Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1897

Sechster Theil. Die Polarisation und Dispersion des Lichtes

urn:nbn:at:at-ubi:2-7079

Sechster Theil.

Die Polarisation und Dispersion des Lichtes.

Erster Abschnitt.

Die Polarisation des Lichtes bei der Spiegelung und Brechung.

---

§ 93. Die magnetischen Schwingungen sind senkrecht zur Einfallsebene.

Indem wir zur Lehre von der Brechung übergingen, hatten wir die Vorstellung zu Grunde gelegt, dafs, wenn Strahlen sich durch ein durchsichtiges Medium fortpflanzen und auf eine Grenzfläche treffen, von dieser Grenzfläche aus nun neue Strahlen ausgehen. Wir haben aber noch die weitere Annahme hinzugefügt, dafs an schmalen Strahlenbündeln keine verschiedenen Phasenänderungen bei der Weiterfortpflanzung der reflectirten oder gebrochenen Strahlen vorkommen sollten. Nun hängen mit diesen Erscheinungen der Spiegelung und Brechung der Strahlen aber noch wesentlich andere Erscheinungen zusammen, welche die Art der Strahlen betreffen. Die Strahlen werden nämlich durch Spiegelung und Brechung gleichzeitig mehr oder weniger polarisirt. Wir müssen die Vorgänge der Spiegelung und der Brechung in dieser Hinsicht noch näher untersuchen.

Zu diesem Behufe wollen wir auf die ursprünglichen Gleichungen (30) und (31) zurückgehen, welche wir über die Bewegung der Lichtwellen aufgestellt haben. Statt der Momente sollen aber die Kraftcomponenten der magnetischen und elektrischen Kräfte eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned}
A.\mu.\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\
A.\mu.\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\
A.\mu.\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{399}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
A.\varepsilon.\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
A.\varepsilon.\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{400}$$

Wir müssen nun den Fall untersuchen, dafs ein Wellensystem in einer schrägen Richtung gegen die Grenzfläche zweier durchsichtigen Medien läuft, in denen die Gröfsen ε und μ, sowie die magnetischen und elektrischen Kräfte verschieden sein können. Der Einfallswinkel werde (Fig. 50) mit α bezeichnet. Wir wissen nun schon, dafs an der Grenzfläche reflectirte Wellen entstehen, die in der Richtung der reflectirten Strahlen also unter einem Winkel, der dem Einfallswinkel gleich ist, hinauslaufen, und dafs gebrochene Wellen in der Richtung, die mit dem Einfallsloth den Winkel β bildet, in das zweite Medium eintreten. Beim Uebergang in ein neues ruhendes durchsichtiges Medium kann die Schwingungsdauer nicht geändert werden. Denn soviel Anstöfse neuer Wellen, als in der Zeiteinheit an der Fläche ankommen, so viel werden auch in derselben Zeit ausgeübt, um Wellenzüge der gebrochenen Strahlen und Wellenzüge der gespiegelten Strahlen zu erregen. Durch den Factor e^{int}, welcher für alle diese verschiedenen Bewegungen der gleiche sein soll, drücken wir aus, dafs n Schwingungsanstöfse in der Zeit 2π geschehen. Andererseits aber wissen wir nun, dafs die Function, welche wir brauchen können, um den Wellengleichungen zu genügen, für ebene Wellen eine Function von $t - \frac{s}{c}$ sein mufs, wo s der von der Welle zurückgelegte Weg von irgend einem Nullpunkt an gerechnet und c die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wählen wir nun den Coordinatenanfangspunkt (Fig. 50) zum Nullpunkt, von dem der zurückgelegte Weg der Welle gerechnet wird, so wird für die einfallenden Wellen

$$s = -x \, . \cos\alpha + y \, . \sin\alpha,$$

für die reflectirten Wellen

$$s = x \, . \cos\alpha + y \, . \sin\alpha$$

und für die gebrochenen Wellen

$$s = -x \, . \cos\beta + y \, . \sin\beta$$

zu setzen sein.

Die einfallenden Wellen sind demnach durch die Form

$$\mathfrak{A} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x \, . \cos\alpha}{c_1}\right]},$$

die reflectirten durch

$$\mathfrak{B} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x \, . \cos\alpha}{c_1}\right]}$$

und die gebrochenen durch

$$\mathfrak{C} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\beta}{c_2} + \frac{x \, . \cos\beta}{c_2}\right]}$$

ausgedrückt. In diesen Formen sind auch mögliche Phasenänderungen der reflectirten oder gebrochenen Welle gegen die einfallende enthalten, die als imaginärer Factor zu der Amplitude $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ gerechnet werden können.

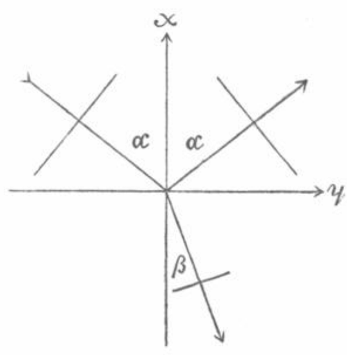

Fig. 50.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dafs die magnetischen Oscillationen nur in Richtung der z-Coordinaten stattfinden, d. h. senkrecht zur Ebene der Zeichnung (Fig. 50). Im oberen Medium liegen die Bewegungen der einfallenden und der reflectirten Wellen. Wir haben also hier für die z-Componente der magnetischen Kraft zu setzen:

$$N = \mathfrak{A} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x \, . \cos\alpha}{c_1}\right]} + \mathfrak{B} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x \, . \cos\alpha}{c_1}\right]} \tag{401}$$

Im unteren Medium, wo die z-Componente der magnetischen Kraft mit N' bezeichnet werden möge, haben wir

$$N' = \mathfrak{C} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \sin\beta}{c_2} + \frac{x \, . \cos\beta}{c_2}\right]}. \tag{402}$$

Erfahrungsgemäfs kennen wir keine anderen sich fortpflanzenden Wellen, als diese, und wir werden uns überzeugen, dafs dies in der That eine vollständige Lösung giebt, für welche wir alle Bedingungsgleichungen erfüllen können. Da die magnetischen Bewegungen senkrecht zur Ebene der Zeichnung sind, so werden die elektrischen Bewegungen in dieser Ebene liegen müssen. Denn wenn wir nur N als vorkommende magnetische Oscillation betrachten, wie wir es bisher gethan haben, und daher L und M gleich Null setzen, so folgt aus der letzten der Gleichungen (400), dafs auch $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$ sein mufs, d. h. dafs keine elektrische Oscillation senkrecht zur Ebene der Zeichnung vorkommen kann. Andererseits reduciren sich, wenn wir L und M gleich Null setzen, die ersten beiden der Gleichungen (400) auf

$$A \,.\, \varepsilon \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

und

$$A \,.\, \varepsilon \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Wir haben also zunächst zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} A \,.\, \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} = &- \mathfrak{A} \,.\, \frac{i \,.\, n \,.\, \sin \alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1} \sin \alpha + \frac{x \,.\, \cos \alpha}{c_1}\right]} \\ &- \mathfrak{B} \,.\, \frac{i \,.\, n \,.\, \sin \alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1} \sin \alpha - \frac{x \,.\, \cos \alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \quad (403)$$

und ebenso für das zweite Medium

$$A \,.\, \varepsilon_2 \frac{\partial X'}{\partial t} = \frac{\partial N'}{\partial y} = - \mathfrak{C} \,.\, \frac{i \,.\, n \sin \beta}{c_2} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_2} \sin \beta + \frac{x \,.\, \cos \beta}{c_2}\right]} \quad (404)$$

Durch Integration nach t ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} X = &- \frac{\mathfrak{A}}{A \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin \alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1} \sin \alpha + \frac{x \,.\, \cos \alpha}{c_1}\right]} \\ &- \frac{\mathfrak{B}}{A \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin \alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1} \sin \alpha - \frac{x \,.\, \cos \alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \quad (403\,\text{a})$$

und

$$X' = - \frac{\mathfrak{C}}{A \varepsilon_2} \cdot \frac{\sin \beta}{c_2} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_2} \sin \beta + \frac{x \,.\, \cos \beta}{c_2}\right]} \quad (404\,\text{a})$$

Eine bei der Integration nach t hinzuzufügende von t unabhängige Gröfse ist für die Schwingungen ohne Belang.

In derselben Weise können wir Y bilden nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ und erhalten für das erste Medium:

$$\left.\begin{aligned} A.\varepsilon_1\frac{\partial Y}{\partial t} &= -\mathfrak{A}.\frac{i.n.\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}+\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad + \mathfrak{B}.\frac{i.n.\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}-\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{405}$$

und für das zweite Medium

$$A.\varepsilon_2.\frac{\partial Y'}{\partial t} = -\mathfrak{C}.\frac{i.n.\cos\beta}{c_2}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\beta}{c_2}+\frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]}. \tag{406}$$

Indem wir nach der Zeit integriren ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A.\varepsilon_1.Y &= -\mathfrak{A}.\frac{\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}+\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad + \mathfrak{B}.\frac{\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}-\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{405a}$$

und

$$A.\varepsilon_2.Y' = -\mathfrak{C}.\frac{\cos\beta}{c_2}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\beta}{c_2}+\frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]} \tag{406a}$$

Nun sind unsere Grenzbedingungen dadurch gegeben, daſs an der Grenze $x = 0$ die Werthe der Differentialquotienten nach x, also quer durch diese Grenze hindurch, nicht unendlich werden dürfen. Denn da

$$A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x},$$

so würde ein unendlicher Werth von $\frac{\partial N}{\partial x}$ bedingen, daſs in der Grenzfläche eine plötzliche Aenderung in den Werthen von Y eintreten müſste, was nicht vorstellbar wäre. Wir schlieſsen also aus dieser Gleichung, daſs an der Grenzfläche von N zu N' von der Function, die auf der oberen, zu der, die auf der unteren Seite gilt, kein Sprung stattfinden dürfe, und daſs also an der Grenzfläche $N = N'$ zu setzen sei.

Ebenso folgt aus der Gleichung

$$A\mu\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

dafs $\frac{\partial Y}{\partial x}$ endlich ist, dafs also der Werth der Function Y an der Grenze keinen Sprung machen darf, mithin $Y = Y'$ sein mufs.

Das sind unsere beiden Grenzbedingungen, und zwar ist es ein wesentlicher Vortheil der elektromagnetischen Theorie des Lichtes, dafs wir in der That hier nur zwei Grenzbedingungen bekommen. Es ist die elektromagnetische Theorie vereinbar mit der Annahme, dafs die X-Componente an der Grenze einen Sprung macht, weil nämlich in dieser Theorie die Möglichkeit gegeben ist, dafs an der Grenze der beiden Medien für einen Moment während der Schwingung sich eine elektrische Grenzschicht bildet, durch die dann die Componente X an beiden Seiten der Schicht verschiedene Werthe bekommen würde. Denn an der Oberfläche eines elektrischen Leiters, wo eine Flächenbelegung sich bildet, macht die normal gerichtete Componente der Kraft einen Sprung. Bei der Annahme elastischer Undulationen des Lichtäthers tritt hingegen in dieser Beziehung eine Schwierigkeit ein, welche ohne neue Hypothesen nicht beseitigt werden kann; denn da hat man an der Grenze zweier elastischen Körper die Bedingungen, sowohl dafs die Grenzverschiebungen einander in beiden Medien derart entsprechen müssen, dafs keine Verschiebungen senkrecht zur Fläche vorkommen, als auch dafs die drei Kraftcomponenten, welche hier an der Fläche auf die Grenzfläche einwirken, gleiche Gröfse haben, weil in der Grenzfläche selbst keine endliche Gegenkraft gegen diejenigen Kräfte auftreten kann, welche aus dem Medium her gegen die Grenzfläche wirken. Man bekommt dadurch mehr Bedingungen, als man ohne neue Annahmen erfüllen kann.

Die Gleichungen $N = N'$ und $Y = Y'$ müfsen zu jeder Zeit und für jeden Werth von y stimmen. Das ist nicht anders möglich, als wenn die in den Ausdrücken für N und N' und für Y und Y' vorkommenden Exponentialgröfsen für $x = 0$ identisch werden. Das liefert uns die Gleichung, die schon das Brechungsgesetz verlangt, nämlich:

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2},$$

die also nichts anderes bedeutet, als dafs die Spur jeder Welle längs der Grenze in den beiden Medien mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitet. Aufserdem verlangt die Gleichung $N = N'$, dafs

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \tag{407}$$

und die Gleichung $Y = Y'$, dafs

$$\frac{\mathfrak{A} \,.\, \cos\alpha}{A \,.\, \varepsilon_1\, c_1} - \frac{\mathfrak{B} \,.\, \cos\alpha}{A \,.\, \varepsilon_1\, c_1} = \frac{\mathfrak{C} \,.\, \cos\beta}{A \,.\, \varepsilon_2\, c_2} . \tag{408}$$

Wenn also $\mathfrak{A}$, die Amplitude des einfallenden Strahles, gegeben ist, so werden sich aus diesen beiden linearen Gleichungen die beiden Coefficienten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmen lassen. Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ bekommen wir:

$$\mathfrak{A} \,.\left[\frac{\cos\beta}{A.\varepsilon_2 c_2} - \frac{\cos\alpha}{A.\varepsilon_1 c_1}\right] + \mathfrak{B} \,.\left[\frac{\cos\beta}{A.\varepsilon_2 c_2} + \frac{\cos\alpha}{A.\varepsilon_1 c_1}\right] = 0 \,. \tag{409}$$

Diese Gleichung drückt die Amplitude des gespiegelten Strahles durch die Amplitude des einfallenden Strahles aus.

Unter bestimmten Umständen kann $\mathfrak{B} = 0$ werden, nämlich wenn

$$\frac{\cos\beta}{\varepsilon_2\, c_2} = \frac{\cos\alpha}{\varepsilon_1\, c_1} \tag{410}$$

Dann wird also ein einfallender Strahl vorhanden sein können, ohne dafs ein gespiegelter Strahl sich bildet. In der That zeigt sich bei der Untersuchung der Erscheinungen, dafs ein solcher Fall vorkommt, wo kein gespiegelter Strahl sich bildet, sondern die ganze Lichtmenge in das andere Medium übergeht.

Nun hatten wir früher gesehen, dafs das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Producte $\varepsilon\mu$ umgekehrt proportional ist. Bei allen bisher untersuchten vollkommen durchsichtigen Körpern ist die magnetische Constante μ immer sehr wenig abweichend von derjenigen in der Luft oder im leeren Raume. Man kann also die reciproken Quadrate $\frac{1}{c_1^{\,2}}$ und $\frac{1}{c_2^{\,2}}$ den Dielektricitätsconstanten ε_1 und ε_2 annähernd proportional setzen. Dadurch geht die Gleichung (409) in die Form über:

$$\mathfrak{A} \,.\left[c_2 \,.\, \cos\beta - c_1 \,.\, \cos\alpha\right] + \mathfrak{B} \,.\left[c_2 \,.\, \cos\beta + c_1 \,.\, \cos\alpha\right] = 0. \tag{409a}$$

Indem wir die einzelnen Glieder mit $\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$ multipliciren, ergiebt sich

$$\mathfrak{A} \,.\left[\cos\beta \,.\, \sin\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\alpha\right] + \mathfrak{B} \,.\left[\cos\beta \,.\, \sin\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\alpha\right] = 0$$

oder

$$\mathfrak{A} \,.\left[\sin 2\alpha - \sin 2\beta\right] = \mathfrak{B} \,.\left[\sin 2\alpha + \sin 2\beta\right] . \tag{409b}$$

Es verschwindet $\mathfrak{B}$ also, wenn $2\alpha + 2\beta = \pi$ ist; denn dann ist $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. In diesem Falle ergänzen sich α und β zu einem Rechten. Dies ist, wie aus der Fig. 51 unmittelbar zu ersehen ist, gleichbedeutend mit der bekannten empirisch gefundenen Bedingung, daſs der gebrochene Strahl auf dem gespiegelten Strahl senkrecht stehen muſs, wenn kein reflectirter Strahl bestehen soll. Der betreffende Winkel α heiſst der Polarisationswinkel.

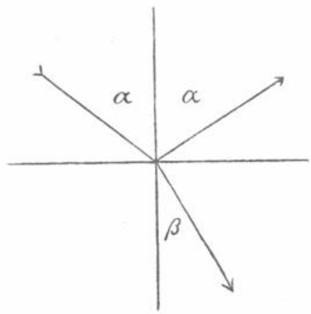

Fig. 51.

§ 94. Die elektrischen Schwingungen sind senkrecht zur Einfallsebene.

Wenn wir die Rollen der elektrischen und magnetischen Schwingungen vertauschen und festsetzen, daſs die elektrischen Schwingungen senkrecht zu der Einfallsebene des Strahles sind, so werden ganz analoge Gleichungen daraus folgen; nur müssen wir das Zeichen ε für die dielektrische Constante mit dem Zeichen μ für die magnetische Constante vertauschen.

Setzen wir nämlich in dem ersten Medium

$$Z = \mathfrak{A} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} + \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} + \mathfrak{B} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} - \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} \tag{411}$$

und in dem zweiten Medium

$$Z' = \mathfrak{C} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\beta}{c_2} + \frac{x \, . \, \cos\beta}{c_2}\right]}, \tag{412}$$

während X und Y Null sind, so erhalten wir in Folge der Gleichungen (399)

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= i n \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{A} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} + \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad + i n \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{B} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} - \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ A\mu_1 \frac{\partial M}{\partial t} &= i n \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{A} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} + \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad - i n \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{B} \, . \, e^{in\left[t - \frac{y \, . \, \sin\alpha}{c_1} - \frac{x \, . \, \cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{413}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2 \frac{\partial L'}{\partial t} &= i n \frac{\sin\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \\ A\mu_2 \frac{\partial M'}{\partial t} &= i n \frac{\cos\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{414}$$

Durch Integration nach t ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 L = {} & \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{A} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ & + \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{B} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ A\mu_1 M = {} & \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{A} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ & - \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{B} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{413a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2 L' &= \frac{\sin\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \\ A\mu_2 M' &= \frac{\cos\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{414a}$$

Den Gleichungen (407) und (408) entsprechend erhalten wir hier aus den Grenzbedingungen $Z = Z'$ und $M = M'$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{A} . \cos\alpha}{A . \mu_1 c_1} - \frac{\mathfrak{B} . \cos\alpha}{A . \mu_1 c_1} &= \frac{\mathfrak{C} . \cos\beta}{A . \mu_2 c_2}, \end{aligned}\right\} \tag{415}$$

die sich von jenen nur dadurch unterscheiden, dafs μ an die Stelle von ε getreten ist.

Schon oben haben wir hervorgehoben, dafs bei allen uns bekannten vollkommen durchsichtigen Körpern μ nahe gleich **1** gesetzt werden kann. Wir wollen daher auch hier wieder μ_1 gegen μ_2 fortheben und bleiben dabei immer noch in hinreichender Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit. Dividiren wir dann die zweite Gleichung (415) durch

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2},$$

so bekommen wir

$$\mathfrak{A} . \operatorname{cotg}\alpha - \mathfrak{B} . \operatorname{cotg}\alpha = \mathfrak{C} . \operatorname{cotg}\beta.$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{C}$ die Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ein, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A} . \left[\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha\right] + \mathfrak{B} . \left[\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha\right] = 0 \tag{416}$$

oder

$$\mathfrak{A} . \sin(\alpha - \beta) + \mathfrak{B} . \sin(\alpha + \beta) = 0, \tag{416a}$$

so dafs also die beiden Amplituden des einfallenden und des gespiegelten Strahls sich verhalten wie der Sinus der Differenz zum Sinus der Summe von α und β. Das Verhältniss $\mathfrak{B}$ dividirt durch $\mathfrak{A}$ kann niemals verschwinden, weil $\sin(\alpha - \beta)$ nur für $\alpha = \beta = 0$ verschwindet, wo zugleich $\sin(\alpha + \beta)$ verschwindet und $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ den Werth $\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$ annimmt. Wenn also die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wird das zurückgeworfene Licht niemals ausgelöscht.

