

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1897

Fünfter Theil. Geometrische Optik

Fünfter Theil.

Geometrische Optik.

Erster Abschnitt.

Die Spiegelung.

§ 66. Allgemeines.

Die Existenz von geradlinigen Lichtstrahlen und die Ausbreitung des Lichtes in ihnen ist eine schon im Alterthum bekannte Beobachtungsthatsache. Es erscheint dabei in der Vorstellung der Menschen jeder einzelne Strahl gleichsam als ein unabhängiges mechanisches Ganze, das sich selbständig fortbewegt, ohne durch seine Nachbarschaft beeinflusst zu sein. In Wahrheit verhält es sich allerdings, wie wir gesehen haben, nicht so. Das thatsächlich Bestehende ist die Wellenbewegung, und die Strahlen sind nur mathematisch geometrische Gebilde: die Normalen der Wellenflächen. Allerdings gehen die Wellenflächen in Richtung der Strahlen vorwärts; aber die Unterbrechung einer Wellenfläche durch einen schattengebenden Körper läßt doch die Bewegung in der nächsten Nachbarschaft nicht ungestört. Im Gegentheil zeigten uns die Untersuchungen über die Beugung, daß eine seitliche Ausbreitung der Wellen vorkommt, und eine ungestörte Fortpflanzung neben einem schattengebenden Körper nicht möglich ist. Damit ein Strahl in einer bestimmten Richtung vorwärts gehe, kommt es, wie wir gesehen haben, darauf an, daß die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden unmittelbar benachbarten Strahlen an dem gegebenen Endpunkte ohne gegenseitige Zeitdifferenz anlangen. Wenn sie alle in derselben Zeit von dem einen Punkt zu dem anderen Punkt sich fortpflanzen, also auch mit gleicher Phase an-

kommen, — nicht blofs der eine gleichsam isolirte geometrische Strahl, der der wirklichen Verbindungslinie entspricht, sondern auch die benachbarten Strahlen —, so können sie sich gegenseitig verstärken und eine gemeinsame Wirkung hervorbringen. Man kann diese Bedingung auch dahin aussprechen, dafs die Zeit, die ein Strahlenbündel gebraucht, welches eine Aenderung seiner Richtung z. B. durch Reflexion an einer Fläche erfährt, um einen bestimmten Endpunkt zu erreichen, ein Maximum oder Minimum sein müsse. Geschieht nun die Bewegung in demselben Medium, so entspricht gleicher Länge des Weges auch gleiche Zeit der Fortpflanzung; kommen verschiedene Medien in Betracht, so mufs die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Dieses ist von Wichtigkeit für die Prozesse, die an den festen Begrenzungsflächen des Raumes, in welchem sich das Licht ausbreitet, vor sich gehen. Wir kennen als solche Prozesse die Reflexion oder Spiegelung und die Brechung des Lichtes; bei letzterer wird ein Theil des Lichtes aber auch stets an der Grenzfläche reflectirt, und tritt nur zum Theil in das andere Medium ein, welches jenseits der Grenzfläche liegt. Solche Reflexionen oder Brechungen finden überall da statt, wo das Licht auf die Grenzfläche eines zweiten Mediums auftrifft, in dem seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere ist.

Nun lehrt uns die Beobachtung, dafs in einem solchen Falle, wo die verschiedenen Strahlen eines Bündels nicht unter wesentlich verschiedenen Einfallswinkeln auf die Grenzfläche auffallen, alle Strahlen dabei zwar zuweilen eine Phasenänderung erleiden, dafs diese aber für die einzelnen Strahlen stets die gleiche ist, so dafs also für die weitere Verfolgung des Weges aller dieser Strahlen dieselbe Constante zu der Weglänge hinzu zu rechnen ist.

§ 67. Das Spiegelungsgesetz.

Es müssen also die zurückgeworfenen Strahlen, falls sie zu einer gemeinsamen Wirkung in einem Punkte sich vereinigen sollen, in diesem mit gleicher Phase eintreffen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für die verschiedenen Strahlen die Weglänge von dem leuchtenden Punkte nach der Grenzfläche, vermehrt um die Weglänge von der Grenzfläche nach dem Vereinigungspunkt, dieselbe ist, wobei vorausgesetzt ist, dafs die Fortpflanzung der zurückgeworfenen Strahlen in demselben Medium geschieht, wie die der einfallenden Strahlen, was bei der Spiegelung des Lichtes der Regel nach der Fall ist. Wir wollen mit 0 den Ausgangspunkt des Lichtes, mit r_0

die Länge des Strahles bis zur Reflexionsfläche, und mit r_1 die Länge von hier bis zu dem Punkte 1 bezeichnen, für den die Wirkung untersucht werden soll. Wenn dann für eine Reihe von Strahlen, die auf die verschiedenen Punkte der Fläche auftreffen,

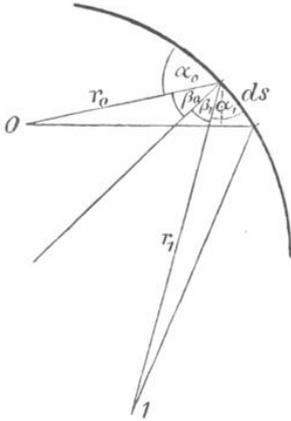


Fig. 29.

die Summe $r_0 + r_1$ entweder constant ist oder sich nur um Größen von einander unterscheidet, welche kleiner sind, als eine halbe Wellenlänge, so wird eine gegenseitige Verstärkung eintreten. Erst, wenn ihre Wegdifferenz eine halbe Wellenlänge überschreitet, wird ein Theil der Strahlen einen anderen Theil aufheben, indem ihre Bewegung dann in jedem Zeitmoment in entgegengesetzter Richtung stattfindet.

Es kommt also darauf an, daß für die verschiedenen Strahlen diese Summe $r_0 + r_1$ möglichst kleine Unterschiede habe, die aber auf jeden Fall

weniger als eine halbe Wellenlänge betragen müssen. Der Werth von $r_0 + r_1$ wird nun für zwei Punkte der Fläche, von denen jeder in der auf den anderen bezüglichen Einfallsebene, d. h. in der Ebene, welche den leuchtenden Punkt, den Sammelpunkt und den Einfallspunkt enthält, liegt, und die beide um die unendlich kleine Strecke ds von einander entfernt sind, verschiedene Größe haben. Bezeichnen wir den Werth von $r_0 + r_1$ für den einen der beiden Punkte mit C , so können wir den Werth für den anderen Punkt nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz als Function von ds entwickeln und bekommen dann:

$$r_0 + r_1 = C + \frac{d}{ds}(r_1 + r_0) \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{ds^2}(r_1 + r_0) \cdot ds^2 + \dots \quad (275)$$

Da wir nun die Entfernung ds als sehr klein angenommen haben, so brauchen wir nur diejenigen Glieder zu beachten, welche die niedrigsten Potenzen von ds enthalten.

Die erste Bedingung, daß die Unterschiede der verschiedenen Strahlen verschwinden, würde darin bestehen, daß der Differentialquotient

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds}(r_1 + r_0) &= 0 \\ \text{oder} \quad \frac{dr_1}{ds} + \frac{dr_0}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

sei. Dann wird ein Bündel von Strahlen, die dem ersten einfallenden Strahl unmittelbar benachbart sind, nach diesem Punkte abgelenkt werden können, ohne daß eine wirkliche Phasendifferenz zwischen ihnen auftritt.

Ziehen wir den Strahl nach dem an dem anderen Ende von ds liegenden Punkte, so wird (siehe Fig. 29) hier r_0 etwas länger, und den Unterschied können wir bei unendlich kleinen Werthen von ds finden, indem wir von dem ersten Einfallspunkte ein Loth auf den zweiten Strahl fällen; es ist dann der Unterschied der Länge gegeben durch die andere Kathete des dadurch entstandenen kleinen rechtwinkligen Dreiecks. Wir nennen nun α_0 den spitzen Winkel zwischen dem einfallenden Strahl r_0 und der Richtung von ds , oder, was dasselbe ist, zwischen r_0 und der Tangente, die in der Einfallsebene an die reflectirende Fläche gelegt ist. Es ist dann jener Zuwachs von r_0 gegeben durch die Gleichung

$$dr_0 = ds \cdot \cos \alpha_0 \quad (277)$$

und daraus folgt:

$$\frac{dr_0}{ds} = \cos \alpha_0 \quad (277a)$$

In ganz analoger Bezeichnung erhalten wir

$$\frac{dr_1}{ds} = -\cos \alpha_1 \quad (278)$$

Das negative Zeichen tritt hier ein, weil r_1 für spitze Winkel α_1 abnimmt. Indem wir die Werthe der Gleichungen (277a) und (278) in Gleichung (276) einsetzen, ergibt sich:

$$-\cos \alpha_1 + \cos \alpha_0 = 0$$

oder

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_0. \quad (279)$$

Denkt man sich auf der Fläche im Einfallspunkte eine Normale errichtet, das sogenannte Einfallslot, so werden die Winkel, welche r_1 resp. r_0 mit dieser Normale machen, die wir mit β_1 resp. β_0 bezeichnen wollen, die Complementwinkel zu α_1 und α_0 bilden, und wir können daher die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\sin \beta_1 = \sin \beta_0$$

oder

$$\beta_1 = \beta_0. \quad (279a)$$

Damit haben wir das bekannte Reflexionsgesetz abgeleitet, daß der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe macht, gleich ist dem Winkel, den der reflectirte Strahl mit dem Einfallslothe bil-

det, oder dafs der Einfallswinkel des Strahles gleich dem Reflexionswinkel ist.

Bei einer solchen Reflexion besteht der wirkliche Vorgang in der Zurückwerfung der Wellensysteme. Indem diese sich dann weiter ausbreiten, findet Uebereinstimmung der Phasen in derjenigen Richtung statt, die durch unsere Ableitung als die Reflexionsrichtung der Strahlen erwiesen wird, und in der thatsächlich auch allein Licht merkbar ist.

§ 68. Die Bildpunkte bei spiegelnden Flächen.

Die zweite Bedingung dafür, dafs in unserer Gleichung (275) der Werth von $r_1 + r_0$ ein Maximum oder Minimum ist, besteht darin, dafs das dritte Glied auf der rechten Seite verschwindet, also

$$\frac{d^2 r_1}{ds^2} + \frac{d^2 r_0}{ds^2} = 0 \quad (280)$$

ist. Setzen wir hierin die Werthe der Gleichungen (277 a) und (278) ein, so erhalten wir

$$-\frac{d}{ds}(\cos \alpha_1) + \frac{d}{ds}(\cos \alpha_0) = 0$$

oder

$$\frac{d}{ds}(\cos \alpha_1) = \frac{d}{ds}(\cos \alpha_0)$$

oder

$$\sin \alpha_1 \cdot \frac{d\alpha_1}{ds} = \sin \alpha_0 \cdot \frac{d\alpha_0}{ds}. \quad (281)$$

Wir wissen nun schon, dafs bei der Reflexion die Summe der ersten Differentialquotienten nur dann gleich Null ist, wenn $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_0$; diese Bedingung mufs aber erfüllt sein, wenn überhaupt die zweite Bedingung in Betracht kommen soll; denn es ist

nur dann von Belang, ob die Glieder mit dem Factor ds^2 gleich Null sind, wenn bereits die Glieder mit dem Factor ds gleich Null sind. Daher verwandelt sich unsere letzte Gleichung, indem wir noch den Factor ds auf beiden Seiten hinzufügen, in

$$\frac{d\alpha_1}{ds} \cdot ds = \frac{d\alpha_0}{ds} \cdot ds. \quad (281 a)$$

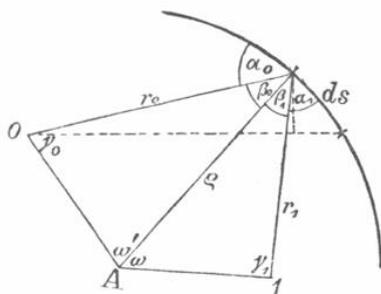


Fig. 30.

Wir tragen nunmehr die Länge des Krümmungsradius ρ der Fläche an dem Orte des Elementes ds auf dem im Einfallspunkte errichteten Lothe ab und verbinden (Fig. 30) den Endpunkt A mit den Punkten 0 und 1. Die Bezeichnung der Winkel α und β sei dieselbe, wie vorhin; die Bedeutung der übrigen Benennungen γ_0 , γ_1 , ω und ω' geht aus der Figur hervor. Dabei ist ersichtlich, daß

$$\omega + \omega' = c,$$

wo c einen constanten Winkel bezeichnet. Nun ist in dem einen Dreieck

$$\gamma_1 + \omega + \beta_1 = \pi \quad (282)$$

und in dem anderen Dreieck

$$\gamma_0 + \omega' + \beta_0 = \pi$$

oder

$$\gamma_0 + c - \omega + \beta_0 = \pi. \quad (283)$$

Berücksichtigen wir nun, daß

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$$

und

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (282) und (283)

$$\alpha_1 = \gamma_1 + \omega - \frac{\pi}{2}$$

und

$$\alpha_0 = \gamma_0 + c - \omega - \frac{\pi}{2}.$$

(284)

Wenn wir nun nach ds differentiiren und mit ds multipliciren, so erhalten wir:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} \cdot ds = \frac{d\gamma_1}{ds} \cdot ds + \frac{d\omega}{ds} \cdot ds$$

und

$$\frac{d\alpha_0}{ds} \cdot ds = \frac{d\gamma_0}{ds} \cdot ds - \frac{d\omega}{ds} \cdot ds.$$

(284a)

Wir haben nun oben aber in Gleichung (281a) die Bedingung dafür, daß in dem Werthe von $r_1 + r_0$ auch die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung verschwinden, darin gefunden, daß die linken Seiten dieser beiden Gleichungen (284a) einander gleich sind. Wir können diese Bedingung also nunmehr schreiben:

$$\frac{d\gamma_1}{ds} \cdot ds + \frac{d\omega}{ds} \cdot ds = \frac{d\gamma_0}{ds} \cdot ds - \frac{d\omega}{ds} \cdot ds \quad (285)$$

oder, da wir die einzelnen Glieder der Gleichung als vollständige Differentiale auffassen können:

$$d\gamma_1 + d\omega = d\gamma_0 - d\omega$$

oder

$$d\gamma_0 - d\gamma_1 = 2 \cdot d\omega. \quad (285a)$$

Es ist nun $r_1 \cdot d\gamma_1$ die Länge des Lothes, welches wir von dem ersten Endpunkt der Strecke ds auf den nach dem zweiten Endpunkt gezogenen Strahl r_1 fallen, und aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck ergibt sich:

$$r_1 \cdot d\gamma_1 = -ds \cdot \sin \alpha_1, \quad (286)$$

da $d\gamma_1$ negativ ist und wir ds und die Winkel α_1 und α_0 stets positiv nehmen wollen. Statt ds können wir nun aber $\rho \cdot d\omega$ setzen, so dafs wir also erhalten

$$r_1 \cdot d\gamma_1 = -\rho \cdot d\omega \cdot \sin \alpha_1$$

oder

$$d\gamma_1 = -\frac{\rho \cdot \sin \alpha_1}{r_1} \cdot d\omega \quad (286a)$$

und analog ergibt sich

$$d\gamma_0 = \frac{\rho \cdot \sin \alpha_0}{r_0} \cdot d\omega. \quad (287)$$

Indem wir diese Werthe für $d\gamma_1$ und $d\gamma_0$ in die Gleichung (285a) einführen und ferner für die nach dem Reflexionsgesetz gleichen Winkel α_0 und α_1 die gemeinsame Bezeichnung α einführen, folgt

$$\left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{\rho}{r_1}\right) \cdot \sin \alpha \cdot d\omega = 2 d\omega$$

oder

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\rho \cdot \sin \alpha}. \quad (288)$$

Wenn wir nun an Stelle des Winkels α den Einfallswinkel, d. h. den Winkel zwischen Strahl und Einfallslloth benutzen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\rho \cdot \cos \beta}. \quad (288a)$$

Das ist die gewöhnliche Formel für die Reflexion an sphärischen Spiegeln, wobei r_0 die Entfernung des leuchtenden Punktes von dem Spiegel, r_1 die seines Bildes, und ρ den Radius des Spiegels bezeichnet. Wir haben sie hier allerdings nur für ein unendlich

kleines spiegelndes Flächenelement abgeleitet und für die Strahlen, die in der Einfallsebene liegen.

Da wir bei unserer Ableitung die Entfernungen auf derjenigen Seite des Spiegels, von welcher das Licht einfällt, d. h. auf der der leuchtende Punkt 0 liegt, als positiv gerechnet haben, so ist bei einem convexen Spiegel, wo ϱ auf der anderen Seite liegt, dieser Werth als negative Gröfse in die Formel einzuführen.

Gewöhnlich wird die Formel für nahehin senkrechte Incidenz entwickelt; dann steht auch der reflectirte Strahl beinahe senkrecht auf der Spiegelfläche, so dafs β nahe gleich Null ist, und man als Annäherung $\cos \beta = 1$ setzen kann. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\varrho}. \quad (289)$$

Es ist dieses die meistentheils zur Berechnung der Bilder bei sphärischen Spiegeln benutzte Formel.

Unsere Formeln (288) und (288a) sind allgemeiner, da sie auch auf schräge Incidenz Bezug nehmen. Aus ihnen geht zunächst hervor, dafs für $r_0 = \infty$, d. h. wenn die Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte kommen, $r_1 = \frac{\varrho \cdot \cos \beta}{2}$

oder bei senkrechter Incidenz $r_1 = \frac{\varrho}{2}$ wird. Man nennt diese

Entfernung vom Spiegel, in welcher die Strahlen eines unendlich entfernten Gegenstandes sich vereinigen, die Brennweite des Spiegels. Sie ist also für senkrecht einfallende Strahlen gleich dem halben Krümmungsradius. Bezeichnen wir sie mit F , so ist also

$$F = \frac{\varrho}{2}. \quad (290)$$

Wendet der Spiegel den auffallenden Strahlen die convexe Seite zu, so ist, wie wir sahen, ϱ negativ zu rechnen; es hat dann also auch F einen negativen Werth, d. h. der Brennpunkt liegt hinter dem Spiegel. Bei einem Concavspiegel liegt der Brennpunkt hingegen auf der Seite der einfallenden Strahlen. Hat bei einem solchen r_0 einen endlichen positiven Werth, der gröfser ist als die Brennweite, so mufs auch r_1 gröfser sein als die Brennweite und das Bild mufs von dem Spiegel abrücken, je näher der Gegenstand kommt. Befindet sich der Gegenstand in der doppelten Brennweite, ist also $r_0 = \varrho$, so wird für senkrechte Incidenz auch $r_1 = \varrho$. Nähert sich der Gegenstand so weit, dafs er in den Brennpunkt

rückt, wird also $r_0 = \frac{\rho}{2}$, so wird für senkrechte Incidenz r_1 unendlich. Man kann dann sagen, daß von dem Hohlspiegel in unendlicher Entfernung ein Bild erzeugt wird. Da dabei die Strahlen parallel werden, so kann man sich auch die parallelen Strahlen hinter dem Spiegel fortgesetzt denken, und daher ist ebenso gut die Auffassung möglich, daß das Bild in unendlicher Entfernung hinter dem Spiegel liegt. Bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel würde r_0 noch kleiner werden, und es muß dann $\frac{1}{r_1}$, also auch r_1 einen negativen Werth erhalten, was dann aussagt, daß das Bild hinter den Spiegel fällt.

Zur näheren Erläuterung über das Zustandekommen der Bildpunkte wollen wir noch folgende Betrachtung anstellen. Wenn wir uns um den Ausgangspunkt 0 und den Sammelpunkt 1 als Brennpunkte Ellipsen construirt denken, so ist für die an derselben Ellipse reflectirten Strahlen $r_0 + r_1 = \text{const.}$, und daher werden in der That alle Strahlen, welche von dem einen Brennpunkte ausgegangen sind, in dem anderen Brennpunkte wieder vereinigt. Nun folgt aus den bekannten geometrischen Gesetzen der Ellipse, daß diese beiden Winkel, welche die Strahlen r_0 und r_1 mit der Curve bilden, gleich sind. Wenn nun die Tangente einer anderen Curve an einer beliebigen Stelle mit der Tangente an die Ellipse zusammenfällt, so würde die Weglänge des an dieser Stelle gespiegelten Strahles immerhin ein Maximum erreichen, und dasselbe würde auch bei einer Spiegelung an der Tangente selbst der Fall sein, aber es würde doch nicht am Orte des zweiten Brennpunktes der Ellipse eine Sammlung der Strahlen stattfinden. Dieses tritt erst dann ein, wenn für eine Fläche, die einen Brennpunkt in den Punkt 1 werfen soll, nicht bloß die Tangente, sondern auch die Krümmung sich derjenigen der Ellipse genau anschließt. Dann erst wird ein ganzes Strahlenbündel, welches hier auf die spiegelnde Fläche auffällt, in demselben Brennpunkte vereinigt werden.

§ 69. Spiegelung an einer beliebig gekrümmten Fläche. —
Astigmatische Strahlenbündel.

Wir haben in unserer bisherigen Betrachtung vorausgesetzt, daß das an dem anderen Ende von ds auf der spiegelnden Fläche errichtete Loth in der durch die Reflexion an dem Orte des ersten Endes von ds gegebenen Einfallsebene liegt. Das braucht aber bei

beliebig gekrümmten Flächen nicht der Fall zu sein; sondern es kann die Normale des zweiten Punktes aus der Einfallsebene des im ersten Punkte reflectirten Strahles herausfallen, und dann würde der zweite Strahl überhaupt nicht mit dem ersten Strahl zusammen treffen. Wir würden aber durch das Verfahren, was wir bisher eingeschlagen haben, immer noch diejenigen Bedingungen bestimmen können, unter welchen die optische Länge der Strahlen am wenigsten variirt. Das ist die eigentliche Bedeutung der gemachten Auseinandersetzung.

Wir haben uns auf diese Annahme zunächst beschränkt, weil es der praktisch wichtigste Fall ist. Wir müssen uns aber stets daran erinnern, daß möglicherweise der Strahl thatsächlich einen anderen Verlauf nimmt, und daß der zweite Strahl den ersten überhaupt nicht schneidet.

Wenn wir irgend welche reflectirende Fläche haben und einen leuchtenden Punkt, von dem eine Reihe von Strahlen mit der Länge r_0 auf die Fläche fallen und je nach der Art des Auffallens in verschiedener Richtung reflectirt werden, so würden wir auf den reflectirten Strahlen, deren Richtung durch das erwähnte Spiegelungsgesetz gegeben ist, Strecken r_1 abschneiden können, welche zusammen mit den Strecken r_0 stets dieselbe Summe geben. Dadurch gewinnen wir eine Fläche, für deren einzelne Punkte die optische Länge der gespiegelten Strahlen von dem leuchtenden Punkte aus gemessen gleiche Länge hat. Wenn wir nun eine constante kurze Strecke weiter gehen, so würden wir durch die neuen Endpunkte wiederum eine Fläche legen können, für deren Punkte die optische Länge eine etwas andere wäre, als die der ersten Fläche. Wir würden auf diese Weise eine Reihe von Flächen construiren können, welche unter der allgemeinen Gleichung

$$r_1 + r_0 = \text{const.}$$

gegeben wären. Ferner ist leicht ersichtlich, daß die Strahlen, an denen wir bei dieser Messung entlang gehen, auf diesen Flächen senkrecht stehen müssen. Wenn man dieses beachtet, zeigt sich sofort, daß die Strahlenbündel, welche durch Reflexion von einer continuirlich gekrümmten Fläche entstehen, mit dem System von Normalen zusammenfallen müssen, die man auf einer der Flächen $r_1 + r_0 = \text{const.}$ errichtet. Nimmt man aber eine beliebige krumme Fläche und construirt für die einzelnen Punkte derselben die Normalen, so giebt es für jeden Punkt der Fläche zwei Ebenen, die durch das Verhalten der Normalen benachbarter Elemente charak-

terisirt sind, und welche man als die Hauptkrümmungsebenen bezeichnet. Die benachbarten Normalen, welche in einer der Hauptkrümmungsebenen liegen, schneiden nämlich die Normale, welche durch den ursprünglichen Punkt gelegt ist, alle in einem Punkte. Auf diese Weise erhalten wir für jeden Punkt einer beliebig gekrümmten Fläche zwei Hauptkrümmungshalbmesser, deren Längen den Abständen vom Fußpunkt der Normale bis zu den Schnittpunkten entsprechen.

