

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Vorlesungen über theoretische Physik**

Vorlesungen über Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus

**Helmholtz, Hermann von**

**Leipzig, 1907**

Erster Theil. Elektrostatik

# Erster Theil.

## Elektrostatik.

---

### Erster Abschnitt.

#### Feste elektrische Ladungen, Kräfte und Potentiale.

---

##### § 1. Das Gesetz von Coulomb.

Die alte Lehre von den beiden entgegengesetzten elektrischen Fluidis mit ihren Fernkräften ist sehr vollständig ausgearbeitet worden und giebt für eine große Klasse von Phänomenen vollständige und einheitliche Erklärungen. Es sind dies die Erscheinungen, bei denen die Vertheilung der elektrischen Quanta in Ruhe fortbesteht oder höchstens mit ihren ponderablen Trägern in mäßigen Geschwindigkeiten bewegt wird. Bei diesen Phänomenen befinden sich die Ladungen jederzeit im Gleichgewicht der zwischen ihnen wirkenden Kräfte; man nennt daher die Lehre von denselben Elektrostatik.

Die eigenthümlichen, scheinbar unvermittelt in die Ferne wirkenden elektrischen Kräfte kann man nach der Art ihrer Wirkung in zwei Erscheinungsformen trennen:

1. Ponderomotorische Kräfte, welche die ponderablen Träger der Elektrizität in Bewegung setzen, oder denen durch mechanische Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden kann.

2. Elektromotorische Kräfte, welche in ruhenden (oder mäßig bewegten) leitenden Trägern die Fluida selbst in Bewegung setzen. Diese Bewegungen führen übrigens meist in aller kürzester Zeit zu solchen Anordnungen der Fluida, welche jene elektromotorischen Kräfte aufheben und damit einen Ruhezustand herbeiführen. Die anderen Fälle, in denen das Gleichgewicht der elektrischen Kräfte dauernd gestört bleibt, werden wir bei der Lehre von den galva-

nischen Strömen kennen lernen, hier beschäftigt uns zunächst nur der Fall des Gleichgewichts.

Das Gesetz, nach welchem die elektrischen Kräfte wirken, ist in beiden Erscheinungsformen, der ponderomotorischen und der elektromotorischen, das gleiche; es spricht nicht von den materiellen Trägern der Fluida, sondern nur von letzteren. COULOMB bestimmte das Gesetz der ponderomotorischen Wirkung zwischen zwei elektrisch geladenen kleinen Kugeln mit Hülfe der Drehwaage (7 Abhandlungen der Pariser Akademie 1785—89). Er fand, so weit die Genauigkeit seiner Versuchsanordnung dies zu erkennen erlaubte, daß die mechanische Abstofsungskraft zwischen zwei mit gleichnamiger Elektrizität geladenen kleinen Körpern proportional ist dem Producte der beiden Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes. Bezeichnet man die Kraft mit  $K$ , die beiden Elektrizitätsmengen mit  $e_1$  und  $e_2$ , den Abstand ihrer kleinen Träger mit  $r$  und endlich mit  $A^2$  eine Constante, das soll heißen eine Gröfse, welche für alle möglichen Ladungen und Abstände denselben Werth besitzt, so kann man das COULOMB'sche Gesetz durch folgende Formel darstellen:

$$K = A^2 \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}. \quad (1)$$

Der Theil des Gesetzes, welcher die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung  $r$  ausdrückt, kann, so lange es sich um dieselben unveränderten Ladungen  $e_1$  und  $e_2$  handelt, durch Messungen an der Drehwaage und Längenmessungen direct bestätigt werden, dagegen verlangt das im Zähler des Ausdrucks stehende Product  $e_1 \cdot e_2$  die Möglichkeit, verschieden große Elektrizitätsmengen wenigstens nach einem relativen Maafse messen zu können. Als Kriterium der Gleichheit zweier Quanta muß die Gleichheit ihrer Wirkung auf ein und dasselbe dritte Quantum dienen. Man braucht dann noch eine Methode der Addition und der Theilung dieser Gröfsen, um das Mengenverhältniß verschiedener Ladungen messen zu können und damit die Ladungen als physikalische Gröfsen zu erkennen. Möglichkeiten hierzu wären gegeben durch die Berührung metallischer isolierter Träger, weil in ihnen die Elektrizität vollkommen beweglich ist. Die Sache liegt hier anders als bei dem sonst ähnlich lautenden Gravitationsgesetz. Dort ist das Agens die träge Masse, für welche ein Maaf bereits in der Gröfse ihres Beharrungsvermögens oder auch ihrer lebendigen Kraft gefunden ist, so daß es als eine besondere, nicht selbstverständliche Eigenschaft hinzu-

kommt, daß die Massenanziehung sich gerade dieser Quantität der Trägheit proportional bethätigt. Von den elektrischen Ladungen aber kennen wir, wenigstens im Gebiete der Elektrostatik, keine anderen meßbaren Eigenschaften, als die durch das COULOMB'sche Gesetz formulirten Abstofsungs- oder Anziehungskräfte. Von diesem Standpunkte aus erscheint es selbstverständlich, daß eine Ladung z. B. doppelt so groß ist, als eine andere, wenn sie aus gleichem Abstände und auf dieselbe zur Prüfung verwendete Ladung wirkend, die doppelte Abstofsungs- oder Anziehungskraft hervorbringt, aber es liegt in diesem Schluß doch die Voraussetzung, daß durch die Hinzufügung neuer Ladungen weder die bereits vorhandene noch die hinzugefügte in ihrer Wirksamkeit irgendwie verändert werden, sondern daß sie als unveränderliche Quanta mit unveränderlichen Eigenschaften addirt werden, also echte physikalische Größen sind. Diese Anschauung hat sich in den feinsten experimentellen Prüfungen durchaus bewährt. Alle scheinbaren Widersprüche dagegen lassen sich befriedigend erklären, z. B. die regelmäsig mit der Zeit abnehmende Kraft durch Abnahme der Ladungen in Folge mangelhafter Isolirung, die Veränderung der Kraft je nach dem isolirenden Zwischenmedium durch einen besonderen, der Magnetisirung von ganz weichem Eisen analogen, elektrischen Zustand des Mediums. Das COULOMB'sche Gesetz nimmt freilich keine Rücksicht auf das Zwischenmedium, muß daher, wenn die Größe  $A^2$  wirklich constant sein soll, beschränkt werden auf Ladungen, welche sich im Vacuum oder in der elektrisch nur sehr wenig davon verschiedenen Luft gegenüberstehen.

Ein experimenteller Nachweis dafür, daß im Zähler des Ausdrucks Gleichung (1) das Produkt der beiden elektrischen Quanta  $e_1 \cdot e_2$  auftreten muß, ließe sich — wenigstens in der Idee — folgendermaßen mit der Drehwaage ausführen: Zunächst weist man die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung durch Vertauschung der feststehenden und der am Hebelarm beweglichen Ladung nach. Sodann stellt man sich noch zwei mit dem gleichen Quantum  $e_0$  beladene Körperchen her und mißt immer im gleichen Abstände  $r = 1$  die Abstofsungskräfte zwischen allen möglichen Paaren von Ladungen. Diese Kräfte seien bezeichnet durch

$$K_{00}, K_{01} \equiv K_{10}, K_{02} \equiv K_{20}, K_{12} \equiv K_{21}.$$

Man wird dann durch Messung folgende Proportion bestätigt finden

$$K_{12} : K_{02} = K_{10} : K_{00},$$

aus welcher folgt:

$$K_{12} = \frac{K_{01} \cdot K_{02}}{K_{00}} = \left( \frac{K_{01}}{\sqrt{K_{00}}} \right) \cdot \left( \frac{K_{02}}{\sqrt{K_{00}}} \right).$$

Die Kraft zwischen  $e_1$  und  $e_2$  erscheint also dargestellt als Product zweier gleichgebildeter Factoren, deren erster nur von  $e_1$ , deren zweiter nur von  $e_2$  abhängt. Die Gröfse  $e_0$  kann keinen Einfluß auf den Werth dieser Factoren haben, vielmehr stellen letztere direct die elektrischen Massen  $e_1$  und  $e_2$  dar.

## § 2. Absolute Einheit der Elektrizitätsmenge.

Jedenfalls bildet das COULOMB'sche Gesetz das ursprünglichste und nächstliegende Mittel, um die Gröfse elektrischer Ladungen oder Quanta zu messen. Wäre das elektrische Quantum erklärbar durch einen besonderen mechanischen Zustand seines Trägers, so könnte man dessen Dimension und Maafseinheit anschließen an die absoluten mechanischen Maafse, welche sich alle auf die Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit zurückführen lassen. Dann würde sich auch die Constante  $A^2$  in Gleichung (1) nach Zahl und Dimension angeben lassen. Da aber die elektrischen Quanta durchaus geschieden von der mechanischen Erscheinungswelt dastehen, und nur an ihresgleichen relativ gemessen werden können, so ist eine absolute Einheit für ihr Maafs nicht direct angebar. Ein einheitliches, überall reproducirbares Maafs ist aber für den Vergleich der verschiedenen Messungen sehr erwünscht, oft unerläflich.

Deshalb ist man nach dem Vorgang von WILHELM WEBER über- eingekommen als Einheit der Elektrizitätsmenge diejenige festzusetzen, bei deren Anwendung das COULOMB'sche Gesetz die einfachste Gestalt annimmt, bei welcher also der Proportionalitätsfactor  $A^2$  durch die Zahl 1 ersetzt wird:

$$K = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}. \quad (1 a)$$

Durch diese willkürliche Festsetzung erhalten wir nicht nur eine Maafseinheit des Elektrizitätsquantums, sondern das Quantum erhält auch eine an das absolute Maafssystem der mechanischen Gröfsen sich anschließende Dimension, welcher zwar keine innere sachliche Bedeutung zukommt, mit der man jedoch nützlich rechnen kann. Die mechanische Kraft  $K$  hat die Dimension:

$$K = [L M T^{-2}].$$

Hier bedeutet  $L$  eine Länge,  $M$  eine Masse,  $T$  eine Zeit; die eckige Klammer soll andeuten, daß die Gleichung sich nur auf die Dimension, nicht auf den Zahlenwerth, bezieht. (Vergl. Bd. I, 2, S. 32—35.)

Das Quadrat des Abstandes ist das Quadrat einer Länge:

$$r^2 = [L^2].$$

Es ist also nach Gleichung (1 a):

$$e_1 \cdot e_2 = r^2 K = [L^3 M T^{-2}].$$

Da nun  $e_1$  und  $e_2$  als gleichartige Größen auch von gleicher Dimension sein müssen, so hat das Product  $e_1 \cdot e_2$  die Dimension des Quadrats der Elektrizitätsmenge, und die Elektrizitätsmenge selbst hat die Dimension

$$e = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]. \quad (2)$$

Man nennt diese Art der Maafsbildung die elektrostatische. W. WEBER benützte als Grundeinheiten mm, mg, sec; wenn wir aber das seit dem Pariser Internationalen Congress von 1881 gebräuchliche C.G.S.-System (cm, g, sec) befolgen, so ist die absolute elektrostatische Einheit der Ladung dadurch definirt, daß zwei hinreichend kleine Körper, beide mit je dieser Einheit beladen, sich im Abstände von 1 cm mit der Kraft 1 Dyn abstofsen. Diese Kraft ist nahezu ebenso groß, wie der Zug der Schwerkraft, welchen wir empfinden, wenn wir ein Milligrammgewicht in der Hand halten. Die elektrostatische C.G.S.-Einheit der Ladung ist also ein verhältnißmäßig sehr kleines Quantum, von welchem, unseren Sinnen zugänglich, nur geringe Wirkungen ausgehen. Durch feine Meßapparate (Elektrometer) können zwar sogar Bruchtheile dieser Einheit nachgewiesen werden, aber bei allen gröbereren Versuchen, bei denen sich direct sinnfällige Phänomene zeigen, hat man es mit viel größeren Quantitäten zu thun, welche nach Tausenden oder gar Millionen dieser Einheit zählen.

### § 3. Rechtwinklige Coordinaten, Kraftcomponenten.

Wir legen im Raume ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest, dessen Abmessungen mit  $x, y, z$  bezeichnet werden, bringen an die Stelle  $x_1, y_1, z_1$  ein kleines Körperchen beladen mit der Elektrizitätsmenge  $e_1$  und an eine andere Stelle  $x_2, y_2, z_2$  ein kleines Körperchen beladen mit der Menge  $e_2$ . Um die Vorstellung festzulegen, wollen wir  $e_1$  und  $e_2$  gleichstimmig annehmen, so daß eine Abstofungskraft

zwischen den beiden Theilchen besteht. Diese wirkt, dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung folgend, auf beide Ladungen in gleicher

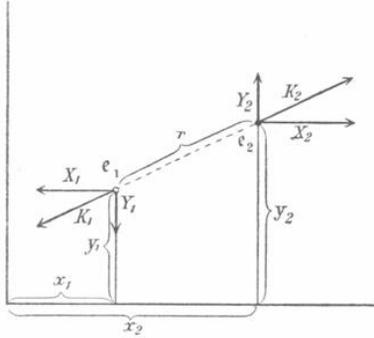


Fig. 1.

Stärke und in entgegengesetzter Richtung an beiden Punkten die Verlängerung der geraden Verbindungslinie. Diese beiden Kräfte zerlege man in Componenten parallel den Coordinatrrichtungen; die auf  $e_1$  wirkenden seien  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ , die auf  $e_2$  wirkenden seien  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $Z_2$ . In Figur 1 ist diese Zerlegung für die beiden Richtungen  $x$  und  $y$  gezeichnet unter der Annahme, daß

$x_1 < x_2$  und  $y_1 < y_2$  ist. Die Richtungscosinus des Pfeiles  $K_1$  sind nun abzulesen:

$$\left. \begin{aligned} \cos(K_1, x) &= \frac{x_1 - x_2}{r} \\ \cos(K_1, y) &= \frac{y_1 - y_2}{r} \\ \cos(K_1, z) &= \frac{z_1 - z_2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hier bedeutet  $r$  den absoluten Werth des Abstandes beider Ladungen:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Der absolute Werth der Kraft ist nun nach dem COULOMB'schen Gesetz:

$$K_1 = K_2 = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$$

und aus ihm gewinnt man die Componenten durch Multiplication mit den Richtungscosinus:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} = \frac{e_1 e_2 (x_1 - x_2)}{r^3} \\ Y_1 &= \frac{e_1 e_2 (y_1 - y_2)}{r^3} \\ Z_1 &= \frac{e_1 e_2 (z_1 - z_2)}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Da die auf  $e_2$  ausgeübte Kraft der ersteren entgegengesetzt gleich ist, haben ihre drei Componenten das entgegengesetzte Vorzeichen und gleichen absoluten Betrag wie die vorstehenden. Wir wollen das nicht durch vorgesetzte Minuszeichen ausdrücken, sondern durch Umdrehung der Coordinatendifferenzen. So findet man:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{e_1 e_2 (x_2 - x_1)}{r^3} \\ Y_2 &= \frac{e_1 e_2 (y_2 - y_1)}{r^3} \\ Z_2 &= \frac{e_1 e_2 (z_2 - z_1)}{r^3} . \end{aligned} \right\} (5a)$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese sechs algebraischen Ausdrücke für alle möglichen relativen Lagen der beiden Punkte 1 und 2 das richtige Vorzeichen für die Kraftcomponenten ergeben, ja wir können jetzt auch die Beschränkung fallen lassen, daß es sich um die Abstofung zweier gleichnamiger Elektrizitätsmengen handeln soll. Die vorstehenden Ausdrücke gelten unverändert auch für die Anziehung zwischen einer positiven und einer negativen Ladung. Thatsächlich haben bei Anziehung alle sechs Componenten entgegengesetztes Vorzeichen wie bei Abstofung. Das kommt nun auch in diesen Formeln zum Ausdruck, denn das Product  $e_1 \cdot e_2$ , welches für zwei gleichnamige Ladungen (gleichviel ob + oder -) stets positiv ist, wird für zwei ungleichnamige Ladungen nothwendiger Weise negativ, so daß auch in diesem Falle aus den Formeln (5) und (5a) die richtigen Componenten der Kräfte gefunden werden.

#### § 4. Potentielle Energie zwischen zwei elektrisch geladenen Körperchen.

Die vorstehenden Ausdrücke für die sechs Kraftcomponenten kann man als partielle Differentialquotienten einer und derselben einfachen Function der Coordinaten darstellen. Zunächst findet man, wenn man den in Gleichung (4) gegebenen Ausdruck  $r$  der Reihe nach nach allen sechs darinsteckenden Coordinaten differenzirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{x_1 - x_2}{r} & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - x_1}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y_1} &= \frac{y_1 - y_2}{r} & \frac{\partial r}{\partial y_2} &= \frac{y_2 - y_1}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{x_1 - x_2}{r} & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - x_1}{r} . \end{aligned}$$

Das sind nur andere Darstellungen für die Richtungscosinus von  $r$ .  
Ferner ist nach den Regeln des Differenzirens

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x_1 - x_2}{r^3}$$

und analog jeder der fünf anderen partiellen Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$  z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y_2} = -\frac{y_2 - y_1}{r^3} \text{ etc.}$$

Dies sind nun bis aufs Vorzeichen gerade die in den Ausdrücken der Kraftcomponenten vorkommenden Gebilde. Da  $e_1$  und  $e_2$  feste Gröfsen sind, welche unverändert gedacht werden müssen, wenn man die Abhängigkeit der Kraft von der Lage der Punkte aufsuchen will, so darf man  $e_1 e_2$  als constanten Factor ungestört unter die Differenziationszeichen hineinschieben, und erhält folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) & X_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) \\ Y_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) & Y_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) \\ Z_1 &= -\frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) & Z_2 &= -\frac{\partial}{\partial z_2} \left( \frac{e_1 e_2}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Jede Kraftcomponente ist also dargestellt als ein negativer Differentialquotient der Function  $\frac{e_1 e_2}{r}$  genommen nach derjenigen Coordinate des Zweiladungssystems, welche durch diese Componente beschleunigt wird. Die Kraftcomponenten sind ponderomotorische, mechanisch wirkende, also ist

$$\Phi = \frac{e_1 e_2}{r} \quad (7)$$

die potentielle Energie oder der Arbeitsvorrath des Systems der beiden geladenen Körperchen. (Vergl. die Einführung dieses Begriffs in Bd. I, 2 S. 196, Gleichung (115).) Da diese Energieform eine Folge der elektrostatischen Ladungen der beiden Körperchen ist, nennt man sie die elektrostatische Energie. Eine additive Constante kann man immer hinzufügen, welche bei der Bildung der Differentialquotienten wieder fortfällt, mithin ohne Einfluss auf die

Werthe der elektrischen ponderomotorischen Kraftcomponenten ist; in dieser Constanten kann man allerlei unveränderliche sonstige Energiegrößen aufnehmen, welche sich bei wechselndem Abstand der beiden Ladungen nicht ändern, z. B. den bei constant gehaltener Temperatur unveränderten Wärmehalt der beiden Träger, oder den aus der Affinität der Stoffe beider Träger folgenden Inhalt an chemischer Energie, endlich aber auch noch zwei Beträge von ebenfalls elektrostatischer Art, welcher aus der Zusammendrängung der elektrischen Quanta in jedem der beiden kleinen Körper folgen. Diese letzteren können sehr bedeutend sein, bleiben aber bei Veränderungen von  $r$  unberührt, wenn die Träger Isolatoren oder sehr kleine Conductoren sind. Die potentielle Energie der Gravitation zwischen den Massen der beiden Träger endlich, welche allerdings von dem Abstand  $r$  abhängt, ist wohl stets wegen ihrer Kleinheit ohne Schaden zu vernachlässigen. Sorgt man dafür, daß schnellere Bewegungen der Träger verhindert werden, so ist auch die kinetische Energie der Massen zu vernachlässigen, und der variable Theil der gesammten Energie bei gewöhnlichen elektrostatischen Versuchen ist durch die Formel (7) dargestellt. Sein Werth nähert sich der Null, wenn beide Ladungen in große Entfernung von einander gebracht werden, dagegen steigt sein Werth positiv an, wenn zwei gleichstimmige Ladungen einander genähert werden, und er sinkt ins Negative herab, wenn zwei entgegengesetzte Ladungen einander genähert werden. Mathematisch würde folgen, daß die elektrostatische Energie  $\pm\infty$  wird, wenn die Punktladungen zur Deckung gebracht werden, doch hat dies keine physikalische Bedeutung mehr, denn die Träger endlicher Elektrizitätsmengen haben selbst immer eine gewisse Ausdehnung, und man darf sie nur so lange als Massenpunkte betrachten, als der Abstand  $r$  groß ist gegen ihre eigene Ausdehnung.

Von dem Zwischenmedium, in dem die beiden geladenen Körper liegen, ist weder im COULOMB'schen Gesetze noch in dem daraus hergeleiteten Ausdruck der elektrostatischen Energie die Rede. Das ist eine Lücke, welche in der Fernwirkungstheorie nur durch besondere Vorstellungen über die Natur der sogenannten Dielektrika ausgefüllt werden kann, thatsächlich ist die Kraft von der Art des Mediums abhängig, wie FARADAY gezeigt hat. Wir wollen deshalb einstweilen als Zwischenmedium den leeren Raum oder die elektrostatisch kaum davon verschiedene Luft voraussetzen.

## § 5. System vieler elektrisch geladener Körperchen.

Der nächste Schritt, den wir vorwärts thun, soll an die Stelle zweier geladener Körperchen eine ganze Schaar von beliebig vielen solchen setzen. Alsdann wirken zwischen jedem Paare Abstofsungs- oder Anziehungskräfte nach dem COULOMB'schen Gesetze. In dieser Aussage liegt die Annahme, daß alle die Kräfte, welche auf eines der Theilchen von den übrigen ausgeübt werden, sich ungestört durch geometrische Addition zu einer Resultante vereinigen, daß also beispielsweise die Wirkung zwischen einer ersten und einer zweiten Ladung nicht dadurch verändert wird, daß beide noch auf eine dritte Ladung einwirken und von dieser dritten beeinflusst werden, eine Annahme, welche sich durchaus bestätigt hat, so lange die Träger der Ladungen hinreichend klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sind, so daß auf Verrückungen, welche die Ladungen im einzelnen Träger selbst erfahren können, keine Rücksicht zu nehmen ist. In größeren geladenen Conductoren, welche verhältnißmäfsig nahe benachbart liegen, gilt dies nicht mehr, doch wird es auch in diesen Fällen gelingen, die veränderten Wirkungen durch Berücksichtigung der veränderlichen Vertheilung der Fluida in den Leitern auf das COULOMB'sche Gesetz zurückzuführen. Hier sehen wir von diesen Complicationen ab und nehmen jede Ladung unveränderlich in je einem Punkte concentrirt an.

Wir wählen einen beliebigen Punkt der Schaar aus und suchen die Kraft, welche er von allen übrigen zusammen erfährt. Um ihn zu unterscheiden, geben wir ihm den Index 0, nennen also seine elektrische Ladung  $e_0$ , seine Ortscoordinaten  $x_0, y_0, z_0$ , während die übrigen Punkte in beliebiger Reihenfolge mit  $a = 1, 2, 3, \dots n$  numerirt werden. Dadurch sind die Zeichen

$$e_a; x_a, y_a, z_a \quad \text{für } a = 1, 2, 3, \dots \text{ bis } n$$

erklärt. Endlich brauchen wir noch die Abstände zwischen dem ausgewählten Punkte 0 und den übrigen Punkten, die man ausführlich mit  $r_{0,a}$  bezeichnen müßte, die wir hier aber kurz  $r_a$  nennen wollen. Es ist also

$$r_a = \left| \sqrt{(x_0 - x_a)^2 + (y_0 - y_a)^2 + (z_0 - z_a)^2} \right| \quad a = 1, 2, 3, \dots n. \quad (8)$$

Während sich die einzelnen Kräfte geometrisch summiren, treten deren gleichen Coordinatenrichtungen folgende Componenten zu drei algebraischen Summen zusammen, welche ihrerseits die drei Co-

ordinaten-Componenten der resultirenden Kraft angeben. Für die Componenten der Einzelkräfte wollen wir die im vorigen Paragraphen gefundene Darstellung als Differentialquotienten der elektrischen Energie anwenden. Danach ist die  $x$ -Componente der auf 0 wirkenden, von einem bestimmten  $a$  herrührenden Einzelkraft:

$$X_{0,a} = - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{e_0 e_a}{r_a} \right).$$

Diese Componenten haben wir über alle  $a$  zu summiren, die Summe, welche wir  $X_0$  nennen, ist dann die eine Componente der gesammten von dem Ladungssystem auf den ausgewählten Punkt ausgeübten Kraft. Analog findet man die beiden anderen Componenten  $Y_0$  und  $Z_0$ . Wir machen dann noch folgende leichte Umformung:

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{a=1}^n X_{0,a} = \sum_{a=1}^n \left( - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{e_0 e_a}{r_a} \right) \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{a=1}^n \frac{e_0 e_a}{r_a} = \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \right\} \cdot e_0, \end{aligned}$$

wobei wir also den gemeinsamen Factor  $e_0$  und die gemeinsame Operation  $\frac{\partial}{\partial x_0}$  aus der Summe herausgezogen haben. Das Resultat ist:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \right\} \cdot e_0, \\ Y_0 &= \left\{ - \frac{\partial}{\partial y_0} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \right\} \cdot e_0, \\ Z_0 &= \left\{ - \frac{\partial}{\partial z_0} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \right\} \cdot e_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Man findet hiernach die Componenten der auf ein ausgewähltes elektrisches Theilchen 0 von den Theilchen 1 bis  $n$  ausgeübten ponderomotorischen Kraft, indem man die negativen partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks  $\sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a}$  nach den gleichgerichteten Coordinaten des ausgewählten Theilchens bildet und dann mit dessen Ladungsquantum  $e_0$  multiplicirt. Die Proportionalität der Kraft mit der Größe  $e_0$ , auf welche die Wirkung sich erstreckt, ist ohne weiteres einleuchtend: Wenn ohne sonstige Aenderungen des Systems nur die Ladung des ausgewählten Körperchens verändert — etwa den zehnten Theil ihres früheren Betrages herabgesetzt wird, so

sinkt auch die auf sie wirkende Kraft an Intensität auf den zehnten Theil ohne indessen ihre Pfeilrichtung zu ändern, da alle drei Componenten der Gleichung (9) dadurch in gleichem Maafsstabe verjüngt werden. Zur Bildung der partiellen Differentialquotienten ist zu bemerken, dafs die Coordinaten des ausgewählten Punktes  $x_0, y_0, z_0$  in sämtlichen Summanden 1 bis  $n$  vorkommen, wie man in dem Ausdruck für  $r_a$  in Gleichung (8) erkennt. Diese sind die drei unabhängigen Variablen, nach denen differenzirt wird, während alle übrigen, mit  $x_a, y_a, z_a$  bezeichneten Abmessungen hierbei als unveränderliche Parameter des Systems auftreten. Man hat sich also die Ladungen 1 bis  $n$  unverrückbar festgelegt zu denken; das Teilchen  $e_0$  aber mufs beweglich gedacht werden, denn zur Auffindung der Differentialquotienten eines Ausdruckes mufs man doch die Variablen immer ein wenig verändern, d. h. hier dem Punkt  $x_0, y_0, z_0$  drei kleine Verschiebungen in den Coordinatrichtungen ertheilt denken.

#### § 6. Das elektrische Feld eines Systems von punktförmigen Ladungen.

In Verfolgung dieser Vorstellungen kann man nun die bewegliche Ladung  $e_0$  auch weiter verrücken, sie endlich in alle möglichen Stellungen zu dem festen Ladungssystem  $e_1$  bis  $e_n$  bringen, also an alle nicht von den festen Ladungen selbst eingenommenen Raumpunkte, so dafs die Abmessungen  $x_0, y_0, z_0$  nichts anderes bedeuten, als die continuirlich variablen Raumcoordinaten  $x, y, z$ . Für jede Lage geben die Gleichungen (9) die Werthe der drei Kraftcomponenten, also auch die Gröfse und Richtung der resultirenden Kraft, welche man in irgend einem geeigneten Maafsstab durch einen Pfeil versinnlichen kann. Zu jedem Raumpunkt gehört somit ein bestimmter Pfeil, und zwar sind diese Pfeile um so ähnlicher in Länge und Richtung je näher benachbart die Raumpunkte liegen, denen sie zugehören; weil ihre drei Componenten nach Gleichungen (9) bis auf die Ausnahmepunkte, in denen die festen Ladungen sitzen, überall stetige Functionen der Variablen  $x, y, z$  (früher  $x_0, y_0, z_0$  bezeichnet) sind.

Man nennt eine solche im allgemeinen stetig vertheilte Zuordnung einer Pfeilgröfse — eines Vectors — zu jedem Raumpunkt allgemein eine Vectorfunction des Ortes im Raume, und das ganze Raumgebiet, in dem diese Vectoranordnung definirt ist, das Feld des Vectors. Die Physik hat in verschiedenen Naturgebieten Felder von Vektoren zu betrachten; eines der, täglicher Anschauung

nächstliegenden, Beispiele bieten die Strömungen der Flüssigkeiten. Als Pfeile sind dabei in jedem von der Flüssigkeit durchströmten Raumpunkt die Geschwindigkeiten der dort befindlichen bewegten Massen anzusehen. Auch diese Pfeile zeigen im allgemeinen stetige veränderliche Anordnungen im Raume, bis auf besondere und interessante Ausnahmestellen. Sie verändern sich aber gewöhnlich auch mit der Zeit; nur die stationären Strömungen geben Vectorfelder, welche in ihrer Anordnung beständig bleiben, und deshalb ähneln gerade diese am meisten an den hier vorliegenden Fall, in dem die Zeit gar nicht als Variable vorkommt.

Unser elektrostatisches Feld rührt her von den geladenen Punkten  $e_1$  bis  $e_n$ , während der ebenfalls geladene Punkt  $e_0$  gleichsam wie eine Sonde zur Prüfung der Stärke und Richtung des Vectors verwendet wird. Von diesem beweglichen Punkt steckt in dem Ausdruck der Feldcomponenten bisher noch der Factor  $e_0$ , durch welchen sie zu ponderomotorischen Kraftcomponenten auf den materiellen Träger dieser Sonde werden. Wir machen den weiteren Schritt, daß wir die Sonde für eine Aeufserlichkeit erklären, das elektrische Feld also als ein an und für sich existirendes Ding, gewissermaßen als einen besonderen Zustand des Raumes oder eines den Raum durchdringenden Mediums; wobei freilich zu bemerken ist, daß wir von dem Vorhandensein dieses Zustandes zunächst nur dadurch Kunde erhalten, daß wir ein geladenes Körperchen, an die fragliche Stelle gebracht, von einer bestimmten ponderomotorischen Kraft angegriffen sehen. Als Maafs dieses unabhängigen von dem Prüfungsteilchen existierend gedachten gerichteten Zustands nehmen wir die drei Componenten in Gleichungen (9), nachdem wir den Factor  $e_0$  weggelassen, und nennen sie  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , ohne Index. Jede ist Function der Raumcoordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} X &= - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \\ Y &= - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \\ Z &= - \frac{\partial}{\partial z} \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a} \end{aligned} \right\} (10)$$

Dabei ist

$$r_a = | \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2} | \quad (10a)$$

Man nennt diesen Vector, dessen Componenten durch vorstehende Gleichungen (10) definirt sind, die elektrische Feldstärke. Auch

der Ausdruck elektrische Kraft ist dafür üblich und kann ohne Bedenken gebraucht werden, wenn man sich durch das vielseitig verwendete Wort „Kraft“ nicht täuschen läßt und stets bedenkt, daß eine mechanische Kraft von der Dimension  $[MLT^2]$  aus dieser Größe erst durch Multiplikation mit einem elektrischen Quantum entsteht. Da wir die Dimension des elektrischen Quantums im elektrostatischen Maafssystem bereits in Gleichung (2)

$$e = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

gefunden haben, können wir nun in demselben Maafssystem die Dimension der elektrischen Kraft oder Feldstärke  $\mathcal{E}$  dadurch finden, daß sie die vorstehende Dimension von  $e$  zu einer mechanischen Kraft ergänzen muß. Es wird also

$$\mathcal{E} = [M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}] \quad (11)$$

Zu dem gleichen Ergebnifs gelangt man auch, wenn man die Dimensionen der in den Gleichungen (10) rechts stehenden Ausdrücke zusammensetzt, wobei  $\partial x$  und  $r_a$  als zwei Längenfactoren im Nenner zur Dimension des elektrischen Quantums  $e_a$  hinzutreten; die Componenten  $X, Y, Z$  haben natürlich dieselbe Dimension wie ihre Resultante. Auch die Maafseinheit der elektrischen Kraft ist hierdurch an das absolute elektrostatische (C. G. S.) System angeschlossen, und zu bezeichnen:

$$1 (\text{cm}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{gr}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}).$$

Zu der hier gegebenen Begriffsbildung des elektrischen Feldes einer Schaar von Punktladungen  $e_1 \dots e_n$  ist, um Unklarheiten vorzubeugen, noch folgendes zu bemerken. Wir haben das Feld durchmustert mit Hülfe eines beweglichen Prüfungspunktes mit der Ladung  $e_0$ . Die Anwesenheit dieser Ladung stört und verändert aber das Feld, macht sogar den Raumpunkt, wo sie liegt, zu einer Unendlichkeitsstelle der elektrischen Feldstärke. Dieses veränderte Feld würde man für eine beliebige Lage von  $e_0$  feststellen können, wenn man nun noch einen vorher in hinreichender Entfernung gehaltenen neuen Prüfungskörper verwendet, während  $e_0$  still gehalten wird. Nun erkennt man das Feld, an dessen Bildung sich außer  $e_1$  bis  $e_n$  auch  $e_0$  beteiligt. Wenn man also ein elektrisches Feld unter Verwendung einer Prüfungsladung durch die einwirkende ponderomotorische Kraft aufgenommen denkt, so beteiligt sich die Prüfungsladung nicht an der Bildung dieses Feldes, man erhält vielmehr für die Feldstärke diejenigen Werthe, welche herrschen würden, wenn

die Prüfungsladung nicht dort wäre. Der Prüfungskörper wird dadurch zu einer lediglich unsere Anschauung unterstützenden Fiktion, welche uns bereits gedient hat zur Auffindung der Ausdrücke für die Feldcomponenten in Gleichung (10), von welcher selbst aber in jenen Ausdrücken nichts vorkommt.

Durch die Angabe der drei Coordinaten-Componenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ist der Vector  $\mathfrak{E}$  vollständig bestimmt. Häufig hat man die Componente von  $\mathfrak{E}$  zu bestimmen, welche in eine, von den Grundrichtungen verschiedene, vorgeschriebene Richtung  $l$  hineinfällt. Für diese Componente, welche wir  $\mathfrak{E}_l$  nennen wollen, soll jetzt noch ein einfacher, den Gleichungen (10) analoger Ausdruck abgeleitet werden. Ganz allgemein findet man die Componente eines Vectors nach einer vorgeschriebenen Richtung, indem man den Pfeil, der den Vector darstellt, auf die gegebene Richtungslinie projicirt. Die Länge der Projection findet man durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Richtungen:

$$\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, l). \quad (12)$$

Nun ist aber aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt, daß:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathfrak{E}, l) &= \cos(\mathfrak{E}, x) \cdot \cos(l, x) + \cos(\mathfrak{E}, y) \cdot \cos(l, y) \\ &\quad + \cos(\mathfrak{E}, z) \cdot \cos(l, z). \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Betrachtet man die auf der vorgeschriebenen Richtungslinie von irgend einem Nullpunkt aus abgemessene algebraische Abmessung  $l$  als unabhängige Variable, so entsprechen einem Zuwachs  $ds$  drei ganz bestimmte Zuwächse der Coordinaten,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , welche die Projectionen von  $dl$  sind. Man kann deshalb setzen:

$$\cos(l, x) = \frac{dx}{dl}, \quad \cos(l, y) = \frac{dy}{dl}, \quad \cos(l, z) = \frac{dz}{dl}. \quad (12b)$$

Andererseits ist:

$$\mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, x) = X, \quad \mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, y) = Y, \quad \mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, z) = Z. \quad (12c)$$

Durch Verwendung dieser Formeln (12a, b, c) nimmt die Gleichung (12) folgende Form an:

$$\mathfrak{E}_l = X \cdot \frac{dx}{dl} + Y \cdot \frac{dy}{dl} + Z \cdot \frac{dz}{dl}. \quad (12d)$$

Führt man nun endlich noch für  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Ausdrücke aus Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \sum \frac{e_a}{r_a} \right) \cdot \frac{dx}{dl} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum \frac{e_a}{r_a} \right) \cdot \frac{dy}{dl} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum \frac{e_a}{r_a} \right) \cdot \frac{dz}{dl}. \quad (12e)$$

Dieses Gebilde ist nun nichts anderes, als der nach der Variablen  $l$  gebildete negative Differentialquotient der Function  $\sum \frac{e_a}{r_a}$ . Die Variable  $l$  steckt nicht explicite in dem Summenausdruck, aber die variablen Raumcoordinaten  $x, y, z$ , von denen er durch die  $r_a$  explicite abhängt, sind hier als abhängige Functionen der Abmessung  $l$  anzusehen. Dem entspricht die Bildung des vorstehenden Ausdrucks, für welchen man kürzer schreibt:

$$\mathfrak{G}_l = - \frac{\partial}{\partial l} \sum_1^n \frac{e_a}{r_a}. \quad (13)$$

Hierin ist jede Bezugnahme auf ein bestimmtes Coordinatensystem verschwunden, denn auch die  $r_a$ , welche man zwar, wie in Gleichung (10a) geschehen, durch irgendwie festgelegte cartesische Coordinaten ausdrücken kann, haben doch davon unabhängige absolute Werthe, da sie den Abstand eines variablen Raumpunktes von den Orten der festen Ladungen bezeichnen. Die Gleichungen für die Coordinaten-Componenten (10) endlich erscheinen als Specialfälle dieser Gleichung (13).

### § 7. Die Potentialfunction.

Um eine Vectorfunction im Raume anzugeben, braucht man im Allgemeinen für jeden Punkt drei besondere Angaben: entweder die drei Coordinaten-Componenten oder etwa die Intensität und die Richtung, welch' letztere zwei unabhängige Winkelangaben erfordert; bei einer analytisch darstellbaren Verteilung sind drei Functionen der Raumcoordinaten zur Darstellung erforderlich. Daraus ersieht man, dafs das hier gefundene Feld der elektrostatischen Kraft eine besondere Regelmäßigkeit besitzt, denn die Kenntniß einer einzigen Coordinatenfunction

$$\varphi = \sum_1^n \frac{e_a}{r_a} \quad (14)$$

genügt, um durch Bildung des negativen partiellen Differentialquotienten nach einer beliebigen Richtung die Componente des Vectors in dieser Richtung zu finden. Diese Function spielt bei der Betrachtung des elektrostatischen Feldes die größte Rolle. Sie wurde von GEORGE GREEN als Potentialfunction bezeichnet. GAUSS nennt sie das Potential. In Bezug auf das Vorzeichen herrschen in der Litteratur verschiedene Gebräuche; namentlich bei älteren Autoren werden die Kraftcomponenten häufig als die positiven

Differentialquotienten dieser das Feld beherrschenden GröÙe eingeführt (z. B. GAUSS, JACOBI, RIEMANN), welche dann natürlich selbst das umgekehrte Vorzeichen erhalten muÙ. Auch bei anderen Kraftfeldern, welche nicht dem Typus des COULOMB'schen Abstofsungsgesetzes oder des NEWTON'schen Attractionsgesetzes angehören, hat man Functionen von analoger Bedeutung herangezogen, welche man allgemein als Kräftefunctionen bezeichnet und deren Vorzeichen ebenfalls in jedem Falle erst festgestellt werden muÙ. Wenn man consequent an dem gleichen Vorzeichen festhält, ist dasselbe übrigens gleichgültig, hier soll das in Gleichung (14) definirte durchgeführt werden. In sehr großer Entfernung nähert sich  $\varphi$  dem Werthe Null, in der Nähe negativer Ladungen wird  $\varphi$  wegen des stark überwiegenden Summanden mit kleinem  $r_a$  im Nenner selbst auch negativ werden, in der Nähe positiver Ladungen aus demselben Grunde positiv. Da es übrigens zur KenntniÙ des Feldes nur auf die Differentialquotienten von  $\varphi$  ankommt, kann man stets einen für das ganze Feld constanten positiven oder negativen Werth addiren, welcher zwar die Beträge von  $\varphi$  in gleichem MaaÙe überall verändert, beim Differenziren aber wegfällt und die richtigen Werthe der Kraftcomponenten somit nicht stört. Die Function  $\varphi$  selbst ist keine gerichtete GröÙe, sie hat in jedem nicht von einer Ladung eingenommenen Punkte einen endlichen eindeutigen Werth und mit Ausnahme jener singulären Punkte auch einen stetigen Verlauf.

Die Componenten der elektrischen Feldstärke nach den Coordinatenrichtungen findet man aus der Potentialfunction  $\varphi$  zufolge der Gleichungen (10) und (14) folgendermaÙen:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (15)$$

Die Componente  $\mathfrak{E}_i$  in einer beliebigen Richtung ist

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (15a)$$

Die Resultante hat den Werth  $\mathfrak{E} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ , welcher unabhängig von der Orientirung des Axensystems ist, obwohl die einzelnen Coordinatcomponenten davon abhängen. Die Richtungscosinus der Resultante gegen die Axen sind  $X/\mathfrak{E}$ ,  $Y/\mathfrak{E}$ ,  $Z/\mathfrak{E}$ ; auch ist

$$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, l); \text{ vergl. Gleichung (12)}. \quad (15b)$$

Wenn man also von einem Raumpunkt aus nach allen Richtungen hin den gleichen kleinen Schritt als ausgeführt denkt, so

werden die dabei gefundenen Componenten  $\mathfrak{E}_l$  den Cosinus der Winkel zwischen der Pfeilrichtung  $\mathfrak{E}$  und der Schrittrichtung  $dl$  proportional sein. Fällt die Richtung  $l$  mit  $\mathfrak{E}$  zusammen, so hat der Cosinus seinen größten Werth 1, die Componente ist gleich der Resultante und aus (15a) sieht man, daß dies die Richtung ist, in welcher der negative Differentialquotient von  $\varphi$  seinen größten positiven Betrag besitzt, also die Richtung, in welcher die Werte von  $\varphi$  am steilsten abfallen. In jeder auf dieser Richtung senkrechten ist  $\cos(\mathfrak{E}, l) = 0$ , es liegt in diesen Richtungen gar keine Componente  $\mathfrak{E}_l$  und deshalb hat nach (15a) die Function in diesen Richtungen kein Gefälle. Sucht man nach den Orten, an denen  $\varphi$  einen constanten Werth besitzt, so findet man dafür im Allgemeinen stetig gekrümmte Flächen, die Aequipotentialflächen oder Niveauflächen. Alle die Richtungen, in welchen wir kein Gefälle des Potentialwerthes finden, müssen also tangential zu den Aequipotentialflächen liegen, woraus direct weiter folgt, daß die resultierende Kraft überall senkrecht auf diesen Flächen steht. Aber nicht nur über die Richtung der Kraft erhält man hierdurch eine Anschauung, sondern auch über deren relative Größe an verschiedenen Stellen des Feldes. Verfolgt man nämlich zwei sehr nahe benachbart verlaufende Niveauflächen, für welche die beiden constanten Werthe von  $\varphi$  sich nur um eine sehr kleine Differenz unterscheiden, so sieht man ohne weiteres, daß diese beiden Flächen geringeren Abstand haben müssen an Stellen, wo das steilste Gefälle größer ist, ja der Normalabstand beider Flächen muß umgekehrt proportional diesem Gefälle, somit auch umgekehrt proportional der Größe der Kraft sein.

