universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der allgemeinen, physikalischen und theoretischen Chemie

in elementarer Darstellung für Chemiker, Mediziner, Botaniker, Geologen und Mineralogen

Energetik und Verwandtschaftslehre

Küster, Friedrich W.
Thiel, Alfred

1923

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-7099

Einleitung.

368. Übersicht. Im I. Bande sind die im Verhalten der Stoffe in den verschiedenen Formarten sich ausprägenden Gesetzmäßigkeiten sowie die besonderen Eigentümlichkeiten der Umwandlungserscheinungen der Stoffe behandelt worden. Man kann die im ersten Teile zutage tretenden Beziehungen zwischen den Eigenschaften und der Zusammensetzung der Stoffe auch als Stöchiometrie — im weiteren Sinne — bezeichnen, während die Lehre von der Reaktionsgeschwindigkeit und den Gleichgewichten auch Chemische Mechanik heißt.

Obwohl nun in den chemischen Reaktionen Äußerungen einer besonderen Energieart, der chemischen Energie, zu erblicken sind, ist doch bisher die chemische Mechanik nur von der phänomenologischen, nicht von der energetischen Seite aus betrachtet worden. Wir haben uns also nur mit den Gesetzmäßigkeiten beschäftigt, die den Zusammenhang zwischen Stoffnatur, Konzentration und Zeit (nur ganz nebenher auch Temperatur) betreffen, aber der Frage, was denn eigentlich bei einer solchen Reaktion aus der (natürlich nur scheinbar) verloren gehenden chemischen Energie wird, keine Beachtung geschenkt. Dieser Frage wollen wir nun im folgenden nähertreten.

Entsprechend den verschiedenen Arten der Energie (vgl. Bd. I, S. 154) kann die bei einem freiwillig verlaufenden chemischen Prozesse sich stets vermindernde chemische Energie des Systems sich in verschiedenen Richtungen umwandeln. Nur ausnahmsweise findet eine einzige Art von Verwandlung statt; in der Regel teilen sich mehrere Energiearten in den verschwindenden Betrag an chemischer Energie.

Unsere Aufgabe ist es im folgenden, die für solche Umwandlungen geltenden Gesetzmäßigkeiten, insbesondere auch hinsichtlich der Anteile, die auf die verschiedenen in Wettbewerb tretenden Energiearten entfallen, zu betrachten.

Da man außer der chemischen Energie noch vier Hauptarten der Energie, nämlich die mechanische Energie, Wärmeenergie, elektrische Energie und strahlende Energie kennt, ergeben sich vier Hauptgruppen von Umwandlungen, deren Gebiete man als Mechanochemie, Thermochemie, Elektrochemie und Photochemie (besser Aktinochemie; näheres s. im 11. Buche) bezeichnen kann. Zu jedem dieser Gebiete gehören aber auch noch die entsprechenden inversen (umgekehrt gerichteten) Energiewandlungen, bei denen also chemische Energie aus irgendeiner anderen Energieart entsteht. Wir werden darum jeden der genannten Hauptabschnitte in zwei Teile zu zerlegen haben.

Auch für die inversen Umwandlungen gilt als Norm, daß bei der Bildung chemischer Energie mehrerer Energiearten in Umsatz treten, teils

in der Weise, daß erstere aus mehr als einer Energieart entsteht, teils — der häufigere Fall — so, daß bei der Umwandlung neben der chemischen Energie noch andere Energieformen gebildet werden.

Außer den oben genannten wird als besondere Energieart auch noch die magnetische unterschieden. Von ihren Beziehungen zur chemischen Energie ist aber gar nichts bekannt, da bisher weder magnetische Wirkungen bei chemischen Reaktionen noch auch umgekehrt chemische Wirkungen magnetischer Kräfte beobachtet worden sind. Die „Magnetochemie" besteht bis jetzt nur aus der „magnetochemischen Stöchiometrie", d. h. den Beziehungen zwischen chemischer Zusammensetzung und magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Es ist an dieser Stelle nicht der Ort, auf dieses in den I. Band gehörende, aber erst in der jüngsten Zeit etwas mehr beachtete Gebiet näher einzugehen. Es möge der Hinweis auf die allerdings noch spärliche Sonderliteratur[802] genügen.

Ziemlich kurz läßt sich auch die Mechanochemie erledigen. Von den Unterarten der mechanischen Energie scheiden die Distanzenergie und die Bewegungsenergie, bei denen Beziehungen zur chemischen Energie bisher nicht bekannt geworden sind, von vornherein aus. Die Oberflächenenergie tritt allerdings mit der chemischen Energie gelegentlich in Wechselwirkung; dieses Gebiet heißt Kapillarchemie. Jedoch handelt es sich dabei in der Regel weniger um direkte Umwandlungen der genannten beiden Energieformen ineinander, sondern hauptsächlich um die Beziehungen zwischen Kapillareigenschaften und Stoffnatur (Kapillarstöchiometrie), während die Energieumwandlungen im wesentlichen nur zwischen Oberflächenenergie und Volumenergie (oder statt dieser auch anderen, nicht chemischen Energiearten) stattfinden. Auch diese Erscheinungen gehören also nicht hierher.

Von größerer Wichtigkeit sind die Beziehungen zwischen chemischer Energie und Volumenergie. Die letztere Energieart entsteht bei allen Vorgängen, die unter Volumvermehrung gegen einen auf dem System lastenden Druck oder unter Erhöhung der Konzentration eines gasförmigen (Kompression) bzw. im Lösungszustande befindlichen (Erhöhung des osmotischen Drucks) Systems verlaufen. Bei den umgekehrten Vorgängen wird natürlich Volumenergie verbraucht. Welche Rolle die bei chemischen Prozessen in Erscheinung tretende Volumenergie für den Ablauf der Reaktion spielt, welche Bedeutung sie insbesondere für den Gleichgewichtszustand besitzt, wird noch an anderer Stelle zu erörtern sein. Hier interessiert uns vornehmlich die Umwandlung von Volumenergie in chemische Energie, die dann erfolgt, wenn ein chemisches Gleichgewicht durch Druck gestört wird (die Umkehrung, die Überwindung äußeren Druckes bei Reaktionsablauf unter Volumvermehrung, spielt eine untergeordnete Rolle neben den gleichzeitig verlaufenden sonstigen Energiewandlungen). Der Sinn der infolge Druckeinflusses sich vollziehenden Gleichgewichtsverschiebung ist uns bereits bekannt. Er ergibt sich aus dem allgemeinen Reaktionsgesetz[803] für die Wirkung von Temperatur- und Druckzwang (auch „Gesetz vom kleinsten Zwang", „Prinzip des beweglichen Gleichgewichts", Prinzip von VAN'T HOFF und von LE CHATELIER-BRAUN). Hört der äußere Zwang auf, so strebt das System wieder der alten Gleichgewichtslage zu, wobei

[802] E. WEDEKIND, Magnetochemie (Gebr. BORNTRÆGER, Berlin), 1911.
[803] Vgl. S. 214; 542.

die vorher in chemischer Form aufgespeicherte Volumenergie unter geeigneten Versuchsbedingungen wenigstens z. T. wiedergewonnen werden kann. Die quantitative Seite des Druckeinflusses auf chemische Gleichgewichte ist in den Erörterungen über Konzentrationen und Partialdrucke (S. 626 u. ff.) enthalten. Dort sind die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen Druck und Gleichgewichtslage hergeleitet worden. Es genügt daher, hier auf diese Ausführungen zu verweisen.

Die Thermochemie soll das 8. Buch, die Elektrochemie (nebst den elektrolytischen Gleichgewichten) das 9. und 10. Buch, die Photochemie das 11. Buch behandeln; mit den besonderen Eigentümlichkeiten der chemischen Energie und dem Sitze der chemischen Kräfte beschäftigt sich das 12. Buch. Das 7. Buch endlich ist den allgemein gültigen quantitativen Gesetzmäßigkeiten der Energiewandlungen gewidmet, insbesondere den Beziehungen zwischen der Wärmeenergie und den anderen Energiearten (Thermodynamik).

369. Mathematische Behandlung physikochemischer Fragen. Es liegt im Wesen der Naturerscheinungen begründet, daß die aus ihnen abzuleitenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten sich nur zum kleinen Teile ausschließlich mit Hilfe der Elementarmathematik dem Verständnis nahebringen lassen. Sehr viele Prozesse verlaufen nach Gesetzen, deren Sinn nicht ohne weiteres ersichtlich ist, wenn man sich nur der aus der ursprünglichen Differentialgleichung abgeleiteten Formel bedient. Solche Formeln sind leerer Schall, und es hieße unfruchtbare Dogmatik treiben, wollte man, nur um die elementarmathematische Darstellungsweise zu retten, dem Leser zumuten, unverstandene und unverständliche Formeln sich einzuprägen, wo doch eine — ebenfalls elementare — Kenntnis der Grundzüge der Infinitesimalrechnung die Möglichkeit bietet, das Wesen der grundlegenden Gesetzmäßigkeiten zu erkennen.

Der Verfasser hat lange geschwankt, in welcher Weise er das in diesem Lehrbuche angewandte Grundprinzip der elementaren Darstellung des Stoffes mit dem weiteren Leitmotiv (übrigens jedes Lehrbuches, ebenso wie jeder Vorlesung), nur wirklich Verständliches zu bringen, vereinigen solle. Da nun das „Elementare" der Darstellung sich nicht auf den Gegenstand, sondern nur auf die Art und Weise der Erörterung beziehen kann, so läßt sich das gesteckte Ziel wohl so erreichen, daß die in Frage stehenden Dinge zwar nicht ausschließlich mit Hilfe der niederen Mathematik in Angriff genommen werden, jedoch die Verwendung der höheren Mathematik in durchweg leichtfaßlicher, den Bedürfnissen des Leserkreises, für den dieses Lehrbuch berechnet ist, angepaßter Weise erfolgt.

Es ist also kein Bruch mit dem Prinzip der elementaren Darstellung, wenn im folgenden eine bescheidene Anwendung der Infinitesimalrechnung gemacht wird. Daß sie in gewissen Fällen eben absolut nicht zu umgehen ist, kann der Leser ja schon aus den im I. Bande (S. 449 u. ff.) enthaltenen Darlegungen über die Grundlagen der chemischen Kinetik entnehmen.

Da letzten Endes die Beschäftigung mit allgemeiner Chemie Mittel zu dem Zwecke ist, den Naturwissenschaftler in den Stand zu setzen, den Fragen seines Wissensgebietes mit den Hilfsmitteln der physikalischen Chemie zu Leibe zu gehen, oder auch nur solchen Versuchen mit Ver-

ständnis zu folgen, werden wir uns selbstverständlich nur auf das Allernötigste zu beschränken haben. Die in neuerer Zeit immer zahlreicher aus dem Boden schießenden „Einführungen in die höhere Mathematik" für Naturwissenschaftler und Mediziner können als Zeichen der Zeit gedeutet werden in dem Sinne, daß auch der mathematisch nicht gründlicher vorgebildete Angehörige jener Wissenszweige sich die wesentlichsten Grundlagen der höheren Mathematik aneignen muß, um in dem allgemeinen Fortschritt seiner Zeit nicht ins Hintertreffen zu geraten.

Nun ist von den Lesern dieses Lehrbuches, wie bereits im Vorwort ausgeführt, keinesfalls zu verlangen, daß sie sich eine solche Kenntnis durch das Studium mathematischer Spezialwerke[804] aneignen. Sie müssen darum alles Erforderliche in diesem Buche selbst finden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, dem vorliegenden II. Bande eine möglichst kurz gefaßte, auch dem Nichtmathematiker leicht verständliche mathematische Einleitung vorauszuschicken, welche in den folgenden Kapiteln enthalten ist. Der mathematisch vorgebildete Leser wird diese einfach überschlagen können. Wer mit der Infinitesimalrechnung aber nicht vertraut ist, der soll bei aufmerksamer Lektüre der einleitenden Kapitel in den Stand gesetzt werden, die in der chemischen Energetik unvermeidlichen Anwendungen der höheren Mathematik zu verstehen. Das ist aber auch notwendig, wenn die vermittelten Kenntnisse fruchtbar, d. h. zu bewußter Anwendung geeignet sein sollen.

Der Verfasser hofft, daß der Leser den II. Band nicht von vornherein wegen seiner mathematischen Seite als weniger genießbar ansehen wird, als den I. Der Gegenstand ist an sich z. T. etwas schwieriger; doch wird sich der Leser zweifellos für die kleine Mühe, die folgenden Seiten aufmerksam durchzulesen, durch die Befriedigung belohnt sehen, welche das selbsterworbene Verständnis der behandelten Gesetzmäßigkeiten gewährt im Gegensatze zu dem öden Schematismus wesenloser Formeln.

Übrigens bleibt es jedem Leser, der auf die Herleitung der Endformeln verzichten zu können glaubt, unbenommen, sich gleichwohl lediglich an diese letzteren zu halten.

370. Der Funktionsbegriff. Wir haben schon oben (Bd. I, S. 592) von dem Begriffe der Funktion Gebrauch gemacht. Man versteht darunter den allgemeinen Ausdruck der gesetzmäßigen Abhängigkeit einer Größe von einer andern. Wenn also z. B. zu jedem Werte der Größe x ein gesetzmäßig damit verknüpfter Wert der Größe y gehört, so sagt man: y ist eine Funktion von x und schreibt das in der allgemeinen Form

$$y = f(x)$$

worin f( ) das Funktionssymbol darstellt (f ist also nicht etwa ein Faktor).

y kann nun in der verschiedenartigsten Weise mit x verknüpft sein.

[804] Für Interessenten seien genannt: W. Nernst und A. Schönflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften (München und Leipzig, Wiss. Verlag Dr. E. Wolff); J. W. Mellor, Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik (Berlin, J. Springer); J. Salpeter, Einführung in die höhere Mathematik für Naturforscher und Ärzte (Jena, G. Fischer); K. Arndt, Grundbegriffe der höheren Mathematik für Chemiker (Berlin, Mayer und Müller).

Eine Reihe solcher Funktionen wird etwa durch folgende Zusammenstellung gegeben:

$$y = 2x \text{ oder } mx + 5 \text{ oder } x^2 \text{ oder } \sqrt[3]{5x^2 - b} \text{ oder } \frac{1}{x} \text{ oder } \sqrt[a]{\frac{3x^3 - x}{x^2 + 2}}$$

$$\text{oder } \log x \text{ oder } a^x + b \text{ oder } x^x - 3x^3 + \sqrt{\frac{1}{x}} \text{ oder } \sin^2 x \text{ usw.}$$

Das Symbol f(x) sagt über die Art der Funktion nichts aus, sondern zeigt nur das Vorhandensein eines irgendwie gearteten gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen y und x an.

Natürlich ist, wenn y eine Funktion von x ist, umgekehrt auch x eine solche von y, aber in der Regel eine andere (inverse Funktion). Wenn also $y = f(x) = x^2$, so ist

$$x = \varphi(y) = \pm \sqrt{y} .$$

Das $\varphi(\ )$ deutet an, daß es sich hier um eine andere Funktion handelt, als vorher beim $f(\ )$. Man könnte auch schreiben:

$$y = f_1(x)$$
$$x = f_2(y).$$

In den vorstehend genannten Beispielen sind y und x durch eine Gleichung verknüpft, oder wir können hier die gesetzmäßige Abhängigkeit des y vom x durch eine Formel darstellen. Das ist oft die kürzeste Art der Wiedergabe einer Funktion. Vielfach ist aber die Angabe einer solchen Formel nicht möglich, weil die zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit noch nicht erkannt bzw. nicht mathematisch formulierbar ist. In andern Fällen läßt sich zwar eine Formulierung (Interpolationsformel) für die Abhängigkeit innerhalb bestimmter Wertgrenzen angeben; ihre Grundlage ist aber rein empirisch, der Sinn der Gesetzmäßigkeit ebenfalls unbekannt. Derartige Formeln werden dann durch systematisches Probieren ausfindig gemacht.

In solchen Fällen wird ebenso häufig die Darstellung der Abhängigkeit in Tabellenform angewandt, eine Methode, die uns vollkommen geläufig ist, da an sehr vielen Stellen dieses Lehrbuches Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe von Tabellen wiedergegeben worden sind und noch weiterhin wiedergegeben werden müssen. Auch ist vielfach diese Form zweckmäßiger und bequemer, namentlich dann, wenn die grundlegenden Bestimmungen in so dichter Reihenfolge ausgeführt worden sind, daß man die dazwischenliegenden Werte durch rechnerische Interpolation finden und somit leicht zu jedem beliebigen Werte von x den zugehörigen von y ermitteln kann. Das bekannteste, allerdings nicht auf chemischem Gebiete liegende Beispiel einer derartigen tabellarischen Darstellung ist die Logarithmentafel. Die Grundwerte sind durch Rechnung bestimmt, während die dazwischenliegenden durch Interpolation gefunden werden. Hier ist die Tabellenform deswegen angebracht, weil die Formel, nach der der Logarithmus berechnet werden kann, äußerst unbequem ist. Auch solche Fälle kommen bei physikochemischen Funktionen vor.

Eine dritte Methode, Funktionen darzustellen, ist die graphische, die im folgenden Kapitel ausführlicher behandelt wird.

371. Graphische Darstellung. Auch von diesem Hilfsmittel haben wir schon ausgiebig Gebrauch gemacht.

Wenn man in ein geeignetes, in der Regel rechtwinkliges Koordinatensystem die eine Größe als Abszisse, die andere, mit jener gesetzmäßig verknüpfte, als Ordinate einträgt, so erhält man ein Diagramm (Schaubild, Schaulinie), dessen geometrischen Eigenschaften die Art der zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeit meist in besonders anschaulicher und klarer Weise zur Darstellung bringen. Je mehr paarweise zueinander gehörige (konjugierte) Werte bekannt sind, mit desto größerer Sicherheit läßt sich die tatsächlich richtige Kurve als Ausdruck der betreffenden Funktion zeichnen, desto sicherer ist dann auch die Ermittelung dazwischenliegender Werte durch Ausmessung der zu dem fraglichen Kurvenpunkte gehörigen Koordinaten (die eben gleich den gesuchten, konjugierten Werten sind): graphische Interpolation.

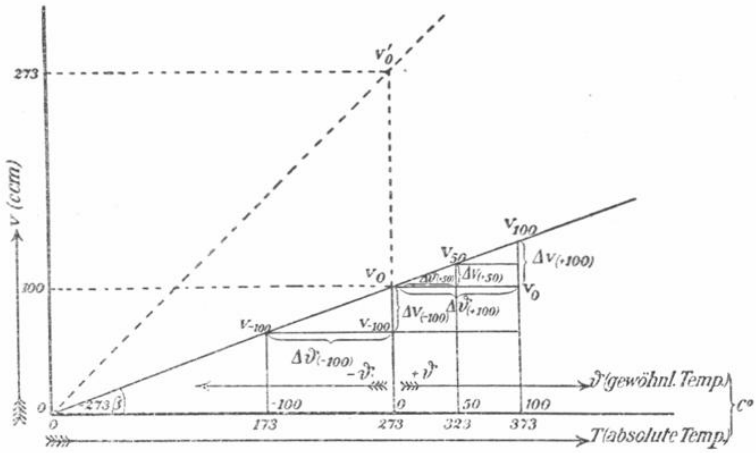

Fig. 148.
Graphische Darstellung des Gesetzes von Gay-Lussac und Dalton.