Die Strahlen, welche von einem continuirlich gekrümmten Flächenstück reflectirt werden, schneiden sich also nicht alle in einem Punkt, sondern es wird dieses nur bei den Strahlen der Fall sein, welche mit dem Mittelstrahl in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen liegen. Daraus ergibt sich also, daß die allgemeine Form der Strahlenbündel, welche durch Reflexion entstehen können, nicht von der Art ist, daß sich alle Strahlen in einem Punkte schneiden; es wird dieses vielmehr nur als besonderer Fall eintreten.

Legen wir durch den Scheitel eines Ellipsoids in verschiedener Richtung Schnitte hindurch, so werden diese verschiedene Krümmung haben. Wenn nun auf den in der Ebene der Zeichnung (Fig. 31) dargestellten Schnitt der gekrümmten Fläche ein paralleles

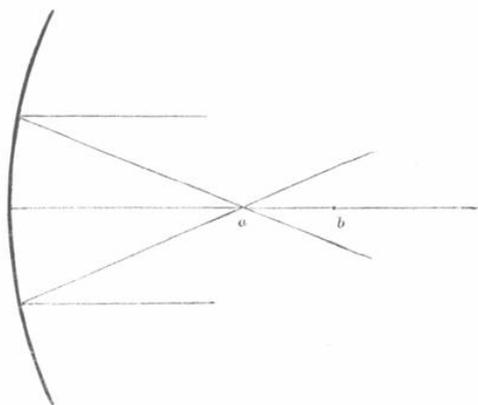


Fig. 31.

Strahlenbündel auffällt, so werden die Strahlen so reflectirt, daß sie in dem Punkte a in einer gewissen Entfernung von dem Scheitel, die dem halben Krümmungshalbmesser dieser Schnittebene entspricht, vereinigt werden, während ein Schnitt in einer anderen Ebene einen anderen Krümmungshalbmesser und also auch eine

andere Vereinigungsweite in dem Punkte b für die Strahlen haben kann. Es werden dann in der Zeichnungsebene die vertical von einander abweichenden Strahlen von oben nach unten vereinigt sein, so daß der Strahlenkegel, der von einem kleinen Flächenstück ausgeht, von oben nach unten zusammengedrängt wird und sich in einer auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehenden Linie vereinigt. Die Strahlen, welche in einer zur Zeichnungsebene senkrechten Ebene liegen, würden dann nach unserer Annahme in größerer Entfernung zu einer in der Zeichnungsebene liegenden Linie vereinigt werden. Man bezeichnet so beschaffene Strahlenbündel als astigmatische Strahlenbündel. Stigma wird dabei als Bezeichnung des Brennpunktes gebraucht, und astigmatisch ist also ein Strahlenbündel, welches keinen eigentlichen Brennpunkt hat, sondern dessen Vereinigung in einer verwickelteren Weise geschieht.

Wenn der spiegelnde Theil der Fläche kreisförmig begrenzt ist, dann wird der Querschnitt des zurückgeworfenen Strahlenbündels sich in der Richtung von oben nach unten schneller verkleinern, als in der senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Richtung, und dadurch wird er zunächst einer quer gestellten Ellipse ähnlich; diese zieht sich an der Stelle, wo der Brennpunkt für das in der Zeichnungsebene liegende Strahlenbüschel sich befindet, in eine horizontale Linie zusammen, die sich dann nach der anderen Richtung, d. h. von oben nach unten, wieder erst zu einer horizontal verlängerten Ellipse erweitert, dann durch einen Kreis und eine vertical verlängerte Ellipse in eine vertical stehende Linie übergeht, hinter der sich das Strahlenbündel wieder seitlich ausbreitet und durch vertical gestellte Ellipsen in unendlich großer Entfernung wieder in Kreisform übergeht. Es besteht dabei allerdings ein Raum, in dem alle Strahlen sich gegenseitig sehr nahe kommen; aber sie sind doch niemals in einem Punkte vereinigt.

§ 70. Die Spiegelung an Rotationsflächen, wenn die Strahlen von einem Punkte der Axe ausgehen.

Der gewöhnliche Fall, der bisher auch fast allein zur analytischen Untersuchung gekommen ist, ist der, daß die spiegelnden Flächen drehrunde Gestalt haben, d. h. entstanden gedacht werden können dadurch, daß eine in einer Ebene liegende Curve um eine in derselben Ebene liegende Gerade als Axe gedreht wird. Eine solche Fläche hat an jeder Stelle natürlich ebenfalls zwei Krümmungsradien; aber der eine Krümmungsradius fällt zusammen mit

dem Krümmungsradius der erzeugenden Curve, während der andere Krümmungsmittelpunkt und damit auch der andere Krümmungshalbmesser immer durch den Schnittpunkt der Normale mit der Axe gegeben ist. Denn wenn wir eine Kugel construiren, welche diesen Schnittpunkt zum Mittelpunkt hat und hier die Fläche in dem betreffenden Punkte berührt, so wird diese Berührung in einem Kreise stattfinden, und jedes Element dieses Berührungskreises fällt mit einer der Hauptkrümmungsebenen der Fläche zusammen, weil längs des Berührungskreises sich alle Normalen in demselben Punkte schneiden; der Krümmungsradius ist aber die Länge der Normale bis zum Schnittpunkt mit der Axe, d. h. der Radius der berührenden Kugel.

Wenn wir nun den leuchtenden Punkt in die Verlängerung der Axe legen, so werden für alle Strahlen, welche in demselben Meridianschnitt auffallen, die Einfallsnormalen alle in dieser Meridianebene liegen, und daher werden auch die Strahlen nach der Reflexion in derselben Ebene verbleiben. Für jede dieser Ebenen gilt dann die einfache Betrachtung, die wir in § 68 angestellt haben; denn für diese Strahlen haben wir die Entfernung $r_0 + r_1$ nur in der einen Ebene zu messen.

Alle Strahlen aber, welche auf denselben Parallelkreis auffallen, werden sich in der Axe schneiden, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht. In Fig. 32 möge AB einen Meridianschnitt durch eine

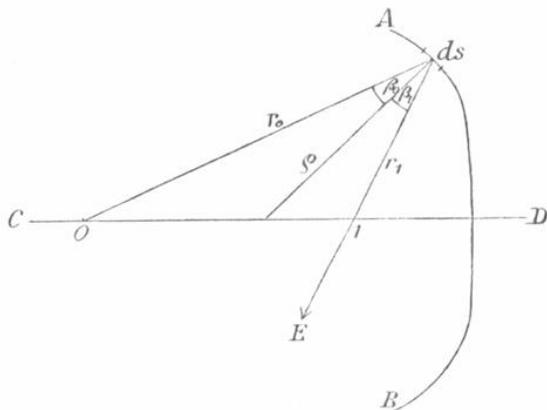


Fig. 32.

Rotationsfläche darstellen, die durch Drehung um die Axe CD entstanden ist. Es sei O der auf der Axe liegende leuchtende Punkt. Der auf das Element ds auffallende Strahl verbleibt in der Ebene

der Zeichnung und werde in der Richtung nach E hin reflectirt, so dafs er in dem Punkte 1 die Axe schneidet. Denken wir uns nun diese ganze Figur um die Axe gedreht, so bleiben die Spiegelungsbedingungen durchaus unverändert, und in sämtlichen Lagen, welche durch die Drehung um die Axe eintreten, wird der in der betreffenden Meridianebene liegende Strahl so reflectirt werden, dafs er durch den Punkt 1 der Axe hindurch geht. Bei den Rotationsflächen bildet sich also unter allen Umständen ein solcher Brennpunkt in der Axe, während andererseits auf der Richtung dieser Normale nun noch eine Vereinigung in einem anderen Brennpunkt, dessen Lage von der Krümmung dieses Meridianschnittes abhängt, stattfinden kann.

Die besonders grofse Rolle, welche die Kugelfläche in der Optik spielt, beruht wesentlich darauf, dafs eine Kugel für jeden ihrer Durchmesser als ein Rotationskörper betrachtet werden kann, und demnach ein beliebig gelegener leuchtender Punkt immer in der Verlängerung einer ihrer Axen, nämlich eines ihrer Durchmesser liegt. Dadurch hat man es bei der Spiegelung an einer Kugel stets mit dem relativ einfacheren Falle zu thun, dafs der leuchtende Punkt in einer der Hauptkrümmungsebenen des Flächenelementes liegt, auf welches der Strahl fällt.

Zweiter Abschnitt.

Die Brechung.

§ 71. Das Brechungsgesetz.

In ähnlicher Weise, wie wir die Gesetze der Spiegelung abgeleitet haben, ergeben sich auch die Gesetze für die Brechung; nur müssen wir dabei berücksichtigen, dafs wir es bei dieser mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien zu thun haben.

Da es nun für die Uebereinstimmung der Phasen darauf ankommt, dafs die Zeit vom Ausgangspunkte bis zum Endpunkte für die verschiedenen Strahlen des Bündels dieselbe bleibt, müssen wir in unseren Gleichungen die Weglänge ersetzen durch den Quotienten aus der Weglänge und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Diesen

Quotienten bezeichnet man gewöhnlich als die optische Weglänge des Strahles. Wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden an einander angrenzenden Medien mit c_0 und c_1 bezeichnen, so haben wir in unserer Gleichung (275) $\frac{r_0}{c_0}$ bez. $\frac{r_1}{c_1}$ für r_0 bez. r_1 zu setzen; sie verwandelt sich dadurch in

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = C + \frac{d}{ds} \left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0} \right) \cdot ds + \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0} \right) \cdot ds^2 + \dots \quad (291)$$

und ist nun in derselben Weise, wie früher, zu behandeln. Die zuerst zu erfüllende Bedingung ist dann wieder, dafs

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0} \right) = 0 \quad (292)$$

oder, da die Geschwindigkeiten constant sind

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{dr_1}{ds} = - \frac{1}{c_0} \cdot \frac{dr_0}{ds} \quad (292a)$$

Diese Differentialquotienten können nun wieder durch die Cosinus der Winkel zwischen Strahl und brechender Fläche, oder durch die Sinus der Winkel zwischen dem Strahl und der Normale ausgedrückt werden. Nennen wir (Fig. 33) β_0 den Winkel zwischen Einfallslot und dem einfallenden Strahl, und β_1 den Winkel zwischen

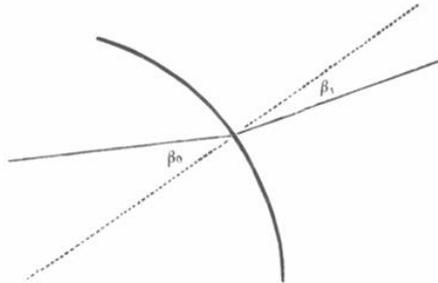


Fig. 33.

der Verlängerung des Einfallslotes und dem gebrochenen Strahl, dann ergibt sich aus Gleichung (292a), da wir die Winkel stets positiv rechnen wollen

$$\frac{1}{c_1} \cdot \sin \beta_1 = \frac{1}{c_0} \cdot \sin \beta_0 \quad (292b)$$

Das ist das Brechungsgesetz in der Form, wie es von SNELLIUS aufgefunden wurde. Es folgt also unmittelbar aus dem Princip, dafs

die Fortpflanzungszeit des Strahles von einem gegebenen Anfangspunkt zu einem gegebenen Endpunkt ein Maximum oder Minimum sein muß. Es ist dieses in der That eine schon sehr lange bekannte Form, die bereits in der Mitte des 17. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker FERMAT gefunden und damals mit großer Aufmerksamkeit und vielem Nachdruck discutirt wurde. In der jetzt gebräuchlichen Form des Brechungsgesetzes benutzt man nun nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, sondern Größen, welche sich wie die reciproken Werthe derselben verhalten, und die man als Brechungsverhältniß bezeichnet, wobei man dem leeren Raum das Brechungsverhältniß 1 zuschreibt. Dann würden wir also setzen können:

$$n_0 \cdot \sin \beta_0 = n_1 \cdot \sin \beta_1, \quad (292c)$$

wobei n_0 und n_1 die Brechungsverhältnisse in den beiden Medien bezeichnen. Wenn nun ein Strahl aus dem leeren Raume in ein anderes optisches Medium übergeht, so ist $n_0 = 1$, und aus der Messung der Winkel β_0 und β_1 ergibt sich dann das Brechungsverhältniß des betreffenden Mediums.

§ 72. Die Lage der Bildpunkte.

Bei der Untersuchung, wann das Glied mit dem Factor ds^2 in unserer Gleichung (291) verschwindet, wollen wir uns auf die Annahme brechender Kugelflächen beschränken. Wir haben also dann nur die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen für die in der Ebene eines Meridianschnittes stattfindende Brechung

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{r_0}{e_0} + \frac{r_1}{e_1} \right) = 0 \quad (293)$$

ist. Berücksichtigen wir nun, daß e_0 und e_1 Constanten sind, so können wir diese Bedingung schreiben:

$$\frac{1}{e_0} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{dr_0}{ds} \right) + \frac{1}{e_1} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{dr_1}{ds} \right) = 0. \quad (293a)$$

Nun ist aber, ebenso wie bei der Spiegelung in § 67,

$$\frac{dr_0}{ds} = -\sin \beta_0$$

und

$$\frac{dr_1}{ds} = \sin \beta_1.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergibt sich:

$$-\frac{1}{c_0} \cdot \frac{d}{ds}(\sin \beta_0) + \frac{1}{c_1} \cdot \frac{d}{ds}(\sin \beta_1) = 0 \quad (293b)$$

oder, wenn wir die Differentiation ausführen und mit ds multipliciren:

$$-\frac{1}{c_0} \cdot \cos \beta_0 \cdot \frac{d\beta_0}{ds} \cdot ds + \frac{1}{c_1} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{d\beta_1}{ds} \cdot ds = 0 \quad (293c)$$

Wir müssen nun sehen, wie wir in dieser Gleichung die Differentialquotienten ersetzen können.

In Figur 34 sei AB die brechende Fläche, O sei der leuchtende Punkt, 1 der Sammlungspunkt der Strahlen. Der Krümmungs-

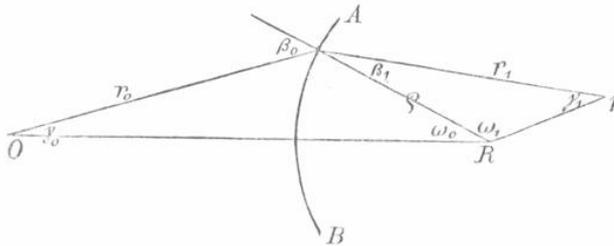


Fig. 34.

mittelpunkt des reflectirenden Elementes liege in R , der Krümmungshalbmesser sei ρ . Die übrigen Bezeichnungen, welche sich den früher benutzten anschließen, gehen unmittelbar aus der Figur hervor. Wir haben dann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad & \beta_0 = \gamma_0 + \omega_0 \\ & \beta_1 = \pi - \gamma_1 - \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

und bei einer Verschiebung des Einfallspunktes um ds ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad & \frac{d\beta_0}{ds} \cdot ds = \frac{d\gamma_0}{ds} \cdot ds + \frac{d\omega_0}{ds} \cdot ds \\ & \frac{d\beta_1}{ds} \cdot ds = -\frac{d\gamma_1}{ds} \cdot ds - \frac{d\omega_1}{ds} \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (294a)$$

Da nun aber ω_0 sich um ebenso viel verkleinert, als ω_1 sich vergrößert, so ist ferner

$$\frac{d\omega_1}{ds} \cdot ds = -\frac{d\omega_0}{ds} \cdot ds \quad (295)$$

Durch Benutzung dieser Werthe erhält nun Gleichung (293 c) die Form:

$$-\frac{\cos \beta_0}{e_0} \cdot \left(\frac{d\gamma_0}{ds} + \frac{d\omega_0}{ds} \right) \cdot ds + \frac{\cos \beta_1}{e_1} \cdot \left(-\frac{d\gamma_1}{ds} + \frac{d\omega_0}{ds} \right) \cdot ds = 0 \quad (293d)$$

oder, wenn wir die Differentiale einführen

$$-\frac{\cos \beta_0}{e_0} \cdot (d\gamma_0 + d\omega_0) + \frac{\cos \beta_1}{e_1} \cdot (-d\gamma_1 + d\omega_0) = 0 \quad (293e)$$

Ebenso wie bei der Spiegelung (§ 68) ist nun auch hier $r_0 \cdot d\gamma_0$ die Länge des Lothes, welches von dem ersten Endpunkte der Strecke ds auf die zweite Lage des Strahles r_0 gefällt wird. Diese ist aber

$$\left. \begin{array}{l} r_0 \cdot d\gamma_0 = \cos \beta_0 \cdot ds \\ r_1 \cdot d\gamma_1 = \cos \beta_1 \cdot ds \end{array} \right\} \quad (296)$$

Da nun

$$ds = \rho \cdot d\omega_0$$

ist, so ergibt sich daraus

$$\left. \begin{array}{l} d\gamma_0 = \rho \cdot \frac{\cos \beta_0}{r_0} \cdot d\omega_0 \\ d\gamma_1 = \rho \cdot \frac{\cos \beta_1}{r_1} \cdot d\omega_0 \end{array} \right\} \quad (296a)$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (293 e) ein, so erhalten wir, indem wir den in allen Gliedern auftretenden Factor $d\omega_0$ weglassen

$$-\rho \cdot \frac{\cos^2 \beta_0}{e_0 \cdot r_0} - \frac{\cos \beta_0}{e_0} - \rho \cdot \frac{\cos^2 \beta_1}{e_1 \cdot r_1} + \frac{\cos \beta_1}{e_1} = 0$$

oder

$$\frac{\cos \beta_1}{e_1} - \frac{\cos \beta_0}{e_0} = \frac{\rho}{r_1} \cdot \frac{\cos^2 \beta_1}{e_1} + \frac{\rho}{r_0} \cdot \frac{\cos^2 \beta_0}{e_0} \quad (293f)$$

Führen wir wieder die Brechungsverhältnisse der beiden Medien n_0 und n_1 statt der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten e_0 und e_1 in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{n_1 \cdot \cos \beta_1 - n_0 \cdot \cos \beta_0}{\rho} = \frac{n_1 \cdot \cos^2 \beta_1}{r_1} + \frac{n_0 \cdot \cos^2 \beta_0}{r_0} \quad (293g)$$

Das ist die ganz allgemeine Form der Gleichung für die Lage des Bildpunktes 1; sie gilt für beliebig schräge Incidenz der Strahlen.

Es ist zu beachten, daß wir bei ihrer Ableitung ϱ positiv gerechnet haben, wenn die brechende Fläche ihre convexe Seite dem Medium, auf das wir den Index 0 beziehen, zukehrt; ist das Umgekehrte der Fall, so ist ϱ negativ zu nehmen.

Falls sämtliche Einfallswinkel und Brechungswinkel an der krummen Fläche sehr klein sind, so sind die Werthe für $\cos \beta_0$, $\cos \beta_1$, und deren Quadrate sehr nahe gleich 1. Wir wollen von jetzt an diese Cosinuswerthe alle gleich 1 setzen, d. h. annehmen, daß der Einfall der Strahlen auf einen relativ kleinen, der Axe unmittelbar benachbarten Theil der brechenden Fläche beschränkt ist; dann bekommen wir die Gleichung:

$$\frac{n_1 - n_0}{\varrho} = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1} \quad (297)$$

Damit haben wir das bekannte Gesetz der Strahlenconcentration abgeleitet, welches für eine einzelne brechende Kugelfläche gilt, hinter der ein Medium mit dem Brechungsverhältniß n_1 und vor der ein Medium mit dem Brechungsverhältniß n_0 sich befindet.

§ 73. Die beiden Brennweiten einer brechenden Fläche.

Wenn der leuchtende Punkt 0 in unendlicher Entfernung vor der brechenden Fläche liegt, so ist $r_0 = \infty$ zu setzen, und es wird $r_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$. Setzen wir andererseits $r_1 = \infty$, nehmen also an, daß nach der Brechung die Strahlen der Axe parallel werden, dann wird $r_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$. Nun pflegen wir den Werth von r_1 , welcher eintritt, wenn die einfallenden Strahlen aus unendlich grosser Entfernung kommen, die Brennweite für die betreffende brechende Fläche zu nennen, und zwar die zweite oder hintere Brennweite. Wir wollen sie mit F_1 bezeichnen; den Index 1 wählen wir deshalb, weil sie eine Entfernung in dem zweiten Medium repräsentirt, und wir auf dieses bisher den Index 1 angewendet haben. Den Werth von r_0 , welcher als Entfernung des leuchtenden Punktes vor der Fläche gewählt werden muss, damit nach der Brechung die Strahlen parallel der Axe fortgehen, bezeichnet man als die erste oder vordere Brennweite, und den betreffenden Ort des Punktes 0 als den ersten oder vorderen Brennpunkt. Natürlich werden die Strahlen, wenn sie in umgekehrter Richtung parallel der Axe aus dem Unendlichen kommen, sich in diesem vorderen Brennpunkte

vereinigen. Die vordere Brennweite sei mit F_0 bezeichnet. Die Werthe von F_1 und F_0 , welche also durch die Gleichungen

und
$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0} \\ F_0 &= \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0} \end{aligned} \right\} \quad (298)$$

gegeben werden, unterscheiden sich nur durch die Brechungsverhältnisse der beiden Medien vor und hinter der brechenden Fläche, und zwar stehen die Brennweiten direct im Verhältniß der Brechungsverhältnisse dieser beiden Medien, so daß also

$$F_0 : F_1 = n_0 : n_1 \quad (299)$$

Wenn wir diese Bezeichnung F_0 und F_1 für die Brennweiten in die Gleichung (297) einführen, so können wir diese schreiben

$$1 = \frac{F_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1} \quad (300)$$

oder, indem wir mit $r_1 \cdot r_0$ auf beiden Seiten multipliciren

$$r_0 \cdot r_1 = F_0 \cdot r_1 + F_1 \cdot r_0 \quad (300a)$$

Zur Berechnung der Lage des Bildpunktes ist bald die eine, bald die andere der beiden letzten Gleichungen mehr geeignet. Aus beiden ergeben sich die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{F_0 \cdot r_1}{r_1 - F_1} \\ r_1 &= \frac{F_1 \cdot r_0}{r_0 - F_0} \end{aligned} \right\} \quad (300b)$$

welche oftmals benutzt werden. Aus den Werthen von F_0 und F_1 ergibt sich ferner, daß

$$F_1 - F_0 = \varrho \quad (301)$$

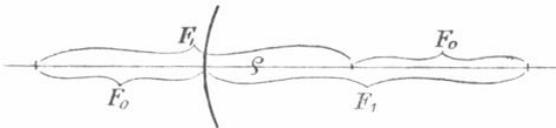


Fig. 35.

Der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels ist also (Fig. 35) von dem vorderen Brennpunkt um die hintere Brennweite und von dem hinteren Brennpunkt um die vordere Brennweite entfernt.

