt, wenn man durch ein fein geritztes Gitter nach einer hellen Lichtlinie hinsieht, die monochromatisches Licht aussendet. Ist das Licht vielfarbig, so sind die Wellenlängen für die

rothen Farben gröfser als für die blauen, und es wird dann jedes solche Nebenbild in ein Spectrum ausgezogen.

Diese Helligkeitsmaxima sind aufserordentlich schmale und feine Linien, weil unmittelbar neben ihnen Stellen gröfster Dunkelheit liegen.

Diese dunklen Linien kommen in folgender Weise zu Stande: Denken wir uns, dafs nicht zwischen den Strahlen zweier benachbarten Oeffnungen, sondern der beiden äufsersten an den Rändern des Gitters gelegenen Oeffnungen ein Wegunterschied einer ganzen Wellenlänge besteht, so wird in der Mitte des Gitters ein Strahl vorkommen, der um eine halbe Wellenlänge von dem einen der beiden Strahlen differirt, und für jeden Strahl in der einen Hälfte des Gitters werden wir in der zweiten Hälfte einen anderen haben, der von ihm sich um eine halbe Wellenlänge unterscheidet, also seine Wirkung aufhebt. Dasselbe wird der Fall sein, wenn die Wegdifferenz zwischen den beiden Rändern des Gitters zwei, drei u. s. w. Wellenlängen beträgt. Es treten in diesen Richtungen also immer dunkle Linien auf. Ausnahmen bilden aber diejenigen Richtungen, in denen diese Wegdifferenz oder ein aliquoter Theil derselben soviel ganzen Wellenlängen gleich ist, als die um 1 verminderte Zahl der Oeffnungen des Gitters beträgt. Es sind dieses die Richtungen, welche wir soeben bereits eingehend besprochen haben und in denen wir das Zustandekommen von Helligkeitsmaxima nachwiesen. In ihnen ist eben die Wegdifferenz für zwei benachbarte Oeffnungen gleich einer Wellenlänge oder gleich einem ganzen Vielfachen einer Wellenlänge. Ändert sich die Richtung aber so, dafs die Differenz der Weglänge der durch die beiden äufsersten Oeffnungen laufenden Strahlen sich um eine Wellenlänge ändert, so haben wir Stellen völliger Dunkelheit. Diese Richtungsänderung ist nun bei Gittern mit grofser Oeffnungszahl ungemein gering, und daher sind jene Helligkeitsmaxima sehr schmale scharf begrenzte Streifen.

Die bisher besprochenen Helligkeitsmaxima liegen also da, wo in regelmässiger Folge Stellen völliger Dunkelheit liegen müfsten. Viel kleinere Maxima liegen zwischen je zwei jener zahlreichen dunklen Linien. Sie kommen da zu Stande, wo die Wegdifferenz zwischen den beiden Rändern des Gitters eine ungerade Anzahl von halben Wellenlängen beträgt. Sind es etwa drei halbe Wellenlängen, so können wir uns die Breite des Gitters in drei gleiche Theile eingetheilt denken. Dann hebt der erste Theil den zweiten in seiner Wirkung auf, weil jede Oeffnung in dem ersten Theile dann eine andere in dem zweiten Theile findet, welche um eine

halbe Wellenlänge verschieden ist, und nur ein Drittel der Oeffnungen verstärkt sich gegenseitig, so daß relativ schwache Wirkungen in diesen Maxima zu Stande kommen. Sie sind dazu noch durch außerordentlich eng an einander liegende Minima von einander getrennt, so daß sie meistens, wie wir in § 54 schon sahen, in Form eines mäßigen Lichtnebels zur Erscheinung kommen, der zwischen den hellen Streifen liegt, die den Hauptmaxima entsprechen, welche auf diesem hellen Nebelstreifen sich sehr deutlich und stark abheben.

§ 57. Beugung an einer Oeffnung, deren Durchmesser kleiner ist, als eine halbe Wellenlänge.

Wie wir im Bisherigen sahen, hängen die eigenthümlichen Diffractionerscheinungen wesentlich davon ab, daß beim Zusammenwirken des Lichtes, welches von verschiedenen Theilen einer Oeffnung herkommt, im Allgemeinen diejenigen Strahlen, welche durch verschiedene Punkte der Oeffnung hindurchgegangen sind, Wegunterschiede darbieten, und sich dadurch beim Zusammentreffen bald verstärken, bald schwächen. Wenn wir z. B. eine Oeffnung  $ab$  (Fig. 27) haben, an der das Lichtbündel  $a'abb'$  senkrecht auffallend anlangt, und in einiger Entfernung irgend einen Punkt  $P$ , in dem sich die Strahlen sammeln, die nun von den verschiedenen Theilen der Oeffnung ausgehen, so haben diese verschiedene Wege zurückgelegt. Denken wir uns um den Punkt  $P$  als Mittelpunkt Kugeln construirt, so werden solche Kugeln, deren Radien Unterschiede von je einer halben Wellenlänge haben, aus der Fläche der Oeffnung Streifen heraus schneiden, deren Punkte Wellen aussenden, die sich, im Punkte  $P$  angelangt, um halbe Schwingungen in ihrer Phase unterscheiden, so daß mindestens ein Theil der Wirkung des ersten Streifens durch diejenige des zweiten aufgehoben

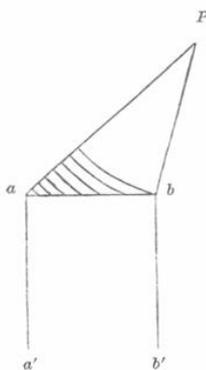


Fig. 27.

wird, und ein Theil der Wirkung des dritten aufgehoben wird von dem vierten, u. s. f. Deshalb sind die nach der Seite hingehenden Wirkungen verhältnißmäßig klein.

Andererseits zeigen diese Betrachtungen auch, wie es sich für verschieden lange Wellen verhalten wird. Wenn wir eine sehr enge

Oeffnung haben, wir wollen einmal annehmen, eine Oeffnung, welche kleiner als eine halbe Wellenlänge in ihrem Durchmesser sei, so wird es nicht möglich sein, von den verschiedenen Punkten derselben nach irgend einem seitlich liegenden Punkte Linien zu ziehen, welche sich um mehr als eine halbe Wellenlänge unterscheiden. Denn das von dem einen Rande der Oeffnung auf einen Strahl, der am anderen Rande vorbei geht, gefällte Loth, schneidet von dem Strahl ein Stück ab, welches jedenfalls kleiner ist, als die Breite der Oeffnung, also kleiner als eine halbe Wellenlänge. Die Strahlen müssen sich also alle gegenseitig verstärken, auch diejenigen, welche weit nach der Seite hin fallen. Daraus folgt, daß wir durch Oeffnungen, welche geringeren Durchmesser haben als eine halbe Wellenlänge, nach allen Richtungen Licht sehen werden, wenn auch nur in einer Richtung Licht auffällt. Ein Wellenzug, der durch eine solche Oeffnung hindurchgegangen ist, wird sich also jenseits dieser Oeffnung nach allen Richtungen verbreiten. Die Stärke der seitlich ausgebreiteten Bewegung ist schwächer, als die der geradlinig fortgepflanzten, weil für sie erstens die perspectivische Gröfse der Oeffnung und der Querschnitt der Strahlenbündel, die in dieser Richtung gehen können, kleiner wird, und zweitens gröfsere Wegunterschiede vorkommen, wodurch die gegenseitigen Verstärkungen nicht so groß sein werden als für die mittleren Richtungen.