Fallen beide Arten von Strahlen, solche deren magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind und solche, deren elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, unter dem Polarisationswinkel auf, so wird nur die erste Art ausgelöscht und dasjenige Licht, dessen elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wird allein zurückgeworfen. Durch die Spiegelung wird also in diesem Falle unpolarisirtes Licht polarisirt und in dem polarisirten Licht sind die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene oder zur sogenannten Polarisationsebene, die magnetischen Schwingungen liegen in der Polarisationsebene.

§ 95. Die totale Reflexion.

Ausser dem bisher betrachteten Fall, wo wir einen reflectirten und einen gebrochenen Strahl erhalten, kann auch der Fall der sogenannten totalen Reflexion eintreten, wo nach dem Brechungsgesetze ein gebrochener Strahl sich nicht bilden kann. Das Brechungsgesetz sagt aus, dafs

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2} .$$

Wenn die Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium kleiner ist als im zweiten, dann ist es nicht immer möglich, für einen gegebenen Werth von α einen Werth für β zu finden. Es kann nämlich der Fall vorkommen, dafs der nach diesem Gesetz berechnete Werth von $\sin\beta$ gröfser als 1 werden müfste, während der Sinus eines reellen Winkels immer zwischen den Werthen $+1$ und -1 liegt. Wohl aber kann man dann einen complexen Werth für β angeben. Denn es ist:

$$\sin\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = \sin xi . \cos\frac{\pi}{2} + \cos xi . \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos xi = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Das ist eine Gröfse, welche für reelle Werthe von x alle Werthe zwischen $+1$ und $+\infty$ annimmt, so dafs also Sinus welche gröfser sind als 1, dargestellt werden können durch den Sinus eines rein imaginären Winkels, zu dem aber noch der Winkel $\frac{\pi}{2}$ hinzukommt. Das macht es nun möglich, in dem Fall der totalen Reflexion gerade so zu verfahren, wie bei der mit Brechung verbundenen Reflexion. Dieselben Formeln stellen auch in diesem Fall die auftretenden Oscillationen dar. Ebenso wie

$$\sin\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = \cos xi$$

ergiebt sich

$$\cos\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin xi = \frac{e^x - e^{-x}}{2i}.$$

Statt $\sin\beta$ wollen wir die Bezeichnung

$$\sin\beta = p$$

einführen. Dieses p ist in dem Fall, den wir hier zu untersuchen haben, gröfser als 1. Dann ist

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - p^2}$$

und da $p > 1$ sein soll, so ist der Werth dieses Cosinus ein imaginärer. Wir wollen schreiben

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1-p^2} = \pm i . q.$$

Wenn die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, erhält der Ausdruck für N' in Gleichung (402) nunmehr die Form:

$$\left.\begin{aligned} N' &= \mathfrak{C} . e^{in\left[t - \frac{y . p}{c_2}\right]} . e^{\frac{\pm in xiq}{c_2}} \\ &= \mathfrak{C} . e^{in\left[t - \frac{y . p}{c_2}\right]} . e^{\frac{\mp n x q}{c_2}}. \end{aligned}\right\} \quad (417)$$

Wir erhalten hier also eine Exponentialfunction mit reellem Exponenten, dessen Zeichen noch zwei Möglichkeiten zuläfst. In diesem

Falle werden wir berücksichtigen müssen, dafs die Oscillation, welche sich an der Grenze ausbilden kann, ihre Anstöfse nur von der Grenze aus erhält, und sich in das zweite Medium nicht weit fortpflanzt. Wir wählen daher das positive Zeichen, damit im zweiten Medium, wo x negativ ist, auch der Exponent negative Werthe erhält. Dann zeigt der Factor $e^{\frac{n x q}{c_2}}$ ein System erlöschender Wellen an, welche für grofse negative Werthe von x verschwinden, und würde besagen, dafs in der Nähe der Grenzfläche des Mediums eine Bewegung über die Grenzfläche zwar hinüber greift, aber aus erlöschenden Wellen besteht. In der That erlöschen sie sehr rasch, weil $\frac{n}{c_2}$ einen grofsen Werth hat. Denn n ist ja die Zahl der Schwingungen in der Zeit 2π und daher ist $\frac{2\pi c_2}{n}$ die Wellenlänge. Es braucht also $-x$ nur gleich einer Wellenlänge zu sein, um dem Exponenten schon den Werth $-2\pi q$ zu geben. Die Erschütterung kommt also merklich nur in den äufsersten Grenzschichten des zweiten Mediums vor.

Sonst bestehen alle die Bedingungen, welche wir schon vorher erörtert haben. An der Grenze ist wieder $N = N'$, also:

$$\mathfrak{A} . e^{i n\left[t - \frac{\sin\alpha}{c_1} y\right]} + \mathfrak{B} . e^{i n\left[t - \frac{\sin\alpha}{c_1} y\right]} = \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{p}{c_2} y\right]}. \tag{418}$$

Daraus folgt erstens

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{p}{c_2}. \tag{419}$$

Es hat also p den berechneten Werth, den $\sin\beta$ nach dem Brechungsgesetz haben müfste, obgleich hier keine gebrochenen Wellen, die sich dauernd fortpflanzen, zu Stande kommen. Zweitens folgt wieder die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{420}$$

Ferner mufs ebenso wie oben an der Grenze $Y = Y'$ sein und das giebt der Gleichung (408) entsprechend:

$$\frac{\mathfrak{A} . \cos\alpha}{c_1 . A . \varepsilon_1} - \frac{\mathfrak{B} . \cos\alpha}{c_1 . A . \varepsilon_1} = \frac{\mathfrak{C} . \cos\beta}{c_2 . A . \varepsilon_2} = -i \frac{\mathfrak{C} . q}{c_2 . A . \varepsilon_2}. \tag{421}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ erhalten wir

$$\mathfrak{A} . \left(\frac{\cos\alpha}{A . c_1 \varepsilon_1} + \frac{i q}{A . c_2 \varepsilon_2}\right) = \mathfrak{B} . \left(\frac{\cos\alpha}{A . c_1 \varepsilon_1} - \frac{i q}{A . c_2 \varepsilon_2}\right) \tag{422}$$

Das ist eine Gleichung, in der die Coefficienten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ complex sind, und sich nur durch verschiedene Zeichen des imaginären Theils unterscheiden, so dafs der Modulus der complexen Gröfsen den gleichen Werth hat. Bestimmen wir zwei Gröfsen r und ω, so dafs:

$$\frac{\cos\alpha}{A\,.\,c_1\,\varepsilon_1} = r\cos\omega \quad \text{und} \quad \frac{q}{A\,.\,c_2\,\varepsilon_2} = r\sin\omega$$

und daher

$$\frac{q\,c_1\,\varepsilon_1}{c_2\,\varepsilon_2\,.\,\cos\alpha} = \operatorname{tg}\omega$$

ist, so wird

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega} \tag{422a}$$

Es ist also dann der Modulus der complexen Gröfsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ für beide gleich, d. h. die Amplitude des gespiegelten Strahles ist gleich der des einfallenden Strahles; es wird alles Licht mit voller Intensität reflectirt, und es bildet sich kein fortgesetzter gebrochener Strahl. Daher bezeichnet man diesen Fall als Fall der totalen Reflexion. Die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega}$ zeigt an, dafs wir es hier mit einer Phasenänderung 2ω zu thun haben. Die Phase des einfallenden Strahles wird bei der Reflexion um 2ω verändert.

Ganz ebenso läfst sich der Fall behandeln, wo die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind. Da erhalten wir entsprechend den Gleichungen (415) jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{A}\,.\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} - \frac{\mathfrak{B}\,.\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} &= -\frac{\mathfrak{C}\,.\,q\,i}{A\,\mu_2\,c_2} \end{aligned}\right\} \tag{423}$$

und durch Elimination von $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} + \frac{q\,i}{A\,\mu_2\,c_2}\right) = \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} - \frac{q\,i}{A\,\mu_2\,c_2}\right). \tag{424}$$

Die complexen Gröfsen rechts und links unterscheiden sich wieder nur durch das Zeichen von i und haben daher den gleichen Modulus, so dafs wieder wie oben sich eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega} \tag{424a}$$

ergiebt. Die Phasenänderung 2ω ist aber für diese zweite Art von Strahlen eine andere. Hier ist $\operatorname{tg}\omega = \frac{q\,\mu_1\,c_1}{\mu_2\,c_2\cos\alpha}$, während für die erste Art von Strahlen $\operatorname{tg}\omega = \frac{q\,\varepsilon_1\,c_1}{\varepsilon_2\,c_2\cos\alpha}$ war. Ist das einfallende

Licht aus Strahlen beider Arten zusammengesetzt, so wird die Reflexion eine solche sein, daſs die beiden reflectirten Strahlen verschiedene Phasenänderung erleiden, und daſs also nach der Reflexion der eine Strahl mit seiner Phase gegen den anderen verschoben sein wird. Wenn zwei Strahlen dieser Art, welche gegen einander verschobene Phasen haben, zusammentreffen, so combiniren sie sich zu sogenanntem elliptisch polarisirten Licht.

§ 96. Elliptisch polarisirtes Licht.

Es seien die Oscillationen darzustellen, die an irgend einer Stelle des Raumes durch eine beliebige Anzahl von Strahlen gleicher Schwingungsdauer hervorgebracht werden. Wenn wir die Componenten nicht wie früher durch complexe Ausdrücke von der Gestalt $A e^{int}$, sondern in reeller Form schreiben, so wird jede Componente der elektrischen oder magnetischen Schwingung sich aus einer Summe von Cosinus-Functionen zusammensetzen lassen, z. B.:

$$X = \sum \left[A_p \cdot \cos(nt + \alpha_p) \right],$$

wo n in allen Gliedern das gleiche ist, die Amplitude A_p und die Phasenconstanten α_p dagegen verschiedene Werthe haben können. Ebenso erhalten wir für Y und Z

$$Y = \sum \left[B_p \cdot \cos(nt + \beta_p) \right]$$

$$Z = \sum \left[C_p \cdot \cos(nt + \gamma_p) \right].$$

Indem man $\cos(nt + \alpha_p)$ zerlegt, erhält man

$$X = \cos nt \cdot \sum \left[A_p \cdot \cos \alpha_p \right] - \sin nt \cdot \sum \left[A_p \cdot \sin \alpha_p \right].$$

Oder kürzer

$$X = \mathfrak{A} \cdot \cos nt + \mathfrak{B} \cdot \sin nt,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der Zeit unabhängig sind. Ebenso können wir setzen:

$$Y = \mathfrak{A}_1 \cdot \cos nt + \mathfrak{B}_1 \cdot \sin nt$$

und

$$Z = \mathfrak{A}_2 \cdot \cos nt + \mathfrak{B}_2 \cdot \sin nt.$$

Durch Elimination von $\sin nt$ und $\cos nt$ aus den drei Gleichungen für X, Y und Z ergiebt sich:

$$X \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1) + Y \cdot (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \mathfrak{B}_2) + Z \cdot (\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}) = 0,$$

d. h. X, Y, Z sind einer linearen Gleichung mit constanten Coefficienten unterworfen, und die Strecke, deren Componenten X, Y, Z sind, mufs also fortdauernd in einer bestimmten Ebene liegen. Unter diesen Umständen wird es für unsere Uebersicht bequemer sein, wenn wir diese Ebene gleich zur Ebene der Coordinaten machen, etwa zur xy - Ebene. Dann haben wir elektrische Oscillationen nur nach verschiedenen Richtungen dieser Ebene hin. Wenn wir nun weiter verlangen, dafs alle elektrischen Schwingungen des Raumes sich nach derselben Richtung fortpflanzen sollen, und wenn an verschiedenen Punkten verschieden gerichtete Schwingungen sollen vorkommen können, so wird die Fortpflanzungsrichtung nur die z - Richtung sein können, weil die Fortpflanzungsrichtung elektrischer Schwingungen nothwendig senkrecht gegen die Richtung der Schwingung sein mufs. Andererseits wissen wir, dafs die gleichzeitig existirenden magnetischen Schwingungen, die demselben Lichtwellenzuge angehören, auch in einer Ebene vor sich gehen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ist. Diese Ebene wird also mit der Ebene der elektrischen Schwingungen übereinstimmen müssen. Es bleiben nun nur die beiden Gleichungen

$$X = \mathfrak{A} \cos nt + \mathfrak{B} \sin nt$$

$$Y = \mathfrak{A}_1 \cos nt + \mathfrak{B}_1 \sin nt$$

für die Componenten der elektrischen Schwingung übrig, da $Z = 0$ ist. Wir bekommen daraus:

$$\mathfrak{B}_1 X - \mathfrak{B} Y = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}) . \cos nt$$

und

$$\mathfrak{A}_1 X - \mathfrak{A} Y = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}) . \sin nt.$$

Nun können wir $\cos nt$ und $\sin nt$ eliminiren, indem wir die beiden Gleichungen ins Quadrat erheben und addiren. Dann erhalten wir:

$$(\mathfrak{B}_1 X - \mathfrak{B} Y)^2 + (\mathfrak{A}_1 X - \mathfrak{A} Y)^2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B})^2$$

Betrachten wir nun X und Y als gerichtete Strecken im Raume, so stellt die quadratische Gleichung zwischen X und Y, da sie in Bezug auf X und Y vom zweiten Grade ist, und die linke Seite für keine Werthe von X und Y negativ sein kann, eine Ellipse dar, welche in der xy-Ebene, d. h. in der gemeinsamen Ebene der Oscillationen liegt. Die allgemeinste Art der Bewegung in der betreffenden Oscillationsebene, welche durch eine vollkommen freie und unbegrenzte Combination von elektrischen Oscillationen möglich ist, die nur der Bedingung unterworfen sind, dafs sie alle dieselbe Schwingungsdauer haben, kann durch eine elliptische Bewegung dargestellt werden, wenn wir X und Y als Strecken betrachten. Den einfachsten Ausdruck für die darzustellenden Schwingungen gewinnen wir, wenn wir die Coordinatenaxen für x und y mit den beiden Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen lassen. Bei passender Wahl für den Anfangspunkt der Zeit erhalten wir dann Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} X &= \mathfrak{A}\,.\cos nt \\ Y &= \mathfrak{B}\,.\sin nt \end{aligned}\right\} \tag{425}$$

wo

$$\frac{X^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{Y^2}{\mathfrak{B}^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse ist. Schreibt man

$$X = \mathfrak{A}\,.\cos nt$$

und

$$Y.\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\,.\sin nt,$$

so sind die rechten Seiten die Coordinaten eines Punktes, der mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises vom Radius $\mathfrak{A}$ durchläuft. Es ergiebt sich daraus die Art, wie nun innerhalb einer Schwingungsperiode die Projectionen X und Y der einzelnen Componenten sich verändern. Sie verändern sich beide wie die Projectionen eines Radius, welcher regelmäfsige Kreisbewegungen macht, aber bei elliptischer Bewegung ist die eine Projection in constantem Verhältnifs $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ vergröfsert oder verkleinert.

Die Kreisbewegung selbst ist eine besondere Art der elliptischen Bewegungen, wenn nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Ein anderer specieller Fall der elliptischen Bewegung tritt ein, wenn die Amplitude der y-Componente verschwindend klein wird. Dann wird die Bewegung oder die Aenderung des Momentes nur dargestellt werden können durch einen Hin- und Hergang der x-Componente, und die Ellipse ist in eine gerade Linie übergegangen. Das ist der Fall der linearen Polarisation, von der wir ursprünglich ausgegangen sind, und die wir vorausgesetzt hatten, um das Spiegelungs- und Brechungsgesetz zu finden.

Wenn wir elliptische oder circulare Polarisation haben, dann haben wir es immer mit Schwingungen nach veränderlicher Richtung zu thun. Die Axen der Ellipse können nach jeder Richtung hin fallen. Daraus folgt aber auch, dafs, wenn die Ellipse sich in eine gerade Linie zusammenzieht, diese gerade Linie in jede Richtung der Schwingungsebene hinein fallen kann, d. h. also, dafs lineare Polarisation in jeder Richtung der Schwingungsebene möglich ist.

In den Gleichungen (425) $X = \mathfrak{A} \cos nt$ und $Y = \mathfrak{B} \sin nt$ können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Je nachdem wird die Ellipse in der einen oder anderen Richtung durchlaufen. Die beiden Arten kommen in der That neben einander vor. Man bezeichnet sie als rechts oder links drehend, und unterscheidet deshalb auch in Bezug auf die Circularbewegung eine Circularpolarisation nach rechts und nach links. Wir können das elliptisch oder circular polarisirte Licht uns auch aus zwei linear polarisirten Schwingungen zusammen gesetzt denken:

$$X = \mathfrak{A} \cos nt, \qquad Y = 0$$

und

$$X = 0, \qquad Y = \mathfrak{B} \sin nt.$$

Da $\sin nt = \pm \cos\left(nt \mp \frac{\pi}{2}\right)$, so können wir sagen, dafs die eine Schwingung gegen die andere einen Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ hat. Würden wir zwei senkrecht auf einander polarisirte Strahlen zusammensetzen, deren Phasenunterschied nicht $\frac{\pi}{2}$ wäre, so würde sich nach dem Obigen auch elliptisch polarisirtes Licht ergeben. Nur würden die Hauptaxen der Ellipse nicht in die Polarisationsebenen der beiden Strahlen fallen. Circular polarisirtes Licht ergiebt sich, wenn der Phasenunterschied gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, und zugleich die absoluten Beträge der Amplituden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen. Nun hing bei der totalen Reflexion der Phasenunterschied der beiden reflectirten Schwingungsarten von dem Einfallswinkel α ab; denn es war

$$\frac{p}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{c_1}$$

und

$$q^2 = p^2 - 1 = \frac{c_2^{\,2} \sin^2 \alpha}{c_1^{\,2}} - 1.$$

Mithin bekommen wir für q einen Ausdruck, welcher von $\sin \alpha$ abhängig ist; und demnach werden auch die beiden Ausdrücke, die wir bei den beiden Arten von Strahlen für $\operatorname{tg} \omega$ erhalten haben, von dem Winkel abhängig, und ebenso wird der Unterschied der beiden Werthe von ω von dem Einfallswinkel α abhängig. Wenn also die einfallenden Strahlen der beiden Arten gleiche Phase haben, so werden die reflectirten Strahlen gegen einander einen vom Einfallswinkel abhängigen Phasenunterschied zeigen. Darauf beruht nun die Anwendung der FRESNEL'schen Parallelepipeda, welche bezwecken Circularpolarisation hervorzubringen. Man kann (Fig. 52) von unten her die Strahlen der beiden Arten einfallen lassen senkrecht zur unteren Fläche. Dann werden sie zuerst von der ersten schrägen Fläche total reflectirt, und dann von der zweiten schrägen Fläche wieder total reflectirt, und treten schliefslich senkrecht aus der oberen Fläche aus. Es läfst sich nun, wenn man die Brechungsverhältnisse des Glases kennt, der Winkel berechnen, welcher nöthig ist, um bei jeder der beiden Reflexionen einen Phasenunterschied von $\pi/4$ hervorzubringen. Den Strahlen beider Arten giebt man die gleiche Amplitude, indem man das einfallende Licht durch ein Nicolsches Prisma linear polarisirt und die Polarisationsebene um 45^0 gegen die Einfallsebene der totalen Reflexion geneigt wählt. Man kann sich dann das linear polarisirte Licht in zwei Componenten zerlegt denken, die unter einem rechten Winkel gegen einander polarisirt sind, und keinen Phasenunterschied haben. Bei den totalen Reflexionen bekommen sie einen Phasenunterschied von je $\frac{\pi}{4}$, so dafs nach dieser zweimaligen Reflexion der Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ eingetreten ist. Es entsteht dann circular polarisirtes Licht.