Die Beziehung zwischen den Werthen von r_0 und r_1 , also der Entfernungen der beiden Punkte 0 und 1 vom Scheitelpunkte der brechenden Fläche können wir noch anders formuliren, indem wir aus Gleichung (301) die Werthe

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} F_0 &= F_1 - \varrho \\ F_1 &= F_0 + \varrho \end{aligned} \right\} \quad (301a)$$

in die Gleichung (300a) einführen; dann ergibt sich

$$r_0 \cdot r_1 = (F_1 - \varrho) \cdot r_1 + (F_0 + \varrho) \cdot r_0 \quad (300c)$$

Setzen wir nun auf der rechten Seite der identischen Gleichung

$$(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho) = r_0 \cdot r_1 + r_1 \cdot \varrho - r_0 \cdot \varrho - \varrho^2$$

für das erste Glied den Werth der Gleichung (300c) und für das letzte Glied nach Gleichung (301)

$$\varrho^2 = \varrho \cdot (F_1 - F_0)$$

ein, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} (r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho) \\ &= (F_1 - \varrho) \cdot r_1 + (F_0 + \varrho) \cdot r_0 + r_1 \cdot \varrho - r_0 \cdot \varrho - \varrho \cdot (F_1 - F_0) \\ &= F_1 \cdot (r_1 - \varrho) + F_0 \cdot (r_0 + \varrho) \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

und wenn wir durch das Product $(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)$ dividiren

$$1 = \frac{F_1}{r_0 + \varrho} + \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \quad (302a)$$

Setzen wir hierin für F_1 und F_0 aus den Gleichungen (301a) die Werthe ein, so ergibt sich

$$1 = \frac{F_0 + \varrho}{r_0 + \varrho} + \frac{F_1 - \varrho}{r_1 - \varrho} \quad (302b)$$

Diese Gleichung ist unserer früheren Gleichung (300) völlig analog. Es sind die Entfernungen der Punkte 0 und 1 hier nicht von dem Scheitel der Fläche, sondern von dem Krümmungsmittelpunkt aus gemessen, und zugleich ist an Stelle der Brennweiten, die von dem Flächenscheitel an gerechnet wurden, hier der Abstand der Brennpunkte von dem Krümmungsmittelpunkt getreten. Es ergibt sich daraus, daß dieselbe Formel, welche wir oben für die Bildentfernungen in Bezug auf den Scheitelpunkt der Fläche ableiteten, auch in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel aufgestellt werden kann.

Wir können nun noch eine andere sehr einfache Form unserer Gleichungen ableiten, indem wir die Lage des Punktes 0 auf den

vorderen, und die des Punktes 1 auf den hinteren Brennpunkt der brechenden Fläche beziehen, dabei aber die als positiv gerechneten Richtungen auf beiden Seiten unverändert lassen. Bezeichnen wir diese beiden neuen Abstände mit x_0 und x_1 , so ist:

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 - F_0 \\ x_1 &= r_1 - F_1 \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

Multiplizieren wir beide Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$x_0 \cdot x_1 = r_0 \cdot r_1 - F_1 \cdot r_0 - F_0 \cdot r_1 + F_0 \cdot F_1 \quad (303a)$$

Nun ist aber nach Gleichung (300a)

$$r_0 \cdot r_1 - F_1 \cdot r_0 - F_0 \cdot r_1 = 0$$

und daher folgt:

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1 \quad (303b)$$

Dadurch hat man eine Gleichung gewonnen, welche aussagt, daß das Product zusammengehöriger Vereinigungsweiten, die aber von den Brennpunkten aus gerechnet sind, einer Größe gleich ist, die in einem gegebenen System immer constant ist, nämlich gleich dem Product der beiden Brennweiten. Es ergibt sich also daraus unmittelbar

$$x_1 = \frac{F_0 \cdot F_1}{x_0} \quad (303c)$$

Es ist $x_1 = \infty$, wenn $x_0 = 0$, d. h. wenn der leuchtende Punkt im Brennpunkt liegt; es ist x_1 positiv, d. h. das Bild fällt hinter den hinteren Brennpunkt, wenn x_0 positiv ist, d. h. wenn der Gegenstand von der brechenden Fläche weiter als der Brennpunkt entfernt ist, und x_1 wird endlich gleich Null, wenn $x_0 = \infty$ wird. Andererseits geht daraus hervor, da dieses Product bei der brechenden Fläche immer positiv ist, daß, wenn $x_0 < 0$ ist, d. h. wenn der leuchtende Punkt zwischen Brennpunkt und brechender Fläche liegt, dann zugleich x_1 negativ ist, d. h. daß das Bild in der der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegengesetzten Richtung von dem hinteren Brennpunkt liegt. Das Bild tritt von $+\infty$ nach $-\infty$ nur hinüber, wenn der leuchtende Punkt durch den vorderen Brennpunkt in der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen hindurchgeht. Ist $x_0 = -F_0$, d. h. liegt der leuchtende Punkt im Scheitel der brechenden Fläche, so ist $x_1 = -F_1$, d. h. das Bild liegt ebenfalls in dem Scheitelpunkt; Object und Bild fallen also zusammen.

Außerdem ist diese Formel sehr bequem in dem häufig vorkommenden Fall, daß man den hinteren Brennpunkt kennt und

nur berechnet werden soll, um wie viel das Bild sich verschiebt, wenn der Gegenstand nicht in unendlicher, sondern in endlicher Entfernung liegt.

§ 74. Die Spiegelung als besondere Art der Brechung betrachtet.

Ehe wir nunmehr dazu übergehen, die Spiegelung als einen besonderen Fall der Brechung aufzufassen, müssen wir vorher nochmals im Zusammenhang uns vergegenwärtigen, in welcher Richtung wir die in den bisherigen Formeln vorkommenden Entfernungsgrößen als positiv angenommen haben. Es wurde r_0 positiv gerechnet, wenn der leuchtende Punkt vor der brechenden Fläche lag, so daß also der Zuwachs von r_0 positiv ist, wenn der Punkt der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegen sich bewegt; hingegen wurde r_1 als positiv genommen, wenn der Vereinigungspunkt hinter der brechenden Fläche lag, und der Zuwachs dr_1 ist demnach als positiv zu betrachten, wenn der Bildpunkt sich in der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen bewegt. Der Krümmungsradius ρ ist positiv, wenn die Fläche den auffallenden Strahlen ihre convexe Seite zukehrt. Die Brennweiten werden in demselben Sinne wie r_0 und r_1 als positiv gerechnet. Aus den für sie in den Gleichungen (298) angegebenen Werthen folgt also, daß sie bei positivem ρ nur dann positiv sind, wenn der Nenner dieser Ausdrücke positiv, d. h. wenn $n_1 > n_0$ ist, oder wenn das stärker brechende Medium auf der concaven Seite der brechenden Fläche liegt. Es ist dann zugleich $F_1 > F_0$.

Die bisher für die Brechung abgeleiteten Formeln kann man nun auch auf den Fall der Spiegelung übertragen.

Bei der Spiegelung hatten wir r_1 dann als positiv gerechnet, wenn der Bildpunkt vor der spiegelnden Fläche lag, also entgegengesetzt wie es bei der Brechung geschehen. Ferner hatten wir dort ρ positiv gerechnet, wenn die concave Seite den auffallenden Strahlen zugewendet war. Wollen wir also die bei der Brechung abgeleiteten Formeln auf die Spiegelung übertragen, so haben wir sie so zu modificiren, daß der Richtungsänderung von r_1 Rechnung getragen wird; das geschieht aber, wenn wir erstens, da die absolute Größe des Einfallswinkels bei der Spiegelung dieselbe ist wie die des Reflexionswinkels, $n_1 = -n_0$ setzen, und zweitens den Krümmungsradius ρ in anderem Sinne positiv rechnen, als es bei der Spiegelung geschah.

Wenden wir diese Betrachtung nun zunächst einmal auf die für die Brennweiten F_0 und F_1 in den Gleichungen (298) angegebenen Werthe

$$F_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$$

und

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

an, indem wir hierin $n_1 = -n_0$ setzen; dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\varrho}{2} \\ F_0 &= -\frac{\varrho}{2} \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

Ist nun ϱ positiv, d. h. ist der Spiegel ein Convexspiegel, so ist F_1 positiv und F_0 negativ. Daraus folgt aber, daß parallel auffallende Strahlen ihren — hier virtuellen — Sammelpunkt hinter dem Spiegel haben würden, und daß Strahlen, welche nach der Spiegelung parallel der Axe fortgehen sollen, so auffallen müssen, daß sie ihren Schnittpunkt vor der Spiegelung hinter der spiegelnden Fläche haben.

Für einen Concavspiegel ist ϱ negativ und daher F_1 negativ, hingegen F_0 positiv. Beide Brennpunkte liegen also vor dem Spiegel. Sie fallen thatsächlich zusammen in einem Punkte, der um die Strecke $\frac{\varrho}{2}$ vom Scheitel des Spiegels entfernt ist. Es kommt dieses daher, weil n_1 und n_0 denselben absoluten Werth haben. Der Einfluß des entgegengesetzten Vorzeichens von n_1 und n_0 wird dadurch wieder aufgehoben, daß die mit dem Index 1 versehenen Werthe in anderer Richtung positiv zu rechnen sind, als die mit dem Index 0 versehenen.

Wenn wir nun nachweisen wollen, daß durch unsere Annahme die allgemeine, bei der Brechung über die Lage des Bildpunktes 1 abgeleitete Gleichung (293 g)

$$\frac{n_1 \cdot \cos \beta_1 - n_0 \cos \beta_0}{\varrho} = \frac{n_1 \cdot \cos^2 \beta_1}{r_1} + \frac{n_0 \cdot \cos^2 \beta_0}{r_0}$$

in die bei der Spiegelung abgeleitete analoge Gleichung (288) übergeht, so haben wir zuerst zu beachten, daß zufolge unserer Annahme $n_1 = -n_0$ nach Gleichung (292 c) $\beta_1 = -\beta_0$ und daher

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_0$$

wird, wir also aus jedem Gliede einmal den Cosinuswerth fortlassen können. Durch etwas andere Anordnung erhalten wir dann:

$$\frac{n_1 - n_0}{\rho \cdot \cos \beta} = \frac{n_1}{r_1} + \frac{n_0}{r_0}$$

Setzen wir nun $n_1 = -n_0$ und berücksichtigen, daß jetzt die Vorzeichen von ρ und r_1 zu wechseln sind, weil wir diese beiden Größen bei der Spiegelung in anderer Richtung als positiv gerechnet haben, so ergibt sich sofort

$$\frac{2}{\rho \cdot \cos \beta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \quad (305)$$

Das ist aber die bei der Spiegelung abgeleitete Gleichung (288 a). Wenn wir unsere Gleichung (303b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

auf Spiegel anwenden, so ist zu beachten, daß eine der beiden Brennweiten des Spiegels stets negativ, die andere positiv ist, und daß dadurch also das Product $F_0 \cdot F_1$ immer einen negativen Werth hat, und deshalb müssen x_0 und x_1 auch stets entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da nun aber beide in entgegengesetzter Richtung positiv gerechnet werden, so liegen Objectpunkt 0 und Bildpunkt 1 thatsächlich stets in gleicher Richtung von dem Brennpunkt des Spiegels.

Diese Auffassung der Spiegelung als einen besonderen Fall der Brechung ist manchmal bequem, besonders, wenn man mit zusammengesetzten Systemen zu rechnen hat, in denen neben den brechenden eine oder mehrere spiegelnde Flächen vorkommen. Man kann dann unmittelbar die weiter unten abgeleiteten Formeln benutzen, welche für die zusammengesetzten brechenden Systeme gelten, wenn man nur für die Spiegel das Brechungsverhältniß hinter dem Spiegel gleich dem negativen Werth des Brechungsverhältnisses vor dem Spiegel annimmt. Es bezeichnet dieser negative Werth des Brechungsverhältnisses nur, daß die Strahlen ihre Fortpflanzungsrichtung umkehren.

§ 75. Verallgemeinerung des Gesetzes über die Lage des Bildpunktes.

Wir haben bisher stets angenommen, daß 0 der leuchtende Punkt und 1 der Bildpunkt, d. h. der Sammelpunkt für die von 0 ausgehenden Strahlen sei. Aus allen unseren Formeln ist aber er-

sichtlich, daß wir ohne weiteres 0 mit 1 vertauschen können, wenn wir zugleich die von der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen abhängigen Vorzeichen ändern. Daraus geht also hervor, daß der Punkt 0 zum Bildpunkt wird, wenn 1 der leuchtende Punkt ist. Man nennt daher beide auch conjugirte Vereinigungspunkte, wobei man es zweifelhaft läßt, von welchem der beiden Punkte das Licht ausgeht.

Für die Gültigkeit des Brechungsgesetzes ist es einerlei, ob der Licht aussendende Punkt ein materieller, Licht erzeugender oder auffallendes Licht zerstreuer Punkt sei oder nur der Vereinigungspunkt von gebrochenen Strahlen. Daher kann der leuchtende Punkt auch ein virtueller Vereinigungspunkt solcher Strahlen sein und in der Verlängerung der Strahlen hinter der brechenden Fläche liegen.

Bei unseren früheren Formeln (300) und (302a) für die Bildabstände bezogen wir alle Entfernungsabmessungen auf einen einzigen Punkt. In der Gleichung (300) war es der Scheitelpunkt der brechenden Fläche, in Gleichung (302a) ihr Krümmungsmittelpunkt. Wir wollen nunmehr auf jeder Seite der brechenden Fläche die Entfernungen von dem auf dieser Seite gelegenen Punkte eines Paares von conjugirten Vereinigungspunkten aus rechnen.

In Figur 36 sei AB die brechende Fläche, a ihr Scheitel, ρ ihr Krümmungsradius; 0 sei der leuchtende Punkt, 1 der Bildpunkt,

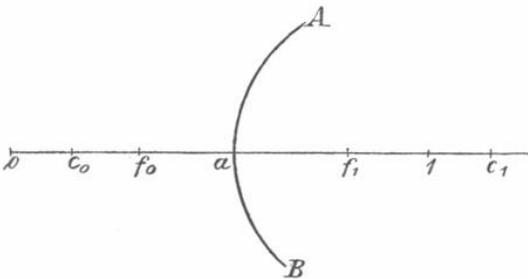


Fig. 36.

für welche beiden wir die Berechnung anstellen wollen. Die beiden conjugirten Vereinigungspunkte, von denen aus die Entfernungen zu rechnen sind, seien c_0 und c_1 , ferner sei f_0 der vordere, f_1 der hintere Brennpunkt; die Brennweiten, vom Scheitel a aus gerechnet, seien $F_0 = af_0$ und $F_1 = af_1$. Die Entfernungen der Punkte 0 und 1 vom Scheitel a seien ebenso wie bisher mit r_0 und r_1 , die der

conjugirten Punkte c_0 und c_1 mit r'_0 und r'_1 bezeichnet. Dann haben wir die Gleichungen

$$1 = \frac{F'_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1} \quad (306)$$

und

$$1 = \frac{F_0}{r'_0} + \frac{F'_1}{r'_1} \quad (307)$$

Für die neue Art der Entfernungsabmessung wollen wir nun die analoge Festsetzung über die Vorzeichen machen, wie sie für die alte galt, d. h. wir wollen die Entfernung h_0 des Punktes 0 von dem Punkte c_0 dann positiv rechnen, wenn 0 vor c_0 liegt, hingegen soll die Entfernung h_1 zwischen dem Punkte 1 und dem Punkte c_1 positiv sein, wenn 1 hinter c_1 liegt. Es ist dann

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad h_0 &= r_0 - r'_0 \\ h_1 &= r_1 - r'_1 \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Setzen wir nun aus diesen Gleichungen die Werthe von r_0 und r_1 in Gleichung (306) ein, so ergibt sich

$$1 = \frac{F_0}{r'_0 + h_0} + \frac{F_1}{r'_1 + h_1}$$

oder

$$(r'_0 + h_0) \cdot (r'_1 + h_1) = F_0 \cdot (r'_1 + h_1) + F_1 \cdot (r'_0 + h_0) \quad (309)$$

Subtrahirt man hiervon die aus Gleichung (307) abzuleitende Gleichung

$$r'_0 \cdot r'_1 = F_0 \cdot r'_1 + F_1 \cdot r'_0 \quad (307a)$$

so erhält man

$$h_1 \cdot (F_0 - r'_0) + h_0 \cdot (F_1 - r'_1) = h_0 h_1 \quad (310)$$

Die Brennweiten bezogen auf die conjugirten Vereinigungspunkte, also die Strecken $c_0 f_0$ und $c_1 f_1$, wollen wir mit H_0 und H_1 bezeichnen; dann ist nach den gemachten Festsetzungen

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= F_0 - r'_0 \\ H_1 &= F_1 - r'_1 \end{aligned} \right\} \quad (311)$$

Dadurch verwandelt sich Gleichung (310) in

$$h_1 \cdot H_0 + h_0 \cdot H_1 = h_0 \cdot h_1$$

oder

$$1 = \frac{H_0}{h_0} + \frac{H_1}{h_1} \quad (310a)$$

Wenn man also zum Ausgangspunkt für die Messung der Abstände irgend ein Paar conjugirte Vereinigungspunkte nimmt, so kommt

man zu derselben einfachen Formel, welche wir früher fanden, als die Messungen auf den Scheitelpunkt oder den Krümmungsmittelpunkt der Fläche bezogen wurden. Jene früher befolgte Art der Entfernungsabmessung ist aber nur ein specieller Fall der hier entwickelten; denn aus unseren beiden Gleichungen (300) und (302b)

$$1 = \frac{F_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1}$$

und

$$1 = \frac{F_0 + \varrho}{r_0 + \varrho} + \frac{F_1 - \varrho}{r_1 - \varrho}$$

ergibt sich leicht, dafs sowohl der Scheitelpunkt wie auch der Krümmungsmittelpunkt der Fläche jeder sich selbst conjugirt sind. Setzen wir nämlich in der ersten dieser Gleichungen $r_0 = 0$, d. h. liegt der leuchtende Punkt im Scheitel der Fläche, so folgt $r_1 = 0$, d. h. der Bildpunkt liegt ebenfalls im Scheitel der Fläche. Liegt der leuchtende Punkt im Krümmungsmittelpunkt, ist also

$$r_0 = -\varrho$$

und demnach

$$r_0 + \varrho = 0$$

zu setzen, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung

$$r_1 - \varrho = 0$$

oder

$$r_1 = \varrho$$

Leuchtender Punkt und Bildpunkt fallen demnach auch hier zusammen.

§ 76. Die Gröfse der Bilder.

Wir wollen nunmehr die Gröfse der durch die Brechung entstehenden Bilder berechnen. Es sei AB in Figur 37 eine brechende Fläche mit dem Krümmungsradius ϱ . In Bezug auf den leuchtenden Punkt O ist dann die Axe des Systems diejenige Gerade, welche durch ihn und den Mittelpunkt der Kugel C geht, und auf ihr wird in dem durch die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen bestimmten Orte der Bildpunkt 1 liegen. Dieselben Verhältnisse be-

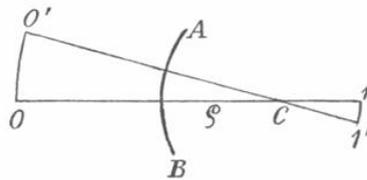


Fig. 37.

stehen aber auch für einen zweiten leuchtenden Punkt O' , der in derselben Entfernung von der brechenden Fläche liegen möge. Von

ihm würden wir eine andere Gerade nach dem Mittelpunkt zu ziehen haben, welche dann für diesen zweiten Punkt als Axe zu betrachten ist. Die Bedingung, die wir fest halten müssen, ist die, daß der Theil der Fläche, welcher die Strahlen aufnimmt, stets nahezu senkrecht von den Strahlen getroffen wird. Das kann nun aber nur dann der Fall sein, wenn der zweite Punkt dem ersten nahe liegt, oder vielmehr, wenn die auf beide Punkte bezüglichen Axen nur wenig gegen einander geneigt sind. Die brechende Fläche darf ferner keinen zu großen Theil einer Kugel bilden, damit unsere oben abgeleiteten annähernd richtigen Sätze über die Vereinigung der Strahlen noch gültig bleiben. Wenn wir nun eine Reihe leuchtender Punkte haben, welche auf einem kleinen Stück einer Kugelfläche liegen, deren Krümmungsmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfällt, so wird für jeden dieser Punkte das Bild in gleicher Entfernung hinter dem Krümmungsmittelpunkt liegen, weil für jedes dieser Strahlenbündel dieselben Verhältnisse bestehen. Es befinden sich also die Bildpunkte aller dieser leuchtenden Punkte wiederum auf einem kleinen Stück einer Kugelfläche, und die Lage jedes einzelnen wird erhalten, wenn man den leuchtenden Punkt durch den Krümmungsmittelpunkt der Kugel hindurch auf die Kugelfläche der Bildpunkte projicirt. Dadurch entsteht eine geometrisch ähnliche Abbildung der leuchtenden Fläche, welche letztere neben den beliebig gefärbten leuchtenden Punkten freilich auch dunkle Punkte enthalten kann. Für ein Auge, welches diese Bildfläche von hinten betrachtet, wird alles Licht, welches von der brechenden Fläche kommt, scheinbar von den Vereinigungspunkten, die in der Bildfläche liegen, ausgehen. Wenn wir ein weißes Papier in die Bildfläche halten, so wird jeder Punkt, der von einem hellen Punkte des Originals beleuchtet wird, hell erscheinen; einem rothen Punkte des Originals entspricht ein rother Punkt auf der Bildfläche, einem grünen ein grüner u. s. w., so daß man ein in Farbe und geometrischer Vertheilung völlig ähnliches optisches Bild auffangen kann, wie wir das in der That in der Camera obscura sehen.

Nun kann ein Stück einer Kugelfläche, welches eine im Verhältniß zum Radius kleine Ausdehnung hat, immer als eben betrachtet werden, und in diesem Sinne können wir uns die vereinfachte Vorstellung erlauben, daß die leuchtenden Punkte statt in einer Kugelfläche, in einer ebenen Fläche liegen, und daß dieses auch bei ihren Bildern der Fall ist. Liegen die leuchtenden Punkte auf einer Ebene, die senkrecht auf der zu einem dieser Punkte

gehörigen Axe des Systems steht, so steht die Bildebene ebenfalls senkrecht auf dieser Axe und befindet sich, auf dieser Axe gemessen, in einer Entfernung, die durch die Regeln über die Vereinigungsweiten gegeben ist.

Ein reelles Bild, welches in dieser Weise durch eine brechende Fläche entworfen wird, die ihre convexe Seite nach vorne kehrt und hinter welcher sich ein dichteres Medium befindet, wird nun umgekehrt sein. Denn für jeden Objectpunkt ist, auf der zugehörigen Axe gemessen, der Bildpunkt von der brechenden Fläche weiter entfernt, als der Krümmungsmittelpunkt; da sich nun in letzterem alle Axenstrahlen schneiden, so ist (siehe Figur 37) die verticale Anordnung der Bildpunkte die umgekehrte von derjenigen der Objectpunkte.