Wenn also ein Strahlenbündel durch eine Oeffnung, welche enger ist als eine halbe Wellenlänge, hindurchgeht, so wird sich jenseits der Oeffnung gar kein Strahl mehr ausbilden, sondern die Wellenbewegung wird sich nach allen Seiten hin verbreiten, ungefähr, wie bei einer Kugelwelle, die von einem einzelnen Lichtpunkte ausgeht. Beim Schall kommt dieses Phänomen sehr häufig vor, denn es sind in vielen Fällen die Oeffnungen, durch welche der Schall hindurchgeht, kleiner, als die Hälfte der Wellenlängen. Bei den tieferen Tönen, an den unteren Grenzen der musikalischen Scala, haben wir Wellen, welche bis zu 32 Fufs lang sind. Ihnen gegenüber sind unsere Fensteröffnungen immer noch klein, und daher erklärt es sich, daß namentlich tiefe Töne jenseits von einem geöffneten Fenster nach allen Richtungen gleich gut gehört werden. Wenn wir also durch eine sehr enge Oeffnung nach einem feinen hellen Lichtpunkt hinblicken und einen breiten Lichtschein sehen, so ist das derjenige Ausnahmefall, wo die Bewegung des Lichtes sich der Art anschliesst, wie sich die Bewegung des Schalles ausbreiten pflegt. Das Entgegengesetzte tritt ein, wenn die Wellenlänge, verglichen mit der Weglänge und der Breite der Oeffnung

aufserordentlich klein ist. Das ist der beim Lichte am meisten vorkommende Fall; bei ihm läßt sich in der That zeigen, daß dann eine ausschließlich geradlinige Ausbreitung der Strahlen stattfindet.

## Fünfter Abschnitt.

### Durchgang der Lichtbewegung durch eine Oeffnung von beliebiger Form unter der Annahme unendlich kleiner Wellenlänge.

#### § 58. Anknüpfung an frühere Ergebnisse.

Nachdem wir bisher einzelne Beispiele der Diffraction an engen Oeffnungen behandelt haben, wollen wir nun allgemein die durch irgend eine beliebige Oeffnung fortschreitende Bewegung der Lichtwellen untersuchen, namentlich für den am häufigsten vorkommenden Fall, daß die Wellenlängen sehr klein sind sowohl im Vergleich zu der GröÙe der Oeffnungen, durch welche das Licht hindurchgeht, als auch im Vergleich zu den vom Lichte zurückgelegten Entfernungen.

Wir haben früher gefunden, daß

$$\psi = \frac{\cos(kr)}{r} \quad (243)$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0 \quad (244)$$

darstellt, welche in dem Punkte  $r = 0$  eine Ungültigkeitsstelle hat.

Früher (§ 44) haben wir den GREEN'schen Satz auf Functionen dieser Art, d. h. auf Functionen, welche Lösungen dieser Differentialgleichungen sind, angewendet. Wenn wir mit  $\varphi$  eine zweite Function bezeichnen, die der Gleichung (244) genügt, so ergab sich damals (Gleichung 206 b)

$$4\pi \varphi_0 = \int \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) d\omega \quad (245)$$

wo  $\varphi_0$  den Werth von  $\varphi$  in einem Punkte  $r = 0$  bedeutet und wo das Integral der rechten Seite über irgend eine den Punkt 0 einschließende Fläche zu erstrecken ist.

§ 59. Anwendung auf einen Raum, der durch einen absolut schwarzen Schirm mit einer beliebigen Oeffnung in zwei Hälften getheilt ist.

Wir nehmen nun an, dafs der ganze Raum durch eine dunkle Scheidewand, welche eine beliebig gestaltete Oeffnung enthält, getheilt sei; diese dunkle Scheidewand habe die Eigenschaft, dafs sie von allen Lichtbewegungen, die ihre Oberfläche treffen, weder etwas durchläfst noch reflectirt. Streng genommen trifft diese Annahme bei keinem thatsächlich vorhandenen Körper zu; aber wir kennen doch eine Menge tiefschwarzer Körper, welche sich dieser Annahme sehr nähern.

Wir wollen nun die Lichtbewegung untersuchen, welche in dem Punkte 0 sich sammelt, nachdem sie, von dem Punkte 1 ausgehend, durch die Oeffnung  $mn$  in dem absolut schwarzen, nach den Seiten hin beliebig weit ausgedehnten Schirm hindurchgegangen ist (Fig. 28).

Dann würde also eine geschlossene Fläche, welche den Raum  $S$  vollständig umgiebt, bestehen können 1) aus den beliebig weit entfernten bis an den Schirm reichenden Grenzen, 2) dem schwarzen Schirm, und 3) einer beliebigen, die Oeffnung  $mn$  schließenden Fläche, welche in der Figur durch die feine ausgezogene Linie angedeutet ist. Um den Werth von  $\varphi_0$ , also den Werth von  $\varphi$  im Punkte 0 zu

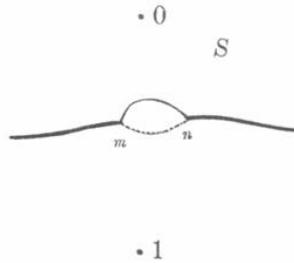


Fig. 28.

finden, müssen wir das Integral der Gleichung (245) über diese ganze Fläche ausdehnen. Der Theil des Integrals, der sich auf die weit entfernten Grenzen bezieht, kann gleich Null gesetzt werden, indem wir annehmen, dafs hierhin noch keine Licht-

bewegung gelangt ist,  $\varphi$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  also verschwinden. Ebenfalls ist

derjenige Theil, welcher sich auf die Oberfläche des schwarzen Schirmes bezieht, gleich Null, weil hier die ganze Lichtbewegung vernichtet wird, so dafs also nur die Fläche zur Berücksichtigung übrig bleibt, welche die Oeffnung schließt. Es ist nun zunächst zu untersuchen, ob der Werth des Integrales von der Führung dieser Fläche unabhängig ist. Zu dem Zwecke legen wir durch die Oeffnung eine zweite, in Fig. 28 durch die punktirte Linie angedeutete Fläche, so dafs also jetzt die beiden in der Oeffnung liegenden

Flächen einen geschlossenen endlichen Raum völlig begrenzen. Das Integral über die gesammte Oberfläche dieses Raumes hat nun, wie wir oben gesehen haben, für den Punkt 0, der hier ein äußerer ist, den Werth Null, wobei aber die Normalen sämmtlich in das Innere dieses Raumes hinein zu nehmen sind, so daß sie also für die eine unserer beiden die Oeffnung schließenden Flächen auf den Punkt 0 zugerichtet, für die andere aber von ihm abgewandt sind. Da das gesammte Integral gleich Null ist, so ist also das Integral über die eine Fläche gleich dem negativ genommenen Integral über die andere Fläche, d. h. gleich dem Integral über die andere Fläche, wenn die Normalen hier umgekehrt werden, also ebenfalls dem Punkte 0 zugewandt sind. Es ergibt sich daraus die wichtige Folgerung für die Theorie der Diffraction, daß es einerlei ist, wie wir die Fläche ziehen, durch welche wir uns die Oeffnung in dem dunklen Schirm verschlossen denken. Jede Fläche, welche die beiden Theile des Raumes vollständig von einander trennt, muß denselben Werth des Integrales geben, und es folgt daraus, daß die Werthe der Function  $\varphi$  in dem jenseits liegenden Raume nur von der Form der Grenzlinie der Oeffnung abhängen.