Wir benutzen zu unseren weiteren Überlegungen eine solche graphische Darstellung, und zwar die des Gesetzes von Gay-Lussac und Dalton (s. Bd. I, S. 25). Wir wählen die thermische Ausdehnung bei konstantem Druck und haben mithin die Beziehung

$$v_\vartheta = v_0 (1 + \alpha \vartheta),$$

wenn ϑ die vom Eispunkte an gezählte (gewöhnliche) Celsiustemperatur, v_ϑ das Volum unseres Gases bei dieser Temperatur, v_0 das Volum derselben Gasmenge bei 0° C ist, immer bei konstantem Druck. Die Konstante α hat dann bekanntlich den Wert $\frac{1}{273}$.

Wir können auch schreiben

$$v_\vartheta = v_0 + v_0 \cdot \alpha \vartheta \quad \text{oder} \quad v_\vartheta - v_0 = v_0 \cdot \alpha \vartheta = v_0 \cdot \alpha (\vartheta - \vartheta_0),$$

wenn ϑ_0 die Celsiustemperatur des Eispunktes (also $\vartheta_0 = 0$) bedeuten soll.

Die Figur 148 gibt die graphische Darstellung dieser Gesetzmäßigkeit. Auf der Abszissenachse sind die gewöhnlichen Celsiustemperaturen nach rechts ($+\vartheta$) und links ($-\vartheta$) vom Nullpunkte aus abgetragen, während die Volumina die Ordinaten sind. Bei $\vartheta = \pm 0$ soll das Volum v_0 vorhanden sein. Erwärmen wir das Gas bei konstantem Drucke auf $+50°$,

so erfährt das Volum eine Vermehrung auf den Wert v_{+50}, welcher ist

$$v_{+50} = v_0 + v_0 \cdot \alpha\,(50 - 0) = v_0 + v_0 \cdot \frac{50}{273}\,.$$

Der Volumzuwachs $v_{+50} - v_0$, den wir $\Delta v_{(+50)}$ nennen wollen, ist also $\Delta v_{(+50)} = v_{+50} - v_0 = v_0 \cdot \frac{50}{273}$.

Um den Betrag $\Delta v_{(+50)}$ ist also das Volum bei 50° größer als das bei 0°.

Erwärmt man nun abermals um 50°, also bis +100°, so tritt eine weitere Volumvergrößerung um den gleichen absoluten Betrag ein. Denn es ist bei 100°

$$v_{+100} = v_0 + v_0 \cdot \alpha\,(\vartheta_{+100} - \vartheta_0) = v_0 + v_0 \cdot \frac{100}{273}\,,$$

und

$$\Delta v_{(+100)} = v_{+100} - v_0 = v_0 \cdot \frac{100}{273}\,.$$

Daher ist

$$\Delta v_{(+100)} - \Delta v_{(+50)} = v_0 \cdot \frac{100}{273} - v_0 \cdot \frac{50}{273} = v_0 \cdot \frac{50}{273} = \Delta v_{(+50)}\,.$$

Betrachten wir die gesamte Volumvermehrung beim Erwärmen auf +100° im Vergleich mit der bei Erwärmung von 0° auf 50° beobachteten, so ist

$$\Delta v_{(+100)} = v_0 \cdot \frac{100}{273} = \frac{v_0}{273} \cdot (\vartheta_{+100} - \vartheta_0)\,,$$

$$\Delta v_{(+50)} = v_0 \cdot \frac{50}{273} = \frac{v_0}{273} \cdot (\vartheta_{+50} - \vartheta_0)\,.$$

Wir können allgemein die Temperaturdifferenz $(\vartheta_x - \vartheta_o)$ auch mit $\Delta\vartheta_{(x)}$ bezeichnen und würden dann also für $(\vartheta_{+100} - \vartheta_0)$ das Zeichen $\Delta\vartheta_{(+100)}$ und für $(\vartheta_{+50} - \vartheta_0)$ entsprechend $\Delta\vartheta_{(+50)}$ zu setzen haben. Dann erhalten wir

$$\Delta v_{(+100)} = \frac{v_0}{273} \cdot \Delta\vartheta_{(+100)}$$

und

$$\Delta v_{(+50)} = \frac{v_0}{273} \cdot \Delta\vartheta_{(+50)}\,.$$

Nun ist $\frac{1}{273} = \alpha$ eine für alle Gase (im Idealfalle) gültige Konstante, und wenn wir unsere Beobachtungen bei konstantem Druck mit derselben Gasmenge anstellen, ist auch v_0 konstant. Wir können darum statt $\frac{v_0}{273}$ auch einfach den Ausdruck k setzen und finden dann durch eine einfache Umformung

$$\frac{\Delta v_{(+100)}}{\Delta\vartheta_{(+100)}} = k$$

$$\frac{\Delta v_{(+50)}}{\Delta\vartheta_{(+50)}} = k\,,$$

oder allgemein, da ja die Werte ϑ_{+100} und ϑ_{+50} ganz beliebig herausgegriffen waren,

$$\frac{\Delta v_{(x)}}{\Delta\vartheta_{(x)}} = k \quad \left(= \frac{v^0}{273} = \alpha \cdot v_0\right).$$

Die Betrachtung der Figur 148 zeigt uns nun, daß die Δv- und die $\Delta\vartheta$-Werte immer die Katheten rechtwinkliger Dreiecke, $\Delta v_{(+100)}$ und $\Delta\vartheta_{(+100)}$

z. B. des Dreiecks $v_0 v_{100} v_0$, sind. Da in diesen die Katheten in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, so sind die Dreiecke sämtlich ähnlich, ihre Winkel gleich. Da somit der Winkel $v_{100} v_0 v_0$ gleich dem Winkel $v_{50} v_0 v_0$ sein muß, so liegen die Endpunkte der die Werte v_{100} und v_{50} darstellenden Ordinaten auf einer geraden Linie, die in der Figur schon eingezeichnet ist. Auf derselben Geraden müssen aber alle anderen zu irgendwelchen anderen Temperaturen gehörige v-Werte liegen, und zwar oberhalb wie auch unterhalb 0° C. Denn auch für $\vartheta < 0$ liefert dieselbe einfache Konstruktion ähnliche Dreiecke. So ist z. B.

$$\frac{\Delta v_{(-100)}}{\Delta \vartheta_{(-100)}} \text{ wiederum} = k, \text{ da } \Delta v_{(-100)} \text{ und } \Delta \vartheta_{(-100)}$$

numerisch gleich, nur mit umgekehrten Vorzeichen versehen sind, wie $\Delta v_{(+100)}$ bzw. $\Delta \vartheta_{(+100)}$. Daher ist $\sphericalangle v_{-100} v_0 v_{-100} = \sphericalangle v_0 v_{100} v_0$, mithin v_{-100} gleichfalls ein Punkt unserer Geraden.

Unsere Beziehung

$$v_\vartheta = v_0 + v_0 \cdot \alpha (\vartheta - \vartheta_0)$$

läßt erkennen, daß $v_\vartheta = 0$ wird, wenn $v_0 \cdot \alpha (\vartheta - \vartheta_0) = - v_0$ ist. Das ist aber der Fall, wenn

$$\vartheta = (\vartheta - \vartheta_0) = - \frac{1}{\alpha} = - 273.$$

Diese Temperatur ist bekanntlich der „absolute Nullpunkt". Es ist die Stelle, an der unsere Gerade die Abszissenachse (im negativen Gebiet) schneidet.

Wählt man diesen Punkt als Koordinatenanfangspunkt eines neuen Koordinatensystems, so behalten zwar die Ordinaten ihre alten Werte; die Abszissen sind aber sämtlich um je 273 Einheiten des Abszissenmaßstabes vergrößert. Es sind diese Abszissen die „absoluten Temperaturen". In unserer Figur ist auch dieses System, bei dem unsere Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt geht, mit eingezeichnet.

Wir kommen auf die gegenseitigen Beziehungen der beiden Systeme später noch zurück.

Hier wollen wir uns mit der Feststellung begnügen, daß für die Beziehungen zwischen den Gasvolumina und den dazu gehörigen absoluten Temperaturen (T-Werten) dieselbe Gesetzmäßigkeit gilt, wie für diejenigen zwischen Volumänderung und Temperaturänderung. Die Figur läßt deutlich erkennen, daß schon aus geometrischen Gründen

$$\frac{v_0}{T_0} = \frac{\Delta v_{(x)}}{\Delta \vartheta_{(x)}} = k$$

sein muß. In der Tat brauchen wir für T_0 nur seinen Wert, $+273$, einzusetzen und desgleichen für k seinen Wert $\alpha \cdot v_0 = \frac{v_0}{273}$, um die Identität

$$\frac{v_0}{273} = \frac{v_0}{273}$$

und damit die arithmetische Bestätigung unseres Schlusses zu erhalten.

Da das Verhältnis $\frac{\Delta \vartheta_{(x)}}{\Delta v_{(x)}} = k$ die Form der betreffenden rechtwinkligen Dreiecke eindeutig bestimmt, so ist damit auch die Größe des Winkels festgelegt, unter dem unsere Gerade die Abszissenachse schneidet (β).

Es ist dies der „Neigungswinkel" der Geraden. Seine trigonometrische Tangente ist gleich dem eben genannten Quotienten, also

$$\frac{\Delta v_{(x)}}{\Delta \vartheta_{(x)}} = k = \operatorname{tg} \beta.$$

Da nun k durch den Wert $\frac{v_0}{273}$ bestimmt ist, so ist zur absoluten Definierung von β nur noch die Verfügung über v_0 notwendig. Setzen wir v_0, im Maßstabe der Abszisse gemessen, gleich 100 (ccm), so wird $k = \frac{100}{273} = 0{,}3663$ und

$$\beta = 20^0\,7' \quad (\operatorname{tg} \beta = 0{,}3663).$$

Dieser Wert von v_0 ist unserer Figur zugrundegelegt; man kann sich durch Ausmessung leicht davon überzeugen, daß v_0 tatsächlich $= \vartheta_{100}$ und β = rund 20^0 ist.

Hätten wir für v_0 einen andern Maßstab gewählt, z. B. so, daß $v_0 = 273$ Einheiten des Abszissenmaßstabes würde, so ergäbe sich

$$k = \frac{273}{273} = 1$$

und $\beta = 45^0$ (in der Figur gestrichelt angedeutet).

Das Ergebnis können wir auch so formulieren: Wenn die Änderung einer Größe ($\Delta v_{(x)}$ als Änderung von v_0) der Änderung einer anderen Größe ($\Delta \vartheta_{(x)}$ als Änderung von ϑ_0) proportional ist, so daß

$$\Delta v_{(x)} = k \cdot \Delta \vartheta_{(x)}$$

$$\text{und} \quad \frac{\Delta v_{(x)}}{\Delta \vartheta_{(x)}} = k,$$

so ist der graphische Ausdruck dieser gesetzmäßigen Abhängigkeit eine gerade Linie, deren Neigung durch den Proportionalitätsfaktor k eindeutig bestimmt ist.

Allgemein gilt also, wenn mit Δy die einer Änderung von x um den Betrag Δx entsprechende Änderung von y bezeichnet wird, für eine Beziehung der Art

$$\Delta y = f(\Delta x) = k \cdot \Delta x$$

$$\text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

die Regel, daß die Neigung der diese Abhängigkeit darstellenden Geraden gegen die x-Achse durch den Ausdruck

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

eindeutig bestimmt ist, wenn β der Neigungswinkel der Geraden ist.

Nur in ziemlich seltenen Fällen sind zwei Größen durch die soeben besprochene einfache Beziehung, welche wegen der Darstellbarkeit durch eine gerade Linie linear genannt wird, verknüpft. Meist sind die Gesetzmäßigkeiten komplizierter und finden ihren geometrischen Ausdruck in gekrümmten Linien, Kurven.

Wir betrachten die alsdann obwaltenden Verhältnisse an der Hand der Figur 149.

Diese stellt eine Beziehung dar, die uns ebenfalls schon geläufig ist, nämlich den Zusammenhang zwischen dem Dampfdrucke einer einheit-

lichen Flüssigkeit und der (gewöhnlichen) Temperatur. Die Abszissen sind die Celsiustemperaturen (ϑ), die Ordinaten die Dampfdrucke (p). Die erhaltene Kurve ist also eine Dampfdruckkurve. Wir betrachten vier Punkte dieser Kurve mit den Ordinaten p_1 bis p_4. Sie sind so gewählt, daß die zugehörigen Abszissenwerte (ϑ_1 bis ϑ_4) um gleiche Beträge auseinanderliegen. Und zwar ist

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \vartheta_3 - \vartheta_2 = \vartheta_4 - \vartheta_3.$$

Bilden wir nun, wie in dem vorher beschriebenen Falle, die Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so erhalten wir hier, wenn $y = p$ und $x = \vartheta$, ferner

$$\Delta p_1 = p_2 - p_1;\ \Delta p_2 = p_3 - p_2;\ \Delta p_3 = p_3 - p_2,$$

$$\text{und } \vartheta_2 - \vartheta_1 = \vartheta_3 - \vartheta_2 = \vartheta_4 - \vartheta_3 = \Delta\vartheta$$

ist, die Werte

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta\vartheta};\qquad \frac{\Delta p_2}{\Delta\vartheta};\qquad \frac{\Delta p_3}{\Delta\vartheta}.$$

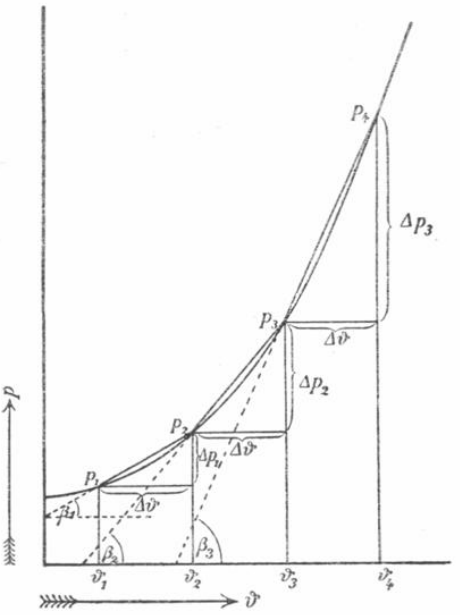

Fig. 149.
Dampfdruckkurve eines flüssigen Stoffes. Abhängigkeit der Kurvenneigung von der gewählten Stelle.

Schon der Augenschein lehrt, daß von einer Gleichheit dieser drei Quotienten, wie im vorigen Beispiele, hier keine Rede sein kann. Während $\Delta\vartheta$ bei allen dreien den gleichen Wert hat, ist ganz offenbar

$$\Delta p_3 > \Delta p_2 > \Delta p_1.$$

Dementsprechend ist auch die Neigung der Kurve gegen die Abszissenachse, wenn wir diese auch hier wieder durch den Winkel ausdrücken, dessen trigonometrische Tangente jedesmal der Quotient $\frac{\Delta p}{\Delta\vartheta}$ ist, nicht konstant, sondern steigt mit zunehmender Temperatur. Das ergibt ja auch das ganze Kurvenbild: die p-ϑ-Kurve wird mit steigendem ϑ steiler. Verbinden wir also wieder je zwei p-Werte durch eine Gerade und verlängern wir diese bis zum Schnitt mit der Abszissenachse (bzw. einer Parallelen zu dieser), so erhält man die „Neigungswinkel" β_3, β_2 und β_1 der Verbindungslinien $p_4\,p_3$, $p_3\,p_2$ und $p_2\,p_1$. Ganz augenscheinlich ist die Reihenfolge:

$$\beta_3 > \beta_2 > \beta_1,$$

entsprechend der der obengenannten Quotienten.

Wir machen also die Beobachtung, daß der Quotient $\frac{\Delta p}{\Delta\vartheta}$ (oder allgemein $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) hier nicht konstant, sondern bei gleichem Werte von $\Delta\vartheta$ (bzw. Δx) je nach der Lage des Ausgangspunktes auf unsere Kurve verschieden ist. Es liegt der Schluß nahe, daß der Charakter unserer Kurve

für die Veränderlichkeit des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ mit der Stelle der Kurve, an der wir die Messung anstellen, verantwortlich zu machen ist. Wir sehen ja, daß die Kurve mit steigendem ϑ steiler verläuft; entsprechend steigt $\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta}$ von $\frac{\Delta p_1}{\Delta \vartheta} = 0{,}56$ auf $\frac{\Delta p_2}{\Delta \vartheta} = 1{,}12$ und $\frac{\Delta p_3}{\Delta \vartheta} = 2{,}20$ (durch Ausmessen gefunden), wenn wir die Bestimmung der Reihe nach bei den Ausgangswerten ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 vornehmen.

Da das „Steilerwerden" der Kurve mit der Vergrößerung ihrer „Neigung gegen die Abszissenachse" identisch ist, so werden wir in dem Anwachsen des Quotienten $\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta}$ bei zunehmendem ϑ in der Tat ein Maß für das Steilerwerden erblicken dürfen. Es fragt sich nur, ob die gewählte Bestimmungsmethode für die „Neigung" der Kurve eindeutige Ergebnisse liefert. Das wird sogleich noch zu erörtern sein.

Auf jeden Fall sehen wir, daß der Wert des Quotienten $\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta}$ nicht konstant ist, sondern offenbar in gesetzmäßiger Weise von dem Werte der Ausgangstemperatur abhängt (überall gleiches $\Delta\vartheta$ vorausgesetzt).

Wir können daher schreiben

$$\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta} = F(\vartheta)$$

oder allgemein

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F(x);$$

d. h. der Quotient ist selbst wieder eine Funktion von ϑ bzw. x. Das ist der charakteristische Unterschied unserer Kurve von der vorher betrachteten geraden Linie, für die gilt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ (Quotient also keine x-Funktion, sondern unabhängig vom Ausgangspunkte der Messung).

Wir hatten vorhin die Frage aufgeworfen, ob die Bestimmung der Richtung einer Kurve mit Hilfe des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eindeutig sei, wenn man nur einen bestimmten Ausgangspunkt (x-Wert) ins Auge faßt. Wir wollen die Beantwortung an der Hand der Figur 150 versuchen. Die hier gezeichnete Kurve mit den Punkten 1 bis 8 zeigt eine wieder etwas andere Gestalt als die eben diskutierte Dampfdruckkurve. Ihre Form ist noch geeigneter zur Ableitung der gewünschten Folgerungen.

Als fester Ausgangspunkt soll der Kurvenpunkt 5 mit der Abszisse x_5 und der Ordinate y_5 dienen. Wir haben zu untersuchen, ob die aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ abgeleitete Neigung der Kurve mit der Wahl dieses festen Grundpunktes eindeutig bestimmt ist, oder ob noch andere Momente maßgebend sind.

Zu diesem Zwecke nehmen wir als zweiten Kurvenpunkt der Reihe nach zunächst die Punkte 6, 7 und 8 mit den Abszissen x_6, x_7 und x_8 und den Ordinaten y_6, y_7 und y_8. Diese Punkte sind so gewählt, daß

$$(x_6 - x_5) : (x_7 - x_5) : (x_8 - x_5) = 1 : 2 : 4$$

ist. Wir nennen nun $(x_6 - x_5)$ kurz Δx_6, $(x_7 - x_5)$ und $(x_8 - x_5)$ entsprechend Δx_7 und Δx_8. Die zugehörigen Ordinatendifferenzen $(y_6 - y_5)$, $(y_7 - y_5)$ und $(y_8 - y_5)$ bezeichnen wir analog mit Δy_6, Δy_7, und Δy_8.