Bevor wir näher eingehen auf die mathematischen Eigenschaften der Potentialfunction, wollen wir in den nächsten zwei Paragraphen Betrachtungen einschieben über die Arbeits- und Energiegrößen in einem System elektrischer Ladungen, welche sich durch die Potentialfunction ausdrücken lassen.

### § 8. Arbeitsleistung bei der Bewegung eines geladenen Theilchens im elektrischen Felde.

Wir kehren noch einmal zu den Vorstellungen des § 5 zurück und bewegen das ausgewählte Theilchen  $e_0$  durch äußere Einwirkung langsam auf einer beliebig vorgeschriebenen Bahn durch den Raum. Die von den übrigen festen Ladungen  $e_1$  bis  $e_n$  herrührende Kraft wird dabei entweder mithelfen, so daß von außen eine Hemmung nöthig ist, um eine beschleunigte Bewegung zu verhindern, oder die

Kraft des Feldes wird sich der Bewegung widersetzen, so daß man von außen einen Antrieb braucht. Im ersten Falle giebt das Ladungssystem inclusive  $\epsilon_0$  Arbeit nach außen ab, im zweiten Falle nimmt es Arbeit von außen auf. Nur in dem besonderen Falle, daß der vorgeschriebene Weg senkrecht zur elektrischen Kraft verläuft, findet keines von beiden statt. Diese Arbeitsgrößen wollen wir nun aufsuchen, und zwar wollen wir in allen Fällen von Arbeit sprechen, welche das Ladungssystem nach außen abgiebt; diese ist dann im ersten Falle positiv, im zweiten negativ zu rechnen.

Definirt wird die Arbeit bei der Verrückung  $dl$  durch das Product aus dem Wege und der in dessen Richtung fallenden mechanischen Kraftcomponente; letztere ist in unserem Systeme die mit  $\epsilon_0 \cdot \mathfrak{E}_l$  bezeichnete Größe. Diese Arbeitsbeträge summiren sich algebraisch über alle Wegelemente, liefern daher für einen endlichen vorgeschriebenen Weg eine Summe, welche man schreiben kann:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dl \cdot \epsilon_0 \mathfrak{E}_l = \epsilon_0 \int_{(1)}^{(2)} dl \cdot \mathfrak{E}_l. \quad (16)$$

Hier soll die untere Grenze (1) den Anfangspunkt des Weges, die obere Grenze (2) dessen Endpunkt bezeichnen.

Bei einer beliebig vorgeschriebenen räumlichen Vertheilung des Vectors würde dieses Linienintegral durchaus von der Wegführung zwischen (1) und (2) in seinem Werthe beeinflusst werden, so daß die bloße Angabe der Grenzen zur Bestimmung nicht ausreicht. Bei unserem elektrostatischen Felde ist aber  $\mathfrak{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ , wo  $\varphi$  nach Gleichung (14) eine eindeutige und stetige Function im Raume ist. Setzen wir also nur voraus, daß der Weg nicht durch eine der festen Punktladungen hindurch führt (was sich ja schon durch die Anwesenheit der ponderablen Träger verbietet), so ist:

$$A = -\epsilon_0 \int_{(1)}^{(2)} dl \frac{\partial \varphi}{\partial l} = -\epsilon_0 (\varphi_2 - \varphi_1) = \epsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (16a)$$

Der Werth der Arbeit zeigt sich hiernach unabhängig von der Führung des Weges; er wird direct gemessen durch die Abnahme der Function  $\varphi$ , und diese ist gleich der Differenz der Werthe  $\varphi_1$  im Anfangspunkt und  $\varphi_2$  im Endpunkt. Nehmen wir die Ladung  $\epsilon_0$  positiv an, so ist die vom System abgegebene Arbeit positiv, wenn  $\varphi_1 > \varphi_2$  ist, wenn also die bewegliche Ladung zu Stellen

niedrigeren Potentialwerthes geführt wird, dagegen nimmt das System (inclusive  $e_0$ ) Arbeit von aussen auf, wenn das positive Theilchen zu Stellen höheren Potential gerückt wird. Bei Verrückungen in ein und derselben Aequipotentialfläche wird Arbeit weder abgegeben noch aufgenommen, dasselbe gilt, wenn (1) und (2) auf der nämlichen Aequipotentialfläche liegen, während der Zwischenweg diese Fläche verlässt. Daraus folgt noch im Besonderen, dass die Arbeitssumme gleich Null ist, wenn der Endpunkt mit dem Ausgangspunkt zusammenfällt, wenn also ein beliebiger geschlossener Weg durchlaufen wird. Es ergibt sich daraus die Unmöglichkeit mit elektrostatischen Kräften eine Arbeitsmaschine etwa dadurch zu treiben, dass man eine Ladung  $e_0$  fortdauernd im Kreise umlaufen lässt. Was dabei während einiger Theile des Umlaufs gewonnen wird, geht während der übrigen Theile genau wieder verloren.

Noch eine besondere Anwendung der Gleichung (16a) wollen wir betrachten. Legt man den Endpunkt (2) des Weges in sehr grosse Entfernung von allen geladenen Körpern, so nähert sich der Werth  $\varphi_2$  der Grenze Null, und die geleistete Arbeit bei dieser Wegführung des Theilchens wird  $A_\infty = e_0 \cdot \varphi_1$ . Besitzt ausserdem die bewegliche Ladung den Werth  $e_0 = +1$ , so wird dem Zahlenwerthe nach

$$A_\infty = \varphi_1, \quad (16b)$$

wenn man  $A_\infty$  in Erg (d. i.  $1 \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}$ ) und  $\varphi_1$  in absoluten elektrostatischen Potentialeinheiten (d. i.  $1 \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}$ ) misst. Es ist indessen zu beachten, dass diese einfache Gleichung nur für die Maasszahlen gilt, dass die Dimensionen aber erst dann gleich werden, wenn man die rechte Seite mit der absoluten elektrostatischen Ladungseinheit (d. i.  $1 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}$ ) erweitert. Es ergibt sich aus dieser Gleichung  $A_\infty = \varphi_1$  eine einfache Deutung des Potentialbegriffs: Den Werth des Potentials an einer Stelle eines elektrischen Feldes findet man, wenn man dorthin die positive Ladungseinheit versetzt denkt und die Arbeit misst, welche bei dessen Entführung aus dem Wirksamkeitsbereich der anderen Ladungen nach aussen abgegeben wird. Oder umgekehrt: Der Potentialwerth an einem Orte des Raumes ist numerisch gleich der Arbeit, welche man von aussen aufwenden muss, um ein mit der positiven Einheit beladenes Körperchen aus unendlicher Entfernung (in welcher weit und breit keine anderen Ladungen liegen) bis zu dem betreffenden Orte heranzuführen. An Stelle der unendlichen Entfernungen vom Ladungsbereich können auch andere im Endlichen gelegene Orte treten, von

welchen man weiß, daß in ihnen das Potential den Werth Null hat. Daß man Orte von dieser Eigenschaft mitunter leicht finden kann, sei an einem einfachen Beispiel gezeigt: Das feste Ladungssystem bestehe aus nur zwei Punkten, welche die entgegengesetzten gleichen Ladungen  $+e$  und  $-e$  tragen. Dann ist die Potentialfunction nach Gleichung (14)

$$\varphi = e \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

wo  $r_1$  den Abstand von dem positiven,  $r_2$  den Abstand von dem negativen Theilchen bedeutet. Dieser Ausdruck verschwindet nicht nur in unendlicher Entfernung, sondern auch in allen Punkten der Ebene, welche mitten zwischen den beiden Ladungen quer steht, weil dort überall  $r_1 = r_2$  ist. Es mag auch hier schon erwähnt werden, daß an jedem mit der für unsere Betrachtungen unendlich großen, feuchten Erdrinde in leitende Verbindung gesetzten Conductor das Potential gleich Null zu setzen ist; wenigstens ist dies in allen Fällen zulässig, in denen man nicht weit ausgedehnte Versuchsanordnungen zum Studium terrestrischer oder meteorologischer Potentialdifferenzen zu betrachten hat.

### § 9. Potentielle Energie eines Systems von vielen geladenen Punkten.

Im vorigen Paragraphen handelte es sich um Arbeitsgrößen, welche von einem elektrischen Ladungssystem abgegeben werden durch die Bewegung eines ausgewählten Theilchens  $e_0$ . Der Arbeitsvorrath ist die potentielle Energie aller der geladenen Theilchen inclusive  $e_0$  und hängt von sämtlichen Ortscoordinaten ab, nur ließen wir sie bis auf diejenigen des einen Punktes alle constant. Diese Beschränkung wollen wir jetzt aufheben und damit auch die Sonderstellung der Ladung  $e_0$ . Wir betrachten ein System von punktförmigen Ladungen, welche mit  $1, 2, 3, \dots, n$  numerirt sind. Für jedes Paar von Punkten mit verschiedenen Indices  $a$  und  $b$  kann man den Ausdruck  $\frac{e_a \cdot e_b}{r_{ab}}$  bilden, in welchem  $r_{ab}$  den Abstand beider Punkte bezeichnet. Läßt man nun sowohl  $a$  wie  $b$  alle Ordnungszahlen durchlaufen, so bekommt man eine ganze Schaar solcher Ausdrücke (nur die Fälle  $a = b$  sind auszuschließen) und jeder Ausdruck kommt zweimal vor, z. B.  $\frac{e_2 \cdot e_5}{r_{2,5}}$  sowohl für  $a = 2, b = 5$  als auch für  $a = 5, b = 2$ .

Die einfache Summe aller dieser Ausdrücke kann man daher folgendermaassen schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \frac{e_a \cdot e_b}{r_{a,b}} \quad a \text{ nicht} = b. \quad (17)$$

Sie ist eine Function sämtlicher Coordinaten der geladenen Punkte. Wir suchen ihren Differentialquotienten nach irgend einer einzelnen Coordinate, die wir mit  $x_i$  bezeichnen wollen. Alle Glieder der Doppelsumme, in welchen weder  $a$  noch  $b$  gleich dem Index  $i$  ist, fallen dabei weg, es bleiben nur diejenigen übrig, in denen  $a = i$  ist und diejenigen, in denen  $b = i$  ist, also zwei einfache Summen, welche aus dem Gesamttinhalt von  $\Phi$  herausgehoben sind.

Bezeichnen wir deren Wert mit  $\Phi_i$

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{b \text{ nicht } i} \frac{e_i \cdot e_b}{r_{i,b}} + \sum_{a \text{ nicht } i} \frac{e_a \cdot e_i}{r_{a,i}} \right\}.$$

Die beiden einfachen Summen sind aber identisch mit einander, daher kann man die Reihe der bei der Differentiation nach  $x_i$  zu beachtenden Glieder kürzer schreiben:

$$\Phi_i = e_i \sum_{a \text{ nicht } i} \frac{e_a}{r_{a,i}}. \quad (18)$$

Durch das Heraustreten des gemeinsamen Factors  $e_i$  hat der jetzt übrig gebliebene Summenausdruck die Form angenommen, welche wir bereits in Gleichung (14) aufgestellt haben, und welche schon vorher, z. B. in den Gleichungen (9), vorkam, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Coordinaten des Theilchens  $i$  an der Stelle der variablen Raumcoordinaten oder derer des früheren Theilchens  $0$  stehen. Diese Summe ist also das Potential, welches die elektrischen Ladungen nach Entfernung des Theilchens  $e_i$  an dem Orte dieses Theilchens erzeugen. Bezeichnen wir es mit  $\varphi_i$ , so können wir die Gleichung (18) schreiben:

$$\Phi_i = e_i \varphi_i. \quad (18 a)$$

Auch der vollständige Ausdruck  $\Phi$  läßt sich hieraus zusammensetzen, wenn man der Reihe nach  $i = 1, 2, \dots, n$  setzt und addirt. Es ist

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i \varphi_i. \quad (19)$$

Der Factor  $\frac{1}{2}$  ist auch hier nöthig, um nicht jedes Punktpaar doppelt zu zählen.

Wir hatten ein einzelnes bestimmtes  $\Phi_i$  abgesondert, um den Differentialquotienten von  $\Phi$  nach  $x_i$  zu bilden. Es ist nunmehr

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Wir wissen aber bereits, daß  $-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} e_i = X_i e_i$  die  $x$ -Componente der ponderomotorischen Kraft angeibt, welche das Theilchen mit der Ladung  $e_i$  von allen übrigen zusammen erfährt. Es ist mithin:

$$\left. \begin{aligned} X_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ \text{und ganz analog} \\ Y_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \\ Z_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die negativen Differentialquotienten der in Gleichung (17) aufgestellten Function  $\Phi$  nach den einzelnen Coordinaten des Systems liefern also die Componenten der inneren ponderomotorischen Kräfte, welche jene Coordinaten beschleunigen und denen durch äußere mechanische Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden muß, um das System in Ruhe zu halten.

Wir wollen uns nun das System elektrischer Punkte in einer gegebenen Lage oder Configuration vorstellen und sodann jedem Punkte eine kleine Verrückung ertheilen, welche vollständig angegeben wird durch die Variationen sämmtlicher Coordinaten. Diese seien für den Punkt  $a$  bezeichnet mit  $\delta x_a, \delta y_a, \delta z_a$ , so daß der Ort dieses Punktes nunmehr durch die Coordinaten  $x_a + \delta x_a, y_a + \delta y_a, z_a + \delta z_a$  bestimmt ist. Die Function  $\Phi$  verändert dabei ihren ursprünglichen Werth um einen kleinen Betrag  $\delta \Phi$ , den man die Variation von  $\Phi$  nennt. Sie hängt durchaus ab von der Wahl der Verrückungen und läßt sich durch diese linear und homogen ausdrücken, ganz so wie das Differential einer Function vieler Variabler:

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots$$

oder in Summenform:

$$\delta \Phi = \sum_{a=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial \Phi}{\partial y_a} \delta y_a + \frac{\partial \Phi}{\partial z_a} \delta z_a \right). \quad (21)$$

Hier hinein setzen wir die soeben gefundenen Bedeutungen der Differentialquotienten von  $\Phi$  als Kraftcomponenten und finden:

$$-\delta\Phi = \sum_{a=1}^n \{e_a (X_a \delta x_a + Y_a \delta y_a + Z_a \delta z_a)\}. \quad (21a)$$

Jeder einzelne Summand der rechten Seite stellt die mechanische Arbeit, welche die von den übrigen Ladungen (außer  $a$ ) herrührenden Abstofsungs- oder Anziehungskräfte bei der Verrückung des Punktes  $a$  leisten, denn wenn wir die Resultante von  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$  mit  $\mathfrak{E}_a$  und die aus  $\delta x_a$ ,  $\delta y_a$ ,  $\delta z_a$  resultirende Verrückung mit  $\delta l_a$  bezeichnen, endlich den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen  $\alpha$  nennen, so ist:

$$e_a (X_a \delta x_a + Y_a \delta y_a + Z_a \delta z_a) = (e_a \mathfrak{E}_a \cos \alpha) \cdot \delta l_a.$$

Der erste Factor rechts ist die in die Wegrichtung fallende Kraftcomponente; diese giebt, mit der Weglänge multiplicirt, die Arbeit bei der Verrückung des Theilchens  $a$ . Ueber alle  $a$  summirt erhalten wir die gesammte bei der Verrückung des Systems von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit  $A$ ; und diese ist nach Gleichung (21a) der negativen Variation der Function  $\Phi$  gleich  $-\delta\Phi = A$ . Mit anderen Worten:  $\Phi$  nimmt um so viel ab, als die elektrischen Kräfte bei der Verrückung Arbeit gespendet haben, oder falls die Verrückungen so gewählt sind, daß sie überwiegend entgegen den Richtungen führen, in welchen die inneren Kräfte die Ladungen zu treiben streben, so nimmt  $\Phi$  um so viel zu, als bei der Verrückung Arbeit von außen aufgewendet wurde. Die Function  $\Phi$  ist daher das Maass für den Arbeitsvorrath in dem System, sie stellt die potentielle Energie der elektrostatischen Kräfte dar, welche wir für ein einzelnes Punktpaar schon in § 4 aufgefunden haben.

Bei der Ableitung dieser Eigenschaft mußten wir die Variation der Coordinaten verschwindend klein voraussetzen, weil sonst der einfache Ausdruck für  $\delta\Phi$  in Gleichung (21) nicht ausreichend gewesen wäre. Diese Beschränkung kommt im Wesentlichen darauf hinaus, daß man die auf ein Theilchen wirkende Kraft auf dem ganzen Verrückungswege constant setzen darf, auch unbeeinflusst durch die gleichzeitigen Verrückungen der anderen Punkte. Diese Beschränkung können wir jetzt fallen lassen. Jede endliche Configurationsänderung des Systems kann man zu Stande gebracht denken durch die Aufeinanderfolge sehr vieler kleiner, für welche der Satz jetzt bewiesen ist. Diese Zwischenzustände sind sogar auf unendlich mannigfaltige Weise wählbar, vorgeschrieben muß nur die Anfangs-

configuration und die Endconfiguration sein. Die  $\delta \Phi$  der einzelnen Theilprozesse summiren sich dabei zu einem endlichen Betrage, dessen Werth gleich der Differenz zwischen dem Endwerth  $\Phi_2$  und dem Anfangswerth  $\Phi_1$  sein muſs. Diese beiden Werthe kann man aber aus den Coordinaten der Anfangs- und Endlage berechnen, ohne daſs man die Zwischenlagen zu kennen braucht. Der Gleichung  $-\delta \Phi = A$  für kleine Verrückungen entspricht daher für endliche Lagenänderungen folgende:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = A \quad (22)$$

Die Abnahme von  $\Phi$  miſt die vom Systeme geleistete, nach auſen abgegebene Arbeit.

Wählt man als Endlage eine vollständige Zerstreung aller Ladungen in unendlicher Ferne, so daſs alle gegenseitigen Kraftwirkungen verschwinden, so wird auch der Ausdruck  $\Phi$  in Gleichung (17) wegen der unendlich groſsen  $r_{ab}$  in den Nennern verschwinden. Man darf dann  $\Phi_2 = 0$  setzen und es wird:

$$\Phi_1 = A_\infty \quad (22a)$$

Dem entsprechend kann man sagen: Die potentielle Energie eines elektrischen Systems ist der Werth der Arbeit, die man von auſen gebraucht hat, um die im Unendlichen verstreuten Ladungen gegen die Abstofsungskräfte zusammen zu führen zu der gegebenen Configuration. Nach dieser Auffassung enthält die potentielle Energie keine willkürliche additive Constante (der Ausdruck in Gleichung (17) gleichfalls nicht). Der Arbeitsvorrath kann positiv, Null, auch negativ sein, ohne daſs in letzteren beiden Fällen das System auſer Stande wäre, noch Arbeit zu leisten. Führt man z. B. ein positiv und ein negativ geladenes Theilchen aus unendlicher Entfernung zusammen auf einen endlichen Abstand, so sinkt die potentielle Energie von Null beginnend ins Negative hinab, die Anziehungskraft arbeitet bei der Annäherung. Das System kann aber immer noch mehr Arbeit abgeben, wenn man den Ladungen gestattet sich, noch mehr zu nähern.

Um die Vorstellung negativer Arbeitsvorräthe zu vermeiden, kann man nun zu der Function  $\Phi$  immer eine hinreichend groſse Constante hinzu addiren, ohne daſs die Bedeutung der Function dadurch geändert wird. In der Gleichung (17) und auch in (22a) muſs dann freilich der Werth dieser Constanten rechts als Summand zugefügt werden, aber alle Beziehungen, in denen nur Differenzen zweier Werthe von  $\Phi$  oder nur Differentialquotienten von  $\Phi$  vor-

kommen, bleiben ungeändert durch eine additive Constante zu  $\Phi$ , so z. B. die Gleichung (22) und die Ausdrücke der Kraftcomponenten in den Gleichungen (20).

Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß der Gesamtbetrag der Energie eines elektrostatischen Feldes stets positiv ist, auch ohne daß man noch eine Constante hinzufügt. Bisher haben wir noch nicht von den Arbeitsbeträgen gesprochen, welche zur Concentrirung der Punktladungen notwendig sind. Näheres darüber siehe § 25.

### § 10. Die Potentialfunction eines Systems elektrischer Punkte genügt der Differentialgleichung von Laplace.

Nachdem wir die potentielle Energie eines Systems elektrischer Punkte kennen gelernt haben und auch gefunden haben, daß diese sich als einfache Summe von Potentialfunctionen, jede multiplicirt mit einem elektrischen Quantum, darstellen läßt [Gleichung (19)], wollen wir zu den Potentialfunctionen als den einfacheren Begriffen zurückkehren und weitere charakteristische Eigenschaften derselben aufsuchen. Zuerst wollen wir deductiv zeigen, daß  $\varphi$  als Function der Variablen  $x, y, z$  einer bestimmten sehr allgemeinen Differentialgleichung genügt.

Denken wir uns nur eine einzige positive Ladung  $e_1$  in dem Raumpunkt  $x_1, y_1, z_1$  festliegend, so erzeugt diese ein elektrostatisches Feld, dessen Pfeile überall radial von dem geladenen Punkte wegweisen, und an Länge mit wachsendem Abstand abnehmen, wie das reciproke Quadrat dieses Abstandes. Die Aequipotentialflächen sind concentrische Kugelflächen um den geladenen Punkt. Die Potentialfunction, die wir  $\varphi_1$  nennen, ist:

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{r_1}, \quad r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}. \quad (23)$$

Wir wollen nun die Differentialquotienten von  $\varphi_1$  nach den darin steckenden Variablen  $x, y, z$  bilden. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\frac{e_1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} = -e_1 \frac{x - x_1}{r_1^3} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= -e_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -e_1 \frac{z - z_1}{r_1^3} \end{aligned} \right\} \quad (23 a)$$

Diese Ausdrücke sind mit Ausnahme der Stelle  $x_1 y_1 z_1$  im ganzen Raume endlich und stetig.

Differenziren wir nochmals nach den gleichgerichteten Coordinaten, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= -e_1 \frac{1}{r_1^3} + e_1 \frac{3(x-x_1)^2}{r_1^5} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= -e_1 \frac{1}{r_1^3} + e_1 \frac{3(y-y_1)^2}{r_1^5} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= -e_1 \frac{1}{r_1^3} + e_1 \frac{3(z-z_1)^2}{r_1^5} \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

Auch diese zweiten Differentialquotienten sind mit Ausnahme derselben einen Stelle im Raume überall endlich und stetig. Bilden wir nun die Summe dieser letzten drei Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \\ = -e_1 \frac{3}{r_1^3} + e_1 \frac{3\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\}}{r_1^5} \end{aligned}$$

Da aber die geschweifte Klammer im Zähler des zweiten Summanden der rechten Seite gleich  $r_1^2$  ist, welches sich gegen zwei Factoren  $r_1$  im Nenner hebt, so ist das zweite Glied  $+e_1 \frac{3}{r_1^3}$ , der ganze Ausdruck mithin gleich Null:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (24)$$

Dies ist eine sehr allgemeine partielle homogene lineare Differentialgleichung, deren Integrale zuerst von LAPLACE studirt worden sind, und die man deshalb die LAPLACE'sche Differentialgleichung nennt. Die Summe der drei zweiten Differentialquotienten, für welche das abkürzende Zeichen  $\Delta \varphi_1$  (oder auch  $\nabla^2 \varphi_1$ ) in Gebrauch ist, wird auch wohl als LAPLACE'sche Operation bezeichnet. Dieselbe ist hier bezogen auf ein bestimmtes Coordinatensystem, es sei aber gleich erwähnt, dafs sie eine davon unabhängige Bedeutung hat [vergl. z. B. Band II, S. 111, Gleichung (54e)], und auch in anderen als cartesianischen Coordinaten ausgedrückt werden kann.

Für unsere Potentialfunction  $\varphi_1$  muß also die Eigenschaft

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad (24a)$$

an allen Stellen des Raumes erfüllt sein. Nur an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$ , wo die felderzeugende Ladung  $e_1$  ihren Sitz hat, können wir nichts

darüber aussagen, denn dort wird der mathematische Werth von  $\varphi_1 = e_1/r_1$  unendlich und dessen Differentialquotient, die in (23a und b) gebildet wurden, werden dies in noch höherem Grade und verlieren auch jeden bestimmten Sinn. Physikalisch können wir auch nichts weiter aussagen, als dafs es geladene Punkte ohne jede Ausdehnung nicht giebt, dafs daher das Potential dicht um das Centrum herum einen anderen physikalischen Verlauf haben wird, als der mathematische Ausdruck  $e_1/r_1$  angiebt.

Haben wir nun noch an anderen Stellen  $x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \dots$  Punkte mit den Ladungen  $e_2, e_3 \dots$  und nennen wir die Abstände von diesen Punkten  $r_2, r_3, \dots$ , so gelten für die Potentialfunctionen, welche jeder dieser Ladungen für sich allein zugehören, also für  $\varphi_2 = \frac{e_2}{r_2}$ ,  $\varphi_3 = \frac{e_3}{r_3}$ ,  $\dots$  Differentialgleichungen von der nämlichen Form, jede hat ihre Ausnahmestelle in dem geladenen Centrum. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_2 &= 0 \text{ überall aufser an der Stelle } x_2, y_2, z_2, \\ \Delta \varphi_3 &= 0 \text{ überall aufser an der Stelle } x_3, y_3, z_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die gleichzeitige Anwesenheit eines ganzen Systems von Punktladungen erzeugt eine Potentialfunction

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3} + \dots$$

In jedem geladenen Punkte wird einer der rechtsstehenden Summanden unendlich und damit die ganze Summe  $\varphi$  ebenfalls unendlich.

Wir wollen nun  $\Delta \varphi$  bilden. Da die Operation  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  einen linearen homogenen Ausdruck liefert, ist  $\Delta$  von einer Summe gleich der Summe der  $\Delta$  von den einzelnen Summanden, also:

$$\Delta \varphi = \Delta \frac{e_1}{r_1} + \Delta \frac{e_2}{r_2} + \Delta \frac{e_3}{r_3} + \dots$$

Die Glieder rechts sind, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen überall gleich Null, nur gilt dies für das erste Glied nicht an der Stelle, wo  $e_1$  liegt, für das zweite nicht an der Stelle  $e_2$ , und so weiter. Es folgt also

$$\Delta \varphi = 0 \tag{25}$$

mit Ausnahme aller Stellen 1, 2, 3,  $\dots$

Die Potentialfunction eines Systems geladener Punkte genügt also im ganzen Raume mit Ausnahme der Orte der Punktladungen selbst der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

### § 11. Continuirlich verbreitete Ladungen in räumlichen Bezirken.

Wir wollen nun dazu übergehen, uns an Stelle der diskreten elektrisch geladenen Punkte continuirlich verbreitete Ladungen vorzustellen. An ponderabler Substanz müssen wir die Ladungen stets haftend denken. Wir wollen auch für den Anfang annehmen, daß die Vertheilungen unverrückbar festgehalten werden, daß sie sich also nicht etwa erst zu einem Gleichgewichtszustand der elektrischen Kräfte zurechtschieben, wie dies in metallischen oder flüssigen Körpern geschieht, in welchen entweder die Elektricitäten oder aber die ponderablen Träger frei fließen können. Wir denken uns also die Träger als feste vollkommene Isolatoren und die Vertheilungen der Elektricitäten als willkürlich und unveränderlich vorgeschrieben. Die erste mögliche Vorstellung ist die, daß die Elektricität mit endlicher räumlicher Dichtigkeit in einem oder mehreren Körpern verbreitet ist; ein endliches Quantum ist dann in einem endlichen Volumen enthalten; die Raumdichtigkeit  $\epsilon$  der Ladung an einer Stelle ist der Grenzwert, dem sich das Verhältniß des elektrischen Quantums zum damit ausgefüllten Volumen bei verschwindender Größe des letzteren nähert. Dadurch wird bei bekannter Vertheilung die Dichtigkeit  $\epsilon$  eine bekannte Function des Ortes im geladenen Körper. Diesen Ort wollen wir durch die Cartesischen Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnen. Stetig braucht die Function  $\epsilon$  nicht zu sein, aber wir wollen sie als überall endlich voraussetzen.

Der Dimension nach ist die elektrische Raumdichtigkeit gleich Elektricitätsmenge dividirt durch Volumen, also im elektrostatischen Maaßsysteme nach Gleichung (2)

$$\epsilon = [L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}] \cdot \quad (26)$$

Ihre Einheit im C.G.S.-System ist eine außerordentlich geringe Größe, da eine Ladungseinheit, deren Kleinheit am Schlusse von § 2 bereits geschildert wurde, ein ganzes Cubikcentimeter ausfüllt.

Wenn wir nun die Potentialfunction des elektrischen Feldes suchen, welches eine räumlich stetige Elektricitätsvertheilung erzeugt, so können wir die bei den Systemen geladener Punkte aufgestellten Begriffe und Formeln auf den vorliegenden Fall übertragen.

An die Stelle eines geladenen Punktes tritt hier ein geladenes Volumelement, in welchem das Quantum  $\varepsilon \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$  enthalten ist. Liegt dieses an der Stelle  $\xi, \eta, \zeta$ , so erzeugt es in einem Raumpunkt  $x, y, z$ , dessen Abstand von dem Volumelement also

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

ist, ein Potential  $d\varphi$  von der Größe

$$d\varphi = \frac{\varepsilon \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta}{r}.$$

An die Stelle der Summation über die Potentiale, die von vielen geladenen Punkten herrühren, tritt hier die Integration des Ausdrucks  $d\varphi$  über alle geladenen Volumelemente:

$$\varphi = \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{\varepsilon}{r}. \quad (27)$$

Hier kommen die Integrationsvariablen  $\xi, \eta, \zeta$  sowohl in der Function  $\varepsilon$ , als auch in  $r$  vor, während in  $r$  die Ortscoordinaten  $x, y, z$  des Punktes, für welchen der Wert  $\varphi$  gesucht wird, die Rolle fester Parameter spielen. Darum ist auch  $\varphi$  eine Function von  $x, y, z$ , während die Integrationsvariablen durch die festen Grenzen des bestimmten Integrals verdrängt sind.

Liegt der Punkt  $x, y, z$  außerhalb des geladenen Körpergebiets an einer von Elektrizität leeren Stelle, wo  $\varepsilon = 0$  ist, so sind alle im Integranden vorkommenden Abstände  $r$  von endlicher Größe; das Potential  $\varphi$  ist dort ebenso sicher endlich und stetig, wie es bei punktförmigen Ladungen an leeren Stellen ist. Es läßt sich auch auf analoge Weise, wie im vorigen Paragraphen beweisen, daß das Potential einer continuirlich räumlichen Elektrizitätsvertheilung in den von Ladungen freien umgebenden Raumtheilen der LAPLACE'schen Differentialgleichung folgt, denn die Operation  $\Delta$ , für die Parameter  $x, y, z$  an dem Integral ausgeführt, kann, da diese Parameter nicht in den Grenzen vorkommen, an dem Integrandus vorgenommen werden:

$$\Delta \varphi = \Delta \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{\varepsilon}{r} = \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \Delta \left( \frac{\varepsilon}{r} \right) = 0. \quad (27a)$$

Liegt dagegen der Punkt  $x, y, z$  innerhalb des geladenen Gebietes, so werden die direkten Uebertragungen aus der Theorie des Potentials von Punktladungen hinfällig, weil  $r$  für denjenigen Theil

der Integralsumme, in welchem der Punkt selbst liegt, verschwindend klein, der Integrand also unendlich groß wird.

Wir wollen nun zeigen, daß trotzdem bei endlicher Dichtigkeit  $\varepsilon$  das Integral  $\varphi$  einen bestimmten endlichen Werth behält. Wir führen statt der rechtwinkligen Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  ein Polarcordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt im Innern des geladenen Gebietes an der Stelle  $x, y, z$  liegt, für welche wir den Werth von  $\varphi$  suchen. Dann ist

$$\begin{aligned}\xi - x &= r \cos \vartheta, \\ \eta - y &= r \sin \vartheta \cdot \cos \eta, \\ \zeta - z &= r \sin \vartheta \cdot \sin \eta\end{aligned}$$

und das Volumelement ist

$$d\tau = dr \cdot d\vartheta \cdot d\eta \cdot r^2 \sin \vartheta.$$

Mithin

$$\varphi = \iiint dr d\vartheta d\eta r^2 \sin \vartheta \cdot \frac{\varepsilon}{r} = \iiint dr d\vartheta d\eta \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \varepsilon. \quad (28)$$

Legen wir um den Anfangspunkt eine Kugelfläche mit dem kleinen Radius  $\rho$ , so wird das Integrationsgebiet dadurch in den Raum außerhalb und innerhalb der Kugelfläche zerschnitten und dem entsprechend zerfällt auch das Raumintegral  $\varphi$  in zwei Theile. Derjenige Theil, welcher die Integration über den äußeren Raum enthält, ist sicher endlich, denn die Stelle, an der  $r=0$  wird, ist ja durch die kleine Kugel herausgeschnitten. Wir haben es daher nur zu thun mit dem Integral über den Kugelraum selbst, welches wir  $\varphi_e$  nennen:

$$\varphi_e = \int_0^{\rho} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\eta \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \sin \vartheta. \quad (28a)$$

Der Mittelwerth der elektrischen Dichtigkeit in der Kugel,  $\bar{\varepsilon}$ , ein nach unseren Voraussetzungen endlicher Betrag, kann vor das Integral gesetzt werden, welches sich dann leicht ausführen läßt

$$\varphi_e = \bar{\varepsilon} \cdot 2\pi \int_0^{\rho} r dr \cdot \int_0^{\pi} d\vartheta \cdot \sin \vartheta = 2\pi \bar{\varepsilon} \rho^2. \quad (28b)$$

Aus dem Factor  $\rho^2$  erkennt man, daß mit verschwindendem Radius  $\rho$  auch der Integralwerth über das Innere der Kugel gegen Null strebt und damit ist bewiesen, daß das Potential räumlich verbreiteter Ladungen auch im Inneren der geladenen Bereiche

endlich bleibt. Wir können den Satz sogar noch erweitern, indem wir zeigen, daß die elektrische Dichtigkeit in einem Punkte sogar in gewisser Weise unendlich werden darf, ohne daß dort für  $\varphi$  das Gleiche gilt. Setzen wir z. B. folgende Vertheilung an:

$$\varepsilon = \frac{A}{r^\kappa}, \quad (29)$$

wo  $A$  eine Constante und  $\kappa$  eine positive Zahl ist, so erhalten wir im Nullpunkt  $\varepsilon = \infty$ . Berechnen wir aber  $\varphi_e$  nach Gleichung (28a)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e &= \int_0^e dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\eta \cdot r \cdot \frac{A}{r^\kappa} \cdot \sin \vartheta = 2\pi \cdot 2A \int_0^e dr \cdot r^{1-\kappa} \\ &= \frac{4\pi A}{2-\kappa} \cdot \rho^{2-\kappa}. \end{aligned} \right\} (29a)$$

Wenn nur  $2-\kappa$  ein positiver Exponent ist, wenn also  $\kappa$  kleiner als 2 ist, verschwindet dieser Ausdruck  $\varphi_e$  mit verschwindendem  $\rho$ , und das Potential  $\varphi$  bleibt in jenem Punkte endlich, obwohl die Dichtigkeit der Elektrizität dort unendlich wird.

Nun wollen wir die ersten Differentialquotienten des Potentials  $\varphi$  nach den Variablen  $x, y, z$  betrachten, welche mit negativem Vorzeichen versehen, die Componenten der elektrischen Feldstärke oder Kraft angeben. Da jede dieser Variablen, z. B.  $x$ , nur als Parameter in dem Nenner  $r$  des Integrandus vorkommt, so wird die Differenzirung des ursprünglichen Ausdrucks  $\varphi$  in Gleichung (27) unter dem Integralzeichen ausgeführt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \iiint d\tau \cdot \varepsilon \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = - \iiint d\tau \cdot \varepsilon \frac{x - \xi}{r^3} = + \iiint d\tau \cdot \frac{\varepsilon \cos \vartheta}{r^2}.$$

Setzen wir wieder das Volumelement des Polarcordinatensystems ein, so hebt sich  $r^2$  fort und es bleibt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \iiint dr d\vartheta \cdot d\eta \cdot \varepsilon \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (30)$$

also ein endlicher Betrag. Würde man auch hier das Raumintegral theilen in den Beitrag der kleinen Kugel vom Radius  $\rho$  und des äußeren Raumes, so würde ersteres proportional der ersten Potenz von  $\rho$  verschwinden.

Aehnliche Resultate würde man für  $\partial \varphi / \partial^2 y$  und  $\partial \varphi / \partial^2 z$  finden, wenn auch dabei wegen der Lage der Polaraxe noch Kreisfunctionen des Längenwinkels  $\eta$  mit eingehen würden, welche aber als echte Brüche die Größenordnung der Integrale nicht verändern können. Wir ziehen daher den Schluss, dafs auch die elektrischen Kräfte im Inneren räumlich geladener Gebiete endlich bleiben und bestimmte Intensität und Richtung besitzen.

Auch hier kann sogar die Dichtigkeit  $\varepsilon$  noch an einzelnen Punkten über alle Grenzen wachsen, ohne dafs die Feldstärke das Gleiche thut. Setzen wir wieder

$$\varepsilon = \frac{A}{r^\alpha}$$

und integriren über den kleinen Kugelraum um die Unstetigkeitsstelle von  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_0^\rho dr \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \frac{A}{r^\alpha} = 2\pi A \rho^{1-\alpha} \cdot \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (31a)$$

Dieser Ausdruck verschwindet mit  $\rho$ , sobald der Exponent  $1 - \alpha$  positiv ist, sobald also  $\alpha$  kleiner als 1 ist. Dabei kann also die Dichtigkeit immer noch im Nullpunkt unendlich werden wie eine echt gebrochene Potenz von  $r$ . Auf einen zweiten Umstand,

dafs nämlich das übrig gebliebene  $\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$  ist, wollen

wir kein besonderes Gewicht legen. Das rührt nur daher, dafs wir den Abfall der Dichtigkeit  $\varepsilon$  nach allen Richtungen radial symmetrisch angesetzt haben. Bei solcher Vertheilung kann freilich im Symmetriecentrum keine Kraft nach irgend einer Seite zu Stande kommen, weil sich diametral gegenüberliegende gleiche Ladungen in ihrer Wirkung auf das Centrum stets aufheben, sie mögen so stark sein, als beliebt.

Gehen wir nun aber zu den zweiten Differentialquotienten von  $\varphi$  über, welche uns wegen der Laplace-Gleichung interessiren, so stoßen wir selbst bei endlicher räumlicher Dichtigkeit auf Hindernisse. Der im Volumelement des Polarcoordinatensystems vorkommende Factor  $r^2$  reicht nicht mehr hin, die im Nenner bei den Differentialquotienten auftretenden Potenzen von  $r$  aufzuheben, sondern es bleibt  $1/r$  im Integranden zurück. Dieses über die kleine Kugel

integriert, giebt aber  $\int_0^e \frac{dr}{r} = \frac{e}{0} \log \text{nat } r$ , was den unbestimmten Werth

$\infty - \infty$  annimmt. Man kann also bei den zweiten Differentialquotienten des Potentials nicht mehr den Schluss ziehen, daß der Beitrag der kleinen Kugel zugleich mit deren Radius verschwindet. Dasselbe gilt dann auch von der Summe der zweiten Differentialquotienten, welche mit  $\Delta \varphi$  bezeichnet wurde. Zerschneiden wir also das Volumintegral  $\varphi$  in einen Teil  $\varphi_e$ , erstreckt über den Raum der kleinen Kugel, und einen zweiten  $\varphi$  über den äußeren geladenen Raum, so ist sicherlich wie in (27a) gezeigt:  $\Delta \varphi' = 0$ . Über  $\Delta \varphi_e$  aber können wir nichts aussagen, und deshalb auch über  $\Delta \varphi$  nicht. Wir werden nachher sehen (was LAPLACE noch nicht erkannt zu haben scheint), daß thatsächlich an Stellen mit räumlicher elektrischer Dichtigkeit das  $\Delta \varphi$  einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

In dem Falle, daß die Dichtigkeitsvertheilung in einem Punkte auf Null heruntergeht, läßt sich indessen zeigen, daß das Integral über die kleine Kugel mit dieser schwindet.

Setzen wir z. B.  $\varepsilon = A \cdot r^\varkappa$ , wo  $\varkappa$  eine positive Zahl ist, so wird dadurch eine von Null anwachsende radial gleichmäßige Vertheilung dargestellt. In dem Integranden, der vorher  $\int \frac{dr}{r}$  enthielt, bekommen

wir jetzt  $\int \frac{dr}{r} r^\varkappa = \int dr r^{\varkappa-1} = \frac{1}{\varkappa} r^\varkappa$ , also eine positive Potenz

von  $r$ , welche bewirkt, daß der Antheil der kleinen Kugel für  $\rho = 0$  verschwindet. Je kleiner die Zahl  $\varkappa$  gewählt wird, um so steiler ist der Anstieg der Dichtigkeit um die Nullstrecke herum und da wir  $\varkappa$  als echten Bruch ansetzen dürfen, so ist ein sehr schroffer Uebergang von der Dichtigkeit Null in dem betrachteten Punkte zu endlichen Werthen verträglich damit, daß im Centrum  $\Delta \varphi = 0$  bleibt.