Physikalisch erscheint das selbstverständlich; denn eine solche Grenzfläche würde ja immer nur eine gedachte sein; aber daß unsere mathematischen Ausdrücke wirklich dieser Bedingung Genüge leisten, und daß unsere Analyse in dieser Weise zu einem richtigen Resultate führt, mußte erst nachgewiesen werden. Es bleibt nur als Bedingung bestehen, daß die Grenzfläche in der Weise gewählt sein muß, daß sie die Oeffnung des Schirmes vollständig schließt.

#### § 60. Annahme bestimmter Functionen für die Wellenpotentiale.

Wir wollen nun für unsere Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  bestimmte Annahmen machen, und zwar wollen wir setzen:

$$\text{und } \left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\cos(k r_0)}{r_0} \\ \varphi &= \frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

wo  $r_0$  die Entfernung vom Sammelpunkte 0 der Strahlen, d. h. also von dem Punkte, für den wir die Lichtbewegung finden wollen, und

$r_1$  die Entfernung von dem Ausgangspunkte 1 der Strahlen bezeichnet.

Dadurch formt sich unsere Gleichung (245) um in:

$$4\pi \cdot \varphi_0 = \int \left[ \frac{\cos(kr_1 - nt)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{\cos kr_0}{r_0} \right) - \frac{\cos kr_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{\cos(kr_1 - nt)}{r_1} \right) \right] d\omega \quad (245a)$$

Hierin ist, da der Sammelpunkt 0 im Innern des Raumes liegen muß, über den sich das Integral erstreckt, die Richtung von  $N$  nach der Seite der abnehmenden Werthe von  $r_0$  zu nehmen. Führen wir die vorkommenden Differentiationen aus, so ergibt sich:

$$4\pi \cdot \varphi_0 = \int \left[ \frac{\cos kr_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \left\{ \frac{k \sin(kr_1 - nt)}{r_1} + \frac{\cos(kr_1 - nt)}{r_1^2} \right\} - \frac{\cos(kr_1 - nt)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \left\{ \frac{k \sin(kr_0)}{r_0} + \frac{\cos kr_0}{r_0^2} \right\} \right] d\omega \quad (245b)$$

wobei also das Integral nur über die gedachte Fläche auszudehnen ist, welche die Oeffnung in dem schwarzen Schirm verschließt.

Wenn wir dieselben Betrachtungen, die wir auf die Gleichung (245) angewendet haben, auch auf die Gleichung (209) anwenden, wonach für irgend eine geschlossene Fläche

$$0 = \int \left( \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial N} \left( \frac{\sin(kr_0)}{r_0} \right) - \frac{\sin(kr_0)}{r_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) d\omega$$

ist, so erhalten wir entsprechend der Gleichung (245b) für

$$\varphi = \frac{\sin(kr_1 - nt)}{r_1}$$

$$0 = \int \left[ \frac{\sin kr_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \left\{ -\frac{k \cos(kr_1 - nt)}{r_1} + \frac{\sin(kr_1 - nt)}{r_1^2} \right\} - \frac{\sin(kr_1 - nt)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \left\{ -\frac{k \cos kr_0}{r_0} + \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} \right\} \right] d\omega$$

Ziehen wir die rechte Seite dieser Gleichung von der rechten Seite der Gleichung (245b) ab, so ergibt sich

$$4\pi \varphi_0 = \int \left[ \frac{k}{r_0 r_1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin(k(r_0 + r_1) - nt) + \frac{1}{r_0 r_1} \left( \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos(k(r_0 + r_1) - nt) \right] d\omega \quad (245c)$$

## § 61. Einführung elliptischer Coordinaten.

Zur Ausführung des Integrales der letzten Gleichung (245c) wollen wir andere Coordinaten benutzen. Zu diesem Zwecke ziehen wir eine gerade Verbindungslinie zwischen dem Störungspunkte 1 und dem angenommenen Sammelpunkte 0, welche wir im Nachfolgenden stets als Axe bezeichnen wollen. Diese Verbindungslinie nehmen wir als  $x$ -Axe, und zwar ihre Mitte als Nullpunkt an und lassen  $x$  in der Richtung von 1 nach 0 hin wachsen; die Entfernung  $\varrho$  von dieser Verbindungslinie bilde die andere Coordinate. Es stellt dann  $\varrho$  die Länge des Lothes dar, welches von einem in beliebiger Richtung seitlich gelegenen Punkte auf die  $x$ -Axe gefällt wird. Ferner denken wir uns eine Reihe von Ebenen durch die  $x$ -Axe hindurch gelegt, deren Neigungen gegen eine beliebig unter ihnen ausgewählte mit  $\alpha$  bezeichnet werde. Diese Ebenen wollen wir im Folgenden „Meridianebenen“ nennen.

Nummehr wollen wir unsere Coordinaten weiter umformen, indem wir in jeder Meridianebene sogenannte elliptische Coordinaten benutzen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$x = \pm A \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{1 + \sigma^2} \quad (248)$$

und

$$\varrho = A \cdot \mu \cdot \sigma, \quad (249)$$

wodurch zwei neue Variable,  $\mu$  und  $\sigma$ , eingeführt und in ihrer Beziehung zu den alten Coordinaten  $x$  und  $\varrho$  definirt sind. Dabei soll  $2A$  gleich dem Abstand der Punkte 0 und 1 sein. Führen wir den Werth von  $\sigma$  aus Gleichung (249) in Gleichung (248) ein, so ergibt sich, nachdem wir quadirt haben:

$$x^2 = A^2 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \left(1 + \frac{\varrho^2}{A^2 \mu^2}\right)$$

oder nach Division durch  $A^2 \cdot (1 - \mu^2)$ :

$$\frac{x^2}{A^2 \cdot (1 - \mu^2)} - \frac{\varrho^2}{A^2 \mu^2} = 1 \quad (250)$$

Das ist aber die Gleichung einer Hyperbel, und zwar einer Hyperbel, deren reelle in die  $x$ -Axe fallende Hauptaxe die Länge  $A \cdot \sqrt{1 - \mu^2}$ , und deren Nebenaxe die Länge  $A \cdot \mu$  hat, deren Brennpunkte also den Abstand  $2A$  besitzen und mithin in die Punkte 0 und 1 fallen.