Die „Neigung unserer Kurve im Punkte 5", wie wir den durch Messung mit Punkt 5 als Ausgangspunkt gewonnenen Wert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ allgemein nennen wollen, wird denn also je nach der Wahl des zweiten Kurvenpunktes zu

$$\frac{\Delta y_6}{\Delta x_6}, \quad \frac{\Delta y_7}{\Delta x_7} \text{ oder } \frac{\Delta y_8}{\Delta x_8}$$

gefunden. Durch Verlängerung der Verbindungslinien von Punkt 6 usw. mit Punkt 5 bis zum Schnitt mit der Abszissenachse oder einer Parallele zu ihr entstehen die Winkel β_6, β_7 und β_8, deren trigonometrischen Tangenten die obigen Quotienten sind. Die Winkel β_6 usw. sind also die „Neigungswinkel" unserer Kurve.

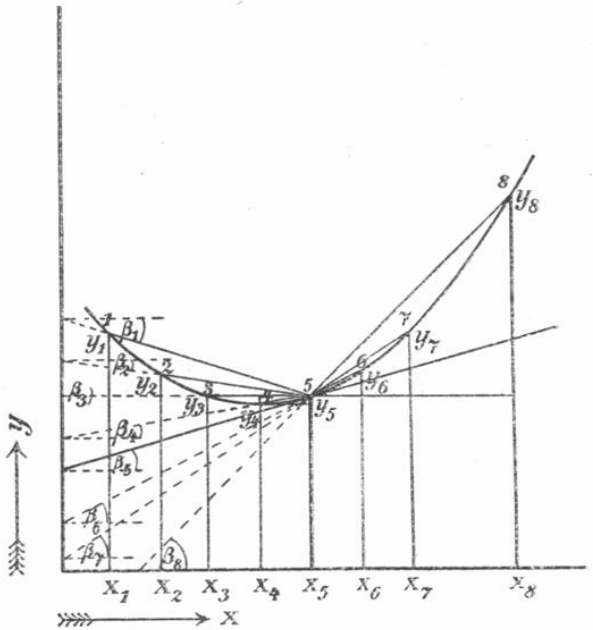

Fig. 150.
Abhängigkeit der Neigung einer Kurve von Größe und Richtung der Differenz Δx im Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Offensichtlich ist nun

$$\beta_6 < \beta_7 < \beta_8.$$

Wir haben also für die Neigung der Kurve im Punkte 5 verschiedene Werte erhalten, je nachdem ob wir den zweiten Kurvenpunkt in größerer oder geringerer Nähe von 5 gewählt haben. Das heißt also, daß die Neigung der Kurve nicht nur vom Ausgangspunkte der Messung, sondern auch von der Lage des notwendigen zweiten Punktes auf der Kurve abhängig ist. Unsere Frage ist damit in dem Sinne beantwortet, daß die Wahl des Ausgangspunktes allein die Neigung noch nicht eindeutig bestimmt.

Noch auffälliger tritt das hervor, wenn wir den zweiten Punkt nicht rechts, sondern links von Punkt 5 wählen. Wir verfahren also nunmehr analog mit den Punkten 4, 3, 2 und 1. Dann resultieren die

Neigungswinkel β_4, β_3, β_2 und β_1. Wie man sieht, ist β_4 noch kleiner als β_6. β_3 ist, da die Verbindungslinie vom Punkt 5 und 3 parallel der Abszissenachse verläuft, sogar gleich Null, und die Winkel β_2 und β_1 liegen endlich an der Unterseite der Parallelen zur x-Achse, müssen also als negativ bezeichnet werden; und zwar ist β_1 stärker negativ (absolut größer) als β_2. Dieses Ergebnis ist nach den entsprechenden Δ-Werten auch zu erwarten. Es ist nämlich $y_4 - y_5$ negativ ($y_4 < y_5$); da aber auch $x_4 - x_5$ negativ ist ($x_4 < x_5$), so bleibt gleichwohl $\frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5} = \frac{\Delta y_4}{\Delta x_4} > 0$ (positiv), daher auch $\beta_4 > 0$.

Weiterhin ist $y_3 = y_5$ (absichtlich so gewählt); darum ist $y_3 - y_5 = 0$, mithin $\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = 0$, also auch $\beta_3 = 0$. Endlich sind y_2 und y_1 wieder $> y_5$, mithin Δy_2 und Δy_1 positiv; da aber $x_2 - x_5$ und $x_1 - x_5$ negativ sind, werden die Quotienten $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$ und $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ ebenfalls negativ, folglich auch β_2 und β_1.

Durch Ausmessung der Figur (in willkürlichem, aber für y und x gleichem Maßstabe) findet man für die verschiedenen Größen (y, x, Δy, Δx, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und β) Werte, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Zahlenwerte zur Figur 150.

$x_5 = 4{,}90$; $y_5 = 3{,}40$.

Indices	y	x	Δy	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	β
1	4,65	0,95	+ 1,25	— 3,95	— 0,316	— 17° 34′
2	3,85	1,95	+ 0,45	— 2,95	— 0,153	— 8° 40′
3	3,40	2,40	± 0	— 2,50	± 0	± 0
4	3,25	3,95	— 0,15	— 0,95	+ 0,158	+ 8° 58′
6	3,90	5,95	+ 0,50	+ 1,05	+ 0,476	+ 25° 28′
7	4,65	6,90	+ 1,25	+ 2,00	+ 0,625	+ 32° 0′
8	7,40	8,95	+ 4,00	+ 4,05	+ 0,988	+ 44° 39′

Die in der letzten Spalte enthaltenen Werte für β stellen also die „Neigung unserer Kurve im Punkte 5" dar. Ihre Abhängigkeit von der Wahl des zweiten Kurvenpunktes ist wohl evident, und wir würden in Verlegenheit geraten, welchem Werte wir vor den übrigen den Vorzug geben sollten, wenn wir die „Neigung" eindeutig zu bestimmen hätten. Wie diese Schwierigkeit behoben wird, soll das nächste Kapitel zeigen.

372. Differenzenquotient und Differentialquotient. Wir haben festgestellt, daß der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im allgemeinen (außer bei linearen Funktionen)

1. selbst eine Funktion von x darstellt, daß also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = F(x)$,
2. außerdem abhängig von dem Werte von Δx ist und daher verschieden ausfällt, je nachdem Δx positiv oder negativ, größer oder kleiner gewählt wird. Es ist also ferner

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x).$$

Es ergab sich daraus die Schwierigkeit, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eindeutig zu bestimmen. Denn wenn auch für die Kurvenstelle, an der $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt wird, der Einfluß von x ohne weiteres nach der Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F(x)$$

ausgewertet werden kann, so muß man doch, damit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ definiert ist, auch noch eine Verfügung über den Wert von Δx treffen, was nicht ohne Willkür möglich ist.

Nun erkennen wir bei der Betrachtung der Figur 150 wie auch der zugehörigen Tabelle, daß in dem vorliegenden Falle der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ offenbar immer kleiner wird, je näher an Punkt 5 wir den zweiten Punkt mit positiven Δx wählen; anderseits ändert sich der Quotient, wenn wir auf der Seite des negativen Δx den Abstand des zweiten Kurvenpunktes verkleinern, in dem Sinne, daß er von großen negativen Werten nach kleineren negativen Werten, dann über Null dauernd steigend ins positive Gebiet übergeht. Machen wir Δx (absolut) noch kleiner als — 0,95, so steigt β über $8^0 58'$ hinaus, machen wir Δx kleiner als + 1,05, so fällt β unter $25^0 28'$.

Es fragt sich nun, ob wir nicht bei fortgesetzter Verkleinerung des Δx von beiden Seiten her zu einer gemeinsamen Grenze, d. h. zu identischen Werten von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und damit von β kommen. Daß eine solche Grenze im allgemeinen wirklich erreicht wird, ist aus geometrischen Gründen leicht einzusehen. Alle die Geraden, die wir als Verbindende von je zwei Kurvenpunkten zur Ermittelung der Neigung unserer Kurve zogen, können wir als Sekanten der Kurve bezeichnen, da sie diese in (mindestens) zwei Punkten schneiden, die zwischen den betreffenden Kurvenpunkten liegenden Stücke auch als Sehnen. Verringern wir den Abstand des zweiten Kurvenpunktes fortlaufend, so tritt schließlich der Fall ein, daß die beiden Punkte in denselben Punkt zusammenfallen. Damit wird aber die Sekante zur Tangente an der Kurve, mit der sie dann nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, eben unseren Ausgangspunkt (oben den Punkt 5). Nun gibt es nur eine einzige Tangente in einem gegebenen Kurvenpunkte.[805] Folglich müssen wir auf dieselbe Tangente kommen, wenn wir auch von der anderen Seite her Δx fortlaufend absolut verkleinern. Die Richtung dieser einzigen Tangente in dem gewählten Kurvenpunkte gibt uns nun jenen Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. von β an, von dessen Erreichung von beiden

[805] Außer bei unstetigen Funktionen, die hier nicht in Frage kommen, oder bei zusammengesetzten Kurven mit Knickpunkten, die ebenfalls ausscheiden (s. weiter unten).

Seiten her (bei fortgesetzter Verkleinerung von Δx) soeben die Rede war. Die Neigung der Tangente gegen die Abszissenachse liefert mithin einen eindeutig bestimmten Grenzwert für die Neigung der Kurve im gewählten Punkte. In der Figur 150 ist diese Tangente an der Kurve im Punkte 5 eingezeichnet. Der Winkel β_5 stellt die „wahre" Neigung der Kurve im Punkte 5 dar. Man sieht sogleich, daß β_5 tatsächlich der Größe nach zwischen β_6 und β_4 liegt (die Ausmessung ergibt rund 16°).

Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt Differenzenquotient. Sein Wert ist, wie wir sahen, von Δx abhängig. Lassen wir Δx (gleichgültig, ob von der positiven oder von der negativen Seite her) sich der Null mehr und mehr nähern oder, wie man dafür auch sagt, „unendlich klein" werden, so nähert sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mehr und mehr einem Grenzwert, den wir durch das Symbol $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ charakterisieren (d. h. Grenze [limes] für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, welche der Annäherung von Δx an Null entspricht).

Zu einem „unendlich kleinen" Zuwachs von x gehört nun in unserem Falle auch ein „unendlich kleiner" Zuwachs von y; das heißt also: mit Δx nähert sich auch Δy der Null mehr und mehr.

Ein unendlich kleiner Zuwachs einer Größe, z. B. von x oder von y, heißt ein Differential und wird durch ein besonderes Symbol, dx bzw. dy usw., ausgedrückt.

Den „Übergang zur Grenze" deutet man dadurch an, daß man statt Δx das Zeichen dx und statt Δy das Zeichen dy usw. setzt. Demgemäß schreibt man:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Ein Ausdruck der Art wie $\frac{dy}{dx}$ heißt, da Zähler und Nenner des Bruches Differentiale sind, Differentialquotient.

Wir haben also als Ergebnis festzuhalten:

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ strebt, wenn Δx kleiner und kleiner wird, einem Grenzwert, $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, zu, den man Differentialquotienten nennt und mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. Dieser ist gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, den die in dem betreffenden Kurvenpunkte an die Kurve gelegte geometrische Tangente mit der Abszissenachse bildet.

Wir haben also:

$$\frac{dy}{dx} \text{ (im Punkt 5)} = \operatorname{tg} \beta_5.$$

Durch den Wert von $\frac{dy}{dx}$ ist die Neigung der Kurve in irgendeinem Punkte eindeutig bestimmt: sie ist gleich der Neigung der Kurventangente in diesem Punkte. Da bei unserer Kurve (wie im allgemeinen) $\frac{dy}{dx}$ eine Funktion der Lage des gewählten Punktes auf der Kurve ist, so daß also

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

hat unsere Kurve in jedem Punkte eine bestimmte, von Punkt zu Punkt wechselnde Richtung.

Weggefallen ist nunmehr aber die in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (bei $\Delta x \gtrless 0$) vorhandene Abhängigkeit des Quotienten von Δx. Durch das Symbol dx soll ja eben angedeutet werden, daß Δx sich der Null genähert hat. Damit ist nunmehr $\frac{dy}{dx}$ als Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eindeutig definiert, wenn ein bestimmter Kurvenpunkt gewählt ist, entsprechend der Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Die Ermittelung des Grenzwertes $\frac{dy}{dx}$ heißt Differentiieren. Man könnte vielleicht annehmen, daß sich der Differentialquotient stets in sehr einfacher Weise so finden läßt, daß man in dem gewählten Kurvenpunkte die Tangente an die Kurve konstruiert, ihren Winkel mit der x-Achse ausmißt und dazu die trigonometrische Tangente aufschlägt. Das ist natürlich an sich möglich. Aber abgesehen davon, daß eine solche geometrische Lösung der Aufgabe, vor allen Dingen wegen der Unsicherheit in der Konstruktion der Kurventangente, sehr ungenau ausfällt, stellt sie doch nur eine recht unvollkommene Lösung dar. Die Hauptsache ist nämlich die Ermittelung von $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von x, d. h. die Feststellung der Gesetzmäßigkeit, nach der die Neigung der Kurve sich bei Veränderung von x ändert. Bei der geometrischen Lösung müßte man $\frac{dy}{dx}$ für eine Reihe von x-Werten bestimmen und daraus den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen beiden Wertreihen zu konstruieren suchen. Das ist sehr umständlich; auch ist der Erfolg zweifelhaft.

Glücklicherweise ist ein solcher Umweg auch nicht nötig. Es ist nämlich möglich, den Wert des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ analytisch (rechnerisch) als Funktion von x zu finden, und diesem Zwecke dient die Differentialrechnung. Ihre nächste Aufgabe ist es also, $\frac{dy}{dx}$ durch x auszudrücken, so daß man zu jedem Kurvenpunkte mit irgendeinem beliebigen Werte von x auf rechnerischem Wege sofort $\frac{dy}{dx}$ und damit die Richtung der in diesem Punkte an die Kurve zu legenden Tangente finden kann. Voraussetzung ist natürlich, daß die Gleichung der Kurve, d. h. die gesetzmäßige Beziehung zwischen y und x $[y = f(x)]$, bekannt ist.

373. Die Grundlagen der analytischen (rechnungsmäßigen) Differentiation. Wir gehen wieder von einem endlichen Zuwachs von x und y aus. Es möge x von dem Werte x_1 auf den Wert x_2 anwachsen, so daß $x_2 - x_1 = \Delta x$ ist. Dann geht gleichzeitig y von y_1 auf y_2 über, und es ist entsprechend $y_2 - y_1 = \Delta y$ zu setzen. Die Grundlage unserer Rechnung ist nun die, daß wegen der gesetzmäßigen Verknüpfung von y mit x $[y = f(x)]$ der zu irgendeinem Werte von x gehörige Wert von y stets die gleiche Funktion des betreffenden x-Wertes ist. Wenn also allgemein $y = f(x)$ ist, so haben wir

$$y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \quad y_m = f(x_m) \text{ usw.}$$

Da nun $\Delta y = y_2 - y_1$ ist, erhalten wir:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

und ferner, weil $\Delta x = x_2 - x_1$, also $x_2 = x_1 + \Delta x$,

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Mithin ergibt sich für den Differenzenquotienten der Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

oder allgemein, da wir von irgendeinem beliebigen Werte von x ausgehen können,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Würden wir in diesem Stadium einfach $\Delta x = 0$ setzen, so erhielten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + 0) - f(x)}{0} = \frac{0}{0},$$

einen Ausdruck, der ganz unbestimmt ist.

Anders, wenn wir zunächst den Ausdruck $f(x + \Delta x)$ entwickeln, solange Δx noch von Null verschieden ist, und dann zur Grenze übergehen. Dieses Verfahren ist natürlich nur unter Zugrundelegung einer bestimmten Funktion möglich.

Wir wählen als Beispiel die Funktion

I. $$y = f(x) = x^2.$$

Dann ist, da $f(x + \Delta x)$ in derselben Beziehung zu $x + \Delta x$ steht, wie $f(x)$ zu x,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Wenn wir nunmehr den Grenzübergang vornehmen, erhalten wir:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Wir sehen also, daß im Falle der Funktion $y = f(x) = x^2$ der Quotient $\frac{dy}{dx}$ trotz seiner zunächst unbestimmt scheinenden Form $\frac{0}{0}$ einen ganz bestimmten Wert, nämlich $2x$, besitzt.

In derselben Weise kann man ganz allgemein vorgehen; insbesondere erhält man für den allgemeinen Fall einer Potenzbeziehung zwischen y und x, d. h. für den Fall, daß y eine beliebige Potenz von x ist, die folgende Entwicklung.

II. $$y = f(x) = x^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = {}^{806}$$

[806] Nach dem binomischen Lehrsatz.

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[x^m + \frac{m}{1} \cdot x^{m-1} \cdot \Delta x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{m-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m - x^m \right]$$

$$= \frac{\frac{m}{1} \cdot x^{m-1} \cdot \Delta x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{m-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m}{\Delta x} =$$

$$= \frac{m}{1} \cdot x^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{m-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Setzen wir nun $\Delta x = 0$, so wird

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \cdot x^{m-1} + 0 + 0 + \ldots 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}.$$

Wenn $m = 2$ ist, resultiert als spezieller Fall, wie im vorigen Beispiele,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$$

Wir haben also die allgemeine Beziehung zwischen $\frac{dy}{dx}$ und x gefunden $\left(\frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}\right)$ für den Fall, daß $y\,(= f(x))$ eine beliebige Potenz von x ist, oder wir können nun die Neigung derjenigen Kurve, die y als Potenz von x darstellt, gegen die Abszissenachse in jedem beliebigen Kurvenpunkte rechnerisch ermitteln:

$$\operatorname{tg} \beta_x = m \cdot x^{m-1}.$$

Damit ist für diese Art von Beziehung zwischen y und x die Aufgabe gelöst.

Lediglich formal kann man $\frac{dy}{dx}$ auch noch etwas anders ausdrücken. Da $y = f(x)$ ist, so kann man statt

$$\frac{dy}{dx} \text{ auch schreiben } \frac{d\,f(x)}{dx}.$$

Weiterhin wird die Funktion von x, als welche sich $\frac{dy}{dx}$ ergibt, auch die „abgeleitete Funktion" oder einfach „die erste Ableitung" von x genannt und allgemein mit $f'(x)$ bezeichnet. Wir haben dann also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x)$$

oder $\mathbf{d\,f(x) = f'(x) \cdot dx}$.

374. Einige weiteren Beispiele aus der Differentialrechnung. Die Ausdehnung der Differentiation auf andere Funktionen bietet nun keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr; denn das eben mitgeteilte allgemeine Verfahren ist noch in vielen Fällen anwendbar. Wir treffen eine engere Auswahl und nehmen nur solche Beispiele, die für physikochemische Dinge entweder selbst von Bedeutung sind oder als Überleitung zu derartigen Beispielen dienen.