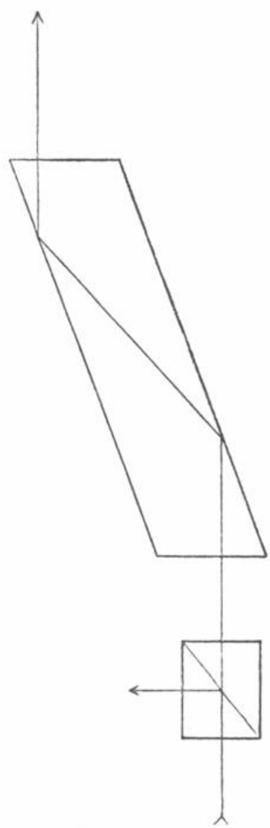

Fig. 52.

Zweiter Abschnitt.

Die Dispersion des Lichtes.

§ 97. Die zur Erklärung der Dispersion nöthigen Annahmen.

In dem System von Gleichungen, die sich aus der MAXWELL'schen Form der elektromagnetischen Theorie ergeben, ist, wie wir gesehen haben, die Möglichkeit von Schwingungssystemen enthalten, welche den Lichtschwingungen entsprechen können, und die Versuche von HERTZ haben gezeigt, daſs ähnliche Schwingungen von viel gröſserer Wellenlänge, welche nicht mehr sichtbar sind, auf rein elektrischem Wege gebildet und mit elektrischen Mitteln beobachtet werden können. Die Theorie erklärt auch, warum die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen in verschiedenen Substanzen verschieden ist. Denn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt von den Werthen der dielektrischen und der magnetischen Constanten ab, die in verschiedenen Substanzen verschiedene Werthe haben können. Die Grundgleichungen (399) und (400), wie sie MAXWELL gegeben hat, waren, wenn wir sie auf die Kräfte beziehen,

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

und

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Wir haben in § 12 gesehen, daſs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Transversalschwingungen in einem solchen Medium zu setzen ist

$$c = \frac{1}{A \cdot \sqrt{\varepsilon\mu}}\,.$$

Hierin bedeutet A eine Constante, die, wie in § 11 gezeigt worden ist, von dem Verhältniſs der elektrostatischen und electromagnetischen Maſseinheiten abhängt.

Das Verhältniſs der Lichtgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Medien, welche durch die Indices 0 und 1 unterschieden sein mögen, ist:

$$\frac{c_0}{c_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \mu_1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \tag{426}$$

oder wenn wir statt der Lichtgeschwindigkeiten die Brechungsverhältnisse der Medien gegen den leeren Raum einführen, die, wie wir sahen, den Lichtgeschwindigkeiten umgekehrt proportional sind:

$$\frac{n_1}{n_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \mu_1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}\,. \tag{427}$$

In den bekannten durchsichtigen Körpern ist das Verhältniſs $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ kaum von 1 unterschieden, und es verhalten sich daher angenähert die Quadrate der Brechungsverhältnisse, wie die dielektrischen Constanten:

$$\frac{n_1^{\,2}}{n_0^{\,2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\,. \tag{428}$$

Das war die Behauptung, welche Maxwell aufstellte, als er zuerst seine Theorie der Elektromagnetik gefunden hatte. Damals war die dielektrische Constante erst für wenige Substanzen gemessen. Es zeigte sich späterhin, daſs scharfe Messungen nur für sehr gut isolirende Körper möglich sind, und bei einer Reihe von solchen Körpern, Benzin, Paraffin, Terpentinöl und einigen ähnlichen, fand sich in der That die Gleichung (428) nahehin erfüllt. Nur muſste man berücksichtigen, daſs der Werth der Brechungsverhältnisse der verschiedenen durchsichtigen Körper für die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen verschieden ist, und Maxwell glaubte damals, daſs man bei allen Medien zu einer Uebereinstimmung kommen würde, wenn man die Brechungsverhältnisse der langsamsten Schwingungen, soweit man sie für die verschiedenen Substanzen ermitteln konnte, der Rechnung zu Grunde legte. Indessen lag in der elektromagnetischen Theorie zunächst noch kein Anhaltspunkt, um überhaupt die Möglichkeit der Dispersion zu erkennen, das heiſst die Thatsache zu erklären, daſs man für Licht von verschiedener Schwingungsdauer, also für verschiedenfarbiges Licht verschiedene Werthe des Brechungsverhältnisses fand, dafs also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Schwingungsdauer abhängig ist.

Diese Unterschiede der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die damit zusammenhängenden Unterschiede des Brechungsvermögens einer jeden durchsichtigen Substanz, sind nun aus den optischen Untersuchungen längst bekannt und zum Theil einer genauen Messung unterworfen worden. Es hat sich dabei gezeigt, dafs die verschiedenen durchsichtigen Substanzen aufserordentlich weit gehende Abweichungen haben, sowohl in Bezug auf die Verschiedenheit der Werthe des Brechungsverhältnisses, als auch in dem Gange der Dispersion, so dafs, wenn man das Brechungsverhältnifs als Function der Schwingungsdauer des betreffenden Lichtes darstellt, sich für verschiedene Körper wesentlich von einander verschiedene Curven ergeben. Christiansen und Kundt entdeckten, dafs sogar ganz grobe Abweichungen von dem regelmäfsigen Gange der Brechung bei solchen Körpern vorkommen, welche Lichtstrahlen einer bestimmten Farbe sehr stark absorbiren. Man nennt diese Art der Dispersion, bei welcher zum Theil das Licht, welches dem rothen Ende des Spectrums näher steht, stärker gebrochen wird, als Licht von der violetten Seite, anomale Dispersion, weil die Farben im Spectrum innerhalb gewisser Grenzen in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Es fragt sich nun, wie bei der elektromagnetischen Theorie diese Dinge angesehen werden können.

Wir finden Brechung des Lichtes und Dispersion überhaupt nur dann, wenn der Aether mit ponderablen Substanzen gemischt ist. Der Aether des Weltraums, welcher frei ist von ponderablen Substanzen, zeigt keine Dispersion. Bei den Verdeckungen von Jupitermonden, wo also ein leuchtender Körper für eine Weile ausgeschaltet ist, und auch bei den totalen Sonnenfinsternissen, wo das Sonnenlicht von unserer Erde abgehalten ist, und dann plötzlich wieder hervor bricht, würde man bei mäfsigen Werthen der Dispersion im Aetherraum zuerst eine der Farben bei dem neu auftretenden Licht sehen müssen, und dann würden allmählich die andern hinzu kommen. Das ist aber nicht zu beobachten. Soviel wir bisher ermittelt haben, ist die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Weltraum, wo wir keine Anwesenheit ponderabler Körper vermuthen können, für Licht jeder Schwingungsdauer die gleiche. Dispersion kommt nur in wägbaren durchsichtigen Substanzen vor, und wir müssen daraus schliefsen, dafs die Dispersion auf einem Einflufs beruht, den die ponderablen Substanzen auf die elektrischen und magnetischen Schwingungen des Aethers ausüben.

Nun hat die MAXWELL'sche Theorie auch zu der Folgerung geführt, daſs die im Aether stattfindenden elektrischen Kräfte auch ponderomotorisch wirken, d. h. also, das Streben hervorbringen, die in den Aether eingelagerte wägbare Substanz zu bewegen. Die elektrischen Kräfte werden als Spannungen angesehen, die im Aether in Richtung der Kraftlinien liegen, während sie Druckcomponenten senkrecht gegen die Richtung der Kraftlinien hervorbringen, so daſs man also in der That daran denken könnte, ob nicht die ponderablen Massen, welche in dem Aether eingelagert sind, durch die elektrischen und magnetischen Spannungen, die nach der MAXWELL'schen Anschauung im Aether zu Stande kommen, mit in Bewegung gesetzt werden.

Dieselbe Theorie giebt auch ganz bestimmten Aufschluſs über die Gröſse dieser Kräfte, und zwar giebt sie Resultate, welche sich vollständig mit denjenigen Resultaten vereinigen lassen, die wir über die Anziehungskräfte der elektrisirten Körper im Luftraum und auch in Räumen, welche mit isolirenden Medien gefüllt sind, durch Beobachtung erhalten. In einem von elektrischen Kräften verschiedener Richtung durchzogenen Raume sind die senkrechten Spannungen

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[X^2 - Y^2 - Z^2\right] \\ Y_y &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[Y^2 - Z^2 - X^2\right] \\ Z_z &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[Z^2 - X^2 - Y^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{429}$$

und die tangentialen Spannungen

$$\left.\begin{aligned} X_y &= Y_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} X.Y \\ Y_z &= Z_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} Y.Z \\ Z_x &= X_z = \frac{1}{4\pi} Z.X \end{aligned}\right\} \tag{430}$$

Wenn wir uns nun denken, daſs durch Lichtbewegung, die im Aether erregt ist, Spannungen entstehen, so würde ohne Zweifel nach der MAXWELL'schen Theorie zu folgern sein, daſs die wägbaren Atome dadurch in Bewegung gesetzt werden. Es hilft uns aber wenig für die Theorie der Dispersion, wenn wir nicht annehmen, daſs diese im Aether lagernden Atome auch noch wahre Elektricität enthalten. Die Kraftcomponenten nämlich, welche durch die Spannungen entstehen können, und welche auf die Oberfläche eines im Aether liegenden ponderablen Atomes etwa einwirken können, hängen von den Quadraten und den Producten der elektrischen Spannungen ab, die im Aether entstehen; d. h. also, wenn die Gröſsen X, Y, Z, die in den Ausdrücken der ponderomotorischen Kräfte vorkommen, ihre Richtung ändern und negative statt der positiven Zeichen bekommen, so bleiben alle diese Producte und Quadrate unverändert. Wenn z. B. das X positiv ist während der ersten Hälfte der Undulation, so wird es negativ während der zweiten Hälfte. Wenn es aber dann eine positive Kraft auf der Oberfläche des Atoms während der ersten Hälfte der Undulation hervorbringt, so wird dasselbe während des zweiten Theiles der Oscillation geschehen müssen. Es wird ein Wechsel zwischen zwei positiven Gröſsen und Null sein, und die Veränderungen der Kräfte werden zweimal so oft vor sich gehen, wie die Wechsel in den elektrischen Momenten und elektrischen Kraftgröſsen. Unter diesen Umständen ist nicht darauf zu rechnen, daſs die ponderomotorischen Kräfte zur Unterstützung oder zur Abänderung der ursprünglich gegebenen Oscillationen beitragen können. Anders ist es dagegen, wenn wir den ponderablen Theilchen auch noch elektrische Ladungen zuschreiben, weil alsdann die elektrischen Spannungen nicht lediglich von der Lichtbewegung herrühren und daher, wie wir sehen werden, ponderomotorische Kräfte hervorbringen, deren Periode mit der der Lichtbewegung übereinstimmt. Nun hat aber eine ganz andere Art der Untersuchung in der That auf die Vorstellung geführt, daſs die Atome der ponderablen Substanz mit elektrischen Mengen geladen sind.

§ 98. Die elektrische Ladung der Atome.

Wenn man einen elektrischen Strom durch eine Reihe von flüssigen Körpern leitet, die durch den Strom zersetzt werden können, und die Quanta der Zersetzungsproducte untersucht, die durch die elektrolytische Wirkung des Stromes an den Enden der Leitung zum Vorschein kommen, so stehen diese, wie Faraday gefunden hat, im Verhältniſs der chemischen Aequivalente. Es werden durch denselben Strom in der gleichen Zeit eben so viel Valenzwerthe bei dem einen Elektrolyten frei gemacht und getrennt werden, wie bei jedem andern Elektrolyten, den der Strom passirt, so daſs wir also sagen können: Jede Valenz scheidet mit derselben bestimmten Menge von Elektricität aus, was auch der Stoff sein mag. Im Wasser z. B. haben wir ein

Atom O, welches mit zwei Atomen H verbunden ist; in der Salzsäure hingegen sind zwei Atome Cl mit zwei Atomen H verbunden, was wir in der Form

$$O{}^{H}_{H} \qquad\qquad \begin{matrix} ClH \\ ClH \end{matrix}$$

schreiben können. Wenn wir nun den Strom durch eine Zelle hindurch leiten, in welcher H_2O zersetzt wird, so werden für je ein Atom O zwei Atome H frei. Wenn wir denselben Strom weiter durch eine Zelle gehen lassen, in welcher HCl zersetzt wird, so werden ebenfalls zwei Atome H frei, dafür aber auch zwei Atome Cl. Die gleiche Menge Elektricität, welche einerseits zwei Atome H in beiden Versuchen frei macht, macht für diese beiden Atome H in dem Wasser je ein Atom O, und in der Salzsäure je zwei Atome Cl frei. Dasselbe zeigt sich auch, wenn Metalle aus ihren Verbindungen durch den Strom ausgeschieden werden. Für gleiche Valenzen werden immer gleiche Quanta Elektricität an die beiden Elektroden entweder abgegeben oder von ihnen aufgenommen, so dafs also durch die Trennung einer gleichen Anzahl von Valenzen in chemischen Verbindungen auch immer gleiche Quanta wahrer Elektricität auftreten, d. h. solcher Elektricität, die sich wie eine Substanz verhält, welche die gleiche bleibt, auch wenn der Körper in ein anderes dielektrisches Medium eintritt. Nun zeigt sich andererseits, dafs Elektricität durch solche Elektrolyten gar nicht anders hindurchpassiren kann, als indem sie die betreffende Elektrolyse zu Stande bringt, dafs also z. B. positive Elektricität in dem Elektrolyten nur dadurch fortgeleitet werden kann, dafs eine Reihe von positiven Atomen mit dem Strome der positiven Elektricität fortgeführt werden, also dadurch, dafs diese Atome ausscheiden und an der Grenze der Flüssigkeit nun als ein elektrisch neutral gewordener Körper von anderer chemischer Beschaffenheit auftreten. Wenn z. B. das Wasser zersetzt wird, so ist der zersetzte Wasserstoff Kation und geht in Richtung des Stromes der positiven Elektricität. An der Grenze tritt freier neutraler Wasserstoff auf, und es wird ein gewisses Quantum positiver Elektricität an die negativ geladene Elektrode abgegeben, und ebenso geht der Sauerstoff nach der andern Seite als Anion. Er scheidet sich da in Gestalt eines elektrisch neutralen Körpers aus, d. h. er hat keine elektrische Ladung mehr, nachdem er ausgeschieden ist. Dabei ist aber von dem ausscheidenden Sauerstoff ein bestimmtes Aequivalent, und zwar für eine gleiche Menge Sauerstoff ein ganz festes Aequivalent von negativer Elektricität an die positiv geladene Anode abgegeben worden. Das führt zu der Vorstellung, daſs in der chemischen Verbindung, welche durch die Elektrolyse getrennt wird, das Kation, also in diesem Falle der Wasserstoff, mit positiver Elektricität geladen ist, und zwar muſs jedes Atom in seiner Valenzstelle ein bestimmtes Aequivalent von positiver Elektricität enthalten, während der Sauerstoff mit zwei Aequivalenten negativer Elektricität geladen sein muſs, entsprechend den beiden Aequivalenten positiver Elektricität, die an dem damit verbundenen Wasserstoff haften. Wenn diese Körper ausscheiden, so müssen wir annehmen, daſs von je zwei Atomen des Wasserstoffs das eine seine positive Ladung an die Elektrode abgiebt, und daſs dieses bisher positiv geladene Wasserstoffatom, um sich mit dem andern zu elektrisch neutralem Wasserstoff vereinigen zu können, von der negativ geladenen Kathode ein gleiches Quantum negativer Elektricität aufnehmen muſs. Dadurch entsteht an der Kathode Wasserstoff, der nicht mehr in chemischer Verbindung ist, von dem wir also vermuthen dürfen, daſs er aus zwei verschiedenartig geladenen Atomen Wasserstoff besteht, während der in der Verbindung enthaltene mit zwei positiven Aequivalenten Elektricität verbunden ist, und der zweiwerthige Sauerstoff an seinen beiden Valenzstellen negative Aequivalente enthält. Ebenso würde zu vermuthen sein, daſs jedes Atom Chlor ein negatives Aequivalent enthält, so lange es mit Wasserstoff verbunden ist. Wenn dagegen das Chlor frei geworden ist, verhält es sich nicht mehr als negativ geladener elektrischer Körper, sondern elektrisch geprüft, ist es dann neutral ebenso wie der ausgeschiedene Wasserstoff.

Diese Erscheinungen der Elektrolyse, die sich namentlich in dem FARADAY'schen Gesetz äuſsern, haben also zu der Vorstellung geführt, daſs alle, mindestens alle elektrolytisch zersetzbaren Körper aus Atomen zusammengesetzt sind, welche elektrisch entgegengesetzt geladen sind; und zwar ist jede Valenzstelle mit einer bestimmten für alle Valenzstellen aller verschiedenen Stoffe immer gleich groſsen Menge entweder positiver oder negativer Elektricität beladen. Wenn nun dergleichen elektrisch geladene Atome im Aether liegen, dann würden sie durch die Aetherspannungen Wirkungen erfahren, und dann bekommen wir in der That Kräfte, welche während jeder Undulation nur einmal wechseln, und also Oscillationen von gleicher Periode, wie sie im Aether stattfinden, an den wägbaren Theilchen hervorbringen können. Diese Bewegungen brauchen einen Theil der Kraft auf, welche in dem Aether hervorgebracht war, verändern dadurch auch die Aetheroscillationen und rufen so die Dispersion hervor.

§ 99. Die elektrischen Momente der Ionenpaare.

Die Elektricitätsmengen, mit denen nach den Erscheinungen der Elektrolyse die Atome geladen sind, rufen nun sehr kräftige Anziehungen zwischen diesen hervor. Das Quantum Elektricität z. B., welches in den beiden Bestandtheilen eines Milligramms Wasser frei wird, ist so grofs, dafs der positive Theil selbst in einer Meile Entfernung noch eine enorme Anziehung auf den negativen ausüben würde. Wir müssen uns also die Elektricitätsmengen, welche an den Atomen haften, als sehr grofs vorstellen im Vergleich mit der Masse der Atome. Wenn wir nun annehmen, dafs ponderable Substanz in dem Aether eingelagert ist, welche aus chemischen Verbindungen von geladenen Ionen besteht, so müssen die elektrischen Kräfte, welche im Aether wirken, auch gleichzeitig auf diese eingefügten und elektrisch geladenen ponderablen Atome ponderomotorische Kräfte ausüben.

Nach den Formeln, welche über die Spannungen, die im Innern von dielektrischen und magnetischen Körpern eintreten, sowohl nach der älteren Theorie, wie sie ursprünglich von Poisson unter Zugrundelegung von Fernkräften entwickelt worden war, als auch in den neueren Theorieen, hat man

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2] \\ Y_y &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[-\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2] \\ Z_z &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[-\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2] \end{aligned}\right\} \tag{431}$$

$$\left.\begin{aligned} X_y = Y_x &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{X}.\mathfrak{Y}] \\ Y_z = Z_y &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{Y}.\mathfrak{Z}] \\ Z_x = X_z &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{Z}.\mathfrak{X}] \end{aligned}\right\} \tag{432}$$

Diese Gleichungen sind nur eine andere Form der Gleichungen (429) und (430), die durch die Einführung der elektrischen Momente statt der Kräfte entsteht. Die x-Componente der Kraft, welche auf ein unendlich kleines Parallelepipedon wirkt, ist

$$\left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz,$$

und ähnliche Ausdrücke gelten für die anderen Componenten.