Nehmen wir nun an, daß die Objectebene und damit auch die Bildebene auf der Axe 01 senkrecht steht, so sind die beiden Dreiecke $00'C$ und $11'C$ einander ähnlich, da die bei C liegenden Winkel als Scheitelwinkel gleich sind, und daraus folgt, daß die Gröfse des Bildes sich zu der Gröfse des Objectes, beide gemessen zwischen zwei einander entsprechenden Punktpaaren, verhält wie die Entfernung des Bildes vom Krümmungsmittelpunkt zu derjenigen des Objectes. Wenn wir die Objectgröfse mit β_0 und die Bildgröfse mit β_1 bezeichnen, so haben wir also die Proportion

$$\beta_0 : r_0 + \varrho = \beta_1 : r_1 - \varrho \quad (312)$$

und daraus ergibt sich

$$\frac{\beta_0}{r_0 + \varrho} = \frac{\beta_1}{r_1 - \varrho} \quad (312a)$$

Man pflegt nun gewöhnlich die Gröfse umgekehrter Bilder als negativ zu bezeichnen, so daß wir, um die Gleichung in diesem Sinne vollständig zu machen, auf der einen Seite ein negatives Zeichen hinzu setzen müssen. Dann erhalten wir:

$$-\frac{\beta_0}{r_0 + \varrho} = \frac{\beta_1}{r_1 - \varrho} \quad (313)$$

oder

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{r_0 + \varrho}{r_1 - \varrho} \quad (313a)$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{F_0}{F_1}$, so ergibt sich:

$$-\frac{\beta_0 F_0}{\beta_1 F_1} = \frac{(r_0 + \varrho) \cdot F_0}{F_1 \cdot (r_1 - \varrho)}$$

oder

$$-\frac{\beta_0 F_0}{\beta_0 F_0 + \beta_1 F_1} = \frac{(r_0 + \varrho) \cdot F_0}{(r_0 + \varrho) \cdot F_0 + (r_1 - \varrho) \cdot F_1} \quad (313b)$$

Und da nach Gleichung (302)

$$(r_0 + \varrho) \cdot F_0 + (r_1 - \varrho) \cdot F_1 = (r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{F_0 \beta_0}{F_0 \beta_0 + F_1 \beta_1} &= \frac{(r_0 + \varrho) \cdot F_0}{(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)} \\ &= \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \end{aligned} \quad (313c)$$

Wenn wir durch F_0 auf der linken Seite Zähler und Nenner dividieren, so erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{\beta_0 + \frac{F_1}{F_0} \cdot \beta_1} = \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \quad (313d)$$

Da nun nach Gleichung (299)

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{n_1}{n_0}$$

ist, und nach den Gleichungen (298)

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

so ergibt sich nach einiger Umformung

$$-\frac{\beta_0}{n_0 \beta_0 + n_1 \beta_1} = \frac{\varrho}{(n_1 - n_0) \cdot (r_1 - \varrho)} \quad (313e)$$

Daraus können wir — allerdings nicht in wünschenswerther Einfachheit — die Bildgröße β_1 berechnen, wenn die Brechungsverhältnisse n_1 und n_0 , der Krümmungsradius ϱ , der Objectabstand r_1 und die Objectgröße β_0 gegeben sind.

Eine viel einfachere und übersichtlichere Formel ist abzuleiten, wenn wir das in der früheren Gleichung (303b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

enthaltene, auf den Abstand von den Brennpunkten bezügliche Gesetz benutzen. Wir wissen, daß ein jeder Strahl, der durch den Brennpunkt geht, nach der Brechung der Axe parallel wird. Wenn wir also von dem Punkte O' , der seitlich von der zum Punkte O gehörigen Axe angenommen wird, eine Gerade durch den vorderen Brennpunkt nach der brechenden Fläche ziehen, so wird der Strahl

so gebrochen, daß er parallel der Axe weiter geht. Nun ist dieser Strahl aber ein Strahl, welcher einem Objectpunkt angehört, dessen Entfernung von der Axe mit β_0 bezeichnet wurde, und seine Fortsetzung nach der Brechung muß also auch, da wir schon wissen, daß die Strahlen, die von einem und demselben leuchtenden Punkte ausgegangen sind, nach der Brechung sich sämtlich wieder in einem Punkte, dem Bilde des leuchtenden Punktes, vereinigen, dem Bilde des Punktes O' angehören. Wir wissen nun zunächst noch nicht, wo dieses Bild hinfällt; aber seine Größe β_1 muß dem Ab-

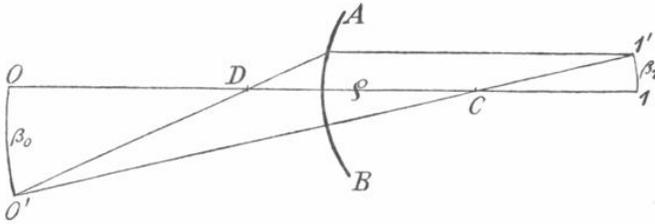


Fig. 38.

stand gleich sein, in dem dieser Strahl nach der Brechung der Axe parallel verläuft. Die Entfernung des Punktes O vom vorderen Brennpunkte haben wir früher mit x_0 bezeichnet; die vordere Brennweite F_0 ist aber die Entfernung des vorderen Brennpunktes von der brechenden Fläche, von der nur ein kleines, sehr wenig gekrümmtes Stück hier in Betracht kommt, und die wir daher hier als eine Ebene betrachten können. Es folgt daraus, wenn wir β_1 wieder als negativ rechnen, weil das Bild umgekehrt ist:

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{x_0}{F_0} \quad (314)$$

Wir können nun eine ähnliche Betrachtung auch für einen Strahl machen, welcher durch den hinteren Brennpunkt geht, nachdem er vor der Brechung der Axe parallel gelaufen ist. Einfacher aber ist es, die aus Gleichung (303b) abzuleitende Beziehung

$$\frac{x_0}{F_0} = \frac{F_1}{x_1}$$

zu benutzen; denn dann ergibt sich sofort die Doppelgleichung

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{x_0}{F_0} = \frac{F_1}{x_1} \quad (315)$$

Wir können demnach die Bildgröße aus der Objectgröße berechnen, sobald wir die Entfernung des leuchtenden Punktes vom ersten

Brennpunkt, oder des Bildpunktes vom zweiten Brennpunkt, und die entsprechende Brennweite kennen. Nach den Gleichungen (303) ist nun aber

$$x_0 = r_0 - F_0$$

und

$$x_1 = r_1 - F_1$$

Setzen wir diese Werthe in unsere Doppelgleichung (315) ein, so erhalten wir

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{F_0 - r_0}{F_0} = \frac{F_1}{F_1 - r_1} \quad (315a)$$

womit eine weitere einfache Beziehung der Bildgrößen gegeben ist.

§ 77. Die optische Divergenz der Strahlen.

Von dem leuchtenden Punkte O (Figur 39) fallen Strahlen auf die brechende Fläche AB . Den benutzten Theil dieser Fläche wollen wir uns durch eine kreisförmige Oeffnung begrenzt denken, die sich in irgend einem zur Axe senkrechten dunkeln Schirme be-

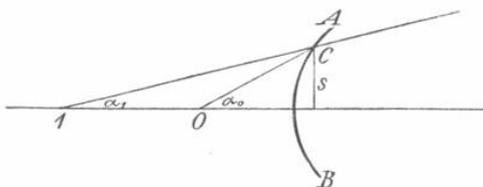


Fig. 39.

findet und deren Mittelpunkt in der Axe liegt. Es möge OC ein dicht an dem Rande dieser Oeffnung vorbeigehender Strahl sein. Die Entfernung von der Axe, in welcher dieser Randstrahl auf die brechende Fläche trifft, sei mit s bezeichnet. Um den Sinn der nachher zu brauchenden Ausdrücke positiv zu machen, wollen wir in unserem Beispiel annehmen, daß der Strahl auch nach der Brechung mit der Axe divergirt. In diesem Falle werden wir einen virtuellen Vereinigungspunkt der Strahlen haben, der auf derselben Seite der brechenden Fläche wie der leuchtende Punkt liegt, und es ist dann r_1 negativ. Der Strahl bilde vor der Brechung mit der Axe den Winkel α_0 , nach der Brechung den Winkel α_1 , und zwar wollen wir diese Winkel stets als positiv rechnen, wenn ihre spitze Oeffnung nach der Seite hin gewendet ist, nach der sich die Strahlen

fortpflanzen, als negativ, wenn die spitze Oeffnung nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist. Dann ist also

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{s}{r_0} \quad (316)$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{s}{r_1} \quad (317)$$

In § 72 haben wir für die Beziehung zwischen den Brechungsverhältnissen, den Object- und Bildabständen, sowie dem Krümmungsradius die Gleichung (297)

$$\frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1} = \frac{n_1 - n_0}{\rho}$$

abgeleitet. Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit s und setzen aus den Gleichungen (316) und (317) die Werthe $\operatorname{tg} \alpha_0$ und $\operatorname{tg} \alpha_1$ für die betreffenden Quotienten ein, so erhalten wir:

$$n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s}{\rho} \cdot (n_1 - n_0) \quad (318)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird gebildet von einer Größe, welche von der Lage des Objectes und des Bildes unabhängig ist und allein durch die Beschaffenheit des Systems und die Größe seiner Oeffnung bestimmt wird. Der Quotient $\frac{s}{\rho}$ ist die Tangente des Winkels, den eine von dem Krümmungsmittelpunkt der Fläche nach dem Rande der Schirmöffnung gezogene Gerade mit der Axe bildet. Diesen Winkel nennt man den Oeffnungswinkel. Die Winkel α_0 und α_1 auf der linken Seite geben die Divergenzwinkel an, welche die Randstrahlen mit der Axe bilden.

Bezeichnen wir den Oeffnungswinkel mit ω , so können wir die letzte Gleichung schreiben

$$n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = (n_1 - n_0) \cdot \operatorname{tg} \omega \quad (318a)$$

Da nach unserer Voraussetzung diese Winkel klein sein müssen, so kann man ihre Tangenten den Winkeln selbst gleich setzen, so daß unter dieser Voraussetzung

$$n_0 \cdot \alpha_0 - n_1 \cdot \alpha_1 = (n_1 - n_0) \cdot \omega \quad (319)$$

Das Product aus der Tangente bez. dem Winkel und dem Brechungsverhältniß wird die optische Divergenz der Strahlen genannt.

Sind die Strahlen convergent gegen die Axe gerichtet, so wollen wir von einer negativen Divergenz reden. Es hat dann unserer

Festsetzung gemäß ja auch α_0 bez. α_1 einen negativen Werth. Diese optische Divergenz der Strahlen, welche auf die Fläche fallen, ist abhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes von der Fläche, aber die Aenderung, welche sie beim Durchgang durch dieselbe brechende Fläche erleidet, ist stets dieselbe, aus welcher Entfernung die Strahlen auch kommen mögen. Man pflegt nun solche brechenden Flächen, welche die optische Divergenz verringern, sammelnde brechende Flächen zu nennen, und diejenigen, welche die Divergenz vergrößern, zerstreueude brechende Flächen. Die Größe der Verminderung bez. der Vermehrung der optischen Divergenz hängt, wie unsere Gleichung (318) zeigt, wenn wir den Radius s der Oeffnung als constant annehmen, sowohl von dem Unterschiede der beiden Brechungsverhältnisse, als auch von der Größe des Krümmungsradius ρ ab. Liegt hinter der brechenden Fläche das stärker brechende Medium, ist also $n_1 > n_0$, und ist der Krümmungsradius positiv, d. h. wendet die brechende Fläche ihre convexe Seite den auffallenden Strahlen zu, so wird die optische Divergenz beim Durchgang verringert. Dasselbe ist der Fall, wenn $n_1 < n_0$ und die concave Seite den ankommenden Strahlen zugekehrt ist. Bei sammelnden brechenden Flächen liegt also stets das stärker brechende Medium auf der concaven Seite, und umgekehrt liegt bei zerstreuen den brechenden Flächen das stärker brechende Medium auf der convexen Seite. Wir haben früher in § 74 gesehen, daß wir die Spiegelung als Brechung auffassen können, indem wir $n_1 = -n_0$ setzen, und daher lassen sich die zuletzt entwickelten Beziehungen

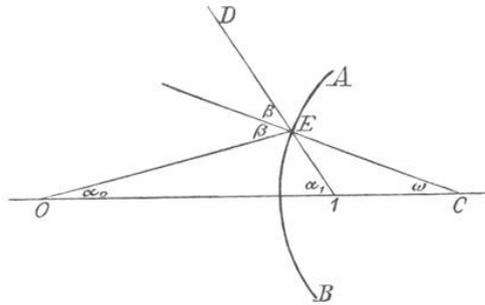


Fig. 40.

auch auf spiegelnde Flächen anwenden. Es ergibt sich dabei sogar, daß wir uns nicht einmal auf denjenigen Theil der spiegelnden kugelförmigen Fläche zu beschränken haben, welcher der Axe nahe liegt. Es sei AB (Fig. 40) eine spiegelnde Kugelfläche, C ihr Mittelpunkt.

Von dem leuchtenden Punkte 0 falle der Strahl OE , der mit der Axe OC den Divergenzwinkel α_0 bildet, auf die convexe Seite der Fläche. Der zu diesem Strahl gehörige Oeffnungswinkel ist $EC0 = \omega$. Nach dem Spiegelungsgesetze können wir dann den Bildpunkt 1 construiren. Die von ihm virtuell ausgehenden Strahlen bilden mit der Axe den Divergenzwinkel α_1 . Es ist nun

$$\alpha_0 = \beta - \omega$$

und

$$\alpha_1 = \omega + \beta$$

Daraus folgt:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 2\omega \tag{320}$$

Durch die Spiegelung ist demnach die Divergenz der Strahlen um 2ω vermehrt worden. Diese Vermehrung der Divergenz ist, wie ersichtlich, nicht abhängig von der Entfernung, in der der leuchtende Punkt 0 von der Fläche AB liegt.

Käme das Licht von D her, d. h. wäre 1 der virtuelle leuchtende Punkt, so würde 0 der Bildpunkt sein; es würde dann $-\alpha_1$ die Divergenz vor der Brechung und $-\alpha_0$ die Divergenz nach der Brechung sein. Da nun α_0 seinem absoluten Betrage nach kleiner als α_1 ist, so hätte sich auch hier die Divergenz durch die Brechung vermehrt.

Fallen die von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen auf die concave Seite einer spiegelnden Kugelfläche, so ergibt eine völlig analoge Betrachtung, dass die Divergenz der Strahlen um den Betrag 2ω verringert wird.

Concavspiegel vermindern also die Divergenz der Strahlen um den doppelten Betrag des Oeffnungswinkels, Convexspiegel vermehren sie um ebensoviel. Jene heissen deshalb auch Sammelspiegel, diese Zerstreungsspiegel.

§ 78. Die Beziehung zwischen der optischen Divergenz der Strahlen und der Bildgröße.

Aus unserer Doppelgleichung (315) ergibt sich:

$$-\frac{\beta_0}{x_0} = \frac{\beta_1}{F_0} \tag{321}$$

und wenn wir diese Gleichung mit der aus unseren Gleichungen (303) folgenden Gleichung

$$\frac{1}{x_1 + F_1} = \frac{1}{r_1}$$

multipliciren, erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{x_0(x_1 + F_1)} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1}$$

oder

$$-\frac{\beta_0}{x_0 x_1 + x_0 F_1} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1} \quad (321 a)$$

Setzen wir nun nach Gleichung (303b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

in den Nenner auf der linken Seite ein und berücksichtigen, daß nach den Gleichungen (303)

$$F_0 + x_0 = r_0$$

ist, dann erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{F_1 \cdot r_0} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1}$$

Nun wissen wir aber nach Gleichung (299), daß

$$F_1 \cdot n_0 = F_0 \cdot n_1$$

ist. Werden die beiden letzten Gleichungen mit einander multiplicirt, so ergibt sich

$$-\frac{\beta_0 \cdot n_0}{r_0} = \frac{\beta_1 \cdot n_1}{r_1}$$

oder, wenn wir mit dem Radius der Oeffnung, s , multipliciren

$$-\beta_0 \cdot n_0 \cdot \frac{s}{r_0} = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \frac{s}{r_1} \quad (321 b)$$

Nun ist aber $\frac{s}{r_0}$ die Tangente des Winkels, den wir im vorigen

Paragraphen mit α_0 bezeichnet hatten, und analog ist $\frac{s}{r_1}$ die Tangente des Winkels, den der weiter gehende Strahl mit der Axe macht, und zwar ist nach den gemachten Festsetzungen dieser Winkel mit $-\alpha_1$ zu bezeichnen, da die offene Seite des spitzen Winkels der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegen gerichtet ist. Wir haben also

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{s}{r_0}$$

und

$$-\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s}{r_1}$$

und erhalten demnach:

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (321c)$$

wofür wir bei sehr kleinen Divergenzwinkeln auch

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \alpha_1 \quad (321d)$$

schreiben können. In diesen Gleichungen bezeichnen die Producte $n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$ bez. $n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$ oder $n_0 \cdot \alpha_0$ bez. $n_1 \cdot \alpha_1$ das, was wir oben die optische Divergenz der Strahlen genannt haben. Das Product aus Bildgröße und der optischen Divergenz ist also unverändert. Es geht daraus hervor, daß die Größe des Bildes negativ, d. h. die Lage des Bildes umgekehrt wird, wenn die optische Divergenz negativ wird.

§ 79. Brechung und Spiegelung an einer ebenen Fläche.

Jede ebene Fläche können wir als eine Kugelfläche mit unendlich großem Radius auffassen. Wir brauchen demnach in unseren bisher abgeleiteten Formeln nur $\varrho = \infty$ zu setzen, um sie auf ebene Flächen zu beziehen. Für die Brennweiten ergab sich nach den Gleichungen (298)

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

und

$$F_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$$

Daher erhalten wir hier:

$$F_0 = F_1 = \infty \quad (322)$$

Die Lage des Bildpunktes war gegeben durch die Gleichung (297)

$$\frac{n_1 - n_0}{\varrho} = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1}$$

Für eine ebene Fläche ergibt sich demnach

$$0 = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1}$$

woraus

$$r_1 = -\frac{n_1}{n_0} \cdot r_0 \quad (323)$$

folgt. Der Bildpunkt liegt demnach, wenn n_1 positiven Werth hat, d. h. also, eine wirkliche Brechung stattfindet, auf derselben Seite,

wie der leuchtende Punkt, aber in einer andern Entfernung von der brechenden Fläche. Für den Fall einer Spiegelung, wo also

$$n_1 = -n_0$$

ist, wird

$$r_1 = r_0 \quad (324)$$

Der Bildpunkt liegt dann auf der andern Seite, aber in der gleichen Entfernung von der spiegelnden Fläche. Für die Bildgröße fanden wir oben (§ 76) die Gleichung (313a)

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{r_0 + \varrho}{r_1 - \varrho}$$

Dividirt man auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch ϱ und setzt dann $\varrho = \infty$, so ergibt sich

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} = 1 \quad (325)$$

d. h. sowohl bei einer brechenden als auch bei einer spiegelnden ebenen Fläche ist das Bild aufrecht und hat dieselbe Größe wie das Object.

Auch die optische Divergenz der Strahlen wird bei brechenden und spiegelnden Ebenen nicht verändert; denn es ist der Winkel, dessen doppelter Werth nach Gleichung (320) den Betrag der Aenderung der optischen Divergenz angiebt, gleich Null, da er den hier in unendlicher Ferne liegenden Krümmungsmittelpunkt zum Scheitel hat.

Dritter Abschnitt.

Die Brechung in Systemen centrirter Flächen.

§ 80. Allgemeine Eigenschaften centrirter brechender Flächen. Die conjugirten Vereinigungspunkte und die beiden Brennpunkte.

Die bisher gefundenen Sätze lassen sich auf ein zusammengesetztes optisches System übertragen, welches aus einer beliebigen Anzahl von kugeligen brechenden Flächen besteht, deren Krümmungsmittelpunkte alle in einer geraden Linie, der Axe des Systems,

liegen. Ein solches optisches System nennt man ein centrirtes System brechender Flächen. Nach den in § 74 gegebenen Ausführungen können auch noch spiegelnde Kugelflächen hinzukommen, die dann natürlich ebenfalls in dem oben dargestellten Sinne centrirt sein müssen. Durch diese Uebertragung der Gleichungen auf beliebig zusammengesetzte Systeme erhalten wir allgemeine Regeln über die Lage und Gröfse der Bilder in allen möglichen Arten von optischen Instrumenten, bei denen die brechenden und spiegelnden Flächen centrirt sind. Zu ihnen gehören sowohl Fernrohre wie Mikroskope.

Es ist dabei aber zu beachten, dafs unsere Regeln nur dann gültig bleiben, wenn die Strahlen auf sämmtliche brechende Flächen des Systems stets unter kleinen Einfallswinkeln auffallen. Wenn auf einer kleinen, zur Axe senkrechten Ebene eine Anzahl von leuchtenden Punkten liegt, so wird die erste brechende Fläche eines centrirten optischen Systems ein geometrisch ähnliches Bild jener Ebene an einer andern Stelle des Systems entwerfen, welches ebenfalls senkrecht zur Axe ist. Dabei wird das Strahlenbündel, welches von jedem Objectpunkt der ersten Fläche ausgeht, mit allen seinen Strahlen, soweit sie durch die Fläche hindurch gehen und insofern die Apertur der krummen Fläche nicht zu grofs ist, wieder in einem Punkte vereinigt. Man nennt solche Strahlenbündel, deren Strahlen von einem leuchtenden Punkte ausgehen, oder, wenn sie weiter gehen, sich alle wieder in einem Punkte vereinigen, homocentrisch. Sie bilden den Gegensatz zu den astigmatischen Strahlenbündeln, von denen wir oben in § 69 schon gesprochen haben, als sich zeigte, dafs die Strahlenbündel, die von einem Punkte ausgehen, sich nicht unter allen Umständen wieder in einem Punkte vereinigen. Da homocentrisches Licht, welches unter kleinem Einfallswinkel auf eine kugelige brechende Fläche fällt, auch nach der Brechung homocentrisch ist, und da dasselbe für jede der brechenden Kugelflächen gilt, welche in dem System aufeinander folgen, so wird solches homocentrische Licht auch nach der Brechung an einer langen Reihe von solchen Kugelflächen homocentrisch bleiben müssen, falls nur auf dem ganzen Wege keine zu grofsen Einfallswinkel vorkommen.

Von einem ebenen Objecte, welches senkrecht zur Axe liegt, entsteht nach der Brechung in einer Kugelfläche ein geometrisch ähnliches Abbild, welches ebenfalls senkrecht zur Axe liegt. In ihm werden wiederum die homocentrisch von dem Object ausgehenden Strahlen homocentrisch vereinigt; dieses Bild des ersten Objects

ist nun das Object für die zweite brechende Fläche; hier gilt dasselbe, und ebenso für die dritte, vierte, und jede weitere Fläche, so daß also schliesslich nach der Brechung in der letzten Fläche an irgend einer Stelle ein Abbild von jenem ebenen Object existiren muß, welches diesem ähnlich ist und in eine zur Axe senkrechte Ebene fällt.

Zu jedem leuchtenden Punkte, der auf der Axe des Systems liegt, wird also, nachdem die von ihm ausgehenden Strahlen sämtliche brechenden — und auch spiegelnden — Flächen passirt haben, ein Bildpunkt gehören, in dem sich diese Strahlen wieder schneiden, resp. von dem sie herzukommen scheinen. Auf Grund derselben Betrachtungen, die wir in § 75 für eine einzige Fläche angestellt haben, ergibt sich nun auch für ein System von Flächen, daß wir den leuchtenden Punkt und den Bildpunkt mit einander vertauschen können. Ein solches Punktpaar, das wechselseitig Object- und Bildpunkt ist, nennt man nun auch bei einem System von brechenden Flächen conjugirte oder zusammengehörige Vereinigungspunkte.

Liegt einer der conjugirten Vereinigungspunkte im Unendlichen, so wird der andere ein Brennpunkt des Systems genannt. Ebenso, wie bei einer einzelnen brechenden Fläche giebt es auch hier zwei Brennpunkte. Liegt der leuchtende Punkt im Unendlichen, sind also die auffallenden Strahlen parallel, so nennt man den zugehörigen Bildpunkt den zweiten oder hinteren Brennpunkt des Systems. Sind hingegen die Strahlen parallel, nachdem sie das ganze System passirt haben, d. h. liegt der Bildpunkt im Unendlichen, so nennt man den Punkt, von dem sie ursprünglich ausgingen, bez. auszugehen schienen, den ersten oder vorderen Brennpunkt des Systems.

Ebenen, welche senkrecht zur Axe durch die beiden Brennpunkte gelegt sind, heißen die Brennebenen.

Da das Bild jedes Brennpunktes in unendlicher Entfernung liegt, so muß dasselbe auch für solche Punkte der Brennebenen der Fall sein, deren Entfernung von der Axe so klein ist, daß wir sie gegenüber den sonstigen Dimensionen des Systems vernachlässigen können. Strahlen, die von einem solchen Punkte der Brennebene ausgehen, werden also nach der Brechung unter einander parallel sein.

§ 81. Die Lage conjugirter Vereinigungspunkte.