III. Wird in der allgemeinen Formel

$$y = f(x) = x^m$$

m negativ, so bleibt die Gleichung für die abgeleitete Funktion gleichwohl in Geltung. Es ist also z. B. für $\mathbf{y = x^{-2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dx} = \frac{dx^{-2}}{dx} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

IV. Wenn $m = 0$ wird, so ist $\mathbf{y = x^0 = 1}$, und wir finden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,1}{dx} = 0 \cdot x^{-1} = 0.$$

V. Differentiation einer Konstante.

Der soeben behandelte Fall, daß $y = x^0 = 1$ ist, nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als y, unabhängig vom Werte von x, stets denselben Wert, nämlich 1, beibehält, d. h. konstant ist.

Es ist dies ein Sonderbeispiel des allgemeineren Falles, der durch die Gleichung

$$\mathbf{y = a}$$

wiedergegeben wird, worin a eine beliebige Konstante, d. h. einen beliebigen, nicht mit x veränderlichen Wert, darstellen soll.

In unserer Grundgleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

nimmt der Zähler nunmehr, da ja y konstant gleich a sein soll, unter allen Umständen den Wert $a - a = 0$ an. Daher ist hier auch der Differenzenquotient stets gleich Null, gleichgültig, wie groß oder wie klein Δx auch sei. Das bedeutet aber, daß auch durch den Übergang zur Grenze, der eben darin besteht, daß sich Δx der Null nur unbegrenzt nähert, ohne aber streng gleich Null zu werden, an diesem Ergebnis nichts geändert werden kann, oder daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$$

ist.

VI. Differentiation von Summe und Differenz.

Es sei $y = f(x)$ eine Summe zweier Funktionen, nämlich $= \varphi(x) + \psi(x)$. Dann finden wir wieder nach dem allgemeinen Schema

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) + \psi(x + \Delta x) - [\varphi(x) + \psi(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{d\,\varphi(x)}{dx} + \frac{d\,\psi(x)}{dx};$$

oder

$$\frac{d[\varphi(x) + \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Es ist also der Differentialquotient einer Summe von Funktionen gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Dieselbe Regel bleibt in Geltung, wenn der zweite Summand negatives Vorzeichen hat, wie sich an der Hand der vorstehenden Entwicklung ohne weiteres herleiten läßt. Es wird dann, wenn also

$$y = f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\varphi(x) - \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx},$$

d. h. der Differentialquotient einer Differenz zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

VII. Differentiation eines Produktes zweier Funktionen.

Ist $y = f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, dann wird

$$f(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x),$$

und wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\Delta x}.$$

Wendet man nun den Kunstgriff an, im Zähler den Wert

$$[-\varphi(x) \cdot \psi(x + \Delta x) + \varphi(x) \cdot \psi(x + \Delta x)] \qquad (= 0)$$

zu addieren und die Glieder zweckentsprechend zu ordnen, so nimmt unser Bruch die Form an:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x + \Delta x) + \varphi(x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\Delta x}$$

oder umgeformt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left[\psi(x + \Delta x) \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x) \cdot \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \right].$$

Beim Übergange zur Grenze wird also, weil der Faktor $\psi(x + \Delta x)$ des ersten Gliedes in $\psi(x + 0) = \psi(x)$ übergeht,

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

VIII. Aus V und VII läßt sich nunmehr für die Funktion

$$y = f(x) = a \cdot \varphi(x),$$

in der a einen beliebigen konstanten Wert bedeuten soll, der Differentialquotient folgendermaßen ableiten.

Es ist nach VII:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \frac{da}{dx} + a \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

und nach V:

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[a \cdot \varphi(x)]}{dx} = a \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Das heißt: befindet sich bei irgendeiner Funktion ein konstanter Faktor, so tritt dieser auch zum Differentialquotienten jener Funktion einfach als Faktor, oder: konstante Faktoren kann man vor der Differentiation herausetzen.

IX. Differentiation eines Quotienten zweier Funktionen. Es sei

$$y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Dann ist $f(x + \Delta x) = \frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)}$,

und es wird

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x) - \varphi(x) \cdot \psi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x) \cdot \psi(x) \cdot \Delta x}.$$

Wir addieren im Zähler wieder, wie in VII, zwei Glieder im Gesamtwerte Null, und zwar hier

$$-\varphi(x) \cdot \psi(x) + \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

sodaß der Bruch entsteht:

$$\frac{\psi(x) \cdot [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] - \varphi(x) \cdot [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)]}{\psi(x + \Delta x) \cdot \psi(x) \cdot \Delta x}$$

oder

$$\frac{\psi(x) \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x) \cdot \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}}{\psi(x + \Delta x) \cdot \psi(x)}.$$

Durch den Grenzübergang erhalten wir dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}}{[\psi(x)]^2}.$$

Wenden wir diese Formel auf das schon oben unter III. behandelte Beispiel

$$y = x^{-2}$$

in der Schreibweise

$$y = \frac{1}{x^2}$$

an, so finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \frac{d1}{dx} - 1 \cdot \frac{dx^2}{dx}}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen auf anderem Wege gewonnenen Ergebnis.

X. Differentiation logarithmischer[807] Funktionen. Der Fall $y = f(x) = \log x$ ist für physikochemische Fragen von besonders großer Bedeutung, da logarithmische Beziehungen sehr häufig auftreten.

[807] Die Basis des Logarithmensystems ist beliebig.

Wir kommen hier nun zu folgender Entwicklung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Setzen wir nun statt $\frac{\Delta x}{x}$ den Wert $\frac{1}{n}$, so wird $\frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x}$, und wir erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x} \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \cdot \log\left(1^n + \frac{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \right.$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1^{n-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1^{n-3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\left. + \ldots \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots [n-(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots} \cdot \frac{1}{(n-1)} \cdot 1^1 \cdot \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+1+\frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3 \cdot n^2} + \ldots \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+1+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right) + \ldots \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^n}\right).$$

Beim Grenzübergang nähert sich mit Δx auch $\frac{\Delta x}{x}$ der Null, und wird $\frac{x}{\Delta x} = n = \infty$, so daß resultiert:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+1+\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^n}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log\left(1+1+\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck hat den (irrationalen) Wert 2,71828 . . . . Diese Zahl wird mit e bezeichnet und dient als Basis eines besonderen Systems von Logarithmen, der „natürlichen" Logarithmen.

Es ist also endlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e.$$

Man erkennt, daß, wenn als Basis des Logarithmensystems e gewählt, d. h. mit natürlichen Logarithmen (ln) gerechnet wird, der Differentialquotient eine besonders einfache Form annimmt.

Es ist nämlich, wenn $y = \ln x$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Diese letztere Formel ist wohl die für die physikalische Chemie wichtigste Formel der Differentialrechnung.[808]

XI. Indirekte Differentiation mit Hilfe der inversen Funktion. Liegt eine Funktion der Form

$$y = e^x$$

[808] Die Differentiation der für unsere Zwecke unwichtigen trigonometrischen Funktionen, wie sin x usw., wird hier übergangen.

vor, so verfährt man zweckmäßig in der Weise, daß man die inverse Funktion bildet, d. h. x durch y ausdrückt. Das liefert in unserem Falle:

$$x = \ln y \qquad (\text{denn } \ln y = x \cdot \ln e = x).$$

Dann finden wir sogleich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y}$$

und als reziproken Wert

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x .$$

Hier ist also der Differentialquotient gleich der Funktion selbst. In einem ähnlichen Falle, nämlich bei der Funktion

$$y = a^x ,$$

bilden wir analog

$$\ln y = x \cdot \ln a$$

und

$$x = \frac{\ln y}{\ln a} ,$$

ferner

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y \cdot \ln a} ;$$

mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a .$$

XII. Differentiation verketteter Funktionen. Unter verketteten Funktionen oder „Funktionen von Funktionen“ sollen Ausdrücke verstanden werden, die sich selbst wieder von einer Funktion herleiten, also z. B. $(\log x)^2$.

Wir schreiben solche Funktionen allgemein in der Form

$$y = f(\varphi(x)) .$$

Wir finden wieder in bekannter Weise

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta f(\varphi(x)) &= f(\varphi(x + \Delta x)) - f(\varphi(x)) \\ &= f(\varphi(x) + \Delta\varphi(x)) - f(\varphi(x)), \end{aligned}$$

oder, wenn wir $\varphi(x)$ kurz mit z, daher $\Delta\varphi(x)$ mit Δz und $\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$ mit $z + \Delta z$ bezeichnen,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta x} .$$

Multiplizieren wir nun mit dem Bruche $\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta z}$ $(= 1)$, so erhalten wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta x} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta z}$$

und umgeformt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} .$$

Beim Grenzübergang wird daraus

$$\frac{\mathbf{d\,y}}{\mathbf{d\,x}} = \frac{d\,f(z)}{d\,z} \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = \frac{\mathbf{d\,y}}{\mathbf{d\,\varphi(x)}} \cdot \frac{\mathbf{d\,\varphi(x)}}{\mathbf{d\,x}} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Um die Anwendung dieser Regel zu erläutern, wählen wir die verkettete Funktion

$$\mathbf{y = x^x}.$$

Wir bilden

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

und

$$y = e^{x \ln x}.$$

Setzen wir nun $x \ln x = z$, so haben wir $y = e^z = e^{\varphi(x)}$.

Mithin wird

$$\frac{\mathbf{d\,y}}{\mathbf{d\,x}} = \frac{d\,e^z}{d\,x} = \frac{d\,e^z}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{d\,e^z}{d\,z} \cdot \frac{d\,(x \cdot \ln x)}{d\,x} = \text{(nach XI, VII, X)}$$

$$= e^z \cdot \left(\ln x \cdot \frac{d\,x}{d\,x} + x \cdot \frac{d \ln x}{d\,x}\right) = y \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= y \cdot (\ln x + 1) = \mathbf{x^x \cdot (\ln x + 1)}.$$

XIII. Anwendung auf kompliziertere Fälle. Es kann nötig werden, kompliziertere Funktionen mehrfach zu zerlegen. Hierfür diene als Beispiel die Funktion

$$y = \left(\frac{4x^2 + 3ax - \sqrt[7]{3}}{e^x \cdot \ln x}\right)^x.$$

Wir setzen darin den Klammerwert $= z$, also $y = z^x$, ferner den Zähler des Bruches in der Klammer $= u$, den Nenner gleich $v \cdot w$ ($v = e^x$; $w = \ln x$). Dann ist

$$y = z^x = \left(\frac{u}{v \cdot w}\right)^x.$$

Wir bilden weiterhin

$$\ln y = x \ln z;\quad y = e^{x \ln z}$$

und setzen schließlich $x \ln z = \xi$, so daß $y = e^\xi$ ist. Dann wird

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,e^\xi}{d\,\xi} \cdot \frac{d\,\xi}{d\,x} = e^\xi \cdot \frac{d\,\xi}{d\,x} = e^{x \ln z} \cdot \frac{d\,(x \ln z)}{d\,x} =$$

$$= y \cdot \left(\ln z + x \cdot \frac{d \ln z}{d\,x}\right) = y \left(\ln z + x \cdot \frac{d \ln z}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}\right) =$$

$$= y \cdot \left(\ln z + \frac{x}{z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}\right) = y \cdot \left(\ln z + \frac{x}{z} \cdot \frac{v \cdot w \frac{d\,u}{d\,x} - u \cdot \frac{d\,(v \cdot w)}{d\,x}}{v^2 \cdot w^2}\right) =$$

$$= y \cdot \left(\ln z + \frac{x}{z} \cdot \frac{v \cdot w \cdot \frac{d\,u}{d\,x} - u \cdot \left(w \cdot \frac{d\,v}{d\,x} + v \cdot \frac{d\,w}{d\,x}\right)}{v^2\,w^2}\right) =$$

$$= y \cdot \left(\ln z + \frac{x}{z} \cdot \frac{e^x \cdot \ln x\,(8x + 3a) - \left(4x^2 + 3ax - \sqrt[7]{3}\right) \cdot \left(e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}\right)}{(e^x \cdot \ln x)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{4x^2+3ax-\sqrt[7]{3}}{e^x \cdot \ln x}\right)^x \cdot \left(\ln \frac{4x^2+3ax-\sqrt[7]{3}}{e^x \cdot \ln x} + \frac{x}{4x^2+3ax-\sqrt[7]{3}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{e^x \cdot \ln x\,(8x+3a) - \left(4x^2+3ax-\sqrt[7]{3}\right) \cdot \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)}{(e^x \cdot \ln x)^2}\right).$$

In vorstehendem Beispiele sind alle hauptsächlichen oben besprochenen Differentiationsregeln zur Anwendung gekommen.

375. Stetigkeit und Unstetigkeit. Bisher war nur von solchen Funktionen die Rede gewesen, die an allen Stellen der Kurve für $y = f(x)$ endliche Werte von Δy ergeben, wenn Δx von Null verschieden ist, bei denen aber gleichzeitig mit Δx auch Δy sich der Null nähert. Es entspricht demnach einer unendlich kleinen Änderung von x hier auch eine unendlich kleine Änderung von y, was ja auch eine Vorbedingung dafür ist, daß der Quotient $\frac{dy}{dx}$ als Grenzwert überhaupt endlich[809] bleibt. Geometrisch prägt sich diese Eigentümlichkeit darin aus, daß die betreffende Kurve in einem Zuge oder „stetig" verläuft. Derartige Funktionen heißen daher stetige Funktionen. Man kann auch sagen: es gehören in den bisher behandelten Fällen zu zwei unmittelbar benachbarten Kurvenpunkten (Δx unendlich klein) niemals zwei um einen endlichen Betrag verschiedene Ordinatenwerte.

Erfüllt eine Funktion die soeben genannten Bedingungen nicht, so heißt sie unstetig. Sie zeigt dann mindestens bei einem Werte von x eine Änderung von y um einen endlichen (oder gar unendlich großen) Betrag, auch wenn sich x nur unendlich wenig ändert. Es kann dann also beim Grenzübergange, d. h. wenn im Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Nenner unendlich klein wird, der Bruch $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ werden, falls man die Punkte mit den Ordinaten y_2 und y_1 ($y_2 - y_1 = \Delta y$) unzweckmäßig wählt.

Im Kurvenbilde verrät sich eine solche Unstetigkeitsstelle durch einen „Sprung": die Kurve reißt an dieser Stelle plötzlich ab, um bei gleichem Abszissenwerte mit einem andern Ordinatenwerte wieder einzusetzen.

Zur Erläuterung dieser Verhältnisse soll die Figur 151 dienen, die ein bekanntes Beispiel, nämlich die Abhängigkeit des spezifischen Volumens des Wassers von der Temperatur in der Nähe des Gefrierpunktes, darstellt.

Als Abszissen sind hier die Celsiustemperaturen in gewöhnlicher Zählung, als Ordinaten die spezifischen Volumina (reziproken Werte der Dichte, d. h. Volumina von je 1 g Wasser) eingetragen. Die untere Kurve zeigt die Volumverhältnisse beim flüssigen Wasser über 0^0 und im Zustande der Unterkühlung. Die Funktion $v = f(\vartheta)$ ist, wie man sieht, stetig, wenn Unterkühlung eintritt, d. h. die spezifischen Volumina unterkühlten, metastabilen Wassers liegen auf derselben, bei $+ 4^0$ das bekannte Minimum aufweisenden Kurve, wie die des im stabilen Zustande befindlichen Wassers. Die Kurve verläuft stetig und kontinuierlich durch den Eispunkt hindurch, woraus hervorgeht, daß die Volumverhältnisse des flüssigen Wassers unter 0^0 nach

[809] Das schließt nicht aus, daß auch bei stetigen Funktionen gleichwohl unendlich große Differentialquotienten auftreten können (vgl. die Erörterungen im Kapitel 382).

der gleichen Gesetzmäßigkeit von der Temperatur abhängen, wie über 0^0. Dem Eispunkte kommt also, wenn die Erstarrung ausbleibt, keine ausgezeichnete Bedeutung zu.

Anders aber, wenn Erstarrung eintritt. Da Eis bei 0^0 ein um etwa $9\,^0/_0$ größeres Volum einnimmt als die gleiche Menge Wasser von derselben Temperatur (Werte a und b in der Figur 151), springt die v-ϑ-Kurve bei konstanter Temperatur ($\Delta\,\vartheta = 0$) um einen endlichen Betrag (von a nach b), wenn bei der Abkühlung bei 0^0 sich alles flüssige Wasser in Eis umwandelt. Die gestrichelte Linie a b stellt die Volumina der Zweiphasensysteme Wasser + Eis dar, würde also zu unserer Kurve gehören, falls wir die Zweiphasensysteme mit einschließen wollen. Beschränken wir uns aber auf einphasige Gebilde (entweder nur Eis oder nur flüssiges Wasser), so reißt unsere Kurve bei a ab und setzt bei demselben Abszissenwerte mit der um einen endlichen Betrag größeren Ordinate b wieder ein, um dann weiterhin wieder stetig zu verlaufen.

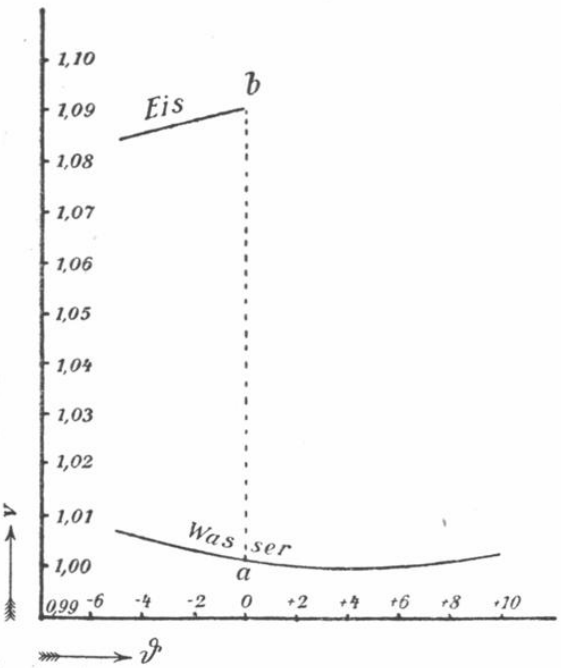

Fig. 151.
Beispiel für Stetigkeit und Unstetigkeit: Volum-Temperatur-Kurve des Wassers.

Unser Beispiel lehrt also, daß die v-ϑ-Kurve stetig ist [$v = f(\vartheta)$ eine stetige Funktion ist], wenn keine Kristallisation erfolgt, daß aber eine Unstetigkeit auftritt, wenn die andere Formart erscheint.

Man darf die Behauptung aufstellen, daß eine Unstetigkeit in irgendeiner Eigenschaftskurve immer einen physikochemischen Prozeß verrät, dessen Produkt eine andere Gesetzmäßigkeit in der Kurve der betreffenden Eigenschaft [$y = \varphi(x)$] erkennen läßt als das Ausgangssystem [$y = f(x)$].

Es sei noch erwähnt, daß in der Figur 151 die Volumänderung beim Wasser wie beim Eis übertrieben groß (zehnfach) wiedergegeben ist, weil sie sich sonst nicht deutlich genug zusammen mit dem Sprunge bei a b darstellen läßt.