Wir nehmen nun an, dafs der Körper homogen sei, so dafs in den verschiedenen Theilen, über welche wir unsere Ausdrücke auszudehnen haben, die Constante ε immer von derselben Gröfse ist. Dann erhalten wir für die x-Componente der Kraft, wenn wir von dem Factor $dx\,dy\,dz$ absehen,

$$\frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x} - \mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\right] + \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right].$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}$$

bedeutet die Dichtigkeit der wahren Elektricität und möge mit σ bezeichnet werden. Der erste Theil der Kraft ist demnach gleich der elektrischen Kraft $X = \frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ multiplicirt mit der in dem Element enthaltenen wahren Elektricität. Die folgenden Theile

$$+\frac{4\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right]$$

können nach den Gleichungen (31), (32) und (33) auch in der Form

$$A\mu\mathfrak{Y}\frac{\partial N}{\partial t} - A\mu\mathfrak{Z}\frac{\partial M}{\partial t}$$

geschrieben werden, und können also nur da von Null verschieden sein, wo ein magnetisches Moment sich ändert, d. h. also, wo, wie wir uns ausgedrückt haben, ein magnetischer Strom durch den elektrisirten Körper hindurch geht. Die Ausdrücke für die y- und z-Componenten sind analog. Uns interessirt hier für die Lichttheorie im Wesentlichen nur das erste Glied $X\sigma$. Denn da, wie wir sahen, die Ladung der Atome verhältnissmäfsig grofs ist, so ist bei kleinen Werthen der elektrischen und magnetischen Kraft $X\sigma$ als grofs gegen die folgenden Glieder anzusehn.

Wenn nun elektrisirte Ionen mit ihren elektrischen Ladungen im Aether liegen, und zur Zeit eine positive elektrische Kraft an irgend einer Stelle wirkt, so wird diese das positiv geladene Atom in ihrer eigenen Richtung fortzuführen streben, das negativ geladene Atom aber in entgegengesetzter Richtung. Die elektrolytischen Erscheinungen führten auf den Satz, dafs die Ladung einer jeden Valenz in jedem Atom gleich grofs ist, und also immer in einem neutral elektrischen Körper jedem positiv geladenen Atom ein gleich stark negativ geladenes entsprechen müsse. Die Kräfte also, welche auf ein Paar von positiv und negativ geladenen Ionen einwirken, werden immer als ein Kräftepaar betrachtet werden können, das den Schwerpunkt des Ionenpaares nicht verrücken kann, wohl aber Aenderungen hervorbringen könnte sowohl in der Richtung, welche die beiden Ionen zu einander haben, als auch in der Entfernung, in der sie gegenseitig liegen, wobei aber ihr gemeinsamer Schwerpunkt unverändert bleiben mufs. Dadurch würde das elektrische Moment des Ionenpaars verändert. Wenn die Ionen durch die elektrische Kraft auseinandergerissen werden, würde das Moment wachsen, durch eine entgegengesetzte Kraft würde es vermindert werden. Wenn das Ionenpaar gedreht wird, so würden zu dem ursprünglichen Moment, das eine bestimmte Richtung hat, noch Componenten von anderer Richtung hinzutreten können. Wir unterscheiden demnach einerseits die elektrischen Momente, welche in dem Aether durch seine eigene dielektrische Beschaffenheit erregt werden können, sowie seine magnetischen Momente, und andrerseits die elektrischen Momente der Ionenpaare. Magnetische Momente der Ionenpaare anzunehmen haben wir bisher noch keinen Grund. Ihre Existenz ist in hohem Grade unwahrscheinlich, da wir keine isolirten Massen kennen, welche nur einen magnetischen Pol enthielten und nur mit einer Art von Magnetismus geladen wären.

Die elektrischen Momente des Aethers selbst setzen wir wie bisher den elektrischen Kräften proportional:

$$\mathfrak{X} = \frac{\varepsilon X}{4\pi}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon Y}{4\pi}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon Z}{4\pi} .$$

Die elektrischen Momente der beweglichen Ionenpaare dagegen würden nicht der elektrischen Kraft proportional sein, denn sie werden erstens durch die Trägheit der schweren Atome, welche sich bewegen, beeinflufst, und zweitens werden wir in Rücksicht ziehen müssen, dafs Wärmebewegungen bei diesen Erschütterungen in den schweren Massen zu Stande kommen können, also allerlei unregelmäfsige Oscillationen, die auf Kosten der Kraft geschehen, bei denen also ein Reibungsvorgang stattfindet, durch welchen die Arbeitsäquivalente in Wärmebewegung verwandelt werden. Durch diese beiden Umstände, die Trägheit und die Reibung, wird also bedingt, dafs die elektrischen Momente der Ionenpaare nicht lediglich von der Gröfse der elektrischen Kraft abhängen. Denn sie müssen sich erst in ihre neue Gleichgewichtslage hinüber bewegen, und sie werden dabei Beschleunigungen und Verzögerungen erleiden, so dafs sie allerdings immer derjenigen Gleichgewichtslage zustreben, in welcher die elektrischen Kräfte sie zu erhalten suchen, aber sie eventuell nie erreichen, sondern um sie herum oscilliren. Die elektrischen Momente der Ionen berechnet auf die Volumeinheit sollen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden.

§ 100. Die Bewegungsgleichungen eines mit Ionenpaaren durchsetzten Aethers.

Die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten sind von Hamilton in eine sehr zweckmäfsige Form gebracht worden. Bezeichnet F die potentielle Energie des Systems und L die kinetische Energie, so mufs die erste Variation des Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} (F - L)\, d\, t$$

verschwinden, wenn die Variationen der Coordinaten für t_1 und t_2 gleich Null gesetzt werden. Hierin hängt F nur von den Coordinaten ab, während L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ist. Die Energie des Systems, die wir mit E bezeichnen wollen, ist dann

$$E = F + L.$$

Die Differenz $F - L$ wollen wir das kinetische Potential nennen und mit H bezeichnen.

Auf diese Weise werden sogleich die Differentialgleichungen für die unabhängigen Veränderlichen gewonnen, ohne dafs man die Differentialgleichungen für die Coordinaten der Massenpunkte selbst aufzustellen braucht. Wir wollen die unabhängigen Veränderlichen, die die Lage des Systems bestimmen, in einem erweiterten Sinne des Wortes „Coordinaten“ des Systems nennen, und ihre Differentialquotienten nach der Zeit „Geschwindigkeiten“. Dann ist F eine Function der Coordinaten und L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten, deren Coefficienten die Coordinaten enthalten können.

Auch den Begriff der Kraft wollen wir erweitern. Eine Kraft kann man durch die Arbeit definiren, die sie bei einer gegebenen Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet. Ist $d\mathfrak{A}$ die von einer Kraft bei der Verschiebung dx geleistete Arbeit und ist K die in die Richtung der Verschiebung fallende Componente, so ist:

$$d\mathfrak{A} = K \, . \, dx.$$

Ist nun F die potentielle Energie des Systems und K die Componente der inneren Kraft, d. h. der in dem Ausdruck der potentiellen Energie berücksichtigten Kraft des Systems, die an dem betreffenden Punkte angreift, so ist $d\mathfrak{A} = - dF$ zu setzen. Denn wenn K die Richtung der Verschiebung hat, so wird kinetische Energie erzeugt und mithin die potentielle Energie vermindert werden. Es ist dann also

$$K = -\frac{\partial F}{\partial x} \cdot$$

Wenn nun $p_1, p_2 \dots p_n$ die Coordinaten des Systems sind in dem erweiterten Sinne des Wortes, so wollen wir analog $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$ die der Coordinate p_a entsprechende Kraft nennen.

Man kann nun die Hamilton'sche Form der Bewegungsgleichungen auch auf den Fall ausdehnen, wo zu den inneren Kräften des Systems, die als Functionen der Coordinaten betrachtet werden, äufsere Kräfte hinzutreten, die in jedem Augenblicke ganz beliebige Werthe haben können. Man braucht zu dem Ende nur zu H eine Summe $\sum P_a p_a$ hinzuzufügen, wo die Gröfsen P_a als Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten betrachtet werden. In der Ruhelage, wo $L = 0$ ist, würde die Hamilton'sche Form dann verlangen, dafs

$$\frac{\partial F}{\partial p_a} + P_a = 0$$

ist. Oder mit anderen Worten: $- P_a$ ist die äufsere Kraft, die nöthig ist, um der inneren Kraft $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$ das Gleichgewicht zu halten. In dieser Form liefert das Hamilton'sche Integral bei der Variation Lagrange's Gleichungen für die äufseren Kräfte:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_a}\right) = - P_a,$$

worin $q_a = \frac{d p_a}{dt}$ gesetzt ist.

Diese Methode, aus der Variation eines Integrals, das nichts anderes als die Energiequanta des Systems enthält, die Bewegungsgleichungen zu finden, läſst sich nun auch auf andere physikalische Vorgänge ausdehnen, die nicht einfach auf Bewegungen wägbarer Massen und auf NEWTON's Bewegungsgesetze zurückzuführen sind, in denen sich aber doch Energiequanta bethätigen.

Es wird aber nothwendig, die ältere engere Annahme fallen zu lassen, wonach die Geschwindigkeiten nur in dem Werthe der kinetischen Energie und zwar in Form einer homogenen Function zweiten Grades vorkommen, und zu untersuchen, wie sich die Sache verhält, wenn H eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten von beliebiger Form ist.

Die MAXWELL'schen Gleichungen kann man auf diese Weise ableiten, wenn man H als Summe aus den folgenden über den unendlichen Raum erstreckten Integralen zusammensetzt.

$$\left.\begin{aligned}
&H = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q \\
&\Phi_e = 4\pi \iiint \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} \right\} dx\, dy\, dz \\
&\Phi_m = 4\pi \iiint \frac{1}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx\, dy\, dz \\
&\Phi_q = 4\pi A \iiint \left\{ \mathfrak{U} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \mathfrak{V} \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \mathfrak{W} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\} dx\, dy\, dz
\end{aligned}\right\} \quad (433)$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ hängen dabei mit den Componenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ des magnetischen Moments durch die Gleichungen

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}, \qquad \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}$$

zusammen.

Die Variation von H nach $\mathfrak{U}$ liefert:

$$4\pi \int_{t_1}^{t_2} \iiint \frac{1}{\mu} \left(- \mathfrak{M} \frac{\partial \delta \mathfrak{U}}{\partial z} + \mathfrak{N} \frac{\partial \delta \mathfrak{U}}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz\, dt$$

$$+ 4\pi A \int_{t_1}^{t_2} \iiint \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\, \delta \mathfrak{U}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

oder wenn man das erste Integral durch partielle Integration nach y und z umgestaltet und beachtet, dafs die über die Grenze erstreckten Theile des Integrals wegfallen:

$$4\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)+A\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right\}\delta\,\mathfrak{U}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Soll diese Variation verschwinden, so müssen wir haben

$$A\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)$$

Auf analoge Weise ergeben sich aus der Variation nach $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ die den anderen beiden Coordinatenrichtungen entsprechenden MAXWELL'schen Gleichungen.

Die Variation von H nach $\mathfrak{X}$ liefert:

$$4\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\,\delta\,\mathfrak{X}\,dx\,dy\,dz\,dt+4\pi A\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\mathfrak{U}\,\frac{\partial\,\delta\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

und nach partieller Integration des zweiten Integrals nach t

$$4\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\left\{\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}-A\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,t}\right\}\delta\,\mathfrak{X}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Das Verschwinden der Variation verlangt

$$A\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$$

und analog ergiebt sich

$$A\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\quad\text{und}\quad A\frac{\partial\,\mathfrak{W}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Differentiirt man die zweite dieser Gleichungen nach z, die dritte nach y und zieht sie von einander ab, so erhält man die MAXWELL'sche Gleichung

$$A\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

und analog ergeben sich die andern beiden

$$A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)$$

Wie wir in § 32 fanden bedeutet das Integral Φ_e die elektrische Energie und Φ_m die magnetische Energie.

Will man die Bewegung des Aethers in den MAXWELL'schen Gleichungen mit berücksichtigen, so hat man nur zu beachten, dafs der elektrische und magnetische Strom auf ein sich mit dem Aether fortbewegendes, aus bestimmten Aethertheilchen bestehendes Flächenelement bezogen werden mufs, dessen Gestalt und Lage sich also mit der Zeit ändert. Werden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ als Functionen der Zeit und fester Raumcoordinaten $x\,y\,z$ betrachtet, so drückt z. B. $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}dx\,dy$ nicht den elektrischen Strom aus, der durch das Flächenelement $dx\,dy$ tritt, wenn wir es sich mit dem Aether bewegen lassen. Der Ausdruck, der in diesem Falle an die Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ zu treten hat, ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Es mögen die Aenderungen $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ des Vectors $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gesucht werden, welche nöthig sind, damit der Vector

$$\mathfrak{X} + \delta\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y} + \delta\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z} + \delta\mathfrak{Z}$$

mit einem im Aether in der Zeit dt fortbewegten unendlich kleinen Parallelogramm ein Parallelepipedon von gleichem Volumen bestimme, wie der Vector $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit dem ursprünglichen Parallelogramm. Es liege das Parallelogramm ursprünglich in der $x\,y$-Ebene, und es seien die Vectoren $dx, 0, 0$ und $0, dy, 0$ zwei anstofsende Seiten. Dann ist das Volumen des ursprünglichen Parallelepipedons gleich $\mathfrak{Z}\,dx\,dy$. Sind nun α, β, γ die Geschwindigkeiten der Aetherbewegung, die auch als Functionen von x, y, z, t betrachtet werden, so geht in der Zeit dt der Vector dx, 0, 0 in

$$dx + \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx\,dt, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}dx\,dt, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x}dx\,dt$$

der Vector 0, dy, 0 in

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}dy\,dt, \quad dy + \frac{\partial \beta}{\partial y}dy\,dt, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y}dy\,dt$$

über. Das Parallelogramm $dx\,dy$ erhält demnach in der Zeit dt die drei Projectionen:

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial x} dx\,dy\,dt, \quad -\frac{\partial \gamma}{\partial y} dx\,dy\,dt, \quad dx\,dy + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dx\,dy\,dt,$$

wobei die Gröſsen vierter Ordnung weggelassen sind.

Das Volumen des neuen Parallelepipedons wird demnach, wenn wir die Gröſsen vierter Ordnung weglassen:

$$\left[-\mathfrak{X}\frac{\partial \gamma}{\partial x} dt - \mathfrak{Y}\frac{\partial \gamma}{\partial y} dt + \mathfrak{Z} + \delta\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dt\right] dx\,dy.$$

Soll also das Volumen unverändert bleiben, so ist zu setzen:

$$\delta\mathfrak{Z} = \left[\mathfrak{X}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\right] dt.$$

Nun rückt das Flächentheilchen in der Zeit dt von dem Punkte $x\,y\,z$ zu dem Punkte $x + \alpha\,dt$, $y + \beta\,dt$, $z + \gamma\,dt$. Wird $\mathfrak{Z}$ als Function von $x\,y\,z\,t$ angesehn, so würde also die Aenderung von $\mathfrak{Z}$ in der Zeit dt, wenn man dabei die Aenderungen von $x\,y\,z$ berücksichtigt, gleich:

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\alpha\,dt + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\beta\,dt + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\gamma\,dt$$

sein. Wenn dies gleich $\delta\mathfrak{Z}$ wäre, so würde das bedeuten, daſs in der Zeit dt kein elektrischer Strom durch die Fläche $dx\,dy$ hindurchtritt. Wenn es aber von $\delta\mathfrak{Z}$ verschieden ist, so stellt die Differenz die auf die Flächeneinheit berechnete in der Zeit dt hindurchtretende Elektricitätsmenge dar. Dividirt man durch dt, so erhält man den auf die Flächeneinheit berechneten Strom, der durch die im Aether sich fortbewegende Fläche hindurchtritt. Dieser Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\gamma - \mathfrak{X}\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma\right)$$

muſs also in den MAXWELL'schen Gleichungen an Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ eingesetzt werden, wenn man die Aetherbewegung berücksichtigen will. Analoge Ausdrücke ergeben sich an Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$, sowie an

Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$, wo aber $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0$ gesetzt werden kann, da wir keinen wahren Magnetismus annehmen.

Diese erweiterte Form der MAXWELL'schen Gleichungen ist ebenfalls aus der Variation des Integrals zu gewinnen, wenn man nur in Φ_q an Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ die neuen Ausdrücke einführt, welche die Bewegung des Aethers berücksichtigen. Die Variation nach $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ gleich Null gesetzt, liefert dann

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \sigma\alpha + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)\right\}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \sigma\beta + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}\gamma - \mathfrak{Z}\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}\alpha - \mathfrak{X}\beta)\right\}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \sigma\gamma + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (434)$$

wo σ für $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$ geschrieben ist.

Die Variation nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ liefert

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{N}\beta - \mathfrak{M}\gamma\right\}\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha\right\}\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{M}\alpha - \mathfrak{L}\beta\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (435)$$

Differentiirt man die zweite Gleichung nach z, die dritte nach y und zieht beide von einander ab, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) = A\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha)\right\}$$

und auf analoge Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{M}\gamma - \mathfrak{N}\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{M}\alpha - \mathfrak{L}\beta)\right\} \quad (436)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{L}\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{N}\beta - \mathfrak{M}\gamma)\right\}
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (434) und (436) enthalten auf den rechten Seiten die Componenten des elektrischen und magnetischen Stromes, bezogen auf ein mit dem Aether sich bewegendes Flächenelement, auf die Einheit der Fläche berechnet.

Jetzt ist es nicht schwer, die Aenderungen anzugeben, die man an der Function H anbringen mufs, um auch die Bewegung der Ionen zu berücksichtigen. Es sollten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Componenten des auf die Volumeinheit berechneten elektrischen Momentes der ponderabeln Materie sein.

In der Gleichgewichtslage würden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ den Componenten der elektrischen Kraft, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, proportional gesetzt werden können, so dafs wir die Componenten der elektrischen Kraft, welche die Momente $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in der Ruhelage erzeugen, gleich

$$\frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}, \quad \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}, \quad \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}$$

setzen können, wo ϑ eine der ponderabeln Materie zukommende Constante ist. Sind die elektrischen Momente der Ionen nicht in der Gleichgewichtslage, so sind

$$X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}, \quad Y - \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}, \quad Z - \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}$$

die übrig bleibenden Componenten, die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu ändern streben, oder mit anderen Worten: wir können uns z. B. X in die beiden Theile $\left(X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}\right) + \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}$ zerlegt denken, von denen dem zweiten durch das Moment $\mathfrak{x}$ das Gleichgewicht gehalten wird, so dafs nur die Wirkung von $X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}$ übrig bleibt.