Ein centrirtes System bestehe aus m brechenden Flächen. Alle Gröfsen, welche sich auf den Strahlengang beziehen, nachdem eine, zwei u. s. w. bis m Flächen passirt sind, wollen wir

durch die Indices 1 bis m von einander unterscheiden. Diese m Flächen trennen $m + 1$ brechende Medien von einander, und diesen wollen wir die Indices 0 bis m beilegen, so daß also das hinter der r ten Fläche gelegene Medium das Brechungsverhältniss n_r besitzt. In Figur 41 sind die erste, $(m - 1)$ te und m te brechende Fläche

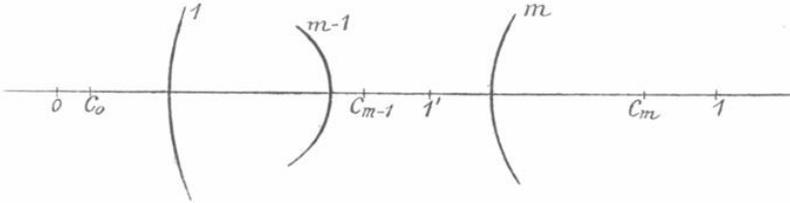


Fig. 41.

ingezeichnet. Es seien C_0 und C_m zwei conjugirte Vereinigungspunkte des Systems, 0 ein leuchtender Punkt, 1 sein Bildpunkt. Indem wir die Lage von 0 bez. 1 auf C_0 und C_m beziehen, bezeichnen wir 0 C_0 mit h_0 und C_m 1 mit h_m . Nennen wir dann noch H_0 den Abstand des ersten Brennpunktes von C_0 und H_m den des zweiten Brennpunktes von C_m , so ist:

$$\frac{H_0}{h_0} + \frac{H_m}{h_m} = 1, \tag{325}$$

wofür wir den Beweis antreten wollen, indem wir zunächst voraussetzen, daß eine dieser Gleichung analoge Gleichung bereits für ein aus den ersten $m - 1$ brechenden Flächen zusammengesetztes System bewiesen sei. Für dieses System sei C_{m-1} der zu C_0 conjugirte Vereinigungspunkt und 1' der Bildpunkt zu 0. Die Entfernung zwischen C_0 und dem ersten Brennpunkt dieses Systems sei mit L_0 , die Entfernung zwischen C_{m-1} und dem zweiten Brennpunkt mit L_{m-1} , und endlich gemäß unserer Festsetzung die Strecke $C_{m-1} 1'$ mit h_{m-1} bezeichnet. Die Entfernungen der Brennpunkte der letzten, m ten Fläche von den Punkten C_{m-1} und C_m seien M_{m-1} und M_m .

Nun haben wir nach der gemachten Voraussetzung:

$$\frac{L_0}{h_0} + \frac{L_{m-1}}{h_{m-1}} = 1 \tag{326}$$

und für die Brechung in der m ten Fläche

$$- \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{M_m}{h_m} = 1 \tag{327}$$

Das negative Zeichen des ersten Gliedes rührt daher, daß wir die

Strecke h_{m-1} in diesem System in umgekehrtem Sinne als positiv zu rechnen haben, wie in dem andern System. Wenn wir die Gleichung (326) durch L_{m-1} und die Gleichung (327) durch M_{m-1} dividiren und beide addiren, so erhalten wir:

$$\frac{L_0}{L_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{M_m}{M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_m} = \frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{M_{m-1}} \quad (328)$$

oder, indem wir mit $\frac{L_{m-1} \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}}$ multipliciren:

$$\frac{L_0 \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{L_{m-1} \cdot M_m}{L_{m-1} + M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_m} = 1 \quad (328a)$$

Für $h_0 = \infty$ wird $h_m = H_m$; daher folgt aus der letzten Gleichung

$$H_m = \frac{L_{m-1} \cdot M_m}{L_{m-1} + M_{m-1}} \quad (329)$$

Für $h_m = \infty$ wird andererseits $h_0 = H_0$, und wir erhalten ebenfalls aus Gleichung (328a)

$$H_0 = \frac{L_0 \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}} \quad (330)$$

Setzt man diese beiden Werthe nun in Gleichung (328a) ein, so erhält dieselbe die Gestalt

$$\frac{H_0}{h_0} + \frac{H_m}{h_m} = 1 \quad (328b)$$

Damit ist aber nachgewiesen, daß diese Gleichung für m brechende Flächen gültig ist, falls sie für $m - 1$ Flächen gilt. Nun haben wir aber bereits in § 75 gezeigt, daß eine solche Gleichung für eine brechende Fläche gilt, sie gilt also auch für zwei; wenn sie nun für zwei gilt, so gilt sie auch für drei u. s. w. in infinitum. Sie ist somit allgemein gültig.

Diese Gleichung (328b) liefert für jeden reellen Werth von h_0 zwischen $+\infty$ und $-\infty$ einen, und nur einen reellen Werth von h_m und umgekehrt. Der leuchtende Punkt sowie der Bildpunkt können an jeder Stelle der Axe liegen, aber sobald einer von beiden gegeben ist, ist auch die Lage des anderen eindeutig bestimmt.

§ 82. Die Hauptpunkte und Hauptebenen.

Ein centrirtes brechendes System aus m Flächen sei in Figur 42 durch die beiden Flächen 1 1 und $m m$ dargestellt; sp sei ein durch dasselbe abgebildeter Gegenstand, von welchem der Punkt p in der Axe und der Punkt s in einer durch p gehenden zur Axe senk-

rechten Ebene liege. Wenn wir den Gegenstand parallel mit sich selbst längs der Axe verschieben, so wird sich der Punkt s auf der mit der Axe parallelen Geraden st bewegen. Der Lichtstrahl st wird also stets dem Punkte s angehören, welches auch die Entfernung pq sein möge. Die der Axe parallelen Strahlen werden nun durch das brechende System so gebrochen, daß sie schliesslich durch den zweiten Brennpunkt P_2 des Systems gehen. Es sei rw der Gang des Lichtstrahls st nach der letzten Brechung. Da st

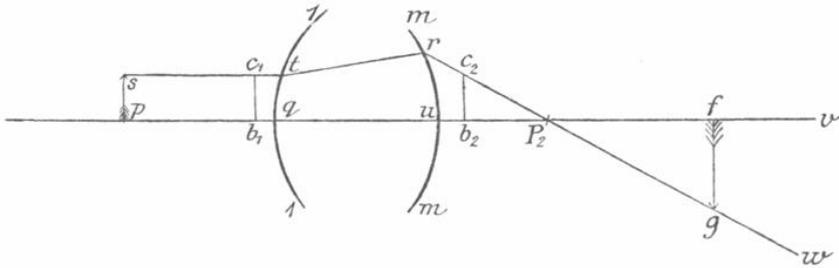


Fig. 42.

stets dem leuchtenden Punkte s angehört, muß rw stets dem Bilde dieses Punktes angehören, d. h. das Bild von s muß auf der Geraden rw liegen. Es sei fg das Bild von sp , welches nach § 80 senkrecht gegen die Achse uv sein muß. Wenn p sich längs der Achse verschiebt, wird sich auch f längs uv und g längs rw verschieben, und es ist ersichtlich, daß die GröÙe des Bildes fg sich hierbei proportional dem Abstände P_2f ändern muß. Da nun aus der Darlegung im vorigen Paragraphen hervorging, daß das Bild an jeder Stelle der Achse liegen kann, also die Entfernung P_2f jeden beliebigen Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, falls wir nur das Object an die erforderliche Stelle bringen, so wird auch die GröÙe des Bildes, wenn wir ein umgekehrtes Bild als negativ bezeichnen, jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth und einen jeden nur einmal annehmen können. Das Bild wird also dem Gegenstande an einer und zwar nur an einer Stelle gleich werden müssen. Es sei dieses der Fall, wenn der Bildpunkt in b_2 liegt. Wir wollen annehmen, daß dazu das Object sp so verschoben werden müsse, daß p in b_1 zu liegen kommt. Man bezeichnet dann b_1 als den ersten Hauptpunkt und b_2 als den zweiten Hauptpunkt des Systems, und die beiden durch diese Punkte gelegten zur Achse senkrechten Ebenen als die erste bez. zweite Hauptebene des Systems.

Die Hauptpunkte sind also zu definiren als dasjenige Paar conjugirter Vereinigungspunkte, in denen die GröÙe eines auf der Axe senkrechten Bildes der des zugehörigen Gegenstandes gleich ist.

§ 83. Die beiden Hauptbrennweiten und die Lage und GröÙe der Bilder.

Den Abstand des ersten bez. zweiten Brennpunktes vom ersten bez. zweiten Hauptpunkte nennt man die erste bez. zweite Hauptbrennweite des Systems. Bezeichnen wir sie mit F_0 bez. F_m , und die Abstände eines anderen Paares conjugirter Vereinigungspunkte 0 und 1 von den beiden Hauptpunkten mit r_0 und r_m , so können wir unsere Gleichung (328b) nunmehr schreiben:

$$\frac{F_0}{r_0} + \frac{F_m}{r_m} = 1 \quad (331)$$

Daraus folgt:

$$r_0 \cdot r_m = F_0 \cdot r_m + F_m \cdot r_0 \quad (331a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{F_0 \cdot r_m}{r_m - F_m} \\ r_m &= \frac{F_m \cdot r_0}{r_0 - F_0} \end{aligned} \right\} \quad (331b)$$

Es sind diese beiden letzten Gleichungen völlig analog unseren früheren für eine brechende Fläche gültigen Gleichungen (300), (300a) und (300b); nur sind hier die Brennweiten sowie die Object- und Bildabstände nicht vom Scheitel der Fläche, sondern von den Hauptpunkten gemessen. Wir werden aber später in § 87 sehen, daß jene Gleichungen (300), (300a) und (300b) ein specieller Fall unserer jetzigen Gleichungen (331), (331a) und (331b) sind, indem bei einem brechenden System, das nur aus einer einzigen Fläche besteht, die beiden Hauptpunkte zusammenfallen, und zwar in dem Scheitel dieser Fläche.

Um nun die GröÙe der Bilder im Allgemeinen zu berechnen, müssen wir von den beiden ähnlichen Dreiecken $c_2 b_2 P_2$ und gfP_2 ausgehen. An ihnen besteht die Proportion

$$c_2 b_2 : fg = b_2 P_2 : fP_2 \quad (332)$$

Bezeichnen wir die GröÙe des Objectes $sp = b_1 c_1 = b_2 c_2$ mit β_0 , und die GröÙe des Bildes fg , weil es umgekehrt ist, mit $-\beta_m$, und beachten ferner, daß nach den soeben eingeführten Bezeichnungen

$b_2 P_2 = F_m$ und $b_2 f = r_m$, also $f P_2 = r_m - F_m$ ist, so erhalten wir aus unserer Proportion (332) die Gleichung:

$$-\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{r_m - F_m} \quad (332a)$$

Aus unserer Gleichung (331) läßt sich nun aber ableiten, daß

$$\frac{F_m}{r_m - F_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_0}$$

ist; es ergibt sich daher zur Berechnung der Bildgröße die Doppelgleichung

$$-\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{r_m - F_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_0} \quad (332b)$$

Nennen wir den Abstand zweier conjugirter Vereinigungspunkte von den Brennpunkten x_0 und x_m , so daß also

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 - F_0 \\ x_m &= r_m - F_m, \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$x_0 \cdot x_m = F_0 \cdot F_m \quad (334)$$

und ferner

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = -\frac{x_0}{F_0} = -\frac{F_m}{x_m}. \quad (334a)$$

Damit haben wir ein Gesetz gefunden, welches dem am Ende von § 76 für eine einzelne brechende Fläche erhaltenen völlig analog ist, und welches uns gestattet, die Bildgröße aus der Objectgröße zu berechnen, sobald wir den Abstand des Objectes von dem vorderen Brennpunkte oder des Bildes von dem hinteren Brennpunkte und die dem betreffenden Brennpunkte zugehörige Hauptbrennweite kennen.

Es läßt sich nun ferner mit Benutzung der in § 78 für eine einzelne brechende Fläche bewiesenen Beziehungen der optischen Divergenz der Strahlen zu der Bildgröße ein einfaches Verhältniß zwischen der Größe der beiden Hauptbrennweiten ableiten. Wir fanden damals (Gleichung 321c), wenn β_0 die Objectgröße, β_1 die Bildgröße, n_0 und n_1 die Brechungsverhältnisse der beiden Medien und α_0 und α_1 die Divergenz der Strahlen vor und nach der Brechung bezeichnen, daß

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \text{tg } \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \text{tg } \alpha_1$$

ist. Da diese Gleichung nun für jede brechende Fläche gilt, so gilt sie auch für eine beliebige Anzahl von brechenden Flächen, falls nur

die Axe bei den verschiedenen Brechungen dieselbe ist; das ist aber bei einem centrirten Systeme brechender Flächen der Fall. Es wird also das Product aus der optischen Divergenz und der Bildgröße nach der Brechung an der letzten Fläche denselben Werth haben müssen, wie vor der ersten Brechung. Es gilt demnach in unserem centrirten Systeme die Gleichung

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = \beta_m \cdot n_m \cdot \operatorname{tg} \alpha_m \quad (335)$$

In Figur 43 sei ein centrirtes brechendes System, dessen beide Hauptpunkte in b_1 und b_2 liegen mögen, wieder durch seine erste und letzte brechende Fläche dargestellt. Das Object ps habe die

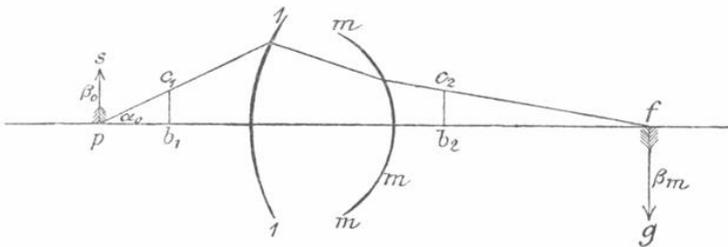


Fig. 43.

Größe β_0 , und von ihm werde das Bild fg von der Größe β_m entworfen. Ein von dem in der Axe liegenden Punkte p des Objectes ausgehender Strahl, welcher mit der letzteren den Divergenzwinkel α_0 bildet, schneide in c_1 die erste Hauptebene; dann wird sein Schnittpunkt c_2 in der zweiten Hauptebene von dem zweiten Hauptpunkte b_2 ebenso weit entfernt sein, wie c_1 von b_1 . Wir setzen nun

$$b_1 c_1 = b_2 c_2 = s$$

und nennen ferner $-\alpha_m$ den Winkel, welchen der Strahl in dem Bildpunkte f mit der Axe bildet; den Winkel rechnen wir negativ, weil der Strahl mit der Axe convergirt, und wir die Divergenz als positiv nehmen. Dann ist mit Benutzung unserer bisherigen Bezeichnungen

$$r_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = s = -r_m \cdot \operatorname{tg} \alpha_m \quad (336)$$

Wir können unsere Gleichung (335) also umformen in

$$\frac{\beta_0 \cdot n_0}{r_0} = -\frac{\beta_m \cdot n_m}{r_m} \quad (337)$$

oder

$$-\frac{\beta_m}{\beta_0} \cdot \frac{r_0}{r_m} = \frac{n_0}{n_m} \quad (337a)$$

Nun folgt aber aus Gleichung (331)

$$\frac{r_0}{r_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_m}$$

und ferner ist nach Gleichung (332b)

$$-\frac{\beta_m}{\beta_0} = \frac{F_0}{r_0 - F_0}$$

Setzen wir diese beiden Werthe auf der linken Seite unserer Gleichung (337a) ein, so ergibt sich unmittelbar

$$\frac{F_0}{F_m} = \frac{n_0}{n_m} \quad (338)$$

Die erste Hauptbrennweite verhält sich also zur zweiten, wie das Brechungsverhältniss des ersten Mediums zu dem des letzten. Falls also das erste Medium des Systems dasselbe ist wie das letzte, was bei allen unseren Mikroskopen, Fernrohren und sonstigen optischen Instrumenten der Fall ist, wenn sie in gewöhnlicher Weise in der Luft benutzt werden, so haben wir nur mit einer Brennweite des ganzen Systems zu rechnen. Denn weil dann $n_0 = n_m$ ist, so ist auch $F_0 = F_m$.

Der früher in § 73 behandelte Fall, dafs nur eine brechende Fläche vorliegt, ist ein specieller Fall des jetzt allgemein abgeleiteten Satzes; er hatte dadurch eine besondere Eigenthümlichkeit, dafs bei ihm nothwendig das zweite Mittel ein anderes Brechungsverhältniss haben mußte, als das erste, und wir daher stets zwei Brennweiten zu unterscheiden hatten.

§ 84. Die Knotenpunkte und Knotenebenen.

Setzen wir in unserer Gleichung (334)

$$x_0 \cdot x_m = F_0 \cdot F_m$$

den Abstand des Objectes vom vorderen Brennpunkt

$$x_0 = -F_m$$

d. h. legen wir das Object so weit hinter den vorderen Brennpunkt, dafs sein Abstand von diesem gleich der hinteren Brennweite ist, so ergibt sich

$$x_m = -F_0$$

Der Bildpunkt liegt dann also in einer Entfernung, die gleich der vorderen Brennweite ist, vor dem hinteren Brennpunkte. Diese beiden conjugirten Vereinigungspunkte haben besondere Eigenthümlichkeiten

und sind für die Construction der Bildpunkte im Allgemeinen von großer Bedeutung. Sie werden die Knotenpunkte des Systems genannt, und die durch sie gelegten zur Axe senkrechten Ebenen heißen die Knotenebenen.

Führen wir nun in unsere Gleichung (334a)

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = - \frac{x_0}{F_0}$$

den Werth

$$x_0 = - F_m$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{F_0} \quad (339)$$

oder, da sich die beiden Hauptbrennweiten nach Gleichung (338) wie die Brechungsverhältnisse des ersten und des letzten Mediums verhalten,

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{n_m}{n_0} \quad (339a)$$

oder

$$n_0 \cdot \beta_0 = n_m \cdot \beta_m \quad (339b)$$

Die Bildgrößen in dem vorderen und hinteren Knotenpunkt verhalten sich also umgekehrt wie die Hauptbrennweiten, oder umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung (339b) und der früheren Gleichung (335) folgt aber unmittelbar

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_m \quad (339c)$$

oder

$$\alpha_0 = \alpha_m \quad (339d)$$

Wenn also ein Strahl unter einem bestimmten Winkel in dem ersten Medium nach dem vorderen Knotenpunkte hinget, so wird er in dem letzten Medium parallel seiner ersten Lage von dem hinteren Knotenpunkte fortgehen.

Aus der Lage der Hauptpunkte und Knotenpunkte geht hervor, daß stets der Abstand der beiden Hauptpunkte von einander gleich ist dem Abstand der beiden Knotenpunkte von einander, und daß ferner der Abstand der gleichnamigen Haupt- und Knotenpunkte voneinander gleich ist dem Unterschied der beiden Brennweiten. Der Abstand der ungleichnamigen Haupt- und Knotenpunkte von einander bleibt ganz unbestimmt und ist für die verschiedenen Systeme verschieden.

Die Hauptpunkte, Brennpunkte und Knotenpunkte werden mit dem gemeinsamen Namen „Cardinalpunkte“ bezeichnet.

Haben das erste und das letzte Medium das gleiche Brechungsverhältniß, so sind auch die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und damit fällt der vordere Knotenpunkt mit dem vorderen Hauptpunkt, und der hintere Knotenpunkt mit dem hinteren Hauptpunkt zusammen, und die Knotenebenen werden mit den Hauptebenen identisch. Die auf die Knotenebenen bezügliche Gleichung (339b) befindet sich dann auch, da in diesem Falle $n_0 = n_m$ ist, im Einklang mit der in § 82 gegebenen Definition der Hauptebenen.

§ 85. Construction des Strahlenganges und des Bildpunktes.

Wir wollen einmal annehmen, daß der Gang eines Lichtstrahles in dem ersten Medium eines centrirten optischen Systems bekannt sei, und dann suchen, welches der Gang dieses Strahls in dem letzten Medium ist, nachdem er also sämtliche brechende Flächen passirt hat. Es sei AB in Fig. 44 die Axe des Systems, auf ihr liegen die

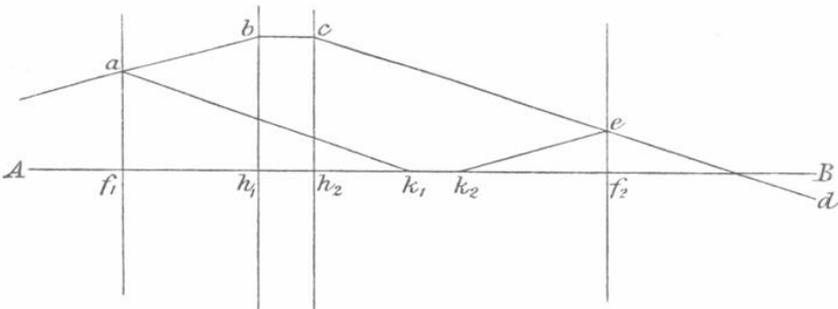


Fig. 44.

Brennpunkte f_1 und f_2 , die Hauptpunkte h_1 und h_2 , die Knotenpunkte k_1 und k_2 ; ferner sind in der Figur die Brennebenen und die Hauptebenen gezeichnet. Ist dann der Gang des betreffenden Strahles in dem ersten Medium gegeben, so verlängern wir denselben, bis er die erste Brenn- und die erste Hauptebene schneidet; a und b seien die beiden Schnittpunkte, die im Allgemeinen nicht in einer Ebene mit der Achse ab liegen werden. Da die eine Hauptebene das Bild der andern ist, und da ferner in diesem Falle das eine Bild dem andern gleich und gleich gerichtet ist, so liegt das Bild des Punktes b der ersten Hauptebene in c , dem Fußpunkte des von b auf die zweite Hauptebene gefällten Lothes. Jeder Lichtstrahl also, der von b ausgeht oder durch b hindurchgeht, muß nach

der Brechung so gerichtet sein, daß er durch c als dem Bilde von b geht. Es muß demnach auch der ursprüngliche Strahl, dessen Fortgang wir betrachten wollen, nachdem er das ganze System passirt hat, so gerichtet sein, als wenn er von c herkäme. Ferner ist nun zu beachten, daß alle Strahlen, welche von einem Punkte a der ersten Brennebene ausgehen, zufolge der in § 80 gegebenen Definition der letzteren, nach dem Durchgang durch das ganze System untereinander parallel sind. Der Strahl aber, welcher von jenem Punkte a nach dem ersten Knotenpunkte geht, hat nach dem Durchgang durch das ganze System seine Richtung beibehalten; es müssen also alle Strahlen und damit auch der gesuchte Strahl parallel ak_1 sein. Wenn wir demnach durch c eine Parallele zu ak_1 ziehen, so muß diese, soweit sie in dem letzten Medium liegt, den Verlauf des ursprünglichen Strahles nach der Brechung in diesem Medium darstellen.

Nach dem, was in § 80 über die zweite Brennebene gesagt ist, können wir aber auch eine andere Construction vornehmen. Ist der Punkt c in der angegebenen Weise gefunden, so ziehen wir zu ab eine Parallele durch k_2 ; dann ist der Schnittpunkt derselben mit der zweiten Brennebene ein Punkt, der ebenfalls in der gesuchten Strahlenrichtung liegt, und diese ist demnach gegeben durch die Gerade ce .

Es ist leicht ersichtlich, daß beide Constructionsverfahren zu demselben Resultate führen.

Wollen wir nun zu einem Objectpunkte den Bildpunkt construiren, so ist es nur nöthig, zwei beliebige von dem ersteren ausgehende Strahlen bis zum letzten Medium des Systems zu verfolgen; denn da unter den gemachten Annahmen sämtliche von dem Objectpunkte ausgehenden Strahlen auch nach der Brechung homocentrisch sind, so ist der Schnittpunkt zweier Strahlen stets der Schnittpunkt des ganzen Bündels. Der wirkliche oder der durch Verlängerung nach rückwärts gebildete virtuelle Schnittpunkt der in dem letzten Medium liegenden Strecken der beiden verfolgten Strahlen ist dann der Bildpunkt.