An der Stelle der Unstetigkeit kann man den Differentialquotienten nur einseitig bilden, d. h. indem man das kleiner und kleiner werdende Δx nach der Seite zu liegend wählt, nach der die Kurve einen stetigen Verlauf zeigt. In der Figur 151 würde also, falls die Kurve von a nach b springend gedacht wird, der Wert für $\frac{dy}{dx}$ im Punkte a nur aus dem nach rechts zu liegenden Kurvenzweige, im Punkte b nur aus dem nach links verlaufenden Aste abzuleiten sein. Im Gegensatze dazu liefern stetige Funktionen im allgemeinen doppelseitige Differentialquotienten, d. h. Grenzwerte, die der Annäherung von Δx an Null entsprechen, unabhängig

davon, ob man sich Δx nach der einen oder nach der anderen Seite vom gewählten Ausgangspunkte aus abgetragen denkt.

376. Die Grundlagen der Integralrechnung. Als Aufgabe der Differentialrechnung war oben die Ermittelung der Neigung einer Kurve $[y = f(x)]$ an jeder beliebigen Stelle in Abhängigkeit vom Abszissenwert, bzw. des dafür maßgebenden Verhältnisses $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, bezeichnet worden, und wir haben gesehen, daß sich die Differentiation häufig nach einfachen Grundregeln rechnerisch durchführen läßt.

Nun spielt aber die Differentialrechnung in der physikalischen Chemie keine allzubedeutende Rolle, weil die meisten mathematisch zu behandelnden Probleme nicht die Ermittlung von $f'(x)$ verlangen, wenn $f(x)$ gegeben ist, sondern gerade umgekehrt die Berechnung von $f(x)$ aus gegebenem $f'(x)$. Das heißt, es lassen sich meist die gegenseitigen Beziehungen unendlich kleiner Änderungen (dy und dx) theoretisch ableiten, und daraus soll dann die zwischen den Werten y und x selbst bestehende gesetzmäßige Abhängigkeit bestimmt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe fällt der Integralrechnung zu. Geometrisch würde dies also die Konstruktion der Kurve für $y = f(x)$ bedeuten, wenn ihre Neigung an jeder Stelle bekannt ist.

War schon die geometrische Differentiation, d. h. die Lösung der Aufgabe, $f'(x)$ aus $f(x)$ zu bestimmen, schwierig, so ist die geometrische Integration ($f(x)$ aus $f'(x)$ zu finden), nur mit ganz besonderen Hilfsmitteln ausführbar.

Was die analytische (rechnerische) Integration betrifft, so stehen wir hier vor der grundsätzlichen Unmöglichkeit, die Integration irgend eines beliebigen Ausdruckes auszuführen, da es dafür keine allgemeinen Regeln gibt, wie in der Differentialrechnung. Man ist vielmehr darauf angewiesen, rein empirisch auf Grund der durch Differentiation gefundenen und mithin bekannten Zusammengehörigkeit von $f'(x)$- und $f(x)$-Ausdrücken zu einem gegebenen $f'(x)$ das richtige $f(x)$ zu finden. Dies geschieht am einfachsten nach tabellarischen Zusammenstellungen (Formelsammlungen). Für einige einfacheren Fälle gibt es leicht zu merkende Integrationsregeln. Es ist übrigens eine so große Zahl paarweise zu einander gehöriger Werte von $f'(x)$ und $f(x)$ bekannt, daß wohl in allen in der Praxis vorkommenden Fällen die Integration ausgeführt werden kann; denn die Naturgesetze haben vielfach relativ einfache Form.

Für die Rechenoperation des Integrierens ist nun folgende Formelsprache eingeführt.

Ist

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gegeben, so haben wir in

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

die mathematische Beziehung zwischen den Differentialen dy und dx. Aus dieser wird mit Hilfe der Operation des Integrierens die Beziehung zwischen y und x, d. h. y als Funktion von x, gefunden. Die Ausführung dieser Operation wird angedeutet durch das Zeichen $\int$ (langgezogenes S, Anfangs-

buchstabe des Wortes summa[809a]). Es bedeutet also $\int dy$ (Integral von dy) diejenige Funktion $y = f(x)$, die durch die Rechenoperation der Integration aus dem Differential dy $(= f'(x) \cdot dx)$ erhalten wird.

Aus der Beziehung zwischen den Differentialen:

$$\mathbf{dy = f'(x) \cdot dx,}$$

ergibt sich durch Integration

$$\mathbf{\int dy = y = \int f'(x) \cdot dx = f(x).}$$

Um ein Beispiel zu nennen:
Wir haben früher gefunden, daß, wenn

$$y = f(x) = 3x^2$$

ist, die Differentialrechnung liefert:

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

und

$$dy = 6x \cdot dx.$$

Dann wird also nunmehr

$$\int dy = y = \int 6x \cdot dx = 3x^2.$$

Es ist wohl überflüssig, diese Formulierung auf noch andere Beispiele anzuwenden; denn sie bietet in keinem Falle irgend etwas Neues.

Wichtig ist dagegen die Feststellung, daß die Integration in dieser Form niemals zu einem einzigen Ausdrucke für $f(x)$ führt, wenn $f'(x)$ gegeben war.

Wir brauchen uns nur vor Augen zu halten, daß $\frac{dy}{dx}$ für die Funktionen

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = f(x) + C$$

identisch wird, wenn C ein konstanter, d. h. von x unabhängiger, im übrigen beliebiger Wert ist. y kann also alle möglichen Funktionen $f(x) + C$ darstellen, die sich voneinander durch verschiedene Werte von C unterscheiden, ohne daß diese Verschiedenheit im Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ zum Ausdrucke kommt.

Mithin bleibt bei der Integration ein Teil von y unbestimmt, und man kommt bei der Integration von $f'(x) \cdot dx$ allgemein zu dem Ausdrucke

$$\mathbf{\int f'(x) \cdot dx = f(x) + C.}$$

C heißt die Integrationskonstante, über deren Wert von vornherein nichts ausgesagt ist. Derartige Integrale heißen darum unbestimmte Integrale.

Will man den Wert von y selbst erhalten, so muß man die Konstante C auszuwerten versuchen. Wie das geschehen kann, wird noch zu erörtern sein. In dem obengenannten Beispiele haben wir also eigentlich zu schreiben:

$$\int 6x \cdot dx = 3x^2 + C.$$

Kommt es dagegen nicht darauf an, den Absolutbetrag jedes beliebigen Wertes von $y = f(x) + C$ aus $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ zu finden, sondern nur Ände-

[809a] Über den Grund für die Wahl dieses Zeichens siehe Kapitel 381.

rungen von y, so ist die Kenntnis der Integrationskonstante nicht erforderlich.

Sind y_2 und y_1 die zu den Werten x_2 und x_1 von x gehörigen Werte von y, also

$$y_2 = \int_{(x=x_2)} f'(x) \cdot dx; \quad y_1 = \int_{(x=x_1)} f'(x) \cdot dx$$

oder

$$y_2 = f(x_2) + C; \quad y_1 = f(x_1) + C,$$

so wird die Änderung von y:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) + C - f(x_1) - C = f(x_2) - f(x_1).$$

Die Integrationskonstante verschwindet also bei der Differenzenbildung.

Wir sehen ferner, daß, wenn wir an einen bestimmten Ausgangspunkt, x_1, denken, der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\int_{(x=x_1+\Delta x)} f'(x) \cdot dx - \int_{(x=x_1)} f'(x) \cdot dx}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ist, d. h. sich in gesetzmäßiger Weise auch mit dem gewählten Werte von Δx verknüpft erweist (vgl. Kapitel 372).

Anstelle des Ausdrucks $\int_{(x=x_2)} f'(x) \cdot dx - \int_{(x=x_1)} f'(x) \cdot dx$ ist nun das Zeichen $\int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot dx$ gebräuchlich. x_2 und x_1 sind dabei die „Grenzen" der Integration und damit auch des erhaltenen Integrals, und zwar x_2 die obere, x_1 die untere. Derartig begrenzte Integrale heißen bestimmte Integrale.

Zur Auswertung des bestimmten Integrals

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot dx$$

ist also die Kenntnis der Integrationskonstante nicht nötig. Wählen wir wieder als Beispiel den Fall

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x; \quad dy = f'(x) \cdot dx = 6x \cdot dx,$$

so haben wir allgemein

$$y = \int f'(x) \cdot dx = f(x) + C = 3x^2 + C.$$

Das bestimmte Integral in den Grenzen x_2 und x_1 wird dann:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 3x_2^2 - 3x_1^2,$$

und der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = 3(x_2 + x_1) = 3(2x_1 + \Delta x).$$

Damit haben wir für unseren Sonderfall den mathematischen Ausdruck für die Abhängigkeit des Wertes des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ von der Lage des gewählten Ausgangspunktes (Wert von x_1) und Größe und Richtung von Δx, wovon oben die Rede gewesen war.

Die Figur 152 gibt eine anschauliche geometrische Darstellung der vorstehend besprochenen Verhältnisse. Die dort gezeichneten Kurven I, II und III genügen den folgenden Bedingungen:

$$\text{I: } y = f(x) + (C^{I} = 0) = f(x).$$
$$\text{II: } y = f(x) + C^{II}.$$
$$\text{III: } y = f(x) + C^{III}.$$

Die zu demselben Werte von x gehörigen y-Werte sind also in Kurve II um den konstanten Betrag C^{II}, in Kurve III um den konstanten Betrag C^{III} größer als in Kurve I, wo $C^{I} = 0$ angenommen ist.

Wir haben dann also z. B.

$$y_1^{II} = y_1^{I} + C^{II}; \qquad y_1^{III} = y_1^{I} + C^{III}.$$
$$y_2^{II} = y_2^{I} + C^{II}; \qquad y_2^{III} = y_2^{I} + C^{III}.$$

Trotzdem ist in allen drei Kurven $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ identisch, wie aus der Richtung der beispielsweise in y_1^{III} und y_1^{II} gezogenen (gestrichelten) Kurventangenten zu ersehen ist.

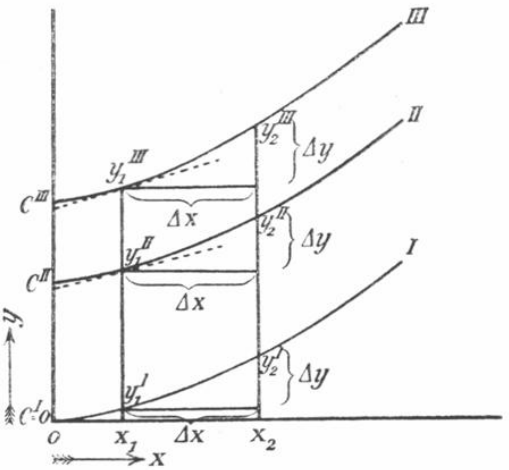

Fig. 152.
Geometrisches zum Integralbegriff.

Zieht man nun durch die drei y_1-Punkte Parallelen zur Abszissenachse, so schneiden diese von den entsprechenden y_2-Werten überall gleiche Stücke (Δy) ab; denn es ist ja

$$y_2^{III} - y_1^{III} = y_2^{I} + C^{III} - (y_1^{I} + C^{III}) = y_2^{I} - y_1^{I}$$
$$\text{und } y_2^{II} - y_1^{II} = y_2^{I} + C^{II} - (y_1^{I} + C^{II}) = y_2^{I} - y_1^{I}.$$
$$\text{Also: } y_2^{III} - y_1^{III} = y_2^{II} - y_1^{II} = y_2^{I} - y_1^{I} = \Delta y.$$

Zu einem gegebenen Δx gehören also in allen drei Fällen identische Werte von Δy, d. h. es ist das bestimmte Integral von der Integrationskonstante unabhängig.

Wählen wir statt x_2 und x_1 die speziellen Abszissenwerte b und a, so nimmt das bestimmte Integral innerhalb dieser Grenzen die Form an

$$\Delta y = \int_a^b f'(x) \cdot dx = \int_{(x=b)} f'(x) \cdot dx - \int_{(x=a)} f'(x) \cdot dx = f(b) - f(a).$$

377. Die Ermittelung der Integrationskonstante. Der Wert der Integrationskonstanten läßt sich bestimmen, wenn man ein Paar zusammengehöriger Werte von y und x und die Art der Funktion f(x) kennt. Nehmen wir an, daß durch Integration gefunden worden sei

$$y = \int f'(x) \cdot dx = f(x) + C,$$

und daß man weiterhin weiß, daß y den Wert b hat, wenn $x = a$ wird, so haben wir

$$b = f(a) + C$$

und

$$C = b - f(a).$$

In manchen Fällen läßt sich so angeben, wie groß y ist, wenn $x = 0$ ist. Dann gilt

$$\mathbf{C = y_0 - f(0).}$$

Ist nun im besonderen y_0 ebenfalls $= 0$ und auch $f(0) = 0$, so resultiert $C = 0$.

Eine Kurve, für die bei $x = 0$ auch $y = 0$ ist, geht durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß dann etwa $C = 0$ sein müßte; vielmehr kommt es, wie wir soeben sahen, auch auf den Wert von f(0) an. Ein Beispiel möge das erläutern.

Haben wir etwa die Abhängigkeit

$$y = a x^2 + C \text{ und } y_0 = 0,$$

so ist allerdings für $x = 0$ die Beziehung vorhanden:

$$0 = a \cdot 0^2 + C = 0 + C \text{ und } C = 0.$$

Gilt dagegen die Gleichung

$$y = a^x + C,$$

so wird, auch wenn $y_0 = 0$ ist (bei $x = 0$),

$$0 = a^0 + C = 1 + C, \text{ und } C = -1.$$

Hier ist also C nicht gleich Null, obwohl die Kurve durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von C bietet die Kenntnis desjenigen Wertes von x, bei dem $y = 0$ wird. Es sei das bei dem Abszissenwerte x_x der Fall. Dann resultiert:

$$y_x = f(x_x) + C = 0; \quad \mathbf{C = -f(x_x).}$$

Ist auch $f(x_x) = 0$, so gilt natürlich ebenfalls $C = 0$.

In Figur 153 ist eine Kurve dargestellt, bei der y_0 (bei $x = 0$) noch einen positiven Wert hat, die also nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht, vielmehr die Abszissenachse erst bei einem negativen Abszissenwerte x_x schneidet. Die Bestimmung von C kann man hier also ausführen, wenn man y_0 oder x_x oder sonst ein Paar zusammengehöriger Werte (z. B. y_1 und x_1) und außerdem in der Gleichung

$$y = f(x) + C$$

die Funktion f(x) kennt.

378. Flächen als Integrale. Die Figur 153 soll noch zur Ableitung einer anderen Beziehung dienen.

Das Stück $y_2\ y_1\ y_0\ y_x$ der dort gezeichneten Kurve schließt zusammen mit der Abszissenachse und der Ordinate y_2 eine Fläche ein. Wie man

sieht, hängt deren Größe offenbar in gesetzmäßiger Weise von der Länge der eben genannten Begrenzungslinien ab. Diese ist aber ihrerseits wieder eine Funktion des Abszissenwertes ($x = x_2$), auf dem die nach rechts zu abschließende Ordinate errichtet wird. Wir können darum schreiben (F = Fläche)

$$F = \varphi(x).$$

Nehmen wir nun an, daß x um den Betrag Δx (von x_2 auf x_3) wächst, so geht y_2 in y_3 ($y_3 = y_2 + \Delta y$) über, und F in $F + \Delta F$. Das Stück ΔF,

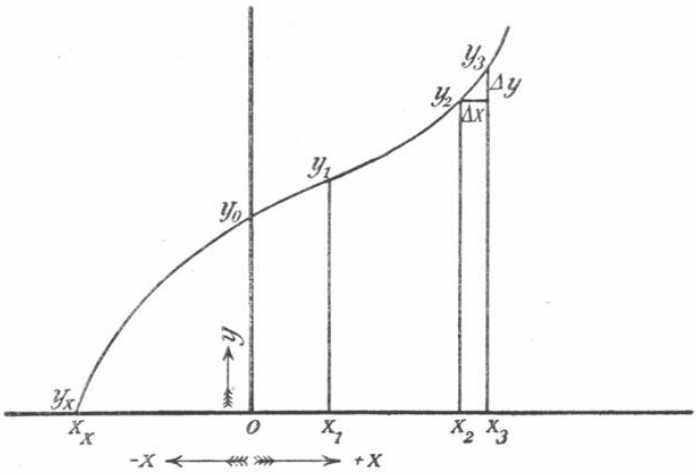

Fig. 153.
Bestimmung der Integrationskonstante. Integral und Fläche.

um das F wächst, ist offenbar gleich dem Rechtecke $y_2 \cdot \Delta x$ vermehrt um das Dreieck mit den Seiten $y_2 y_3$, Δy und Δx. Wählen wir Δx genügend klein, so dürfen wir $y_2 y_3$ als geradlinig ansehen und erhalten dann als Inhalt des genannten Dreiecks den Wert $\frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2}$.

Der Flächenzuwachs ΔF stellt sich also folgendermaßen dar:

$$\Delta F = y_2 \cdot \Delta x + \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} = \left(y_2 + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x.$$

Da der Wert y_2 ganz beliebig gewählt ist, können wir allgemein schreiben

$$\Delta F = \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x$$

und

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = y + \frac{\Delta y}{2}.$$

Da mit Δx auch Δy unendlich klein wird, so verschwindet dann $\frac{\Delta y}{2}$ als Summand neben dem endlich bleibenden y, und es resultiert

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = y,$$

oder in der früher angewandten Beziehungsweise:

$$\frac{dF}{dx} = y \quad \text{und} \quad dF = y \cdot dx.$$

Es stellt sich also die Fläche F in der Form des Integrals

$$F = \int dF = \int y \cdot dx = \Phi(x) + C = \varphi(x)$$

dar, dessen Wert natürlich solange unbestimmt ist, als die Integrationskonstante noch nicht festgelegt ist.

Man kann auf dieser Grundlage durch Ausmessung einer Fläche, d. h. auf geometrischem Wege, eine Funktion $y = f(x)$ integrieren und würde also, wenn y selbst die Ableitung einer Funktion, nämlich $\psi'(x) = \frac{d\,\psi(x)}{dx}$ ist, auf diese Weise die Funktion $\psi(x) + C = \int \psi'(x) \cdot dx$ graphisch ermitteln können.

Das Flächenstück $y_1\ y_2\ x_2\ x_1$ hat den Wert

$$F_2 - F_1 = \int\limits_{(y=y_2)} y \cdot dx - \int\limits_{(y=y_1)} y \cdot dx = \Phi(x)_2 + C - (\Phi(x_1) + C)$$

$$= \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

ist also ein bestimmtes Integral, während das unbestimmte Integral $\Phi(x) + C$ nur die Abhängigkeit der Fläche von der einen (End-) Abszisse wiedergibt bei unbestimmter Anfangsabszisse. Erst wenn letztere (z. B. der oben mit x_x bezeichnete Wert) bekannt ist, läßt sich eben der Wert der Konstante C angeben.