Bei der Aenderung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ um $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ ist die potentielle Energie ebenso zu berechnen, wie die Aenderung der potentiellen Energie bei der Bewegung eines Magneten im magnetischen Felde. Auf die Einheit des Volumens berechnet, ist die Aenderung der potentiellen Energie

$$-\left\{\left(X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}\right)d\mathfrak{x} + \left(Y - \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}\right)d\mathfrak{y} + \left(Z - \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}\right)d\mathfrak{z}\right\}$$

oder

$$d\left\{-(X\mathfrak{x} + Y\mathfrak{y} + Z\mathfrak{z}) + \frac{4\pi}{2\vartheta}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\right\}$$

Für Φ_e haben wir daher jetzt zu setzen:

$$\Phi_e = 4\pi\iiint\left\{\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}\mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta}\right\} dx\, dy\, dz \quad (437)$$

Der zweite, mit Φ_m bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentiales kann unverändert bleiben. Der dritte, elektromagnetische Theil Φ_q reducirt sich, indem wir in den Ausdrücken

$$\mathfrak{U}\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\sigma\alpha+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\beta-\mathfrak{Y}\alpha)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\gamma-\mathfrak{Z}\alpha)\right\}$$

und den beiden analogen die Glieder dritten Grades kleiner Gröſsen (zu denen aber σ nicht gehört, das wir uns an den Ionen verhältniſsmäſsig groſs vorzustellen haben) weglassen, auf:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_q = 4\pi A\iiint\left\{\mathfrak{U}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha\sigma\right)+\mathfrak{V}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}+\beta\sigma\right)\right.\\ \left.+\mathfrak{W}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}+\gamma\sigma\right)\right\}dx\,dy\,dz\end{aligned}\right\}\tag{438}$$

Das σ ist überall gleich Null, auſser an den elektrisch geladenen Stellen der Ionen. Wenn wir annehmen, daſs der Aether sich an diesen Stellen ebenso bewegt wie die Ionen, so ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}=\alpha\sigma,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}=\beta\sigma,\quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}=\gamma\sigma$$

und also:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_q = 4\pi A\iiint\left\{\mathfrak{U}\frac{\partial(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})}{\partial t}+\mathfrak{V}\frac{\partial(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})}{\partial t}\right.\\ \left.+\mathfrak{W}\frac{\partial(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z})}{\partial t}\right\}dx\,dy\,dz\end{aligned}\right\}\tag{438a}$$

Auſserdem haben wir in dem Ausdruck für H nun noch die lebendige Kraft der Ionen und die Reibung zu berücksichtigen.

Die Componenten der Geschwindigkeit der Ionen sind den Gröſsen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$ proportional. Denn wenn dx, dy, dz die Projectionen des Weges sind, die das eine Ion eines Ionenpaares in der Zeit dt zurücklegt, so sind $-dx$, $-dy$, $-dz$ die Projectionen des Weges, den das andere Ion in derselben Zeit zurücklegt. Ist ferner e die Ladung des ersten, so ist $-e$ die Ladung des zweiten Ions, und mithin sind $2e\,dx$, $2e\,dy$, $2e\,dz$ die Aenderungen der Componenten ihres elektrischen Momentes. Man kann daher die lebendige Kraft der Ionen in der Form

$$\frac{1}{2}\iiint m_1\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz\tag{439}$$

schreiben, wo m_1 der Dichtigkeit der ponderabeln Materie proportional ist. Die lebendige Kraft mufs mit dem negativen Zeichen in H aufgenommen werden. Die Reibungskräfte, deren Componenten, auf die Volumeinheit berechnet, mit $-\mathfrak{x}_1$, $-\mathfrak{y}_1$, $-\mathfrak{z}_1$ bezeichnet werden mögen, setzen wir den Geschwindigkeiten der Gröfse nach proportional, aber von entgegengesetzter Richtung, und schreiben demgemäfs

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\ \mathfrak{y}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ \mathfrak{z}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{440}$$

wo k_1 eine positive Gröfse ist.

Nach dem, was oben bemerkt wurde, kann ihr Einflufs ebenfalls aus der Variation des kinetischen Potentiales erhalten werden, wenn man zu H den Ausdruck

$$\iiint (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1)\, dx\, dy\, dz \tag{441}$$

hinzufügt und bei der Variation $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ nicht mit variirt. Das Integral, dessen Variation verschwinden soll, besteht also aus den Zeitintegralen über Φ_e, Φ_m, Φ_q, wie diese in den Gleichungen (437), (438) und (438a) dargestellt sind, und über

$$-\frac{1}{2}\iiint m_1 \left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+\iiint \left\{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1\right\} dx\, dy\, dz$$

Daraus ergiebt sich:

1. Bei der Variation nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon} &= A\, \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \\ \frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon} &= A\, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \\ \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon} &= A\, \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{442}$$

woraus durch Differentiation und Subtraction, wie oben bei den Gleichungen (436), die Gleichungen gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (443)$$

2. Bei der Variation nach $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial (\mathfrak{X}+\mathfrak{x})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)\\
A\frac{\partial (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\\
A\frac{\partial (\mathfrak{Z}+\mathfrak{z})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (444)$$

3. Bei der Variation nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

$$-\frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta} - 4\pi A\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + m_1\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{x}_1 = 0,$$

was, combinirt mit den Gleichungen (440) und (442), giebt:

$$\frac{8\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{x} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

und entsprechend

$$\frac{8\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{y} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \quad (445)$$

$$\frac{8\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{z} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}+1\right) &= a^2\\
\frac{\varepsilon m_1}{8\pi} &= m\\
\frac{\varepsilon k_1}{8\pi} &= k
\end{aligned}\right\} \quad (446)$$

somit wird

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= a^2 \mathfrak{x} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\
\mathfrak{Y} &= a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\
\mathfrak{Z} &= a^2 \mathfrak{z} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{445a}$$

§ 101. Die Dispersionsformeln.

Nachdem wir so die Grundgleichungen unseres Problems gebildet haben, ist es nicht schwer, nun die weiteren Schlüsse daraus zu ziehen. Wir wollen uns auf den einfachsten Fall beschränken, dafs wir ebene Wellen haben, die sich in Richtung der x-Axe fortpflanzen. Wir wissen, dafs sich solche Wellen fortpflanzen können, wenn nach der einen Polarisationsrichtung elektrische, nach der anderen magnetische Schwingungen bestehen, und diese Schwingungen alle senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung sind. Wir wollen annehmen, dafs die elektrischen Schwingungen in Richtung der y-Axe und die magnetischen Schwingungen in Richtung der z-Axe vor sich gehen. Dann werden wir für die elektrischen Momente setzen können:

$$\mathfrak{Y} = B \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = 0 \,.$$

Für einen positiven Werth von p würde hier die Bewegung in der Richtung der negativen x-Werthe fortschreiten und p würde die Zeit sein, in der die Bewegung um die Strecke 1 fortschreitet. Es soll hier aber der Fall nicht ausgeschlossen sein, dafs p auch complexe Werthe erhält. Der reelle Theil von inp bestimmt die Dämpfung der Oscillationen, während von dem imaginären Theil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt.

Ferner setzen wir:

$$\mathfrak{N} = C \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0 \,,$$

und endlich werden wir noch für die elektrischen Schwingungen der Ionen zu setzen haben:

$$\mathfrak{y} = b \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z} = 0 \,.$$

Die Constanten sind nun so zu bestimmen, dafs die Gleichungen

$$A \cdot \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)$$

$$A \frac{\partial (\mathfrak{Y} + \mathfrak{y})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)$$

$$\mathfrak{Y} = a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$$

erfüllt werden. Alle übrigen Gleichungen (443), (444) und (445) sind bei den gemachten Annahmen von selbst erfüllt; ε und μ werden im ganzen Raume als constant angenommen. Setzen wir ein, so kann in allen Gliedern der Factor $e^{i n (t + p x)}$ weggehoben werden, und es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A \,.\, C \,.\, i n &= -(B - b) \cdot \frac{i \,.\, n \,.\, p}{\varepsilon} \\ A \,.\, (B + b) \,.\, i \,.\, n &= - \frac{C}{\mu} \cdot i \,.\, n \,.\, p \\ B &= a^2 b - m b n^2 + k b i n \end{aligned}\right\} \tag{447}$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (447) hebt sich $i \,.\, n$, und die Gleichungen werden reell; aber die dritte bleibt complex. Zur Vereinfachung werde statt b das Verhältnifs $\frac{b}{B} = h$ in die Gleichungen eingeführt. Dann gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} A \,.\, C &= - B \,.\, (1 - h) \cdot \frac{p}{\varepsilon} \\ A \,.\, B \,.\, (1 + h) &= - \frac{C \,.\, p}{\mu} \\ 1 &= (a^2 - m n^2 + k i n) h \end{aligned}\right\} \tag{448}$$

Aus der dritten dieser Gleichungen erhält man:

$$h = \frac{1}{a^2 - m n^2 + k i n} \cdot \tag{449}$$

Durch Division der linken und rechten Seiten der anderen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{B}{C}(1+h) = \frac{C}{B}\frac{\varepsilon}{\mu(1-h)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{\mu(1-h^2)} \\ \text{und durch Multiplication:} \\ A^2.(1+h) = \frac{p^2}{\mu\,\varepsilon}\cdot(1-h). \end{array}\right\} \quad (450)$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth von p und damit ist für einen beliebigen Werth von n bis auf einen in C, b, B enthaltenen willkürlichen Proportionalitätsfactor Alles bestimmt.

Es wird

$$p^2 = \frac{A^2.\mu.\varepsilon.(1+h)}{1-h}. \quad (450\text{a})$$

Da h aber eine complexe Gröſse ist, wird auch p eine complexe Gröſse werden.

Bezeichnet $\mathfrak{C}_0$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche das durchsichtige Medium zeigen würde, wenn keine beweglichen und verschiebbaren elektrisch geladenen Ionen in ihm lägen, so ist nach dem Früheren

$$A^2.\mu.\varepsilon = \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2}$$

und daher

$$p = \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{1+h}{1-h}}. \quad (450\text{b})$$

Nach der Gleichung (449) ist

$$\frac{1}{h} + 1 = a^2 - m\,n^2 + 1 + k.i.n$$

und

$$\frac{1}{h} - 1 = a^2 - m\,n^2 - 1 + k.i.n.$$

Wir bestimmen nun eine positive Zahl ϱ_0 und einen Winkel Θ_0, so daſs

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - m\,n^2 + 1 = \varrho_0.\cos\Theta_0 \quad \text{und} \quad k\,n = \varrho_0\sin\Theta_0 \\ \text{ist, und ebenso } \varrho_1 \text{ und } \Theta_1\text{, so daſs} \\ a^2 - m\,n^2 - 1 = \varrho_1.\cos\Theta_1 \quad \text{und} \quad k\,n = \varrho_1\sin\Theta_1 \end{array}\right\} \quad (451)$$

ist. Dann wird

$$\left.\begin{aligned}
p &= \pm \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0 (\cos \Theta_0 + i \sin \Theta_0)}{\varrho_1 (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1)}} \\
&= \pm \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1} \cdot \frac{e^{i\Theta_0}}{e^{i\Theta_1}}} = \pm \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\, e^{-{}^1\!/_2 i (\Theta_1 - \Theta_0)} \\
&= \pm \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cdot \left[\cos \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0) - i \sin \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{452}$$

Durch beide Vorzeichen für p kann man den Gleichungen genügen. Je nachdem der reelle Theil von p positiv oder negativ ist, laufen die dargestellten Wellen in der Richtung der negativen oder positiven Werthe von x. Da wir nur den einen Fall zu betrachten brauchen, so wollen wir das negative Zeichen wählen.

Da k und n ihrer physikalischen Bedeutung nach positiv sind, so liegen Θ_1 und Θ_0 zwischen 0 und π, und da ferner

$$\operatorname{cotg} \Theta_0 - \operatorname{cotg} \Theta_1 = \frac{2}{k n}$$

und daher also $\operatorname{cotg} \Theta_0 > \operatorname{cotg} \Theta_1$ ist, so mufs $\Theta_1 > \Theta_0$ sein. Mithin sind $\cos \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0)$ und $\sin \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0)$ positiv.

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
q &= \frac{n}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \sin \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0) \\
\text{und} \qquad \frac{1}{\mathfrak{C}} &= \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cos \frac{1}{2} (\Theta_1 - \Theta_0)
\end{aligned}\right\} \tag{453}$$

so wird, wenn wir das negative Zeichen wählen:

$$p = -\frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{i}{n} q, \tag{454}$$

wo $\mathfrak{C}$ und q beide positiv sind. Dann wird

$$e^{i n (t + p x)} = e^{-q x} \cdot e^{i n \left(t - \frac{x}{\mathfrak{C}}\right)}$$

und dies stellt eine Wellenbewegung dar, die mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ in der positiven x-Richtung fortschreitet. Der Factor e^{-qx} bezeichnet dabei eine Abnahme der Amplitude in der Richtung der fortschreitenden Wellen in dem Maafse, dafs für die Längeneinheit die Amplitude sich auf den Bruchtheil e^{-q} ihres Betrages reducirt.

Wir müssen uns nun den Gang dieser Verhältnisse klar machen, wenn wir allmählich von kleinen Schwingungszahlen der Lichtwellen zu Lichtwellen mit grofsen Schwingungszahlen übergehen. Zu dem Zweck ist es rathsam, eine graphische Darstellung anzuwenden.

In der Ebene der Zeichnung wollen wir reelle und imaginäre Gröfsen durch auf einander rechtwinklige Coordinaten darstellen.

Die complexe Zahl $\frac{1}{h} = a^2 - m n^2 + k n i$ wird durch einen Punkt dargestellt, dessen Abscisse $x = a^2 - m n^2$ und dessen Ordinate $y = kn$ ist (Fig. 53).

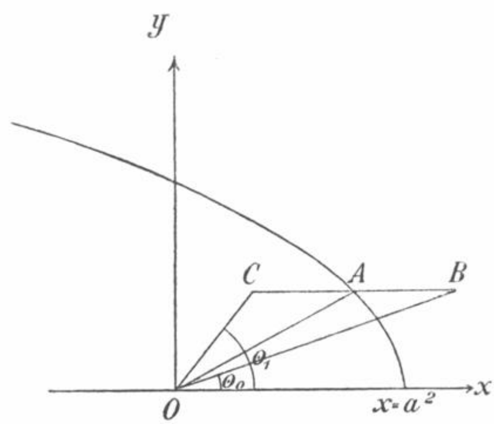

Fig. 53.

Betrachten wir Wellen mit allen möglichen Schwingungszahlen, so haben wir n als Veränderliche zu betrachten. Die Punkte, welche die Gröfse $\frac{1}{h}$ darstellen, bilden dann eine Curve, deren Gleichung wir erhalten, indem wir n eliminiren:

$$x = a^2 - \frac{m \cdot y^2}{k^2} \cdot$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel bei $x = a^2$ liegt. Je gröfser y wird, desto kleiner wird x, und die concave Seite der Parabel wird nach der Richtung der negativen x-Axe gewendet sein. Die Werthe von n sind den Ordinaten dieser Parabel proportional. Es sei A irgend ein Punkt der Parabel, dann erhalten wir die Punkte B und C, welche die complexen Zahlen $\frac{1}{h} + 1$ und $\frac{1}{h} - 1$ darstellen, indem wir von A parallel der x-Axe nach rechts und nach links um die Längeneinheit vorwärts gehen. Mithin ist dann $\varrho_0 = OB$, $\varrho_1 = OC$, $\Theta_0 = \sphericalangle BOx$, $\Theta_1 = \sphericalangle COx$, $\Theta_1 - \Theta_0 = \sphericalangle COB$.

Nach den in den Gleichungen (453) gemachten Definitionen von q und $\mathfrak{C}$ ist

$$2\pi \frac{q}{n} \cdot \mathfrak{C} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2}.$$

Das ist aber der Dämpfungscoefficient für eine Wellenlänge. Denn n ist die Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π, und da $\mathfrak{C}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, so ist $\frac{\mathfrak{C}}{n} 2\pi$ also die Wellenlänge für eine Schwingung. Nimmt nun x um Δx zu, so reducirt sich die Amplitude der Welle, wie wir oben gesehen haben, auf den Bruchtheil $e^{-q\Delta x}$ ihres Betrages. Mithin wird sie sich für eine Wellenlänge auf den Bruchtheil $e^{-2\pi \frac{q}{n} \cdot \mathfrak{C}}$ reduciren. Es bildet $\operatorname{tg} \frac{(COB)}{2}$ also ein Maafs für die Absorption. Je gröfser der Winkel ist, unter dem die Strecke CB von O aus gesehen erscheint, um so gröfser ist die Absorption. Sie wird Null, wenn A im Scheitel liegt, vorausgesetzt, dafs $a^2 > 1$ ist. Sie nimmt dann mit wachsendem n zunächst zu, um für sehr grofse Werthe von n wieder beliebig klein zu werden.

Rückt der Punkt A vom Scheitel aufwärts, so bewegen sich die beiden Punkte B und C immer mit derselben Geschwindigkeit wie A, sowohl was die Gröfse der Geschwindigkeit betrifft, als auch die Richtung. Bezeichnet $C'A'B'$ eine benachbarte Lage der Strecke CAB, so ist also

$$d\Theta_1 = \frac{AA' \sin(C'CO)}{OC}$$

$$d\Theta_0 = \frac{AA' \sin(B'BO)}{OB}.$$

Daher wird der Winkel Θ_1 schneller wachsen als Θ_0, so lange $\frac{\sin(C'CO)}{OC}$ gröfser ist als $\frac{\sin(B'BO)}{OB}$, und langsamer, sobald es kleiner ist. Der Winkel $\Theta_1 - \Theta_0$ erreicht ein Maximum, wenn

$$\frac{\sin(C'CO)}{OC} = \frac{\sin(B'BO)}{OB}$$

ist. Schneidet die Parabel die y-Axe nahezu senkrecht, so tritt das Maximum sehr nahe der Stelle ein, wo $OC = OB$ ist, wo also A auf der y-Axe liegt und $a^2 = m n^2$ ist.

Der betreffende Werth $n = \sqrt{\frac{a^2}{m}}$ entspricht der Eigenschwingung des Molekels, die wir erhalten, wenn wir in der Gleichung

$$\mathfrak{Y} = a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$$

das elektrische Moment $\mathfrak{Y}$ und den Reibungscoefficienten k gleich Null setzen. Die starke Absorption tritt also da ein, wo die Periode des Lichtes mit der eigenen Schwingungsperiode der Molekeln übereinstimmt. Die starke Absorption ist also von starkem Mitschwingen der Molekeln begleitet, so dafs wir dabei auch Wärmeentwickelung und unter Umständen ein Zerreifsen der Ionenverbindungen erwarten können, namentlich wenn noch eine elektrostatische Ladung der Substanz hinzukommt. So sind wohl die Beobachtungen von Hertz zu erklären über die Entweichung der Elektricität unter dem Einflufs der ultravioletten Strahlen.

Für den Gang der Dispersion sind die beiden Fälle $a^2 > 1$ und $a^2 < 1$ zu unterscheiden. Nach Gleichung (446) war $a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta} + 1\right)$, so dafs die Unterscheidung auch durch $\varepsilon > \vartheta$ und $\varepsilon < \vartheta$ ausgedrückt werden kann.

Die Reibung wollen wir in beiden Fällen gering annehmen, den Werth von k also klein voraussetzen.