Führen wir aber den Werth von  $\mu$  aus Gleichung (249) in Gleichung (248) ein, so erhalten wir analog:

$$x^2 = A^2 \cdot (1 + \sigma^2) \cdot \left(1 - \frac{Q^2}{A^2 \sigma^2}\right)$$

oder

$$\frac{x^2}{A^2 \cdot (1 + \sigma^2)} + \frac{Q^2}{A^2 \sigma^2} = 1 \quad (251)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren halbe große Axe gleich  $A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2}$ , und deren halbe kleine Axe gleich  $A \cdot \sigma$  ist, deren Brennpunkte also auch den Abstand  $2A$  besitzen und in die Punkte 0 und 1 fallen. Die Beziehungen auf die beiden Axen der Ellipse können nicht mit einander vertauscht werden, da bei reellem Werthe von  $\sigma$ , den wir voraussetzen wollen, stets  $A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2} > A \cdot \sigma$  ist.

Es zeigt sich also, daß die Curven von gleichem  $\mu$  und von gleichem  $\sigma$  Kegelschnitte sind, und zwar bilden die  $\mu$ -Curven ein System von Hyperbeln und die  $\sigma$ -Curven ein System von Ellipsen. Allen diesen Curven ist  $A$ , der halbe Abstand der beiden Brennpunkte von einander, gemeinsam.

Ueber die Gestalt der verschiedenen Ellipsen ist nun Folgendes zu bemerken:

Wenn  $\sigma = 0$  ist, so wird die kleine Axe der Ellipse, die ja gleich  $2A\sigma$  ist, verschwinden, d. h. die Ellipse wird sich in die große Axe, also in eine Gerade zusammenziehen, und zwar ist deren Länge, die allgemein gleich  $2A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2}$  ist, hier gleich  $2A$ . In demselben Maafse, wie  $\sigma$  wächst, wachsen auch die kleinen Axen der Ellipsen, sie bekommen aber auch, da der Abstand der Brennpunkte derselbe bleibt, größere große Axen, und zwar sind dieselben gleich  $2A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2}$ . Für sehr große Werthe von  $\sigma$  gehen die Ellipsen, da dann der Unterschied zwischen der großen und kleinen Axe,  $2A\sigma$  und  $2A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2}$  verschwindet, in Kreise über, deren Radius gleich  $A \cdot \sigma$  zu setzen ist. Es ist demnach  $\sigma$  eine Größe, die von Null bis Unendlich wachsen kann. Den Werth Null hat sie in der Verbindungslinie der Brennpunkte, den Werth Unendlich in allen unendlich weit entfernten Punkten.

Ueber die Abhängigkeit der Gestalt der verschiedenen Hyperbeln von dem Parameter  $\mu$  ist Folgendes zu sagen:

Ist  $\mu = 0$ , so haben wir den einen Grenzfall, daß die beiden Hyperbeläste sich reduciren auf die beiderseitigen Verlängerungen der zwischen den Brennpunkten gezogenen Verbindungslinie. Die

Länge der Hauptaxe ist in diesem Falle gleich  $2A$ , während die Nebenaxe sich auf Null zusammenzieht. Läßt man nun  $\mu$  wachsen, so nimmt die Hauptaxe stets ab, da sie gleich  $2A \cdot \sqrt{1 - \mu^2}$  ist, während die Länge der Nebenaxe  $A \cdot \mu$  wächst. Bei  $\mu = 1$  ist der andere Grenzfall erreicht, indem dann die Hauptaxe gleich Null geworden ist, und die beiden Hyperbeläste in jeder Ebene mit der  $\rho$ -Axe zusammenfallen.

Um also sämtliche möglichen Ellipsen und Hyperbeln zu erhalten, welche die beiden in dem Abstände  $2A$  von einander entfernt liegenden Punkte zu Brennpunkten haben, müssen wir  $\sigma$  von Null bis Unendlich und  $\mu$  von 0 bis 1 variiren.

Indem wir uns nun in jeder Meridianebene alle diese Ellipsen und Hyperbeln gezogen denken, entsteht eine Schaar von Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden.

Die Anwendung der elliptischen Coordinaten hat den Vortheil, daß für alle Punkte, die auf einem und demselben Ellipsoid liegen, die Summe der Entfernungen  $r_1$  und  $r_0$ , also die Summe der Länge der beiden Strahlen, denen wir zu folgen haben, wenn wir von dem Ausgangspunkte der Strahlen zu irgend einem beliebigen Punkte hingehen und von da weiter zu dem Sammlungspunkte der Strahlen, immer die gleiche Größe hat, und daß also die Strahlen, welche gleichzeitig von einem Brennpunkte ausgegangen sind, mit übereinstimmenden Phasen in dem anderen Brennpunkte eintreffen und sich dadurch gegenseitig verstärken. Die Strahlen von gleichem Werthe des Parameters  $\sigma$  repräsentiren in der That diejenigen Strahlen, welche in dem Sammelpunkte mit gleicher Phase wieder eintreffen. Wenn wir uns also durch die Fläche der Oeffnung hindurch die Reihe der Ellipsoide construirt denken, bei denen die Größe  $k(r_1 + r_0)$  um je eine halbe Wellenlänge zunimmt, so wird jeder dadurch aus der Fläche der Oeffnung herausgeschnittene Ring Strahlen enthalten, welche sich in ihrer Wirkung beim Eintreffen in dem Sammelpunkte verstärken, während die Strahlen benachbarter Ringe sich gegenseitig schwächen.

### § 62. Die Eigenschaften elliptischer Coordinaten.

Bevor wir von den elliptischen Coordinaten zur Umformung des Integrales der Gleichung (245c) Gebrauch machen können, müssen wir einige allgemeine Eigenschaften derselben und einige aus ihnen sich ergebende Formeln ableiten.

1. Zunächst wollen wir nachweisen, daß in jeder Meridianebene die beiden Systeme von Kegelschnitten orthogonale Systeme sind, d. h. daß jede Curve des einen Systems rechtwinklig von jeder Curve des anderen Systems geschnitten wird. Aus den Gleichungen (248) und (249) ergibt sich für einen constanten Werth von  $\sigma$

$$\left. \begin{aligned} dx &= \mp \frac{A \cdot \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \sqrt{1 + \sigma^2} \cdot d\mu \\ \text{und} \\ d\rho &= A \cdot \sigma \cdot d\mu, \end{aligned} \right\} (252)$$

für einen constanten Werth von  $\mu$  aber

$$\left. \begin{aligned} dx &= \pm \frac{A \cdot \sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot d\sigma \\ \text{und} \\ d\rho &= A \cdot \mu \cdot d\sigma \end{aligned} \right\} (253)$$

Die Tangente des Winkels, den eine irgendwo an die Curve gelegte Tangente mit der  $x$ -Axe macht, erhalten wir durch Bildung des diesem Punkte der Curve entsprechenden Quotienten  $\frac{d\rho}{dx}$ . Wenn wir diesen Winkel für die Curven mit constantem  $\sigma$  mit  $\alpha_\sigma$ , hingegen für die Curven mit constantem  $\mu$  mit  $\alpha_\mu$  bezeichnen, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \\ \text{tg } \alpha_\sigma &= \mp \frac{\sigma}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 + \sigma^2}} \\ \text{tg } \alpha_\mu &= \pm \frac{\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{1 - \mu^2}}. \end{aligned} \right\} (254)$$

Es ist also:

$$\text{tg } \alpha_\sigma = - \text{cotg } \alpha_\mu \quad (255)$$

und daher:

$$\alpha_\sigma = \alpha_\mu \pm \frac{\pi}{2}. \quad (255a)$$

Die Tangenten der beiden Curven stehen also auf einander senkrecht, und die Curven selbst, die Ellipsen und die Hyperbeln, schneiden sich stets rechtwinklig.