Der einfachste Fall ist der, daß der Objectpunkt in der Axe liegt; denn dann geht der in der Axenrichtung verlaufende Strahl ungebrochen durch das System durch, und wenn wir außerdem noch einen andern beliebigen Strahl durch das ganze System verfolgen, so ist sein letzter Schnittpunkt mit der Axe der Bildpunkt.

Wenn der Objectpunkt außerhalb der Axe liegt, so ist es am bequemsten zur Construction des Bildpunktes, den mit der Axe

parallelen Strahl und den nach dem ersten Knotenpunkte gerichteten Strahl zu benutzen.

In Figur 45 seien f_1 und f_2 die Brennpunkte, h_1 und h_2 die Hauptpunkte, k_1 und k_2 die Knotenpunkte eines centrirten brechenden Systems; außerdem sind noch die beiden Hauptebenen gezeichnet. Der Objectpunkt sei a . Wir ziehen von diesem zur Axe AB des Systems eine Parallele, welche die zweite Hauptebene in b schneiden

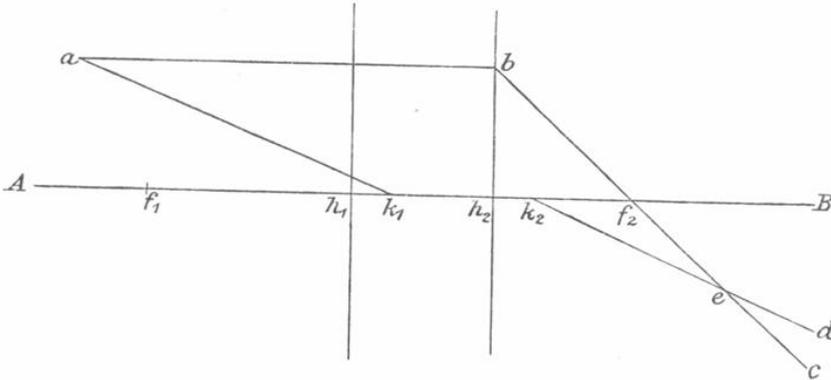


Fig. 45.

möge. Der Verlauf des Strahles in dem letzten Medium muß dann auf der durch diesen Punkt b und den hinteren Brennpunkt f_2 gezogenen Geraden bc liegen. Ferner ziehen wir den Strahl ak_1 zum ersten Knotenpunkt, dann liegt seine Fortsetzung im letzten Medium in der durch den hinteren Knotenpunkt k_2 zu ak_1 gezogenen Parallele k_2d , und der Schnittpunkt e dieser Parallele mit dem zuerst construirten Strahl bc ist der gesuchte Bildpunkt.

Es ist noch zu beachten, daß in der Wirklichkeit so große Divergenzwinkel der Strahlen mit der Achse des Systems, wie sie in der Figur gezeichnet sind, nicht vorkommen dürfen, wenn die hier benutzten Gesetze über den Gang der Strahlen noch gültig bleiben sollen.

Eine andere Methode zur Construction des Bildpunktes besteht darin, daß man die Bilder in den Knotenpunkten benutzt, was aber stets viel umständlicher ist; denn dann muß man die Größe der Bilder in den Knotenebenen im Verhältniß der Brennweiten reduciren.

Beide Methoden sind identisch bei denjenigen Systemen, in denen Hauptpunkte und Knotenpunkte zusammenfallen, d. h. bei welchen das erste und letzte Medium dasselbe Brechungsverhältniß besitzen.

§ 86. Die Lage der Cardinalpunkte
in einem centrirten System brechender Kugelflächen,
welches aus zwei andern centrirten Systemen
zusammengesetzt ist.

Da die Zahl der brechenden Flächen in einem centrirten optischen Systeme unbegrenzt ist, so kann man zwei derartige Systeme, welche dieselbe Axe haben, stets als ein einziges System auffassen. Wir wollen nunmehr die Lage der Cardinalpunkte des zusammengesetzten Systems bestimmen, wenn die Lage der Cardinalpunkte der beiden Theilsysteme bekannt ist. Da zur vollständigen Bestimmung eines Systems die Brennpunkte und Hauptpunkte ausreichen — denn wenn diese gefunden sind, so sind auch die Knotenpunkte gegeben — so wollen wir uns zunächst damit beschäftigen, aus den bekannten Brennpunkten und Hauptpunkten der beiden Theilsysteme die Brennpunkte und Hauptpunkte des gesammten Systems zu suchen.

Die Brennpunkte seien mit f_1 und f_2 , die Hauptpunkte mit h_1 und h_2 bezeichnet, und zwar sollen diese Bezeichnungen ungestrichen bleiben (f_1, f_2, h_1, h_2), wenn sie sich auf das resultirende System, hingegen einmal bez. zweimal gestrichen sein (f'_1, f'_2, h'_1, h'_2 bez. $f''_1, f''_2, h''_1, h''_2$), wenn sie sich auf das erste bez. zweite Theilsystem beziehen. Diese Bezeichnung ist auch in Figur 46 angewandt, wo

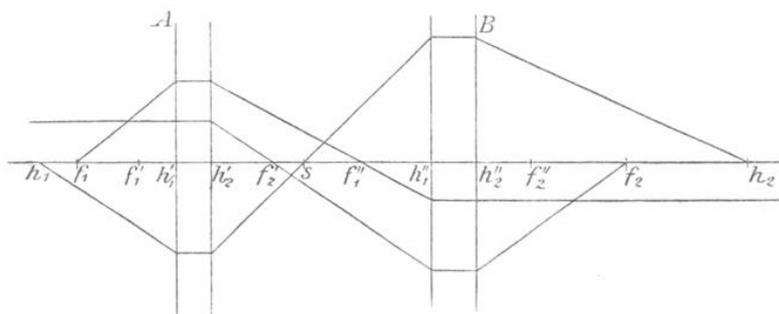


Fig. 46.

außerdem noch die beiden Theilsysteme durch Buchstaben, A und B , unterschieden sind. In völlig analoger Weise werden die Hauptbrennweiten der Systeme mit F_1 und F_2 bez. F'_1 und F'_2 bez. F''_1 und F''_2 bezeichnet. Der Abstand des ersten Hauptpunktes h'_1 des zweiten Theilsystems vom zweiten Hauptpunkt h'_2 des ersten Theilsystems sei d und werde positiv gerechnet, wenn, wie dieses in unserer Figur der Fall ist, h'_1 hinter h'_2 liegt.

Der vordere Brennpunkt f_1 des combinirten Systems ist das Bild, welches das Theilsystem A vom ersten Brennpunkte f_1'' des Systemes B entwirft; denn es ist klar, wie auch in Fig. 46 durch einen eingezeichneten Strahl angedeutet wird, daß Strahlen, welche von f_1 ausgehen, nach der Brechung im System A in f_1'' sich vereinigen, und nach der darauf erfolgenden Brechung im System B parallel der Axe verlaufen müssen. Damit entspricht aber f_1 der Definition des vorderen Brennpunktes für das combinirte System. Zur näheren Bestimmung der Lage von f_1 müssen wir nun unsere frühere Gleichung (331)

$$\frac{F_0'}{r_0} + \frac{F_m'}{r_m} = 1$$

auf das System A anwenden, indem wir daraus

$$r_0 = \frac{r_m \cdot F_0'}{r_m - F_m'}$$

ableiten, und nun beachten, daß hier

$$r_0 = f_1 h_1'$$

und

$$\begin{aligned} r_m &= h_2' \cdot f_1'' = h_2' h_1'' - f_1'' h_1' \\ &= d - F_1'' \end{aligned}$$

ist, und wir nach der jetzt angewandten Bezeichnung F_1' für F_0' und F_2' für F_m' zu setzen haben. Dann ergibt sich für die Lage des vorderen Brennpunktes des combinirten Systems

$$f_1 h_1' = \frac{(d - F_1'') \cdot F_1'}{d - F_1'' - F_2'} \quad (340)$$

Ebenso ist der hintere Brennpunkt f_2 des combinirten Systems das Bild, welches das zweite Theilsystem B von dem zweiten Brennpunkt f_2' des ersten Systems A entwirft. Durch eine der soeben durchgeführten völlig analoge Ableitung erhalten wir

$$f_2 h_2'' = \frac{(d - F_2') \cdot F_2''}{d - F_2' - F_1''} \quad (341)$$

Die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems sind zunächst dadurch charakterisirt, daß jeder das Bild des andern ist, und zwar bezieht sich der vordere auf den Gang der Lichtstrahlen im ersten Medium, der hintere auf den im letzten. Es muß daher in einem der mittleren Medien, demjenigen, das für das erste System A das letzte Medium und für das zweite System B das erste Medium ist, ein beiden Hauptpunkten h_1 und h_2 des combinirten Systems

gemeinsam conjugirter Vereinigungspunkt liegen. In unserer Figur 46 sei s dieser Punkt. Es ist dann also h_1 für das System A und h_2 für das System B der Bildpunkt von s . Ist nun σ die Größe eines Objectes in s , ferner β' die Größe seines vom System A in h_1 entworfenen Bildes, β'' die Größe seines vom System B in h_2 entworfenen Bildes, und setzen wir

$$\text{und} \left. \begin{aligned} h'_2 s &= x \\ s h'_1 &= y \end{aligned} \right\} \quad (342)$$

so ist nach der in Gleichung (332a) ausgesprochenen Regel

$$\text{und} \left. \begin{aligned} \frac{\beta'}{\sigma} &= \frac{F'_2}{F'_2 - x} \\ \frac{\beta''}{\sigma} &= \frac{F''_1}{F''_1 - y} \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

Da nun h_1 und h_2 die Hauptpunkte des combinirten Systems sind, und β'' das Bild von β' ist, so muß

$$\beta' = \beta''$$

sein, und wir erhalten demnach

$$\frac{F'_2}{F'_2 - x} = \frac{F''_1}{F''_1 - y} \quad (344)$$

oder

$$\frac{x}{F'_2} = \frac{y}{F''_1} \quad (344a)$$

Um also den Punkt im mittleren Medium zu finden, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems sind, theile man die Entfernung zwischen dem hinteren Hauptpunkte des ersten Systems und dem vorderen Hauptpunkte des zweiten Systems in zwei Theile, welche sich verhalten, wie die zu diesen beiden Hauptpunkten gehörigen Brennweiten der Theilsysteme. Je nachdem wir nun aus der Gleichung

$$x + y = d \quad (342a)$$

die sich aus den Gleichungen (342) unter Berücksichtigung der Definition von d sofort ergibt, in die Gleichung (344a) den Werth für x oder y substituiren, ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d \cdot F'_2}{F''_1 + F'_2} \\ y &= \frac{d \cdot F''_1}{F''_1 + F'_2} \end{aligned} \right\} \quad (344b)$$

Mit Hülfe dieses Werthes von x findet man nun die Entfernung $h'_1 h_1$ des ersten Hauptpunktes des combinirten Systems vor dem ersten Hauptpunkte des Theilsystemes A . Denn da der erste Hauptpunkt des combinirten Systems der Bildpunkt von s ist, so ist analog der bei der Bestimmung der Lage des ersten Brennpunktes des combinirten Systems abgeleiteten Gleichung (340) hier

$$h_1 h'_1 = \frac{x \cdot F'_1}{x - F'_2} \tag{345}$$

$$= \frac{d \cdot F'_1}{d - F'_1 - F'_2} \tag{345a}$$

Ebenso ergibt sich für die Entfernung $h_2 h''_2$ des zweiten Hauptpunktes des combinirten Systems hinter dem zweiten Hauptpunkte des Theilsystems B

$$h_2 h''_2 = \frac{y \cdot F''_2}{y - F''_1} \tag{346}$$

$$= \frac{d \cdot F''_2}{d - F''_2 - F''_1} \tag{346a}$$

Durch diese beiden Gleichungen (345a) und (346a) haben wir nun also auch die Lage der beiden Hauptpunkte des combinirten Systems gefunden, während uns die früheren Gleichungen (340) und (341) die Lage der beiden Brennpunkte des combinirten Systems ergaben. In allen vier Gleichungen findet die Beziehung auf den ersten Hauptpunkt des ersten, bez. den zweiten Hauptpunkt des zweiten Theilsystems statt. Wir können daher sehr einfach die beiden Hauptbrennweiten F'_1 und F'_2 des combinirten Systems finden. Denn es ist

$$\left. \begin{aligned} F'_1 &= h'_1 f_1 - h_1 h_1 \\ &= \frac{F''_1 \cdot F'_1}{F''_1 + F'_2 - d} \\ \text{und} \\ F'_2 &= h''_2 f_2 - h_2 h_2 \\ &= \frac{F''_2 \cdot F'_2}{F''_1 + F'_2 - d} \end{aligned} \right\} \tag{347}$$

Hat man die Brennpunkte und die Hauptpunkte des combinirten Systems gefunden, so sind die Knotenpunkte ebenfalls bestimmt, da der erste Knotenpunkt im Abstand der zweiten Hauptbrennweite hinter dem ersten Brennpunkte, und der hintere Knotenpunkt im Abstand der vorderen Hauptbrennweite vor dem hintern Brennpunkte liegt.

Man kann nun aber auch die beiden Knotenpunkte des combinirten Systems direct aufsuchen und dazu ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie für die Hauptpunkte, wobei man die in § 84 abgeleitete Eigenschaft der Knotenebenen benutzt, daß in ihnen die linearen Dimensionen zusammengehöriger Bilder sich umgekehrt verhalten, wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Analog den soeben benutzten Bezeichnungen seien jetzt in Fig. 47 k'_1 und k'_2 die Knotenpunkte des ersten Theilsystems A , k''_1 und k''_2

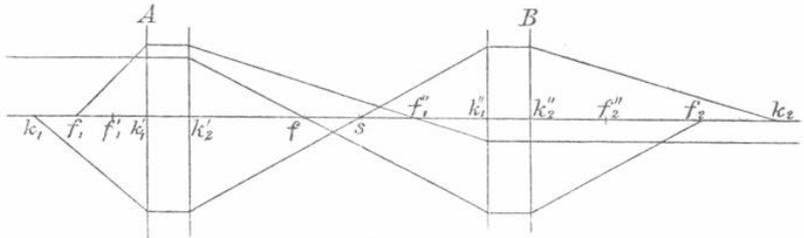


Fig. 47.

diejenigen des zweiten Theilsystems B und k_1 und k_2 die gesuchten Knotenpunkte des combinirten Systems. Es ist dann

$$\begin{aligned} k'_1 f'_1 &= F'_2 \\ k'_2 f'_2 &= F'_1 \\ k''_1 f''_1 &= F''_2 \\ k''_2 f''_2 &= F''_1 \end{aligned}$$

Ebenso wie die beiden Hauptpunkte haben auch die beiden Knotenpunkte des combinirten Systems einen gemeinsamen Bildpunkt im mittleren Medium, dieser sei wieder mit s bezeichnet, und es werde ferner wieder

$$\left. \begin{aligned} k'_2 s &= x \\ k''_1 s &= y \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

gesetzt. Es ist dann analog den obigen Gleichungen (345) und (346)

$$\left. \begin{aligned} k'_1 k_1 &= \frac{x \cdot F'_2}{x - F'_1} \\ k''_2 k_2 &= \frac{y \cdot F''_1}{y - F''_2} \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

Ist nun σ die lineare Größe eines Objectes im Punkte s des mittleren Mediums, β' die seines vom Theilsystem A in k_1 ent-

worfenen Bildes, β'' die seines vom Theilsystem B in k_2 entworfenen Bildes, so erhalten wir, da sich stets die Objectgröße zur Bildgröße verhält, wie der Abstand des Objectes vom vorderen Knotenpunkt zum Abstand des Bildes vom hinteren Knotenpunkt,

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} -\frac{\beta'}{\sigma} &= \frac{k'_1 k_1}{x} = \frac{F'_2}{x - F'_1} \\ -\frac{\beta''}{\sigma} &= \frac{k''_2 k_2}{y} = \frac{F''_1}{y - F''_2} \end{aligned} \right\} \quad (350)$$

Zufolge der oben erwähnten Eigenschaft der Knotenebenen ist aber, wenn n_1 das Brechungsverhältniß des ersten Mediums im System A , und n_2 das Brechungsverhältniß des letzten Mediums im System B ist

$$n_1 \cdot \beta' = n_2 \cdot \beta''$$

so daß also

$$\frac{n_1 \cdot F'_2}{x - F'_1} = \frac{n_2 \cdot F''_1}{y - F''_2} \quad (351)$$

Nun ist aber für das Theilsystem A , wenn wir mit v das Brechungsverhältniß des mittleren Mediums bezeichnen, nach Gleichung (338)

$$n_1 \cdot F'_2 = v \cdot F'_1$$

und für das Theilsystem B

$$n_2 \cdot F''_1 = v \cdot F''_2$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (351) ein, so ergibt sich

$$\frac{F'_1}{x - F'_1} = \frac{F''_2}{y - F''_2} \quad (351a)$$

oder

$$\frac{x}{F'_1} = \frac{y}{F''_2} \quad (351b)$$

Diese Gleichung, welche die Lage des Punktes s bestimmt, weicht nun aber von der bei der Aufsuchung der Hauptpunkte des combinirten Systems gefundenen Gleichung (344a) nur dadurch ab, daß in jedem der beiden Theilsysteme die andere Hauptbrennweite benutzt ist. Die weitere Fortsetzung der Rechnung würde also mit der für die Hauptpunkte durchgeführten bis auf die jedesmalige Vertauschung der beiden Hauptbrennweiten in den Theilsystemen übereinstimmen, weshalb wir sie hier nicht weiter verfolgen wollen.

§ 87. Die Eigenschaften eines aus zwei brechenden Kugelflächen bestehenden Systems.

Ein aus zwei brechenden Kugelflächen bestehendes System hat nicht nur deshalb besonderes Interesse und besondere Bedeutung, weil es das denkbar einfachste zusammengesetzte System ist, sondern dadurch, daß man, wie wir weiter unten am Schlusse dieses Paragraphen sehen werden, für jedes beliebige centrirte System ein solches aus zwei Kugelflächen bestehendes substituiren können, ohne daß die Lage und Gröfse der Bilder geändert wird.

Bevor wir die Lage der Cardinalpunkte in einem solchen System nach den im vorigen Paragraphen angegebenen Regeln bestimmen können, müssen wir erst die Lage dieser Punkte bei einer einfachen brechenden Kugelfläche kennen.

Die Brennpunkte haben wir in § 73 schon eingehend besprochen und brauchen daher nur auf die dort abgeleiteten Ergebnisse zu verweisen.

Die Hauptpunkte und die durch sie senkrecht zur Axe gelegten Hauptebenen sind dadurch charakterisirt, daß die Bilder in den Hauptebenen gleich gerichtet und gleich groß sind. Nach Gleichung (315a) kann dieses aber bei endlichen Werthen der Brennweiten nur dann der Fall sein, wenn $r_0 = 0$ und $r_1 = 0$, d. h. wenn Objectpunkt und Bildpunkt in den Punkt fallen, in dem die brechende Fläche die Axe schneidet. Dieses muß aber nach den Gleichungen (300b) und wie wir bereits am Schlusse von § 73 sahen, stets gleichzeitig eintreten. Es ergibt sich also, daß bei einer einfachen brechenden Fläche die beiden Hauptpunkte zusammenfallen und zwar in dem Schnittpunkt der brechenden Fläche mit der Axe. Die im vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung der gegenseitigen Lage der beiden combinirten Systeme durch den mit d bezeichneten Abstand des hinteren Hauptpunktes des ersten Systems von dem vorderen Hauptpunkt des zweiten Systems vereinfacht sich bei der Zusammensetzung zweier einfachen brechenden Kugelflächen zu einem System nun dahin, daß d den Abstand der beiden Flächen auf der Axe von einander bezeichnet.

Auch die beiden Knotenpunkte, welche dadurch definirt sind, daß jeder Strahl, der vor der Brechung durch den ersten geht, nach der Brechung durch den zweiten geht und dabei seiner ersten Richtung parallel bleibt, fallen bei einer brechenden Fläche in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Kugel, zusammen.

Denn ein Strahl, der im ersten Medium auf den Mittelpunkt der Kugel gerichtet ist, geht ungebrochen durch die Fläche hindurch, geht also auch im zweiten Medium durch den Mittelpunkt und ist seiner früheren Richtung parallel.

Bevor wir nun von dieser Lage der Cardinalpunkte bei einer einfachen brechenden Fläche Gebrauch machen, wollen wir noch darauf hinweisen, daß hier die in § 85 dargestellten Methoden der Construction des Strahlenganges und des Bildpunktes sich wesentlich dadurch vereinfachen, daß erstens jeder Punkt in der ersten Hauptebene sein eigenes Bild ist und man nicht erst den zugehörigen in der zweiten Hauptebene zu suchen hat, und zweitens dadurch, daß der nach dem ersten Knotenpunkte gehende Strahl unmittelbar in seiner eigenen Verlängerung weiter geht und man nicht erst eine Parallele zu ihm durch den zweiten Knotenpunkt zu legen hat.

Es sei nun ρ' der Radius der ersten, ρ'' der Radius der zweiten der zu combinirenden Flächen, n_1 das Brechungsverhältniß des ersten, v des mittleren und n_2 des letzten Mediums. Benutzen wir für die Brennweiten die Bezeichnungen des § 86, so haben wir zufolge den Gleichungen (298) für die erste Fläche

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= \frac{n_1 \cdot \rho'}{v - n_1} \\ F_2' &= \frac{v \cdot \rho'}{v - n_1} \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

und für die zweite Fläche

$$\left. \begin{aligned} F_1'' &= \frac{v \cdot \rho''}{n_2 - v} \\ F_2'' &= \frac{n_2 \cdot \rho''}{n_2 - v} \end{aligned} \right\} \quad (353)$$

Da hier die Hauptpunkte der Theilsysteme in die betreffenden Flächen fallen, so werden jetzt bei Anwendung der Gleichungen (345a) und (346a) die Orte der Hauptpunkte des combinirten Systems in der Weise bestimmt, daß der Abstand des vorderen Hauptpunktes von der ersten Fläche an nach vorne, der des hinteren Hauptpunktes von der zweiten Fläche an nach hinten gerechnet ist. Wir wollen diese Abstände jetzt mit h_1 und h_2 bezeichnen; dann ergibt sich aus den Gleichungen (345a) und (346a) durch Einsetzen der in den Gleichungen (352) und (353) erhaltenen Werthe nach einigen Umformungen

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{n_1(v - n_2) \cdot d \cdot \rho'}{N} \\ h_2 &= \frac{n_2(n_1 - v) \cdot d \cdot \rho''}{N} \end{aligned} \right\} \quad (354)$$

wobei der Kürze wegen

$$N = v \cdot (n_2 - v) \cdot \rho' + v \cdot (v - n_1) \cdot \rho'' - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d \quad (355)$$

gesetzt ist.

Die Entfernung der beiden Hauptpunkte des combinirten Systems, welche mit H bezeichnet werde, ist nun gleich der Summe dieser beiden Abstände h_1 und h_2 vermehrt um den auf der Axe gemessenen Abstand d der beiden brechenden Flächen. Es ist also

$$\begin{aligned} H &= h_1 + h_2 + d \\ &= \frac{n_1(v - n_2) \cdot d \cdot \rho'}{N} + \frac{n_2(n_1 - v) \cdot d \cdot \rho''}{N} + d \\ &= d \cdot \frac{(v - n_1)(n_2 - v) \cdot (\rho' - \rho'' - d)}{N} \end{aligned} \quad (356)$$

Dieser Werth ist positiv, wenn der erste Hauptpunkt vor dem zweiten liegt. In ähnlicher Weise, wie wir in den Gleichungen (354) den Ort der beiden Hauptpunkte aus den früher erhaltenen Gleichungen fanden, lassen sich auch die beiden Hauptbrennweiten des combinirten Systems vermittels der Gleichungen (347) berechnen. Setzen wir in diese die Werthe für die Brennweiten der beiden einzelnen brechenden Flächen ein, so ergibt sich nach einiger Umrechnung

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 \cdot v \cdot \rho' \cdot \rho''}{N} \\ F_2 &= \frac{n_2 \cdot v \cdot \rho' \cdot \rho''}{N} \end{aligned} \right\} \quad (357)$$

wobei N wieder den durch die Gleichung (355) angegebenen Werth hat.