1. Es sei $a^2 > 1$.

Der Winkel $\Theta_1 - \Theta_0 = \sphericalangle\, COB$ (Fig. 53) ist für kleine Werthe von n sehr klein und wächst mit wachsendem n zunächst langsam, da die Parabel bei kleinen Werthen von k flach ist. Gröfsere Werthe erhält der Winkel erst, wenn die Strecke CAB sich der y-Axe nähert. Für $n^2 = \frac{a^2 - 1}{m}$ fällt der Punkt C in die y-Axe und für $n^2 = \frac{a^2 + 1}{m}$ der Punkt B. Für die erste Lage ist $\operatorname{tg}(COB) = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2 - 1}}$, also bei dem kleinen Werthe von k ist $\sphericalangle\, COB$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$. Für die zweite Lage ist $\operatorname{tg}(COB) = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2 + 1}}$ und wieder $\sphericalangle\, COB$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, während für das Maximum der Absorption $n^2 = \frac{a^2}{m}$ und $\operatorname{tg}\frac{(COB)}{2} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2}}$, mithin $\sphericalangle COB$ nahezu gleich π ist. Während also innerhalb dieses Intervalles von $n = \sqrt{\frac{a^2-1}{m}}$ bis $n = \sqrt{\frac{a^2+1}{m}}$ bei dem vorausgesetzten kleinen Werthe von k die Absorption beträchtlich ist, wird sie aufserhalb des Intervalles alsbald sehr gering. In dem Ausdruck, den wir oben (Gleichung 453) für das Verhältnifs der Geschwindigkeiten im leeren und im beladenen Aether, d. i. für das Brechungsverhältnifs fanden,

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cos\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0),$$

kann der Factor $\cos\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ aufserhalb des Absorptionsstreifens unberücksichtigt bleiben, da er sehr nahe gleich 1 ist. Der Gang des Brechungsverhältnisses wird hier also als Function der Schwingungszahl im Wesentlichen durch $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ dargestellt. Die Figur 53 lehrt uns, dafs das Brechungsverhältnifs für $n = 0$ den Werth $\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}$ hat. Mit wachsendem n nehmen ϱ_0 und ϱ_1, so lange $\sphericalangle COB$ klein ist, um nahezu dieselben Gröfsen ab. Mithin mufs $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ wachsen, da der Nenner relativ stärker abnimmt. Erst wenn der Winkel COB gröfser wird, d. h. wenn CAB der y-Axe näher kommt, wird ϱ_1 weniger schnell abnehmen als ϱ_0, und $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ mufs dann mit wachsendem n kleiner werden. Für $n^2 = \frac{a^2}{m}$ wird $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = 1$ und für $n^2 > \frac{a^2}{m}$ mufs $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ zunächst noch weiter abnehmen, weil nun ϱ_1 wächst, während ϱ_0 noch abnimmt. Für grofse Werthe von n wird es aber wieder zunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch nähern, da ϱ_0 und ϱ_1 alsdann unbegrenzt wachsen, der Unterschied $\varrho_1 - \varrho_0$ aber nahezu gleich 2 wird.

Mithin wird auch das Brechungsverhältnifs für $n = 0$ bis in die Nähe des Absorptionsstreifens gröfser als 1 sein, und mit wachsender Schwingungszahl wachsen, wie es bei den durchsichtigen Körpern gewöhnlich beobachtet wird. Dann aber wird durch die

Absorption der abnehmende Werth von $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ noch mehr herabgedrückt. Das Brechungsverhältniſs muſs rasch abnehmen, hinter dem Absorptionsstreifen aber wieder zunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch nähern. In der That wird die Abnahme des Brechungsindex mit wachsender Schwingungszahl, die sogenannte anomale Dispersion bei Medien beobachtet, die im sichtbaren Theil des Spectrums einen Absorptionsstreifen besitzen. Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, hat man den Absorptionsstreifen jenseits des Ultravioletten anzunehmen. In dem Absorptionsstreifen nimmt das Brechungsverhältniſs nach unserer Formel bis unter 1 ab, so daſs hier die Geschwindigkeit des Lichtes gröſser ist, als im leeren Aether. Auch dies ist bei einigen Metallen von Kundt beobachtet worden.

Natürlich ist nicht ausgeschlossen, daſs auch Moleküle vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

2. Es sei $a^2 < 1$.

In diesem Falle nimmt $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ von dem Werthe $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-a^2}}$ mit wachsendem n ab, wird für $n^2 = \frac{a^2}{m}$ gleich 1, nimmt zunächst noch weiter ab, um dann wieder zuzunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch zu nähern. Der Winkel COB ist für $n = 0$ gleich π und bleibt beträchtlich, so lange CAB die y-Axe schneidet. Für gröſsere Werthe von n wird der Winkel rasch klein und nähert sich asymptotisch dem Werthe Null. Danach drückt der Factor $\cos\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ für die kleineren Werthe von n bis hinter $n^2 = \frac{a^2}{m}$ das Brechungsverhältniſs stark herab. Für groſse Werthe spielt der Factor keine Rolle mehr und das Brechungsverhältniſs nimmt zu und nähert sich asymptotisch dem Werth 1. Körper von diesem Typus lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen.

Dritter Abschnitt.

Die Brechung und Spiegelung bei absorbirenden Medien.

§ 102. Die Verhältnisse der Amplituden des einfallenden, des reflectirten und des gebrochenen Strahles.

Die Bewegungsgleichungen des Lichtes in einem mit Ionenpaaren beladenen Aether lassen nun auch die Gesetze der Brechung, Spiegelung und Polarisation des Lichtes für den Fall erkennen, daſs das Licht an der Oberfläche eines absorbirenden Mediums reflectirt wird. Medien dieser Art sind die Metalle. Daſs hier bei der Reflexion Licht absorbirt wird, läſst sich sogleich erkennen, wenn das reflectirte Licht farbig ist, wie z. B. beim Kupfer und beim Golde.

Aber auch ohne ausgesprochene farbige Reflexion ist dieser sogenannte Metallglanz charakteristisch. Er kommt nicht nur bei den fast undurchsichtigen Metallen vor, sondern auch bei einer Reihe von Körpern, bei denen gewisse Strahlen sehr vollständig absorbirt werden; so haben mehrere Anilinfarbstoffe, wie z. B. in sehr ausgezeichneter Weise das Fuchsin, diese eigenthümliche metallische Reflexion, welche sich theils durch ihre Lichtstärke auszeichnet, theils dadurch, daſs eine ganz bestimmte Farbe in dem Reflex sehr stark hervortritt. Wir finden alle möglichen Uebergangsstufen bis herab zu fast vollkommen durchsichtigen Körpern, die uns durch ihr äuſseres Ansehen kaum eine Absorption verrathen würden. Aber bei vielen der bekannten durchsichtigen Körper zeigt sich eine Andeutung der Absorption darin, daſs linear polarisirtes Licht durch die Reflexion elliptisch polarisirt wird. Diese elliptische Polarisation ist eine Eigenthümlichkeit der Reflexion an absorbirenden Medien.

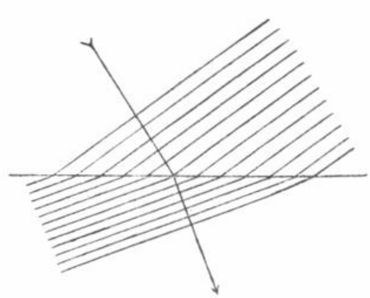

Fig. 54.

Es sei (Fig. 54) eine ebene Oberfläche eines stark absorbirenden Mediums gegeben und es mag ein Wellenzug auffallen und auf der Grenzfläche des zweiten Mediums ablaufen. Dann entsteht, wie wir gesehen haben, eine Grenzbedingung dadurch, daſs in dem zweiten Medium auch Wellen ablaufen müssen, die eine etwas andere Richtung nehmen, deren Spuren aber mit den Spuren der einfallenden Wellen auf der Grenzfläche zusammenfallen müssen. Wenn wir oben ein nicht absorbirendes Medium haben und die einfallenden Wellen also gleiche Stärke behalten, indem sie ablaufen, so werden diese Wellen im ersten Medium eine oscillirende Bewegung mit constanter Amplitude hervorbringen. Die Wellen aber, die in dem zweiten Medium erregt werden und von der Eintrittsstelle aus in der Richtung entsprechend dem gebrochenen Strahl herabgehen, haben in derselben Wellenebene nicht constante Intensität. Indem die Welle sich durch das zweite Medium fortpflanzt, unterliegt sie einer Absorption; die tiefer eingedrungenen Theile können also schon stark geschwächt sein, während die anderen Theile derselben Wellenebene, welche eben erst in das zweite Medium eingetreten sind, noch die volle Intensität haben müssen, die ihnen von dem oberen Medium aus mitgetheilt worden ist. Das hatten wir bisher bei unseren Gleichungen der Lichtbewegung noch nicht berücksichtigt. Im ersten Medium gelten die MAXWELL'schen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form:

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon_1}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu_1}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right)$$

und die analogen für die anderen Componenten. In dem zweiten Medium gehen wir wieder von den allgemeinen Gleichungen (443), (444) und (445a) der elektromagnetischen Wellen aus, welche sich auf ein mit elektrisirten Ionen durchzogenes Medium beziehen:

$$A\cdot\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon_2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon_2}\right)$$

$$A\frac{\partial (\mathfrak{X}+\mathfrak{x})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu_2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_2}\right)$$

$$\mathfrak{X} = a^2\mathfrak{x} + m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t},$$

und die entsprechenden für die anderen Componenten.

Da wir es immer nur mit periodischen Schwingungen einer Farbe zu thun haben, so können wir annehmen, dafs die Abhängigkeit von der Zeit in allen diesen Gleichungen dadurch gegeben ist, dafs die vorkommenden Gröfsen alle den Factor e^{int} enthalten, und im Uebrigen nur Functionen der Coordinaten sind. Die Differentialquotienten nach der Zeit sind dann einfach zu bilden, indem man so oft mit $i.n$ multiplicirt, als die Ordnung des Differentialquotienten beträgt. Dann erhalten wir im zweiten Medium die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,\varepsilon_2\, i n \mathfrak{L} &= \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}) \\ A\,\mu_2\, i n (\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) &= \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \\ \mathfrak{X} = a^2 . \mathfrak{x} - m . n^2 . \mathfrak{x} + k\, i n\, \mathfrak{x} & \end{aligned}\right\} \tag{455}$$

und die analogen den anderen Componenten entsprechenden Gleichungen. In jedem Medium sind μ und ε constant angenommen.

Die letzte Gleichung giebt uns das Verhältnifs $\mathfrak{X} : \mathfrak{x}$, nämlich

$$\mathfrak{x} = h\,\mathfrak{X}, \tag{456}$$

wo unter h dieselbe Gröfse verstanden ist, die wir schon oben in Gleichung (449) so bezeichnet hatten

$$h = \frac{1}{a^2 - m\,n^2 + k\,i\,n},$$

für die anderen Componenten erhalten wir analog

$$\mathfrak{y} = h\,\mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{z} = h\,\mathfrak{Z}.$$

Danach können $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ aus dem System der Gleichungen (455) ganz fortgeschafft werden und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A\,\varepsilon_2\, i n}{1 - h}\,\mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \\ A\,\mu_2 (1 + h)\, i n\, \mathfrak{X} &= \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{457}$$

und die analogen Gleichungen für die anderen Componenten.

Die Gleichungen sind von derselben Form, wie sie sich auch ohne die Annahme der Ionen ergeben würden. Nur sind an Stelle von ε_2 und μ_2 die imaginären Constanten $\dfrac{\varepsilon_2}{1 - h}$ und $\mu_2 (1 + h)$ getreten. Daraus folgt, dafs wir die Spiegelung und Brechung der Wellen an der Grenze des zweiten Mediums gerade so erörtern können, wie wir es in §§ 93 und 94 gethan haben. Nur knüpfen wir hier unsere Betrachtungen an die Momente, während wir dort überall die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft eingeführt hatten.

Es sei $x = 0$ die Gleichung der Grenzfläche zwischen den beiden Medien und es sei die positive x-Richtung nach der Seite des ersten Mediums gerichtet. Wenn wir dann die magnetischen Schwingungen der einfallenden Wellen, die in dem ersten Medium verlaufen, der z-Axe parallel setzen, so haben wir zu schreiben:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0,$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} \,.\, e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y + \frac{\cos\alpha}{c} x\right)}$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten Medium bezeichnet.

Fügen wir gleich die magnetische Schwingung der reflectirten Wellen hinzu, so wird

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} \,.\, e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} \cdot y + \frac{\cos\alpha}{c} \cdot x\right)} + \mathfrak{B} \,.\, e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} \cdot y - \frac{\cos\alpha}{c} \cdot x\right)}$$

Die MAXWELL'schen Gleichungen geben im ersten Medium:

$$A\mu_1 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

$$A\mu_1 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0.$$

Da $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Variable t, wie wir voraussetzen, nur in dem Factor e^{int} enthalten, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A\mu_1\, in\, \mathfrak{X} &= -\, in\mathfrak{N} \cdot \frac{\sin\alpha}{c} \\
A\mu_1\, in\, \mathfrak{Y} &= -\frac{\cos\alpha}{c}\left[\mathfrak{A}\, e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y + \frac{\cos\alpha}{c} x\right)}\right. \\
&\qquad \left. -\, \mathfrak{B}\, e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y - \frac{\cos\alpha}{c} x\right)}\right] \\
\mathfrak{Z} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (458)$$

Im zweiten Medium ist für ebene Wellen, deren magnetische Schwingungen der z-Axe parallel sind, zu setzen:

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{M}' = 0$$

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{C} \,.\, e^{ni(t + px + qy)}.$$

Nach den Gleichungen (457) haben wir dann

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2(1+h)\mathfrak{X}' &= q\,\mathfrak{N}' \\ A\mu_2(1+h)\mathfrak{Y}' &= -p\,\mathfrak{N}' \\ \mathfrak{Z}' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{459}$$

und wenn diese Ausdrücke für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in die Gleichung

$$\frac{A\varepsilon_2 i n}{1-h}\mathfrak{N}' = \frac{\partial \mathfrak{X}'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}'}{\partial x}$$

eingesetzt werden:

$$\frac{A\varepsilon_2 i n}{1-h}\mathfrak{N}' = \frac{i n}{A\mu_2(1+h)} q^2 \mathfrak{N}' + \frac{i n}{A\mu_2(1+h)} p^2 \mathfrak{N}'$$

oder

$$A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h} = p^2 + q^2. \tag{460}$$

In der Grenzfläche $x = 0$ müssen, wie wir in § 93 schon auseinandergesetzt haben, die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft, die in die Grenzfläche fallen, für beide Medien übereinstimmen. Es müssen also für $x = 0$ die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{N}}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{N}'}{\mu_2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon_1} &= \frac{\mathfrak{Y}'}{\varepsilon_2} \end{aligned}\right\} \tag{461}$$

Es mufs mithin erstens

$$e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y\right) - in(t + qy)}$$

von t und y unabhängig und daher

$$q = -\frac{\sin\alpha}{c} \tag{462}$$

sein. Zweitens müssen zwischen den Constanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{C}}{\mu_2} \\ \text{und} \qquad -\frac{\cos\alpha}{A\mu_1 c}\cdot\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\varepsilon_1} &= -\frac{p}{A\mu_2(1+h)}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon_2} \end{aligned}\right\} \tag{463}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, d. h. die Verhältnisse der Amplituden des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strahles für den Fall, daſs die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind. Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ ergiebt sich

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\alpha}{A\varepsilon_1 c} - \frac{p}{A\,\varepsilon_2(1+h)}\right) = \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\alpha}{A\varepsilon_1 c} + \frac{p}{A\,\varepsilon_2(1+h)}\right), \tag{464}$$

wo p aus den Gleichungen (460) und (462) zu bestimmen ist.

Wenn die elektrischen Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht sind, bleibt alles analog, nur müssen die Gleichungen für die magnetischen Momente mit denen für die elektrischen Momente vertauscht werden; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{N}$ sind Null, und wenn wir die elektrischen z-Componenten im ersten Medium

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}\, e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y + \frac{\cos\alpha}{c}x\right]} + \mathfrak{B}\, e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y - \frac{\cos\alpha}{c}x\right]},$$

im zweiten Medium

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{C}\, e^{ni[t + px + qy]}$$

setzen, so wird die magnetische y-Componente im ersten Medium durch die Gleichung

$$\varepsilon_1 A i n \mathfrak{M} = \frac{\cos\alpha}{c} i n \left(\mathfrak{A}\, e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y + \frac{\cos\alpha}{c}x\right)} - \mathfrak{B}\, e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y - \frac{\cos\alpha}{c}x\right]}\right),$$

im zweiten Medium durch die Gleichung

$$\varepsilon_2 A i n \mathfrak{M}' = (1-h)\, p\, i n\, \mathfrak{C}\, e^{ni[t + px + qy]}$$

gegeben. Da nun an der Grenzfläche die tangentialen Kraftcomponenten übereinstimmen müssen, so ergeben sich für $x = 0$ die Gleichungen $\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon_1} = \dfrac{\mathfrak{Z}'}{\varepsilon_2}$ und $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu_1} = \dfrac{\mathfrak{M}'}{\mu_2}$; und daraus ähnlich wie oben:

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{\sin\alpha}{c} \\ \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon_1} &= \frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon_2} \\ \frac{\cos\alpha}{\varepsilon_1 A c}\left(\frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{\mu_1}\right) &= (1-h)\frac{p}{\varepsilon_2 A}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\mu_2} \end{aligned}\right\} \tag{465}$$

und durch Elimination von $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A} . \left\{ \frac{\cos \alpha}{c . A . \mu_1} - \frac{p(1-h)}{A . \mu_2} \right\} = \mathfrak{B} . \left\{ \frac{\cos \alpha}{c . A . \mu_1} + \frac{p(1-h)}{A \mu_2} \right\} \quad (466)$$

wo p wieder durch die Gleichung (460), die sich hier auf analoge Weise ergiebt, bestimmt ist, nämlich

$$p^2 = A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h} - \frac{\sin^2 \alpha}{c^2}.$$

Für $A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h}$ kann auch aus der Gleichung (452) der Ausdruck

$$\frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} e^{-i(\Theta_1 - \Theta_0)}$$

eingesetzt werden. Die Gröfse p wird also complex sein, und wenn wir

$$p = f + g i$$

setzen, wird

$$\left. \begin{aligned} f^2 - g^2 &= \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) - \frac{\sin^2 \alpha}{c^2} \\ 2 f g &= - \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Der Exponentialfactor

$$e^{in\left(t - \frac{\sin \alpha}{c} y + p x\right)}$$

kann dann in der Form

$$e^{-g n x} . e^{in\left(t - \frac{\sin \alpha}{c} y + f x\right)}$$

geschrieben werden. Es bedeutet $-\frac{1}{f}$ dann die Strecke, um welche der Durchschnittspunkt einer Wellenebene mit der x-Axe in der Zeiteinheit weiter rückt. Da wir die positive Richtung der x-Axe nach der Seite des ersten Mediums angenommen haben, so ist also f positiv. Nach der zweiten Gleichung (466) ist $f . g$ negativ. Denn wir haben in § 101 gesehen, dafs $\Theta_1 - \Theta_0$ zwischen 0 und π liegt. Folglich mufs einem positiven Werthe von f ein negativer Werth von g entsprechen. In dem zweiten Medium ist x negativ, mithin stellt $e^{-g n x}$ einen Factor dar, der um so kleiner wird, je tiefer ein Theil einer Wellenebene in das zweite Medium eingedrungen ist.

Wird die Geschwindigkeit im zweiten Medium mit $\mathfrak{C}$, der Brechungswinkel mit β bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{f} = \dfrac{\mathfrak{C}}{\cos\beta}, \qquad \dfrac{c}{\sin\alpha} = \dfrac{\mathfrak{C}}{\sin\beta} \\ \text{mithin} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{C}^2} = f^2 + \dfrac{\sin^2\alpha}{c^2} = \dfrac{1}{\mathfrak{C}_0^2}\dfrac{\varrho_0}{\varrho_1}\cos(\Theta_1 - \Theta_0) + g^2 \end{array}\right\} \quad (468)$$

wo g aus den Gleichungen (467) zu berechnen ist. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ wird also von dem Einfallswinkel α abhängig sein.

§ 103. Die elliptische Polarisation an der Grenze eines absorbirenden Mediums.