2. Die große Axe der Ellipse, welche gleich  $2A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2}$  ist, entspricht der Summe der Brennstrahlen  $r_0$  und  $r_1$ , so daß also:

$$2A \cdot \sqrt{1 + \sigma^2} = r_0 + r_1, \quad (256)$$

während bei den Hyperbeln die Differenz der Brennstrahlen gleich der reellen Axe der Hyperbeln ist, so daß also

$$\pm 2 A \cdot \sqrt{1 - \mu^2} = r_1 - r_0. \quad (257)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad r_1 &= A \cdot (\sqrt{1 + \sigma^2} \pm \sqrt{1 - \mu^2}) \\ r_0 &= A \cdot (\sqrt{1 + \sigma^2} \mp \sqrt{1 - \mu^2}). \end{aligned} \right\} \quad (258)$$

Damit haben wir aber die beiden Entfernungen, welche der betreffende Punkt von den beiden Brennpunkten hat. Außerdem ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad \frac{\partial r_1}{\partial \mu} &= \mp \frac{A \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \\ \frac{\partial r_0}{\partial \mu} &= \pm \frac{A \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (259)$$

so daß also

$$\frac{\partial r_1}{\partial \mu} = - \frac{\partial r_0}{\partial \mu}, \quad (259a)$$

was auch daraus gefolgert werden kann, daß  $r_1 + r_0$  von  $\mu$  unabhängig ist. Ferner folgt aus den Gleichungen (258)

$$r_1 \cdot r_0 = A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2). \quad (260)$$

Bevor wir nun aber die hier erhaltenen Werthe benutzen können, müssen wir eine geeignete Festsetzung über die Form der Grenzfläche machen, über welche wir das Integral der Gleichung (245c) auszudehnen haben.

### § 63. Annahme über eine bestimmte Form der ideellen Grenzfläche, welche die Oeffnung verschliesst.

Die Grenzfläche, welche die Oeffnung in dem schwarzen Schirme verschliesst, und über welche wir die Integration ausdehnen müssen, wollen wir uns nun gebildet denken: erstens, aus lauter schmalen Streifen der Rotationshyperboloide  $\mu = \text{const.}$ , die von je zwei unendlich wenig gegen einander geneigten Meridianebenen ausgeschnitten werden und sich von den einzelnen Elementen der Oeffnungsgrenze bis zu der Geraden 01 erstrecken; zweitens, aus denjenigen unendlich schmalen Stücken der Meridianebenen, welche die Verbindungen zwischen den eben genannten Streifen bilden,

also von zwei Hyperbelstücken begrenzt sind, deren Parameter  $\mu$  nur um unendlich wenig von einander differiren.

Es tritt damit, genau genommen, freilich eine Aenderung in der Curvenführung der Oeffnung ein; denn wir haben nunmehr eine eckige Curve, welche abwechselnd aus den Projectionen der ursprünglichen Curvelemente auf die Meridianflächen und aus dazu senkrechten Stücken besteht. Da diese beliebig klein angenommen werden können, so kann die Annäherung an die ursprüngliche Curve beliebig weit getrieben werden, und daher ist es berechtigt, die neue Curvenführung an die Stelle der bisherigen zu setzen.

Weil sowohl  $r_0$  wie  $r_1$  in die Meridianebenen fallen, so ist für die letztgenannten Theile unserer Integrationsfläche

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = \frac{\partial r_1}{\partial N} = 0 \tag{261}$$

und wir haben daher das Integral unserer Gleichung (245c) nur über die Hyperboloidstreifen auszudehnen. Bei diesen fällt aber die Richtung der Normalen  $N$  in die Schnittlinien der Flächen von constanten  $\sigma$ -Werthen, also der Rotationsellipsoide, mit den Meridianebenen. Während in Richtung dieser Lothe  $\sigma$  constant bleibt, wird aber  $\mu$  sich ändern. Die Differentialquotienten nach  $N$  werden sich also durch die Differentialquotienten nach  $\mu$  ausdrücken lassen.

Da das Linienelement  $dN$  in einer Meridianebene liegt, so ist hier zu setzen:

$$dN^2 = dx^2 + d\rho^2 \tag{262}$$

und zwar müssen wir diejenigen Werthe von  $dx$  und  $d\rho$  nehmen, welche einer Aenderung von  $\mu$  bei constantem  $\sigma$  entsprechen. Nach unseren Gleichungen (252) sind diese:

$$dx = \mp \frac{A\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \sqrt{1+\sigma^2} \cdot d\mu$$

und

$$d\rho = A \cdot \sigma \cdot d\mu.$$

Und daher ist:

$$\begin{aligned} dN^2 &= A^2 \cdot \left( \sigma^2 + \frac{\mu^2 \cdot (1 + \sigma^2)}{1 - \mu^2} \right) \cdot d\mu^2 \\ &= A^2 \cdot \frac{\sigma^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot d\mu^2. \end{aligned} \tag{262a}$$

Also ist:

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial N} \right)^2 = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 + \mu^2}$$

oder

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \pm \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 + \mu^2}}. \quad (262b)$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{\partial r_1}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial N}$$

und indem wir hierin aus den Gleichungen (259) und (260) die Werthe einsetzen, ergibt sich:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \mp \frac{A \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 + \mu^2}}.$$

Oben ist festgesetzt, daß die Normalen nach der Seite gezogen sein sollen, auf der der Punkt 0 liegt. Es muß also  $r_1$  mit  $N$  wachsen, d. h.  $\frac{\partial r_1}{\partial N}$  ist positiv. Mithin ist

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}. \quad (263)$$

Zufolge Gleichung (259 a) ist dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = - \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}. \quad (263a)$$

Führen wir diese beiden letzten Werthe und aus Gleichung (260) den Werth

$$r_0 \cdot r_1 = A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)$$

in das Integral der Gleichung (245c) ein, so erhalten wir, indem wir das Integral der Uebersichtlichkeit halber in zwei Integrale zerlegen

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi \varphi_0 = & \int \frac{k}{A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)} \cdot \frac{2 \mu}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \sin(k(r_0 + r_1) - nt) d\omega \\ & + \int \frac{1}{A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \cos(k(r_0 + r_1) - nt) d\omega \end{aligned} \right\} (264)$$

oder, wenn wir beachten, daß

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{r_0 + r_1}{r_0 r_1} = \frac{2 A \sqrt{1 + \sigma^2}}{A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)} \quad (265)$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi \varphi_0 = & \int \frac{2 k \mu}{A^2 \cdot (\sigma^2 + \mu^2) \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \sin(2kA\sqrt{1 + \sigma^2} - nt) d\omega \\ & + \int \frac{2 \mu \sqrt{1 + \sigma^2}}{A^3 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)^2 \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \cos(2kA\sqrt{1 + \sigma^2} - nt) d\omega \end{aligned} \right\} (264a)$$