Zu je höheren Differentialquotienten von  $\varphi$  man übergeht, um so höhere Potenzen von  $r$  treten im Nenner des Integranden auf. Ueber den Beitrag, den das Integral über den verschwindenden Kugelraum zu einem dieser höheren Differentialquotienten liefert, kann man nichts aussagen; er kann endlich, unendlich und unstetig wechseln.

Fassen wir nochmals die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen: Bei endlicher räumlicher Dichtigkeit der Electricität haben die in unendlich geringer Entfernung von dem betrachteten Punkt  $x, y, z$  gelegenen Ladungen einen verschwindend

kleinen Einfluß auf den Werth des Potentials  $\varphi$  und seiner ersten Differentialquotienten, welche die Feldstärke messen. Diese Größen bleiben daher im Inneren geladener Bereiche endlich. Es folgt daraus sogar direct, daß sie sich auch stetig verändern müssen, selbst an Stellen, wo  $\epsilon$  unstetig ist, z. B. wenn man mit dem Punkte  $x, y, z$  aus leerem Gebiet in geladenes übertritt. Die zweiten Differentialquotienten und namentlich das  $\Delta\varphi$  wird aber in seinem Werthe empfindlich beeinflusst durch die in unendlich kleinem Raum um den betrachteten Punkt herumliegenden Ladungen, also durch den lokalen Werth der Dichtigkeit  $\epsilon$ . An Stellen, wo dieser sich unstetig ändert, z. B. an der Grenzfläche zwischen leerem und geladenem Gebiet, werden daher auch Sprünge von  $\Delta\varphi$  zu erwarten sein. Mehr läßt sich einstweilen nicht darüber aussagen.

### § 12. Continuirlich verbreitete Ladungen auf Flächen.

Eine zweite Möglichkeit, continuirlich verbreitete elektrische Ladungen sich vorzustellen, besteht darin, daß man die Elektrizität auf vorgeschriebenen Flächen ausgebreitet denkt derart, daß ein endliches Quantum der Ladung ein endliches Flächenstück bedeckt. Der Quotient aus der Ladung, dividirt durch die bedeckte Fläche, nähert sich für verschwindende Größe der letzteren an jeder Stelle der Fläche einem festen endlichen Grenzwert, welcher die Flächendichtigkeit  $e$  der Elektrizität genannt wird. Wir wollen auch hier zunächst voraussetzen, daß die Vertheilung unverrückbar von der Fläche festgehalten werde, sich nicht etwa erst unter Wirkung der elektrischen Kräfte darauf zu einer Gleichgewichtslage zurechtschiebe; dann ist  $e$  als eine vorgeschriebene Function des Ortes auf der Fläche zu behandeln, ein einzelnes Flächenelement  $ds$  enthält dann das Ladungsquantum  $de = e \cdot ds$ .

Die Dimension der Flächendichtigkeit im elektrostatischen Maafsystem findet man, indem man die elektrostatische Dimension der Ladung, Gleichung (2), dividirt durch die Dimension  $L^2$  der Fläche. Es ist mithin

$$e = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]. \quad (32)$$

Ihre Einheit im C.G.S.-System bildet ein über ein Quadratcentimeter verbreitetes Einheitsquantum.

Das Potential einer Flächenbelegung kann man ebenso berechnen wie dasjenige von punktförmigen Ladungen  $eds$ ; an Stelle der Summation tritt hier eine Integration über sämtliche geladenen

Flächen,  $r$  bezeichne den Abstand der einzelnen Flächenelemente  $ds$  von dem Punkte  $x, y, z$ , in welchem  $\varphi$  gesucht wird. Es ist dann

$$\varphi = \iint \frac{e \cdot ds}{r}. \quad (33)$$

Dieser Ausdruck ist endlich und verläuft sicherlich stetig, so lange der Punkt in endlichem Abstand von der belegten Fläche bleibt. Nähert er sich aber der Fläche bis zu einem verschwindenden Abstand oder rückt er gar in die Fläche selbst, so wächst der Integrand für die nächstbenachbarten Flächenelemente über alle Grenzen. Es bedarf dann einer besonderen Untersuchung, um zu erkennen, ob auch dann  $\varphi$  endlich und stetig bleibt.

Wir denken den Punkt  $P$  (siehe die perspectivische Ansicht Figur 2), in welchem  $\varphi$  gesucht werden soll, in sehr geringem Ab-

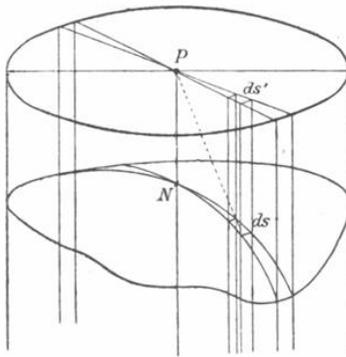


Fig. 2.

stände von der geladenen Fläche, fallen von ihm aus die Normale  $PN$  und legen um sie als Axe einen Kreiscylindermantel vom Radius  $\rho_0$ . Dieser schneidet aus der Fläche ein rund umgrenztes Stück heraus. Dieselbe Construction ist auch denkbar für den Fall, daß der Punkt  $P$  genau in der geladenen Fläche liegt, sich also mit  $N$  deckt. Zertheilen wir nun das Integral für  $\varphi$  [Gleichung (33)] ebenso, wie die geladene Fläche, so leuchtet ein, daß der über die außerhalb

des herausgeschnittenen Stückes liegenden Flächenbelegungen erstreckte Antheil endlich und stetig bleibt, selbst wenn  $P$  nach  $N$  rückt, weil eben die über alle Grenzen wachsenden Summanden darin fehlen. Wir haben es daher nur mit dem Integral über das im Inneren des Cylinders gelegene Stück der Fläche zu thun. Wir führen in der durch  $P$  gelegten Querschnittsebene, welche also zur Tangentialebene wird, wenn  $P$  nach  $N$  rückt, Polarcordinaten ein: Radius  $\rho$  und Azimuth  $\vartheta$ . Das Flächenelement in dieser Ebene wird:

$$ds' = \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta. \quad (34)$$

Die Flächenelemente  $ds$  auf der geladenen, im Allgemeinen krummen Fläche wählen wir so, daß deren Projectionen auf die Querschnittsebene sich mit den soeben angegebenen  $ds'$  decken, vergl. Figur 2.

Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel eines  $ds$  gegen die Grundebene, so ist  $ds \cdot \cos \alpha = ds'$ , oder

$$ds = \frac{\rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta}{\cos \alpha}, \quad (34 a)$$

mithin der über das herausgeschnittene Flächenstück erstreckte Theil des Integrals

$$\varphi_0 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho_0} d\rho \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \frac{e}{\cos \alpha}. \quad (35)$$

Nun kann auf keine Weise  $\rho$  gröfser werden als  $r$ , der Bruch  $\rho/r$  also nie gröfser als 1; im Allgemeinen ist vielmehr immer  $\rho/r < 1$ . In Figur 2 ist  $\rho$  der Abstand des  $ds'$  von  $P$ , während  $r$  durch die punktirte Linie von  $P$  nach  $ds$  gegeben ist. Rückt aber  $P$  nach  $N$  und hat die Fläche stetige Krümmung, so nähert sich  $\rho/r$  für kleine Abstände dem Werthe 1 so stark, dafs man es als Factor im Integranden weglassen darf, was wir jetzt auch thun wollen. In allen Fällen wird durch Unterdrückung dieses Factors der Werth von  $\varphi_0$  höchstens vergrößert, niemals aber verkleinert, und in dem Falle  $P = N$  überhaupt nicht alterirt.

Das Integral  $\varphi_0$  in (35) erscheint dann als bestimmtes Doppelintegral mit endlichen Grenzen für die Variablen  $\vartheta$  und  $\rho$ . Der Integrand ist  $\frac{e}{\cos \alpha}$ , also ebenfalls endlich, wenn nicht in dem engbegrenzten Flächenstück bereits Neigungen von einem rechten Winkel gegen die Tangente im Mittelpunkt vorkommen. Das ist aber bei stetig gekrümmten Flächen ausgeschlossen, vielmehr wird dann der  $\cos \alpha$  bei hinreichend kleinem  $\rho_0$  überall nahe gleich 1 sein, so dafs man ihn ebenfalls ohne Fehler weglassen kann. Läfst man endlich den Cylinderradius  $\rho_0$  kleiner und kleiner werden, so kann man statt der Variablen  $e$  einen festen Mittelwerth  $\bar{e}$  setzen, der jedenfalls endlich bleibt, und man erhält den Grenzwert:

$$\varphi_0 = 2\pi \rho_0 \cdot \bar{e},$$

welcher mit  $\rho_0$  gegen Null abnimmt. Damit ist bewiesen, dafs  $\varphi$  endlich und stetig bleibt, auch wenn der Punkt durch die Fläche hindurchtritt an einer Stelle, in welcher Elektrizität mit endlicher Flächendichtigkeit verbreitet ist. Es wurde eben der Umstand benützt, dafs bei stetig gekrümmten Flächen sowohl  $\rho/r$  wie  $\cos \alpha$  sich der 1 nähern, so dafs man beide Factoren weglassen darf. Es sei erwähnt, dafs das Gleiche auch gilt für die (nicht stetig gekrümmte)

Spitze einer Kegelfläche. Bei dieser nähern sich jene beiden Factoren zwar nicht der 1, aber es ist dann  $\frac{\rho}{r} = \cos \alpha$ , deshalb heben sich beide gegeneinander.

Das Integral  $\varphi_0$  in Gleichung (35) über den Flächenausschnitt verschwindet mit  $\rho_0$  sogar noch dann, wenn der Integrand in gewisser Weise unendlich wird.

Nehmen wir z. B. folgende Vertheilung an:

$$\frac{\rho}{r} \cdot \frac{e}{\cos \alpha} = \frac{A}{\rho^\kappa}, \quad (36)$$

welche für positives  $\kappa$  im Centrum unendlich wird, so ist:

$$\varphi_0 = A \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho^\kappa} = 2\pi A \cdot \rho_0^{1-\kappa}, \quad (36a)$$

verschwindet also mit  $\rho_0$ , so lange nur  $\kappa$  ein echter Bruch ist. Wird also die elektrische Flächendichtigkeit  $e$  auf einer stetig gekrümmten Fläche oder an der Spitze einer Kegelfläche (wir können auch noch hinzufügen „an einer scharfen Kante“) unendlich wie eine echt gebrochene Potenz des reciproken Abstandes  $1/\rho$ , so bleibt trotzdem die Potentialfunction an dieser Stelle endlich und stetig.

Bildet man einen ersten Differenzialquotient von  $\varphi$ , z. B.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , so ist zu beachten, daß  $x$  nur in  $r$  steckt, und daß

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\cos(r, x)}{r^2}$$

ist. Das über die Fläche außerhalb des Cylinders erstreckte Integral hat endliche und stetige Differentialquotienten. Es kommt nur an auf

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho_0} d\rho \cdot \rho \cdot \frac{\cos(r, x)}{r^2} \cdot \frac{e}{\cos \alpha}. \quad (37)$$

Für Punkte, welche in der geladenen Fläche selbst liegen, hat dieser Ausdruck keinen bestimmten Sinn mehr, denn wegen einer im Nenner übrig bleibenden ersten Potenz von  $r$ , wofür man im Grenzfall und bei stetiger Krümmung auch  $\rho$  setzen darf, erhält man der

Größenordnung nach  $\frac{e_0}{\rho}$ , das wird  $\infty - \infty$ . Sobald der

Punkt aber deutlich auf der einen oder auf der anderen Seite der geladenen Fläche liegt, wenn auch noch so nahe, so wird  $r$  niemals genau  $= 0$ , der Ausdruck (37) nimmt dann einen bestimmten endlichen Werth an, welcher aber nicht mit  $\rho_0$  zugleich gegen Null strebt, wenn wir den Abstand von der Fläche  $< \rho_0$  lassen. Es ist auch direkt zu erkennen, daß die Beiträge, die (37) zu dem ganzen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  liefert, wenn man von beiden Seiten an die Fläche heranrückt, entgegengesetzt gleich werden müssen, denn während alle übrigen Factoren beidemale die gleichen sind, hat  $r$  entgegengesetzte Richtungen, also der  $\cos(r, x)$  beidemale entgegengesetzt gleiche Werthe. So bildet sich eine endliche Differenz zwischen den Werthen von  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  an zwei Stellen, welche in verschwindendem Abstand von einander zu beiden Seiten der Fläche liegen, d. h. die ersten Differentialquotienten des Potentials werden dort unstetig, bleiben aber endlich. Nur die nach der Richtung einer Tangente an die Fläche genommenen Differentialquotienten müssen stetig bleiben, weil die Function  $\varphi$  selbst in der Fläche eindeutig ist und zu beiden Seiten stetig verläuft. Für diese tangentialen Differentialquotienten wird auch in dem nach Analogie von (37) gebildeten Ausdruck der Winkel zwischen der Richtung  $r$  und der Differentiationsrichtung (dort  $x$ ) ein rechter, sein Cosinus also gleich Null.

An Stellen, wo die Flächendichtigkeit verschwindet wie eine positive Potenz des Abstandes  $\rho$ , selbst wenn der Exponent ein echter Bruch ist, fallen indessen die Sprünge fort.

### § 13. Continuirlich verbreitete Ladungen auf Linien.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch elektrisch geladene Linien betrachten, obwohl man solche in der Theorie der wirklich vorkommenden elektrostatischen Vertheilungen nur selten und nur als idealen Grenzfall zu verwenden hat. Wir werden dabei auf den Begriff der Liniendichtigkeit  $E$  geführt. Das Längenelement  $dl$  der geladenen Linie enthält das Quantum  $de = E \cdot dl$ ; auf einer endlichen Strecke liegt ein endliches Quantum. Die Dimension ist

$$E = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

Die Einheit der Liniendichtigkeit im elektrostatischen C.G.S.-System trägt auf einen Centimeter eine elektrostatische Einheit (§ 2).

Das Potential geladener Linien ist

$$\varphi = \int \frac{E \cdot dl}{r} \quad (38)$$

und verhält sich im leeren Raume ebenso stetig und endlich wie dasjenige von Punkt-, Raum- und Flächenladungen. Suchen wir aber  $\varphi$  für einen Punkt der geladenen Linie selbst, so wird für diese Stelle  $r = 0$ , der Integrand unendlich. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß ein hinreichendes Stück der Linie zu beiden Seiten des gewählten Punktes als gerade Linie gelten darf. Nur über dieses Stück brauchen wir zu integrieren. Die Abmessungen der Länge  $l$  auf der Linie können wir von dem gewählten Punkte als Nullpunkt aus rechnen, nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ; dann ist auch die Richtung des positiven Zuwachses  $dl$  und die untere Grenze als negativ, die obere als positiv festgelegt. Der Abstand  $r$  ist seinem Betrage nach gleich  $l$ , aber er ist nach beiden Seiten positiv zu rechnen. Bezeichnen wir den absoluten Betrag mit  $|l|$  so wird

$$\varphi = \bar{E} \int_{-}^{+} \frac{dl}{|l|} = 2 \bar{E} \int_0^{+} \frac{dl}{l} = 2 \bar{E} \frac{\log \text{nat } l}{0} \quad (38a)$$

Dies wird wegen der Stelle  $l = 0$  logarithmisch unendlich. Die Differentialquotienten des Potentials werden bei unendlicher Annäherung an die geladene Linie noch stärker unendlich.

Da wir punktförmige Ladungen zuallererst als einfachste Vorstellung betrachtet haben, kennen wir jetzt alle Möglichkeiten der Vertheilung.

Bei der Discussion über das Verhalten der Potentialfunction und ihrer Differentialquotienten stiefsen wir auf zwei Fälle, in denen wir durch allgemeine Betrachtung der Integrale keinen Schluß auf die Werthe ziehen konnten. Es waren dies die zweiten Differentialquotienten und mit ihnen das LAPLACE'sche  $\Delta \varphi$  im Inneren räumlicher Ladungen, und zweitens die Sprünge der ersten Differentialquotienten an geladenen Flächen.

Diese Lücken sollen im Folgenden ausgefüllt werden. Wir werden zuerst die für die Berechnung bequemsten Umstände auswählen, deren Kenntniß uns dann auch bei den allgemeinen Fällen nützlich sein wird.

§ 14. Potential einer gleichmäÙig belegten Kreisscheibe  
in Punkten der Axe.

Um das Potential eines geladenen ebenen Flächenstückes von kreisförmiger Begrenzung zu berechnen, legen wir in das Centrum der Kreisfläche ein ebenes Polarcordinatensystem: Radiusvektor  $\rho$ , Azimuth  $\vartheta$ . Der Radius des Randkreises sei  $R$ . Senkrecht auf dieser Ebene legen wir durch das Centrum eine Axe, auf der die Abmessungen  $x$  nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet werden. Wir suchen das Potential der Scheibenladung hier nur für Punkte, welche auf dieser  $x$ -Axe liegen. Der Abstand eines solchen Punktes von einem der Flächenelemente der Kreisscheibe ist bestimmt durch den absoluten Betrag

$$r = \sqrt{x^2 + \rho^2},$$

während das Flächenelement durch

$$ds = \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

gegeben ist. Die Flächendichtigkeit  $e$ , welche im Allgemeinen als Function von  $\rho$  und  $\vartheta$  beschrieben werden könnte, nehmen wir als constant an. Dann ist

$$\varphi = \iint \frac{e ds}{r} = e \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{r},$$

Zur Ausführung des inneren Integrales ist es bequemer,  $r$  anstatt  $\rho$  als Variable einzuführen. Da  $x$  bei der Integration ein fester Parameter ist, so liefert die Differentiation des Ausdrucks  $r$

$$dr = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} = \frac{\rho d\rho}{r}.$$

Der unteren Grenze  $\rho = 0$  entspricht  $r = \sqrt{x^2}$ , was den absoluten Betrag der  $x$ -Abmessung bedeuten soll. Der oberen Grenze  $\rho = R$  entspricht das ebenfalls absolute  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ . Die Integration über den Winkel  $\vartheta$  liefert den Factor  $2\pi$ . Es wird also

$$\varphi = 2\pi e (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2})$$

Der Verlauf zu beiden Seiten der Scheibe ist ein symmetrischer. An der Platte selbst ist  $\varphi$  stetig und endlich und hat dort den maximalen Werth  $2\pi e R$ .

Bilden wir nun von  $\varphi$  den Differentialquotienten nach der Coordinate  $z$ , so finden wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2 \pi e \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}} \right).$$

Der algebraische Zähler  $z$  hat auf beiden Seiten der Scheibe entgegengesetzte Vorzeichen, während die absoluten Wurzeln im Nenner beiderseits positiv sind. Auf der Seite der positiven  $z$  ist daher  $\frac{z}{\sqrt{z^2}} = +1$ , auf der Seite der negativen  $z$  aber  $\frac{z}{\sqrt{z^2}} = -1$ . Dies gilt bis dicht heran an die geladene Fläche, also bis zum Verschwinden des Abstandes  $z$ . Der erste Summand  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$  nähert sich bei diesem Grenzübergange dem Werthe  $\frac{z}{R}$ , verschwindet also mit  $z$ . Deshalb sind nach vorstehender Gleichung die Werthe von  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  dicht an der Fläche auf der positiven Seite

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{+0} = -2 \pi e$$

auf der negativen Seite

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{-0} = +2 \pi e.$$

Dieser Differentialquotient erleidet beim Durchgang durch die geladene Fläche einen Sprung, dessen Größe wir finden in der Differenz

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{+0} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{-0} = -4 \pi e.$$

Es ist bemerkenswerth, daß die Größe des Sprunges nur von der Flächendichtigkeit  $e$  abhängt, nicht aber von dem Radius der Scheibe.

### § 15. Potential einer gleichmäßig belegten Kugelfläche.

Die constante Flächendichtigkeit sei  $e$ , der Radius der Kugelfläche sei  $R$ . Wir legen ein räumliches Polarcordinatensystem in den Mittelpunkt der Kugel. Die Polaraxe gehe von dort aus nach dem Punkte hin, in welchem wir das Potential bestimmen wollen; dessen Abstand vom Kugelcentrum sei  $p$ . Für Punkte im inneren

Kugelraum ist  $p < R$ , für äußere Punkte ist  $p > R$ . Den variablen Polwinkel nennen wir  $\vartheta$ , den variablen Längenwinkel  $\eta$ . Das Oberflächenelement der Kugel ist dann:

$$ds = R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\eta. \quad (39)$$

Der Abstand  $r$  desselben von dem ausgewählten Punkt wird bestimmt durch die bekannte trigonometrische Formel

$$r^2 = R^2 + p^2 - 2Rp \cos \vartheta. \quad (39a)$$

Das Potential  $\varphi = \iint \frac{e ds}{r}$  wird also nun

$$\varphi = R^2 e \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{r}. \quad (39b)$$

Die erste Integration nach dem Längenwinkel läßt sich ohne weiteres ausführen und liefert den Factor  $2\pi$ . Für die zweite Integration ist es bequemer, die Formel (39a) nicht zur Einführung der Poldistanz  $\vartheta$  an Stelle der Variablen  $r$  zu benutzen, sondern umgekehrt mit ihrer Hilfe die in  $\vartheta$  ausgedrückten Größen durch solche in  $r$  zu ersetzen. Dies erreicht man leicht, indem man die Gleichung (39a) bei constant gehaltenem  $R$  und  $p$  differenzirt:

$$r dr = Rp \sin \vartheta d\vartheta.$$

Hieraus läßt sich der Zähler unter dem Integral (39b) folgendermaßen in  $r$  angeben:

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{r dr}{Rp}.$$

Es hebt sich dann noch  $r$  in Zähler und Nenner. Der unteren Grenze  $\vartheta = 0$  entspreche  $r_0$ , d. i. der Abstand unseres Punktes von dem ihm zugekehrten Pol der Kugel, der oberen Grenze  $\vartheta = \pi$  entspreche  $r_\pi$  (abgewendeter Pol der Kugel). Es ist hiernach

$$\varphi = 2\pi \frac{Re}{p} \int_{r_0}^{r_\pi} dr = \frac{2\pi Re}{p} (r_\pi - r_0). \quad (39c)$$

Die Grenzen  $r_0$  und  $r_\pi$  sind die absoluten Beträge der Abstände des Punktes von den beiden Kugelpolen, man muß daher

zwischen äusseren und inneren Punkten unterscheiden. Für äussere Punkte ist

$$r_\pi = p + R, \quad r_0 = p - R, \quad r_\pi - r_0 = 2R$$

also

$$\varphi_a = \frac{4\pi R^2 e}{p}. \quad (40a)$$

Für innere Punkte ist

$$r_\pi = R + p, \quad r_0 = R - p, \quad r_\pi - r_0 = 2p \quad (40i)$$

also

$$\varphi_i = 4\pi R e.$$

In diesen beiden Formeln liest man folgende Regeln: Der Zähler von  $\varphi_a$  enthält die gesammte Ladung der Kugeloberfläche

$$e = 4\pi R^2 e,$$

mithin ist  $\varphi_a = \frac{e}{p}$ , also ebenso gross, als wenn statt der Kugelbelegung die gesammte Ladung in deren Mittelpunkt concentrirt vorhanden wäre. Deshalb ist auch das Feld, welches die gleichmässig beladene Kugel im äusseren Raume erzeugt, Richtung und Intensität der elektrostatischen Kraft gleich den entsprechenden Werthen der gedachten Punktladung im Centrum.

Dieser uns bereits genau bekannte stetige Verlauf der Function reicht bis an die Kugel heran. An ihrer Oberfläche ist  $p = R$  und deshalb

$$\varphi_a = 4\pi R e, \quad \text{für } p = R.$$

Ebenso gross ist aber das dort angrenzende  $\varphi_i$ , wie man aus Gleichung (40i) sieht. Der Werth des Potentials verläuft also beim Durchgang durch die geladene Kugelfläche stetig. Während es aber aussen reciprok dem Centralabstand  $p$  sich abflacht, hat es im Inneren der Kugel überall denselben constanten Werth  $4\pi R e$ .

Betrachten wir nun die ersten Differentialquotienten. Im äusseren Raume giebt

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = -\frac{4\pi R^2 e}{p^2} \quad (41a)$$

das steilste Gefälle in radialer Richtung an, und damit zugleich die Intensität der resultirenden elektrischen Kraft. Senkrecht dazu, also in jeder zu den concentrischen Kugelflächen tangentialen Richtung ist das Gefälle gleich Null. Im inneren Kugelraume ist

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = 0; \quad (41i)$$

überhaupt ist dort der Differentialquotient in jeder beliebigen Richtung gleich Null, es herrschen keine elektrischen Kräfte im Hohlraum der Kugelfläche. Beide Formeln (41 a und i) gelten für Punkte in der geladenen Kugelfläche selbst. Während aber für die Innenseite dort noch  $\partial \varphi_i / \partial p = 0$  gilt, nähert sich für  $p = R$  der Ausdruck für die Außenseite dem Werth  $\partial \varphi_a / \partial p = -4\pi e$ . Der Differentialquotient des Potentials in radialer Richtung ist also an der geladenen Fläche unstetig. Geht man von innen nach außen, so springt er von 0 auf  $-4\pi e$ ; es ist

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial p}\right)_{p=R} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p}\right)_{p=R} = -4\pi e. \quad (42)$$

Die Sprunggröße  $-4\pi e$  wird allein bestimmt durch die Flächen-dichtigkeit, ist aber in diesem Beispiele unabhängig vom Kugelradius.

Das aus den zweiten Differentialquotienten gebildete  $\Delta \varphi$  ist sowohl im inneren wie im äußeren Raume gleich Null, innen, weil  $\varphi_i$  constant ist, außen, weil  $\varphi_a$  aussieht, wie das Potential einer Punktladung. In der Fläche selbst aber verliert  $\Delta \varphi$  seinen Sinn, denn wo bereits die ersten Differentialquotienten unstetig sind, kann man die zweiten nicht bilden.

### § 16. Gleichmäßig vertheilte Ladung im Raume zwischen zwei concentrischen Kugelflächen und in einer Vollkugel.

Die constante räumliche Dichtigkeit der Electricität in der Kugelschicht sei  $\varepsilon$ . Der Radius der inneren Begrenzungsfläche sei  $R_1$ , der der äußeren  $R_2$ . Wir legen in das gemeinsame Centrum wieder ein Polarcoordinatensystem, dessen Polaraxe durch den Punkt geht, in welchem wir das Potential bestimmen wollen. Dieser liege im Abstand  $p$ . Der variable Radiusvector ist  $\rho$ , der Polwinkel  $\vartheta$ , der Längenwinkel  $\eta$ . Das Volumelement in diesem Coordinatensystem ist

$$d\tau = \rho^2 \sin \vartheta \cdot d\rho \cdot d\vartheta \cdot d\eta, \quad (43)$$

dessen Abstand  $r$  von dem ausgewählten Punkt ist gegeben durch

$$r^2 = \rho^2 + p^2 - 2\rho p \cos \vartheta. \quad (43a)$$

Das Potential der betrachteten Vertheilung ist

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon d\tau}{r} = \varepsilon \int_0^{2\pi} d\eta \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_0^\pi d\vartheta \frac{\rho^2 \sin \vartheta}{r}. \quad (43b)$$

Die Integration nach dem Längenwinkel liefert nur den Factor  $2\pi$ . Im innersten Integral führen wir  $r$  statt  $\vartheta$  als Variable ein. Dabei ist zu beachten, daß  $\rho$  im innersten Integral fester Parameter ist. Es wird dort nur über eine unendlich dünne Lage in der Schicht integrirt. Deshalb liefert die Differentiation von (43 a), wie im vorigen Paragraphen,

$$r dr = \rho p \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Der Integrand ist

$$d\vartheta \cdot \frac{\rho^2 \sin \vartheta}{r} = \frac{\rho}{p} dr.$$

Den Grenzen 0 und  $\pi$  des Polwinkels entsprechen die absoluten Werthe  $r_0$  und  $r_\pi$  der Abstände unseres Punktes von dem ihm nächsten und fernsten Pol der Kugelfläche vom Radius  $\rho$ .

Nunmehr ist:

$$\varphi = 2\pi \varepsilon \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{r_0}^{r_\pi} dr \frac{\rho}{p} = \frac{2\pi \varepsilon}{p} \int_{R_1}^{R_2} d\rho \rho (r_\pi - r_0). \quad (43c)$$

Die Differenz der absoluten Strecken ( $r_\pi - r_0$ ) nimmt ganz wie im vorigen Paragraphen verschiedene Formen an, je nachdem  $p$  größer oder kleiner als  $\rho$  ist. Es ist

$$r_\pi - r_0 = 2\rho \text{ für } p > \rho,$$

$$r_\pi - r_0 = 2p \text{ für } p < \rho.$$

Danach ist auch das Resultat der letzten Integration je nach der Länge  $p$  ein verschiedenes.

Liegt unser Punkt außerhalb der ganzen Kugelschicht, so ist  $p > R_2$  also auch größer als sämtliche  $\rho$ , über welche von  $R_1$  bis  $R_2$  integrirt werden soll. Man hat dann  $r_\pi - r_0 = 2\rho$  zu setzen und findet für den äußeren Raum

$$\varphi_a = \frac{4\pi \varepsilon}{p} \int_{R_1}^{R_2} d\rho \cdot \rho^2 = \frac{4\pi \varepsilon}{3p} (R_2^3 - R_1^3). \quad (44a)$$

Das Volumen der geladenen Schicht ist als Differenz der beiden Kugelvolumina gleich  $\frac{4\pi}{3} R_2^3 - \frac{4\pi}{3} R_1^3$  und kommt in  $\varphi_a$  als Factor vor, welches zusammen mit dem anderen Factor  $\varepsilon$  die Gesamtladung der Schicht

$$e = \frac{4\pi \varepsilon}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

ergiebt. Es ist demnach

$$\varphi_a = \frac{\epsilon}{p}.$$

Das Potential im äußeren Raume — und damit auch das elektrische Feld daselbst — ist so gestaltet, als wäre die gesammte Ladung im Centrum zu einer endlichen Punktladung vereinigt. Dies gilt bis an die Kugelfläche  $R_2$ .

Liegt unser Punkt in der leeren Höhlung, so ist  $p < R_1$ , also auch kleiner als sämtliche im Integral vorkommenden  $\rho$ . Man hat dann  $r_\pi - r_0 = 2p$  zu setzen und findet für den inneren Hohlraum, nachdem man  $p$  in Zähler und Nenner gehoben hat:

$$\varphi_i = 4\pi\epsilon \int_{R_1}^{R_2} d\rho \cdot \rho = 2\pi\epsilon(R_2^2 - R_1^2). \quad (44i)$$

Dieser Ausdruck ist in der ganzen Höhlung constant, das Potential hat dort kein Gefälle, es existirt dort keine elektrische Feldintensität. Dies gilt bis an die Kugelfläche  $R_1$ .

Drittens kann unser Punkt auch in der geladenen Schicht selbst liegen. Dafs  $\varphi$  dort noch endlich bleibt, haben wir schon in § 11 hinter Gleichung (28 b) festgestellt. Es werden dann aber in unserem Integral (43 c) sowohl  $\rho < p$  wie auch  $\rho > p$  vorkommen, so dafs wir für  $(r_\pi - r_0)$  nicht überall denselben Ausdruck setzen dürfen. Wir spalten deshalb das Integral in einen Theil von  $R_1$  bis  $p$  und einen von  $p$  bis  $R_2$ . Im ersten ist für die Abstandsdifferenz  $2p$ , im zweiten  $2\rho$  zu setzen. Wir haben dadurch unsere Schicht in zwei Schichten zerschnitten, für deren erstere unser Punkt an der Grenze des Außenraumes, für deren zweite er an der Grenze der Höhlung liegt. Das Potential in diesem mittleren Raumgebiet nennen wir  $\varphi_m$  und finden:

$$\varphi_m = \frac{2\pi\epsilon}{p} \int_{R_1}^p d\rho \cdot \rho \cdot 2\rho + \frac{2\pi\epsilon}{p} \int_p^{R_2} d\rho \cdot \rho \cdot 2p$$

oder beide Theile nach dem Muster von  $\varphi_a$  und  $\varphi_i$  ausgeführt:

$$\varphi_m = \frac{4\pi\epsilon}{3p}(p^3 - R_1^3) + 2\pi\epsilon(R_2^2 - p^2).$$

Dies kann man noch durch eine leichte Umformung in die Form bringen:

$$\varphi_m = 2\pi\epsilon R_2^2 - \frac{2\pi\epsilon}{3}p^2 - \frac{4\pi\epsilon}{3}\frac{R_1^3}{p}. \quad (44m)$$

Das Potential ist also in diesem mittleren Gebiet eine stetige algebraische Function des Centralabstandes  $p$  von eigenthümlicher Form: Es besteht aus einer dem Quadrat des äußeren Grenzradius proportionalen Constante, von welcher erstens ein in  $p$  quadratisches Glied, zweitens ein zu  $p$  reciprokes Glied abgezogen wird. Das letztere, proportional dem Cubus des inneren Grenzradius, strebt beim Schwinden der Höhlung, d. h. beim Uebergang zur Vollkugel, gegen Null, und ist nichts anderes als das Potential der Füllung des Hohlraumes, welches abgezogen werden muß, weil wir den Hohlraum als leer von Ladung angenommen haben. Der Ausdruck  $\varphi_m$  gilt bis an beide Grenzen  $R_1$  und  $R_2$ .

Zunächst sieht man leicht, daß  $\varphi$  an beiden Grenzflächen stetige Uebergänge zeigt. An der äußeren Grenzfläche hat man in  $\varphi_a$  und  $\varphi_m$  einzusetzen  $p = R_2$ . Das giebt:

$$\varphi_a = \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \left( R_2^2 - \frac{R_1^3}{R_2} \right)$$

$$\varphi_m = 2 \pi \varepsilon R_2^2 - \frac{2 \pi \varepsilon}{3} R_2^2 - \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{R_2}$$

also identische Werthe.

An der inneren Grenzfläche hat man in  $\varphi_i$  und  $\varphi_m$  einzusetzen  $p = R_1$ . Das giebt:

$$\varphi_i = 2 \pi \varepsilon (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\varphi_m = 2 \pi \varepsilon R_2^2 - \frac{2 \pi \varepsilon}{3} R_1^2 - \frac{4 \pi \varepsilon}{3} R_1^2$$

also gleichfalls identische Werthe.

Von den ersten Differentialquotienten sind die tangential zu den concentrischen Kugeln genommenen im ganzen Raume gleich Null. Das Hauptgefälle, also die resultirende Kraft, hat überall radiale Richtung. Man findet dafür in den drei Raumgebieten folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = - \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{p^2} = - \frac{e}{p^2} \quad (45a)$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial p} = - \frac{4 \pi \varepsilon}{3} p + \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{p^2} \quad (45m)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = 0. \quad (45i)$$

Auch diese bleiben an den Grenzen des geladenen Raumes stetig; setzt man nämlich im ersten und zweiten Ausdruck  $p = R_2$ , so erhält man beide Male den Werth  $-\frac{4\pi\varepsilon}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2}$ , und setzt man im zweiten Ausdruck  $p = R_1$ , so erhält man Null, wie im dritten Ausdruck.

Die zweiten Differentialquotienten nach  $p$  sind

$$\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial p^2} = \frac{8\pi\varepsilon}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{p^3} \quad (46a)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial p^2} = -\frac{4\pi\varepsilon}{3} - \frac{8\pi\varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{p^3} \quad (46m)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p^2} = 0. \quad (46i)$$

Sie verlaufen beim Durchgang durch beide Grenzflächen unstetig. Um die Werthe von  $\Delta\varphi$  in den drei Abtheilungen des Raumes zu finden, muß man zunächst den Ausdruck aufsuchen, den die Operation  $\Delta\varphi$  für eine reine Function des Abstandes  $p$  von einem festen Centrum annimmt. Liegt dieses an der Stelle  $x_0, y_0, z_0$ , während  $x, y, z$  den Ort des betrachteten Punktes angibt, so ist:

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{x - x_0}{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y - y_0}{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{z - z_0}{p} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= +\frac{1}{p} - \frac{(x - x_0)^2}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{p} - \frac{(y - y_0)^2}{p^3}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} &= \frac{1}{p} - \frac{(z - z_0)^2}{p^3}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Anderseits ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \varphi}{dp^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dp} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{aligned}$$

nebst analogen Ausdrücken für die  $y$ - und die  $z$ -Coordinate. Setzt man in diesen Gleichungen die Ausdrücke aus den Gleichungen (47)

ein und bildet die Summe des zweiten Differentialquotienten, so kommt heraus

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dp^2} \left( \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{p^2} \right) \\ + \frac{d\varphi}{dp} \left( \frac{3}{p} - \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{p^3} \right)$$

oder

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{p} \frac{d\varphi}{dp}. \quad (48)$$

Unter Benutzung der Gleichungen (46) und (45) erhält man also:

$$\Delta \varphi_a = \frac{8\pi\epsilon R_2^3 - R_1^3}{3} \frac{1}{p^3} - \frac{2}{p} \cdot \frac{4\pi\epsilon R_2^3 - R_1^3}{3} \frac{1}{p^2} = 0 \quad (48a)$$

$$\Delta \varphi_m = -\frac{4\pi\epsilon}{3} - \frac{8\pi\epsilon R_1^3}{3} \frac{1}{p^3} - \frac{2}{p} \cdot \frac{4\pi\epsilon}{3} p + \frac{2}{p} \cdot \frac{4\pi\epsilon R_1^3}{3} \frac{1}{p^2} = -4\pi\epsilon \quad (48m)$$

$$\Delta \varphi_i = 0. \quad (48i)$$

Also in den von Ladung freien Theilen des Raumes, sowohl im äusseren wie in der Höhlung, ist  $\Delta \varphi = 0$ ; das Potential folgt dort überall der LAPLACE'Schen Differentialgleichung. Das wußten wir schon. Aber in der gleichförmig mit räumlicher Ladung erfüllten Schicht ist  $\Delta \varphi = -4\pi\epsilon$ . Dies ist ein neues wichtiges Resultat, aus welchem hervorgeht, daß der Werth des  $\Delta \varphi$  allein durch die räumliche Dichtigkeit bestimmt wird, aber unabhängig von der Lage des ausgewählten Punktes und von den Radien der begrenzenden Kugelflächen ist. Beim Uebergang aus leerem in geladenes Gebiet und umgekehrt verläuft also  $\Delta \varphi$  unstetig.

Die Betrachtungen über die Kugelschicht gelten unverändert auch für eine Vollkugel, welche gleichförmig mit räumlicher Ladung erfüllt ist. Man braucht nur den Radius der inneren Höhlung  $R_1 = 0$  zu setzen, was nirgends zu mathematischen Unzuträglichkeiten führt, die vorstehenden Formeln aber vereinfacht. Das Gebiet, in welchem  $\varphi_i$  gilt, verschwindet dann, man hat nur  $\varphi_a$  im äusseren Raume und  $\varphi_m$  im Inneren der Kugel, deren Radius wir nun  $R_2 = R$  nennen können. Aus (44a und m) folgt:

$$\varphi_a = \frac{4\pi\epsilon R^3}{3} \frac{1}{p} = \frac{c}{p} \quad (49a)$$

$$\varphi_m = 2\pi\epsilon R^2 - \frac{2\pi\epsilon}{3} p^2 \quad (49m)$$

Aus (45a und m) folgt:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = -\frac{4\pi\epsilon}{3} \frac{R^3}{p^2} = -\frac{e}{p^2} \quad (50a)$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial p} = -\frac{4\pi\epsilon}{3} p \quad (50m)$$

Aus (48a und m) endlich folgt:

$$\Delta \varphi_a = 0 \quad (51a)$$

$$\Delta \varphi_m = -4\pi\epsilon. \quad (51m)$$

§ 17.  $\Delta \varphi$  bei beliebiger Vertheilung der räumlichen Dichtigkeit der Elektrizität. Differentialgleichung von Poisson.

Wir denken uns jetzt eine beliebig vorgeschriebene räumliche Vertheilung der Elektrizität, so daß  $\epsilon$  als bekannte Function der Raumcoordinaten auftritt. Diese Function kann an gewissen Grenzflächen Unstetigkeiten aufweisen, soll aber sonst einen stetigen und endlichen Verlauf haben. Wir stellen die Aufgabe, den Werth von  $\Delta \varphi$  zu bestimmen in einem Punkte, in welchem die elektrische Dichtigkeit den von Null verschiedenen Werth  $\epsilon_0$  besitzt. Wir legen eine Kugel um diesen Punkt als Centrum. Dadurch zerschneiden wir die Ladungen in zwei Gebiete, eines außerhalb dieser Kugelfläche, ein zweites innerhalb. Die Ladung dieses zweiten Gebietes theilen wir abermals in zwei Theile; diesmal nicht durch eine räumliche Grenzfläche, sondern dadurch, daß wir  $\epsilon$  als Superposition von zwei Vertheilungen in den Kugelraum ansehen, deren erste überall den festen Werth  $\epsilon_0$  zeigt, welcher im Kugelcentrum herrscht, während der zweite von der Form  $(\epsilon - \epsilon_0)$  im Centrum gleich Null ist, und in den excentrischen Gegenden des Kugelraumes den Veränderungen der Variablen  $\epsilon$  Rechnung trägt.

Entsprechend dieser Dreitheilung des Ladungsvorrathes spaltet sich dann auch das Raumintegral  $\iiint \frac{\epsilon d\tau}{r}$ , welches das Potential im Mittelpunkt der Kugel darstellt, wenn  $r$  den Abstand von dort bezeichnet, während  $d\tau$  das Volumelement des geladenen Raumes ist. Die entstehenden drei Theile des Gesamtpotentials  $\varphi$  wollen wir folgendermaassen bezeichnen. Das Potential der außerhalb der Kugelfläche befindlichen Massen, in welchen also der Kugelraum als leer gilt, nennen wir hier  $\varphi_a$ . Es ist dann im Inneren der Kugel

sicherlich schon nach Gleichung (27a)  $\Delta \varphi_a = 0$ . Den zweiten Theil, welcher von der gleichförmig mit der Dichtigkeit  $\varepsilon_0$  erfüllten Kugel herrührt, nennen wir  $\varphi_0$ . Für dieses gilt nach dem vorigen Paragraphen:  $\Delta \varphi_0 = -4\pi \varepsilon_0$ . Der Rest  $\varphi_1$ , welcher der Vertheilung  $(\varepsilon - \varepsilon_0)$  entspringt, befriedigt im Kugelcentrum ebenfalls die Bedingung  $\Delta \varphi_1 = 0$ , denn  $\varepsilon - \varepsilon_0$  verschwindet bei stetigem Verlauf von  $\varepsilon$  in der Mitte der Kugel. Wir konnten sogar gegen Ende des § 11 nachweisen, daß  $\Delta \varphi = 0$  noch gilt, wenn der Anstieg der Dichtigkeit in der Umgebung einer Nullstelle ein recht steiler ist, das heißt hier, wenn die Dichtigkeit  $\varepsilon$  einem unstetigen Verlauf beliebig nahe kommt.