Nehmen wir nun an, das die beiden brechenden Flächen denselben Krümmungsradius ρ haben, so das also

$$\rho = \rho' = \rho''$$

zu setzen ist, dann erhalten wir für den Abstand der beiden Hauptpunkte von den brechenden Flächen

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{n_1(v - n_2) \cdot d \cdot \rho}{v \cdot (n_2 - n_1) \cdot \rho - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d} \\ h_2 &= \frac{n_2 \cdot (n_1 - v) \cdot d \cdot \rho}{v \cdot (n_2 - n_1) \cdot \rho - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d} \end{aligned} \right\} \quad (358)$$

und für die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander

$$H = -d^2 \cdot \frac{(v - n_1)(n_2 - v)}{v \cdot (n_2 - n_1) \cdot \rho - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d} \quad (359)$$

Für die Hauptbrennweiten ergibt sich bei der gleichen Annahme

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 \cdot v \cdot \rho^2}{v \cdot (n_2 - n_1) \cdot \rho - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d} \\ F_2 &= \frac{n_2 \cdot v \cdot \rho^2}{v \cdot (n_2 - n_1) \cdot \rho - (n_2 - v) \cdot (v - n_1) \cdot d} \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

Lassen wir nun den Abstand der beiden gleich gekrümmten Flächen immer kleiner werden, bis er endlich verschwindet, so haben wir $d = 0$ zu setzen. Dann folgt aus den Gleichungen (358)

$$h_1 = h_2 = 0 \quad (361)$$

und aus der Gleichung (359), was aber auch unmittelbar ersichtlich ist,

$$H = 0 \quad (362)$$

Für die Brennweiten erhalten wir in diesem Grenzfall

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 \rho}{n_2 - n_1} \\ F_2 &= \frac{n_2 \cdot \rho}{n_2 - n_1} \end{aligned} \right\} \quad (363)$$

Die Lage der Brennpunkte und Hauptpunkte ist also genau dieselbe, als wäre nur eine brechende Fläche vorhanden. Der Werth des Brechungsverhältnisses v der unendlich dünnen mittleren Schicht ist völlig ohne Einfluss auf die Eigenschaften des Systems. Wir können uns demnach an jeder brechenden Fläche eine unendlich dünne, durch concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht von beliebigem Brechungsverhältniß eingeschoben denken, ohne daß die Brechung der Strahlen dadurch geändert wird.

Es ist dieses ein Satz, der bei der Behandlung verwickelt zusammengesetzter centrirter Systeme oftmals zur Erleichterung der Ueberlegung und Vereinfachung der Schlusfolgerungen benutzt werden kann.

Bevor wir nun zu einer andern speciellen Annahme über die aus zwei brechenden Kugelflächen bestehenden optischen Systeme übergehen, wollen wir noch kurz die Frage der gegenseitigen Substitution verschiedener optischer Systeme besprechen. Es ist hier der geeignete Ort dazu, weil für solche Substitutionen Systeme mit zwei brechenden Flächen besondere Bedeutung haben.

Aus dem in den §§ 80—85 Dargelegten ergab sich, daß die GröÙe und Lage der Bilder in einem centrirten Systeme nur von der Lage der Brennpunkte und der Hauptpunkte oder der Knotenpunkte abhängen; denn wenn eines dieser beiden letztgenannten Punktpaare gegeben ist, so ist damit auch das andere Paar gegeben. Man kann daher ohne Aenderung der Lage und GröÙe der Bilder zwei optische Systeme für einander substituiren, deren Brennpunkte und Hauptpunkte dieselbe Lage haben. Da das Verhältniß der Brechungsvermögen des ersten und letzten Mediums nicht geändert werden kann, ohne das Verhältniß der Hauptbrennweiten zu einander zu ändern, so wollen wir voraussetzen, daß das erste und letzte Medium bei einer solchen Substitution ungeändert bleiben. Dann braucht nur die eine Hauptbrennweite und der Abstand der Hauptpunkte von einander in dem einen System gleich den entsprechenden GröÙen des andern gemacht zu werden, um die beiden Systeme für einander substituiren zu können. In einem Systeme von nur zwei brechenden Flächen würde man zur Erfüllung dieser Bedingungen über vier GröÙen ρ' , ρ'' , ν und d verfügen können. Es kann daher für jedes beliebige centrirte System brechender Kugelflächen ein System von nur zwei solchen Flächen gesetzt werden, welches ebenso groÙe und ebenso gelegene Bilder entwirft wie jenes, und im Allgemeinen kann man dabei sogar immer noch zwei Bedingungen für das System von zwei Flächen aufstellen und erfüllen, z. B. daß ρ und ρ' gegebene Werthe haben, oder daß das mittlere Medium ein gegebenes Brechungsverhältniß ν und eine gegebene Dicke d habe u. s. w.

§ 88. Die Lage der Cardinalpunkte in den Linsen.

Bei den gewöhnlich benutzten optischen Instrumenten, Fernrohren, Mikroskopen u. s. w. ist, worauf wir oben schon hingewiesen haben, das erste und letzte Medium des Systems dasselbe, es ist nämlich die Luft. Die einzelnen Bestandtheile, aus denen diese Instrumente zusammengesetzt sind, werden Linsen genannt. Man bezeichnet als Linsen solche optischen Systeme, welche aus zwei brechenden Flächen bestehen, und bei denen das erste und dritte Medium das gleiche ist. In der praktischen Optik, insbesondere derjenigen der Augenärzte, werden auch wohl Cylinderflächen als brechende Flächen benutzt, z. B. zur Erzeugung einer Lichtlinie bei der Spectralanalyse der Gestirne oder zur Correctur des sogenannten Astigmatismus der Augen u. s. w. Wir wollen hier aber von der

Besprechung solcher Systeme mit cylindrischen Flächen gänzlich absehen, da sie nicht unter die centrirten optischen Systeme einzureihen sind. Bei der Construction der optischen Instrumente werden die Linsen nun oftmals vermittels durchsichtiger Kittsubstanzen behufs Achromatisirung zu complicirteren Systemen verbunden, die man dann auch als Linsen bezeichnet. Auch diese wollen wir von unserer Betrachtung ausschließen, so daß wir unter Linsen also ausschließlich Systeme von zwei kugeligen Flächen verstehen, bei welchen das erste und letzte Medium dasselbe Brechungsverhältniß haben.

Wir setzen also

$$n = n_1 = n_2 \tag{364}$$

Dann werden die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und es ergibt sich aus den Gleichungen (357)

$$F = F_1 = F_2 = \frac{n \cdot v \cdot \rho' \cdot \rho''}{(v - n)[v(\rho'' - \rho') + (v - n) \cdot d]} \tag{365}$$

Die Entfernungen der Hauptpunkte, welche hier mit den Knotenpunkten zusammenfallen, von den Linsenflächen, sind nach den Gleichungen (354)

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{n \cdot d \cdot \rho'}{v \cdot (\rho'' - \rho') + (v - n) \cdot d} \\ h_2 &= - \frac{n \cdot d \cdot \rho''}{v \cdot (\rho'' - \rho') + (v - n) \cdot d} \end{aligned} \right\} \tag{366}$$

Nach der Festsetzung, die wir früher über diese Abstände gemacht haben, sind sie hier als positiv zu rechnen, wenn sie in dem ersten bez. letzten Medium, d. h. also, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch außerhalb der Linse liegen.

Die Entfernung der Hauptpunkte von einander ist hier nach Gleichung (356)

$$H = d \cdot \frac{(v - n) \cdot (d + \rho'' - \rho')}{v \cdot (\rho'' - \rho') + (v - n) \cdot d} \tag{367}$$

Der damaligen Ableitung gemäß ist diese Entfernung positiv, wenn der erste Hauptpunkt vor dem zweiten liegt.

Der Punkt auf der Axe, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte (oder die hier mit diesen zusammenfallenden Knotenpunkte) sind, heißt das optische Centrum der Linse. Die Lage dieses Punktes haben wir in § 86, wo wir zwei beliebige centrirte optische Systeme combinirten, ausführlich erörtert und dort gefunden, daß der Ab-

stand dieses Punktes von dem zweiten Hauptpunkte des ersten Systems sich zu seinem Abstand von dem ersten Hauptpunkte des zweiten Systems verhält, wie die zu diesen beiden Hauptpunkten gehörigen Brennweiten der combinirten Systeme. Nun fallen hier, wo zwei einfache brechende Flächen combinirt sind, diese Hauptpunkte in die Flächen selbst, und aus den Gleichungen (352) und (353) folgt, daß bei Berücksichtigung der Gleichung (364) die absoluten Werthe der betreffenden Brennweiten F_2' und F_1'' sich verhalten, wie die Krümmungsradien ρ' und ρ'' . Es ergibt sich demnach, daß bei einer Linse das optische Centrum zwischen den beiden brechenden Flächen liegt, und daß seine Entfernungen von diesen Flächen den Krümmungsradien dieser Flächen proportional sind. Wir wollen nunmehr die Definition einer Linse noch weiter durch die Annahme einschränken, daß $\nu > n$ und daß der Abstand d kleiner als der kleinere der beiden Krümmungsradien ρ' und ρ'' sei. Diese Annahmen entsprechen den in der Wirklichkeit fast ausschließlich vorkommenden Verhältnissen; denn dort bildet die Luft das erste und letzte Medium, und die Dicke der Linse ist gewöhnlich sehr gering.

Da solche Linsen eine sehr ausgedehnte praktische Anwendung finden, so wollen wir hier noch ihre verschiedenen Formen eingehender besprechen.

1. Biconvexe Linsen, bei denen beide Flächen convex, also ρ' positiv und ρ'' negativ ist. Die Gleichung (365) ergibt dann, daß die Brennweite F stets positiv ist, während aus den Gleichungen (366) folgt, daß die Abstände h_1 und h_2 der Hauptpunkte von den brechenden Flächen stets negativ, ihrem absoluten Betrage nach aber nie größer als d sind. Die Hauptpunkte liegen demnach stets innerhalb der Linse. Ihr nach der Gleichung (367) berechneter gegenseitiger Abstand hat hier einen positiven Werth, so daß also der erste Hauptpunkt stets vor dem zweiten liegt.

2. Planconvexe Linsen bilden einen Grenzfall der biconvexen Linsen, indem bei ihnen einer der Krümmungsradien unendlich groß ist. Es möge $\rho' = \infty$ sein, d. h. die Linse wendet den auffallenden Strahlen die plane Seite zu. Bevor wir diesen Werth einführen, müssen wir diejenigen Ausdrücke für Brennweite u. s. w., in welchen ρ' im Zähler und Nenner vorkommt, in geeigneter Weise umformen. Wir erhalten dann

$$F = \frac{\nu n \rho''}{(\nu - n) \left[\nu \cdot \left(\frac{\rho''}{\rho'} - 1 \right) \right] + (\nu - n) \cdot \frac{d}{\rho'}} \quad (365a)$$

$$H = d \cdot \frac{(v - n) \cdot \left(\frac{d}{\rho'} + \frac{\rho''}{\rho'} - 1 \right)}{v \cdot \left(\frac{\rho''}{\rho'} - 1 \right) + (v - n) \cdot \frac{d}{\rho'}} \quad (367a)$$

während

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{n \cdot d}{v \cdot \left(\frac{\rho''}{\rho'} - 1 \right) + (v - n) \cdot \frac{d}{\rho'}} \\ h_2 &= - \frac{n \cdot d \cdot \rho''}{v \cdot (\rho'' - \rho') + (v - n) \cdot d} \end{aligned} \right\} \quad (366a)$$

nicht umgeformt zu werden braucht. Setzen wir nun

$$\rho' = \infty \quad (368)$$

so ergibt sich

$$F = - \frac{n \rho''}{v - n} \quad (369)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= - d \cdot \frac{n}{v} \\ h_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

und

$$H = d \cdot \frac{v - n}{v} \quad (371)$$

Aus diesen Werthen folgt nun unmittelbar, da ρ'' negativ ist, daß die Brennweite F auch bei den planconvexen Linsen stets positiv ist. Der erste Hauptpunkt liegt auch hier, da $v > n$ sein soll, innerhalb der Linse, während der zweite Hauptpunkt in die gekrümmte Fläche fällt.

Setzen wir $\rho'' = \infty$, so daß also die convexe Seite den ankommenden Strahlen zugekehrt ist, so erhalten wir in ganz analoger Weise:

$$F = \frac{n \cdot \rho'}{v - n} \quad (372)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 0 \\ h_2 &= - d \cdot \frac{n}{v} \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

und

$$H = d \cdot \frac{v - n}{v} \quad (374)$$

Die Brennweite ist also auch hier positiv; hier fällt aber der erste

Hauptpunkt in die gekrümmte Fläche, während der zweite im Innern der Linse liegt.

Das optische Centrum einer planconvexen Linse fällt in den Schnittpunkt der gekrümmten Fläche mit der Axe, da der Krümmungsradius dieser Fläche unendlich klein ist gegenüber dem Krümmungsradius der ebenen Fläche.

3. Biconcave Linsen, bei denen beide Flächen concav nach außen sind; es ist demnach ρ' negativ, ρ'' positiv. Unsere Gleichung (365) ergibt hier einen negativen Werth für die Brennweite F . Die Abstände h_1 und h_2 der Hauptpunkte von den brechenden Flächen sind ebenfalls negativ, und zwar ebenso, wie bei den biconvexen Linsen ihrem absoluten Betrage nach niemals größer als d ; die Hauptpunkte liegen also stets innerhalb der Linse, und ihr Abstand von einander ist nach Gleichung (367) positiv, d. h. der erste liegt vor dem zweiten.

4. Planconcave Linsen bilden einen Grenzfall der biconcaven, indem hier der Krümmungsradius der einen brechenden Fläche unendlich groß wird. Wie aus einer der bei den planconvexen Linsen durchgeführten völlig analogen Betrachtung hervorgeht, haben sie stets eine negative Brennweite, und es fällt stets einer der beiden Hauptpunkte in die gekrümmte Fläche, während der andere im Innern der Linse liegt.

5. Concavconvexe Linsen; bei ihnen sind beide Radien entweder positiv oder negativ. Wir wollen zunächst das erstere annehmen, d. h. voraussetzen, daß beide brechende Flächen dem auffallenden Lichte die convexe Seite zuwenden. Aus Gleichung (365) folgt, daß die Brennweite dann positiv ist, wenn

$$v.(\rho'' + d - \rho') > n.d \quad (375)$$

daß sie unendlich, wenn

$$v.(\rho'' + d - \rho') = n.d \quad (376)$$

und negativ, wenn

$$v.(\rho'' + d - \rho') < n.d \quad (377)$$

Nun bezeichnet aber $\rho'' + d - \rho'$ den Abstand des Krümmungsmittelpunktes der zweiten Fläche von dem der ersten nach hinten gerechnet. Ist die Ungleichung (375) erfüllt, so ist nothwendig dieser Abstand $\rho'' + d - \rho'$ positiv, da d immer positiv gerechnet wird; es muß also dann der Krümmungsmittelpunkt der zweiten Fläche hinter dem der ersten liegen, es wird dann aber stets die Linse nach dem Rande zu dünner. Wir können also sagen:

Hat eine concavconvexe Linse eine positive Brennweite, so wird sie nach dem Rande zu dünner. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig; denn es können auch positive Werthe von $\varrho'' + d - \varrho'$ vorkommen, welche die Ungleichung (375) nicht erfüllen, wie z. B. der die Gleichung (376) erfüllende Werth.

Ist der Abstand $\varrho'' + d - \varrho'$ negativ, liegt also der Krümmungsmittelpunkt der zweiten Fläche vor demjenigen der ersten Fläche, wobei die Linse nach dem Rande zu stets dicker wird, so ist die Ungleichung (377) immer erfüllt, so daß also dann die Linse immer eine negative Brennweite hat. Wir können also sagen: Wird eine concavconvexe Linse nach dem Rande zu dicker, so hat sie eine negative Brennweite. Auch hier ist die Umkehrung des Satzes nicht zulässig, denn die Ungleichung (377) kann auch durch positive Werthe für $\varrho'' + d - \varrho'$ erfüllt werden.

Aus den Gleichungen (366) für die Abstände h_1 und h_2 der beiden Hauptpunkte von den Linsenflächen ergibt sich nun hier unter Beachtung der soeben besprochenen Werthe der Brennweiten, daß der erste Hauptpunkt vor der convexen Seite der Linse liegt, wenn die Brennweite positiv ist, und daß er in das Unendliche fällt, wenn die Brennweite unendlich wird. Ist die Brennweite negativ, so liegt der erste Hauptpunkt hinter der convexen Fläche der Linse, ebenfalls unendlich weit, wenn die Brennweite unendlich groß ist. Er rückt um so näher an die convexe Fläche heran, je kleiner ϱ' und je größer ϱ'' . Ist ϱ'' unendlich groß, so wird $h_1 = 0$, d. h. der erste Hauptpunkt fällt in die convexe Fläche; es ist in diesem Falle die Linse aber in eine planconvexe übergegangen, und das hier erhaltene Resultat stimmt auch mit dem unter 2) für diese Linsen abgeleiteten überein.

Der zweite Hauptpunkt liegt vor der concaven Fläche der Linse, d. h. auf ihrer convexen Seite, wenn die Brennweite der Linse positiv ist; er liegt hinter dieser Fläche, wenn die Brennweite negativ ist; er rückt ebenfalls ins Unendliche bei unendlich großer Brennweite.

Der Abstand H der beiden Hauptpunkte ist durch die Gleichung (367) gegeben. Die verschiedenen Werthe desselben für alle hier möglichen Fälle wollen wir nicht weiter erörtern, sondern nur auf einen besonderen Fall hinweisen. Wenn nämlich die beiden brechenden Flächen der Linse concentrischen Kugelschalen angehören, so fallen, da dann

$$d + \varrho'' - \varrho' = 0 \quad (378)$$

ist, beide Hauptpunkte zusammen, und zwar liegen sie, wie sich

aus den Werthen von h_1 und h_2 in den Gleichungen (366) unmittelbar unter Berücksichtigung der Gleichung (378) ergibt, in dem gemeinsamen Krümmungsmittelpunkte der Linsenflächen.

Der zweite Fall, daß beide Radien der brechenden Flächen negativ sind, ergibt sich aus dem bisher Abgeleiteten sofort, wenn wir die erste Seite der Linse zur zweiten machen.

§ 89. Die Lage und GröÙe der von Linsen erzeugten Bilder.

In § 83, wo wir die Lage der Bilder in beliebigen centrirten Systemen untersuchten, fanden wir die Gleichung (331)

$$\frac{F_0}{r_0} + \frac{F_m}{r_m} = 1$$

in der F_0 und F_m die Brennweiten des Systems, und r_0 bez. r_m die Abstände des Objectes bez. des Bildes von den beiden Hauptebenen bezeichnen. Nun sind aber bei Linsen die beiden Brennweiten einander gleich, wir haben sie mit F bezeichnet. Führen wir an Stelle der Indices 0 und m die von uns bei den Linsen benutzten Indices 1 und 2 ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{F} \quad (379)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{r_2 \cdot F}{r_2 - F} \\ r_2 &= \frac{r_1 \cdot F}{r_1 - F} \end{aligned} \right\} \quad (380)$$

Die in demselben Paragraphen über die BildgröÙe abgeleitete Gleichung (332b) formt sich in analoger Weise für Linsen um in

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F}{r_2 - F} = \frac{r_1 - F}{F} \quad (381)$$

Nennen wir nun hier x_1 bez. x_2 die Abstände zweier conjugirter Vereinigungspunkte von den Brennpunkten, so daß also

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 - F \\ x_2 &= r_2 - F, \end{aligned}$$

so erhalten wir den früheren Gleichungen (334) und (334a) analog

$$x_1 \cdot x_2 = F^2 \quad (382)$$

und

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F}{x_2} = \frac{x_1}{F} \quad (383)$$

Hiernach ist die Brennweite der Linse in allen Fällen die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Bildabständen x_1 und x_2 von den Brennpunkten. Es muß daher von ihnen stets einer größer als F , der andere kleiner als F sein, wenn nicht beide gleich $-F$ oder $+F$ sind. Ferner müssen x_1 und x_2 immer gleichzeitig positiv oder negativ sein, d. h. wenn das Object vor dem ersten Brennpunkt liegt, liegt das Bild hinter dem zweiten und umgekehrt.

Bei Linsen mit positiver Brennweite (Sammellinsen) liegt der erste Brennpunkt vor der Linse, der zweite dahinter. Dafs die Brennpunkte nicht in die Linse fallen können, ergibt sich aus den Gleichungen (365) und (366) unter Berücksichtigung der hier gemachten Annahme, dafs stets $v > n$ und d kleiner als jeder der Werthe ρ' und ρ'' sein soll. Bei einem positiven Werth von x_1 , der also vorhanden ist, wenn das Object weiter von der Vorderseite der Linse entfernt ist, als der erste Brennpunkt, liegt das Bild hinter der Linse weiter entfernt als der zweite Brennpunkt und ist nach Gleichung (383) umgekehrt. Dabei ist die Entfernung x_2 vom zweiten Brennpunkte ebenso wie die Gröfse β_2 des Bildes umgekehrt proportional der Entfernung x_1 des Objectes vom ersten Brennpunkte. Es wird $x_2 = x_1$ und $\beta_2 = -\beta_1$, wenn $x_1 = F$, d. h. wenn das Object um die doppelte Brennweite von der Linse absteht.

Bei negativen Werthen von x_1 , welche absolut kleiner als F sind, liegt das Object zwischen dem ersten Brennpunkt und der Linse (oder genauer zwischen dem ersten Brennpunkte und dem ersten Hauptpunkte). Dann liegt, da nun auch x_2 negativ, aber absolut genommen größer als F sein muß, das aufrechte vergrößerte Bild vor der Linse (genauer vor dem zweiten Hauptpunkte), ist also virtuell. Dies entspricht dem Falle, wo die Linse als Loupe gebraucht wird.

Für $x_1 = -F$ sind Object und Bild gleich grofs und gleichgerichtet und liegen in den beiden Hauptebenen der Linse.

Wenn x_1 negativ, aber absolut genommen größer als F ist, d. h. wenn wir ein virtuelles hinter der Linse (genauer hinter dem vorderen Hauptpunkte) gelegenes Object haben, so muß x_2 ebenfalls negativ, aber absolut genommen kleiner als F sein. Das reelle, verkleinerte und aufrechte Bild liegt dann zwischen der Linse (genauer dem hinteren Hauptpunkte) und ihrem zweiten Brennpunkte.

Für Linsen mit negativer Brennweite (Zerstreuungslinsen) liegt der erste Brennpunkt hinter, der zweite vor der Linse.

Liegt das Object vor der Linse (d. h. vor dem vorderen Hauptpunkt), ist also x_1 positiv und größer, als der absolute Betrag der Brennweite, so muß x_2 ebenfalls positiv sein und zwar kleiner als der absolute Betrag der Brennweite. Das aufrechte und verkleinerte Bild liegt also vor der Linse (d. h. vor dem hinteren Hauptpunkt), aber hinter dem zweiten, vorne gelegenen Brennpunkt, ist also virtuell.

Für $x_1 = -F$ fallen Object und Bild in die beiden Hauptebenen; beide sind gleich groß und gleich gerichtet.

Einem virtuellen Bilde hinter (dem vorderen Hauptpunkt) der Linse, aber vor dem ersten Brennpunkt, entspricht ein Werth von x_1 , der positiv und seinem absoluten Betrage nach kleiner als F ist. Dann ist x_2 ebenfalls positiv und seinem absoluten Betrage nach größer als F , d. h. das Bild liegt hinter (dem hinteren Hauptpunkt) der Linse, ist also reell, dabei aufrecht und vergrößert, letzteres um so mehr, je näher das virtuelle Object an den hinteren, virtuellen, Brennpunkt rückt.