Es ist nunmehr noch der Werth des Flächenelementes  $d\omega$  in den neuen Coordinaten auszudrücken. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung:

Die Breite eines Hyperboloidstreifens, über deren Gesamtheit sich die Integration erstreckt, ist an jeder Stelle gleich  $\rho \cdot d\alpha$ , wenn  $d\alpha$  die unendlich kleine Neigung zwischen den beiden Meridianebenen bezeichnet, welche den Streifen seitlich begrenzen. Wir wollen nun als Flächenelement das unendlich kleine Rechteck wählen, dessen Breite gleich  $\rho \cdot d\alpha$  und dessen Länge gleich  $dl$  ist, wenn wir unter  $dl$  ein Element der Schnittlinie einer Meridianfläche mit einem Hyperboloid verstehen. Diese Schnittlinie ist ein Stück einer Hyperbel. Es ist nun:

$$dl^2 = dx^2 + d\rho^2, \tag{266}$$

wobei aber zu beachten ist, daß wir bei der Berechnung von  $dx$  und  $d\rho$ , weil  $dl$  auf einer Hyperbel liegt,  $\mu$  constant annehmen müssen. Dann ist nach den Gleichungen (253)

$$dx = \pm \frac{A \cdot \sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot d\sigma$$

und

$$d\rho = A \cdot \mu \cdot d\sigma$$

und demnach

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{A^2}{1 + \sigma^2} \cdot \left[ \sigma^2 \cdot (1 - \mu^2) + \mu^2 (1 + \sigma^2) \right] \cdot d\sigma^2 \\ &= \frac{A^2}{1 + \sigma^2} \cdot (\sigma^2 + \mu^2) \cdot d\sigma^2 \end{aligned}$$

oder

$$dl = \frac{A}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \mu^2} \cdot d\sigma. \tag{267}$$

Es ist also

$$\left. \begin{aligned} d\omega &= \rho \cdot d\alpha \cdot dl \\ &= \rho \frac{A}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \mu^2} \cdot d\alpha \cdot d\sigma \end{aligned} \right\} \tag{268}$$

oder, wenn wir für  $\rho$  aus Gleichung (249) seinen Werth

$$\rho = A \cdot \sigma \cdot \mu$$

einsetzen,

$$d\omega = A^2 \cdot \sigma \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2 + \mu^2}{1 + \sigma^2}} \cdot d\alpha \cdot d\sigma. \tag{268a}$$

Dadurch verwandelt sich aber Gleichung (264a) in:

$$4\pi\varphi_0 = \left. \begin{aligned} & \iint \frac{2k\sigma\mu^2}{\sigma^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \sin(2kA\sqrt{1 + \sigma^2} - nt) d\alpha d\sigma \\ & + \iint \frac{2\sigma\mu^2}{A(\sigma^2 + \mu^2)^2} \cdot \cos(2kA\sqrt{1 + \sigma^2} - nt) d\alpha d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (264b)$$

Wir führen nun eine neue Integrationsvariable ein, indem wir

$$s = \sqrt{1 + \sigma^2} \quad (269)$$

setzen; dann ist

$$\sigma^2 + \mu^2 = \mu^2 + s^2 - 1 \quad (269a)$$

$$\sigma d\sigma = s ds \quad (269b)$$

und somit wird

$$4\pi\varphi_0 = \left. \begin{aligned} & \iint \frac{2k\mu^2}{\mu^2 + s^2 - 1} \sin(2kAs - nt) d\alpha ds \\ & + \iint \frac{2s\mu^2}{A(\mu^2 + s^2 - 1)^2} \cos(2kAs - nt) d\alpha ds \end{aligned} \right\} \quad (264c)$$

Wir können nun das erste Integral partiell integrieren, wodurch die Größe  $k$ , sofern sie nicht in dem Argument des Sinus vorkommt, weggeschafft wird. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} & \iint \frac{2k\mu^2}{\mu^2 + s^2 - 1} \cdot \sin(2kAs - nt) \cdot d\alpha \cdot ds \\ & = - \int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot d\alpha \\ & \quad + \int d\alpha \int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s^2 + \mu^2 - 1} \right) \cdot ds \\ & = - \int \frac{\mu^2}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \cos(2kAs - nt) \cdot d\alpha \\ & \quad - \iint \frac{2s\mu^2}{A \cdot (\mu^2 + s^2 - 1)^2} \cdot \cos(2kAs - nt) \cdot d\alpha \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Wenn wir diesen Werth in Gleichung (264c) einsetzen, heben sich zwei Integrale fort, und wir erhalten:

$$4\pi\varphi_0 = - \int \frac{\mu^2}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \cos(2kAs - nt) \cdot d\alpha. \quad (264d)$$

Die horizontalen Striche, zwischen welche der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck eingeschlossen ist, bezeichnen, daß er zwischen den Grenzen zu nehmen ist, die für das partiell integrierte Integral vorgeschrieben waren. Diese Grenzen sind hier durch die Ausdehnung der Oeffnung gegeben.

Da wir an Stelle des Parameters  $\sigma$  jetzt die Variable  $s$  eingeführt haben, so ist zu beachten, daß in der Axe, d. h. also, in der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte,  $s = 1$ , weil hier  $\sigma = 0$  ist. Außerhalb der Axe ist  $\sigma > 0$ , und daher  $s > 1$ . Für unendliche Entfernung werden beide,  $\sigma$  und  $s$ , unendlich groß. Wenn also die Oeffnung des Schirmes sehr groß ist, so wird  $s$  einen verhältnißmäßig hohen Werth annehmen können, während  $\mu^2$  als Maximum nur den Werth 1 erreichen kann. Es ist aber ersichtlich, daß an der unteren Grenze nur dann  $s = 1$ , also  $\sigma = 0$  ist, wenn die Axe durch die Oeffnung hindurch geht. Schneidet dagegen die Verbindungslinie die Oeffnung nicht, können also die Strahlen nicht geradlinig von dem Ausgangspunkte des Lichtes zu dem Sammelpunkte gelangen, so kommt der Werth  $s = 1$  nicht vor, sondern dann wird auch für die untere Grenze ein Werth  $s > 1$  zu setzen sein, und zwar werden für die verschiedenen Werthe von  $\alpha$ , also für die verschiedenen Meridianebenen auch verschiedene Werthe für die untere Grenze von  $s$  eintreten.

§ 64. Integration des für das Wellenpotential  $\varphi_0$  erhaltenen Werthes.