Nun folgt direct aus

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_a + \varphi_0 + \varphi_1 \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_a + \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_1\end{aligned}$$

und

$$\Delta \varphi_a = 0, \quad \Delta \varphi_0 = -4\pi \varepsilon_0, \quad \Delta \varphi_1 = 0$$

das Resultat:

$$\Delta \varphi = -4\pi \varepsilon_0. \quad (52)$$

Der Werth von  $\Delta \varphi$  ist an jeder Stelle des Raumes gleich der, mit  $-4\pi$  multiplicirten, räumlichen Dichtigkeit der Elektrizität, welche daselbst herrscht, dagegen unabhängig von den an anderen Stellen liegenden Ladungen. Da nun für jeden Punkt im Raume das Gleiche gilt, so können wir jetzt den Index 0 weglassen, und schreiben:

$$\Delta \varphi = -4\pi \varepsilon \quad (52a)$$

Dies ist die von POISSON aufgestellte Differentialgleichung für das Potential in geladenen Räumen. Die im leeren Raume gültige LAPLACE'sche Differentialgleichung  $\Delta \varphi = 0$  erscheint als einfachster Sonderfall von dieser. Differentialgleichungen von diesem Typus, die also aussagen, daß eine im Raume definirte Function gleich dem  $\Delta$  einer anderen Function sein soll, kommen auch in anderen Theilen der Physik vor, in denen die Größe  $\varepsilon$  nicht eigentlich die Dichtigkeit einer Substanz bedeutet, mitunter sogar eine gerichtete Größe vorstellt, was sich dann auf die zugehörige Function  $\varphi$  überträgt.

§ 17a. Der Sprung der ersten Differentialquotienten von  $\varphi$  an einer beliebigen elektrisch beladenen Fläche.

Wir denken uns jetzt eine beliebig gestaltete Fläche im Raume in beliebiger Weise mit Elektrizität belegt. Die Fläche kann stellen-

weise scharfe Kanten und Ecken besitzen, soll aber sonst höchstens endliche Krümmung besitzen; auch die Flächendichtigkeit  $e$  kann an einzelnen Grenzlinien unstetig wechseln, soll aber sonst einen stetigen Verlauf auf der Fläche haben.

In irgend einem Punkte der Fläche, wo die elektrische Dichtigkeit den Werth  $e_0$  habe, errichten wir nach beiden Seiten die Normale, und lassen einen Beobachtungspunkt auf dieser durch die Fläche hindurchgehen. Die Abmessungen auf dieser Geraden nennen wir  $n$ , sie sind auf der einen Seite negativ, auf der anderen positiv. Den Differentialquotienten von  $\varphi$  nach der Richtung der wachsenden  $n$  bezeichnen wir mit  $\partial\varphi/\partial n$ ; er ist also an der negativen Seite in der Richtung nach der Fläche hin, auf der positiven Seite in der Richtung von der Fläche weg zu bilden. Um die Unstetigkeit und die Sprunggröße dieses Differentialquotienten beim Durchgang durch die Fläche zu finden, machen wir uns folgende Vorstellung: Wir legen in den Fußpunkt der Normale die Tangentialebene an die Fläche, schlagen in ihr um den Fußpunkt einen Kreis mit dem hinreichend kleinen Radius  $\rho_0$  und schneiden mittelst eines durch diesen hindurchgelegten geraden Cylindermantels aus der geladenen Fläche ein rundes Stück heraus, welches den Fußpunkt der Normale enthält. Es ist das dieselbe Construction, welche in Figur 2 (S. 40) veranschaulicht ist, wenn man dort den Punkt  $P$  nach  $N$  verlegt denkt. Die in der Tangentialebene gelegene Kreisfläche ist ohne Ladung, wir können uns aber statt dessen auch vorstellen, daß sie mit zwei entgegengesetzt gleichen Flächendichtigkeiten belegt ist, welche sich vollkommen neutralisiren. Diese beiden Belegungen sollen auf der ganzen Kreisfläche die constanten Dichtigkeiten  $+e_0$  und  $-e_0$  haben. Wir haben es also jetzt mit folgenden Belegungen zu thun.

1. Die Belegung  $e$  der gegebenen Fläche, soweit sie außerhalb des erzeugten runden Ausschnitts liegt.

2. Die Belegung  $e$  der gegebenen Fläche auf dem runden Ausschnitt, welche bei stetigem Verlauf im Fußpunkt der Normale den Werth  $e_0$  erreicht.

3. Die Belegung  $-e_0$  der tangentialen Kreisfläche.

4. Die Belegung  $+e_0$  der tangentialen Kreisfläche.

Entsprechend dieser Viertheilung der elektrischen Ladungen zerfällt auch deren Potential nebst Differentialquotienten in vier Summanden, die wir durch dieselben Nummern im Index mit  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  bezeichnen wollen. Ursprünglich gehören  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zusammen; denn  $\varphi_1 + \varphi_2$  bildet das Potential der ganzen vorgelegten Elek-

tricitätsvertheilung, und auch  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  gehören ursprünglich zusammen, denn  $\varphi_3 + \varphi_4 = 0$  ist der thatsächlich nicht existirende Beitrag, den die ungeladene Tangentialebene zum Gesamtpotential liefert. Die Spaltung des Potentials  $\varphi$  in die Summanden  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nützte uns bereits in § 12 zum Beweise, daß das Potential selbst an der geladenen Fläche stetig bleibt, während dessen erste Differentialquotienten dort im allgemeinen unstetig sind.

Die Hinzufügung der beiden sich gegenseitig zerstörenden Glieder  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  geschieht hier, weil wir  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  mit Nutzen zusammenfassen können:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3) + \varphi_4 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial (\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial n}.\end{aligned}\quad (53)$$

Der erste Summand  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$  erfährt keinen Sprung beim Durchgang durch die Fläche, denn für ihn ist sowohl der Ausschnitt der Fläche, wie auch die Kreisscheibe leer, es ist dort ein Loch geschaffen worden. Auch der zweite Summand  $\frac{\partial (\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial n}$

erleidet keinen Sprung. Dies kann man vollständig einsehen mit den in § 12 gegebenen Mitteln.  $\varphi_2$  ist das Potential einer thatsächlich über ein Stück der krummen Fläche verbreiteten Ladung, dieses wurde aber bereits dort in Gleichung (35) als Flächenintegral über die zugehörige Kreisscheibe dargestellt. Der dort mit  $\varphi_0$  bezeichnete Ausdruck ist unser jetziges  $\varphi_2$ . Man braucht nur noch eine geringe Umformung mit jener Gleichung (35) vorzunehmen. Es bezeichnete  $r$  den Abstand des einzelnen Flächenelementes  $ds$  von dem auf der  $z$ -Axe gelegenen Punkt, in welchem  $\varphi$  gesucht wird. Nennen wir nun  $r'$  den Abstand des entsprechenden in der Tangentialebene gelegenen Flächenelementes  $ds'$  von demselben Punkt, so können wir im Integranden  $\frac{r'}{r}$  zusetzen und folgendermaassen zusammenfassen:

$$\varphi_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{e_0} d\rho \frac{\rho}{r'} \cdot \left( \frac{r'}{r} \cdot \frac{e}{\cos \alpha} \right).\quad (54)$$

In dieser Form deckt sich der Ausdruck mit dem Potential einer Belegung der tangentialen Kreisfläche; die Flächendichtigkeit auf ihr wäre

$$e' = \frac{r'}{r} \cdot \frac{e}{\cos \alpha}.\quad (54a)$$

Je näher ein Flächenelement am Mittelpunkt der Kreisfläche liegt, um so mehr nähern sich  $\frac{r'}{r}$  und  $\cos \alpha$  dem Werthe 1, also  $e'$  demjenigen Werthe, welchen  $e$  im Mittelpunkt besitzt; diesen hatten wir  $e_0$  genannt.

Das Potential  $\varphi_3$  können wir sofort angeben:

$$\varphi_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{e_0} d\rho \cdot \frac{\rho}{r'} \cdot (-e_0).$$

Beide lassen sich nun direct zusammenfassen, da sie über dieselbe Kreisfläche summirt sind:

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{e_0} d\rho \cdot \frac{\rho}{r'} \left( \frac{r'}{r} \frac{e}{\cos \alpha} - e_0 \right). \quad (55)$$

Dies ist das Potential einer Belegung der Kreisfläche mit folgender Dichtigkeitsvertheilung:

$$e'' = \frac{r'}{r} \frac{e}{\cos \alpha} - e_0. \quad (55a)$$

Diese wird in der Mitte der Fläche absolut gleich Null und steigt bei stetigem  $e$  und endlicher Krümmung der Fläche ringsum ganz allmählich an wie eine GröÙe, die proportional  $\rho$  ist. Für solche Vertheilungen wurde nun am Schlusse von § 12 nachgewiesen, daß der Sprung der ersten Differentialquotienten ausbleibt, wenn man an einer Stelle hindurchgeht, wo die Dichtigkeit gleich Null ist. Ja es lieÙ sich zeigen, daß zum Wegfall der Sprünge nicht einmal nöthig ist, daß die Dichtigkeit wie  $\rho$  auf Null herabgeht, sondern daß ein Verschwinden proportional einer kleineren, echt gebrochenen Potenz  $\rho^\kappa$  ( $\kappa > 0$ ) dafür genügt. Das würde in unserem Falle bedeuten, daß die vorgeschriebene Vertheilung  $e$  einer Unstetigkeit oder daß die Flächenkrümmung einer scharfen Kante oder Ecke nahe kommen darf, und daß trotzdem noch gilt:

$$\frac{\overset{+}{\partial}(\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial n} = 0.$$

Die vierte Summand in (53) endlich erfährt einen Sprung, dessen Werth wir in § 14 bereits ausgerechnet haben, denn es handelt

sich hier nur noch um die gleichförmige positive Belegung  $+e_0$  der ebenen Kreisfläche. Es ist also:

$$\frac{\frac{\partial \varphi_4}{\partial n}}{\frac{\partial \varphi_4}{\partial n}} = -4\pi e_0$$

und mithin gilt für das Gesamtpotential  $\varphi$  der beliebigen Flächenbeladung der Satz

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} = -4\pi e_0.$$

Dabei war  $e_0$  der Werth an dem Punkte, in welchem wir die Fläche durchquert haben. Da dies nun ein jeder Punkt sein kann, so hat der Index 0 jetzt keine Bedeutung mehr. Es ist überall an der geladenen Fläche (in ausführlicher Schreibart)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_- = -4\pi e. \quad (56)$$

Bei vielen Autoren findet man die Normalenrichtung auf beiden Seiten von der Fläche weg gekehrt. Das stimmt mit der Richtung unseres wachsenden  $n$  nur auf der positiven Seite, auf der negativen Seite ist sie umgekehrt. Dadurch dreht sich auch das Vorzeichen um, und die Formel wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = -4\pi e. \quad (56a)$$

Der Sinn beider Schreibweisen ist der gleiche.

Man kann sich den Verlauf des Potentials beim Durchgang durch eine geladene Fläche mittels eines Diagramms recht anschaulich machen, indem man den auf der Normalen zur Fläche verlaufenden Weg des Beobachtungspunktes als Abscisse ( $n$  positiv nach rechts) und die an den Orten geltenden Werthe des Potentials als Ordinaten ( $\varphi$  positiv nach oben) aufträgt. Die so entstehende Curve wird im Allgemeinen einen stetig gekrümmten Verlauf zeigen, dessen Gestalt von der Vertheilung aller vorhandenen Ladungen im ganzen Raume abhängt und über die sich nichts Generelles aussagen läßt. Bei der Abscisse  $n = 0$  aber, wo die Normale die geladene Fläche durchsticht, besitzt die graphische Potentialcurve einen ganz charakteristischen Knick, der von nichts anderem abhängt, als vom Werthe der Flächendichtigkeit  $e$  in dem durchstochenen

Punkte der Fläche. Nehmen wir nämlich der Kürze wegen an, der Ordinatenmaafsstab des Diagramms betrage 1 cm für eine elektrostatische (C.G.S.)-Einheit des Potentials, so wird die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Curve direct durch den Differentialquotient  $\frac{d\varphi}{dn}$  angegeben, und dafs der Sprung dieses Werthes gleich  $-4\pi e$  sein mufs, das bestimmt den Knick. Bei einer positiven Belegung kann das Diagramm beispielsweise die Formen, Figur 3,

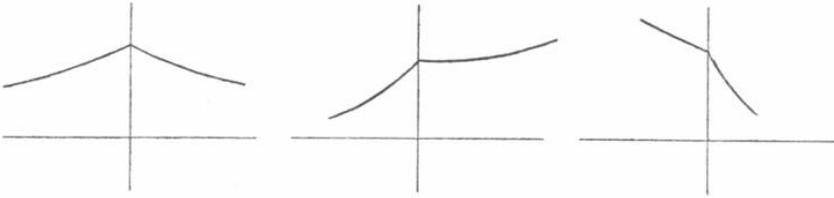


Fig. 3.

annehmen, bei denen der Knick immer convex nach oben ist. Bei negativen Belegungen dagegen ist der Knick stets concav nach oben, wie die Formen in Figur 4 zeigen.

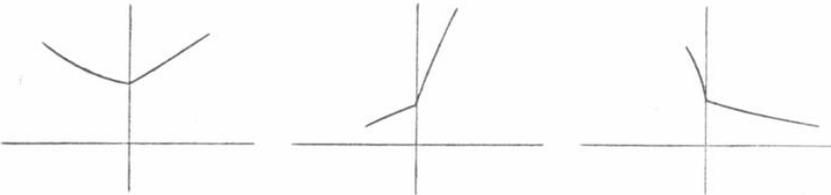


Fig. 4.

Nicht nur die in Richtung der Normale genommenen Differentialquotienten springen an geladenen Flächen, sondern auch die nach beliebiger anderer Richtung. Stetig bleiben, wie schon in § 12 erklärt, nur die in tangentialen Richtungen genommenen. Gehen wir in einer beliebigen Richtung  $x$  durch eine geladene Fläche, so ist es sehr leicht einzusehen, dafs  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  dabei den Sprung:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_- = -4\pi e \cdot \cos(nx) \quad (57)$$

erleidet.

### § 18. Gleichförmige Doppelschichten auf Kugelflächen und Kreisscheiben.

Wir denken uns jetzt zunächst zwei concentrische Kugelflächen. Die innere vom Radius  $R_1$  sei mit einer negativen Elektrizitäts-

menge  $-e$  gleichmäfsig belegt, so dafs die Flächendichtigkeit  $e_1$  auf ihr gegeben ist durch

$$e_1 = - \frac{e}{4 \pi R_1^2}. \quad (58_1)$$

Die äufsere Kugelfläche vom Radius  $R_2$  enthalte ein gleichgrofses positives Quantum  $+e$  ebenfalls in gleichmäfsig verteilter Flächendichtigkeit  $e_2$ . Dann ist

$$e_2 = + \frac{e}{4 \pi R_2^2}. \quad (58_2)$$

Die Potentiale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  beider einzelnen Belegungen superponiren sich an jeder Stelle des Raumes; sie sind nur abhängig von dem Abstand  $p$  des betrachteten Punktes vom Centrum der beiden Kugelflächen, und können aus den Formeln des § 15 entnommen werden.

Für  $p > R_2$  liegt der Punkt aufserhalb beider geladenen Flächen; dort ist  $\varphi_1 = - \frac{e}{p}$ ,  $\varphi_2 = - \frac{e}{p}$ , mithin

$$\varphi_a = - \frac{e}{p} + \frac{e}{p} = 0. \quad (59a)$$

Das Gesamtpotential ist im ganzen äufseren Raume gleich Null, die beiden elektrischen Felder der beiden Belegungen heben sich dort auf, es besteht keinerlei Wirkung.

Für  $p < R_1$  liegt der Punkt innerhalb beider Kugelflächen; dort ist  $\varphi_1 = - \frac{e}{R_1}$  und  $\varphi_2 = + \frac{e}{R_2}$ , mithin

$$\varphi_i = - \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2} = - e \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \quad (59i)$$

Im Hohlraum der inneren Kugelfläche herrscht also ein constantes negatives Potential, ein elektrisches Feld besteht auch dort nicht.

Für  $R_1 < p < R_2$  liegt der Punkt zwischen der inneren, negativ geladenen, und der äufseren, positiv geladenen Kugelfläche. Dort ist  $\varphi_1 = - \frac{e}{p}$ ,  $\varphi_2 = + \frac{e}{R_2}$ , also das Gesamtpotential:

$$\varphi_m = - \frac{e}{p} + \frac{e}{R_2}. \quad (59m)$$

In diesem mittleren Raumgebiet steigt also das Potential  $\varphi_m$  stetig von dem negativen Grenzwert  $\varphi_i$  für  $p = R_1$  an bis zu dem

Grenzwert 0, welcher für  $p = R_2$  gilt. Hier herrscht auch ein elektrisches Feld, welches ebenso stark ist, als wenn nur die negative Belegung der inneren Kugelfläche allein vorhanden wäre. Wenn wir die im vorigen Paragraphen empfohlene graphische Darstellung auf diesen Fall anwenden, und als Abscisse des Diagramms den Radiusvector  $p$  verwenden, welcher ja beide geladenen Flächen senkrecht durchsetzt, so erhalten wir für den Verlauf der Curve  $\varphi$  folgendes Bild (Figur 5). Das Stück  $\varphi_m$  gehört einer gleichseitigen Hyperbel an, deren Asymptoten den Diagrammaxen parallel laufen.

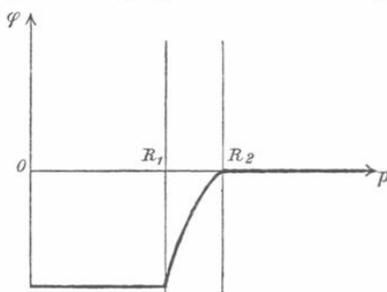


Fig. 5.

Wir wollen nun die beiden Kugelflächen bis auf einen verschwindenden Abstand  $R_2 - R_1 = \delta R$  einander nähern. Die beiden Radien  $R_1$  und  $R_2$  streben dann gegen eine gemeinsame Grenze, die wir mit  $R$  bezeichnen; sie ist der Radius der kugelförmigen Doppelschicht. Die beiden Flächendichtigkeiten (58<sub>1</sub>) und (58<sub>2</sub>) streben den entgegengesetzt gleichen Werthen  $\mp \frac{e}{4\pi R^2}$  zu. Nennen wir:

$$\frac{e}{4\pi R^2} = e, \quad (60)$$

so wird im Grenzfall

$$e_1 = -e \quad \text{und} \quad e_2 = +e.$$

Der Potentialwerth im inneren Hohlraum wird dann nach (59i)

$$\varphi_i = -e \frac{\delta R}{R^2} = -4\pi R^2 \cdot e \cdot \frac{\delta R}{R^2} = -4\pi e \cdot \delta R,$$

während im äußeren Raume bleibt:

$$\varphi_a = 0.$$

Der Sprung, den das Potential selbst beim Durchgang durch die Doppelschicht erfährt, wird also

$$\varphi_a - \varphi_i = 4\pi e \cdot \delta R. \quad (60a)$$

Läßt man bei diesem Grenzübergang die Ladungen unverändert, so muß die Sprunggröße wegen des Factors  $\delta R$  verschwinden, denkt man aber die Ladungen in demselben Maasse verstärkt, wie der Abstand der Flächen vermindert wird, so kann das Product  $e \cdot \delta R$

beim Grenzübergang einen festen endlichen Werth behalten, der dann unabhängig davon ist, wie weit man die Verkleinerung des  $\delta R$  in der Vorstellung treibt. Dies wollen wir jetzt als erfüllt ansehen. Das feste Product

$$e \cdot \delta R = \mathfrak{M} \quad (60b)$$

nennt man das Moment der Doppelschicht.

Die Bezeichnung Moment ist hergenommen von der Analogie mit dem Drehungsmoment eines Kräftepaars an einem Hebelarm. Dieses ist gleich Kraft mal Hebelarm und behält ebenfalls einen festen Grenzwert, wenn bei verschwindendem Hebelarm die Intensität der Kräfte entsprechend gesteigert wird.

Die SprungröÙe des Potentials wird nun

$$\varphi_a - \varphi_i = 4 \pi \mathfrak{M}, \quad (60c)$$

behält also bei verschwindender Dicke der Doppelschicht einen festen endlichen Werth, der nur von dem Moment  $\mathfrak{M}$  abhängt. Die Krümmung der Kugelfläche, also deren Radius, hat keinen Einfluß auf den Werth des Sprunges.

Als ein zweites Beispiel wollen wir eine Doppelschicht zusammensetzen aus zwei coaxialen ebenen Kreisscheiben vom Radius  $R$ , welche mit entgegengesetzt gleichen Elektrizitätsmengen gleichmäÙig belegt sind.

Die gemeinsame Axe sei die  $x$ -Axe. In der Ebene  $x = 0$  liege die mit der Dichtigkeit  $-e$  belegte Scheibe, in der Ebene  $x = h$  ( $> 0$ ) liege die mit  $+e$  belegte.

Das Potential für Punkte auf der  $x$ -Axe können wir nach den in § 14 entwickelten Formeln zusammensetzen. Von der negativen Scheibe rührt her:

$$\varphi_- = -2 \pi e (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}),$$

von der positiven Scheibe:

$$\varphi_+ = +2 \pi e (\sqrt{(x-h)^2 + R^2} - \sqrt{(x-h)^2}).$$

Die Wurzeln sind überall absolut zu nehmen. Beide Potentiale superponiren sich. Die  $x$ -Axe zerfällt in drei Gebiete:

- |                  |   |
|------------------|---|
| 1. $x < 0$ ;     | dort nennen wir das Potential $\varphi_1$ , |
| 2. $0 < x < h$ ; | „ „ „ „ „ $\varphi_2$ ,                     |
| 3. $h < x$ ;     | „ „ „ „ „ $\varphi_3$ .                     |

Man findet

$$\varphi_1 = -2\pi e (\sqrt{x^2 + R^2} + x) + 2\pi e (\sqrt{(h-x)^2 + R^2} - h + x)$$

$$\varphi_2 = -2\pi e (\sqrt{x^2 + R^2} - x) + 2\pi e (\sqrt{(h-x)^2 + R^2} - h + x)$$

$$\varphi_3 = -2\pi e (\sqrt{x^2 + R^2} - x) + 2\pi e (\sqrt{(x-h)^2 + R^2} + h - x)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi e \left\{ -h + \sqrt{(h-x)^2 + R^2} - \sqrt{x^2 + R^2} \right\} \\ \varphi_2 &= 2\pi e \left\{ 2x - h + \sqrt{(h-x)^2 + R^2} - \sqrt{x^2 + R^2} \right\} \\ \varphi_3 &= 2\pi e \left\{ +h + \sqrt{(x-h)^2 + R^2} - \sqrt{x^2 + R^2} \right\} \end{aligned} \right\} (61)$$

Wir wollen nun den Abstand  $h$  im Verhältniß zum Radius  $R$  so klein annehmen, daß wir  $h^2$  vernachlässigen dürfen; dann können wir die erste der Quadratwurzeln abgekürzt berechnen:

$$\begin{aligned} \sqrt{(h-x)^2 + R^2} &= \sqrt{x^2 + R^2 - 2hx} = \sqrt{x^2 + R^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2hx}{x^2 + R^2}} = \\ &= \sqrt{x^2 + R^2} \cdot \left( 1 - \frac{hx}{x^2 + R^2} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{(h-x)^2 + R^2} = \sqrt{x^2 + R^2} - \frac{hx}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Dies eingesetzt in die vorstehenden Ausdrücke giebt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi e h \cdot \left\{ -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\} \\ \varphi_2 &= 2\pi e h \cdot \left\{ \frac{2x}{h} - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\} \\ \varphi_3 &= 2\pi e h \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\} \end{aligned} \right\} (61a)$$

Setzen wir nun wieder

$$e \cdot h = \mathfrak{M}$$

das Moment der Doppelschicht unabhängig von der Dicke  $h$ , so können wir zur Grenze  $h = 0$  gehen. Außer in dem constant bleibenden Momente ( $e \cdot h$ ) kommt die verschwindende Größe  $h$  nur noch in dem Gliede  $\frac{2x}{h}$  der geschweiften Klammer von  $\varphi_2$  vor. Da aber

hier  $0 < x < h$  bleibt, so schwankt das Glied nur zwischen den Zahlen 0 und 2, bleibt also endlich. Ueberhaupt bleibt das Potential

endlich und stetig, wenn es auch in dem engen Zwischenraum der Doppelschicht einen sehr steilen Anstieg besitzt. Betrachtet man aber die Grenzwerte von  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$  dicht an den beiden Seiten der Doppelschicht, also für verschwindend kleine Werthe von  $x$ , so findet man

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -2\pi e h = -2\pi \mathfrak{M}, \\ \varphi_3 &= +2\pi e h = +2\pi \mathfrak{M}.\end{aligned}$$

Das giebt den endlichen Sprung

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 4\pi \mathfrak{M}, \quad (62)$$

welcher dieselbe GröÙe hat wie derjenige an der vorher betrachteten Kugeldoppelschicht, diesmal unabhängig vom Radius der Scheiben.

Während aber bei der Kugel die elektrischen Wirkungen sowohl im inneren wie im äußeren Raume sich vollständig vernichteten, bleibt hier bei der Scheibe zu beiden Seiten ein elektrisches Feld übrig, dessen Intensität man für die auf der  $x$ -Axe gelegenen Punkte leicht berechnen kann, indem man die Ausdrücke (61a) nach  $x$  differenzirt. Man findet so:

$$\left. \begin{aligned}Z_1 &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{M} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}} \\ Z_2 &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -2\pi \mathfrak{M} \left\{ \frac{2}{h} - \frac{1}{R} \right\} \\ Z_3 &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{M} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{(x^2 + R^2)^3}}\end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Die Kraft  $Z_2$  wird für verschwindendes  $h$  negativ unendlich, im äußeren Raume dagegen ist  $Z_1$  sowohl wie  $Z_3$  durch denselben positiven Ausdruck gegeben. Scheidet man also den Zwischenraum 2) aus, so kann man sagen, der Differentialquotient von  $\varphi$  nach der Normale bleibt zu beiden Seiten der Doppelschicht stetig. Der Verlauf von  $\varphi$  als Function von  $x$  wird am besten durch das Diagramm Figur 6 auf folgender Seite illustriert.

Das Uebrigbleiben von elektrischer Kraft im äußeren Raum läßt sich anschaulich erklären durch die offenen Ränder, mit denen die scheibenförmige Doppelschicht abschließt. Betrachtet man nämlich den Ausdruck der elektrischen Kraft einer einfach belegten Scheibe (§ 14), welchen man schreiben kann:

$$Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\pi e \cdot \left( \pm 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

so sieht man, daß dieser sich nicht ändert, wenn man  $x$  und  $R$  im gleichen Maafse vergrößert oder verkleinert: Eine Scheibe von doppelt so großem Radius übt aus doppelter Entfernung die gleiche Kraft aus. Verschiedene coaxiale Scheiben, welche auf einen Punkt der  $x$ -Axe alle die nämliche Wirkung ausüben sollen, müssen mit ihren Rändern auf ein und demselben Kegelmantel liegen, dessen Spitze der ausgewählte Punkt ist. Zwei benachbarte Kreisschnitte des Kegels, mit entgegengesetzt gleicher Flächendichtigkeit belegt, werden also ihre Wirkung in der Kegelspitze gerade aufheben. Dabei ist der der Spitze nähergelegene Querschnitt etwas kleiner. Unsere beiden Kreisflächen sind aber gleich groß. Würde man z. B. von einem Punkte der positiven  $x$ -Axe den Kegelmantel durch den Rand der negativ geladenen Fläche legen, so würde er von der positiv geladenen Fläche einen Ring abschneiden, welcher auferhalb bleibt. Die von dem Mantel umhüllte positive Ladung wird durch die ge-

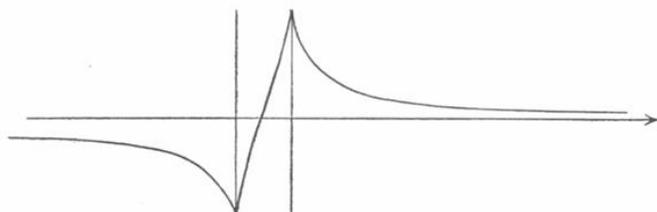


Fig. 6.

samte negative Ladung in der Spitze des Kegels unwirksam gemacht. Dagegen bleibt die positive Ladung auf dem Randring wirksam und erzeugt die elektrische Kraft. Bei verschwindender Schichtdicke  $h$  wird allerdings der Randring verschwindend schmal, dafür aber die Flächendichtigkeit  $+e$  entsprechend groß.

Die soeben betrachtete gleichmäßige Belegung zweier Kreisflächen mit entgegengesetzt gleichen Ladungen ist nahezu verwirklicht bei den Platten-Condensatoren.

### § 19. Doppelschichten von beliebiger Art.

Der Begriff der elektrischen Doppelschichten, den wir an zwei leicht übersehbaren Beispielen kennen lernten, läßt sich verallgemeinern einmal dadurch, daß die Gestalt der Fläche unbestimmt gelassen wird, und ferner durch die Möglichkeit, daß das Moment der Doppelschicht von Stelle zu Stelle veränderliche Werthe besitzt.

Alsdann ist es zwar nicht mehr möglich die Potentialfunctionen der Belegungen durch geschlossene Rechenausdrücke explicite anzu-

geben, aber das Gesetz über den Potentialsprung, welches wir in den Sonderfällen Gleichungen (60c) und (62) gefunden hatten, läßt sich auch hier nachweisen.

Die Doppelschicht bilden wir in der Vorstellung auf folgende Weise:

Auf einer beliebig gestalteten Fläche im Raume, von der wir einstweilen nur verlangen wollen, daß sie nirgends unendlich starke Krümmung (d. h. Kanten oder Ecken) besitze, denken wir in allen Punkten nach ein und derselben Seite hin Normalen errichtet von der gemeinsamen Höhe  $h$ , welche wir von vornherein als klein im Verhältniß zum Radius der stärksten vorkommenden Flächenkrümmung festsetzen wollen. Den kleinen Bruch, welcher dieses Längenverhältniß mißt, nennen wir  $\alpha$ . Das Continuum der Endpunkte dieser Normalen bildet dann eine der ersten benachbarte, zweite Fläche, auf welcher, wie man leicht einsieht, die Normalen der ersten Fläche ebenfalls senkrecht stehen müssen. Die Beziehung der beiden Nachbarflächen zu einander ist durchaus wechselseitig; würden wir etwa einmal die zweite Fläche als die ursprünglich vorgeschriebene ansehen, so würde die Errichtung von rückwärts gerichteten Normalen  $h$  auf ihr zu genau derjenigen Fläche führen, die wir hier als die erste bezeichnet haben. Beide Flächen sind Punkt für Punkt auf einander bezogen durch die gemeinsamen Normalen. Auch den Flächenelementen  $ds_1$ , in welche man die Fläche 1 beliebig zertheilen kann, correspondiren bestimmte Elemente  $ds_2$  der Fläche 2 dadurch, daß ihre Randlinien durch gemeinsame Normalen verbunden sind. Der Größe nach sind die correspondirenden  $ds_1$  und  $ds_2$  nahezu gleich; an Stellen, wo die Fläche 1 nach der Seite der Normalen hin convex ist, werden die  $ds_2$  ein wenig größer als die  $ds_1$ , an concaven Stellen werden sie ein wenig kleiner; jedenfalls liegt das Größenverhältniß beider überall näher am Werthe 1 als die Zahl  $1 \pm 2\alpha$ . (Erreicht wird diese Grenze an der Stelle von kleinstem Krümmungsradius nur dann, wenn dort die Krümmung kugelförmig gestaltet ist.)

Diese beiden Flächen denken wir nun mit Elektrizität belegt in der Weise, daß auf jedem Paar correspondirender Flächenelemente entgegengesetzte und absolut gleich große Mengen verbreitet sind. Die Anordnung der Flächendichtigkeit kann dabei auf einer der beiden Flächen willkürlich vorgeschrieben sein. So wollen wir annehmen, auf der Fläche 1 sei  $e_1$  eine im Allgemeinen von Ort zu Ort stetig veränderliche Dichtigkeit, welche freilich an gewissen Trennungslinien oder am offenen Rande der Fläche (wenn ein solcher

vorhanden) auch sprungweise Aenderungen zeigen darf. Auch Vorzeichenwechsel von Stelle zu Stelle sollen nicht ausgeschlossen sein. Im Innern hinreichend enger Flächenelemente  $ds_1$  wird man die Vertheilung als gleichförmig ansehen dürfen.

Nach unserer Vorschrift ist nun hierdurch auch die Anordnung der Dichtigkeit  $e_2$  auf der Fläche 2 bestimmt. Die Werthe  $e_1$  und  $e_2$ , welche an correspondirenden Punkten herrschen, werden nahezu einander entgegengesetzt gleich. An Stellen, wo die  $ds_2$  etwas größer als die  $ds_1$  sind, wird  $|e_2|$  etwas kleiner als  $|-e_1|$  ausfallen, jedenfalls bleibt, wie man leicht durchschaut, das Verhältniß  $e_2:e_1$  näher an dem Werthe  $-1$  als die Zahl  $-1 \pm 2\alpha$ . Man kann dafür auch schreiben

$$|e_1 + e_2| < 2\alpha e_1 \text{ oder auch } |e_1 + e_2| < 2\alpha e_2. \quad (64)$$

Um nun den Verlauf des Potentials an dieser Doppelschicht zu erkennen, wählen wir zwei Beobachtungspunkte, welche mit zwei correspondirenden Punkten der beiden Flächen in der Lage zusammenfallen, von denen wir uns aber vorstellen wollen, daß sie deutlich auf der Außenseite der Schicht liegen, wengleich ihr Abstand von einander ebenfalls gleich  $h$  zu setzen ist. Wir haben es hier mit dem Potential  $\varphi$  zweier Flächenbelegungen zu thun, und wissen darüber schon aus den früheren Betrachtungen, daß das Potential in einer belegten Fläche selbst endlich und stetig bleibt, sogar wenn die Dichtigkeit der Belegung dort in gewisser mäßiger Weise über alle Grenzen wächst, daß aber die Differentialquotienten nach der Normale beim Durchgang durch die Fläche springen proportional der Dichtigkeit. Wir wollen dem entsprechend das Potential  $\varphi$  in unserem Falle zerlegen in einen Summanden  $\varphi_1$ , welcher von der Belegung  $e_1$  der Fläche 1 herrührt und einen Summanden  $\varphi_2$  von der anderen Fläche her. Noch einen dritten Summanden, herrührend von irgend welchen sonst im Raume vorhandenen Ladungen, könnte man hinzufügen, doch bleibt dieser ohne jeden Einfluß auf die Betrachtung, und mag ebenso wie eine willkürliche additive Constante hier fortbleiben. Es ist also:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (65)$$

Die Werthe, welche in dem Beobachtungspunkt an der ersten Fläche gelten, seien mit  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\varphi}_1$ ,  $\bar{\varphi}_2$  bezeichnet, die Werthe in dem zweiten Beobachtungspunkt seien  $\bar{\bar{\varphi}}$ ,  $\bar{\bar{\varphi}}_1$ ,  $\bar{\bar{\varphi}}_2$ . Wegen der Stetigkeit der Potentialfunktionen kann man in der Nähe dieser beiden Stellen Reihenentwickelungen dafür setzen, und da wir die Länge  $h$  nachher

gegen Null abnehmen lassen wollen, solche, welche nach dem linearen Gliede abbrechen. Um die beiden entgegengesetzten Normalrichtungen zu unterscheiden, wollen wir diejenige, welche von der Fläche 2 nach der Fläche 1 zeigt, mit  $n_i$ , diejenige, welche von 1 nach 2 zeigt, mit  $n_a$  bezeichnen. Unter  $h$  verstehen wir den absoluten Betrag des Abstandes der beiden Flächen, also auch der beiden Beobachtungspunkte. Dann ist

$$\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_1 + \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} \cdot h,$$

$$\overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_2 + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} \cdot h$$

und somit

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} \cdot h,$$

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 + \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} \cdot h$$

und schliesslich durch Subtraction:

$$\overline{\varphi} - \overline{\varphi} = \left( \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} - \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} \right) \cdot h. \quad (65 a)$$

Für die Sprünge der Differentialquotienten gelten die von früher her bekannten Ausdrücke [vergl. Gleichung (56 a)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_i} + \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} &= -4\pi e_1 \quad \text{an der Fläche 1,} \\ \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_a} &= -4\pi e_2 \quad \text{an der Fläche 2.} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Jede dieser beiden Relationen können wir benutzen zur Umformung der rechten Seiten von (65 a). Nehmen wir die zweite, so erhalten wir:

$$\overline{\varphi} - \overline{\varphi} = \left( \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_a} + 4\pi e_2 \right) \cdot h. \quad (66 a)$$

Nehmen wir die erste Relation, so entsteht:

$$\overline{\varphi} - \overline{\varphi} = \left( -4\pi e_1 - \frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_i} - \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} \right) \cdot h. \quad (66 b)$$

Um die Identität der beiden rechten Seiten dieser Gleichungen brauchen wir uns nur zu kümmern für verschwindendes  $h$ , also auch nur für den Werth 0 des früher benutzten Bruches  $\alpha$ . Dann ist

$$e_1 = -e_2, \quad (66 \text{ c})$$

und da die beiden Flächen 1 und 2 nunmehr zusammenfallen und mit durchaus gleichen, aber entgegengesetzten Flächenbelegungen geladen sind, wird der Verlauf von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  im Grenzfall bis auf das entgegengesetzte Vorzeichen der gleiche. Verfolgt man also beide Functionen, jede von der Fläche aus, welcher sie entspringt, in der Richtung  $n_a$ , so muß ihr Gefälle gleich groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sein oder die Summe beider Gefälle muß verschwinden:

$$\frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_a} + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_a} = 0. \quad (66 \text{ d})$$

Das Gleiche findet man, wenn man die Differentialquotienten nach  $n_i$  bildet:

$$\frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial n_i} + \frac{\overline{\partial \varphi_2}}{\partial n_i} = 0. \quad (66 \text{ e})$$

In Folge dieser Gleichungen (66 c, d, e) gehen die beiden Ausdrücke (66 a und b) über in

$$\overline{\varphi} - \overline{\varphi} = 4\pi e_2 h = -4\pi e_1 \cdot h.$$

Lassen wir nun das Product aus Flächendichtigkeit und Abstand beim Verschwinden des letzteren einen festen Grenzwert  $\mathfrak{M}$  annehmen, den wir das Moment der Doppelschicht an der betrachteten Stelle nennen, setzen also

$$\lim_{h=0} (e_2 h) = \lim_{h=0} (-e_1 h) = \mathfrak{M},$$

so wird

$$\overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi} = 4\pi \mathfrak{M}. \quad (67)$$

Der Sprung des Potentials beim Durchgang durch die Doppelschicht ist gleich deren Moment an der Durchgangsstelle, multiplicirt mit  $4\pi$ , und zwar springt das Potential hinauf, wenn zuerst die negative, dann die positive Belegung durchschritten wird, im entgegengesetzten Falle springt das Potential hinab.

Eine Fernwirkung kann von einer solchen beliebigen Doppelschicht im Allgemeinen wohl ausgehen. Wir hatten unter den ein-

fachen Beispielen im vorigen Paragraphen einen Fall ohne Fernwirkung (Kugel) und einen mit Fernwirkung (Scheibe) gefunden. Für das Potential eines Feldes, welches von einer Doppelschicht herrührt, läßt sich ein charakteristischer Integralausdruck aufstellen. Zunächst ist, wie bei allen Flächenbelegungen:

$$\varphi = \iint \frac{e_1 ds_1}{r_1} + \iint \frac{e_2 ds_2}{r_2} .$$

Dabei bedeuten  $r_1$  und  $r_2$  die Abstände eines Beobachtungspunktes im Raume von den Flächenelementen beider Belegungen. Wir nehmen die  $ds_1$  und  $ds_2$  als correspondirende Flächenelemente, dann ist nach Definition der Doppelschicht

$$e_1 ds_1 = - e_2 ds_2$$

und wir können beide Integrale in eines zusammenfassen:

$$\varphi = \iint e_2 ds_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) .$$

Nun unterscheidet sich  $r_2$  dadurch von  $r_1$ , daß es hingerichtet ist nach einem Flächenelement, welches von  $ds_1$  aus in der Richtung der Normale  $n_a$  um die Strecke  $h$  verschoben erscheint. Benutzen wir sogleich den Umstand, daß  $h$  gegen die Grenze Null streben soll, so können wir durch ein Differential den Zuwachs des reciproken Radius bei dieser Verschiebung  $h$  ausdrücken. Es ist

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{\partial}{\partial n_a} \left( \frac{1}{r_1} \right) \cdot h,$$

also

$$\varphi = \iint ds_2 \cdot e_2 \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial n_a} \left( \frac{1}{r_1} \right) .$$

Da bei verschwindendem  $h$  die correspondirenden Flächenelemente zusammenfallen, so können wir bei  $ds_2$  und  $r_1$  die Zahlenindices weglassen. Ferner bezeichnen wir, wie vorher

$$e_2 \cdot h = \mathfrak{M}$$

und lassen auch bei  $n_a$  den Index weg, behalten jedoch im Sinne, daß  $n$  die Normale auf derjenigen Seite der Doppelschicht bedeutet, deren Belegung ( $e_2$ ) im Vorzeichen mit dem Moment übereinstimmt. Dann ist

$$\varphi = \iint ds \cdot \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) . \quad (68)$$

Dieser Ausdruck besitzt eine Bildung, welche uns später noch wiederbegegnen wird, und für den wir dann sofort eine Deutung haben werden.

Wenn die Fläche, auf welcher die Doppelschicht liegt, geschlossen ist, und wenn ferner das Moment überall die gleiche Gröfse besitzt, so ist

$$\varphi = \mathfrak{M} \iint ds \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (68 a)$$

Von diesem Ausdruck läfst sich zeigen, dafs er für alle Punkte im äufseren Raume gleich Null ist, und für alle Punkte im Hohlraume der Fläche einen constanten Werth besitzt  $= \pm 4\pi \mathfrak{M}$ . Daraus folgt, dafs geschlossene Doppelschichten von beliebiger Gestalt, aber gleichmäfsig starkem Moment keine Fernwirkung ausüben.