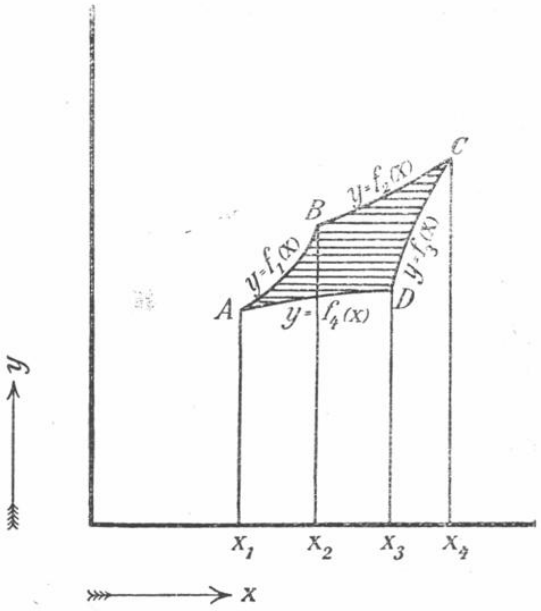

Fig. 154.
Umschlossene Flächen als Integrale.

Es ist nun leicht, auch Flächen, die von lauter Kurven umschlossen sind, als bestimmte Integrale darzustellen. Wenn wir die Figur 154 betrachten, so sehen wir dort in schraffierter Zeichnung die Fläche ABCD, deren Begrenzungslinien die Kurvenstücke AB, BC, DC und AD bilden. Diese gehören zu Kurven, deren jede eine andere Funktion von x graphisch darstellt. Und zwar ist längs AB $y = f_1(x)$, längs BC $y = f_2(x)$, längs DC $y = f_3(x)$ und endlich längs AD $y = f_4(x)$.

Die schraffierte Fläche ist nun folgendermaßen durch Addition bzw. Subtraktion größerer Flächen darstellbar:

$$ABCD = AB x_2 x_1 + BC x_4 x_2 - DC x_4 x_3 - AD x_3 x_1 .$$

Bilden wir, wie im Vorangegangenen, für jede dieser Flächen den (bestimmten) Integralwert, so ergibt sich

$$ABCD = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \cdot dx + \int_{x_2}^{x_4} f_2(x) \cdot dx - \int_{x_3}^{x_4} f_3(x) \cdot dx - \int_{x_1}^{x_3} f_4(x) \cdot dx.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

379. Einige Integrationsregeln. In der Differentialrechnung hatten wir den Satz gehabt, daß der Differentialquotient der Summe (oder Differenz) zweier Funktionen gleich der Summe (oder Differenz) der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen ist. Es ist also, wenn

$$u = f_1(x) \text{ und } v = f_2(x):$$

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Dementsprechend ergibt sich folgende Konsequenz für die Integralrechnung: Es sei nach Obigem

$$d(u+v)\,(= f_1'(x)\cdot dx + f_2'(x)\cdot dx) = du + dv.$$

Integrieren wir jetzt beide Seiten dieser Gleichung, so ergibt die linke $u+v$; also folgt auch

$$\int (du + dv) = u + v$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv.$$

Setzen wir nun wieder $f_1'(x)\cdot dx$ für du und $f_2'(x)\cdot dx$ für dv, so ist

$$\int d\,(f_1(x)+f_2(x)) = \int [f_1'(x)\cdot dx + f_2'(x)\cdot dx] = \int f_1'(x)\cdot dx + \int f_2'(x)\cdot dx =$$
$$= f_1(x) + C_1 + f_2(x) + C_2,$$

oder, wenn wir zugleich die Konstanten vereinigen, so daß $C_1 + C_2 = C$,

$$\int d\,(f_1(x) + f_2(x)) = \int d f_1(x) + \int d f_2(x) = f_1(x) + f_2(x) + C.$$

Bilden wir ein bestimmtes Integral innerhalb der Grenzen b und a, so erhalten wir

$$\int_a^b d\,(f_1(x) + f_2(x)) = \int_a^b d f_1(x) + \int_a^b d f_2(x) = f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a).$$

Ferner war gefunden worden, daß

$$\frac{d[a\cdot f(x)]}{dx} = \frac{a\cdot d f(x)}{dx} \text{ und mithin } d[a\cdot f(x)] = a\cdot f'(x)\cdot dx$$

ist. Daher wird auch

$$\int [a\cdot f'(x)\cdot dx]\,(= \int d[a\cdot f(x)]) = a\cdot f(x),$$

oder

$$\int a\cdot f'(x)\cdot dx = a\cdot \int f'(x)\cdot dx.$$

Das heißt also:

Enthält die zu integrierende Funktion einen konstanten Faktor, so kann man diesen vor das Integralzeichen setzen.

Aus der Beziehung

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = f(b) - f(a)$$

und der analogen

$$\int_b^a f'(x)\cdot dx = f(a) - f(b)$$

folgt weiterhin

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = -\int_b^a f'(x)\cdot dx.$$

Die uns bekannte Gleichung

$$d(x^m) = m \cdot x^{m-1} \cdot dx$$

oder

$$d(x^{m+1}) = (m+1) \cdot x^m \cdot dx$$

bzw.

$$\frac{d(x^{m+1})}{m+1} = x^m \cdot dx$$

liefert die in der Integralrechnung häufig gebrauchte Formel:

$$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \text{(falls m nicht } = -1).$$

Eine Anzahl wichtiger Anwendungen ergibt sich aus der Formel für die Differentiation des Produktes zweier Funktionen. Es war, wenn $u = f_1(x)$ und $v = f_2(x)$,

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \text{ oder}$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Daher ist auch

$$\int d(u \cdot v) = \int (v \cdot du + u \cdot dv) \text{ oder}$$

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv.$$

Diese Gleichung liefert dann die weitere

$$\int v \cdot du = u \cdot v - \int u \cdot dv,$$

die sehr mannigfacher Anwendung fähig ist. Man nennt dieses Verfahren, nach dem das Integral $\int v \cdot du$ in ein zweites Integral und das Produkt zweier Funktionen zerlegt wird, die Methode der teilweisen Integration. Sie gestattet vielfach, unbekannte Integrale auf bekannte zurückzuführen.

Als praktisches Beispiel wählen wir das Integral $\int \log x \cdot dx$ (Basis des log beliebig).

Wir setzen $\log x = v$ und $x = u$ und erhalten

$$\int \log x \cdot dx = x \cdot \log x - \int x \cdot d \log x = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{d \log x}{dx} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \log e \cdot dx = x \cdot \log x - \log e \cdot \int dx =$$

$$= x \cdot \log x - x \cdot \log e + C = x \cdot \log \frac{x}{e} + C.$$

Weitere allgemeiner anwendbare Methoden der Integration beruhen auf der Einführung neuer Variabeln und auf der Zerlegung in Partialbrüche. Hierauf kann hier aber nicht näher eingegangen werden. Vielmehr sei für den Bedarfsfall auf die eingangs genannte Sonderliteratur verwiesen.

Betont sei auch hier nochmals, daß die rechnerische Integration nach irgendeiner Methode nur bei einer beschränkten Anzahl von Funktionen möglich ist, und daß eine allgemein anwendbare Methode zur Integration beliebiger Ausdrücke fehlt.

Eine Anwendung.

Wir verwenden die gewonnenen Kenntnisse zu einer nochmaligen Diskussion des Gasgesetzes von Gay-Lussac und Dalton (s. S. 756).

Wir hatten die gegenseitigen Beziehungen zwischen Volum (v) und Temperatur (ϑ) bei konstantem Druck in der Weise ausgedrückt, daß die Zunahmen beider Variabeln einander proportional sind. Die Gesetzmäßigkeit $\frac{\Delta v}{\Delta \vartheta} = k = \frac{v_0}{273}$ gilt für beliebige, große und kleine Werte von Δv und $\Delta \vartheta$, also auch für unendlich kleine Änderungen, so daß wir schreiben können:

$$\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{v_0}{273} = k \text{ oder } dv = \frac{v_0}{273} \cdot d\vartheta.$$

Durch Integration finden wir nun $\int dv = \int \frac{v_0}{273} \cdot d\vartheta$ oder $v = \frac{v_0}{273} \cdot \vartheta + C$. Um die Integrationskonstante zu bestimmen, benutzen wir die Zusammengehörigkeit des Wertepaares v_0 und $\vartheta_0 (= 0)$.

Es ist also $v_0 = \frac{v_0}{273} \cdot \vartheta_0 + C$, d. h. $C = v_0$ (da $\vartheta_0 = 0$).

Wir schreiben jetzt:

$$v = \frac{v_0}{273} \cdot \vartheta + v_0 = v_0 \left(1 + \frac{\vartheta}{273}\right),$$

erhalten mithin die bekannteste Form des Gesetzes:

$$v = v_0 (1 + \alpha \vartheta) \qquad \left(\alpha = \frac{1}{273}\right).$$

Um die Temperatur ϑ_x kennen zu lernen, bei der $v = 0$ wird, benutzen wir jetzt die Gleichung

$$v_x = 0 = v_0 \left(1 + \frac{\vartheta_x}{273}\right) \text{ oder } v_0 = -\frac{v_0 \vartheta_x}{273};$$

$$\vartheta_x = -273.$$

Wir sehen, daß dieser Wert uns dasselbe Ergebnis für die Konstante C liefert, wie die obige Überlegung. Denn es ist ja allgemein

$$C = -f(x_x),$$

hier also $C = -\frac{v_0}{273} \cdot \vartheta_x = v_0$.

Rechnen wir nun nach absoluten Temperaturen ($T = \vartheta + 273$), so haben wir unsere Ausgangsgleichung in der Form zu schreiben

$$\frac{dv}{dT} = \frac{dv}{d(\vartheta + 273)} = \frac{dv}{d\vartheta} = \frac{v_0}{273}.$$

$$dv = \frac{v_0}{273} \cdot dT$$

$$v = \frac{v_0}{273} \cdot T + C.$$

C hat hier aber einen anderen Wert, nämlich $-\frac{v_0}{273} \cdot T_x$ oder, da T_x, d. h. die absolute Temperatur, bei der v Null wird, gleich Null ist,

$$C = -\frac{v_0}{273} \cdot 0 = 0.$$

Wir haben also schließlich

$$v = \frac{v_0}{273} \cdot T = k \cdot T,$$

d. h. die Beziehung, daß das Volum der absoluten Temperatur proportional ist. Mit anderen Worten: die Volum-Temperatur-Kurve geht durch den

Koordinatenanfangspunkt, wenn wir auf der Abszissenachse die absoluten Temperaturen auftragen.

380. Höhere Ableitungen und mehrfache Integration. Wir hatten oben die „abgeleitete Funktion" $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ auch die „erste Ableitung" von y nach x genannt. In dieser Bezeichnung liegt die Möglichkeit der Bildung höherer Ableitungen ausgedrückt.

Diese werden nun in der Weise gewonnen, daß die Funktion $f'(x)$ nochmals (oder auch noch mehrmals) nach x differentiiert wird. Die gebräuchliche Bezeichnungsweise ist die folgende:

$$y = (f\,x).$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f'(x) \text{ [erste Ableitung]; } d\,y = f'(x) \cdot d\,x.$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{d\,f'(x)}{d\,x} = f''(x) \text{ [zweite Ableitung]; } d\,f'(x) = f''(x) \cdot d\,x.$$

$$\frac{d^3 y}{d\,x^3} = \frac{d\,f''(x)}{d\,x} = f'''(x) \text{ [dritte Ableitung]; } d\,f''(x) = f'''(x) \cdot d\,x.$$

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = \frac{d\,f^{(n-1)\text{ mal}}(x)}{d\,x} = f^{n\text{ mal}}(x) \text{ [nte Ableitung]; usw.}$$

Als Beispiel wollen wir eine bestimmte Funktion wählen, nämlich

$$y = f(x) = a\,x^5 - b\,x^4 + c\,x^3 + e\,x^2 - f\,x + g.$$

Dann ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f'(x) = 5\,a\,x^4 - 4\,b\,x^3 + 3\,c\,x^2 + 2\,e\,x - f;$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = f''(x) = 20\,a\,x^3 - 12\,b\,x^2 + 6\,c\,x + 2\,e;$$

$$\frac{d^3 y}{d\,x^3} = f'''(x) = 60\,a\,x^2 - 24\,b\,x + 6\,c;$$

$$\frac{d^4 y}{d\,x^4} = f''''(x) = 120\,a\,x - 24\,b;$$

$$\frac{d^5 y}{d\,x^5} = f'''''(x) = 120\,a;$$

$$\frac{d^6 y}{d\,x^6} = f''''''(x) = 0.$$

Haben wir ferner

$$y = \ln x,$$

so ergibt sich

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x} = x^{-1};$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{d\,x^{-1}}{d\,x} = -\,x^{-2};$$

$$\frac{d^3 y}{d\,x^3} = \frac{d(-x^{-2})}{d\,x} = +\,2\,x^{-3};$$

$$\frac{d^4 y}{d\,x^4} = \frac{d\,(2\,x^{-3})}{d\,x} = -\,6\,x^{-4} \text{ usf.}$$

Bei der Integration höherer Ableitungen wird ganz analog verfahren, wie oben bei der ersten Ableitung besprochen.

Die mehrfache Integration wird, ebenso wie die Bildung der höheren Ableitungen durch mehrfache Differentiation, schrittweise ausgeführt. Dabei ist zu beachten, daß jede Stufe der Integration eine besondere Integrationskonstante in das Resultat hineinbringt.

Ist also

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x)$$

oder

$$d\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = f'''(x) \cdot dx$$

gegeben, so erhalten wir:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int d\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \int f'''(x) \cdot dx = f''(x) + C''.$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx \int f'''(x) \cdot dx = \left(f''(x) + C''\right) \cdot dx \cdot$$

$$\frac{dy}{dx} = \int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int dx \int f'''(x) \cdot dx = \int \left(f''(x) + C''\right) \cdot dx =$$

$$= \int \left(f''(x) \cdot dx + C'' \cdot dx\right) = f'(x) + C'' x + C' \cdot$$

$$dy = dx \int dx \int f'''(x) \cdot dx = \left(f'(x) + C'' x + C'\right) \cdot dx \cdot$$

$$y = \int dy = \int dx \int dx \int f'''(x) \cdot dx = \int \left(f'(x) + C'' x + C'\right) \cdot dx =$$

$$= \int \left(f'(x) \cdot dx + C'' x \cdot dx + C' \cdot dx\right) = f(x) + \frac{C''}{2} x^2 + C' x + C =$$

$$= F(x).$$

Man kann die Ausführung der vorstehenden Operationen auch ausdrücken durch die Schreibweise

$$y = \iiint d^3 y = \int dx \int dx \int f'''(x) \cdot dx.$$

381. Die Integration als Summation. Mehrfache Integrale. Mit Hilfe der Figur 153 hatten wir oben den Wert der Fläche, die durch die Kurve für $y = f(x)$, die Abszissenachse und eine Ordinate begrenzt wird, allgemein bestimmt zu

$$F = \int y \, dx$$

und im Falle der seitlichen Begrenzung durch die bestimmt gewählten Ordinaten y_1 und y_2 mit den Abszissenwerten x_1 und x_2 zu

$$F_{2-1} = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx.$$

Hat nun y_2 den Wert b und y_1 den Wert 0, so stellt F_{b-0} die ganze Fläche vom Anfang bei $y = 0$ (mit der Abszisse x_x, links) bis zur oberen Begrenzung durch die Ordinate $y = b$ (mit der Abszisse x_b, rechts) dar. Wir haben dafür den Ausdruck

$$F_{b-0} = \int_{x_x}^{x_b} y \, dx.$$

Wir können uns nun die Fläche F in lauter unendlich schmale Streifen zerlegt denken, von denen jeder die Breite dx und eine Höhe y besitzt, die

vom linken zum rechten Ende der Fläche fortlaufend von Null bis b ansteigt. Die Summation aller dieser Streifen von verschiedener Höhe ergibt die Fläche. Wir sehen also, daß wir durch die Operation des Integrierens eine Summe aus unendlich vielen, unendlich schmalen, in ihrer Höhe nach der Gleichung $y = f(x)$ gesetzmäßig abgestuften Teilflächen bilden. Darauf gründet sich auch die Verwendung des $\int$ (langgezogenen S) als Operationszeichen für die Integration.

Auch y können wir als Fläche darstellen, und zwar als diejenige Fläche, die durch die Kurve der Funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, die Abszissenachse, sowie eine Anfangs- und eine Endordinate begrenzt wird (vgl. Kapitel 378).

Wählen wir die Anfangsordinate so, daß bei dem zugehörigen Abszissenwert (wieder mit x_x bezeichnet) $y = 0$ wird, so kann man für $y = y - 0$ das bestimmte Integral

$$y = \int_0^y dy = \int_{x_x}^x f'(x) \cdot dx$$

einsetzen, dessen obere Grenze y (mit dem zugehörigen Abszissenwerte x) verschiebbar ist, während die untere Grenze festliegt.

Durch Einsetzung dieses Ausdrucks in den oben entwickelten für F erhalten wir

$$F_{b-0} = \int_{x_x}^{x_b} y \cdot dx = \int_{x_x}^{x_b} dx \int_{x_x}^{x} f'(x) \cdot dx.$$

Es ist dabei, was sich ja schon aus der Herleitung ergibt, zu beachten, daß die Ausrechnung eines solchen Integrals natürlich schrittweise erfolgen muß (vgl. Kapitel 380), indem zunächst das Integral

$$\int_{x_x}^{x} f'(x) \cdot dx = y$$

als Funktion von x bestimmt und dann erst die weitere Integration (Berechnung des Ausdrucks $\int dy$) ausgeführt wird.

Ausdrücke von der Art wie $\int dx \int dy$, die man auch in der Form $\iint dx\,dy$ schreiben kann, heißen Doppelintegrale und bilden die einfachste Klasse der mehrfachen Integrale.

So wie man eine Fläche durch Addition einer sehr großen Zahl sehr schmaler Streifchen von dem variablen Werte $y \cdot dx$ entstanden denken kann, läßt sich analog auch ein Körper mit ebener Grundfläche aus sehr vielen Prismen von unendlich kleiner Basis $dx \cdot dy$ aufbauen, die man sich parallel zu einer auf der Grundfläche senkrecht stehenden (dritten) Achse (Raumachse), die als z-Achse bezeichnet werden soll, aneinander gefügt denkt.

Die Summation aller dieser Prismen mit dem variablen Inhalt $z \cdot dx \cdot dy$ führt dann zu dem Ausdruck (V = Volum):

$$V = \iint z \cdot dx \cdot dy.$$

Dafür kann man, indem man $z = \int dz$ setzt, auch schreiben

$$V = \iiint dx\,dy\,dz = \int dx \int dy \int dz.$$

In diesen Ausdruck sind dann, wenn man ein bestimmtes Körperstück erhalten will, noch die Grenzen jeder einzelnen Integration einzusetzen.

382. Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung. Auf S. 763 wurde festgestellt, daß der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Neigung einer Kurve ($y = f(x)$) gegen die Abszissenachse in irgendeinem Punkte als Funktion von x (d. h. $\frac{dy}{dx} = f'(x)$) angibt.