Die in unserer Gleichung (264e) vorkommende Integration ist nach  $\alpha$  auszuführen, d. h. also, nach dem Winkel, den die Meridianebenen mit einer beliebig festgesetzten Ebene bilden. Für jede Meridianebene sind nun im allgemeinen die Grenzen von  $s$  verschieden, und wir können also  $\alpha$  als Function von  $s$  betrachten. Es ist daher gestattet, an Stelle von  $d\alpha$  in unseren Integralen  $\frac{d\alpha}{ds} ds$  zu setzen und in diesem Sinne die Integration auszuführen. Bei dieser ist zu beachten, daß die Nenner nothwendig positive Größen sind, die sich nicht in kurzen Perioden ändern, sondern im allgemeinen von gewissen kleinsten Werthen zu einem größten Werthe wachsen.

Indem wir für  $d\alpha$  die erwähnte Substitution machen, verwandelt sich die Gleichung (264d) in

$$4 \pi \varphi_0 = - \int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot ds$$

und hier haben wir, da wiederum  $s$  als Integrationsvariable auftritt, dieselben Grenzen als Integrationsgrenzen, welche wir bisher durch die horizontalen Striche andeuteten. Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} & - \int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot ds = \\ & - \frac{1}{k} \cdot \frac{\mu^2}{2A^2(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \sin(2kAs - nt) \cdot \frac{d\alpha}{ds} \\ & + \frac{1}{k} \int \frac{1}{2A^2} \cdot \sin(2kAs - nt) \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{\mu^2 \frac{d\alpha}{ds}}{s^2 + \mu^2 - 1} \right) \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

Wir haben nun zu überlegen, wie sich diese Ausdrücke verhalten, wenn  $k$  sehr groß wird. Beide enthalten den Factor  $\frac{1}{k}$ , und dieser wird unendlich klein, wenn die Wellenlänge unendlich klein wird, da  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ist. Die Sinuswerthe sind immer echte Brüche, können also dadurch, daß sie als Factor auftreten, keine unendlich großen Werthe hervorrufen; dasselbe gilt von dem Factor  $\frac{\mu^2}{4A^2(s^2 + \mu^2 - 1)}$ , wohl aber könnten die Differentialquotienten  $\frac{d\alpha}{ds}$  und  $\frac{d^2\alpha}{ds^2}$  unendlich groß werden und dadurch bewirken, daß selbst bei einem unendlich großen Werthe von  $k$  der betreffende Theil des Gliedes noch berücksichtigt werden müßte.

Wir brauchen also nur diejenigen Theile weiter zu beachten, in denen einer der Differentialquotienten unendlich groß wird. Alle übrigen Theile verschwinden.

Für den Differentialquotienten  $\frac{d\alpha}{ds}$  tritt dieses zunächst ein, wenn die Grenzcurve der Oeffnung für eine gewisse Strecke auf einem der Rotationsellipsoide liegt; dann wird sich  $s$  auf dieser Strecke nicht ändern, während  $\alpha$  um einen endlichen Betrag wächst. An einer solchen Stelle würden wir demnach keinen Differentialquotienten  $\frac{d\alpha}{ds}$  bilden können, und wir müßten für diesen Theil des Integrationsintervalles wieder auf die Form der ursprünglichen Gleichung (264e), also auf die Form:

$$- \int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot d\alpha$$

zurückgreifen, bei der die Integration aber ohne Weiteres leicht ausgeführt werden kann. Denn sowie  $s$  constant ist, wird die Gröfse, über welche wir nach der ursprünglichen Vorschrift integriren sollen, ein constanter Factor, und zur Ausführung der Integration brauchen wir diesen nur mit der Gröfse  $\alpha$  des betreffenden Winkels zu multipliciren. Es ist dann also dieser Theil des Integrales gleich

$$-\frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha}$$

wo unter  $\mu$ , das im Allgemeinen eine Function von  $\alpha$  ist, ein mittlerer Werth verstanden wird.

Wenn die Verbindungslinie zwischen dem Ausgangspunkt und dem Sammelpunkt durch die Oeffnung geht, so wird stets  $\frac{d\alpha}{ds}$  unendlich. Die untere Grenze des Integrals ist dann nämlich  $s = 1$ , und zwar umfaßt sie den ganzen Kreis, welcher die Verbindungslinie unmittelbar umgiebt, so dafs hier

$$\frac{\alpha}{\alpha} = 2\pi$$

ist.

Falls nun für keinen Theil der Grenzcurve der Oeffnung  $s$  constant ist, kein endlicher Theil also auf einem der Rotationsellipsoide liegt, so wird, wie wir gesehen, die obere Grenze des Integrals sehr klein, und es ergibt sich unter Berücksichtigung des oben abgeleiteten Werthes der unteren Grenze

$$\begin{aligned} -\int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot d\alpha &= \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kA - nt)}{A\mu^2} \cdot 2\pi \\ &= \frac{2\pi \cdot \cos(2kA - nt)}{A} \end{aligned}$$

mithin

$$\varphi_0 = \frac{\cos(2kA - nt)}{2A} \tag{272}$$

d. h.  $\varphi_0$  erhält denselben Werth, den es auch ohne den Schirm erhalten würde. Liegt aber die Grenzcurve der Oeffnung ganz oder theilweise auf einem jener Rotationsellipsoide, so tritt noch der auf diese Grenze bezügliche Werth

$$-\frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha}$$

hinzu. Dieser ist aber jedenfalls kleiner, als der von der unteren

Grenze herrührende Werth; denn es ist, da in dieser Grenze  $s^2 > 1$  sein muß,

$$\frac{\mu^2}{s^2 + \mu^2 - 1} < 1.$$

Liegt nur ein Theil der Oeffnung auf einem der Rotationsellipsoide, so ist auch noch der Factor

$$\overline{\alpha} < 2\pi.$$

Geht die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Sammelpunkt der Lichtbewegung nicht durch die Oeffnung, sondern durch den schwarzen Schirm, so fällt der von der unteren Grenze herrührende Haupttheil des Integralwerthes fort, und es bleibt eventuell nur der stets viel kleinere zweite Theil bestehen.

Es ist zu beachten, daß dieser zweite Theil des Integralwerthes nur an ganz bestimmten vereinzelt Punkten vorkommen kann. Er wird, wie aus seiner Form hervorgeht, um so kleiner sein, je größer  $s$  bei constantem  $\mu$  ist, d. h. je größer das Rotationsellipsoid ist, auf dessen Oberfläche das betreffende Stück der Grenze liegt; er wird ferner um so kleiner sein, je kleiner bei constantem  $s$  der Werth von  $\mu$  ist, d. h. je mehr sich das Stück der Grenze von der auf der Mitte der Verbindungslinie senkrecht stehenden Ebene entfernt.

Nun ist noch weiter der Fall möglich, daß  $\frac{d\alpha}{ds}$  an einzelnen Punkten unendlich groß würde, was dann bedeutet, daß der Werth von  $s$  für diese Werthe von  $\alpha$  ein Maximum oder Minimum wird. Für den entfernteren Theil der Oeffnung wird sich stets ein solches Maximum bilden. Es wird auch immer ein Minimum auftreten; aber wenn die Curve continuirlich gekrümmt ist, so wird man diesen Fall als einen besonderen Fall des eben behandelten betrachten können, indem man den einen Punkt, an dem der Differentialquotient  $\frac{d\alpha}{ds}$  unendlich groß ist, als eine unendlich kurze Strecke betrachtet, die auf einem der Rotationsellipsoide liegt. Wir müssen dann also auch hier wieder auf die ursprüngliche Integralform

$$-\int \frac{\mu^2 \cdot \cos(2kAs - nt)}{2A(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot d\alpha$$

zurückgehen; aber der bei der Integration auftretende Factor  $\overline{\alpha}$  wird hier gleich Null, da er zwischen unendlich nahen Grenzen zu nehmen ist.