Während das Potential selbst an einer Doppelschicht springt, bleibt aber dessen Differentialquotient nach der Normalen daselbst stetig, weil die beiden Sprünge von  $\partial \varphi / \partial n$ , welche den beiden einzelnen Belegungen entsprechen, entgegengesetzt gleich sind und sich deshalb aufheben. Dagegen mufs Unstetigkeit tangentialer Differentialquotienten zu beiden Seiten einer Doppelschicht von örtlich veränderlichem Moment auftreten, weil die Gröfse des Potential-sprunges mit dem Moment wechselt, also der Anstieg oder der Abfall des Potentials von Punkt zu Punkt der Doppelschicht auf beiden Seiten von ungleicher Gröfse sein mufs.

## § 20. Zusammenfassung der Beziehungen zwischen Ladungen und Potentialen.

Wir haben durch die bisherigen Betrachtungen die Hilfsmittel gewonnen um aus einem im Raume gegebenen Verlaufe der Werthe des elektrischen Potentials  $\varphi$  diejenige Vertheilung der Ladungen zu erkennen, welche das definirte Feld erzeugen, und auch umgekehrt aus gegebener statischer Vertheilung das zugehörige Potential zu berechnen.

Es sei zunächst  $\varphi$  eine eindeutige, beliebig vorgeschriebene Function der Raumkoordinaten. Sie selbst, wie auch ihre ersten und zweiten Differentialquotienten sollen im Allgemeinen überall stetigen Verlauf besitzen, jedoch soll es zulässig sein, dafs an gewissen gegebenen Flächen Sprünge des Verlaufes von  $\varphi$ , an anderen solche der ersten, an noch anderen solche der zweiten Differential-

quotienten von  $\varphi$  auftreten, auch dürfen Unstetigkeitsflächen der verschiedenen Arten zusammenfallen.

Man braucht dann erstens aus dem vorgeschriebenen Verlauf von  $\varphi$  nur denjenigen von  $\Delta\varphi$  abzuleiten, was an allen Stellen aufser den Unstetigkeitsflächen zu eindeutig bestimmten, endlichen Werthen führt, und man hat in dem Ausdruck

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi \quad (69)$$

die Vertheilung der erforderlichen räumlichen Dichtigkeiten. Die Unstetigkeitsflächen der zweiten Differentialquotienten von  $\varphi$  werden auch solche von  $\varepsilon$ .

Ferner hat man die Unstetigkeitsflächen der ersten Differentialquotienten von  $\varphi$  durchzunehmen, und aus den gegebenen Daten die Sprünge von  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  abzuleiten. Diese ergeben die Elektrizität, welche man auf diesen Unstetigkeitsflächen verbreitet anzunehmen hat, nach der Formel:

$$e = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} \right\}. \quad (69a)$$

Endlich erfordern die vorgeschriebenen Unstetigkeiten von  $\varphi$  Doppelschichten, deren Momente man ablesen kann nach der Formel:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (69b)$$

Sollen sich alle Ladungen, auf welche man so schliessen kann, in endlicher Entfernung befinden, und eine endliche Summe geben, so muß man freilich für den weiteren Verlauf von  $\varphi$  noch die Vorschrift hinzufügen, daß  $\varphi$  in sehr großer Entfernung  $R$  von irgend einem Punkt im Ladungsgebiet gegen Null abnimmt wie  $\frac{\text{Const}}{R}$ . Die Constante ist dann die algebraische Summe aller Ladungen, zu welcher die Doppelschichten nichts beitragen.

Hat man die umgekehrte Aufgabe zu lösen, bei welcher in einem endlichen Raumgebiet räumliche Ladungen von der vorgeschriebenen Dichtigkeit  $\varepsilon$ , Flächenbelegungen von der Dichtigkeit  $e$ , und Doppelschichten vom Moment  $\mathfrak{M}$  gegeben sind, so findet man das Potential dieser Vertheilungen in der Formel:

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon d\tau}{r} + \iint \frac{e ds}{r} + \iint \mathfrak{M} ds \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n}. \quad (70)$$

Unter  $r$  ist dabei der Abstand des Punktes, in welchem  $\varphi$  bestimmt wird, von den Ladungselementen  $\varepsilon d\tau$  und  $\varepsilon ds$ , und von den Moment-Elementen  $\mathfrak{M} ds$  zu verstehen, und die Richtung  $\partial n$ , nach welcher im letzten der drei Integrale differenzirt wird, weist von der negativen nach der positiven Belegung hin.

Dieser Ausdruck für  $\varphi$  giebt im ganzen Raume endliche eindeutige Werthe. Wenn wir freilich auch noch endlich geladene Punkte im Raume annehmen würden, so würden wir zu dem Ausdruck in Gleichung (70) noch Glieder von der Form  $\frac{e}{r}$  zusetzen müssen, welche in den geladenen Centren unendlich werden. Solche Zusätze sind hier nicht nöthig, da punktförmige Ladungen in der Natur nicht anzunehmen sind, sondern nur ein bequemes mathematisches Hilfsmittel für viele Betrachtungen bilden. Ebenso wenig brauchen wir uns hier auf geladene Linien einzulassen.

Aus der Existenz der Potentialfunction mit den Eigenschaften, daß sie überall endlich und eindeutig und im Allgemeinen auch stetig verläuft und in unendlicher Entfernung gegen Null abnimmt wie der reciproke Abstand, daraus folgen einige wichtige Eigenschaften des elektrischen Feldes, welche dessen Vertheilung sehr anschaulich machen.

Wir hatten bereits früher in § 7, als wir das Feld punktförmig gedachter Ladungen betrachteten, auf die Bedeutung der Aequipotentialflächen hingewiesen. Dieselben Betrachtungen können wir nun hier, und zwar ohne daß Ausnahmepunkte auszusparen wären, anwenden und wollen sie des Zusammenhangs wegen hier noch einmal von Anfang an darstellen. Da  $\varphi$  Function der Raumcoordinaten, z. B. der CARTESISCHEN, ist, bedeutet

$$\varphi(x, y, z) = \text{Constans}$$

nach der Lehre der analytischen Geometrie eine Fläche im Raume. Je nach der Wahl des Werthes der Constanten erhält man andere und andere Flächen, diese alle bilden eine continuirliche Schaar. Man kann auch eine diskrete Schaar von Flächen herausheben, wenn man der Constanten eine diskrete Reihe von Einzelwerthen, vortheilhaftester Weise eine arithmetische Reihe von Werthen vorschreibt. Je kleiner der Schnitt zwischen den Nachbarwerthen gewählt wird, um so enger rücken die Flächen zusammen, um so zahlreicher durchsetzen sie den Raum.

In der reinen Geometrie betrachtet man Flächenschaaren mannigfacher Art, welche dadurch geordnet sind, daß sie sich aus einer

gemeinsamen Gleichung durch Variation eines Parameters ergeben, also ähnlich wie hier. Darunter sind häufig Schaaren von Flächen, welche sich mit ihren Nachbarn durchschneiden, so daß eine gemeinsame umhüllende Fläche entsteht. Diese Erscheinung kann nun bei unseren Aequipotentialflächen niemals eintreten, weil in den Schnittcurven zweier Flächen dann die beiden verschiedenen Werthe der Constanten gelten mußten, was der Eindeutigkeit des Potentialwerthes widerspricht. Aus demselben Grunde können sich auch zwei Potentialflächen nicht berühren. (Wegen Doppelschichten siehe S. 81). Eine Aequipotentialfläche kann auch nirgends mit offenem Rande abbrechen. (Wegen Doppelschichten siehe gleichfalls S. 81). Eine solche Fläche kann sich in unendliche Entfernung erstrecken, ohne daß jemals ihre Grenze erreicht wird. Da wir aber alle Ladungen im Endlichen liegend voraussetzen, mithin überall in unendlicher Entfernung  $\varphi = 0$  ist, so kann die ins Unendliche reichende Aequipotentialfläche nur diejenige einzige sein, für welche die Constante den Werth Null besitzt. Alle übrigen müssen im endlichen Raume bleiben und doch in dem Sinne grenzenlos sein, daß sie keinen Rand besitzen, sie müssen also geschlossene Flächen sein. Dagegen ist es nicht nöthig, daß sie aus einem einzigen zusammenhängenden Stück bestehen, sie können vielmehr aus zwei oder mehreren getrennten in sich geschlossenen Theilen bestehen bei dem gleichem Werth der Constanten. Da sich nun die zu verschiedenen Constanten gehörigen Flächen nicht durchschneiden dürfen, so muß die eine die andere ganz umschließen oder von ihr ganz umschlossen werden, oder aber sie können sich auch ganz ausschließen, sind dann aber nicht benachbart. Da nun die Flächenschaar bei hinreichend kleinem Schritt der arithmetischen Constantenreihe eine sehr enggedrängte wird, bei der die Nachbarflächen dicht nebeneinander herlaufen, so wird der ganze Raum in dünne Schichten, Schalen oder Lamellen zerschnitten, deren Dicke zwar von Ort zu Ort veränderlich ist, aber nirgends verschwinden kann. Diese Lamellen, in die der Raum zerfällt, sind nun für die Anschauung des elektrischen Feldes sehr nützlich.

Erstens kann man in jedem Raumpunkt den Werth des Potentials gewissermaßen ablesen, indem man abzählt, in welcher Lamelle er liegt. Der Werth liegt dann zwischen den Constanten der beiden begrenzenden Nachbarflächen, und wenn der Schritt der Constantenreihe hinreichend klein ist, kann man ihn durch eine lineare Interpolation finden. Daraus folgt direct, daß man auch die Arbeit ablesen kann, welche bei einer bestimmten Fortführung eines elektrischen Theilchens geleistet wird, indem man abzählt, wieviel Lamellen der

Weg durchsetzt. Die in Richtung steigenden Potentials durchsetzten Lamellen sind dabei positiv, die in Richtung sinkenden Potentials durchsetzten aber negativ zu zählen. Ist die so gefundene Zahl  $N$  und nennen wir den festen Schritt der Constantenreihe  $\delta$ , so ist  $N \cdot \delta$  der Ueberschufs des Potentials im Endpunkt über dessen Werth im Ausgangspunkt, und diese Differenz giebt multiplicirt mit der bewegten Ladung die geleistete Arbeit. Vergl. Gleichung (16a) auf S. 23.

Zweitens kann man Richtung und Intensität der elektrischen Kraft an jeder Stelle des Feldes unmittelbar erkennen. Nämlich das Gefälle der Potentialfunction ist selbstverständlicher Weise in allen tangentialen Richtungen zu den Niveauflächen gleich Null und hat normal auf ihnen den grōfsten Wert; in der Richtung des steilsten Abfalls von  $\varphi$  liegt aber der Pfeil der elektrischen Kraft. Denkt man also Linien im Raume, welche die Niveauflächen überall senkrecht durchsetzen, so folgen diese der Richtung der elektrischen Kraft. Sie heifsen nach FARADAYS Bezeichnung Kraftlinien. Man kann sie im Allgemeinen eindeutig und stetig verfolgen. Aber nicht nur über die Richtung der Kraft, sondern auch über deren Grōfse gewinnt man Aufschluss. Man kann nämlich bei hinreichend dichter Niveaufächenschaar die Stücke der im Allgemeinen stetig gekrümmten Kraftliniencurven, soweit sie zwischen zwei Nachbarflächen liegen, als geradlinige Längenelemente ansehen, welche auf beiden Flächen senkrecht stehen und die Dicke  $h$  der Lamelle an der betreffenden Stelle messen. Ist das Gefälle in der Normalrichtung mit  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E}$  bezeichnet, so hat man für den Uebergang aus einer Fläche in die Nachbarfläche die Gleichung

$$\delta = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot h = \mathfrak{E} \cdot h. \quad (71)$$

Da nun  $\delta$  zufolge der Anlage der Niveauflächen im ganzen Raume constant denselben Werth besitzt, so ist auch das Product  $E \cdot h$  constant, mithin die Stärke der elektrischen Kraft allenthalben umgekehrt proportional der Schichtdicke der Lamellen, ja man kann den Betrag im absoluten Maafse ablesen, wenn  $\delta$  in solchem Maafse bekannt ist und  $h$  in Centimetern gemessen wird.

Ueber den Verlauf der Kraftlinien kann man im Allgemeinen aussagen, daß sie, von einem Ausgangspunkt an verfolgt, nicht wieder zu diesem zurückführen können, auch nicht zu einem Punkt, der mit dem Ausgangspunkt auf gleicher Niveaufläche liegt. Denn

wenn man immer in Richtung des Gefälles von  $\varphi$  fortschreitet, kann man nicht zu dem Anfangswerth zurückkehren, also bei eindeutigem Potential auch nicht zum Ausgangspunkt. Die Doppelschichten, an deren beiden Seiten ja Potentialwerthe von endlicher Differenz herrschen, lassen allerdings geschlossene Kraftlinien möglich erscheinen, nämlich solche, welche auf der einen Belegung beginnen und mit Umgehung eines offenen Randes der Doppelschicht auf dem correspondirenden Punkt der anderen Belegung endigen. Dann fällt bei verschwindender Dicke der Doppelschicht allerdings Anfangs- und Endpunkt der Kraftlinie zusammen, diese erscheint geschlossen. So lange wir indessen die Doppelschicht als ein reales elektrostatisches Gebilde betrachten, bleibt doch immer der, wenn auch verschwindend dünne Raum zwischen den beiden unendlich starken Belegungen übrig, in welchem auch ein unendlich starkes Feld von entgegengesetzter Richtung herrscht. Man kann in gewissem Sinne sagen, eine Doppelschicht verhält sich wie eine Trennungsfläche, welche den Kraftlinien den Durchgang versperrt.

Im Gebiete der elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen kommen aber thatsächlich in sich zurücklaufende Kraftlinien vor, welche man ohne Unterbrechung beliebig oft in Richtung fallenden oder steigenden Potentials durchlaufen kann. In solchen Feldern ist aber das Potential nicht eindeutig, sondern besitzt eine unendliche Reihe von Werthen, und zwar sinkt oder steigt bei jeder vollen Umkreisung, also Rückkehr zum selben Punkte, der Potentialwerth um den gleichen Betrag, den wir die Periode nennen wollen. Ferner ist dabei wichtig, daß solche Potentialfelder mit geschlossenen Kraftlinien niemals im ganzen Raume existiren, sondern immer nur in mindestens zweifach zusammenhängenden Raumgebieten, während in den ausgeschlossenen, ebenfalls mehrfach zusammenhängenden Gebieten die Feldintensität überhaupt nicht als Gefälle einer Potentialfunction dargestellt werden kann.

Könnte man z. B. in einem Eisenring die pollose magnetische Induction während eines endlichen Zeitintervalls ganz gleichmäßig zunehmen oder abnehmen lassen (allerdings praktisch kaum realisirbar), so würde in dem vom Eisenring ausgesparten zweifach zusammenhängenden Raume während dessen ein zeitlich constantes elektrisches Feld herrschen, dessen Potential die hier charakterisirte Eigenschaft besitzt. Jede elektrische Kraftlinie ist als geschlossene Curve mit dem Eisenring verschlungen wie zwei zusammenhängende Kettenglieder. (Sobald das Wachsthum der magnetischen Induction ungleichmäßig ist, wird dieses Beispiel hinfällig, weil dann die

elektrische Feldstärke schwankt und auf zeitlich variable Vorgänge der Potentialbegriff keine Anwendung findet.) Die entsprechende Erscheinung eines magnetischen Feldes (für welches ganz analoge Begriffe gelten) mit vieldeutigen Potentialwerthen kann man sehr leicht experimentell verwirklichen in dem Raume um einen von constantem galvanischem Strome durchflossenen Ringleiter.

Nun kann man einen zweifach zusammenhängenden Raum durch eine Schnittfläche in einen einfach zusammenhängenden verwandeln, wobei dann beide Seiten der Schnittfläche mit zur Begrenzung zu rechnen sind. Wir denken also in den Eisenring resp. in den ringförmigen Stromleiter wie in einen Rahmen irgend eine Fläche gespannt, durch welche der Durchtritt verhindert sein soll. Alsdann ist auch ein wiederholtes Durchlaufen der ringförmigen Kraftlinien unmöglich; man kann höchstens auf der einen Seite der Trennungsfläche beginnen und einer Kraftlinie auf einer einmaligen Umkreisung folgen bis man auf dem correspondirenden Punkt der anderen Seite angelangt ist. Dann ist man wieder am selben Ort im Raum, man kann aber nicht weiter. Das elektrische resp. magnetische Potential ist dabei gesunken oder gestiegen gerade um den Betrag einer Periode. Wir stehen also vor dem Ergebnifs, dafs das Potential an beiden Seiten der Trennungsfläche verschiedene Werthe hat, dort unstetig ist; aber die Vieldeutigkeit ist jetzt ausgeschlossen. Dieses Feld könnte durch elektrostatische resp. magnetostatische Belegung der Trennungsfläche mit einer Doppelschicht erzeugt werden, deren überall gleich starkes Moment aus der Bedingung:  $4\pi M =$  Periode folgt. Freilich dürften statische Belegungen der Ringoberflächen, wenn diese breit genug sind, auch noch nötig sein zur getreuen Wiedergabe des Feldes, für sehr dünne Ringe indessen genügt die Doppelschicht, und man sieht hieraus, dafs deren Fiktion mitunter von Nutzen sein kann, um ein elektromagnetisches Problem auf ein statisches zurück zu führen.

Der Potentialwerth war in diesen Fällen wenigstens bis auf ein unbestimmtes Vielfaches der Periode bekannt. Ganz unbestimmt wird er, wenn man zwei solche Ringe im Raume annimmt und die beiden Perioden, welche der Durchschlingung jedes einzelnen entsprechen, incommensurabel sein läfst. Dann kann man durch genügend häufige Umschlingung beider Ringe in geeigneten Umdrehungssinnen freilich das Potential in einem Punkt jedem gewünschten Zahlenwerth beliebig nahe bringen.

Aber das Feld — die Richtung und Intensität — also das Gefälle von  $\varphi$  bleibt trotzdem eindeutig.

Nach diesem vorläufigen Ausblick auf ein Gebiet, welches wir erst später behandeln werden, kehren wir zurück zu den elektrostatischen Feldern mit eindeutigem Potential, um noch einige typische Erscheinungen des Verlaufs der Niveauflächen und der Kraftlinien zu betrachten an Stellen des Raumes, wo einfache Flächenbelegungen und wo Doppelschichten liegen.

Laufen Kraftlinien unter schrägem Winkel durch eine mit Electricität belegte Fläche, so werden sie dabei gebrochen. Zerlegt man nämlich die elektrische Kraft zu beiden Seiten in eine Componente normal zur Fläche und eine tangentiale, so hat erstere beiderseits verschiedene Werthe, weil  $\partial\varphi/\partial n$  unstetig ist, während die zweite beiderseits gleichen Werth hat, die Resultanten müssen dabei diesseits und jenseits verschiedene Richtung haben, aber beide Richtungen müssen mit der Normalen in einer Ebene (Einfallsebene) liegen. Nur in dem Falle, daß die Kraftlinien selbst in Richtung der Normalen auf der Fläche stehen, bleiben sie ungebrochen. Da nun ferner die Aequipotentialflächen beiderseits senkrecht zu den Kraftlinien verlaufen, müssen solche, wo sie eine Flächenbelegung durchsetzen, längs der Schnittcurve geknickt erscheinen, ohne daß indessen ihr Zusammenhang zerrissen wird. Die Dicke  $h$  der Lamellen vom festen Potentialschritt  $\delta$  ist zu beiden Seiten der Belegung verschieden. Nur in dem Falle, daß die belegte Fläche selbst zu den Aequipotentialflächen gehört, tritt kein solcher Knick auf, weil eben keine der anderen Flächen sie durchsetzt; aber die Unstetigkeit von  $h$  besteht auch dann. Die Dicke der Lamellen, die sonst im Raume bei den Nachbarn nahezu die gleiche ist, wird plötzlich verändert, wenn eine der Trennungsf lächen geladen ist.

Anders ist die Störung des Verlaufs, wo die Niveauf lächen eine Doppelschicht durchsetzen: Die Doppelschicht zwingt die Niveauf lächen, welche auf sie stoßen, ein endliches Stück ihres Verlaufes in ihr selbst zurückzulegen, bis sie sie dann an einer anderen Stelle in den jenseitigen Raum entläßt. So kommt es, daß in der Doppelschicht eine Reihe auf einander folgender Lamellen räumlich zusammengedrückt zu verschwindender Dicke zu denken ist. Die Anzahl dieser verdichteten Lamellen ist so groß, daß der vom Moment abhängige Potentialsprung in den correspondirenden Punkten beider Seiten der Schicht zu Stande kommt. Läßt man jedoch den inneren Raum zwischen der Doppelschicht aus der Betrachtung weg, so bricht jede Aequipotentialfläche in einer offenen Randcurve an der einen Seite der Schicht ab, und beginnt auf einer räumlich getrennten Randcurve an der anderen Seite ihre Fortsetzung. Das Bild, welches

die Lamellen zeigen, kann man anschaulich durch den in der Geologie bei der Lehre von den geschichteten Gesteinslagern gebräuchlichen Namen „Verwerfung“ bezeichnen. Bei Doppelschichten von constantem Moment ist diese Verwerfung überall die gleiche und die Neigung der Aequipotentialflächen auf beiden Seiten wird nicht geändert. Die Kraftlinien, welche die Flächenschaar senkrecht durchsetzen, haben dann zu beiden Seiten gleiche Richtung, auch die Lamellendicke  $h$  wird nicht verändert; die elektrische Kraft bleibt dann stetig. Im Falle, daß die Doppelschicht selbst zu den Niveauflächen gehört, fällt die Verwerfung fort, dagegen scheinen alle diejenigen Lamellen verschwunden, deren Potentialwerth zwischen den Grenzwerten des Sprunges von  $\varphi$  liegen und es berühren sich in der doppelt belegten Fläche zwei Aequipotentialflächen mit endlich verschiedenem Werthe der Constanten. Diese Umstände führen dann also, wenn man das Innere der Doppelschicht vernachlässigt, zu gewissen Beschränkungen der oben (S. 76) ausgesprochenen Sätze.

Die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Formeln (69) und (69 a) kann man ohne Benützung des Potentialbegriffs auf die Formen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4 \pi \varepsilon \quad (69 \text{ c})$$

$$\mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2} = 4 \pi e \quad (69 \text{ d})$$

bringen, wobei  $\mathfrak{E}_{n_1}$  und  $\mathfrak{E}_{n_2}$  die Componenten der elektrischen Feldstärke in Richtungen der beiden Normalen  $n_1$  und  $n_2$  bezeichnen. Diese Gleichungen sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß für die Feldstärke eine Potentialfunction existirt. Sie gelten aber allgemeiner auch für zeitlich variable Felder, in denen dies nicht mehr der Fall ist. Denn es superponiren sich dann, wie später gezeigt werden wird, zu den von den Ladungen  $\varepsilon$  und  $e$  herrührenden Kraftcomponenten  $X^{(1)}$ ,  $Y^{(2)}$ ,  $Z^{(2)}$ , nur solche andere Componenten  $X^{(2)}$ ,  $Y^{(2)}$ ,  $Z^{(2)}$ , für welche immer

$$\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial Z^{(2)}}{\partial z} = 0$$

$$\mathfrak{E}_{n_1}^{(2)} + \mathfrak{E}_{n_2}^{(2)} = 0$$

erfüllt ist, so daß auch dann

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \dots = \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x} + \dots = 4 \pi \varepsilon$$

$$\mathfrak{E}_{n_1} + \dots = \mathfrak{E}_{n_1}^{(1)} + \dots + \mathfrak{E}_{n_2}^{(2)} + \dots = 4 \pi e$$

gültig bleibt.

## § 21. Der Green'sche Satz.

Dieser für die weitere Entwicklung der Potentialtheorie wichtige analytische Satz giebt eine Art partieller Integration an, durch welche von einem gewissen Raumintegral ein Oberflächenintegral abgespalten wird, während ein Restintegral über den Raum zurückbleibt. Es giebt analoge Operationen auch an Integralen in einer Ebene, aus denen dann ein Randintegral abgespalten wird, und auch die gewöhnliche partielle Integration an einfachen Integralen, welche die Grenzwerte aus dem Integrandus abspaltet, gehört hierher. Wir betrachten aber sogleich das räumliche Problem. Es sei zunächst vorgelegt das Raumintegral:

$$\Phi_x = \iiint L \frac{\partial V}{\partial x} dx dy dz. \quad (72)$$

Dieses soll erstreckt werden über ein durch eine geschlossene Fläche begrenztes Raumgebiet.  $L$  und  $V$  seien zwei vorgeschriebene Functionen der Coordinaten  $x, y, z$ , und sollen so beschaffen sein, daß  $\Phi_x$  einen endlichen, eindeutigen Werth besitzt. Also  $L$  und  $\partial V/\partial x$  müssen eindeutig sein, dagegen könnte  $V$  selbst noch vieldeutig sein, wie dies z. B. bei den im vorigen Paragraphen erwähnten Potentialfunctionen in mehrfach zusammenhängenden Räumen vorkommt. Stetig braucht weder  $L$  noch  $\partial V/\partial x$  zu sein, beide können vielmehr an bestimmten Flächen im Integrationsraume springen. Auch in gewissem Grade unendlich können beide Factoren an einzelnen Stellen werden, ohne daß der Werth  $\Phi_x$  dadurch seine Bestimmtheit und Endlichkeit verliert.

Nun machen wir den ersten Schritt zur Transformation: Wir sehen  $L \cdot \partial V/\partial x$  als Theil eines vollständigen Differentialquotienten nach  $x$  an, welcher letzteren wir durch Hinzufügung von  $V \cdot \partial L/\partial x$  erhalten. Wir bilden also:

$$\Phi_x + \iiint V \frac{\partial L}{\partial x} dx dy dz = \iiint \frac{\partial}{\partial x} (L V) dx dy dz. \quad (72a)$$

Damit diese Gleichung einen bestimmten Sinn habe, müssen wir mehr Bedingungen stellen, als vorher für  $\Phi_x$  nötig waren. Es muß nämlich jetzt  $V$  selbst eindeutig sein und  $\partial L/\partial x$  muß die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Solche Fälle also, in denen zwar  $L$  in unschädlicher Weise unendlich wird, während  $\partial L/\partial x$  dies in heftiger, schädlicher Weise thut, sind jetzt nicht mehr zulässig.

Dieser erste Schritt ist nur die Vorbereitung für den zweiten: die partielle Integration des rechts stehenden Integrals, welches wir schreiben können

$$\iint dy dz \cdot \int dx \frac{\partial(LV)}{\partial x}.$$

Für jedes Flächenelement  $dy dz$  ist

$$\int dx \frac{\partial(LV)}{\partial x} = \overline{LV}.$$

Der Sinn dieser Formel ist folgender: Auf dem Flächenelement  $dy dz$  steht senkrecht eine gerade Linie parallel der  $x$ -Axe. Geht man auf dieser Geraden in Richtung der positiv wachsenden Abscissen vorwärts, so betritt man an einer bestimmten Stelle das Integrationsgebiet, dort an der Grenze hat das Produkt  $L V$  einen bestimmten Werth, den wir mit  $LV$  bezeichnen. Geht man weiter, so kommt man endlich zu der Stelle, wo das Integrationsgebiet wieder verlassen wird; der dort herrschende Werth sei mit  $\overline{LV}$  bezeichnet. Die Differenz beider Werthe ist oben mit  $\overline{LV}$  bezeichnet:

$$\overline{LV} - LV = \overline{LV}$$

und hat für jedes Flächenelement  $dy dz$  ihren besonderen Betrag, der von der Führung der Raumgrenze und dem räumlichen Verlauf von  $L V$  abhängt. Die Oberfläche des Raumes kann auch so gestaltet sein, daß die zu  $x$  parallele gerade Linie das Integrationsgebiet in mehreren getrennten Strecken durchsetzt, so daß mehrere Eintritts- und Austrittsstellen auf einander folgen. In solchen Fällen bedeutet  $\overline{LV}$  nicht die einfache Differenz, welche in letzter Gleichung steht, sondern eine algebraische Summe, in welcher die Werthe von  $L V$  an allen Eintrittsstellen negativ, an allen Austrittsstellen positiv einzusetzen sind. Ein wesentlicher Unterschied wird durch diese Complication indessen nicht in den Sinn der Betrachtung gebracht. Der zweite Schritt führt also zu der Gleichung

$$\Phi_x + \iiint V \frac{\partial L}{\partial x} dx dy dz = \iint dy dz \overline{LV}. \quad (72b)$$

Die Beschränkungen, die für die Functionen  $L$ ,  $V$  und deren Differentialquotienten zu machen sind, haben sich aber wiederum vermehrt, denn die partielle Integration liefert in der hier explicite

hingestellten Form nur dann einen richtigen Werth, d. h. denselben, welchen die linke Seite besitzt, wenn  $L V$  im ganzen Integrationsgebiet stetig verläuft. Wenn dagegen dieses Produkt im Bereiche der vorkommenden Werthe von  $x$  irgendwo discontinuirlich wird, so würde in dem Ausdruck  $\overline{L V}$  dieser Sprung enthalten sein, während er in  $\int dx \frac{\partial}{\partial x}(L V)$  fehlt. Die Mathematiker haben sich mit solchen Problemen, in denen Integrale über springende Functionen partiell integrirt werden, vielfach beschäftigt, in der Physik kommt man aber meist vortheilhaft mit dem Umwege aus, daß die Sprünge als sehr steile, aber doch stetige Veränderungen angesehen werden. Thut man dies, so fehlt der Einfluß des Sprunges auch in dem Ausdruck  $\int dx \frac{\partial}{\partial x}(L V)$  nicht, denn dieser wird dann an der Sprungstelle des Differentialquotienten so groß, daß ein einzelnes Differential der Summe einen endlichen Werth annimmt und zwar gerade denjenigen, welcher sonst die Gleichung stören würde. Kann man mit diesem Princip der continuirlichen Uebergänge nicht gut auskommen, so muß man beide Seiten der Unstetigkeitsflächen mit unter die Raumbegrenzungen des Integrals aufnehmen.

Der dritte Schritt ist die Verwandlung des Doppelintegrals in ein Oberflächenintegral über die Begrenzung des Integrationsraumes. Der Integrand  $\overline{L V}$  setzt sich bereits aus allen Oberflächenwerthen zusammen und zwar für jedes einzelne  $dy dz$  aus denjenigen, welche beim Fortschreiten in der  $x$ -Richtung von dort aus getroffen werden. Geeignete Oberflächenelemente an denselben Stellen findet man nun, wenn man auf jedem der kleinen Rechtecke  $dy dz$  als Basis eine gerade Säule errichtet denkt. Diese dringt, in wachsender  $x$ -Richtung verfolgt, einmal in den Integrationsraum ein, wobei sie ein Flächenelement  $ds$  aus dessen Umgrenzung herausschneidet. Weiterhin tritt sie wieder heraus unter Herausschneidung eines zweiten Flächenelementes  $\overline{ds}$ . Bei complicirterer Gestalt des Integrationsbereiches kann dann ein nochmaliger Eintritt und Austritt folgen u. s. w., jedesmal unter Zeichnung zweier Oberflächenelemente. Alle diese  $ds$  sind im Allgemeinen schräge Schnitte der dünnen rechteckigen Säule, also von parallelogrammatischer Gestalt. Ihre Größe hängt von der Neigung der Normalen  $n$  gegen die  $x$ -Richtung ab, denn es ist

$$ds = \frac{dy dz}{\cos(n, x)},$$

oder umgekehrt

$$dy dx = ds \cos(nx).$$

Nun wollen wir vorschreiben, daß die Normalen überall ins Innere des Integrationsraumes gerichtet sein sollen, dann wird der Winkel  $(nx)$  an den Eintrittsstellen der Säule spitz, an den Austrittsstellen stumpf, sein Cosinus also im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Unter  $dy dx$  sowohl wie unter  $ds$  verstehen wir aber absolute Beträge, deshalb müssen wir in vorstehender Formel, soweit sie sich auf Elemente  $\overline{ds}$  an Austrittsstellen bezieht, den negativen Cosinus durch ein vorgesetztes Minuszeichen positiv machen. Es gilt demnach:

$$dy dx = \underline{ds} \cos(\underline{nx}) = -\overline{ds} \cos(\overline{nx})$$

und ein einzelnes Glied des Doppelintegrals aus (72 b) kann folgendermaassen umgeformt werden:

$$dy dx \overline{LV} = dy dx (\overline{LV} - \underline{LV}) = -\overline{ds} \overline{LV} \cos \overline{nx} - \underline{ds} \underline{LV} \cos \underline{nx}.$$

In dem complicirteren Falle, daß die Säule das Gebiet mehrmals durchsetzt, erhält man auf der rechten Seite vier, sechs u. s. w. solche Glieder, wie hier zwei angegeben sind; die weitere Betrachtung wird dadurch nicht gestört. Das Wichtige und Wesentliche besteht darin, daß der Unterschied zwischen Eintritts- und Austrittsstellen verschwunden ist: Alle Glieder haben dasselbe explicite Minuszeichen. Da nun durch die Gesammtheit aller der gedachten Säulen auch die gesammte Oberfläche unseres Raumgebietes parzellirt wird, so folgt:

$$\iint dy dx \overline{LV} = -\iint \overline{ds} LV \cos nx.$$

Die Bezeichnung  $\iint \overline{ds} \dots$  soll Integration über die geschlossene Oberfläche des Gebietes bedeuten. Da man nun weiß, daß der Werth eines solchen Integrals von der Form des Netzes der  $ds$ , welches zur Aufstellung oder Berechnung gedient hat, unabhängig ist, so braucht man sich nun unter den  $ds$  nicht mehr die Spuren jener Säulenschnitte zu denken, sondern kann ein beliebiges anderes Netz auf der Oberfläche annehmen. Bei diesem dritten Schritt sind keine neuen Beschränkungen der Gültigkeit hinzugekommen. Das bisherige Resultat lautet nun:

$$\Phi_x + \iiint V \frac{\partial L}{\partial x} dx dy dz = -\iint \overline{ds} LV \cos nx. \quad (72c)$$

Nun seien noch zwei ganz analog gebaute Integrale über denselben Raum zu erstrecken, nämlich:

$$\Phi_y = \iiint M \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz \quad \text{und} \quad \Phi_z = \iiint N \frac{\partial V}{\partial z} dx dy dz. \quad (73)$$

Bedingungen dafür sind Eindeutigkeit der beiden neuen Functionen  $M$  und  $N$  und der Differentialquotienten von  $V$ . Stetigkeit nicht erforderlich, beschränktes Wachsthum ins Unendliche zulässig, ganz wie oben für  $\Phi_x$ . Nun führen wir dieselben drei Schritte der Transformation aus. Beim ersten Schritt muß gefordert werden, daß  $\partial M / \partial y$  und  $\partial N / \partial z$  nicht in schädlicher Weise unendlich werden, und daß  $V$  selbst eindeutig ist. Beim zweiten Schritt treten die Bedingungen hinzu, daß  $MV$  und  $NV$  im ganzen Raumgebiet stetig verlaufen müssen, widrigenfalls die Sprungflächen und zwar beide Seiten derselben mit unter die Begrenzung des Raumes zu rechnen sind, oder man sich helfen muß mit dem Princip der continuirlichen Uebergänge.

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so kann man zwei Formeln analog (72c) aufstellen, und dann alle drei addiren. Die Integrale kann man dabei, da sie sich über dieselben Gebiete erstrecken, in je eines zusammenfassen. An Stelle der Abkürzungen  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  setzen wir die vorgeschriebenen Integrale. Dann erhält man:

$$\left. \begin{aligned} & \iiint \left\{ L \frac{\partial V}{\partial x} + M \frac{\partial V}{\partial y} + N \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ & + \iiint V \left[ \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right] dx dy dz \\ & = - \iint ds V (L \cos(nx) + M \cos(ny) + N \cos(nz)). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Diese Gleichung enthält bereits den GREEN'schen Satz in sich, ist aber allgemeiner. Die drei vorgeschriebenen Raumfunctionen  $L, M, N$  kann man deuten als die Componenten in Richtung der Axen  $x, y, z$  von einer in jedem Punkte des Raumes gegebenen gerichteten Gröfse, und diesen Sinn haben sie wohl auch physikalisch in allen Fällen, wo diese Gleichung von Nutzen ist; die Function  $V$  dagegen denken wir uns hier als eine ungerichtete Gröfse, deren Differentialquotienten im ersten Raumintegral die negativen Componenten einer zweiten gerichteten Gröfse angeben, und zwar einer solchen, welche die Besonderheit hat, sich als Gefälle einer ungerichteten Gröfse

darstellen zu lassen. Die Gleichung (74), welche doch auf ein bestimmt orientirtes Axensystem bezogen erscheint, enthält dann lauter Ausdrücke von absoluter Bedeutung. Die geschweifte Klammer des ersten Integrals giebt nach HERMANN GRASSMANN's Bezeichnung das innere Product der beiden Vektoren und zwar mit negativem Vorzeichen, da wir als Componenten des zweiten Vectors die negativen Differentialquotienten von  $V$  einführen. Dieses innere Product ist eine ungerichtete Gröfse, deren Werth nicht von der Orientirung des Axensystems abhängt. Sein Werth ist gleich dem Product der beiden Vectorlängen und dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels. Im zweiten Integral bedeutet die eckige Klammer die sogenannte Divergenz des ersten Vectors, eine ebenfalls ungerichtete Gröfse. Die runde Klammer im Oberflächenintegral endlich bedeutet die in Richtung der inneren Normale fallende Componente des ersten Vectors, ist also ebenfalls unabhängig vom gewählten Axensystem.

Um nun auf den GREEN'schen Satz zu kommen, nehmen wir für den ersten Vector ebenfalls einen solchen, welcher als Gefälle einer ungerichteten Raumfunction  $U$  dargestellt werden kann, setzen also:

$$L = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (74a)$$

Die für  $L, M, N$  zum Bestande der Gleichung (74) nöthigen Bedingungen müssen wir nun verwenden, um die Bedingungen für die neu eingeführte Function  $U$  zu finden. Die zweiten Differentialquotienten von  $U$ , das sind die  $\frac{\partial L}{\partial x}$  etc., müssen integrabel sein, dürfen also nicht in schädlicher Weise unendlich werden, wie das z. B. eintritt, wenn  $U$  das Potential einer punktförmigen Ladung ist. Die ersten Differentialquotienten von  $U$ , das sind die  $L$ , etc. selbst, müssen stetig sein. Eindeutig müssen alle Differentialquotienten sein. Dagegen  $U$  selbst, welches in der Gleichung gar nicht vorkommt, könnte vieldeutig sein, wie die elektromagnetischen Potentiale in mehrfach zusammenhängenden Räumen. Dafs mehrfach zusammenhängende Räume als Integrationsbezirk bei unserem Satz verwendet werden dürfen, begegnet keinen Bedenken sofern in ihnen die nöthigen Eindeutigkeitsbedingungen erfüllt sind, das mehrfache Ein- und Austreten der Säulen haben wir oben besonders berücksichtigt.

Bei der Einsetzung der Vorschriften (74a) in die Gleichung (74) geht die geschweifte Klammer im ersten Integral über in

$$-\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\}.$$

Die eckige Klammer des zweiten Integrals wird:

$$-\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] = -\Delta U,$$

bildet also die LAPLACE'sche Operation an  $U$ , deren Bedeutsamkeit bei Potentialfunctionen wir schon kennen. Die runde Klammer im Oberflächenintegral endlich muß, da sie die Vectorcomponente in Richtung der inneren Normalen angiebt, übergehen in

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right).$$

Dies kann man leicht direct verificiren. Geht man nämlich in Richtung der Normalen von der Oberfläche in's Innere um den Weg  $dn$ , so verändern sich dabei die Coordinaten um  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , und es ist

$$\cos(nx) = \frac{dx}{dn}, \quad \cos(ny) = \frac{dy}{dn}, \quad \cos(nz) = \frac{dz}{dn}.$$

Setzt man dies in die runde Klammer von (74) ein, und berücksichtigt auch (74a), so erhält man

$$-\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dn} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right).$$

Nun brauchen wir nur ein gemeinsames Minuszeichen in allen drei Integralen fortzulassen, und das zweite Raumintegral mit entgegengesetztem Zeichen nach rechts zu werfen, dann finden wir die Schlußformel:

$$\left. \begin{aligned} & \iiint \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ & = - \iint ds V \frac{\partial U}{\partial n} - \iiint V \Delta U dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Dieses ist der von GEORGE GREEN in seinem Essay vom Jahre 1828 aufgestellte Satz.

Wir sahen im Verlauf der Ableitung, daß die beiden Functionen  $U$  und  $V$  verschiedenen Bedingungen genügen müssen, die sich nur zum Theil decken, nämlich soweit sie die ersten Differentialquotienten betreffen. Dem entsprechend kommen auch auf der rechten Seite der Gleichung beide Functionen in unsymmetrischer Weise vor. Die linke Seite dagegen ist vollkommen symmetrisch,

sie ändert sich nicht bei einer Vertauschung von  $U$  und  $V$ . Man kann daher mit gleichem Recht auch bilden:

$$\left. \begin{aligned} & \iiint \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ & = - \iint \overline{ds} U \frac{\partial V}{\partial n} - \iiint U \Delta V dx dy dz, \end{aligned} \right\} (75a)$$

wenn nur  $U$  aufer den vorher nöthigen Bedingungen auch noch denen genügt, welche vorher von  $V$  gefordert wurden, und  $V$  ebenso noch den vorigen von  $U$ . Damit also die Gleichungen (75) und (75a) neben einander beide gültig sind, müssen  $U$  und  $V$  nebst ihren ersten Differentialquotienten im ganzen Integrationsraume eindeutig, endlich und stetig sein, während deren zweite Differentialquotienten namentlich das  $\Delta$  beider Functionen integrabel und eindeutig aber nicht nothwendig stetig sein muß. Trifft dies alles zu oder hat man Punkte und Flächen, in denen das nicht der Fall ist, aus dem Raume herausgeschnitten durch Oberflächen, welche dann mit zur Begrenzung gehören, so kann man in den beiden Gleichungen die identische linke Seite als tertium comparationis ausschalten und findet durch Gleichsetzung der beiden rechten Seiten:

$$\left. \begin{aligned} & \iint \overline{ds} U \frac{\partial V}{\partial n} + \iiint U \Delta V dx dy dz \\ & = \iint \overline{ds} V \frac{\partial U}{\partial n} + \iiint V \Delta U dx dy dz, \end{aligned} \right\} (75b)$$

wofür man auch in anderer Anordnung schreiben kann:

$$\iint \overline{ds} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) = - \iiint dx dy dz (U \Delta V - V \Delta U). \quad (75c)$$

## § 22. Anwendungen des Green'schen Satzes auf die Potentialtheorie.

Die Nutzbarkeit des GREEN'schen Satzes in der Theorie der Kraftfelder hat ihren Grund darin, daß man für die beiden Functionen  $U$  und  $V$  Potentialfunctionen einsetzen kann und dadurch Beziehungen zwischen Raum- und Oberflächenintegralen erhält, deren Integranden aus lauter physikalisch wichtigen Gröößen bestehen.