Ist das einfallende Licht nach irgend einer Richtung linear polarisirt, so können wir es in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene macht und die andere in der Einfallsebene. Für die erste gelten dann die Gleichungen (463) und (464), für die zweite die Gleichungen (465) und (466). Die Untersuchung der Lichtbewegung in einem stark absorbirenden Medium bietet grofse experimentelle Schwierigkeiten dar. Zur Untersuchung der Metalle stellte sich Kundt auf Glasplatten prismatische Lagen dar, die äufserst dünn waren, so dafs ein Theil des Lichtes noch hindurchgehen konnte. Es gelang zwar wohl zu zeigen, in welchem Sinne die Metalle von den durchsichtigen Körpern abweichen, aber es ist noch nicht möglich, die hier gefundenen Formeln für die Bewegung des Lichtes im Innern der Metalle zu prüfen. Viel leichter ist es dagegen, den reflectirten Strahl experimentell zu untersuchen, weshalb wir die betreffenden Formeln noch etwas näher besprechen wollen. Für beide Componenten des einfallenden Lichtes stellt sich das Verhältnifs von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als complex heraus. Da man jede complexe Zahl in die Form $r e^{\varphi i}$ bringen kann, so können wir also schreiben:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \,.\, r e^{\varphi i}.$$

Die Gröfse φ zeigt in der Exponentialfunction des reflectirten Strahles eine Phasenverschiebung gegen den einfallenden Strahl an, und es geht also daraus hervor, dafs die von Metallen reflectirten Strahlen im allgemeinen eine Phasenänderung erleiden werden, sowohl wenn die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wie wenn sie in der Einfallsebene liegen. Aber die Phasenverschiebung ist in den beiden Fällen nicht die gleiche, weil das Verhältnifs von

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den beiden Fällen, wie das aus den Gleichungen (464) und (466) hervorgeht, nicht das gleiche ist. Genauer untersucht sind diese Erscheinungen eigentlich nur bei durchsichtigen Substanzen, für die man auch die Werthe des Brechungsverhältnisses und des Absorptionsverhältnisses und die Dispersion genauer bestimmen kann. Man findet hier, daſs dieser Phasenunterschied zwischen den beiden Componenten des reflectirten Strahles, also die elliptische Polarisation, nur in der Nähe des Polarisationswinkels sich deutlich zeigt. Man läſst den Strahl unter dem Polarisationswinkel einfallen und seine Polarisationsebene gegen die Einfallsebene nahezu senkrecht stehen. Dann wird die eine Componente des Strahles durch die Polarisation fast ausgelöscht, während die andere Componente schon im einfallenden Licht sehr schwach ist. Durch passende Wahl dieses Winkels zwischen der Polarisationsebene des Strahles und der Einfallsebene kann man es dahin bringen, daſs die beiden Componenten im reflectirten Strahl nahehin dieselbe Amplitude haben; da sie nun aber einen Phasenunterschied erhalten, so vereinigen sie sich nicht wieder zu einem linear polarisirten Strahl, sondern sie geben dann elliptisch oder circular polarisirtes Licht.

Starke Verschiebungen der Phase werden nach unseren Formeln bei schwach absorbirenden Medien, für die also die imaginären Theile der Coefficienten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Gleichungen (464) und (466) klein sind, nur dann vorkommen können, wenn auch das reelle Glied von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ nahezu gleich Null ist. Denn wenn $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = r e^{\varphi i}$ ist, so wird $\operatorname{tg} \varphi$ durch das Verhältniſs des imaginären zum reellen Theil bestimmt. Wenn also der reelle Theil groſs gegen den imaginären Theil ist, so müſste $\operatorname{tg} \varphi$ klein sein und φ daher nahezu Null oder nahezu gleich π sein. Nun ist aus unseren Formeln zu erkennen, in welchen Fällen die reellen Theile fast gleich Null werden können.

Wenn die Absorption des zweiten Mediums sehr gering ist und also g sehr nahe gleich Null ist, so gehen die Formeln (464) und (466), wenn es auch hier erlaubt ist, $\mu_1 = \mu_2$ zu setzen, in die in §§ 93 und 94 abgeleiteten Gleichungen (409) und (415) über. Denn für $g = 0$ wird nach Gleichung (467) $\Theta_1 = \Theta_0$, was nach Gleichung (451) nur für $h = 0$ möglich ist, und da $p = f + g i$, so wird für $g = 0$ nach Gleichung (468)

$$p = \frac{\cos \beta}{\mathfrak{C}}.$$

Nun haben wir in §§ 93 und 94 gesehen, daſs ein Auslöschen des reflectirten Strahles nur möglich ist, wenn die magnetischen

Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene vor sich gehen und wenn $\alpha + \beta = \pi/2$ ist. Für kleine Werthe von g stimmt nun der reelle Theil von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ sehr nahe mit dem Werthe überein, den es für $g = 0$ annimmt. Mithin wird man nur dann kleine Werthe des reellen Theiles bekommen, wenn die magnetischen Schwingungen nahezu senkrecht zur Einfallsebene liegen und $\alpha + \beta$ nahezu gleich $\pi/2$ ist, d. h. in der Nähe des Polarisationswinkels.

Bei verschwindender Absorption ist, so lange der Einfallswinkel den Polarisationswinkel nicht übertrifft, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ positiv, die Phasenverschiebung also Null. Uebertrifft aber der Einfallswinkel den Polarisationswinkel, so geht $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ ins Negative über und die Phasenverschiebung wird π. Für kleine Werthe von g sind die Formeln beinahe dieselben wie für $g = 0$. Die Phasenverschiebung ist klein, so lange der Einfallswinkel erheblich kleiner ist als der Polarisationswinkel, und nahezu gleich π, wenn der Einfallswinkel den Polarisationswinkel erheblich übertrifft. In der Nähe des Polarisationswinkels aber geht die Phasenverschiebung von Null nicht plötzlich zu π über, sondern durchläuft alle Zwischenwerthe. So ist es zu erklären, dafs die durchsichtigen Substanzen elliptische Polarisation nur in der Nähe des Polarisationswinkels zeigen. Die Folge davon ist, dafs das Licht an solchen Substanzen durch Reflexion unter keinem Winkel vollständig ausgelöscht werden kann, sondern in der Nähe des Polarisationswinkels nur ein Minimum in der Lichtintensität eintrittt.

Die vollständige Theorie der Metallreflexion wird noch viel experimentelle Arbeit erfordern; aber man ist durch die neueren Untersuchungen wenigstens auf den Weg gekommen, auf dem man hoffen kann, die Schwierigkeiten zu überwinden.

Bisher war es immer noch zweifelhaft, ob die Metalle ein sehr grofses Brechungsvermögen oder ein sehr kleines besitzen. Für beide Behauptungen hatten sich Unterstützungsgründe gefunden, namentlich ehe man gelernt hatte, die Aenderungen der Intensität der Schwingungen in den verschiedenen Theilen derselben Wellenebene zu berücksichtigen. Seitdem man dieses kann, ist man wenigstens auf sicherem Boden, und darf hoffen, die Aufgabe allmählich vollständig zu bezwingen.

Vierter Abschnitt.

Die Lichtbewegung in krystallinischen Medien.

§ 104. Die Bewegungsgleichungen.

Wir haben bisher nur isotrope Medien betrachtet. Es giebt aber auch nichtisotrope durchsichtige Substanzen, welche nach verschiedenen Richtungen hin in ihrem Innern verschiedene physikalische Eigenschaften zeigen. Die Reihe der Erscheinungen ist aufserordentlich mannigfach. Es sollen daher hier nur die Principien und die allgemeinen Voraussetzungen erörtert werden, welche die elektromagnetische Theorie machen mufs, um diese Erscheinungen zu erklären.

Die ältere Undulationstheorie, welche den Aether als ein festelastisches Medium ansah, machte entweder die Annahme, dafs der Aether nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Elasticität habe, wie das ja übrigens bei krystallisirten ponderablen Körpern vielfach beobachtet werden kann und also eine Annahme ist, für welche wir sehr gute mechanische Analogien bei ponderablen elastischen Körpern haben, oder sie machte die von Fresnel herrührende Annahme, dafs die Trägheit der mitschwingenden Aethervolumina nach verschiedenen Richtungen hin eine verschiedene sei, dafs also gleichsam die Masse oder das Trägheitsmoment der ponderablen Massen, die in dem Aether eingelagert sind, für verschiedene Richtungen der Schwingung ein verschiedenes sei. Davon kann man sich keine recht klare Vorstellung machen. Sobald wir es mit zusammengesetzten Atomen zu thun haben, würde so etwas möglich sein. Sie könnten nach verschiedenen Richtungen verschiedene Rotationsmomente haben, oder man könnte annehmen, dafs gegeneinander bewegliche Theilchen vorhanden sind, die bei Verschiebung der Atome nach verschiedenen Richtungen hin etwas verschiedene Bewegungen ausführen. Aber es kommt immerhin durch diese Annahme eine gewisse Zweideutigkeit in die entsprechende Erklärung, die der ersten vom älteren Neumann in Königsberg herrührenden Annahme von verschiedener Elasticität des Aethers nach verschiedenen Richtungen hin nicht anhängt. In der elektromagnetischen Theorie entspricht diesen Hypothesen die Annahme verschiedener Werthe der Dielektricitätsconstante und der magnetischen Constante nach verschiedenen Richtungen des Raumes hin.

Die ursprüngliche Form der MAXWELL'schen Gleichungen (30) und (31), in denen ausgedrückt wird, dafs Bewegung der Elektricität rings um sich circulare magnetische Kräfte, und Bewegung des Magnetismus rings um sich circulare elektrische Kräfte hervorruft, ist, wenn man die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft einführt:

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

wozu die entsprechenden Gleichungen für die anderen Componenten treten.

Nun ist die Möglichkeit gegeben, dafs die dielektrische und die magnetische Constante nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Werthe habe. Wir wollen uns hier mit dem einfachsten Fall der einaxigen Krystalle begnügen, d. h. wir wollen annehmen, dafs nach einer Richtung hin, die wir zur Richtung der x-Axe machen, die magnetische und die elektrische Constante einen anderen Werth in der Substanz habe, als in den übrigen dazu senkrechten Richtungen, so dafs wir die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\\
A\mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\\
A\mu_0 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\\
\text{und}\qquad A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\\
A\varepsilon_0 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\\
A\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \qquad (469)$$

§ 105. Ebene Wellen in einaxigen Krystallen.

Wir wollen Licht von bestimmter Schwingungszahl und ebene Wellen voraussetzen und demnach L, M, N, X, Y, Z in der Form je eines constanten Factors multiplicirt mit

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

voraussetzen. Dann werden die sämmtlichen Differentialquotienten nach t, die in unseren Formeln aufgeführt werden, dadurch auszudrücken sein, daſs wir die betreffende Gröſse mit in multipliciren, und die Differentialquotienten nach x, y, z, daſs wir sie mit inp, inq, inr multipliciren. Wir bekommen dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 L &= rY - qZ \\ A\mu_0 M &= pZ - rX \\ A\mu_0 N &= qX - pY \end{aligned}\right\} \tag{470}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon_1 X &= qN - rM \\ A\varepsilon_0 Y &= rL - pN \\ A\varepsilon_0 Z &= pM - qL \end{aligned}\right\} \tag{471}$$

Das sind sechs homogene lineare Gleichungen mit sechs Unbekannten L, M, N, X, Y, Z, deren Verhältnisse zu einander zu finden sind. Ein solches System von linearen Gleichungen kann, wenn nicht alle sechs Gröſsen Null sind, nur dann befriedigt werden, wenn die Determinante der Gleichungen gleich Null ist. Es muſs also eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten μ_1, μ_0, ε_1, ε_0, p, q und r existiren.

Die Bedeutung von p, q, r ist aus der Function

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

zu sehen. Für alle Punkte, für welche $px+qy+rz$ denselben Werth hat, hat auch die Function zu irgend einer Zeit t denselben Werth; mithin ist

$$px+qy+rz = \text{Const.}$$

die Gleichung einer Wellenebene. Bezeichnet man die Winkel, welche die Normale der Wellenebene in der Richtung des Fortschrittes der Wellen mit den Coordinatenaxen bildet, mit α, β, γ und die Lichtgeschwindigkeit mit c, so muſs also

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

seinen Werth beibehalten, wenn t in $t+1$ und zugleich x in $x+c\cos\alpha$, y in $y+c\cos\beta$, z in $z+c\cos\gamma$ übergeht. Es mufs also

$$1+pc\cos\alpha+qc\cos\beta+rc\cos\gamma=0$$

sein. Da nun $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ den Coefficienten p, q, r proportional sein müssen, so folgt

$$p=-\frac{\cos\alpha}{c}, \qquad q=-\frac{\cos\beta}{c}, \qquad r=-\frac{\cos\gamma}{c}.$$

Die Bedingungsgleichung zwischen μ_1, μ_0, ε_1, ε_0, p, q und r kann also gedeutet werden als eine Gleichung, nach welcher bei einem gegebenen Krystall die Geschwindigkeit des Lichtes von der Richtung der Wellennormale abhängt. Wir werden sie weiter unten in einer übersichtlichen Form darstellen.

Multipliciren wir die drei Gleichungen (470) mit p, q, r und addiren sie, so bekommen wir

$$A\mu_1 pL+A\mu_0 qM+A\mu_0 rN=0,$$

und wenn wir die drei Gleichungen (471) ebenso behandeln:

$$A\varepsilon_1 pX+A\varepsilon_0 qY+A\varepsilon_0 rZ=0.$$

Wenn wir statt der magnetischen und elektrischen Kräfte die Momente einführen, so ist statt $\mu_1 L$, $\mu_0 M$, $\mu_0 N$ zu setzen $4\pi\mathfrak{L}$, $4\pi\mathfrak{M}$, $4\pi\mathfrak{N}$, und statt $\varepsilon_1 X$, $\varepsilon_0 Y$, $\varepsilon_0 Z$ tritt ein $4\pi\mathfrak{X}$, $4\pi\mathfrak{Y}$, $4\pi\mathfrak{Z}$. Heben wir den Factor $4\pi A$ weg, so können wir schreiben:

$$p\mathfrak{L}+q\mathfrak{M}+r\mathfrak{N}=0$$

und

$$p\mathfrak{X}+q\mathfrak{Y}+r\mathfrak{Z}=0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen ist, dafs das magnetische und das elektrische Moment auf der Normale der Wellenebene senkrecht stehen, also in die Wellenebene selbst fallen.

Multipliciren wir andererseits die drei Gleichungen (470) mit X, Y, Z und addiren sie, so erhalten wir

$$A\mu_1 LX+A\mu_0 MY+A\mu_0 NZ=0,$$

und wenn wir die drei Gleichungung (471) mit L, M, N multipliciren:

$$A\varepsilon_1 LX+A\varepsilon_0 MY+A\varepsilon_0 NZ=0.$$

Der Factor A kann aus beiden Gleichungen weggehoben werden, und man kann in den so entstehenden Gleichungen

$$\mu_1 LX + \mu_0 (MY + NZ) = 0$$
$$\varepsilon_1 LX + \varepsilon_0 (MY + NZ) = 0$$

die Ausdrücke LX und $MY + NZ$ als die Unbekannten auffassen.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dafs, wenn die Determinante der Coefficienten $\mu_1 \varepsilon_0 - \mu_0 \varepsilon_1$ von Null verschieden ist, was wir zunächst voraussetzen wollen, die beiden Unbekannten LX und $MY + NZ$ verschwinden müssen.

Statt dessen können wir auch sagen, indem wir LX mit $\mu_1 \varepsilon_1$ und $MY + NZ$ mit $\mu_0 \varepsilon_0$ multipliciren, dafs

$$\mathfrak{L}\mathfrak{X} = 0$$

und

$$\mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0$$

sein müssen, oder was auf dasselbe hinauskommt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}\mathfrak{X} &= 0 \\ \mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{472}$$

Die zweite dieser Gleichungen besagt, dafs das magnetische und das elektrische Moment senkrecht auf einander stehen, und die erste Gleichung, dafs entweder das magnetische oder das elektrische Moment auf der x-Axe senkrecht ist.

Denkt man sich irgend einen Punkt einer Wellenebene, zieht durch ihn eine Parallele zur x-Axe und legt eine Ebene durch diese Parallele und die Normale der Wellenebene, so mufs also entweder die magnetische oder die elektrische Schwingung auf dieser Ebene senkrecht stehen. Denn beide sind ja senkrecht zur Wellennormale und eine von ihnen ist senkrecht zur x-Axe. Eine solche Ebene heifst ein Hauptschnitt des Krystalles.

Wir haben also zwei Möglichkeiten. Entweder ist die magnetische Schwingung senkrecht zum Hauptschnitt; dann mufs die elektrische Schwingung in der Schnittlinie der Wellenebene und des Hauptschnittes liegen. Oder die elektrische Schwingung ist senkrecht zum Hauptschnitt; dann mufs die magnetische Schwingung in dem Hauptschnitt und in der Wellenebene liegen.

Im ersten Fall haben wir

$$L = 0 \quad \text{und} \quad \frac{M}{r} = -\frac{N}{q}.$$

Aus den drei Gleichungen (471) folgt alsdann:

$$\left.\begin{aligned} A\,\varepsilon_1\,X &= -\,(q^2+r^2)\,\frac{M}{r} \\ A\,\varepsilon_0\,Y &= \qquad\; p\,q\,\frac{M}{r} \\ A\,\varepsilon_0\,Z &= \qquad\; p\,r\,\frac{M}{r} \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Setzen wir diese Werthe in die drei Gleichungen (470) ein, so ist die erste identisch erfüllt, während die anderen beiden die Relation ergeben:

$$A\,\mu_0 = \frac{p^2}{A\,\varepsilon_0} + \frac{q^2+r^2}{A\,\varepsilon_1} \tag{474}$$

oder, wenn wir

$$p = -\,\frac{\cos\alpha}{c}$$

und

$$q^2 + r^2 = \frac{\sin^2\alpha}{c^2}$$

einsetzen und beide Seiten mit A multipliciren:

$$A^2\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_0} + \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_1}\right). \tag{474a}$$

Ganz analog hat man im zweiten Fall zu setzen:

$$X = 0 \quad\text{und}\quad \frac{Y}{r} = -\,\frac{Z}{q}.$$

Dann erhält man aus den drei Gleichungen (470):

$$\left.\begin{aligned} A\,\mu_1\,L &= (r^2+q^2)\,\frac{Y}{r} \\ A\,\mu_0\,M &= \quad -\,p\,q\,\frac{Y}{r} \\ A\,\mu_0\,N &= \quad -\,p\,r\,\frac{Y}{r} \end{aligned}\right\} \tag{475}$$

Diese Ausdrücke in die drei Gleichungen (471) eingesetzt, ergeben die Relation:

$$A\,\varepsilon_0 = \frac{r^2+q^2}{A\,\mu_1} + \frac{p^2}{A\,\mu_0} \tag{476}$$

oder

$$A^2\,\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\mu_0} + \frac{\sin^2\alpha}{\mu_1}\right). \tag{476a}$$

Die Geschwindigkeit hängt also in beiden Fällen von dem Winkel ab, den die Wellennormale mit der x-Axe bildet, es sei denn, dafs ε_0 und ε_1 oder μ_0 und μ_1 einander gleich sind. Für $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ würde im ersten Falle

$$A^2 \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}$$

und im zweiten Falle würde für $\mu_0 = \mu_1$

$$A^2 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

sein, d. h. wir würden auf die Formel zurückfallen, die in einem isotropen Medium die Lichtgeschwindigkeit bestimmt.