Die bisherigen Ergebnisse unserer Discussion können wir nunmehr dahin zusammenfassen, daß die in Gleichung (271) angegebene partielle Integration nur dann zu benutzen ist, wenn der im ersten Gliede der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende Differentialquotient  $\frac{d\alpha}{ds}$  einen endlichen Werth hat, daß in diesem Falle aber das erste Glied selbst verschwindet.

Welchen Werth erhält dann aber das zweite Glied

$$\frac{1}{k} \cdot \int \frac{1}{2A^2} \cdot \sin(2kAs - nt) \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{\mu^2 \frac{d\alpha}{ds}}{s^2 + \mu^2 - 1} \right) \cdot ds$$

unserer Gleichung (271)? Wird die Differentiation ausgeführt, so erhält man

$$-\frac{1}{k} \int \frac{2\mu}{2A^2 \cdot (s^2 + \mu^2 - 1)^2} \cdot \left( \mu s + \frac{d\mu}{ds} - s^2 \frac{d\mu}{ds} \right) \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot \sin(2kAs - nt) ds$$

$$+ \frac{1}{k} \int \frac{\mu^2}{2A^2 (s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{d^2\alpha}{ds^2} \cdot \sin(2kAs - nt) ds.$$

Da hier  $\frac{d\alpha}{ds}$  endlich vorausgesetzt wird und  $\frac{d\mu}{ds}$  höchstens in einzelnen Punkten der Grenze unendlich werden kann, was bei der Endlichkeit von  $\mu$  das Integral nicht unendlich machen kann, so wird das erste Integral wegen des Factors  $\frac{1}{k}$  sehr klein. In dem zweiten Integral könnte nun zwar  $\frac{d^2\alpha}{ds^2}$  unendlich werden, aber unter

der gemachten Voraussetzung höchstens in der Weise, daß  $\int \frac{d^2\alpha}{ds^2} ds$  noch einen endlichen Werth giebt; unser Integral enthält außerdem unter dem Integralzeichen nur noch Factoren, welche echte Brüche sind, und soll ferner noch durch den unendlich großen Factor  $k$  dividirt werden. Das Glied verschwindet daher.

Es ergibt sich also, daß die rechte Seite der Gleichung (264d) für unendlich kleine Wellenlängen nur dann einen dauernd bleibenden Werth hat, wenn die Axe durch die Oeffnung hindurch geht. Enthält die Oeffnungsgrenze endliche Theile, die auf einem der Rotationsellipsoide liegen, so treten noch endliche Theile des Integrales auf, welche aber sehr klein sind, und von denen zu beachten ist, daß sie sich nur auf ganz bestimmte Ausgangspunkte und Sammelpunkte beziehen; denn für die unmittelbar daneben liegenden Punkte, die eine etwas andere Lage der Axe bedingen, fällt

dieser Theil des Integrales fort. Bei Vernachlässigung dieser Theile haben wir also nach Gleichung (272)

$$\varphi_0 = \frac{\cos(2k \cdot A - nt)}{2A}. \quad (273)$$

Da nun aber  $2A$  die Entfernung zwischen dem Ausgangs- und dem Sammelpunkte der Lichtbewegung ist, die wir hier einmal mit  $r$  bezeichnen wollen, so dafs also die letzte Gleichung die Form

$$\varphi_0 = \frac{\cos(kr - nt)}{r} \quad (274)$$

erhält, so zeigt sich, wie schon oben bemerkt, dafs in diesem Falle  $\varphi_0$  in dem Sammelpunkte der Strahlen genau denselben Werth hat, den es haben würde, wenn gar kein Schirm da wäre. Das wird der Fall sein für alle die Punkte, die man vom Ausgangspunkte aus geradlinig erreichen kann, ohne auf den Schirm selbst zu treffen. Hingegen wird im allgemeinen  $\varphi_0$  in allen denjenigen Punkten verschwinden, wo diese Verbindungslinie den Schirm schneidet. Dadurch ist also in der That die Lehre von der Strahlung des Lichtes begründet, aber nur als ein Grenzfall, welcher vollständig nur dann eintritt, wenn die Wellenlängen unendlich klein sind.

### § 65. Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Die thatsächlichen Erfahrungen über die Fortpflanzung des Lichtes sind nun in vollkommener Uebereinstimmung mit den eben gemachten Auseinandersetzungen. Wir wissen aus dem alltäglichen Leben, dafs, so oft wir Strahlen, namentlich solche, die von einem sehr eng begrenzten Lichtpunkte ausgehen, durch Oeffnungen hindurchgehen lassen, welche verhältnismäfsig grofs sind gegen die Wellenlängen des Lichtes, ein Lichtkegel entsteht, welcher von geradlinigen Strahlen begrenzt ist. Die Grenze wird um so schärfer, je feiner der Lichtpunkt ist. Gewöhnlich haben wir es mit Lichtquellen zu thun, welche eine gewisse Ausdehnung haben, und dann sind auch die Schattengrenzen bis zu einem gewissen Grade verwaschen, weil dann die Schattengrenze für den einen Rand der Lichtquelle an einer anderen Stelle liegt, wie für den anderen Rand. Es ist dann in einer gewissen Breite weder Vollschatten, noch volle Lichtstärke, sondern ein sogenannter Halbschatten, indem die Punkte dieses Raumes geradlinige Strahlen nur von einem Theile, und nicht mehr von der ganzen Lichtquelle erhalten. Je enger der Ausgangspunkt der Strahlen ist, je mehr er sich einem

geometrischen Punkte in Bezug auf seine Ausdehnung nähert, desto schärfer sind also die Schattengrenzen.

Geht die Verbindungslinie zwischen dem Ausgangspunkte und dem betrachteten Punkte gerade durch den Rand der Oeffnung, dann bleibt von dem Integrationsintervall auf der linken Seite unserer Gleichung (272) nur noch die Hälfte bestehen, und es wird demnach die Lichtintensität an einer solchen Stelle auf die Hälfte derjenigen reducirt, welche in dem vollen Lichtkegel herrscht. Da die Wellenlängen in Wirklichkeit nicht unendlich klein sind, so wird in Wirklichkeit auch die Schattengrenze nicht absolut scharf sein, sondern immer von schwachen Diffractionerscheinungen, abwechselnd hellen und dunklen, bei weißem Lichte aber auch farbigen Säumen umgeben sein. Es finden sich noch Spuren anderer heller Grenzlinien in dem dunkeln Raume, und dafür tritt eine gewisse Schwächung des Lichtes in dem hellen Raume am Rande des Schattens ein. Wir wollen hiervon aber von jetzt an absehen und die völlig geradlinige Verbreitung des Lichtes annehmen.

---