So bedeuten die ersten Differentialquotienten, sowohl die nach  $x, y, z$ , welche in der linken Seite von (75) und (75a) vorkommen, wie auch diejenigen rechts nach der inneren Normale  $n$  der Oberfläche die gleichgerichteten Kraftcomponenten, und bei Kräften, welche nach dem COULOMB'schen Gesetze wirken, weiß man auch die Bedeutung der in den Restintegralen vorkommenden  $\Delta U$  und  $\Delta V$  aus den Differentialgleichungen von LAPLACE und POISSON.

Die einfachste Gestalt nimmt dann der Satz an, wenn der Integrationsraum leer von den Ladungen ist, welchen die beiden Potentialfunctionen entspringen, wenn diese also außerhalb liegen. Dann sind die  $\Delta$  beider Functionen ohne Ausnahmestellen gleich Null, die Restintegrale fallen weg und die Gleichung (75b) geht über in eine Beziehung zwischen zwei Oberflächenintegralen

$$\iint \overline{ds} U \frac{\partial V}{\partial n} = \iint \overline{ds} V \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (76)$$

Dabei sind  $U$  und  $V$  Potentiale von zwei verschiedenen, einzeln vorhanden gedachten Vertheilungen außerhalb der geschlossenen Oberfläche. Die Formel (76) kann wegen dieser Beschränkung immer nur in beschränkten Raumgebieten gültig sein, da doch die Potentialfunctionen von irgendwo liegenden Ladungen herrühren müssen. Dagegen ist es möglich, daß diese Ladungen alle in endlichen Abständen von einander zusammenstehen, und zwar sowohl das System, welches  $U$  erzeugt, wie das andere, welches  $V$  erzeugt. Umschließt man dieses Raumgebiet durch eine Oberfläche, so ist der ganze äußere Raum leer und die Gleichung (76) ist deshalb für ihn gültig. Da wir indessen den GREEN'schen Satz nur für ein umschlossenes Integrationsgebiet abgeleitet haben, so dürfen wir ihn nicht ohne Weiteres auf den grenzenlosen unendlichen Außenraum übertragen, sondern wir müssen eine äußere Umhüllung hinzudenken, und untersuchen, was aus den Ausdrücken wird, wenn wir diese Umhüllung weiter und weiter hinausschieben bis in unendliche Entfernung. Als geeignetste Begrenzungsform wählt man eine Kugelfläche von sehr großem Radius  $R$ , deren Mittelpunkt in der Nähe der vorhandenen elektrischen Ladungen liegt. Man weiß nun, daß in allen Regionen, welche sehr weit weg von dem geladenen Gebiete liegen, deren Abstand  $r$  vom Mittelpunkt also sehr groß ist im Vergleich zu den endlichen Abständen der elektrischen Ladungen, daß dort die Potentialfunctionen gegen Null streben proportional dem reciproken Werthe

des Abstandes, daß man also in hinreichend großen Entfernungen setzen darf:

$$U = \frac{A}{r}, \quad V = \frac{B}{r}. \quad (77)$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  bezeichnen die algebraischen Summen der beiden Ladungssysteme. (Sollten diese oder eine von ihnen etwa gleich Null sein, so verschwinden die Ausdrücke proportional höheren Potenzen von  $1/r$ , dann gilt das Folgende a fortiori.)

Die ins Innere gerichteten Normalen zeigen an der großen Kugelfläche entgegengesetzt dem wachsenden Radius, daher ist an diesem Theil der Begrenzung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{A}{r^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{B}{r^2}. \quad (77a)$$

Die beiden in Gleichung (76), überhaupt im GREEN'schen Satz vorkommenden Oberflächenintegrale, nehmen also für Potentialfunctionen  $U$  und  $V$ , welche im Unendlichen reciprok  $r$  schwinden, erstreckt über eine sehr große Kugel den Werth an:

$$\iint ds U \frac{\partial V}{\partial n} = \iint ds V \frac{\partial U}{\partial n} = \iint ds \frac{AB}{r^3}.$$

Für  $r^3$  ist der dem Kugelradius entsprechende Werth  $R^3$  zu setzen, und die Flächenelemente  $ds$  können aus einer auf der Einheitskugel gedachten Eintheilung in Elemente  $d\sigma$  gewonnen werden in der Form

$$ds = R^2 d\sigma.$$

Das Flächenintegral wird also:

$$= \iint R^2 d\sigma \frac{AB}{R^3} = 4\pi \frac{AB}{R}$$

oder wenn man  $R = \infty$  werden läßt

$$= 0.$$

Damit ist bewiesen, daß die Oberflächenintegrale in der Gleichung (76) über die unendliche Begrenzung des Raumes verschwinden, aber — wohl zu beachten — nur wenn beide Functionen im Unendlichen der Bedingungen (77) folgen. Daß sie im ganzen Integrationsraume bis in unendliche Ferne der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen, reicht wohl für das Verschwinden der Raum-

integrale im GREEN'schen Satz aus, aber noch nicht für das Verschwinden dieses Oberflächenintegrals. Es giebt nämlich Functionen, welche der LAPLACE'schen Gleichung überall genügen, aber nicht als Potentiale von endlichen Vertheilungen gedeutet werden können, und deshalb auch die Bedingung (77) nicht erfüllen. Dahin gehört z. B. der Ansatz, daß ein Potential im ganzen Raume gleich einer von Null verschiedenen Constante sein soll, oder gleich einer linearen Function der cartesischen Raumcoordinaten. Solche Functionen kann man bei den Anwendungen des GREEN'schen Satzes mit Nutzen verwenden, aber als Potential endlicher elektrischer Vertheilungen können sie immer nur in beschränkten Bezirken des Raumes, niemals aber im Unendlichen gedeutet werden.

Wir werden jetzt sogleich eine solche Anwendung des GREEN'schen Satzes machen, indem wir vorschreiben, die Function  $U$  solle im ganzen Raume den constanten Werth  $U = 1$  besitzen, während  $V = \varphi$  das Potential einer elektrischen Vertheilung sei. Die Gleichung (75) wird dann  $0 = 0$ , weil alle Differentialquotienten von  $U$  gleich Null sind, aber (75 a, b, c) geben

$$\iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \iiint \Delta \varphi \cdot dx dy dz. \quad (78)$$

Diese wichtige Gleichung, welche wir hier als einen besonders einfachen Sonderfall des GREEN'schen Satzes gefunden haben, läßt sich auch, ohne die Kenntniß der allgemeinen GREEN'schen Gleichung, direkt ableiten durch partielle Integration des Raumintegrals über  $\Delta \varphi$ , wobei im Verlauf der Umformung ganz dieselben Hilfsmittel benutzt werden, welche wir bei der Ableitung des GREEN'schen Satzes anwendeten. Diese Formel ist auch von GAUSS abgeleitet worden und unter dem Namen des GAUSS'schen Satzes bekannt. Wir wollen aus ihr nun Folgerungen ableiten. Wenn im ganzen Integrationsraume  $\varphi$  und dessen erste Differentialquotienten endlich und stetig sind, so ist das Oberflächenintegral links nur über die äußere Begrenzung des abgeschlossenen Raumes zu erstrecken. Dies wollen wir zuerst als erfüllt ansehen. Dann können elektrische Ladungen im Inneren nur in endlicher räumlicher Dichtigkeit  $\varepsilon$  vorhanden sein (denn Flächenbelegungen würden die ersten Differentialquotienten von  $\varphi$  unstetig machen, geladene Linien und Punkte würden  $\varphi$  unendlich machen). Die POISSON'sche Differentialgleichung giebt  $\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon$ ; dies eingesetzt, liefert:

$$\iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 4\pi \iiint \varepsilon \cdot dx dy dz. \quad (78a)$$

Das Raumintegral stellt die Gesamtmenge der von der Oberfläche umschlossenen elektrischen Ladung dar.

Jetzt wollen wir außer den räumlichen Ladungen  $\varepsilon$  im Innern gewisse Flächen gegeben denken, an denen die Differentialquotienten von  $\varphi$  springen, die also mit Elektrizität von endlicher Flächendichte  $e$  belegt sein müssen. Diese Flächen stören die Gültigkeitsbedingungen unseres Satzes und müssen herausgeschnitten werden dadurch, daß man ihre beiden Fronten mit unter die Grenzen des Integrationsbereichs aufnimmt. Der Raum, über welchen rechts integriert wird, erfährt dadurch keinen Abbruch, aber zur linken Seite kommt ein neuer Betrag hinzu: Das Oberflächenintegral von  $\partial\varphi/\partial n_i$  über beide Seiten der Unstetigkeitsflächen. Zertheilen wir diese Flächen in Elemente, die wir mit  $ds_u$  bezeichnen im Gegensatz zu den  $ds$  der äußeren Umhüllung des Raumes, so können wir je zwei correspondirende Differentiale zusammenfassen. Die Richtungen der in's Innere des Raumes weisenden Normalen sind auf ihnen entgegengesetzt; unterscheiden wir sie als  $n_1$  und  $n_2$ , so kann man den hinzukommenden Betrag als einfaches Flächenintegral darstellen

$$\iint \overline{ds} \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = \iint ds_u \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} \right). \quad (78b)$$

Die Unstetigkeitsflächen brauchen nicht geschlossen zu sein, können vielmehr in einem offenen Rand enden oder durch die äußere Begrenzung hindurchtreten in das hier nicht betrachtete Gebiet. Die etwa zur Zudeckung dieser Ränder nöthig gedachten unpaarigen Flächenelemente üben, wie leicht ersichtlich, keinen Einfluß auf die Rechnung. Die in diesem neuen Integral vorkommende Klammer mißt nur nach Gleichung (56 a) S. 60 für jedes  $ds_u$  den dort herrschenden Betrag von  $-4\pi e$ , der Beitrag zur linken Seite von (78 a) ist daher

$$= -4\pi \iint ds_u \cdot e.$$

Lassen wir nun dem in Gleichung (78 a) links stehenden Integral seine frühere Bedeutung, daß es nur über die äußere Umhüllung, nicht aber auch über den Schutzmantel der inneren schädlichen Flächen erstreckt wird, so müssen wir den vorstehenden Betrag links zufügen, oder mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts zufügen. Deshalb geht (78 a) über in

$$\iint \overline{ds} \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = 4\pi \iiint \varepsilon \cdot dx dy dz + 4\pi \iint ds_u \cdot e. \quad (78c)$$

Der neu hinzugetretene Betrag der rechten Seite mißt bis auf den Factor  $4\pi$  die Gesamtmenge der in Flächenladungen vorhandenen Elektricitäten, welche von der Oberfläche umgrenzt werden, über welche die linke Seite integrirt ist.

Schließlich wollen wir auch noch ein System von punktförmigen Ladungen in den Integrationsraum hineinsetzen. Das Potential dieser allein ist, wie früher ausgeführt, gleich  $\sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a}$ , bezeichnen wir also jetzt den übrigen Theil des Potentials, welcher von den Raumdichtigkeiten  $\varepsilon$  und den Flächendichtigkeiten  $e$  herrührt, und für welchen (78c) gilt, mit  $\varphi'$ , so ist das gesammte Potential zu setzen:

$$\varphi = \varphi' + \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r_a}.$$

Wollen wir auf dieses die Gleichung (78) anwenden, so müssen wir aufer den Flächen, in denen die Differentialquotienten von  $\varphi$  springen, auch noch alle die Punkte heraus schneiden, in denen  $\varphi$  unendlich wird. Wir legen um jede Punktladung  $e_a$  eine kleine Kugel vom Radius  $\rho$ , und müssen das Oberflächenintegral links nun auch über diese Kugelflächen erstrecken; die in's Innere des Integrationsraumes gerichtete Normale zeigt aus den Kugeln heraus, liegt also in der Richtung des wachsenden Radius  $r_a$ . Nun sieht man ohne Weiteres, daß die Beiträge aller Summanden von  $\varphi$ , welche an der Stelle einer kleinen Kugel endlich bleiben, mit verschwindendem Radius  $\rho$  ebenfalls verschwinden. Das trifft in jedem Falle bei  $\varphi'$  zu, selbst, wenn ein Kugelcentrum auf einer Unstetigkeitsfläche liegt; ferner trifft es zu bei allen bis auf einen der Summanden  $a$ . Das Raumintegral wird bei verschwindendem  $\rho$  nicht verändert, da die herausgeschnittenen Kugelräume verschwindend werden. Will man also den Beitrag finden, den die Oberfläche einer bestimmten der Kugeln  $a = p$  liefert, so braucht man statt des ganzen  $\varphi$  nur das Glied  $\frac{e_p}{r_p}$  zu berücksichtigen.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left( \frac{e_p}{r_p} \right) = \frac{\partial}{\partial r_p} \left( \frac{e_p}{r_p} \right) = - \frac{e_p}{r_p^2} = - \frac{e_p}{\rho^2}.$$

An der Kugeloberfläche ist ja überall  $r_p = \rho$ . Die Flächenelemente  $ds$  drücken wir durch diejenigen  $d\sigma$  der Einheitskugel aus  $ds = \rho^2 d\sigma$ . Dann ist

$$\int_p ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = \int \int d\sigma \cdot \rho^2 \left( - \frac{e_p}{\rho^2} \right) = - 4\pi e_p,$$

der Beitrag behält also bei verschwindendem  $\varrho$  einen festen Werth, und ebenso die Beiträge der anderen Kugeln. Im Ganzen kommt also durch das Hinzutreten der Punktladungen zu dem Integral über die äußere Begrenzung, welches in Gleichung (78c) links steht, hinzu die Summe

$$- 4 \pi \sum_{a=1}^n e_a$$

oder wenn wir diese mit umgekehrtem Vorzeichen nach rechts werfen, geht die Gleichung (78c) über in die folgende

$$\overline{\int \int ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}} = 4 \pi \iiint \varepsilon \cdot dx dy dz + 4 \pi \iint ds_u \cdot e + 4 \pi \sum_{a=1}^n e_a. \quad (78d)$$

In allen Fällen also bestätigt sich das Gesetz, daß das geschlossene Oberflächenintegral von  $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$  gleich ist  $4 \pi$  mal der Gesamtmenge der von der Oberfläche umschlossenen Elektrizität, gleichgültig, ob diese in räumlicher Vertheilung oder als Flächenbelegung oder endlich als Punktladung vorhanden ist. Auch die Configuration der Ladungen ist gleichgültig, es wird unterschiedslos die Menge summirt, welche im Innern enthalten ist. Elektrische Ladungen außerhalb des eingeschlossenen Raumes haben offenbar keinen Einfluß auf den Werth, obwohl doch der allgemeine Verlauf von  $\varphi$  und damit auch von  $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$  durch solche mitbestimmt wird.

Eine von der Existenz der Potentialfunction unabhängige Ableitung und Gestalt des in Gleichung (78) gegebenen GAUSS'schen Satzes gewinnt man bereits direkt aus Gleichung (74), indem man dort  $V=1$  setzt und  $L, M, N$  mit den Componenten des elektrischen Feldes identificirt. Man findet dann:

$$-\overline{\int \int ds \mathfrak{E}_{n_i}} = \iiint \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] dx dy dz, \quad (78e)$$

aus welcher sich, analog den zu Gleichung (78d) führenden Betrachtungen mit Hülfe der Ausdrücke (69c und d am Schluß des § 20) ergibt:

$$-\overline{\int \int ds \mathfrak{E}_{n_i}} = 4 \pi \iiint \varepsilon \cdot dx dy dz + 4 \pi \iint ds_u \cdot e + 4 \pi \sum_{a=1}^n e_a. \quad (78f)$$

## § 23. Folgerungen für das Potential in leeren Räumen.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt, daß in ladungsfreien Gebieten eines elektrischen Feldes für jede geschlossene Oberfläche das Integral über  $\partial\varphi/\partial n_i$  verschwinden muß:

$$\iint \overline{ds} \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = 0. \quad (79)$$

Die hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft des Potentials ist also die ausnahmslose Gültigkeit der LAPLACE'schen Differentialgleichung in dem umschlossenen Raume. Nun läßt sich zeigen, daß auch umgekehrt aus unserem Integralsatz (79) die LAPLACE'sche Differentialgleichung als nothwendige Folgerung heraustritt. Wir brauchen als Raumgebiet nur ein Volumelement mit den Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  zu wählen. Die Oberfläche besteht dann aus sechs rechteckigen Elementen. Zwei davon stehen senkrecht auf der  $x$ -Richtung und haben die Fläche  $ds = dy dz$ . Auf der einen ist  $\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ , auf der gegenüberliegenden ist erstens das entgegengesetzte Vorzeichen dafür zu nehmen, zweitens aber kommt auch noch die differentiale Aenderung des Werthes hinzu, welche durch den Abstand  $dx$  von der vorigen Fläche bedingt wird. Dieser Zuwachs ist

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} dx = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx.$$

Im Ganzen ist an der Gegenfläche zu setzen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx \right).$$

Beide Flächenelemente zusammen liefern zum Integral den Beitrag

$$dy dz \frac{\partial\varphi}{\partial x} - dy dz \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx \right) = - dy dz \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx.$$

Analog liefern die beiden Flächen senkrecht auf  $y$  den Beitrag

$$= - dz dx \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} dy$$

und die beiden letzten senkrecht auf  $z$  den Beitrag:

$$= - dx dy \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} dz.$$

Die ganze sechsgliedrige Summe, welche zufolge unserem Satze verschwinden muß, wird also

$$- dx dy dz \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0,$$

das fordert aber  $\Delta \varphi = 0$ .

Der Satz (79) und die LAPLACE'sche Differentialgleichung zeigen sich als zwei nur dem Ausdruck nach verschiedene Darstellungen derselben Eigenschaft der Potentialfunction  $\varphi$ . Während aber  $\Delta \varphi$  ursprünglich auf ein cartesisches Coordinatensystem bezogen erscheint, ist das Flächenintegral von jeder solchen Beschränkung frei. Dies ist von Wichtigkeit, weil man dadurch in den Stand gesetzt ist, die LAPLACE'sche Gleichung direct in anderen Coordinatensystemen aufzusuchen, während die Transformation der zweiten Differentialquotienten mitunter weniger einfach auszuführen ist. Man braucht nur ein parallel epipedisches Volumenelement zu nehmen, dessen Kanten den Differentialen der einzelnen Coordinaten entsprechen, und auf dessen Oberfläche den Satz (79) anzuwenden.

Eine directe Folgerung unseres Satzes ist diese: Eine Function, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt, kann in deren Gültigkeitsbereich weder Maximum noch Minimum haben. Würde nämlich an einer Stelle ein Maximum von  $\varphi$  bestehen, so müßte von dort aus  $\varphi$  nach allen Richtungen des Raumes hin abfallen. Umgibt man den Gipfelpunkt mit einer kleinen geschlossenen Fläche, so müßte an dieser überall  $\partial \varphi / \partial n_i > 0$  sein. Das Integral würde aus lauter positiven Summanden bestehen, könnte daher nicht den Werth Null besitzen. Ebenso ist die Möglichkeit eines Minimums ad absurdum zu führen. Das Vorkommen eines Sattelwerthes wird indessen nicht ausgeschlossen. Solche Stellen können sich auch thatsächlich im leeren Felde ausbilden; z. B. besitzt das von zwei gleichen Punktladungen erzeugte Feld im Mittelpunkt der Verbindungslinie einen Sattelwerth des Potentials.

Der GAUSS'sche Satz ermöglicht es uns nun, den inneren Zusammenhang der unabhängig von einander bewiesenen Gleichungen (69c) und (69d) aufzudecken. Flächenladung ist der Grenzfall sehr dichter Raumladung, durch einen Grenzproceß muß also die zweite aus der ersten hervorgehen.

Wir können auf Gleichung (78e) eine neue Definition der Divergenz  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$  gründen, wenn man sie auf ein Volumenelement  $dx dy dz$  bezieht. Man findet

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = - \frac{\iint ds \mathfrak{E}_n}{dx dy dz}; \quad (79a)$$

das Flächenintegral muß über die ganze Oberfläche von  $dx dy dz$  erstreckt werden. Nun wählen wir das Coordinatensystem so, daß an der zu untersuchenden Stelle einer Unstetigkeitsfläche die  $x$ -Richtung senkrecht zu dieser wird, und das Volumelement  $dx dy dz$  so, daß es von ihr halbirt wird. Ist es mit der Raumdichte  $\varepsilon$  geladen, so ist

$$4 \pi \varepsilon = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = - \frac{\iint ds \mathfrak{E}_n}{dx dy dz}.$$

Nun lassen wir  $dx$  immer kleiner werden. Es reducirt sich dann  $\iint ds \mathfrak{E}_n$  auf den Ausdruck

$$dy dz (X_1 - X_2),$$

sodafs

$$X_1 - X_2 = 4 \pi \varepsilon dx$$

wird. Läßt man gleichzeitig  $\varepsilon$  so wachsen, daß  $\varepsilon dx$  dem Grenzwert  $e$  zustrebt, so folgt die Gleichung

$$X_1 - X_2 = 4 \pi e,$$

welche, abgesehen von der speciellen Lage des Coordinatensystems, mit (69d) identisch ist.

Man kann denselben Gedanken auch so formuliren. An einer Unstetigkeitsfläche wird die Divergenz

$$- \frac{\iint ds \mathfrak{E}_n}{dx dy dz} = \frac{X_1 - X_2}{dx}$$

unendlich groß. Da dies stören würde, zieht man vor, in (79a) nicht durch das Volumelement, sondern nur durch das Flächenelement  $dy dz$  zu dividiren. Der Ausdruck

$$- \frac{\iint ds \mathfrak{E}_n}{dy dz} = X_1 - X_2$$

stellt dann freilich nicht mehr die räumliche, sondern die sog. Flächendivergenz dar. Bei anderer Lage des Coordinatensystems nimmt diese den Werth  $\mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2}$  an. Der Inhalt der Gleichungen (69c) und (69d) läßt sich also in die Aussage zusammenfassen: Die

Divergenz der elektrischen Feldstärke ist das  $4\pi$ -fache der Dichte — wobei räumliche Divergenz und Raumdichte, Flächendivergenz und Flächendichte zusammengehören.

#### § 24. Kraftröhren und Kraftfäden.

Wir fahren fort in der Betrachtung der für ladungsfreie Räume gültigen Formel (79). Unter allen den mannigfaltigen Raumgebilden, über deren Begrenzungen man dieses Integral mit Nutzen zu erstrecken pflegt, spielen die sogenannten Kraftröhren eine wichtige Rolle für die Anschauung der Felder. Die Kraftlinien haben wir bereits früher in § 20 kennen gelernt und auch allgemeine Regeln über ihren Verlauf in Potentialfeldern gefunden, Regeln, welche sich hier sinngemäß übertragen lassen werden. Zunächst bilden wir uns den Begriff dieser Gebilde. Wir denken uns im leeren Raume ein abgegrenztes Flächenstück (etwa auf einer Aequipotentialfläche, doch ist das nicht nothwendig) und richten unsere Aufmerksamkeit auf die durch sämtliche Punkte der Randcurve laufenden Kraftlinien. Das Continuum aller dieser Linien umhüllt wegen ihres charakteristischen Verlaufs ein röhrenförmiges Raumgebilde, welches wir eine Kraftröhre nennen. Im Inneren des dadurch geformten Kanals verläuft ein Strang von Kraftlinien; diese können weder durch die Wandung austreten noch eintreten, denn Kraftlinien schneiden sich nicht; sie verlaufen um so ähnlicher, je näher sie benachbart liegen. Sie können in elektrostatischen Feldern auch nicht spiralförmig verlaufen, wie etwa die Fasern im Garn, denn sie sind die orthogonalen Trajectorien einer Niveaufächenschaar. Ringförmig geschlossene Kraftröhren können nur in den mehrfach zusammenhängenden elektromagnetischen Potentialfeldern vorkommen. Hierfür wie für die Erscheinungen bei Doppelschichten gelten dieselben Betrachtungen, wie für die erzeugenden Kraftlinien.

Nun schneiden wir durch zwei beliebige Endflächen ein Stück einer solchen Kraftröhre heraus und wenden auf dessen Oberfläche unseren Satz an.

Die zur Röhrenwandung gehörigen Flächenelemente liefern keinen Beitrag zu dem Integrale, weil auf jedem einzelnen  $\partial\varphi/\partial n_i = 0$  ist. Nämlich  $\partial\varphi/\partial n$  mißt die in Richtung der Normale fallende Componente der elektrischen Kraft; da aber die Kraftresultante dort tangential verläuft, so ist die darauf senkrechte Componente = 0. Es bleiben nur die Beiträge der beiden Endflächen übrig und der Satz nimmt die Form an:

$$\int_1 \int ds_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \right)_1 + \int_2 \int ds_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \right)_2 = 0. \quad (80)$$

Die Indices 1 und 2 sollen bedeuten, daß sich die beiden Theilintegrale nur über die mit 1 und 2 numerirten offenen Schnittflächen der Röhre erstrecken sollen. Wechseln wir nun an einer der beiden Flächen die Richtung der Normalen, so daß diese nun aus dem Röhrenabschnitt hinauszeigt, so kehrt sich das Vorzeichen des zugehörigen Integrales um. Dieser Normalenwechsel hat den Zweck auf beiden Schnittflächen die gleiche Beziehung zwischen Kraft und Normale herzustellen. Wir wollen jetzt diejenige Normalenrichtung auf beiden Schnittflächen annehmen, welche einen spitzen Winkel mit der Krafrichtung bildet. (Stellenweise Ausnahme nur, wenn die Schnittfläche Falten aufweist.) Diese Richtung bezeichnen wir jetzt mit  $n$  ohne Index. Die Gleichung (80) geht dann über in

$$\int_1 \int ds_1 \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \int_2 \int ds_2 \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right). \quad (80a)$$

Da die Flächen 1 und 2 ganz beliebig geführt sind, so folgt hieraus, daß für jede Schnittfläche, wo und wie man sie auch durch dieselbe Krafröhre legt, das vorstehende Integral den gleichen Werth besitzt:

$$\int \int ds \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = S. \quad (80b)$$

Nach unserer Festsetzung über die Normale ist  $\left( - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$  positiv, also  $S$  desgleichen. Wir nennen diese Constante die „Stärke der Krafröhre“. Man kann sie auch ohne Einführung der Potentialfunction  $\varphi$  ausdrücken, indem man die resultirende Kraft  $\mathfrak{E}$  benutzt und setzt:

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E} \cos(n, \mathfrak{E}).$$

Dann ist

$$S = \int \int ds \mathfrak{E} \cos(n, \mathfrak{E}). \quad (80c)$$

Dieser Ausdruck ist insofern umfassender, als die Voraussetzungen aus denen er abgeleitet wurde, weil in ihm  $\mathfrak{E}$  nicht nothwendig Gefälle einer Potentialfunction sein muß. Doch muß dann an Stelle der LAPLACE'schen Differentialgleichung eine andere Aus-

drucksform dafür eintreten, daß der Raum frei von Ladung ist: Die allgemeinste Bedingung dafür ist nach § 20 die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Den einfachsten Ausdruck nehmen die vorstehenden Gleichungen für  $S$  an, wenn man die Querschnitte überall normal auf den Kraftlinien wählt, d. h. als Ausschnitte von Aequipotentialflächen. Dann wird direct  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E}$ ; die Flächenelemente in diesen Querschnitten seien  $dq$ , wir erhalten dann

$$S = \iint dq \cdot \mathfrak{E}. \quad (80d)$$

Man kann eine Krafröhre immer zerlegen in ein Bündel dünnerer Krafröhren, deren Stärken sich summiren zur Stärke der ganzen Röhre. So gelangt man zur Vorstellung von Krafröhren, welche so dünn sind, daß erstens deren normale Querschnitte  $q$  als eben gelten dürfen, und daß zweitens die Intensität  $\mathfrak{E}$  der Kraft über den ganzen Querschnitt als gleich groß angenommen werden kann. Solche Elementar-Röhren wollen wir Kraftfäden nennen. Die beiden Bedingungen, die wir an sie stellen, werden gemeinhin vom gleichen Grad der Dünnigkeit an zugleich erfüllt, doch giebt es besondere Fälle, in denen die eine Bedingung viel weitere Grenzen zuläßt als die andere. Bilden z. B. die Niveauflächen concentrische Kugelschalen, so ist  $\mathfrak{E}$  über beliebig große, gekrümmte Theile jeder Kugelfläche constant. Sind andererseits die Kraftlinien so stark gekrümmt, daß die Krümmungskreise von gleicher Größenordnung werden mit Röhren-Querschnitten, welche bereits als eben gelten dürfen, so hat die Kraft an verschiedenen Stellen noch merklich verschiedene Werthe. Bei parallelen und ebenen Niveauflächen endlich sind beide Bedingungen in unbeschränkter Ausdehnung erfüllt, an solchen Stellen können Kraftfäden beliebig dick werden. Im Allgemeinen werden wir aber annehmen müssen, daß die Querschnitte  $q$  kleine Flächen sind. Die Stärke eines Kraftfadens wird deshalb trotz der endlichen Kraft einen kleinen Werth haben, den wir mit  $\delta S$  bezeichnen wollen. Die Gleichung (80d) geht für einen Kraftfaden in die einfachere über:

$$q \cdot \mathfrak{E} = \delta S. \quad (81)$$

In einem Kraftfaden ist das Product aus Kraft und Querschnitt constant, oder die Kraft an verschiedenen Stellen des Fadens ist dem Querschnitt umgekehrt proportional.

Man kann sich den ganzen leeren Raum eines elektrischen Feldes zerlegt denken in Kraftfäden von der gleichen Stärke  $\delta S$  und gewinnt dadurch eine sehr anschauliche Darstellung der Vertheilung der Kraft. Die Richtung ist überall aus dem Lauf der Fäden direct erkennbar und die Intensität ist nun nicht nur längs eines und desselben Fadens, sondern überall reciprok dem an derselben Stelle befindlichen Querschnitt  $q$ . Kennt man das absolute Maafs der gewählten Stärke  $\delta S$ , so kann man aus der Gröfse des Querschnittes die Kraftintensität im absoluten Maafse finden nach der Formel

$$\mathfrak{E} = \frac{\delta S}{q}. \quad (81 a)$$

Wir hatten früher ein anderes Anschauungsmittel gefunden, welches dieselben Dienste leistete. Wir legten durch das Feld eine Schaar von Aequipotentialflächen, bei denen der Werth von  $\varphi$  zwischen allen Nachbarflächen die gleiche Differenz  $\delta\varphi$  zeigte. Dann gab der Normalabstand  $h$  zweier Nachbarflächen die Richtung der Kraft, und die Länge  $h$  war im ganzen Felde reciprok der Kraft nach der Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{\delta\varphi}{h}. \quad (81 b)$$

Bei dieser Vorstellung erhielt der Feldraum gewissermaafsen eine blättrige Structur, während die neugefundene Vorstellung der Kraftfäden ihn von faseriger Structur erscheinen läfst. Beide Structuren stehen senkrecht auf einander.

Stellen wir uns einmal beide Anschauungen zugleich vor, so wird der Raum in lauter kleine prismatische Zellen zerschnitten, deren Volumina gleich  $q \cdot h$  sind und an Gröfse je nach  $q$  und  $h$  von Ort zu Ort wechseln. Aus Gleichungen (81 a) und (81 b) folgt durch Multiplication

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{\delta S \cdot \delta\varphi}{q \cdot h}. \quad (81 c)$$

Hierin liegt wegen des festen Zählers der rechten Seite der Satz, daß das Quadrat der elektrischen Kraft überall reciprok dem Volumen der prismatischen Zellen ist. Dieser Satz ist insofern bedeutungsvoll, als die elektrische Energie, welche nach der MAXWELLSchen Theorie im Felde ihren Sitz hat, in ihrer räumlichen Dichtigkeit dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional ist (mit dem Factor  $1/8\pi$ ), daß also die gedachten Zellen Raumelemente von

gleichem Inhalt an elektrischer Energie liefern. Der absolute Betrag dieses Energieinhalts ist:

$$\delta E = \frac{\delta S \cdot \delta \varphi}{8 \pi} \quad (81 d)$$

und den Energieinhalt größerer Räume würde man durch Abzählen der ihn füllenden Zellen finden.

Die beiden Anschauungsmittel: Niveauschalen und Kraftfäden finden also im leeren Potentialfelde ein gemeinschaftliches Verwendungsgebiet und leisten dort gleich gute Dienste. Indessen reichen beide nach verschiedenen Seiten über dieses gemeinsame Gebiet hinaus. Die Vorstellung von den Kraftfäden von constanter Stärke erfordert nicht die Existenz eines Potentials, und kann deshalb auch in Wirbelfeldern verwendet werden, sofern diese nur frei von Ladungen sind. Die Niveauschalen von constanter Potentialdifferenz andererseits erfordern nicht einen ladungsfreien Raum, man kann sie, wie wir schon früher betrachteten, auch durch geladene Gebiete verfolgen, wenn nur ein Potential existirt. Man kann zwar Kraftlinien sehr wohl in beladenes Gebiet hinein verfolgen, ja bei ausschließlichen räumlichen Dichtigkeiten bleiben sie sogar durch das ganze geladene Gebiet hindurch stetig. Man kann deshalb dort auch Kraftfäden und Krafröhren nach derselben Vorschrift bilden; aber das Product  $\mathcal{E} \cdot g$  ist dann nicht constant, weil das geschlossene Oberflächenintegral der Normalcomponente der Kraft dort nicht gleich Null ist. Läuft eine Krafröhre durch positiv geladenes Gebiet, so nimmt ihre Stärke dabei zu und zwar zwischen zwei Schnittflächen um so viel, als die zwischen ihnen eingeschlossene Ladung nach Multiplication mit  $4\pi$  beträgt. Durchläuft die Krafröhre negativ geladenes Gebiet, so nimmt ihre Stärke um entsprechende Beträge ab. Diese Abnahme kann so weit gehen, daß die Stärke unter Null zu negativen Werthen sinkt, d. h. daß die Kraft in der Röhre ihre Richtung umkehrt, so daß man nicht eigentlich von einem Fortlaufen der Röhre sprechen kann. Durchsetzt eine Röhre eine positiv geladene Fläche, so tritt der Zuwachs ihrer Stärke sprungweise ein und beträgt  $4\pi$  mal die in die Röhre hineinfallende Flächenbelegung. Um einen geladenen Punkt herum drängen sich Krafröhren bis zu verschwindendem Querschnitt zusammen, die Intensität der Kraft wird dafür unendlich. Indessen ist, wie schon öfters erwähnt, eine punktförmige Ladung nur eine mathematische Fiction. Man muß immer einen, wenn auch kleinen, Raum um einen solchen Punkt herum von der Betrachtung ausschließen, von dessen

innerer Beschaffenheit man nichts weiß außer dem Quantum der darin enthaltenen Elektrizität.

Da nun die Kraftströme und -fäden ihre Bedeutung verlieren, sobald ihre Stärke nicht mehr constant ist, so schließt man zweckmäßig alle geladenen Gebilde: Raumgebiete, Flächen, Linien und Punkte von der Zerlegung in Kraftfäden aus und kann dann allgemein aussagen: Aus Gebilden mit überwiegend positiven Ladungen entspringen Kraftfäden, d. h. es treten durch eine bereits im leeren Raume liegende Umhüllungsfläche eines solchen Gebildes mehr Kraftfäden heraus als hinein. In Gebilden mit überwiegend negativen Ladungen aber münden Kraftfäden, d. h. es laufen mehr hinein, als herauskommen. Im leeren Raume kann ein Kraftfaden nirgends Anfang oder Ende haben. Man kann deshalb bestimmt wissen, daß Kraftfäden von positiven Ladungen aus entweder nach negativen Ladungen laufen oder sich im Unendlichen verlieren, auch können sie, aus dem Unendlichen kommend, in negativen Gebieten enden. (Nicht unter diese Regel passen die ringförmig geschlossenen Kraftfäden in elektromagnetischen Feldern, man könnte sie höchstens dadurch mit hineinziehen, daß man diese Felder mittelst einer fingirten Doppelschicht als statische Felder auffaßt. Dann entspringen die Fäden auf der positiven Belegung und münden auf der negativen, sind also nicht mehr geschlossen.)

Hat man die gemeinschaftliche Stärke  $\delta S$  aller Kraftfäden im leeren Felde festgesetzt, so kann man auch eine einfache Maasbeziehung zwischen einer Elektrizitätsmenge und der Zahl der von ihr ausgehenden Kraftfäden angeben. Dazu dient uns die Gleichung (78d). Bezeichnen wir die von der geschlossenen Oberfläche umhüllte Gesamtladung, ohne Unterschied, in welcher Art der Vertheilung sie vorhanden ist, mit  $e$ , so heißt jener Satz:

$$\iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 4 \pi e.$$

Als Oberflächenelemente  $ds$  können wir die Schnitte der austretenden und eintretenden Kraftfäden benutzen; dann ist jedes Differential von dem Werthe  $\pm \delta S$  und das ganze Flächenintegral erscheint in der Form  $N \cdot \delta S$ . Dabei ist  $N$  der Ueberschuß in der Anzahl der positiven Differentiale über die negativen. Diese Zahl kann positiv oder negativ ausfallen, man darf sie als ganze Zahl ansehen, wenn  $\delta S$  so klein ist, daß es auf Bruchtheile davon nicht mehr ankommt. Nunmehr lautet die vorstehende Gleichung

$$N \cdot \delta S = 4 \pi e$$

oder

$$N = \frac{4\pi e}{\delta S}.$$

Die Anzahl  $N$  der von der Elektrizitätsmenge  $+e$  ausgehenden Kraftfäden von der Stärke  $\delta S$  ist durch die vorstehende Formel angegeben, und eben so groß ist die Anzahl der Kraftfäden, welche in einer negativen Elektrizitätsmenge  $-e$  ihr Ende finden.

Die Fadenstärke  $\delta S$  ist ihrer Dimension nach einer Elektrizitätsmenge gleich, und wird deshalb nach demselben absoluten Maass gemessen. Nun sahen wir früher, daß im elektrostatischen C. G. S.-System die Einheit der Ladung ein sehr unbedeutendes Quantum repräsentirt, so daß Ladungen  $e$  mit gut wahrnehmbaren sinnlichen Wirkungen immer durch sehr große Maasszahlen bezeichnet sind. Deshalb führt die Annahme  $\delta S = 1$  fast immer zu hinreichend schwachen Kraftfäden, für welche alle Vereinfachungen des Unendlich-Kleinen unbedenklich erfüllt sind. Für solche Einheitsfäden gilt dann die Formel

$$N = 4\pi e. \quad (82a)$$

Die elektrische Ladung  $+e$  sendet  $4\pi e$  Einheitsfäden aus. Man kann auch sagen: Von jeder Einheit positiver Elektrizität gehen  $4\pi$  Einheitsfäden aus, in jeder negativen Elektrizitätseinheit enden  $4\pi$  Einheitsfäden. Man findet diese metrische Beziehung oft so ausgesprochen, daß an Stelle des Wortes „Einheitsfäden“ kurz „Kraftlinien“ gesetzt wird. Dann kann man aber unter Kraftlinien nicht den von uns eingeführten allgemeinen Begriff verstehen, weil dabei von einer bestimmten Anzahl nicht die Rede sein kann, sondern man muß sich vorstellen, daß jede Einheitsröhre oder jeder Einheitsfaden eine ausgesuchte Kraftlinie, gewissermaßen eine Seele in sich schließt, welche dann als Vertreter des ganzen Fadens gesetzt wird, und in diesem besonderen Sinn eine Kraftlinie genannt wird. In dieser Bedeutung ist die Bezeichnung „Zahl der Kraftlinien“ bei FARADAY, MAXWELL und Anderen zu verstehen.

### § 25. Der Green'sche Satz über zwei einander gleiche Functionen erstreckt.

Der GREEN'sche Satz handelt von zwei Raumfunctionen, die wir  $U$  und  $V$  nannten. Wir haben aus ihm einen specielleren Satz über nur eine Raumfunction hergeleitet, indem wir die andere Function

als Constante (= 1) festsetzen. Man kann noch einen anderen Satz ebenfalls über nur eine Function aus dem allgemeinen GREEN'schen Satz herauslesen, indem man nämlich die beiden Functionen identificirt. Das wollen wir jetzt thun, und zwar sogleich annehmen, die Function sei das Potential  $\varphi$  irgend einer elektrischen Vertheilung. Wir setzen in Gleichung (75) oder (75a)

$$U \equiv V = \varphi$$

und finden:

$$\left. \begin{aligned} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \\ = - \iint \overline{ds} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} - \iiint \varphi \Delta \varphi dx dy dz. \end{aligned} \right\} (83)$$

Von dieser Gleichung wollen wir nun einige Anwendungen machen.

1. Das Potential  $\varphi$  rühre her von einer nur im endlichen Raume begrenzten Elektrizitätsvertheilung, die wir uns der Einfachheit wegen zunächst nur in räumlicher Dichtigkeit  $\varepsilon$  vorhanden denken. Das Integrationsgebiet sei der ganze unendliche Raum, seine Begrenzung also eine unendlich ferne Kugelfläche. Dann wird, wie wir schon im Gefolge der Gleichungen (77) nachgewiesen haben, das Oberflächenintegral rechts gleich Null. Im Raumintegral rechts ist nach der POISSON'schen Differentialgleichung  $\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon$  zu setzen. Wir erhalten also die Relation

$$\left. \begin{aligned} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \\ = 4\pi \iiint \varphi \cdot \varepsilon dx dy dz. \end{aligned} \right\} (84)$$

Der Form nach sind beide Raumintegrale über den ganzen Raum erstreckt, dem Inhalt nach aber liefert das rechtsstehende nur dort Beiträge, wo die Dichtigkeit  $\varepsilon$  von Null verschieden ist, also in einem beschränkten Gebiet, während das links stehende Integral auch im leeren Raume bis in große Entfernungen hinein Beiträge empfängt. Wie man leicht sieht, ist der Integrandus der linken Seite nichts anderes, als das Quadrat der elektrischen Kraft =  $\mathfrak{E}^2$ . Das ganze Integral links stellt also nach Division durch  $8\pi$  den im vorigen Paragraphen bereits herangezogenen MAXWELL'schen Ausdruck für die gesammte elektrische Energie des Feldes dar:

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{E}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \varphi \cdot \varepsilon dx dy dz. \quad (84a)$$

Wir können das leicht in Verbindung bringen mit unserem früher gegebenen Ausdruck der potentiellen Energie eines Ladungssystems. Nämlich das Potential  $\varphi$  selbst kann als Raumintegral dargestellt werden über alle Volumelemente  $dx' dy' dz'$ , in welchen Dichtigkeit  $\varepsilon'$  existirt

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon' dx' dy' dz'}{r}.$$

Dabei ist  $r$  der Abstand des Elementes  $dx dy dz$  von dem Element  $dx' dy' dz'$ . Ob man dabei die Stelle  $r = 0$  ausschließt oder nicht, macht nichts aus. Die vorstehende Gleichung geht nun über in

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{E}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \iiint \frac{(\varepsilon dx dy dz)(\varepsilon' dx' dy' dz')}{r}. \quad (84b)$$

Die rechte Seite deckt sich jetzt mit dem Ausdruck Gleichung (17) für die potentielle Energie, nur hatten wir damals eine Doppelsumme über diskrete Punktladungen, hier ein doppeltes Raumintegral über kontinuierliche Raumladungen.