Positive Werte von $\frac{dy}{dx}$ zeigen an, daß die Kurve an der betreffenden Stelle ansteigt, daß also y mit x wächst, oder die Tangente der Kurve in

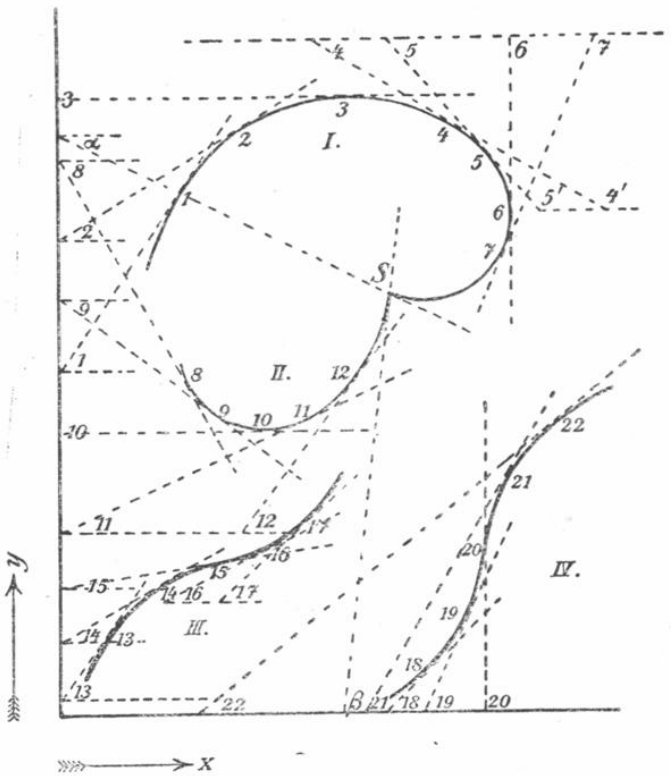

Fig. 155.
Geometrische Bedeutung des ersten und des zweiten Differentialquotienten.

jenem Punkte die Abszissenachse unter einem Winkel schneidet, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt. Negativ ist $\frac{dy}{dx}$ bei fallenden Kurven oder Kurvenstücken, und hier ist der Neigungswinkel der Kurventangente (der Winkel eben jener Tangente mit der Abszissenachse) stumpf bzw. — wenn man, was wohl richtiger ist, immer diejenige Tangentenrichtung ins Auge faßt, in der x wächst — negativ, da er der Abszissenachse unten anliegt. In letzterem Falle kann es vorteilhaft sein, eine zur Abzissenachse parallele Hilfsgerade zu ziehen, wenn der Schnittpunkt zeichnerisch ungünstig fällt.

Zum besseren Verständnis dieser Dinge möge die Figur 155 dienen. Wir betrachten von den darauf verzeichneten Kurven I, II, III und IV zunächst die ersten beiden.

Kurve I zeigt einen steigenden und einen fallenden Teil. Ersterem gehören die Punkte 1 und 2, letzterem 4 und 5 an. Die Kurventangenten in den Punkten 1 und 2 ergeben die mit denselben Ziffern bezeichneten positiven Neigungswinkel, und zwar ist $\sphericalangle 1 > \sphericalangle 2$. Die Neigungswinkel 4 und 5 dagegen sind negativ, ihre trigonometrischen Tangenten, die arithmetischen Werte von $\frac{dy}{dx}$, negativ und identisch mit denen der stumpfen Supplemente 4′ und 5′.

Bei Kurve II ist der Anfangsteil fallend (mit den Punkten 8 und 9 und den zugehörigen gleichbezeichneten negativen Neigungswinkeln), der Endteil steigend (Punkte 11 und 12, positive Neigungswinkel 11 und 12).

Wir können also zusammenstellen:

Neigungscharakter:	Vorzeichen von $\frac{dy}{dx}$:
steigend	+
fallend	−

Im Punkte 3 der Kurve I und im Punkte 10 der Kurve II sehen wir je eine zur Abszissenachse parallele Tangente, mithin den Neigungswinkel 0 und damit auch $\frac{dy}{dx} = 0$. Punkt 3 stellt ein Kurvenmaximum, Punkt 10 ein Kurvenminimum dar. Beide sind also dadurch charakterisiert, daß $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, wenn $y = f(x)$ entweder einen Maximal- oder einen Minimalwert annimmt. Das ist ja auch nicht anders zu erwarten, denn das Maximum ist die Grenze zwischen dem steigenden und dem fallenden Teil von Kurve I; der dazu gehörige Wert von $\frac{dy}{dx}$ muß also die Grenze zwischen den positiven Werten des Anfangs- und den negativen des Endteils von Kurve I bilden, d. h. Null sein. Das Gleiche gilt für das Minimum in Kurve II, nur daß sich hier der Übergang umgekehrt in der Richtung vom Fallen zum Steigen, beim Differentialquotienten also von negativen zu positiven Werten, vollzieht.

Wir untersuchen nun auch die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten (der zweiten Ableitung) $\frac{d^2y}{d^2x} = f''(x)$. Er gibt offenbar im geometrischen Sinne das Maß der Änderung der Kurvenneigung bei unendlich kleiner Änderung von x in Abhängigkeit von der gewählten Kurvenstelle (daher $f''(x)$) an.

Betrachten wir von diesem Gesichtspunkte aus Kurve I, so erkennen wir, daß hier mit wachsendem x die anfangs positiven Neigungswinkel immer kleiner werden (vgl. $\sphericalangle 2$ gegen $\sphericalangle 1$), dann durch Null gehen ($\sphericalangle 3$), weiterhin immer größere negative Werte annehmen ($\sphericalangle 4$ und $\sphericalangle 5$). Die Änderung von $\frac{dy}{dx}$ mit wachsendem x vollzieht sich also längs der ganzen Kurve I in demselben Sinne und zwar im Sinne einer Verkleinerung. Es ist also $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ. Das ist, wie leicht einzusehen, immer der Fall, wenn eine Kurve, wie unsere Kurve I, (gegen die Abszissenachse) konkav ist.

Im Gegensatze dazu sehen wir bei Kurve II ein gesetzmäßiges Steigen der Neigungswinkel bei wachsendem x. Sie treten aus dem negativen Gebiet heraus ($\sphericalangle 9$ mit kleinerem absolutem Betrage negativ als $\sphericalangle 8$),

gehen durch Null ($\measuredangle$ 10) und werden dann wachsend positiv ($\measuredangle$ 11 und $\measuredangle$ 12). Wir haben hier also überall positive Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$. Das gilt für alle Kurven, die, wie Kurve II, (gegen die Abszissenachse) konvex sind.

Wir können daher sagen, daß die zweite Ableitung den Krümmungscharakter einer Kurve angibt.

Wenn die Krümmung einer Kurve wechselt, haben wir daher einen Vorzeichenwechsel beim Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu erwarten. Daß dieser in der Tat eintritt, lehrt ein Blick auf die Kurve III. Diese ist im Anfang konkav, weiterhin dann konvex. Dementsprechend fallen zunächst die Neigungswinkel ($\measuredangle$ 14 $<$ $\measuredangle$ 13), um von einem gewissen Grenzwerte an ($\measuredangle$ 15) wieder zu steigen ($\measuredangle$ 17 $>$ $\measuredangle$ 16). In 15 haben wir den Wendepunkt der Kurve III; seine Tangente ist die Wendetangente, die im Punkt 15 die Kurve berührt und gleichzeitig schneidet. Wie man sieht, ist Punkt 15 bzw. $\measuredangle$ 15 die Grenze zwischen negativen und positiven Werten von $\frac{d^2y}{dx^2}$; hier ist mithin die zweite Ableitung $= 0$, und diese Bedingung kennzeichnet einen Kurvenwendepunkt. Der Kurvenwendepunkt bezieht sich also nicht auf die Richtung oder Neigung, sondern lediglich auf den Krümmungscharakter der Kurve, der hier wechselt. Im übrigen sind bei Kurve III, da sie durchweg ansteigt, also positiven Neigungscharakter zeigt, alle Neigungswinkel positiv, wie die Figur erkennen läßt.

Die Wendung einer Kurve kann natürlich (was in der Figur nicht dargestellt ist) auch bei durchweg negativem Neigungscharakter auftreten. Sie ist überhaupt vom Neigungscharakter der Kurve ganz unabhängig. Es kann auch der Fall eintreten, daß die Wendetangente parallel der Abszissenachse läuft. Das läßt sich mit Hilfe der Kurve III leicht konstruieren, indem man sich diese im Uhrzeigersinne um Punkt 15 so weit gedreht denkt, daß die Tangente in Punkt 15 parallel der x-Achse läuft. Dann könnte also äußerlich ein Maximum oder Minimum vorgetäuscht werden, bei denen ja $\frac{dy}{dx}$ ebenfalls $= 0$ ist. Die Entscheidung, was wirklich vorliegt, ist aber leicht zu fällen. Denn ein Maximum ist ja stets ein Punkt einer [immer gegen die Abszissenachse gerechnet] konkaven Kurve (oder mindestens eines konkaven Kurventeils); mithin muß im Maximum $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ sein. Im Minimum, als einem Punkte eines konvexen Kurvenstücks, muß dagegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv sein. Ist jene zur x-Achse parallele Tangente endlich Wendetangente, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$, wie bei jedem Krümmungswechsel, $= 0$; daraus folgt allerdings noch nicht, daß nicht ausnahmsweise die zweite Ableitung Null sein kann, auch wenn kein Wendepunkt vorliegt. Sehen wir von solchen Ausnahmen ab, und berücksichtigen wir, daß die zweite Ableitung ferner an jedem Kurvenpunkte $= 0$ ist, wenn überhaupt keine Neigungsänderung vorhanden ist, die Kurve vielmehr unter konstanter (positiver oder negativer) Neigung d. h. als gerade Linie verläuft, so können wir nunmehr folgendes Schema aufstellen:

(Neigung) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ist:	(Krümmung) $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ist:	Kurvencharakter:	
positiv	positiv	konvex	steigend
	Null (überall / in einem Punkte)	geradlinig / Wendepunkt	steigend
	negativ	konkav	steigend
Null	positiv	Minimum	
	Null (überall / in einem Punkte)	geradlinig, parallel zur x-Achse / Wendepunkt (mit horizontaler Wendetangente)	
	negativ	Maximum	
negativ	positiv	konvex	fallend
	Null (überall / in einem Punkte)	geradlinig / Wendepunkt	fallend
	negativ	konkav	fallend

Besondere Erwähnung verdienen noch die Fälle, in denen $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei stetigen Funktionen unendlich groß werden. Die Figur 155 zeigt zwei derartige Beispiele.

Das eine von ihnen stellt die Tangente an dem Punkte 6 der Kurve I dar. Sie verläuft senkrecht zur Abszissenachse; es ist also $\operatorname{tg} \sphericalangle 6 = \infty$ und zwar, da dieser rechte Winkel durch stetiges Wachsen der negativen Winkel 4 und 5 usw. entstanden ist, mit negativem Vorzeichen; also ist $\frac{dy}{dx}$ im Punkte $6 = -\infty$. Zu derselben Tangente kommt man aber auch, wenn man auf dem Teil der Kurve I zwischen Punkt S und Punkt 6, über Punkt 7, auf 6 vorrückt. Und zwar wird die Tangente hier, da wir uns auf einem steigenden Kurvenaste befinden, die Neigungswinkel mithin im positiven Gebiete sich einem Rechten nähern, bei Erreichung des Punktes 6 gleich $+\infty$. Diese zunächst auffallende Erscheinung erklärt sich so, daß der Differentialquotient als trigonometrische Tangente des Neigungswinkels sich einmal auf die nach unten, das andere Mal auf die nach oben gerichtete geometrische Tangente bezieht, wie sich aus den beiden Herleitungen ergibt. Daß in Wirklichkeit keine geometrische Unstetigkeit vorliegt, zeigt ein einfaches Gedankenexperiment. Man denke sich das Koordinatensystem um 90^0 gedreht und umgeklappt, so daß x-Achse und y-Achse vertauscht erscheinen. Dann stellt sich Punkt 6 der Kurve I als Maximum dar. Es wird hier also $\frac{dx}{dy} = 0$, und zwar wird dieser Wert durch stetiges Abnehmen der positiven Werte von der linken Seite her und stetiges Abnehmen der (absoluten) negativen Werte von der rechten Seite her erreicht. Es ändert sich also die Neigung der Tangente beim Durchgang durch den Punkt 6 durchaus stetig.

Man kann einen Punkt, wie 6 in Kurve I, einen Umkehrpunkt nennen. Ein solcher kann natürlich auch ganz entsprechend in einer nach rechts konkaven Kurvenbiegung liegen, statt, wie hier gezeichnet, in einer nach links konkaven.

Einfacher ist die Sachlage bezüglich der Wendetangente in Punkt 20 der Kurve IV. Hier steigt $\frac{dy}{dx}$ im linken Teil der Kurve von kleinen positiven

Werten bis ∞, um jenseits des Wendepunktes wieder zu fallen. Auch der Charakter von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist bei Kurve IV leicht ersichtlich. Er ist links vom Wendepunkt positiv (konvexe Kurve), rechts negativ (konkave Kurve); im Wendepunkte selbst ist hier $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwar nicht gleich Null, aber die Sachlage ist doch insofern ähnlich wie bei den vorher besprochenen gewöhnlichen Wendepunkten, als auch hier im Wendepunkte ein Zeichenwechsel der zweiten Ableitung stattfindet.

Auch $\frac{dy}{dx}$ kann unstetig sein. Dieser in der physikalischen Chemie sehr häufig vorkommende Fall wird durch den Schnitt der Kurven I und II im Punkte S dargestellt. Fassen wir I und II als eine einzige Kurve auf, so zeigt diese in Punkt S einen „Knick". Zu diesem Punkte gehören dann zwei Tangenten, die eine (mit dem Neigungswinkel α) bestimmt den Grenzwert $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, der durch Wahl immer kleinerer Δx-Werte nach Punkt 7 zu erzielt wird; die andere (mit dem Neigungswinkel β) entsteht im analogen Grenzübergang, wenn Δx in der Richtung auf Punkt 12 hin gewählt wird. Jedenfalls haben wir hier zwei um einen endlichen Betrag verschiedene Werte von $\frac{dy}{dx}$. Darum erhält man an dieser Stelle nur einseitige zweite Ableitungen $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{df'(x)}{dx}$, genau so, wie bei einer unstetigen Funktion $y = f(x)$ die erste Ableitung an der Stelle der Unstetigkeit im allgemeinen nur einseitig gebildet werden kann (vgl. Kapitel 375).

383. Funktionen mehrerer Variabeln. Partielle Differentialquotienten. Partielle und totale Differentiale. Bisher haben wir stets angenommen, daß eine Größe (y) eine Funktion einer Variabeln (x) ist, daß also die allgemeine Beziehung gilt: $y = f(x)$. Es besteht aber auch die Möglichkeit (und solche Fälle kommen sogar sehr häufig vor), daß eine Größe von zwei (und mehr) Variabeln abhängt. Wir wollen hier nur die für unsere Zwecke ausreichende Abhängkeit von zwei Variabeln betrachten.

Es möge eine Größe, u, von den beiden Variabeln x und y gleichzeitig in gesetzmäßiger Weise abhängig sein, wie etwa z. B. das Volum einer bestimmten Gewichtsmenge eines Gases von den Werten des Drucks und der Temperatur. Wir drücken die Tatsache, daß u gleichzeitig mit den Werten von x und y in gesetzmäßiger Weise zusammenhängt, durch das Symbol aus:

$$u = f(x,y).$$

Wir betrachten nun die Änderungen, die u erfährt, wenn sich x oder y einzeln und wenn sie sich gleichzeitig ändern. Man spricht im ersteren Falle von einer partiellen Änderung; diese ist dadurch charakterisiert, daß sich nur die eine Variable ändert, während die andere konstant bleibt. Es ist klar, daß es zwei Arten solcher partiellen Änderungen der Funktion u gibt, je nachdem, welche der beiden Variabeln sich allein ändert.

Wir bezeichnen die partielle Änderung von u, die durch alleinige Änderung von x um Δx (y konstant) bedingt wird, mit $\Delta_x u$, die durch die Variation von y allein um Δy (x konstant) veranlaßte mit $\Delta_y u$. Die zugehörigen partiellen Differenzenquotienten würden also sein:

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \text{ (y konstant) und } \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \text{ (x konstant).}$$

Läßt man die partiellen Änderungen von x und y unendlich klein werden (Grenzübergang) oder, wie man zu sagen pflegt, aus den Differenzen die Differentiale entstehen, so erhält man hier natürlich partielle Differentiale der Funktion $u = f(x, y)$. Wir könnten sie in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise der Differenzen bezeichnen mit $d_x u$ (y konstant) und $d_y u$ (x konstant). Die Brüche $\frac{d_x u}{d x}$ (y konstant) und $\frac{d_y u}{d y}$ (x konstant) heißen dann die partiellen Differentialquotienten oder partiellen Ableitungen der Funktion u nach x bzw. y.

Für sie ist ein besonderes Symbol (mit einem runden d) gebräuchlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\text{statt } \frac{d_x u}{d x}\right) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} \left(\text{statt } \frac{d_y u}{d y}\right).$$

Es entsteht nun die Frage, in welcher Weise die Änderung von u bei gleichzeitiger Änderung von x und y oder die totale (vollständige) Differenz, die bei unendlich kleiner Änderung zum totalen (vollständigen) Differential wird, mit den entsprechenden partiellen Änderungen zusammenhängt. Wir bezeichnen nach allgemeinem Brauche die totale Änderung von u, d. h. die einer endlichen bzw. unendlich kleinen gleichzeitigen Änderung beider Variabeln x und y entsprechende, mit Δu bzw. $d u$. Wir erhalten dann die Ausdrücke:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$
$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$
$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

und

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Wir schreiben nun Δu in folgender Form:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

d. h. wir addieren den Ausdruck $-f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) = 0$.

Der Wert $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$ stellt den partiellen Zuwachs von u dar, wenn sich x um Δx ändert, während die andere Variable konstant den Wert $y + \Delta y$ beibehält; ebenso ist $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ der partielle Zuwachs von u, wenn y um Δy wächst bei konstantem Werte (x) der andern Variablen.

Nehmen wir nun unendlich kleine Änderungen unserer Variablen an, so entstehen überall die Grenzwerte, aus den Differenzen die Differentiale, aus den Differenzenquotienten die Differentialquotienten, und es gilt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f(x + d x, y) - f(x, y)}{d x};$$

$$\lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f(x, y + d y) - f(x, y)}{d y}.$$

Unser Δu geht dann in das totale Differential du über mit dem Werte

$$du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) + f(x, y + dy) - f(x, y).$$

Nun bleibt der Wert des Quotienten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

offenbar ungeändert, wenn man statt des Wertes y für die hier konstant bleibende Variable den davon nur um einen unendlich kleinen Betrag verschiedenen Wert $y + dy$ setzt.

Wir schreiben also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)}{dx}$$

und finden dann, daß die ersten beiden Glieder von du gleich $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$ sind, während die beiden letzten Glieder sich durch $\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$ darstellen lassen.

Es ergibt sich also das Resultat, daß

$$\mathbf{du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy}$$

ist.