Wenn endlich x_1 negativ wird, d. h. wenn das virtuelle Object hinter dem ersten, hinten gelegenen Brennpunkt liegt, wird auch x_2 negativ. Das virtuelle Bild befindet sich dann vor dem, vorne gelegenen, zweiten Brennpunkt, und ist umgekehrt. Es ist dieser der in dem GALLÄ'schen Fernrohr eintretende Fall.

Vierter Abschnitt.

Die Helligkeit der optischen Bilder.

§ 90. Das Reciprocitätsgesetz der Beleuchtungsintensität.

Neben der Lage und der Größe der durch centrirte optische Systeme erzeugten Bilder kommt für die praktische Benutzung derselben wesentlich ihre Helligkeit in Betracht.

Um die für die Helligkeit der Bilder geltenden Beziehungen ableiten zu können, müssen wir ein ganz allgemeines Gesetz beachten, welches sich bezieht auf die Stärke der gegenseitigen Beleuchtung zweier verschwindend kleinen Flächenelemente von der Ausdehnung a und b , die sich in einem völlig durchsichtigen Medium in der Entfernung r von einander befinden. Die auf ihnen er-

richteten Normalen mögen mit der sie verbindenden geraden Linie die Winkel α bez. β bilden. Sendet dann a mit der Helligkeit H Licht aus, wo also H die in einer beliebigen Einheit gemessene Lichtmenge bezeichnet, welche von der Flächeneinheit ausgeht, so ist die in derselben Einheit gemessene Lichtmenge L , welche von a auf b fällt

$$L = \frac{H \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}{r^2} \quad (384)$$

Da dieser Werth von L nach a und b , sowie nach α und β symmetrisch ist, so ist sofort ersichtlich, daß dieselbe Lichtmenge von b auf a fallen würde, wenn b mit der Helligkeit H Licht aussenden würde, sonst aber alle Verhältnisse dieselben sind.

Wir wollen uns nun zwischen den beiden Flächenelementen a und b ein centrirtes System brechender Kugelflächen eingeschaltet denken und zugleich der Vereinfachung der Rechnung halber einige besondere Annahmen machen. Erstens mögen beide Flächenelemente a und b senkrecht gegen die Axe dieses Systems gerichtet sein und auch der Axe nahe liegen; es werden dann die beiden in der Gleichung (384) vorkommenden Cosinuswerthe gleich 1. Ferner sollen die Verluste, welche die Strahlen einmal durch Absorption in den verschiedenen Medien und zweitens an den brechenden Flächen dadurch erleiden, daß neben der Brechung stets auch noch eine Reflexion stattfindet, vernachlässigt werden, und wenn es spiegelnde Flächen sind, die wir ja nach den in § 74 gemachten Auseinandersetzungen als Theile eines brechenden Systems auffassen können, so sollen bei dieser Reflexion die auffallenden Strahlen in voller Intensität zurückgeworfen werden.

Zunächst sei nun vorausgesetzt, daß b da liege, wo durch das brechende System das Bild von a entworfen wird, und daß es auch in seiner Größe der Größe dieses Bildes völlig entspreche. Dann fällt alles Licht, welches von a aus durch die brechenden Flächen dringt, auf b , und umgekehrt fällt alles auf a , was von b aus durch die brechenden Flächen dringt.

Es sei nun in Figur 48 AB die optische Axe des brechenden Systems, H_1 sein erster, H_2 sein zweiter Hauptpunkt; mm' sei der Durchschnitt des von a einfallenden Strahlenbündels in der ersten Hauptebene, nn' derselbe in der zweiten. Die Grundfläche des Strahlenbündels in der ersten Hauptebene ist congruent derselben in der zweiten; ihre gemeinsame Größe sei mit Φ bezeichnet. Ist dann H die Helligkeit, mit der a Licht aussendet, so ist nach

Gleichung (384) die Lichtmenge, welche auf die Grundfläche des Strahlenkegels mm' fällt

$$L_1 = \frac{H \cdot a \cdot \Phi}{r_1^2} \quad (385)$$

wenn wir mit r_1 den Abstand des Flächenelementes a von der ersten Hauptebene bezeichnen. Diese Lichtmenge ist aber dieselbe, welche in dem Flächenelemente b zum Bilde von a vereinigt wird.

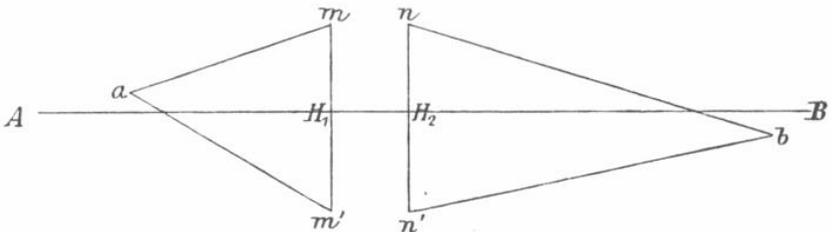


Fig. 48.

Ist nun ein anderes Mal b das mit der Helligkeit H leuchtende Element, so wird in a als dem nunmehrigen Bilde desselben die Lichtmenge

$$L_2 = \frac{H \cdot b \cdot \Phi}{r_2^2} \quad (386)$$

vereinigt, wo r_2 den Abstand des Elementes b von der Hauptebene H_2 bezeichnet.

Es verhält sich demnach

$$L_1 : L_2 = \frac{H \cdot a}{r_1^2} : \frac{H \cdot b}{r_2^2} \quad (387)$$

Da b das Bild von a , und umgekehrt, ist, so folgt aus Gleichung (332a), wenn wir mit F_1 und F_2 die Brennweiten des eingeschalteten optischen Systems bezeichnen und berücksichtigen, daß a und b als einander geometrisch ähnliche Flächen dem Quadrate ihrer entsprechenden Liniendimensionen proportional sind,

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2^2}{(r_2 - F_2)^2} \quad (388)$$

Nach Gleichung (331a) ist nun, wenn wir in sie die jetzigen Bezeichnungen der Brennweiten einführen

$$r_2 - F_2 = \frac{F_1 \cdot r_2}{r_1} .$$

Setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2^2 \cdot r_1^2}{F_1^2 \cdot r_2^2} \quad (388a)$$

und da nach Gleichung (299)

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

so folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{n_2^2 \cdot r_1^2}{n_1^2 \cdot r_2^2} \quad (388b)$$

oder

$$\frac{a}{r_1^2} = \frac{b}{r_2^2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} \quad (388c)$$

Setzen wir in das dritte Glied der Proportion (387) diesen Werth ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} L_1 : L_2 &= \frac{b}{r_2^2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} : \frac{b}{r_2^2} \\ &= n_2^2 : n_1^2 \end{aligned} \quad (389)$$

Die Lichtmenge, welche also bei gleicher Helligkeit von a ausgehend auf b fällt, verhält sich zu der, welche den umgekehrten Weg macht, wie das Quadrat des Brechungsverhältnisses des Mediums, in dem b liegt, zum Quadrat des Brechungsverhältnisses des Mediums, in dem a liegt. Wären die Helligkeiten demnach nicht dieselben, sondern diejenige von a gleich $n_1^2 \cdot H$, die von b gleich $n_2^2 \cdot H$, so würde L_1 gleich L_2 sein. Sollte eines der Elemente, z. B. a , größer sein als das Bild von b , so würden die Theile von a , welche nicht zum Bilde von b gehören, weder Licht auf b werfen, noch von b empfangen können. Es würde dadurch also weder L_1 noch L_2 geändert werden.

Unser Satz gilt aber auch noch, wenn b nicht an den Ort des Bildes von a fällt, sondern in einer andern Ebene liegt. Es sei in Figur 49 b' das Bild von a , während das in Betracht kommende Flächenelement in b liege und einen Theil des senkrecht auf der Axe AB stehenden Querschnittes pp' des Strahlenkegels bilde. Die übrigen Bezeichnungen sind dieselben, wie in Figur 48. Es ist nun wieder die von a ausgehende und auf den Querschnitt mm' auffallende Lichtmenge gleich $\frac{H \cdot a \cdot \Phi}{r_1^2}$. Sie vereinigt sich jetzt aber nicht vollständig auf dem Elemente b , sondern die Licht-

menge, welche auf das Flächenelement b fällt, verhält sich zur ganzen Lichtmenge, welche die Fläche pp' trifft, wie die Oberfläche von b zum Querschnitt des Strahlenkegels in der Ebene pp' , den

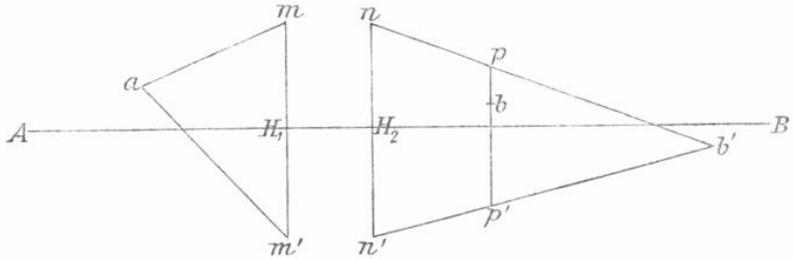


Fig. 49.

wir mit ψ bezeichnen wollen. Die auf b gelangende Lichtmenge L_1 wird also gegeben sein durch

$$L_1 = \frac{\Phi}{\psi} \cdot \frac{H \cdot a \cdot b}{r_1^2} \quad (390)$$

Nun ist aber, wenn wir noch den Abstand von b von dem Hauptpunkt H_2 mit e bezeichnen

$$\frac{\Phi}{\psi} = \frac{(nn')^2}{(pp')^2} = \frac{r_2^2}{(r_2 - e)^2} \quad (391)$$

und daher

$$L_1 = H \cdot a \cdot b \cdot \frac{r_2^2}{(r_2 - e)^2 \cdot r_1^2} \quad (390a)$$

Aus Gleichung (391b) folgt aber für die jetzigen Bezeichnungen

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{F_2^2}{(r_1 - F_1)^2};$$

daher ergibt sich

$$\begin{aligned} L_1 &= H \cdot a \cdot b \cdot \frac{F_2^2}{(r_2 - e)^2 \cdot (r_1 - F_1)^2} \\ &= H \cdot a \cdot b \cdot \frac{F_2^2}{(r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot F_1 - e \cdot r_1 + e \cdot F_1)^2} \end{aligned} \quad (390b)$$

Da nun ferner nach Gleichung (391a)

$$r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot F_1 = r_1 \cdot F_2$$

so folgt

$$L_1 = H \cdot a \cdot b \cdot \frac{F_2^2}{(r_1 \cdot F_2 - e \cdot r_1 + e \cdot F_1)^2} \quad (390c)$$

Wenn wir nun annehmen, daß b das mit der Helligkeit H leuchtende Element und a das beleuchtete ist, so erhalten wir auf Grund einer der vorigen ganz analogen Ableitung

$$L_2 = H \cdot a \cdot b \cdot \frac{F_1^2}{(r_1 \cdot F_2 - e \cdot r_1 + e \cdot F_1)^2} \quad (392)$$

Aus den Gleichungen (390c) und (392) folgt nun ohne Weiteres

$$L_1 : L_2 = F_2^2 : F_1^2 \quad (393)$$

Da aber nach Gleichung (299)

$$F_2 : F_1 = n_2 : n_1$$

so ergibt sich dasselbe Resultat, welches wir schon in Gleichung (389) für den Fall gefunden hatten, daß b das Bild von a und umgekehrt ist, auch für den Fall, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist, nämlich die Relation

$$L_1 : L_2 = n_2^2 : n_1^2 \quad (393a)$$

Wir können also ganz allgemein folgenden Satz aufstellen: Wenn in einem centrirten brechenden System n_1 das Brechungsverhältniß des ersten, n_2 das des letzten Mediums ist, und in dem ersten Medium befindet sich senkrecht gegen die Axe gerichtet das Flächenelement a , in dem letzten Medium das Flächenelement b , so fällt ebensoviel Licht von a auf b , wie von b auf a , falls a mit der Helligkeit $n_1^2 \cdot H$ und b mit der Helligkeit $n_2^2 \cdot H$ leuchtet.

Die leuchtende und beleuchtete Fläche brauchen nicht verschwindend klein zu sein, wenn sie nur klein genug sind, daß die Cosinus der Einfallswinkel der Strahlen an den brechenden Flächen sich nicht merklich von 1 unterscheiden. Denn da für jedes Paar verschwindend kleiner Flächenelemente der beiden Flächen der Satz gilt, so gilt er auch für die ganzen Flächen.

Ist das erste und letzte Medium dasselbe, was ja gewöhnlich bei optischen Instrumenten der Fall ist, da bei ihnen die Luft das erste und letzte Medium bildet, so vereinfacht sich unser Satz dahin, daß bei gleicher Helligkeit der beiden Flächenelemente dieselbe Lichtmenge von a auf b , wie von b auf a fällt.

§ 91. Die Helligkeit der Bilder auf der Netzhaut.

Wenn man direct oder durch ein centrirtes optisches System ein deutliches Bild eines Gegenstandes erblickt, so können wir das Auge bez. das Auge nebst dem vorgesetzten System als das in dem

vorigen Paragraphen erwähnte optische System betrachten, welches hier ein Bild auf der Netzhaut entwirft. Es sei a ein Flächenelement des Gegenstandes mit der Helligkeit H ; ferner sei b sein Bild auf der Netzhaut. Ebensoviele Licht, wie von a nach b geht, würde nach dem vorhin abgeleiteten Reciprocitätsgesetz der Helligkeiten von b nach a gehen, wenn dem Netzhautelemente b die Helligkeit $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot H$ ertheilt würde, wobei n_1 das Brechungsverhältniß des Mediums bezeichnet, in dem sich a befindet, n_2 das Brechungsverhältniß des Glaskörpers im Auge. Es läßt sich nun aber leicht berechnen, wie groß diese Lichtmenge M ist. Bezeichnen wir mit q den Querschnitt des überhaupt zur Geltung kommenden, d. h. von den Linsenfassungen, Diaphragmen u. s. w. des optischen Systems nicht abgeblendeten Strahlenbündels in der Pupille und mit d den Abstand der Pupille von der Netzhaut, so ist nach Gleichung (386) die von b ausgehende und auf q auffallende Lichtmenge

$$M = \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{q \cdot b}{d^2} \quad (394)$$

Streng genommen würde hier unter q der Querschnitt des Strahlenbündels in dem von der Krystalllinse des Auges entworfenen Bilde der Pupille und unter d die Entfernung dieses Bildes von der Netzhaut zu verstehen sein. Die physiologische Optik lehrt uns aber, daß die hier begangene Abweichung von der streng richtigen Annahme nur sehr gering ist; wir wollen sie daher vernachlässigen.

Dieselbe Lichtmenge M fällt nun aber auch, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, umgekehrt von a auf das Netzhautelement b , und es ist demnach die Beleuchtungsstärke, d. h. die Lichtmenge J , welche auf die Flächeneinheit des Netzhautbildes fällt

$$\begin{aligned} J &= \frac{M}{b} \\ &= \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{q}{d^2} \end{aligned} \quad (395)$$

Sieht das Auge frei den Gegenstand an, so füllt das Strahlenbündel die ganze Pupille, deren Querschnitt Q sei, und die Beleuchtungsstärke J' wird dann

$$J' = \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{Q}{d^2} \quad (396)$$

Es verhält sich also

$$J : J' = q : Q \quad (397)$$

Größer als J' kann J niemals werden, da q nicht größer als Q werden kann. Das Maximum der Helligkeit des Netzhautbildes ist also durch J' gegeben; es ist die natürliche Helligkeit des Bildes. Die Helligkeit ausgedehnter Flächen kann daher durch optische Instrumente nie größer, nur kleiner werden, als ihre natürliche Helligkeit. Wir können demnach folgendes Gesetz aussprechen:

Erblickt ein Beobachter durch ein centrirtes System brechender oder spiegelnder Flächen ein scharfes Bild eines leuchtenden Gegenstandes, und können wir den Lichtverlust an den Flächen vernachlässigen, so erscheint jede Stelle des Bildes dem Beobachter ebenso hell, wie ihm die entsprechende Stelle des Gegenstandes ohne optisches Instrument gesehen erscheinen würde, falls die ganze Pupille des Beobachters von den Strahlen getroffen wird, die von einem einzelnen Punkt jener Stelle ausgehen. Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so verhält sich die Helligkeit des optischen Bildes zur Helligkeit des frei gesehenen Gegenstandes, wie der von Strahlen des leuchtenden Punktes getroffene Theil der Pupille zur ganzen Pupille.

Auch wenn Zerstreuungsbilder einer leuchtenden Fläche von gleichmäßiger Helligkeit im Auge entworfen werden, kann die Helligkeit des Netzhautbildes höchstens gleich, nie größer werden, als bei freier Betrachtung der Fläche. Der Beweis hierfür läßt sich in ganz analoger Weise führen, wie für scharf gesehene Bilder, da das im vorigen Paragraphen abgeleitete Reciprocitätsgesetz der Helligkeit sowohl für scharfe Bilder als auch für Zerstreuungsbilder gilt. Auch hier ist die Helligkeit proportional dem Querschnitt des Strahlenbündels in der Pupille, welches von dem entsprechenden Punkte der Netzhaut bis zu der leuchtenden Fläche gelangen kann.

Nur, wenn wir verschwindend kleine leuchtende Punkte durch optische Instrumente betrachten, deren Bild auch bei den stärksten Vergrößerungen nur die Ausdehnung der kleinsten Zerstreuungskreise auf der Netzhaut bedeckt, also immer dieselbe Flächenausdehnung behält, können optische Instrumente die Helligkeit vergrößern. Dies geschieht z. B. für die Fixsterne, und deshalb können auch Fixsterne durch stark vergrößernde Fernrohre mit großer Apertur bei Tage sichtbar gemacht werden. Die scheinbare Helligkeit des Fixsterns steigt proportional der Lichtmenge, welche das Instrument in seinem Focus vereinigt, während die Helligkeit des Himmelsgewölbes durch das Fernrohr nicht vermehrt wird.

§ 92. Grenze der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente.
Analogie zum Carnot'schen Gesetz.

Die eben durchgeführten Betrachtungen können wir auch an die in § 78 abgeleiteten Sätze über die optische Divergenz anknüpfen und dabei zugleich auf die Gröfse der durch das dem Auge vorgesetzte optische Instrument erzeugten Bilder Bezug nehmen. Wenn wir berücksichtigen, dafs gewöhnlich das betrachtete Object in demselben Medium liegt, in welchem die Strahlen zum Schluß nach ihrem Durchgang durch das optische Instrument, also vor ihrem Eintritt in das Auge, verlaufen, nämlich in der Luft, so vereinfacht sich die Gleichung (321 d) dadurch, dafs die beiden Brechungsverhältnisse n_0 und n_1 einander gleich sind. Es ist dann also

$$\beta_0 \cdot \alpha_0 = \beta_1 \cdot \alpha_1 \quad (398)$$

worin β_0 bez. β_1 die Objectgröfse bez. Bildgröfse, und α_0 bez. α_1 die Divergenzwinkel der äußersten Randstrahlen, welche in das optische Instrument eintreten, bez. aus ihm austreten, bezeichnen. Wir können diese Gleichung umformen in

$$\frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \quad (398a)$$

Nun giebt der Quotient $\frac{\beta_1}{\beta_0}$ die lineare Vergrößerung des betreffenden optischen Instrumentes an, und es folgt also, dafs bei gegebener Vergrößerung α_1 um so gröfser sein wird, je gröfser α_0 , d. h. die Apertur des Instrumentes ist. Das Quadrat von α_1 ist aber proportional dem Querschnitt des Strahlenbündels, welches das Instrument verläfst und in das Auge eintritt. Dieser Querschnitt ist aber wiederum, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, proportional der Helligkeit, unter der das Bild β_1 dem beobachtenden Auge erscheint; es ist diese letztere demnach proportional dem Quadrate der Apertur. Es geht daraus hervor, dafs, je stärker die Vergrößerung ist, desto gröfser das Lichtbündel sein mufs, welches von dem Instrument aufgefangen wird, wenn wir ausreichende Helligkeit behalten wollen. Eben deshalb erfordern die stark vergrößernden Fernrohre außerordentlich grofse Objectivlinsen, und ebenso braucht man für die stark vergrößernden Mikroskope besondere Einrichtungen, durch welche convergirende Lichtkegel erzeugt werden, die durch das Object hindurchgehen und schließlic mit starker Divergenz in die Objectivlinse hineingelangen. Auf

letzteres zielt die Verbesserung der neueren Mikroskope wesentlich hin.

Der Querschnitt des in die Pupille eintretenden Strahlenbündels läßt sich leicht empirisch ermitteln. Wenn man das Instrument auf ein helles Feld eingestellt hat, entferne man das Auge vom Ocular in Richtung der optischen Axe des Instrumentes und betrachte das Ocular selbst. Man wird in ihm oder etwas vor ihm eine kleine helle Kreisfläche auf dunklem Grunde sehen. Dieser kleine Kreis ist das optische Bild, welches das Ocular von der Fläche der Objectivlinse entwirft. Alles Licht, was durch das Instrument hindurchgeht, muß in diesem Bildchen des Objectives vereinigt sein. Letzteres entspricht also dem Querschnitt, den die sämtlichen Lichtkegel, welche von dem Punkte des Objectes ausgegangen sind, an dieser Stelle des Raumes haben. Um nun das gesammte durch das optische Instrument hindurchgegangene Licht mit dem Auge aufzufangen und somit eine möglichst grose Helligkeit zu erlangen, muß die Pupille an den Ort dieses Bildchens gebracht werden. Das Verhältniß zwischen seiner Fläche und der Fläche der Pupille ergibt also unmittelbar das Verhältniß, in welchem die Helligkeit des durch das Instrument gesehenen Bildes kleiner ist, als die des direct gesehenen Objectes. Nur wenn jenes Bildchen der Objectivlinse gleich oder größer ist als die Pupille, hat man volle Helligkeit.

Aus der oben abgeleiteten Gleichung (398a) folgt aber auch, daß dieser Querschnitt des aus dem Instrumente austretenden Strahlenbündels bei sonst gleichen Verhältnissen um so kleiner ist, je stärker die Vergrößerung ist. Bei Fernrohren kann man nun die Apertur des Objectivglases theoretisch in das Unbegrenzte steigern. Die Oeffnung des mikroskopischen Lichtkegels dagegen wird durch einen Winkel gemessen und hat daher eine bestimmte Grenze. Es wird also mit steigender Vergrößerung das eben erwähnte kleine Bildchen, durch welches alle Strahlen hindurchmüssen, immer kleiner werden; dabei treten nun Diffractionserscheinungen auf, welche das im Mikroskop erzeugte Bild des betrachteten Objectes undeutlich machen und endlich den Nutzen noch stärkerer Vergrößerung wieder völlig vernichten. Dadurch ist der mikroskopischen Vergrößerung eine bestimmte Grenze gesetzt.

Zum Schlusse wollen wir noch darauf hinweisen, daß das im vorigen Paragraphen abgeleitete Gesetz, daß durch kein optisches System ein Bild eines Objectes entworfen werden kann, das größere

Helligkeit als das Object selbst besitzt, einen nahen Zusammenhang mit dem CARNOT'schen Gesetze in der Wärmelehre hat.

Dieses Gesetz sagt aus, daß nur dann Wärme von einem kälteren zu einem heißeren Körper übergeführt werden kann, wenn dabei gleichzeitig Arbeit verrichtet wird. Was hier von der Wärme, also auch den Wärmestrahlen, ausgesagt wird, gilt natürlich ebenfalls von den Lichtstrahlen; und den kälteren bez. wärmeren Körpern sind die dunkleren bez. helleren analog. Da nun ein optisches System keine Arbeit leistet, so ist es nicht möglich, daß die Lichtstrahlen zu einem Orte hingehen, der heller ist als der Ort, von dem sie herkommen. Das Bild kann also nie heller sein, als das Object.