Dieser interessante Inhalt der Gleichung (83) verändert sich nicht wesentlich, wenn wir auch noch geladene Flächen im endlichen Raume dazu nehmen, an denen die Differentialquotienten von  $\varphi$  springen. Dann ist das Oberflächenintegral rechts zwar über die unendlich ferne Kugel gleich Null; es kommen aber dazu die beiden Seiten der Unstetigkeitsflächen und liefern, ganz ähnlich wie wir früher schon einmal sahen, Beiträge von der Form

$$= - \iint ds_u \cdot \varphi \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) = 4\pi \iint ds_u \cdot \varphi \cdot e.$$

In jedem Falle setzt sich die rechte Seite zusammen aus allen Ladungen, jede multiplicirt mit dem Potentialwerth, der an ihrem Orte herrscht, gleichviel, ob es Raum- oder Flächenladungen sind. Es liefse sich auch zeigen, daß für Punktladungen das Nämliche gilt. Man würde dazu nach bekannter Methode die Punkte durch Kugeln herauschneiden und die Oberflächenintegrale über diese Kugeln für verschwindenden Radius berechnen. Dann kommt zur rechten Seite hinzu

$$4\pi \sum_a q_a \cdot e_a.$$

Hieraus geht hervor, daß die gesammte Energie des elektrostatischen Feldes stets positiv ist, worauf wir schon in § 9 hinwiesen.

2. Die zweite Anwendung der Gleichung (83) soll sich auf ein durchaus ladungsfreies Raumgebiet beschränken, in welchem also  $\varphi$  sicherlich endlich und stetig verläuft und ohne Ausnahmepunkte der LAPLACE'schen Differentialgleichung  $\Delta \varphi$  genügt. Dann verschwindet das Raumintegral auf der rechten Seite und das Oberflächenintegral erstreckt sich nur über die eigentliche Begrenzung, nicht etwa noch über innere Unstetigkeitsflächen. Ferner wollen wir die ganz besondere Voraussetzung machen, daß das Potential auf der ganzen Begrenzungsfläche einen constanten Werth  $\varphi$  besitze, welchen wir als gemeinsamen Factor vor das Integral setzen dürfen, so daß unsere Gleichung nun lautet:

$$\iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = - \varphi \cdot \int \overline{ds} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}. \quad (85)$$

Von dem nun noch übrig gebliebenen geschlossenen Flächenintegral wissen wir aber nach Gleichung (78), daß es ebenfalls gleich Null sein muß. Unsere Voraussetzungen fordern also:

$$\iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = 0. \quad (85a)$$

Wegen des quadratischen Integrandus ist es nun unmöglich, daß der vorstehende Ausdruck etwa durch gegenseitige Vernichtung positiver und negativer Bestandtheile schließlic in Summa Null geben sollte; es ist dadurch bestimmt ausgesagt, daß an jeder Stelle im ganzen Gebiet bis an die Begrenzung heran

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein muß. Das Potential besitzt nirgends ein Gefälle, muß also den constanten Werth  $\varphi$ , welcher an der Oberfläche herrscht, auch im ganzen Innenraum wahren. Eine elektrische Kraft existirt daher in dem Gebiete nicht.

Die Voraussetzungen dieser mathematischen Schlüsse lassen sich experimentell verwirklichen. Wir nehmen eine Kenntniß vorweg, die wir später ausführlicher begründen werden, daß nämlich in Leitern der Electricität, z. B. in metallischen Körpern, im Zustand

elektrostatischen Gleichgewichts überall constantes Potential herrscht, so weit dieselben leitend mit einander verbunden sind. Von der Möglichkeit, daß an der Berührungsfläche heterogener Metalle oder anderer Leiter Potentialsprünge (Doppelschichten) vorkommen, brauchen wir hier nicht Notiz zu nehmen, weil diese bei elektrostatischen Problemen gar keine Rolle spielen. Der Versuch ist nun folgender: Man stellt einen beliebigen, elektrisch geladenen Körper „isolirt“ auf, so daß dessen Ladung nicht entweichen kann. Die davon ausgehende elektrische Kraft kann man im leeren Raume des Experimentirzimmers bis in weite Entfernungen nachweisen. Dann umgiebt man den Körper mit einer geschlossenen metallischen Hülle, welche ihn aber nicht leitend berühren soll. Die Wände des Zimmers, aus welchem alle sonstigen elektrischen Ladungen entfernt werden müssen, denken wir uns ebenfalls leitend, etwa mit Blech ausgekleidet, und verbinden sie mit der Hülle durch einen Metalldraht. Der Raum dieses Zimmers erfüllt dann alle Bedingungen, welche wir in der Theorie vorausgesetzt haben. Seine Begrenzung setzt sich zusammen aus der Außenseite der Metallhülle, den metallischen Wänden und der Oberfläche des beide verbindenden Drahtes, also aus lauter zusammenhängenden Leitern, in denen das Potential einen überall gleichen Werth annehmen muß. Außerdem ist der Raum frei von Ladungen, denn das Innere der Hülle gehört nicht mit zu unserem abgeschlossenen Integrationsgebiet. Der Theorie nach herrscht also keine elektrische Kraft im Raume, und diese Folgerung wird durch die Erfahrung vollkommen bestätigt: Selbst mit den empfindlichsten Elektrometern kann man keine Spur von einer Potentialdifferenz, d. h. von elektrischer Kraft im Raume nachweisen, mag die eingekapselte Ladung noch so stark sein und der Abstand von der Hülle noch so klein.

Diese Bestätigung ist ein Beweis dafür, daß unter allen Abstoßungs- und Anziehungsgesetzen das COULOMB'sche das einzig mögliche ist. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Abnahme der Kraft mit dem reciproken Quadrat des Abstandes das einzige Kraftgesetz ist, bei welchem die zugehörige Potentialfunction der Bedingung  $\Delta \varphi = 0$  im leeren Raume genügt. Sobald die Function von  $r$  im Kraftgesetz auch nur um ein ganz Geringes verschieden wäre von der minus-zweiten Potenz, so wäre  $\Delta \varphi$  im leeren Raume nicht genau gleich Null, das Raumintegral über das Quadrat der elektrischen Kraft würde nicht wie in (85a) exact verschwinden, und die kleinsten Spuren von elektrischer Kraft würden sich bei den sehr empfindlichen Elektrometermessungen verrathen. Deshalb haben wir hier

einen ungleich strengeren Beweis des COULOMB'schen Gesetzes, als die directen Messungen an der Drehwaage zu bieten vermögen. Bei der praktischen Ausführung dieses Versuches ist übrigens die metallische Auskleidung des Zimmers meist entbehrlich. Es genügt die Hülle um die Ladung in leitende Verbindung mit der Erde zu bringen, denn die Mauern eines Gebäudes sind doch gewöhnlich so weit leitend, daß auch sie sich auf dem Potential der Erde befinden. Unter freiem Himmel kann man gewöhnlich auch das Potential der Erde als gültig annehmen, soweit man von der atmosphärischen Elektrizität absehen darf.

Als ein mitunter wichtiges Hilfsmittel wollen wir noch anführen, daß sich ein Raumgebiet, in welchem keine Ladungen vorhanden sind, von jeder äußeren Feldwirkung abschließen läßt, indem man es mit einer metallischen Hülle umschließt. Man braucht dazu in der Praxis nicht einmal lückenlose Flächen (Blechumhüllung) herzustellen, sondern Drahtnetze leisten bereits den gleichen Dienst.

§ 26. Auswerthung einer Potentialfunction in einem begrenzten Raumgebiet mit Hülfe des Green'schen Satzes.

Wir kommen nun zu einer Anwendung des GREEN'schen Satzes, bei welcher beide Functionen  $U$  und  $V$  mit verschiedener Bedeutung gebraucht werden. Die Function  $\varphi$  sei das Potential einer elektrischen Vertheilung, deren räumliche Dichtigkeit  $\varepsilon$  im Inneren eines begrenzten Raumgebietes uns bekannt ist. Zunächst wollen wir annehmen, daß Unstetigkeitsflächen (Flächenbelegungen) und Unendlichkeitspunkte (Punktladungen) in diesem Gebiete nicht vorkommen. Wohl aber kann das Potential auch noch bedingt sein durch irgend welche Ladungen, welche außerhalb des begrenzten Gebietes liegen. Wir wollen den Werth von  $\varphi$  in irgend einem inneren Punkte des Raumes mit den Coordinaten  $a, b, c$ , ausdrücken. Zu dem Zweck bilden wir den GREEN'schen Satz über das Raumgebiet, in welchem  $\varepsilon$  bekannt ist. Für die Function  $V$  setzen wir das Potential  $\varphi$ , für  $U$  setzen wir eine Hilfsfunction, welche dem einfachsten Typus einer Potentialfunction nachgebildet ist:

$$U = \frac{1}{r}, \quad (86)$$

wo  $r$  den Abstand eines beliebigen Raumpunktes von dem festen Punkt ( $a, b, c$ ) bedeutet

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}. \quad (86a)$$

Diese Hilfsfunction genügt der LAPLACE'schen Differentialgleichung, hat aber im Punkte  $(a, b, c)$  eine Unendlichkeitsstelle, welche wir durch eine kleine Kugel vom Radius  $\rho$  aus dem Raume herauschneiden müssen, über welchen wir den GREEN'schen Satz erstrecken wollen. Da beide Functionen den gleichen Bedingungen der Potentialfunctionen genügen, so können wir den Satz in der Form (75 b) verwenden.

Die Oberfläche besteht aus der äußeren Begrenzung und der kleinen Kugelfläche. Wir wollen aber das in jener Formel gebrauchte Zeichen  $\iint$  hier auf die äußere Begrenzung beschränken und die von der Kugelfläche links und rechts herrührenden Beiträge gesondert hinzufügen. Wir setzen dabei, wie schon früher,  $ds = \rho^2 d\sigma$  und  $dn_i = + dr$  und bezeichnen die Integration über alle  $d\sigma$  (deren Summe =  $4\pi$  ist) mit  $\iint^{(k)}$ . Dann nimmt für unseren Fall der GREEN'sche Satz die Form an:

$$\left. \begin{aligned} & \iint ds \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \iint^{(k)} \rho^2 d\sigma \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \iiint \frac{1}{r} \Delta \varphi dx dy dz \\ & = \iint ds \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i} + \iint^{(k)} \rho^2 ds \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} + \iiint \varphi \Delta \left(\frac{1}{r}\right) dx dy dz. \end{aligned} \right\} (87)$$

Absichtlich ist in dieser Gleichung noch keine der naheliegenden Umformungen ausgeführt, um ihre Entstehung deutlich zu zeigen. Bezeichnen wir der Kürze wegen die sechs Integrale in der Reihenfolge, wie sie in Gleichung (87) folgen, mit I, II, III, IV, V, VI. Mit I und IV sind keine Aenderungen vorzunehmen, wohl aber mit den beiden Kugelflächenintegralen. Das linke ist

$$II = \rho \cdot \iint^{(k)} d\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

und verschwindet wegen des Factors  $\rho$  mit diesem; ja sogar noch entschiedener als  $\rho$  selbst, denn da  $\varphi$  an der Stelle  $(a, b, c)$  einen regulären Verlauf hat, sind die einzelnen  $\partial \varphi / \partial r$  nicht nur endlich, sondern auf den beiden Hälften der kleinen Kugel nahezu entgegengesetzt gleich, so daß sie sich bei verschwindender Größe der Kugel auch noch gegenseitig aufheben. Jedenfalls ist im Grenzfall  $\rho = 0$

$$II = 0.$$

Anders ist es bei dem rechtsseitigen Integral V.

Es ist

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} = - \frac{1}{r^2},$$

wofür an der Kugelfläche der feste Werth  $-\frac{1}{\rho^2}$  zu setzen ist. Die positiven und negativen Potenzen von  $\rho$  heben sich hier auf und es bleibt:

$$V = - \int \int^{(k)} d\sigma \cdot \varphi.$$

Die Werthe, welche  $\varphi$  auf den einzelnen Stellen der kleinen Kugelfläche besitzt, nähern sich mit verschwindendem Radius mehr und mehr dem Werthe, welcher im Centrum ( $a, b, c$ ) herrscht. Ja man darf diesen als zulässigen Mittelwerth bereits vor das Integral setzen, ehe noch die Kugel ganz verschwunden ist. Das dann noch übrigbleibende  $\int \int^{(k)} d\sigma$  ist aber  $= 4\pi$ , mithin wird

$$V = - 4\pi \varphi_{(a, b, c)}.$$

Im linksseitigen Raumintegral III machen wir Gebrauch von der Poisson'schen Differentialgleichung, deren  $\varepsilon$  uns ja im ganzen Gebiet bekannt ist, und erhalten:

$$III = - 4\pi \int \int \int \frac{\varepsilon dx dy dz}{r}.$$

Im letzten Integrale VI endlich gilt nach Ausschließung des Kugelinneren überall die LAPLACE'sche Gleichung  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ , also ist:

$$VI = 0.$$

Jetzt lautet Gleichung (87) folgendermaassen:

$$\int \int \int \overline{ds} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} - 4\pi \int \int \int \frac{\varepsilon dx dy dz}{r} = \int \int \overline{ds} \varphi \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_i} - 4\pi \varphi_{(a, b, c)}, \quad (87a)$$

oder nach Division mit  $4\pi$  und etwas geänderter Anordnung:

$$\varphi_{a, b, c} = \int \int \int \frac{\varepsilon dx dy dz}{r} + \int \int \overline{ds} \left( - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \right) + \int \int \overline{ds} \cdot \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_i}. \quad (87b)$$

Der Werth von  $\varphi$  in dem ausgewählten Punkte ist hiermit dargestellt und zwar durch drei Summanden, deren jeder eine uns bereits bekannt gewordene Bedeutung hat. Der erste Summand besitzt die Normalform des Potentials, welches herrührt von der räumlichen Vertheilung der Ladungen, soweit sie im Inneren unseres abgegrenzten Raumgebietes liegen. Es sind dies physikalisch vorhanden angenommene reale elektrische Quanta, doch ist damit nicht ausgedrückt, daß dieses alle Quanta sind, von denen  $\varphi$  herrührt. Es können vielmehr die Dichtigkeiten  $\epsilon$  jenseits der Begrenzung sich weiter fortsetzen, denn diese Begrenzung ist hier nur eine fingirte mathematische Oberfläche, welcher gar keine physikalische Bedeutung oder Realität zuzukommen braucht. Ueber diese Begrenzung erstrecken sich nun die beiden hinzukommenden Integrale. Das erste derselben hat die Normalform des Potentials einer Flächenbelegung, deren Dichtigkeit durch

$$e = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \quad (87c)$$

gegeben ist; das zweite sieht nach Gleichung (68), S. 72, aus, wie das Potential einer Doppelschicht, deren Moment durch

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi} \quad (87d)$$

gegeben ist, in beiden Ausdrücken für  $\varphi$  und dessen Differentialquotienten sind die entsprechenden Oberflächenwerthe zu nehmen. Von der realen Existenz dieser beiden Flächenbelegungen haben wir aber dadurch gar keine Gewifsheit. Die in Gleichung (87b) gegebene Darstellung des von einer wirklich vorhandenen Elektrizitätsvertheilung herrührenden Potentials hat also die Eigenthümlichkeit, daß sie ein beliebiges Raumgebiet bevorzugt, indem sie die darinnen liegenden Bestandtheile des Ladungssystems allein berücksichtigt, alle außerhalb liegenden, ebenfalls concreten Ladungen aber wegläßt und zum Ersatz dieser Unterlassung eine nicht concret existirende Belegung der beliebig gewählten Oberfläche des Gebietes mit erstens einer einfachen und zweitens einer Doppelschicht fingirt. Das hat zur Folge, daß  $\varphi$  im Inneren des Raumes zwar richtig dargestellt wird, aber außerhalb den wirklichen Verlauf nicht mehr darstellt, sondern wie wir zeigen wollen, überall den Werth 0 annimmt.

Denken wir uns zu diesem Zwecke die fingirte Vertheilung als die wirkliche, also den äußeren Raum ganz leer, und die Oberfläche des Gebietes reell belegt mit den durch (87c und d) gegebenen Dichtigkeiten  $e$  und Doppelschichtmomenten  $\mathfrak{M}$ .

Die Dichtigkeiten  $e$  bewirken dann einen Sprung, der nach der Normale genommenen Differentialquotienten von  $\varphi$ , den wir nach einer früher entwickelten Formel schreiben können

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = -4\pi e.$$

Dies stimmt mit Gleichung (87c) nur, wenn überall

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = 0$$

ist. Das Potential hat in der Richtung der nach aufsen gerichteten Normale an keiner Stelle der Oberfläche ein Gefälle, mufs daher im ganzen (leeren) Aufsenraum constant sein.

Die Doppelschicht bewirkt einen Sprung von  $\varphi$  selbst, welcher nach einer ebenfalls früher entwickelten Formel gegeben wird durch:

$$\varphi_i - \varphi_a = 4\pi \mathfrak{M}.$$

Dies stimmt mit (87d) nur, wenn an der Aufsenseite der Oberfläche

$$\varphi_a = 0$$

ist. Mithin ist der constante Werth, welchen  $\varphi$  im ganzen Aufsenraum bewahren mufs, der Werth  $\varphi = 0$ .

Die Ableitung der Gleichung (87b) aus dem GREEN'schen Satze wird nicht wesentlich verändert, wenn man neben der räumlichen Vertheilung  $\varepsilon$  auch noch reelle Flächenbelegungen  $e$  und reelle Punktladungen  $e_1, e_2, \dots e_a \dots$  als constituirende Elemente für das Potential  $\varphi$  annimmt. Man mufs dann diese Stellen, soweit sie im Inneren des Raumgebietes liegen, mit unter die Begrenzungen aufnehmen, wodurch die Oberflächenintegrale neue Beiträge liefern. Man übersieht leicht, da ähnliche Rechnungen schon mehrfach hier durchgeführt wurden, dafs an Stelle der Gleichung (87b) dann folgende erweiterte tritt:

$$\begin{aligned} \varphi_{abc} = & \left\{ \iiint \frac{\varepsilon dx dy dz}{r} + \iint ds_u \frac{e}{r} + \sum_{a=1}^n \frac{e_a}{r} \right\} \\ & + \iint ds \frac{\left( -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \right)}{r} + \iint ds \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_i}. \quad (87e) \end{aligned}$$

Die ersten drei Terme erstrecken sich auch jetzt über alle diejenigen Ladungen, welche im Innern des gewählten Gebietes liegen, nur

besteht dieser, in geschweifte Klammern geschlossene Theil jetzt aus drei Bestandteilen, entsprechend den verschiedenen Anordnungen der Ladungen in Räumen, Flächen, Punkten. (Geladene Linien hätte man als vierte Möglichkeit auch noch aufnehmen gekonnt.) Die beiden letzten Integrale über die äußere Begrenzung haben durchaus die gleiche Bedeutung wie in (87b).

Wenn man übrigens von dem Princip der continuirlichen Uebergänge Gebrauch machen will, so kann man Sprünge der Differentialquotienten von  $\varphi$  und Unendlichkeitsstellen von  $\varphi$  wegleugnen, erstere als Stellen auffassen, in der Elektrizität schichtartig, aber doch in räumlicher Dichtigkeit dicht zusammengerückt liegt, letztere als knotenartige Anhäufungen räumlicher Ladungen ansehen, und kommt dann mit der einfacheren Gleichung (87b) vollständig aus. Diese Gleichung stellt eine Integration der Poisson'schen Differentialgleichung für ein abgegrenztes Raumgebiet dar. Die Poisson'sche Differentialgleichung  $\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon$  ist linear, aber nicht homogen. Ueber die Integrale solcher Differentialgleichungen giebt es einen allgemeinen Satz: Hat man zwei verschiedene Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gefunden, so können diese sich nur unterscheiden um eine Function, welche im ganzen Gebiete ohne Ausnahme der entsprechenden homogenen Differentialgleichung genügt. Das ist in unserem Falle die LAPLACE'sche. Eventuelle geforderte Unstetigkeiten müssen sich in der Differenz  $\varphi_1 - \varphi_2$  wegheben, da sie beiden Lösungen gleichermaßen eigen sind. Man kann also aus irgend einem partikulären Integral, welches nur der Poisson'schen Gleichung, aber nicht den Grenzbedingungen genügt, jedes andere durch Hinzufügung von Integralen der LAPLACE'schen Gleichung erhalten. In Gleichung (87b)

ist dies geschehen: Das Raumintegral über  $\frac{\varepsilon}{r}$  befriedigt die

Poisson-Gleichung, die beiden folgenden Oberflächenintegrale genügen der Laplace-Gleichung, weil sie Potentiale sind von Belegungen, die den Innenraum nicht besetzen. Die eigenthümliche Bildung dieser beiden Zusätze ist nun aber eine Folge der besonders einfachen Form, welche wir der Hilfsfunction  $U$  im GREEN'schen Satze gegeben

haben, indem wir sie  $= \frac{1}{r}$  setzten.

Der Mathematiker wird die Gleichung (87b) nicht für eine vollständige Integration der Poisson'schen Differentialgleichung in dem abgegrenzten Raumgebiet ansehen, denn, wenn die partielle Differentialgleichung im Integrationsgebiet vorgeschrieben ist, will er die Form der Lösung eindeutig angegeben sehen, sobald die Grenz-

bedingungen bekannt sind. Darunter sind aber nur die Werthe der gesuchten Function selbst verstanden, welche an der Begrenzung vorgeschrieben sind. Wir haben aber auch deren Differentialquotienten nach der inneren Normale benützt, also eine Kenntniß wenigstens des Anlaufs, den  $\varphi$  nimmt, wenn man von der Begrenzung ins Innere dringt.

### § 27. Fortsetzung unter Verwendung der Green'schen Function.

Es giebt eine im Princip der vorigen ganz ähnliche Behandlung des in Rede stehenden Problems, welche zur Lösung der Aufgabe nur die Grenzwerte von  $\varphi$  selbst erheischt, nicht auch die von  $\partial\varphi/\partial n_i$ ; aber die Hilfsfunction  $U$  hat dabei nicht die einfache Gestalt, welche wir ihr im Vorigen gegeben haben.

Diesen Weg hat bereits GREEN eingeschlagen, und man nennt deshalb die dazu taugliche Hilfsfunction die GREEN'sche Function. Um den rein mathematischen Beweis für ihre eindeutige Existenz haben sich GAUSS, DIRICHLET und andere Mathematiker verdient gemacht, siehe § 30 S. 128. Doch kann man sich durch eine physikalische Vorstellung ohne Mühe die Ueberzeugung verschaffen, daß sie thatsächlich bei jeder Form der Raumbegrenzung und bei jeder Lage des inneren Punktes  $(a, b, c)$  gefunden werden kann und nur in einer einzigen Art ihres Verlaufes gefunden werden kann. Daß man sie durch einen expliciten Rechenausdruck angeben kann, soll damit nicht gesagt sein, dies gelingt nur bei besonders regelmässiger Gestalt der Begrenzungsfläche.

Die GREEN'sche Function  $U$  soll folgende Bedingungen erfüllen: 1. In dem Punkte  $(a, b, c)$ , in welchem man den Werth von  $\varphi$  sucht, soll sie unendlich werden in ganz derselben Weise, wie die im vorigen Paragraphen benützte Function  $\frac{1}{r}$ . 2. Im ganzen übrigen Innenraum soll sie der LAPLACE'schen Differentialgleichung  $\Delta U = 0$  genügen. 3. An der geschlossenen Begrenzungsfläche soll sie überall den Werth  $\bar{U} = 0$  haben. Den Verlauf dieser Function  $U$  veranschaulicht uns folgende physikalische Vorstellung: Wir denken uns alle die Ladungen, von denen  $\varphi$  herrührt, fortgeschafft, denken uns ferner den abgegrenzten Raum als eine Höhlung in einem metallischen Körper, oder wenigstens umhüllt von einem metallischen Mantel, dessen innere Wandung die Grenzfläche bildet. In den

Punkt  $(a, b, c)$ , welcher irgend wo in der Höhlung liegt, stellen wir isolirt eine Punktladung  $+1$  und verbinden die Metalloberfläche leitend mit dem Erdkörper, den wir als unendlich großen Leiter mit dem Potentialwerth  $0$  ansehen dürfen. Dann stellt sich ein ganz bestimmter elektrostatischer Ruhezustand her. Negative Quanta, herbeigezogen durch die positive Punktladung bedecken in ganz eindeutig bestimmter Dichtigkeitsvertheilung der Flächenbelegung die innere Metallwandung, und es besteht in dem Hohlraum ein elektrisches Feld, dessen Potential nichts anderes ist, als die GREEN'sche Function. Die erste Bedingung wird durch die Punktladung befriedigt, die zweite dadurch, daß der Hohlraum im übrigen leer gedacht wird, die dritte endlich durch die leitende Verbindung der Hülle mit der Erde. Ueber die mathematische Darstellung läßt sich im Allgemeinen nur so viel aussagen, daß die GREEN'sche Function in die Form gebracht werden kann:

$$U = \frac{1}{r} - U'. \quad (88)$$

Der erste Summand, die einfache Hilfsfunction des vorigen Paragraphen, besorgt das Unendlichwerden in dem ausgewählten Punkt  $(a, b, c)$  und befriedigt im übrigen Raum die LAPLACE'sche Gleichung. Der hinzugekommene Summand  $-U'$  hat die Aufgabe, die Function an der Oberfläche auf Null herunter zu drücken, ohne ihre übrigen Eigenschaften zu stören. Bezeichnen wir also mit  $\bar{r}$  den Abstand der einzelnen Oberflächenelemente von dem ausgewählten Punkt im Inneren, so muß  $U'$  an der ganzen Oberfläche die Werthe besitzen, welche durch

$$\bar{U}' = \frac{1}{\bar{r}} \quad (88a)$$

vorgeschrieben sind. Im inneren Raum aber muß  $U'$ , stetig an  $\bar{U}'$  anknüpfend, überall der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen ohne jede Ausnahmestelle, ganz wie ein Potential in einem gänzlich leeren Raume. Das Problem der Auffindung der GREEN'schen Function ist hierdurch zurückgeführt auf das einfachere, eine Function  $U'$  zu bestimmen, welche im ganzen inneren Raum ohne Ausnahmestelle der LAPLACE'schen Gleichung genügt und sich stetig einem vorgeschriebenen Verlauf an der Oberfläche anschmiegt. In unserem Falle ist es sogar ein durch das einfache Gesetz (88a) vorgeschriebener Verlauf. Wir werden bei der Betrachtung des elektrostatischen Gleichgewichtes in Leitern auf das gleiche Problem ohne

die Besonderheit (88a) stoßen, und deshalb die Betrachtungen darüber bis dahin verschieben, zumal wir durch das beschriebene physikalische Bild von der eindeutigen Existenz von  $U$ , folglich auch von  $U'$  überzeugt sind.

Nun wenden wir, wie im vorigen Paragraphen, den GREEN'schen Satz in der Form (75 b) an, schneiden die Unendlichkeitsstelle von  $U$  durch Kugel von Radius  $\rho$  heraus und erhalten, entsprechend (87)

$$\left. \begin{aligned} & \iint \overline{ds} U \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \iint \int \rho^2 d\sigma U \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \iiint U \Delta \varphi dx dy dz \\ & = \iint \overline{ds} \varphi \frac{\partial U}{\partial n_i} + \iint \int \rho^2 d\sigma \varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \iiint \varphi \Delta U dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Diese sechs Integrale in der hier stehenden Reihenfolge nennen wir wieder I, II, III, IV, V, VI.

Der Unterschied gegen die vorige Darstellung zeigt sich gleich im ersten Integrale, denn es ist jetzt

$$I = 0,$$

weil  $U$  an der Oberfläche gleich Null ist. Ueber IV ist nichts zu bemerken. In den beiden Kugelintegralen benützen wir (88). Dann wird:

$$II = \iint \int \rho^2 d\sigma \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \iint \int \rho^2 d\sigma U' \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Beide Integrale verschwinden zugleich mit  $\rho$ , das erste ist identisch mit dem entsprechenden des vorigen Paragraphen, das zweite enthält noch eine Potenz mehr von der verschwindenden Größe  $\rho$ , während  $U'$  an der Kugel endlich bleibt. Es ist also auch hier:

$$II = 0.$$

Im Integrale V ist  $\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{\partial U'}{\partial r}$  zu setzen, also

$$V = - \iint \int \rho^2 d\sigma \frac{1}{\rho^2} \varphi - \iint \int \rho^2 d\sigma \varphi \frac{\partial U'}{\partial r}.$$

Das erste ist wieder identisch mit dem V des vorigen Paragraphen, das zweite verschwindet wegen des Factors  $\rho^2$  und regulären Verlaufs von  $\frac{\partial U'}{\partial r}$  an der Stelle der kleinen Kugel, also ist

$$V = -4\pi \varphi_{(a, b, c)}.$$

Endlich ist wegen der POISSON'schen Differentialgleichung:

$$\text{III} = -4\pi \iiint U \varepsilon \, dx \, dy \, dz,$$

und wegen der LAPLACE'schen Differentialgleichung:

$$\text{VI} = 0.$$

Im Ganzen ist also, wenn man V allein auf die linke Seite stellt und durch  $4\pi$  dividirt:

$$\varphi_{(a,b,c)} = \iiint U \varepsilon \, dx \, dy \, dz + \iint ds \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n_i}. \quad (89a)$$

Sind aufer der Raumdichtigkeit  $\varepsilon$  noch Flächen vorgeschrieben, an welchen  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  gegebene Sprünge machen soll, die man sich also mit bekannten Flächenbelegungen von der Dichtigkeit  $e$  geladen zu denken hat, so kommt zur rechten Seite noch ein Integral über diese Unstetigkeitsflächen hinzu von der Form:

$$+ \iint ds_u U e.$$

Sind endlich auch Unendlichkeitsstellen von  $\varphi$  vorgeschrieben, die von Punktladungen  $e_1 \dots e_a \dots$  herrühren, so kommt rechts noch hinzu:

$$+ \sum_a U e_a.$$

In diesen beiden eventuell hinzutretenden Termen sind für  $U$  die Werthe zu setzen, die an den Stellen der vorhandenen  $e$  und  $e_a$  herrschen. (Unter Zulassung des Principis der Continuität kann man die  $e$  und  $e_a$  als sehr dicht zusammengedrückte Raumladungen ansehen, dann fallen sie mit unter das Raumintegral (89a) und diese Gleichung ist ohne die eben angeführten Zusätze vollständig.)

Es ist nun in Gleichung (89a) gelungen den Werth von  $\varphi$  in jedem Punkte eines beliebigen Raumgebietes anzugeben, wenn die POISSON'sche Differentialgleichung, d. h. die Vertheilung von  $\varepsilon$ , und die Oberflächenwerthe von  $\varphi$  gegeben sind; sie stellt daher eine vollgültige Integration der Differentialgleichung dar. Zugleich sieht man, daß es stets eine und nur eine passende Lösung giebt, weil es stets eine eindeutige GREEN'sche Function  $U$  geben muß, deren Kenntniß allerdings dabei vorausgesetzt wird.

Je weiter die Grenzen des Raumgebietes hinausgeschoben werden, um so kleiner werden für Punkte im Endlichen die Beträge  $1/\bar{r}$ ,

um so unbedeutender wird zugleich damit auch die Function  $U'$ , welche ja im Inneren nirgends größer werden kann, als der höchste vorkommende Werth von  $1/\bar{r}$ , weil ein ausnahmeloses Integral der LAPLACE'schen Gleichung kein Maximum haben kann. Bei unbegrenztem Raume geht daher die GREEN'sche Function in die einfache Form  $U = 1/r$  des vorigen Paragraphen über; die beiden Gleichungen (87 b) und (89 a) werden dann gleichbedeutend und geben:

$$\varphi_{a,b,c} = \iiint \frac{\varepsilon \cdot dx dy dz}{r},$$

welchem eventuell bei Flächen- und Punktladungen noch hinzuzufügen sind:

$$+ \iint ds_u \frac{e}{r} + \sum_a \frac{e_a}{r}.$$

Die Oberflächenintegrale über die unendlich ferne Begrenzung nämlich verschwinden in beiden Gleichungen, wenn  $\varphi$  in großer Entfernung abnimmt wie  $\frac{\text{Const}}{r}$ . Dies dürfen wir aber annehmen, wenn  $\varphi$  nur von Ladungen im Endlichen herrührt.

### § 28. Ein Satz von Gauss über Potentiale in leeren Raumgebieten.

Wir können an die Entwicklungen der beiden vorhergehenden Paragraphen einen Satz als besonders einfachen Sonderfall anschließen, welcher von GAUSS (Allgemeine Lehrsätze 1840) ohne Benutzung des GREEN'schen Satzes abgeleitet wurde.

Wir denken uns einen leeren Raumbezirk, in welchem ein Potential  $\varphi$  existirt, das dort natürlicher Weise überall der LAPLACE'schen Differentialgleichung  $\Delta \varphi = 0$  genügt. Als Begrenzung des Integrationsgebietes denken wir uns in diesem Bezirk eine Kugel fläche vom Radius  $R$ , und als den Punkt  $(a, b, c)$ , in welchem wir  $\varphi$  bestimmen wollen, wählen wir das Centrum dieser Kugel. Die beiden Schlufsgleichungen (87 b) und (89 a) leisten uns dabei gleich gute Dienste. In beiden fallen die Raumintegrale fort, weil nach Voraussetzung  $\varepsilon = 0$  ist. Betrachten wir zuerst (87 b) für diesen Fall: Im ersten nimmt der Nenner  $r$  den festen Werth  $R$  an, im zweiten ist:

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_i} = - \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}, \quad \text{also} = \frac{1}{R^2}.$$

Es folgt daher, wenn wir den Werth im Centrum der Kugel mit  $\varphi_0$  bezeichnen:

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi R} \iint \overline{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{1}{4\pi R^2} \iint \overline{ds} \varphi.$$

Das erste dieser beiden Integrale verschwindet aber, weil die Kugel einen ladungsfreien Raum enthalten soll.

Bei Verwendung der Gleichung (89 a) müssen wir erst die GREEN'sche Function suchen. Diese wird bei den einfachen Bedingungen dieser Aufgabe leicht gefunden. Da nämlich überall  $1/\bar{r} = 1/R$  ist, ist auch  $U' = \frac{1}{R}$  (im ganzen Kugelraum constant), also:

$$U = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

mithin

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Es folgt also beide Male das gleiche Ergebniss:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint \overline{ds} \varphi. \quad (90)$$

Diese Formel stellt  $\varphi_0$  dar als den arithmetischen Mittelwerth aller an der Kugeloberfläche herrschenden Werthe von  $\varphi$ , denn  $\iint \overline{ds} \varphi$  summirt alle Flächenelemente der Kugel, jedes multiplicirt mit dem dort herrschenden Werth von  $\varphi$ , und der vorgestellte Divisor  $4\pi R^2$  misst die gesammte Kugelfläche. Wir haben hiermit den von GAUSS gefundenen Satz abgeleitet, welcher in Worten so ausgesprochen werden kann: „In ladungsfreien Raumgebieten ist der Potentialwerth in jedem Punkte gleich dem arithmetischen Mittel der Potentialwerthe auf einer um diesen Punkt als Centrum gelegten Kugelfläche. Auf den Radius kommt es dabei nicht an, so lange nur die Kugel nicht in geladene Gebiete hineinragt.“

Mit Hülfe dieses Satzes kann man noch folgende principiell wichtige Eigenschaft der Potentialfelder nachweisen: Ist in einem endlichen ladungsfreien Raumgebiet das Potential als constant erkannt, so muß es den gleichen constanten Werth auch über die Grenzen des Gebietes hinaus bewahren, so weit der ladungsfreie Raum reicht. Den Beweis führt man dadurch, daß man Kugelflächen gelegt denkt, deren Centra noch in dem Gebiete liegen, in denen  $\varphi$

als constant erkannt ist, während die Oberflächen theilweise in unbekanntes Gebiet hinausragen, von welchem man nur weiß, daß es leer von elektrischen Ladungen irgend welcher Art ist. Wenn dann auf den hinausragenden Flächentheilen das Potential andere Werthe hätte, wie im bekannten Gebiet, so könnte der Mittelwerth über die Oberfläche nicht den Werth im Centrum ergeben, welches noch ins innere Gebiet fällt. Die Ausflucht, daß die variablen Antheile der hinausragenden Kugelcalotten sich gegenseitig vernichten, ist wegen der ganz beliebigen Lage der Kugeln hinfällig. So kann man das bekannte Gebiet durch immer weiter vorgeschobene neue Kugelflächen erweitern und schließlichs allen zusammenhängenden leeren Raum dadurch für die Erkenntniß des constanten Potentialwerthes erobern.

Anmerkung. Eine, wenn auch kleine, aber doch endliche Ausdehnung muß bei dieser Beweisführung das ursprüngliche Gebiet haben, in welchem die Constanz des Potentials verbürgt ist, sonst könnte man zu falschen Schlüssen geführt werden. Wir erwähnten früher (S. 97) die Möglichkeit eines Sattelwerthes des Potentials im leeren Raume zwischen zwei gleichgeladenen Punkten. An solcher Stelle hat man allerdings einen verschwindend kleinen Raum, in welchem  $\varphi$  nach keiner Richtung hin ein Gefälle zeigt, also constant erscheint. Doch dürfte man dieses verschwindend kleine Gebiet nicht durch solche Kugelflächen-Taktik, wie wir sie vorher anwendeten, erweitern wollen.

---

## Zweiter Abschnitt.

### Gleichgewicht der Elektrizität auf leitenden Körpern.

---

#### Erstes Kapitel.

#### Allgemeine Grundsätze.

---

#### § 29. Leitfähigkeit und Influenzirbarkeit, allgemeine Bedingung des Gleichgewichts.

Unter einem Leiter der Elektrizität oder einem Conductor versteht man, der Erfahrung entsprechend, einen Körper, in welchem elektrische Quanta ihren Ort verändern können, ohne den ponderablen Träger mitzunehmen, in welchem sie also gewissermaassen fließen

können. Daher nennt man die elektrischen Quanta in Leitern auch wohl Fluida. Die Ursache des eintretenden Fließens oder der Fortleitung ist immer das Wirken einer elektrischen Kraft, welche die Quanta nach ganz demselben Grundgesetz angreift, welches wir zu Anfang des ersten Abschnittes aufstellten, nur mit dem Unterschied, daß hier nicht die Träger der Ladungen angegriffen werden, also keine ponderomotorischen Wirkungen erzeugt zu werden brauchen. Man nennt deshalb die elektrische Kraft in diesem Falle zum Unterschiede von dem vorigen auch elektromotorische Kraft. Ein begrifflicher Unterschied besteht aber nicht zwischen beiden: Die Vorstellung des elektrischen Feldes mit seiner Potentialfunction gilt hier ebenso, wie vorher. Aber eine Erweiterung der Vorstellung von den elektrischen Quantis ist jetzt nöthig.

Mit dem Worte Quantum soll doch ausgedrückt werden, daß man es mit einer unzerstörbaren und unvermehrbaeren Größe zu thun hat, welche in leitenden Körpern nur die Freiheit hat, ihren Sitz zu verändern. Die Unveränderlichkeit des Ladungsquantums kann man nun bei einem gut isolirten Conductor auch noch nachweisen, so lange man äußere elektrische Kräfte fernhält. Kann man die Gestalt des Conductors verändern, so verändert sich zwar die Anordnung seiner Ladung, aber die Gesammtmenge der ihm mitgetheilten Elektricität bleibt unverändert, wenigstens kann man deren früher oder später bemerkbare Abnahme immer befriedigend erklären durch mangelhafte Isolirung oder durch Leitfähigkeit der Luft, welche den Conductor umgiebt. Die mitgetheilte Ladung besitzt dabei immer auf allen Stellen des Conductors gleiches Vorzeichen. Bringt man aber diesen Conductor in ein hinreichend starkes elektrisches Feld, so kann man beobachten, daß er an verschiedenen Stellen entgegengesetzte Ladungen zeigt, von denen die eine beider Arten vorher nicht zu beobachten war, also neu entstanden sein muß. Auch zeigt die vorher vorhandene Art jetzt größeres Quantum. In gewöhnlichem Sinne kann man also nicht von Unvermehrkeit der Ladung sprechen, doch bestätigen alle Erfahrungen, daß stets gleich große Mengen positiver und negativer Ladungen entstehen, so daß man die Constanz der Elektricitätsmengen auf einem isolirten Conductor gewahrt findet, wenn man unter Menge die algebraische Summe der positiven und negativen Quanta versteht. Man kann die Vorstellung von dem substantiellen Charakter der elektrischen Ladungen angesichts dieser Erscheinungen nur mit einer gewissen Gewaltigkeit retten, welche unser Anschauungsbedürfnis nicht recht befriedigt. Man nimmt nämlich an,

dafs sich in allen Körpern gleichgrofse Quanta der beiden entgegengesetzten Elektricitäten in unerschöpflicher Menge überall bei einander befinden, ohne dafs deren Gegenwart sich durch irgend etwas verräth, weil die entgegengesetzten Wirkungen der positiven und negativen Fluida sich neutralisiren. Aus diesem Vorrath treten, durch irgend welche Processe von einander getrennt, die einzelnen positiven und negativen Quanta — immer beide in gleichen Mengen — hervor in die Erscheinung, man könnte sagen, in die Wirklichkeit, um gelegentlich bei anderen Processen wieder zusammenzufliessen zu „Nichts“, denn das ist in der That der sich durch keinerlei Wirkungen verrathende unerschöpfliche Vorrath. Wenn man das Unbefriedigende der Hypothese, dafs zwei Substanzen von polar entgegengesetzten Eigenschaften sich vernichten sollen, als unvermeidlich hinnimmt, so erklärt im Weiteren diese Auffassung die Phänomene in befriedigender Weise. Man kennt keinen Procefs der Elektricitäts-erzeugung, bei welchem nicht gleichgrofse Mengen positiver und negativer Ladungen gebildet werden. Dies gilt auch von der ältest-bekanntesten Erzeugung durch Reibung zweier verschiedener Körper, und hier begegnen wir bei der Betrachtung eines Conductors, der in ein äufseres elektrisches Feld gebracht wird, einer zweiten davon verschiedenen Entstehungsweise. Die frei beweglichen, einander neutralisirenden, beiden Fluida werden durch den Angriff der äufseren elektrischen Kraft in entgegengesetzter Richtung fortgeführt, die positiven in Richtung fallenden, die negativen in Richtung steigenden Potentials. Dadurch werden beide räumlich getrennt, und äufsern als reelle Ladungen ihre charakteristischen Wirkungen. Dafs diese Trennung bei elektrostatischen äufseren Kräften zu einem bestimmten Gleichgewichtszustand führen mufs, nachdem endliche Mengen positiver und negativer Elektricität von einander getrennt worden sind, werden wir bald beweisen. Man nennt diese Trennung „Influenz“. Besteht der Conductor aus zwei geeigneten trennbaren Theilen, die sich einzeln isoliren lassen, so kann man nach Eintritt des Gleichgewichts die positiv geladenen Regionen für sich abheben, und die negativen ebenfalls, und sie aus dem erzeugenden Felde und aus der Nachbarschaft der anderen Hälfte wegbringen und erhält so zwei mit entgegengesetzt gleichen Quantis beladene einzelne Conductoren. Die Influenzmaschinen sind nichts als Apparate, welche durch eine drehende Bewegung ihrer Theile fortgesetzt und continuirlich diese beiden Akte wiederholen: Trennung der Elektricitäten durch Influenz und räumliche Trennung der damit beladenen Conductoren.