Bei den durchsichtigen krystallinischen Substanzen, auf welche wir diese Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit allein beziehen können, weil bei absorbirenden Substanzen die Sachen wesentlich verändert werden, sind die magnetischen Constanten aufserordentlich wenig von einander unterschieden. Hier wird also die Lichtgeschwindigkeit für den Fall, dafs die magnetischen Schwingungen im Hauptschnitt liegen (Gleichung 476 a), nahezu von der Richtung des Strahles unabhängig und gleich $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon_0 \mu}}$. Wenn aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach allen Richtungen hin die gleiche ist, so breitet sich die Lichtbewegung von einem Punkt in Kugelflächen aus, und daraus folgt, dafs die Brechung solcher Lichtstrahlen an der Grenze krystallinischer Medien nach denselben Gesetzen wie in isotropen Medien vor sich geht. Sind dagegen die magnetischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitt, so breitet sich das Licht von einem Punkte in Rotationsflächen aus, die man erhält, wenn man nach allen möglichen Richtungen hin Stücke abträgt, die den entsprechenden Werthen von c proportional sind, wo c aus der Gleichung

$$A^2 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_0} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_1} \right)$$

zu berechnen ist. Daher sind hier die Brechungsgesetze andere als in isotropen Medien, und mithin wird ein Lichtstrahl, der auf ein krystallinisches Medium auffällt, da wir ihn uns ja aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Strahlen zusammengesetzt denken können, im Allgemeinen durch die Brechung in zwei Strahlen gespalten, von denen der eine der ordinäre, der andere der extraordinäre genannt wird. Im ordinären Strahl liegen die magnetischen

Schwingungen im Hauptschnitt und seine Brechung geschieht nach den Gesetzen isotroper Medien. Im extraordinären Strahl dagegen sind die magnetischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitt und seine Brechung geht nach verwickelteren Gesetzen vor sich.

Da die magnetischen Schwingungen beim ordinären Strahl im Hauptschnitt liegen, so entspricht also bei einem durch Reflexion polarisirten Strahl die Einfallsebene dem Hauptschnitt; denn, wie wir oben gesehen haben, wird unter dem Polarisationswinkel das Licht nicht reflectirt, dessen magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene liegen.

Wir haben oben den Fall ausgeschlossen, dafs die Determinante $\varepsilon_0 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_0$ gleich Null wäre. Wir können ihn nun angliedern, indem wir ihn als Grenzfall betrachten. Denken wir uns die Constanten μ_0, μ_1, ε_0, ε_1 in solche Werthe übergehend, wo $\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$, so geht der Krystall in einen solchen über, bei dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordinären und extraordinären Strahles für dieselbe Richtung die gleichen sind. Denn die beiden Gleichungen für c (474a) und (476a) lassen sich schreiben:

$$A^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\left(\cos^2\alpha + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sin^2\alpha\right)$$

$$A^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\left(\cos^2\alpha + \frac{\mu_0}{\mu_1}\sin^2\alpha\right),$$

unterscheiden sich also nicht mehr, wenn

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}.$$

Die Strahlen könnten dann nicht in zwei verschieden polarisirte Bestandtheile zerfallen; es würde also keine Doppelbrechung existiren. Aber ein solches Medium würde die Eigenschaft haben können, dafs die Geschwindigkeit des Durchganges nach einer bestimmten Axenrichtung eine andere wäre, als nach den anderen. Das ist nun bisher noch nicht beobachtet worden.

In allen bekannten einaxigen krystallinischen Medien sind die beiden magnetischen Constanten μ_0 und μ_1 nicht wesentlich von einander verschieden, $\frac{\mu_0}{\mu_1}$ also gleich 1, während $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$ von 1 verschieden ist.

Nimmt man nun in den drei verschiedenen Coordinatenrichtungen je drei verschiedene Werthe der elektrischen und magnetischen Constanten an, so erhält man den Fall der sogenannten zweiaxigen Krystalle.

Nachdem aber die Principien klar gelegt sind, reducirt sich die ganze weitere Durchführung, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen, auf trigonometrische einfache Rechnungen, welche nur dadurch, daſs sie unter sehr mannigfaltigen Einzelbedingungen angewendet werden müssen, nun ein so buntes Resultat geben, wie es durch die Erscheinungen der Doppelbrechung dargestellt ist.

Fünfter Abschnitt.

Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde.

§ 106. Die Differentialgleichungen der Lichtbewegung im magnetischen Felde.

Die Rotation der Polarisationsebene unter dem Einfluſs des Magnetismus kann man durch die in den Gleichungen (434), (435) und (436) dargestellte erweiterte Form der Maxwell'schen Gleichungen erklären, bei welcher das Medium selbst als bewegt betrachtet ist.

Wir nehmen ein starkes magnetisches Feld an, dessen Kraftlinien die Richtung der x-Axe haben, setzen also voraus, daſs L einen groſsen Werth habe. Werden nun durch Bewegung ponderabler Körper Bewegungen des Aethers erregt, so wird im Allgemeinen die Geschwindigkeit verschwindend klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein, mit der sich die Spannungen im Aether ausgleichen. Wenn es sich dagegen um Schwingungen der ponderablen Atome handelt, welche unter dem Einfluſs der Lichtbewegung zu Stande kommen, so werden das verhältniſsmäſsig schnelle Schwingungen sein. Diese setzen dann auch, wie wir annehmen, die Theile des Aethers, welche die schwingenden ponderablen Atome umgeben, in rasche Bewegung.

Gesetzt, es ziehen Lichtwellen in der Richtung der x-Axe, und ponderable Atome werden dadurch zu Schwingungen senkrecht zur x-Axe veranlaſst, so werden wir $\alpha = 0$, β und γ von Null verschieden vorauszusetzen haben. Denn der Rowland'sche Versuch über die

Ablenkung der Magnetnadel, welche dadurch entsteht, dafs mit Elektricität stark beladene in entgegengesetzter Richtung rotirende Condensatorscheiben magnetische Kräfte in der Umgebung hervorbringen, zeigt, dafs die Bewegung der Aetherschicht, die dem bewegten ponderablen Körper direct anliegt, seiner Bewegung folgen mufs.

Nehmen wir zunächst auch $\gamma = 0$ an, so dafs die Bewegung in Richtung der y-Axe vor sich geht. Dann kommen, was die Bewegung betrifft, nur diejenigen Glieder in Betracht, die zugleich $\mathfrak{L}$ und β enthalten, während im Uebrigen die Gleichungen dieselben bleiben, die ohne die Bewegung des Aethers gelten. Danach sind also von den Gleichungen (434) und (436) nur die folgenden beiden durch die Aetherbewegung wesentlich geändert:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi A \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{L}\beta)\right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi A \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{L}\beta)\right]$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}(Z + 4\pi A \mathfrak{L}\beta) = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z + 4\pi A \mathfrak{L}\beta) - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}.$$

Die Wirkung der Aetherbewegung β können wir also beschreiben, indem wir sagen, dafs eine elektrische Kraft $4\pi A \mathfrak{L}\beta$ in der Richtung der z-Axe hervorgerufen wird. Nehmen wir nun das Atom geladen mit positiver Elektricität an, so wird eine ponderomotorische Kraft entstehen, welche seine der y-Axe parallel angenommene Bewegung in der Art ändert, dafs eine z-Componente der Bewegung hinzutritt. Dieses hat auch eine Aenderung der Aetherbewegung zur Folge, die wieder eine zur Bewegung und zur x-Axe senkrechte ponderomotorische Kraft hervorruft. Indem nun die Bewegung der Atome wieder auf die elektrischen und magnetischen Momente des Aethers zurückwirkt, entsteht eine Rotation der Polarisationsebene.

Um dieses analytisch auszudrücken, müssen wir beachten, dafs wir es hier nur mit verschwindend kleinen translatorischen Bewegungen der Ionen und verschwindend kleinen Aenderungen der elektrischen Momente zu thun haben. Unter diesen Umständen dürfen wir die hervorgerufenen Aenderungen einfach den mitwirkenden Factoren proportional setzen. Die Atome denken wir uns paarweise mit entgegengesetzten elektrischen Ladungen, wie wir sie auch für die Ableitung der Dispersion angenommen haben. Durch die Aetherbewegung wird dann das elektrische Moment des Ionenpaares geändert. Die Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Momenten des Aethers und den elektrischen Momenten der Ionenpaare sind dann durch dieselben Gleichungen wie früher auszudrücken. Nur tritt durch die Bewegung des Aethers, wie wir gesehen haben, eine elektrische und eine ponderomotorische Kraft hinzu. Ist die Bewegung der Ionen senkrecht zur x-Axe, so haben wir $\mathfrak{x} = 0$ zu setzen. Da die elektrische und die ponderomotorische Kraft senkrecht zur Bewegung der Ionen und in der yz-Ebene liegen, so sind ihre Componenten proportional

$$-\frac{\partial \mathfrak{z}}{d t} \mathfrak{L}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{d t} \mathfrak{L}$$

zu setzen. Die Lichtwellen denken wir uns senkrecht zur x-Axe und nehmen danach an, dafs alle Gröfsen von y und z unabhängig sind. $\mathfrak{X}$ ist gleich Null und $\mathfrak{L}$ ist constant und grofs vorausgesetzt.

Die früheren Gleichungen (443), (444) und (445a):

$$A \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})$$

$$A \mu \frac{\partial (\mathfrak{X} + \mathfrak{x})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{N}) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{M})$$

$$\mathfrak{X} = a^2 \mathfrak{x} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k \mathfrak{x}$$

und die analogen sechs anderen sind also in folgender Weise zu modificiren. Es bleiben nur die Differentialquotienten nach t und nach x stehen. An die Stelle von $\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})$ tritt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z} + q \mathfrak{L} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)$ und an die Stelle von $\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y})$ tritt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y} - q \mathfrak{L} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)$. Die Reibung der Ionen soll der Einfachheit wegen weggelassen werden. Statt der Glieder $k \mathfrak{y}$ und $k \mathfrak{z}$ treten die den Componenten der ponderomotorischen Kraft entsprechenden Glieder ein, die wir gleich $+ k \mathfrak{L} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$ und $- k \mathfrak{L} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$ setzen. Die Gröfsen q und k werden als constant vorausgesetzt.

So ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,\varepsilon\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,t} &= \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q\,.\,\mathfrak{L}\,.\,\frac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\,t}\right)\\ A\,\varepsilon\frac{\partial\,\mathfrak{N}}{\partial\,t} &= -\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q\,.\,\mathfrak{L}\,\frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial\,t}\right)\end{aligned}\right\}\tag{477}$$

$$\left.\begin{aligned} A\,\mu\frac{\partial}{\partial\,t}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) &= -\frac{\partial}{\partial\,x}(\mathfrak{N})\\ A\,\mu\frac{\partial}{\partial\,t}(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) &= \frac{\partial}{\partial\,x}(\mathfrak{M})\end{aligned}\right\}\tag{478}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= a^2\,\mathfrak{y}+m\,\frac{\partial^2\,\mathfrak{y}}{\partial\,t^2}+k\,\mathfrak{L}\,\frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial\,t}\\ \mathfrak{Z} &= a^2\,\mathfrak{z}+m\,\frac{\partial^2\,\mathfrak{z}}{\partial\,t^2}-k\,\mathfrak{L}\,\frac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\,t}\end{aligned}\right\}\tag{479}$$

Wir nehmen nun an, jede Function soll von t und x nur durch den Factor $e^{i\,n\,(t+p\,x)}$ abhängen. Dadurch reduciren sich nun die Gleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} A\,\varepsilon\,\mathfrak{M} &= p\,(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{y})\\ A\,\varepsilon\,\mathfrak{N} &= -p\,(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{z})\end{aligned}\right\}\tag{480}$$

$$\left.\begin{aligned} A\mu\,(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) &= -p\,\mathfrak{N}\\ A\mu\,(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) &= p\,\mathfrak{M}\end{aligned}\right\}\tag{481}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= (a^2-m\,n^2)\,\mathfrak{y}+k\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{z}\\ \mathfrak{Z} &= (a^2-m\,n^2)\,\mathfrak{z}-k\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{y}\end{aligned}\right\}\tag{482}$$

§ 107. Die Formeln für die Drehung der Polarisationsebene.

Durch Elimination von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ergeben sich die Gleichungen:

$$A^2\,\mu\,\varepsilon\,(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) = p^2\,(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{z})$$
$$A^2\,\mu\,\varepsilon\,(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) = p^2\,(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{y})$$

Eliminirt man auch $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ mit Hülfe der Gleichungen (482), so erhält man für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A^2\,\mu\,\varepsilon\left((a^2-m\,n^2+1)\,\mathfrak{y}+k\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{z}\right)\\ &= p^2\left((a^2-m\,n^2-1)\,\mathfrak{y}+(k-q)\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{z}\right)\\ &A^2\,\mu\,\varepsilon\left((a^2-m\,n^2+1)\,\mathfrak{z}-k\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{y}\right)\\ &= p^2\left((a^2-m\,n^2-1)\,\mathfrak{z}-(k-q)\,\mathfrak{L}\,i\,n\,\mathfrak{y}\right).\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergiebt:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)},$$

die zweite Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = -\frac{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)}{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}. \qquad (483)$$

Die beiden Werthe müssen also einander gleich sein, wenn es möglich sein soll, die Gleichungen zu befriedigen:

$$\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)} =$$

$$-\frac{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)}{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}$$

oder

$$\left[\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)}\right]^2 = -1.$$

Das giebt zwei Möglichkeiten:

$$\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,n}{(A^3\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)} = \pm 1.$$

Jedem der beiden Fälle entspricht ein bestimmter reeller Werth von p^2. Für das obere Zeichen ist:

$$p^2(a^2 - m\,n^2 - 1 - q\,\mathfrak{L}\,n + k\,\mathfrak{L}\,n) = A^2\mu\varepsilon(a^2 - m\,n^2 + 1 + k\,\mathfrak{L}\,n) \qquad (484)$$

und für das untere Zeichen ist:

$$p^2(a^2 - m\,n^2 - 1 + q\,\mathfrak{L}\,n - k\,\mathfrak{L}\,n) = A^2\mu\varepsilon(a^2 - mn^2 + 1 - k\,\mathfrak{L}\,n). \qquad (484\text{a})$$

Im ersten Fall ist nach den Gleichungen (483):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}\,i,$$

im zweiten Fall:

$$\mathfrak{y} = -\mathfrak{z}\,i.$$

Aus den Gleichungen (482) folgt dann im ersten Fall:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Y} &= (a^2 - m\,n^2 + k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{y}\\ \mathfrak{Z} &= (a^2 - m\,n^2 + k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{z}\end{aligned}\right\} \qquad (485)$$

und mithin

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}\,i. \qquad (486)$$

Im zweiten Fall folgt:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Y} &= (a^2 - m\,n^2 - k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{y}\\ \mathfrak{Z} &= (a^2 - m\,n^2 - k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{z}\end{aligned}\right\} \qquad (485\text{a})$$

und mithin

$$\mathfrak{Y} = -\mathfrak{Z}i. \tag{486a}$$

Aus den Gleichungen (481) für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ endlich ergiebt sich im ersten Fall:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{A\mu}{p}(a^2 - mn^2 + 1 + k\mathfrak{L}n)\mathfrak{z} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{A\mu}{p}(a^2 - mn^2 + 1 + k\mathfrak{L}n)\mathfrak{y}, \end{aligned}\right\} \tag{487}$$

mithin

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}i, \tag{488}$$

und im zweiten Fall:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{A\mu}{p}(a^2 - mn^2 + 1 - k\mathfrak{L}n)\mathfrak{z} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{A\mu}{p}(a^2 - mn^2 + 1 - k\mathfrak{L}n)\mathfrak{y}, \end{aligned}\right\} \tag{487a}$$

mithin

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}i. \tag{488a}$$

Die beiden Fälle entsprechen Circularpolarisationen. Denn der Factor $\pm i$ drückt eine Phasendifferenz aus, die dem vierten Theil einer Schwingung entspricht. Ist z. B. im ersten Falle

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}e^{in(t+px)}$$

$\mathfrak{B}$ als reell vorausgesetzt, so ist

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}e^{in(t+px) - \frac{\pi}{2}i}.$$

Die reellen Theile von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ sind dann

$$\mathfrak{B}\cos n(t+px) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\sin n(t+px).$$

Der Vector, der in jedem Augenblick das elektrische Moment darstellt, bleibt also immer von gleicher Länge und dreht sich in dem Sinne von der y-Axe zur z-Axe.

Dasselbe gilt von dem magnetischen Vector, und der Drehungssinn bleibt im Raume der gleiche sowohl für einen positiven, wie für einen negativen Werth von p, gleichgültig also ob die Lichtwellen der Richtung der x-Axe entgegengesetzt oder in der Richtung der x-Axe ziehen. In Beziehung auf die Fortpflanzungsrichtung der Lichtwellen ist also der Drehungssinn der entgegengesetzte: linksdrehend wenn die Wellen der x-Richtung entgegenziehen und rechtsdrehend, wenn sie in der Richtung der x-Axe ziehen.

Der zweite Fall stellt die entgegengesetzt drehende Circularpolarisation dar. Für

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}\, e^{in(t+px)}$$

wird hier

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}\, e^{in(t+px)+i\frac{\pi}{2}}$$

und die reellen Theile sind mithin

$$\mathfrak{B} \cos n (t + p\,x) \qquad \text{und} \qquad - \mathfrak{B} \sin n (t + p\,x).$$

Der elektrische Vector dreht sich also in dem Sinne von der z-Axe zur y-Axe. Den beiden Schwingungsarten entsprechen verschiedene Werthe von p. Sie schreiten also mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Auch in einem Medium, das keine Ionenpaare enthält, kann man jedes geradlinig polarisirte Licht sich zusammengesetzt denken aus zwei entgegengesetzt drehenden circular polarisirten Schwingungsarten. Nur haben beide die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Daher bleibt die geradlinige Schwingung, die sich aus ihnen zusammensetzt, immer in derselben Ebene. Hier dagegen, wo die beiden Geschwindigkeiten verschieden sind, können sie zwar auch in jedem Punkte zu einer geradlinigen Schwingung zusammengesetzt werden, aber die Richtung der geradlinigen Schwingung ändert sich längs des Strahles. Wenn der rechtsdrehende Vector einer gröfseren Geschwindigkeit, also einer gröfseren Wellenlänge entspricht, so wird seine Drehung längs des Strahles langsamer sein und mithin wird der aus beiden Vectoren zusammengesetzte Vector sich links um den Strahl drehen und umgekehrt. Tritt also das Licht aus dem mit Ionenpaaren durchsetzten Medium aus, so wird es wieder geradlinig polarisirt sein; aber die Polarisationsebene wird eine Drehung erfahren haben; und diese Drehung wird nicht aufgehoben, wenn der Strahl durch Reflexion veranlafst wird, denselben Weg zurückzulaufen, sondern verdoppelt.

Der Vorgang ist deshalb von Wichtigkeit, weil er William Thomson zu dem Schlusse veranlafste, dafs eine Drehung der Träger der elektrischen und magnetischen Kräfte vorkommen müfste. Nur durch eine Drehung glaubte er erklären zu können, dafs die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde, wenn man den Strahl reflectirt, nicht wieder zurückgeht, sondern in demselben Sinne sich vergröfsert. Durch die Ableitung sehen wir nun, dafs die Maxwell-schen Gleichungen diese Drehung ergeben, ohne dafs man eine drehende Bewegung des Trägers der elektrischen und magnetischen

Momente noch hinzunimmt. Der Grund der Drehung steckt in der eigenthümlichen Art der Asymmetrie der MAXWELL'schen Gleichungen, wonach wir einmal

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \text{ etc.,}$$

das andere Mal aber

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ etc.}$$

haben.