Die unendlich kleine Änderung, die u erfährt, wenn man x um dx ändert, y aber konstant hält (d. h. $dy = 0$ macht), also der oben mit $d_x u$ bezeichnete Zuwachs von u, ist hiernach

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx,$$

und entsprechend ist unser früheres $d_y u$ (d. h. der Zuwachs von u für x = const. oder $dx = 0$)

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy.$$

Daraus folgt

$$du = d_x u + d_y u.$$

Wir können das Ergebnis in die Worte fassen:

Das totale (vollständige) Differential einer Funktion zweier Variabeln ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Wenden wir wieder die früher benutzten Bezeichnungsweisen für die Ableitungen an, und fügen wir als Kennzeichen der partiellen Ableitung (als Ergebnis der partiellen Differentiation) x und y als Indizes bei, so würden wir schreiben können:

$$\left(\frac{dy}{dx} = f'(x); \quad dy = f'(x) \cdot dx\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d_x u}{dx} = f_x'(x, y); \quad d_x u = f_x'(x, y) \cdot dx;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d_y u}{dy} = f_y'(x, y); \quad d_y u = f_y'(x, y) \cdot dy.$$

Daraus ergibt sich dann leicht

$$d\,u = f_x'(x, y) \cdot d\,x + f_y'(x, y) \cdot d\,y$$

als Analogon zum Ausdrucke $f'(x) \cdot d\,x$ für das Differential $d\,y$ einer Funktion $y = f(x)$ von einer Variablen.

Als Beispiel wollen wir die Funktion $u = f(x, y) = x \cdot y$ wählen. Dann liefert unsere Gleichung

$$d\,u = \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial x} \cdot d\,x + \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial y} \cdot d\,y = y \cdot d\,x + x \cdot d\,y.$$

Das Ergebnis läßt sich leicht auch an der Hand einer geometrischen Darstellung übersehen. Dazu soll Figur 156 dienen.

Die Funktion $u = x \cdot y$ ist hier dargestellt als die Fläche F eines Rechtecks mit den Seiten x und y.

Wächst x um Δx (von x_1 auf x_2), während y konstant bleibt, so entsteht der wagerecht schraffierte Streifen mit den Seiten y_1 und Δx als (partieller) Zuwachs. Bleibt anderseits x konstant, während y um Δy, d. h. von y_1 auf y_2, wächst, so vermehrt sich F um den senkrecht schraffierten Streifen mit dem Inhalt $x_1 \cdot \Delta y$.

Es ist also

$$\Delta_x F = y_1 \cdot \Delta x; \quad \Delta_y F = x_1 \cdot \Delta y.$$

Lassen wir gleichzeitig x um Δx und y um Δy wachsen, so soll der totale Zuwachs ΔF entstehen, der nach unserer obigen Ableitung für $\Delta x = d\,x$ und $\Delta y = d\,y$ den Grenzwert annimmt

$$d\,F = y \cdot d\,x + x \cdot d\,y.$$

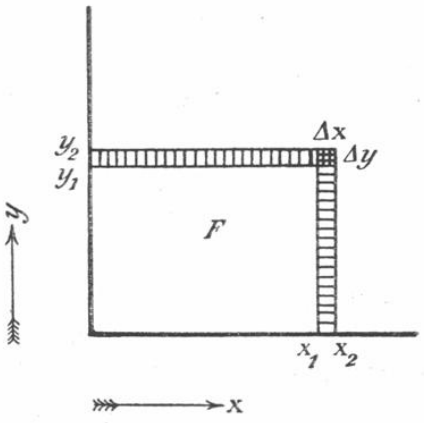

Fig. 156.
Partielle Differentiale und totales Differential.

Wie die Figur zeigt, ist das aber nicht streng richtig. Denn der totale Zuwachs ist offenbar noch um das kreuzweise schraffierte Stückchen $\Delta x \cdot \Delta y$, das im Grenzfalle zu $d\,x \cdot d\,y$ wird, größer als die Summe der partiellen Zuwachse. Wir würden demnach zu schreiben haben

$$\Delta F = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Nun wird aber $\Delta x \cdot \Delta y$ im Grenzfalle als Produkt $d\,x \cdot d\,y$ zweier unendlich kleinen Werte eine „unendlich kleine Größe zweiter Ordnung", und es gilt der allgemeine Satz, daß unendlich kleine Größen höherer Ordnung neben solchen niederer Ordnung als Summanden ebenso vernachlässigt werden dürfen, wie unendlich kleine Größen (erster Ordnung) neben endlichen Größen. Man kann sich auch dadurch von der Zulässigkeit dieses Verfahrens überzeugen, daß man etwa die Summe $y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$ in der Form schreibt $\Delta x \cdot (y + \Delta y)$ und nun, wie wir bisher stets getan haben, $\Delta y = d\,y$ neben y vernachlässigt; das ergibt dann $y \cdot d\,x$, also eben den Wert, neben dem $\Delta x \cdot \Delta y = d\,x \cdot d\,y$ als Summand zu vernachlässigen sein soll.

Man kann auch sehr leicht die Probe aufs Exempel machen, indem man nacheinander für Δx und Δy immer kleinere Bruchteile, etwa 0,001; 0,000001; 0,000000001, von x bzw. y einsetzt und zusieht, wieviel das

Produkt $\Delta x \cdot \Delta y$ im Endresultat ausmacht. Man wird dann einsehen, daß sein Einfluß immer kleiner und schließlich, wenn $\Delta x \cdot \Delta y = dx \cdot dy$, selbst neben $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$ unmerklich wird.

Das hier hinzukommende Glied $dx \cdot dy$ hängt übrigens mit der oben eingeführten Vernachlässigung von dy neben y im Ausdruck für $\frac{\partial u}{\partial x}$ zusammen.

384. Höhere partielle Ableitungen. Erkennung totaler Differentiale. Genau so, wie man die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$, also den Wert $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, nochmals oder noch wiederholt differentiieren kann, um so zu den höheren Ableitungen zu gelangen, kann man auch die partielle Differentiation wiederholen. Es kommt dann nur darauf an, nach welcher Variabeln die neue Differentiation erfolgt, ob nach derselben, wie beim ersten Male, oder nach der andern.

Hierfür sind folgende Symbole gebräuchlich

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \qquad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Wir wählen als Beispiel die Funktion:

$$u = f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3$$

und bilden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 0 \quad (y \text{ konstant});$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + bx^2 + 2cxy + 3ey^2 \quad (x \text{ konstant});$$

und weiterhin:

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial (3ax^2 + 2bxy + cy^2)}{\partial x} = 6ax + 2by;$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial (bx^2 + 2cxy + 3ey^2)}{\partial y} = 2cx + 6ey;$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (3ax^2 + 2bxy + cy^2)}{\partial y} = 2bx + 2cy;$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial (bx^2 + 2cxy + 3ey^2)}{\partial x} = 2bx + 2cy.$$

Wie wir sehen, sind die beiden letzten zweiten partiellen Ableitungen identisch, also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Das gilt nicht nur für die hier gewählte Funktion $u = f(x, y)$, sondern bei den für uns in Frage kommenden Funktionen ganz allgemein, wie sich beweisen läßt. Doch wollen wir auf den etwas umständlichen allgemeinen Beweis hier nicht eingehen und uns das Resultat genügen lassen: Wenn man eine Funktion $u = f(x, y)$ einmal partiell nach x und außerdem einmal partiell nach y differentiiert, so ist das Ergebnis immer das gleiche, also unabhängig von der Reihenfolge der Operationen.

Mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen kann man nun auch ein zweites totales Differential von u bilden. Darunter ist zu verstehen die Änderung, die du erfährt, wenn wir dieses einmal für ein Wertpaar (x, y) und dann für ein Paar $(x + dx, y + dy)$ bestimmen. Hierbei wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß diese beiden du, die verglichen werden, mit denselben dx und dy gebildet sind.

Wir hatten nun oben gefunden

$$du = d_x u + d_y u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy.$$

Führen wir die Bildung des Differentials noch einmal nach den gleichen Grundsätzen aus, so erhalten wir das totale Differential von du, d. h. das totale zweite Differential von u:

$$d(du) = d^2 u = d_x(du) + d_y(du) = \frac{\partial (du)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial (du)}{\partial y} \cdot dy =$$

$$= \frac{\partial (d_x u)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial (d_y u)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial (d_x u)}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial (d_y u)}{\partial y} \cdot dy =$$

$$= \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx\right)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy\right)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx\right)}{\partial y} \cdot dy +$$

$$+ \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy\right)}{\partial y} \cdot dy.$$

Bei der Differentiation ist der Faktor dx bzw. dy nach unserer Voraussetzung nicht etwa selbst als „Funktion von x bzw. y", sondern als von x und y unabhängig, d. h. als Konstante zu behandeln. Wir erhalten dann also:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy^2.$$

Die beiden mittleren Glieder dieses Ausdrucks sind nach dem oben gegebenen Satze über die Gleichgültigkeit der Reihenfolge der Differentiation identisch, so daß als Endergebnis herauskommt:

$$\mathbf{d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy^2.}$$

Das totale zweite Differential von u ist also gleich der Summe sämtlicher vier partiellen zweiten Differentiale (von denen zwei identisch sind).

Mit Hilfe des Satzes von der Gleichgültigkeit der Reihenfolge der doppelten partiellen Differentiation nach beiden Variabeln läßt sich ermitteln, ob ein gegebener Ausdruck von der Form $p \cdot dx + q \cdot dy$ das totale (vollständige) Differential du einer Funktion u ist. Es müßte dann augenscheinlich

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ und } q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sein.

Differentiieren wir nun p partiell nach y und q partiell nach x, so müssten identische Werte herauskommen; denn es ist dann

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

und diese beiden Werte müssen ja nach dem oben besprochenen Satze identisch sein.

Umgekehrt läßt sich, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, zeigen, daß, wenn die Bedingung

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$$

erfüllt ist, wirklich $p \cdot dx + q \cdot dy$ ein totales Differential darstellt.

Die Frage, ob in einem Ausdruck $p \cdot dx + q \cdot dy$ ein totales Differential vorliegt oder nicht, ist von entscheidender Bedeutung für die Behandlung der Differentialgleichungen, mit denen sich das folgende Kapitel beschäftigt.

385. Differentialgleichungen. Unter Differentialgleichungen sind Gleichungen zu verstehen, in denen Differentialquotienten, meist neben den Variabeln selbst, vorkommen.

Nach der Art der Ableitungen unterscheidet man zunächst gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; sodann Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen nur die ersten Ableitungen, zweiter usw. Ordnung, in denen auch zweite bzw. höhere Ableitungen vorkommen. Die Ordnung bebestimmt die höchste vorkommende Ableitung. Endlich können Differentialgleichungen auch noch von verschiedenem Grade sein, je nachdem, in welcher Potenz die Ableitungen höchster Ordnung erscheinen.

So ist z. B. die Gleichung

$$a x + b y^2 + c \cdot \frac{dy}{dx} = d$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, ersten Grades, die Gleichung

$$a x + b y^2 + c \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = d$$

eine solche zweiter Ordnung, ersten Grades, die Gleichung

$$a x + b y^2 + c \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = d$$

von der ersten Ordnung und vom zweiten Grade, usw.

Die Differentialgleichungen sind überaus wichtig, weil die den Naturerscheinungen zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten gewöhnlich primär nur in Gestalt von Differentialgleichungen abgeleitet werden können. Wenn wir als Beispiel die chemische Kinetik wählen, so wissen wir, daß die Reaktionsgeschwindigkeit in gesetzmäßiger Weise von der Konzentration der reagierenden Stoffe abhängt. Für eine nicht umkehrbare unimolekulare Reaktion ist in jedem Augenblicke die Reaktionsgeschwindigkeit proportional der noch vorhandenen Menge des sich umwandelnden Stoffes.

Sei ursprünglich die Menge a vorhanden gewesen, und zur Zeit t die Menge x umgewandelt, so ist die zur Zeit t noch vorhandene Menge $a - x$. Ihr proportional ist die momentane Reaktionsgeschwindigkeit zur Zeit t oder diejenige Menge, die sich in der Zeiteinheit umwandeln würde, wenn diese so klein gewählt ist, daß dabei die noch verbleibende Menge des sich umwandelnden Stoffes unverändert bleibt. Dieser Bedingung genügt aber nur eine unendlich kleine Zeitspanne dt, innerhalb deren sich nur die unendlich kleine Menge dx umwandelt. Wir definieren also die momentane Reaktionsgeschwindigkeit zur Zeit t als den Quotienten $dx \cdot \frac{1}{dt} = \frac{dx}{dt}$, d. h. die Zunahme, die x in der Zeiteinheit erfahren würde, wenn es sich mit derselben Geschwindigkeit, wie im unendlich kleinen Zeitintervall dt, während der ganzen Zeiteinheit (Sekunde, Minute, Stunde oder Tag, je nach den Bedingungen des Einzelfalls zu wählen) veränderte. Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot (a - x),$$

in der k den Proportionalitätsfaktor darstellt, der das Verhältnis zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und vorhandener Menge regelt.

Diese Gleichung ist nach der oben gegebenen Definition eine Differentialgleichung; denn es kommt der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$ neben x darin vor.

Will man erfahren, nach welcher Gesetzmäßigkeit x selbst mit a und t verknüpft ist, so muß man die Differentialgleichung integrieren, d. h. aus der Beziehung zwischen den unendlich kleinen Änderungen die endliche Gleichung[809b] zwischen den Variabeln selbst (das „Integral der Differentialgleichung") herleiten. Diese enthält dann außer den Variabeln x und t noch die natürliche (der betreffenden Reaktion eigentümliche) Konstante k und die frei wählbare Konstante a.

Die Aufgabe, eine Differentialgleichung in diesem Sinne zu lösen, erfordert die Anwendung spezieller Regeln, die z. T. sehr kompliziert sind. Wir wollen hier nur den allereinfachsten Fall und die allereinfachste Methode besprechen, da dies für unsere Zwecke ausreicht. Weiteres ist in der eingangs angeführten Literatur zu finden.

Haben wir eine Gleichung von der Form

$$p\,dx + q\,dy = 0,$$

und ist die linke Seite ein vollständiges Differential einer Funktion $u = f(x, y)$, so ist

$$f(x, y) = \text{const.}$$

die gesuchte endliche Gleichung.

[809b] Die naheliegende Bezeichnung „Integralgleichung" ist bereits in anderem Sinne gebräuchlich.

Ob ein vollständiges Differential vorliegt, prüft man in der oben angegebenen Weise, also durch partielle Differentiation von p nach y und von q nach x.

Die oben genannte Gleichung wäre in der Form

$$dx - k \cdot (a - x) \cdot dt = 0$$

noch nicht nach obiger Regel lösbar, da die linke Seite kein totales Differential darstellt. Doch läßt sie sich durch eine einfache Umformung (Trennung der Variabeln) sehr leicht in eine zweckentsprechende Form überführen und lautet dann:

$$\frac{1}{a-x} \cdot dx - k \cdot dt = 0.$$

Hier sind tatsächlich die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{a-x}\right)}{\partial t} \text{ (x konstant) und } \frac{\partial(k \cdot t)}{\partial x} \text{ (t konstant)}$$

einander gleich, nämlich beide gleich Null.

Die linke Seite ist also ein totales Differential und zwar der Funktion

$$u = \int \frac{dx}{a-x} - \int k \cdot dt = [-\ln(a-x) + C_1] - [k \cdot t + C_2].$$

Daher ist

$$u = \text{const.},$$

oder, wenn wir die Konstanten (zur Konstante C) vereinigen,

$$-\ln(a-x) - k \cdot t = C$$

und

$$-\ln(a-x) = k \cdot t + C.$$

Damit ist die Aufgabe bis auf die Bestimmung der Integrationskonstante C erledigt. Letztere ergibt sich aus der Beziehung, daß im Anfang der Reaktion, also bei $t = 0$, die umzuwandelnde Substanz noch völlig intakt, x also $= 0$ ist.

Mithin gilt

$$-\ln a = C$$

und

$$-\ln(a-x) = k \cdot t + C = k \cdot t - \ln a$$

oder

$$k \cdot t = \ln a - \ln(a-x) = \ln \frac{a}{a-x}.$$

Das ist die gewünschte endliche Gleichung für eine nicht umkehrbare unimolekulare Reaktion.

In analoger Weise lassen sich im wesentlichen alle diejenigen Fälle von Differentialgleichungen behandeln, denen wir bei den im Rahmen dieses Lehrbuches zu besprechenden Gesetzmäßigkeiten begegnen. Wir wollen uns daher mit dieser einen Lösungsmethode begnügen. Es sei nur kurz erwähnt, daß man in vielen Fällen durch geschickte Umformung unter Einführung neuer Variabeln (die selbst Funktionen der Grundvariabeln sind) anders geformte Differentialgleichungen auf die oben genannte einfache Form bringen kann, sowie daß sich bei manchen Gleichungen, in denen kein vollständiges

Differential der obigen Form enthalten ist, durch Multiplikation mit einem „integrierenden Faktor" ein vollständiges Differential herstellen und so die Auflösung ermöglichen läßt.

386. Formeltafel. Im folgenden soll zum Schlusse eine Zusammenstellung der für unsere Zwecke wichtigsten Formeln aus der Differential- und Integralgleichung gegeben werden, die im Bedarfsfalle eine rasche Orientierung ermöglichen soll. Die eingeklammerten Zahlen am Schlusse jeder Formel bedeuten die Seiten, auf denen die Formeln abgeleitet sind.

Formeln aus der Differentialrechnung.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ (766).
   $dy = f'(x) \cdot dx.$
2. $\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ (766).
3. $\frac{d(\varphi(x) \pm \psi(x))}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx}$ (767).
4. $\frac{d(\varphi(x) \cdot \psi(x))}{dx} = \psi(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}$ (768).
5. $\frac{da}{dx}$ (a = const.) $= 0$ (767).
6. $\frac{d(a \cdot f(x))}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx}$ (768).
7. $\frac{d\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{dx} = \frac{\psi(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}}{(\psi(x))^2}$ (769).
8. $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e$ (770).
9. $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ (770).
10. $\frac{de^x}{dx} = e^x$ (771).
11. $\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a$ (771).
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{df(\varphi(x))}{dx} = \frac{dy}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$ (771).
13. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x)$ (785).
    $d^2y = df'(x) \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2.$
14. $\frac{\partial u}{\partial x}(u = f(x, y)) = \frac{d_x u}{dx}$ (y konstant)
    $\frac{\partial u}{\partial y}(u = f(x, y)) = \frac{d_y u}{dx}$ (x konstant). (793).
15. $du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$ (794).

16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}$. (797).

17. $d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy^2$. (797).

Formeln aus der Integralrechnung.

18. $\int dx = x$. (776).

19. $\int f'(x) \cdot dx = f(x) + C$. (776).

20. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (wenn n nicht $= -1$). (783).

21. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

22. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$.

23. $\int (f'_1(x) \cdot dx + f'_2(x) \cdot dx) = \int f'_1(x) \cdot dx + \int f'_2(x) \cdot dx$. (782).

24. $\int a \cdot f'(x) \cdot dx = a \cdot \int f'(x) \cdot dx$. (782).

25. $\int \frac{dx}{a+x} = \ln(a+x) + C$.

26. $\int \frac{dx}{a-x} = -\ln(a-x) + C$.

27. $\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x} + C$.

28. $\int \frac{dx}{(a-x)\cdot(b-x)} = \frac{1}{b-a} \cdot \ln \frac{b-x}{a-x} + C = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \frac{a-x}{b-x} + C$.

29. $\int v \cdot du = u \cdot v - \int u \cdot dv$. (783).

30. $\int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot dx = \int_{(x=x_2)} f'(x) \cdot dx - \int_{(x=x_1)} f'(x) \cdot dx = f(x_2) - f(x_1)$. (777).

31. $\int_a^b f'(x) \cdot dx = -\int_b^a f'(x) \cdot dx$. (782).