So lange im Inneren eines Leiters elektrische Kraft herrscht, findet Trennung und entgegengesetzte Fortführung beider Elektricitäten statt, es besteht kein Ruhezustand. Die getrennten Ladungen aber erzeugen ein eigenes neues Feld, welches sich dem ursächlichen äußeren Felde superponirt und dieses schwächt. Ruhe kann erst eintreten, wenn das äußere Feld im ganzen Innenraum des Leiters gerade aufgehoben wird durch das Feld der influenzirten Ladungen. Sobald dieser Zustand eingetreten ist, hört die Trennung auf und es besteht Ruhe der Ladungen, welche so lange währt, als das äußere Feld unverändert gelassen wird. Nun sieht man sogleich ein, daß bei diesem Ruhezustand im inneren Raum des Leiters sich keine Ladungen halten können, denn diese würden um sich herum immer ein Feld erzeugen, und zwar ein solches, welches auf keine Weise durch das äußere Feld aufgehoben werden kann. Die durch Influenz getrennten Quanta wie auch die dem Leiter eventuell von Anfang im Ueberschuß mitgetheilte Ladung müssen also im Gleichgewichtszustand bis an die Grenzen des Leiters gerückt sein, dessen Oberfläche sie in einer bestimmten Vertheilung der Flächen-dichtigkeit belegen.

In „guten“ Leitern, zu denen namentlich die Metalle und das für gewöhnlich immer mit Spuren von gelösten Salzen behaftete Wasser und auch feuchte, d. h. mit Wasser durchtränkte Stoffe gehören, geschieht die zur elektrischen Ruhe führende Dislocation der Fluida in so außerordentlich kurzer Zeit, daß sie bei mäfsiger Ausdehnung der Conductoren überhaupt nicht direct beobachtet werden kann, vielmehr den Eindruck einer momentanen Wirkung macht. Es bestehen indessen zwischen den guten (vollkommenen) Leitern und den vollkommenen Nichtleitern oder Isolatoren Zwischenstufen: Körper, in denen die hier allgemein charakterisirte elektrostatische Dislocation den äußeren Feldkräften nicht momentan folgt, sich aber nach einiger Zeit herstellt. In die Klasse dieser Halbleiter gehören streng genommen alle wirklichen Körper, doch nähern sich einige Gruppen sehr stark den beiden idealen Grenzfällen. Daß sich in den sogenannten vollkommenen Nichtleitern und auch in den schlechten Halbleitern, in letzteren lange vor Eintritt der Ruhe durch Leitung, momentan ein anderer merkwürdiger Zustand ausbildet, den man als dielektrische Polarisation bezeichnet, soll uns hier noch nicht beschäftigen. Wir betrachten hier den definitiven Ruhezustand, der durch Freizügigkeit beider Elektricitäten in den ganzen ausgedehnten Körpern zu Stande kommt. Dieser ist unabhängig davon, wie gut das Leitvermögen ist, oder wie lange es dauert, bis

er erreicht ist. Es kommt dabei nur an auf die Gestalt des Leiters, auf die ihm mitgetheilte Ladung und auf das influenzirende äußere Feld.

Wir müssen nun die Gleichgewichtsbedingung mathematisch formuliren. Das Verschwinden der elektrischen Kraft im Inneren des Leiters fordert daselbst constantes Potential bis an die Oberfläche, welche an vollkommen nichtleitende Substanzen, Isolatoren, feste, flüssige oder gasförmige, zu denen auch das möglichst vollkommene Vacuum zu rechnen, angrenzt. An der Berührungsfläche zweier chemisch verschiedener Leiter hat man allerdings Sprünge der Potentialfunction nachgewiesen, welche auch im Ruhezustand gewahrt bleiben. Solche Potentialsprünge stören aber nicht die Gleichgewichtsbedingung, wenn nur das Potential zu beiden Seiten kein Gefälle besitzt. Man kann sich in solchen Berührungsflächen von dem hier vorgetragenen Standpunkt aus Doppelschichten denken, deren Fernwirkung ja nach früheren Auseinandersetzungen eine verschwindende ist. Zunächst sehen wir aber von solchen für die Elektrostatik unwesentlichen Complicationen ab und betrachten einen begrenzten homogenen Leiter, welcher in ein gegebenes äußeres elektrisches Feld gebracht ist. Das Potential dieses Feldes, wenn der Leiter nicht darin liegt, sei  $\varphi$ . Es rühre her von festen Ladungen, die jedenfalls den Raum, in welchen der Leiter gebracht werden soll, leer lassen, so daß dort überall  $\Delta\varphi = 0$  ist. Nun kommt der beladene oder unbeladene Conductor, vollkommen isolirt, in eine bestimmte Stellung im Felde und die Vertheilung der Ladung, eventuell auch die Trennung der verbundenen Fluida stellt sich her. Der Gleichgewichtszustand wird nicht gestört, wenn wir die frei beweglichen Fluida, welche die Oberfläche des Conductors nun ruhend bedecken, uns als unverrückbar an ihren Orten festgehalten denken.

Dann können wir das äußere ursächliche Feld weggenommen denken und der Conductor mit der auf ihm fixirten Ladung bleibt allein zurück. Diese Oberflächenladung für sich allein bewirkt ein elektrisches Feld sowohl im Inneren des Leiters wie im äußeren Raum. Das Potential dieses Feldes sei  $\varphi'$ . Es muß wegen der Abwesenheit räumlicher Ladungen innen und außen bis an die Oberfläche heran der Differentialgleichung  $\Delta\varphi' = 0$  genügen. Die auf der Begrenzung angesammelten Flächenladungen werden aber die uns bereits bekannten Sprünge der Differentialquotienten  $\partial\varphi'/\partial n$  hervorbringen. In Wirklichkeit besteht nun das äußere Feld zusammen mit dem von der Oberflächenbelegung herrührenden. Die

beiden Potentialfunctionen  $\varphi$  und  $\varphi'$  superponiren sich überall durch algebraische Addition, es herrscht defshalb im Raum das Potential  $\varphi + \varphi'$  und die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, daß für das zusammenhängende Innere des Conductors bis zu dessen Oberfläche gilt:

$$\varphi + \varphi' = \text{Constans.} \quad (91)$$

Der Werth der Constanten wird hierdurch nicht bestimmt. Wird das Potential  $\varphi$  des äußeren Feldes ohne disponible additive Constante angegeben, etwa in der bestimmten Form  $\sum e/r$ , so kann die Unbestimmtheit des Werthes in der Gleichgewichtsbedingung (91) nur daher rühren, daß nicht angegeben ist, wie groß die dem Conductor eventuell mitgetheilte Ladung ist. Wir können aber diese Unbestimmtheit abspalten, indem wir  $\varphi'$  in zwei Summanden zerlegen:

$$\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$$

und fordern

$$\varphi + \varphi'' = 0 \quad (91 a)$$

$$\varphi''' = \text{Const.} \quad (91 b)$$

für das Innere des Conductors bis zur Oberfläche. Dadurch wird die sich auf dem Conductor bildende Oberflächenbelegung aufgefaßt als algebraische Summe zweier verschiedener Belegungen, welche einzeln die Potentiale  $\varphi''$  und  $\varphi'''$  hervorbringen würden. Man kann auch leicht erkennen, unter welchen Bedingungen diese beiden einzelnen Belegungen sich in Wirklichkeit herstellen können. Die Belegung, die  $\varphi''$  erzeugt, bildet sich, wenn der Conductor im influenzirenden Felde zur Erde abgeleitet ist, weil dann der Potentialwerth auf ihm = 0 ist, wie (91 a) fordert. Die andere Belegung, welche  $\varphi'''$  erzeugt, bildet sich, wenn man dem isolirten Conductor eine passende Ladung mittheilt und das äußere influenzirende Feld fortnimmt.

Beide Theile,  $\varphi''$  und  $\varphi'''$ , müssen einzeln innen und außen der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen, ihre Differentialquotienten nach der Normale der Conductoroberfläche besitzen die den Flächendichtigkeiten  $e''$  und  $e'''$  entsprechenden Sprünge. Im äußeren Raum in unendlicher Entfernung müssen  $\varphi''$  und  $\varphi'''$  als Potentiale endlicher, in beschränktem Bezirk angeordneter Elektrizitätsmengen verschwinden mindestens wie  $A/r$ . Durch diese Eigenschaften ist das Gleichgewichtsproblem der Elektrizität auf einem Leiter mathematisch vollkommen bestimmt. Wirkliche explicite Lösungen durch Berechnung zu finden, ist nur für be-

sonders einfache Gestalt des Conductors gelungen, namentlich für die Kugelgestalt.

Dafs sich stets ein eindeutig bestimmter Ruhezustand herstellen mufs, wie die Erfahrung zeigt, läfst sich theoretisch beweisen. Diesen Nachweis, im Wesentlichen so, wie er von GAUSS gegeben worden ist, wollen wir im nächsten Paragraphen führen.

§ 30. Es giebt stets eine eindeutige Lösung des  
Gleichgewichtsproblems.

In den soeben aufgestellten Bedingungen findet sich ein Pleonasmus. Die Gleichung (91a) fordert, dafs im ganzen Raum des Conductors  $\varphi'' = -\varphi$  sein soll. Andererseits fordert die Leerheit des Inneren an Ladungen die ausnahmslose Erfüllung der Gleichung  $\Delta\varphi'' = 0$ . Diese ist aber bereits dadurch befriedigt, dafs angenommen werden mufste, das äufsere Feld habe in dem für den Conductor zu reservirenden Raumgebiet keine Dichtigkeiten, woraus für dieses Gebiet  $\Delta\varphi = 0$ , folglich auch  $\Delta(-\varphi) = \Delta\varphi'' = 0$  sich ergibt. Es soll nun zuerst gezeigt werden, dafs es genügt, die Bedingung (91a) nur für die Oberfläche des Conductors zu fordern, dafs der Verlauf durch das Innere dann durch die LAPLACE'sche Gleichung immer und nur auf eine einzige Weise bestimmt ist.

Bei der Willkürlichkeit des äufseren Feldes bilden die Werthe von  $(-\varphi)$  an der Oberfläche des Conductors irgend eine beliebige stetige Werthvertheilung. Dieser mufs auch  $\varphi''$  sich anschließen.

Nun wollen wir, anknüpfend an diese vorgeschriebenen Oberflächenwerthe, die Function  $\varphi''$  stetig durch das Innere des Raumes fortsetzen. Das geht auf unendliche viele verschiedene Arten. Denken wir nämlich auf der Oberfläche Curven gezogen, welche Punkte gleichen Werthes von  $\varphi''$  verfolgen (es sind dies die Schnitte der Conductorfläche mit den Niveauflächen des ursächlichen äufseren Feldes). In diese geschlossenen Curven als fest vorgeschriebene Rahmen kann man nun beliebige gekrümmte Flächen einsetzen, welche das Innere des Raumes durchqueren, so dafs sie einander nicht schneiden und um so ähnlicher verlaufen, je näher benachbart sie liegen. Auf jeder dieser Flächen soll  $\varphi''$  denselben Werth besitzen, der auf ihrem Rahmen vorgeschrieben ist. So erhält man in jedem Falle eine stetige Fortsetzung der Function  $\varphi''$  durch den inneren Raum.

Die örtlichen Schwankungen der Function können dabei beliebig grofs gemacht werden. Hat man irgend einen Verlauf an-

gesetzt, so kann man immer einen noch veränderlicheren daraus machen, indem man die beschriebenen Flächen enger zusammendrängt und ihnen dafür einen faltigeren Verlauf giebt. Eine obere Grenze für die Krausheit des übrigens immer noch stetigen Verlaufes der Function ist gar nicht zu erreichen. Wohl aber kann man nach einem möglichst glatten Verlauf fragen, welcher sich stetig anschliesst an die beliebig vorgeschriebenen Oberflächenwerthe. Veränderlich muß  $\varphi''$  auf jeden Fall sein, denn ein constanter Werth würde unstetig gegen die Grenzwerte stoßen. Es handelt sich jetzt um die Auffindung einer mathematisch definirten Größe, welche sich mit den noch unbestimmten Begriffen der Krausheit oder der Glätte deckt. Die Veränderlichkeit des Werthes einer stetigen Function im Raume ist um so größer, je größer ihre Differentialquotienten nach den Coordinaten an der betreffenden Stelle sind. Dabei kommt es nicht darauf an, ob sie negativ oder positiv sind; bei großer Krausheit werden die Vorzeichen von Ort zu Ort häufig wechseln. Wollte man daher über diese Differentialquotienten summiren, so würden sich die Beträge gegenseitig vernichten, und die Summe oder das Integral wäre kein Maasstab für die Veränderlichkeit in einem endlichen Bezirke. Dies vermeidet man, wenn man die Quadrate der Differentialquotienten summirt, denn diese sind immer positiv. Wir stellen daher als Maas der Krausheit von  $\varphi''$  das Raumintegral über die Summe der Quadrate der Differentialquotienten auf, und geben diesem aus Gründen, die wir bald einsehen werden, den jedenfalls die Betrachtung nicht störenden Divisor  $8\pi$ , betrachten also folgenden Ausdruck:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi} \iiint d\tau \left\{ \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (92)$$

Das Integral ist über den ganzen Conductorraum zu erstrecken, dessen Volumelement mit  $d\tau$  bezeichnet ist.

Suchen wir nun einen möglichst glatten Verlauf von  $\varphi''$ , so heisst das, wir suchen einen solchen, für den  $\Phi$  ein Minimum wird. Mindestens ein solcher muß existiren, denn  $\Phi$  ist stets positiv, könnte nur  $= 0$  werden, wenn im ganzen inneren Raume  $\varphi''$  constant ist, was sich aber nicht mit dem stetigen Anschluß an die Oberflächenwerthe verträgt. Die allgemeine Bedingung des Eintretens eines Maximums, Minimums oder Sattelwerthes fordert, daß die Variation des Integrales verschwinde. Bei der Bildung der Variation haben wir an jeder Stelle des Raumes den Werth von  $\varphi''$  um eine beliebige verschwindend kleine Größe  $\delta\varphi''$  zu verändern, doch so,

dafs der veränderte Verlauf ebenfalls ein stetiger ist und sich an die vorgeschriebenen Oberflächenwerthe ebenfalls stetig anschmiegt. Darum mufs  $\delta\varphi''$  eine stetige Raumfunction sein, welche überall an der Raumgrenze Null wird. Auch die Raumgrenzen, d. h. die Gestalt des Conductors wird von der Variation nicht verändert. Die Variation von  $\Phi$  ist deshalb unter dem Integralzeichen an der geschweiften Klammer auszuführen nach dem Schema:

$$\delta \left\{ \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right)^2 \right\} = 2 \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \cdot \delta \frac{\partial \varphi''}{\partial x} = 2 \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial x}. \quad (92a)$$

Die in dieser Gleichung vorgenommene Vertauschung in der Reihenfolge der Operationen  $\delta$  und  $\partial/\partial x$  rechtfertigt sich dadurch, dafs die Variation des Differentialquotienten nur eine Folge der Variation der Function selbst ist. Es ist nämlich begrifflich ganz primitiv folgendermaafsen:

$$\delta \left\{ \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right)^2 \right\} = \left( \frac{\partial (\varphi'' + \delta \varphi'')}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right)^2.$$

Führt man das Binomquadrat aus und vernachlässigt das in zweitem Grade verschwindende  $\left( \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial x} \right)^2$ , so bleibt nur das übrig, was in Gleichung (92a) angegeben ist.

Die Variation von  $\Phi$  lautet nun:

$$\delta \Phi = \frac{1}{4\pi} \iiint d\tau \left\{ \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial x} + \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial y} + \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi''}{\partial z} \right\}. \quad (92b)$$

Auf die rechte Seite dürfen wir den GREEN'schen Satz anwenden, denn sowohl  $\varphi''$  wie  $\delta\varphi''$  sind Raumfunctionen, welche den Bedingungen seiner Anwendbarkeit genügen, wenn man nach  $\delta\varphi''$  integrieren will. Setze also in Gleichung (75)  $U = \varphi''$ ,  $V = \delta\varphi''$  und es folgt die Gleichung:

$$\delta \Phi = - \frac{1}{4\pi} \iint ds \cdot \delta \varphi'' \cdot \frac{\partial \varphi''}{\partial n_i} - \frac{1}{4\pi} \iiint d\tau \cdot \delta \varphi'' \cdot \Delta \varphi''. \quad (92c)$$

Das Oberflächenintegral dieses Ausdrucks verschwindet, weil die Variation  $\delta\varphi''$  an der Raumgrenze verschwindet; es bleibt nur das Raumintegral übrig als Ausdruck für  $\delta\Phi$ . Das sicherlich existirende und hier gesuchte  $\varphi''$ , für welches die Krausheit ein Minimum, mithin  $\delta\varphi = 0$  wird, mufs also der Bedingung genügen

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint d\tau \cdot \delta \varphi'' \cdot \Delta \varphi'' = 0. \quad (92d)$$

Angenommen, es wäre bei dem gesuchten Verlauf der Function  $\varphi''$  möglich, daß  $\Delta\varphi''$  stellenweise oder überall von Null abweiche, so könnte man bei dem willkürlich gelassenen Verlauf der Variation dem Integranden in jedem Volumelement ein positives Vorzeichen sichern, ohne die Stetigkeit der Variation zu verletzen. Die Variation brauchte nur gleichartig mit dem  $\Delta\varphi''$  durch Null hindurchzugehen. Dadurch würde aber bewirkt, daß die linke Seite von (92d) wesentlich von Null verschieden wird, weil sie aus lauter gleichstimmigen Summanden besteht. Das ist gegen die Forderung. Also muß  $\Delta\varphi'' = 0$  sein für den glattesten Verlauf von  $\varphi''$ . Die logische Consequenz ist also folgende: Da es nothwendig eine Function  $\varphi''$  geben muß, welche  $\Phi$  bei vorgeschriebenen Oberflächenwerthen zu einem Minimum macht, so muß es auch nothwendig eine Function (dieselbe =  $\varphi''$ ) geben, welche im ganzen Raume der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt.

Es fehlt unserer Beweisführung noch der Nachweis der Eindeutigkeit, der nun folgen soll. Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Verläufe, denen ein Minimum der Krausheit zukommt. Für beide Functionen muß dann gelten, daß sie ausnahmslose Integrale der LAPLACE'schen Differentialgleichung sind, und an der Oberfläche des Conductors stetig in die dort vorgeschriebenen Werthe übergehen. Ihre Differenz muß also an der Oberfläche = 0 sein und muß im ganzen Innenraum der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen. Das ist aber auf keine andere Weise möglich, als daß die Differenz im ganzen Innenraum = 0 ist. Dies geht ohne Weiteres aus Gleichung (83) hervor, wenn man in derselben für  $\varphi$  die hier angenommene Differenz einsetzt. Es giebt also nicht zwei verschiedene Verläufe, welche  $\delta\Phi = 0$  machen, sondern nur einen und stets einen. Damit fällt auch die vorher noch mögliche Bedenklichkeit fort, ob die Bedingung  $\delta\Phi = 0$  wirklich zu einem Minimum von  $\Phi$  führt, nicht etwa zu einem Maximum oder Sattelwerth. Denn ein Minimum muß existiren, die übrigen Sondererscheinungen könnten höchstens hinzutreten als weitere Möglichkeiten, die außerdem noch bestehen. Da aber aufer der einen Lösung keine andere bestehen kann, so liefert diese das Minimum.

Durch diesen Beweis ist auch die eindeutige Existenz der GREEN'schen Function mathematisch begründet, während wir uns in § 27 mit einer Veranschaulichung begnügten. Nämlich die damals mit  $U'$  bezeichnete Function sollte an der Oberfläche des Integrationsraumes vorgeschriebene Werthe besitzen, welche durch  $1/\bar{r}$  gegeben waren, und im ganzen Innenraum der LAPLACE'schen

Differentialgleichung folgen. Das ist also ein besonderer Fall des hier behandelten Problems.

Nun haben wir weiter zu beweisen, daß die Function  $\varphi''$  im ganzen Raume außerhalb des Conductors eindeutig bestimmt ist durch die Angaben, daß sie erstens an der Oberfläche des Conductors einen vorgeschriebenen Verlauf hat, daß sie zweitens überall der LAPLACE'schen Gleichung folgt, und daß sie drittens in großer Ferne abnimmt wie  $\frac{A}{r}$ , wo  $A$  eine endliche Constante ist. Der Beweis wird in ganz derselben Weise geführt, wie für den inneren Raum. Wir suchen einen stetigen Verlauf, für welchen der Ausdruck  $\Phi$  ein Minimum wird, also  $\delta \Phi$  verschwindet. Als Integrationsraum ist dabei diesmal der äußere Raum zu nehmen, welchen wir begrenzt denken durch eine Kugelfläche von so großem Radius  $R$ , daß  $\varphi''$  dort gleich  $A/R$  gesetzt werden darf. Die Variation  $\delta \varphi''$  hat man dann sowohl an der Conductorfläche als auch an der fernen Kugelfläche  $= 0$  zu setzen. Die Umformung von  $\delta \Phi$  mittels des GREEN'schen Satzes liefert dann noch ein Oberflächenintegral über diese Kugel, welches aber ebenfalls verschwindet, so daß sich auch hier ergibt, daß der Verlauf, welcher  $\delta \Phi$  zum Verschwinden bringt zugleich der Bedingung  $\Delta \varphi'' = 0$  genügt. Auch die Eindeutigkeit dieses Verlaufes ist ebenso zu beweisen wie vorher. Ein Umstand indessen bedarf einer besonderen Betrachtung.

Wenn von einem Minimum von  $\Phi$  die Rede sein soll, so muß  $\Phi$  selbst endlich sein und bleiben, auch wenn man die ferne Kugelfläche unendlich weit hinausrückt. Nun kann man  $\Phi$  selbst auch nach dem GREEN'schen Satze umformen, wie wir das bereits in § 25 gethan haben. Es ist dann:

$$\Phi = -\frac{1}{8\pi} \iint \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n_i} ds - \frac{1}{8\pi} \iiint \varphi'' \Delta \varphi'' d\tau.$$

Das Raumintegral verschwindet wegen  $\Delta \varphi'' = 0$ . Das Oberflächenintegral zerfällt in einen endlichen Theil über die Conductorfläche und einen noch fraglichen Theil über die ferne Kugelfläche. Die Flächenelemente dieser Kugel sind  $ds = R^2 d\sigma$ , ferner ist dort  $\varphi'' = \frac{A}{R}$  und  $\frac{\partial \varphi''}{\partial n_i} = -\frac{\partial \varphi''}{\partial r} = \frac{A}{R^2}$ , mithin das Kugelflächenintegral

$$= -\frac{1}{8\pi} \iint \frac{A^2}{R^3} R^2 d\sigma = -\frac{A^2}{2R}.$$

Dies verschwindet aber für  $R = \infty$ , und  $\Phi$  reducirt sich auf das Integral über die Conductoroberfläche, ist mithin endlich. Der Ausdruck  $\Phi$ , integrirt über den ganzen Raum, sowohl den inneren im Conductor, wie den äußeren, stellt, wie wir schon früher erwähnten, die elektrische Energie dar derjenigen Flächenbelegung, von welcher das Potential  $\varphi''$  herrührt, und wir haben jetzt gesehen, daß die Gleichgewichtsbedingungen zu demjenigen Verlauf führen, für welchen  $\Phi$  ein Minimum ist, sowohl innen wie außen. Dadurch sind die Gleichgewichtszustände, ebenso wie die der Mechanik an ein Minimum der potentiellen Energie, hier an ein Minimum der elektrischen Energie geknüpft.

Von der abgespaltenen Potentialfunction  $\varphi'''$  haben wir nur zu sagen, daß ihre Auffindung ein besonders einfacher Specialfall des hier bereits behandelten ist. Es soll  $\varphi'''$  so bestimmt werden, daß es in dem Conductor einen constanten Werth hat (auf der „Oberfläche des Conductors“ würde genügen) im ganzen Raum der Bedingung  $\Delta \varphi''' = 0$  folgt und in großer Entfernung verschwindet reciprok dem Abstand.

Hiermit ist der mathematische Nachweis geführt, daß es stets eine und nur eine Gleichgewichtsvertheilung auf einem Conductor giebt, der in ein gegebenes äußeres Feld gebracht wird. In den Fällen, wo es gelingt, die Function  $\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$  explicite zu berechnen, findet man die Oberflächenbelegung  $e'$  des Conductors dann aus der uns schon bekannten Formel

$$\left( \frac{\partial \varphi'}{\partial n_i} \right) + \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial n_a} \right) = -4\pi e'.$$

---

### Zweites Kapitel.

#### Theorie der elektrischen Bilder.

---

#### § 31. Kugelförmige Conductoren. Zwei Methoden zur Auffindung des elektrischen Gleichgewichts.

Der im vorigen Paragraphen gelieferte Nachweis giebt keinen Weg an, wie man im einzelnen Falle die Vertheilung der Elektrizität auf dem Leiter und das dazu gehörige Potential finden kann. Solche Wege zur vollständigen Lösung des Problems hat man nur für einzelne besonders einfache Gestalten des Leiters gefunden. Für die Kugelgestalt aber besitzen wir zwei verschiedene Methoden, die

zum Ziel führen und je nach der Stellung der Aufgabe ihre verschiedenen Vorzüge bieten. Die eine Methode, die wir zuerst betrachten wollen, und welche namentlich dann von Nutzen ist, wenn das äußere influenzirende Feld durch festliegende bekannte elektrische Quanta angegeben wird, ist gegründet auf die Theorie der elektrischen Bilder, einer reciproken Abbildung der äußeren festen Ladungen durch ein System von inneren nur gedachten Ladungen, deren Wirkung im äußeren Raum aber diejenige der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung vollkommen ersetzt. Durch das Princip dieser Abbildungen gelingt es dann noch weiter, aus bekannten Gleichgewichtsvertheilungen neue abzuleiten.

Die andere Methode, welche bei beliebig vorgeschriebenem Potential des influenzirenden Feldes den Vorzug verdient, benützt die Theorie der Kugelfunctionen. Durch eine Summe — eventuell eine unendliche convergirende Reihe — solcher Kugelfunction kann man erstens jeden beliebigen Werthverlauf auf einer Kugelfläche darstellen, zweitens aber kann man diese Functionen so in den äußeren oder inneren Raum der Kugel fortsetzen, daß sie dort der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen.

In dem einfachsten Falle, in welchem kein äußeres influenzierendes Feld vorhanden ist, sondern nur ein isolirter kugelförmiger Conductor, welchem eine gewisse Ladung mitgetheilt ist, kann man die Gleichgewichtsvertheilung ohne Weiteres errathen. Wegen der allseitigen Symmetrie der Kugel muß sich die Ladung mit gleichmäßiger Dichtigkeit über die ganze Oberfläche vertheilen. Bezeichnet  $R$  den Radius der leitenden Kugel,  $e$  die Gesammtladung, so ist die gleichförmige Oberflächendichtigkeit  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{e}{4\pi R^2}. \quad (93)$$

Es ist also hier diejenige Vertheilung realisirt, welche bereits in § 15 betrachtet wurde. Das von ihr ausgehende Feld besitzt im äußeren Raum das Potential

$$\varphi_a = \frac{e}{r} = \frac{4\pi R^2 \epsilon}{r} \text{ für } r > R, \quad (93a)$$

im inneren den constanten Werth

$$\varphi_i = \frac{e}{R} = 4\pi R \epsilon. \quad (93b)$$

Wenn in diesem Falle umgekehrter Weise das Potential  $\varphi_i$  angegeben ist bis zu welchem die Kugel geladen ist, so berechnet man daraus die erforderliche Ladungsmenge

$$e = R \cdot \varphi_i \quad (93c)$$

und die sich bildende Flächendichtigkeit

$$e = \frac{\varphi_i}{4\pi R}. \quad (93d)$$

Damit ist das Gleichgewichtsproblem für diesen einfachsten Fall vollständig gelöst.

Die Gleichung (93c) ist ein besonderer Fall einer für jeden beliebig gestalteten Conductor gültigen Beziehung zwischen seiner Gesamtladung und dem dadurch hervorgebrachten Potentialwerth. Stellt man nämlich irgend einen isolierten Conductor für sich allein in den Raum und beladet ihn der Reihe nach mit verschiedenen Quantis  $e$ , so bilden sich dabei um ihn herum Felder von verschiedener Stärke, aber immer von der gleichen Gestalt der Niveauflächen aus. Die Potentialwerthe sind überall, mithin auch auf und in dem Conductor, proportional der Ladung. Es gilt deshalb die Gleichung

$$e = C \cdot \varphi_i. \quad (93e)$$

Den Proportionalitätsfactor  $C$ , welcher die Dimension einer Länge hat, nennt man die Capacität des Conductors. Für kugelförmige Conductoren ist nach Gleichung (93c) die Capacität gleich dem Kugelradius.

### § 32. Elektrisches Bild eines geladenen Punktes in Bezug auf eine Kugel.

Wir stellen uns jetzt vor, daß das äußere Feld, in welches die leitende Kugel hineingebracht werden soll, von einer einzigen Punktladung herrührt, welche die Elektrizitätsmenge  $e$  trägt. Das Potential ist dann für das noch nicht durch den Leiter gestörte Feld:

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad (94)$$

wo  $r$  den Abstand von dem geladenen Punkt bezeichnet. Die leitende Kugel, vom Radius  $R$ , werde so aufgestellt, daß ihr Centrum den Abstand  $p$  von jenem Punkt hat. Es muß dann  $p > R$  sein. Ob die Kugel von vorn herein mit einer überschüssigen Ladung ver-

sehen ist, oder nicht, können wir zunächst unbestimmt lassen. Jedenfalls muß sich auf ihr eine Vertheilung herstellen, welche allein ohne den Punkt  $e$  ein Feld erzeugt, dessen Potential  $\varphi'$  dadurch bestimmt ist, daß auf der ganzen Kugelfläche (und folglich auch im ganzen inneren Kugelraum) die Bedingung

$$\varphi + \varphi' = \text{Constans} \quad (95)$$

erfüllt ist, wie dies für jede Gestalt des Conductors gelten muß. Auch die Trennung des Potentials  $\varphi'$  in zwei Theile  $\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$ , entsprechend einer Superposition zweier besonderer Flächenbelegungen können wir, wie im allgemeinen Falle, vornehmen und für die einzelnen Theile verlangen:

$$\varphi + \varphi'' = 0 \quad (95 \text{ a})$$

$$\varphi''' = \text{Constans.} \quad (95 \text{ b})$$

Zunächst suchen wir das Potential  $\varphi''$ . Dazu hilft uns ein bekannter geometrischer Satz:

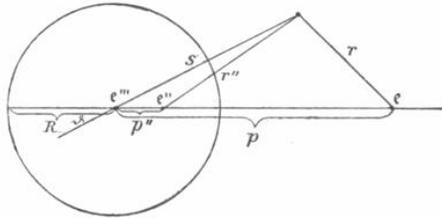


Fig. 7.

Zeichnet man (Figur 7) auf dem Strahle vom Kugelcentrum nach dem äußeren geladenen Punkte  $e$  denjenigen innerhalb gelegenen Punkt, dessen Abstand  $p''$  durch die Relation

$$p \cdot p'' = R^2 \quad (96)$$

bestimmt ist, so haben die Abstände  $r$  und  $r''$  aller Kugelflächen-elemente von dem äußeren und von dem inneren Punkte das gleiche Längenverhältniß. Den Werth dieses Verhältnisses kann man bequem ablesen an den beiden Polen der Kugelfläche, welche in gerader Linie mit den beiden Punkten liegen. Für diese ist

$$r = p \mp R \quad \text{und} \quad r'' = R \mp p''.$$

Mithin ist für jede beliebige Stelle der Kugelfläche:

$$\frac{r}{r''} = \frac{p \mp R}{R \mp p''} = \frac{p \mp R}{R \mp \frac{R^2}{p}} = \frac{p}{R}.$$

Diese Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{1}{r} - \left(\frac{R}{p}\right) \cdot \frac{1}{r''} = 0$$

oder nach Erweiterung mit dem Werthe der Punktladung  $e$ :

$$\frac{e}{r} + \frac{\left(-\frac{R}{p} e\right)}{r''} = 0. \quad (97)$$

Der erste Summand giebt das Potential  $\varphi$  der äußeren Punktladung, der zweite Summand hat ebenfalls die Form des Potentials einer Punktladung. Diese muß in dem innerhalb gelegenen reciproken Bildpunkte gedacht werden, ihre Stärke ist

$$e'' = -\frac{R}{p} e \quad (97a)$$

oder nach Elimination von  $R$  mittels Gleichung (96)

$$e'' = -\sqrt{\frac{p''}{p}} \cdot e, \quad (97b)$$

also von entgegengesetztem Vorzeichen und geringerem Betrage als die wirkliche äußere Ladung  $e$ . Wir nennen sie das elektrische Bild von  $e$  in Bezug auf die Kugel. Diese Punktladung  $e''$  ist nicht reell vorhanden, das Bild ist ein virtuelles, um einen in der Optik gebräuchlichen Ausdruck zu gebrauchen. Uebrigens stimmt die Lage von  $e''$  nicht etwa mit der des virtuellen optischen Bildes in der spiegelnden Kugel überein. Durch die Auffindung der Gleichung (97) haben wir nun sofort die Bedingung (95 a) befriedigt. Wir brauchen nur im äußeren Raume bis an die Kugelfläche heran zu setzen:

$$\varphi_a'' = \left(-\frac{R}{p} e\right) \cdot \frac{1}{r''}, \quad (98)$$

im Innern der Kugel aber

$$\varphi_i'' = -\frac{e}{r}, \quad (98a)$$

so haben wir ein Potential  $\varphi''$  gefunden, welches allen Bedingungen genügt; und da wir wissen, daß es nur eine eindeutige Lösung geben kann, so ist es diese hier. Die beiden Functionsformen (98) und (98a) gehen an der Kugelfläche stetig in einander über zufolge Gleichung (97), aber die Differentialquotienten nach der Normale

an der Kugelfläche sind unstetig, aus der Größe ihres Sprunges kann man die Flächendichtigkeit der Belegung erkennen, von welcher das Potential  $\varphi''$  herrührt.

Es mag nebenbei bemerkt sein, daß durch die soeben gefundenen Potentiale zugleich auch die sogenannte GREEN'sche Function, von welcher in § 27 die Rede war, für den Fall einer kugelförmigen Begrenzung des dort betrachteten Integrationsraumes gegeben ist. Wir brauchen nur in dem inneren Punkte die Ladung  $e'' = 1$  anzunehmen und dem entsprechend nach Gleichung (97 a) in dem äußeren Punkte die Ladung  $e = -\frac{p}{R}$ , so genügt die Function:

$$U = \frac{1}{r''} - \frac{\frac{p}{R}}{r} = \frac{1}{r''} - \frac{p}{Rr} \quad (99)$$

allen Bedingungen, welche wir an die GREEN'sche Function stellten, denn sie wird in einem inneren Punkte unendlich, wie der reciproke Abstand  $1/r''$ , ist an der ganzen Oberfläche gleich Null [nach Gleichung (97)], und folgt mit Ausnahme der Unendlichkeitsstelle im ganzen Kugelraum der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Nach dieser Abschweifung auf ein früher behandeltes Gebiet kehren wir zu unserem Gleichgewichtsproblem auf der leitenden Kugel unter Anwesenheit eines influenzirenden äußeren geladenen Punktes zurück und finden da noch die zweite Bedingung (95 b) zu befriedigen.

Dieses Potential  $\varphi'''$  kann nur von einer gleichförmigen Belegung der Kugelfläche herrühren, deren Gesamtmenge wir mit  $e'''$  bezeichnen. Im äußeren Raume wirkt diese wie eine Punktladung  $e'''$  des Kugelcentrums, im inneren Raume erzeugt sie überall den constanten Potentialwerth, welchen das äußere Potential an der Fläche selbst annimmt. Nennen wir also  $s$  den Abstand eines beliebigen Raumes vom Kugelcentrum, so ist außen:

$$\varphi_a''' = \frac{e'''}{s} \quad (100)$$

und innen

$$\varphi_i''' = \frac{e'''}{R}. \quad (100 a)$$

Das gesammte Potential in dem außerhalb der Kugel liegenden Raume ist demnach

$$\varphi_a = \frac{e}{r} + \frac{\left(-\frac{R}{p}e\right)}{r''} + \frac{e'''}{s}, \quad (101)$$

während es im Inneren der Kugel allein durch (100 a) bestimmt wird.

Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Strahle  $s$  und der gemeinsamen Richtung der beiden Strahlen  $p$  und  $p''$  mit  $\vartheta$ , so kann man Gleichung (101) ausführlicher schreiben:

$$\varphi_a = \frac{e}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps \cos \vartheta}} - \frac{\frac{R}{p}e}{\sqrt{\frac{R^4}{p^2} + s^2 - 2\frac{R^2s}{p} \cos \vartheta}} + \frac{e'''}{s} \quad (101a)$$

oder nach einer leichten Umformung des zweiten Gliedes:

$$\varphi_a = \frac{e}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps \cos \vartheta}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2s^2}{R^2} - 2ps \cos \vartheta}} + \frac{e'''}{s^2}. \quad (101b)$$

Wichtig für die Beurtheilung der Flächendichtigkeit auf der Kugel ist der nach der Variablen  $s$  genommene Differentialquotient von  $\varphi_a$ , weil die Richtung des wachsenden  $s$  normal auf der Kugel- fläche steht. Man findet aus (101 b):

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial s} = -\frac{e(s - p \cos \vartheta)}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps \cos \vartheta}^3} + \frac{e\left(\frac{p^2}{R^2}s - p \cos \vartheta\right)}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2s^2}{R^2} - 2ps \cos \vartheta}^3} - \frac{e'''}{s^2}, \quad (102)$$

andererseits ist natürlich  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = 0$ . Bildet man also den Ausdruck (102)

für den Werth  $s = R$ , also dicht an der Kugel- fläche, so muß er den Werth von  $-4\pi e$  darstellen als Function des Polarwinkels  $\vartheta$ . Man findet

$$4\pi e = -\frac{e(p^2 - R^2)}{R \cdot \sqrt{R^2 + p^2 - 2Rp \cos \vartheta}^3} + \frac{e'''}{R^2}. \quad (103)$$

Wir wollen zwei besondere Fälle hervorheben.

1. Die leitende Kugel sei durch einen dünnen Draht mit der Erde verbunden, so daß auf ihr und in ihr das Potential Null herrscht. Dann ist in Gleichung (95), folglich auch in (95 b) die Constante gleich Null, mithin auch

$$e''' = 0.$$

Die Belegung der Kugel wirkt dann im äusseren Raume so, wie der reciproke Bildpunkt allein ohne Ladung des Mittelpunktes. Die Flächenbelegung wird dann nach (103) auf allen Zonen der Kugel negativ, am stärksten für  $\vartheta = 0$ , am schwächsten für  $\vartheta = \pi$ . Man sagt dem entsprechend im gewöhnlichen Sprachgebrauch, die Nähe des positiv geladenen Punktes  $e$  ziehe aus der Erde durch den Draht ein gewisses Quantum negativer Elektrizität auf die Kugelfläche. Die herangezogene Menge ist die virtuelle Ladung des Bildpunktes, also gleich  $-\frac{R}{p}e$ . Dasselbe findet man auch, wenn man den durch das erste Glied rechts der Gleichung (103) gegebenen Ausdruck der Flächendichtigkeit über sämtliche Zonen der Kugel integrirt.

2. Die leitende Kugel sei isolirt und ohne überschüssige Ladung, so dafs die Summe der durch Influenz getrennten Elektrizitäten auf ihr gleich Null ist. Dann muß auch die Summe der jene Flächenbelegungen ersetzenden inneren virtuellen Punkte gleich Null sein,  $e'' + e''' = 0$ , oder nach Gleichung (97a):

$$e''' = +\frac{R}{p}e. \quad (104)$$

Die durch Influenz getrennten Flächenbelegungen auf der Kugel wirken dann im äusseren Raume, wie ein Paar engengesetzt gleicher Punktladungen von der Gröfse  $\frac{R}{p}e$ ; die positive liegt im Centrum, die negative im reciproken Bildpunkt der äusseren Ladung  $e$ . Das Potential, welches nach Eintritt des Gleichgewichtes in der ganzen Kugel herrscht, findet man aus Gleichung (100a) unter Hinblick auf (104):

$$\varphi_i = +\frac{e}{p}; \quad (104a)$$

es ist also eben so groß, wie es am Orte des Kugelcentrums war, bevor die leitende Kugel in das Feld der Punktladung  $e$  gebracht wurde. Von Interesse ist die Vertheilung der Flächendichtigkeit  $e$  in diesem Falle. Die Gleichung (103) liefert, wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{R^2 + p^2 - 2Rp \cos \vartheta} = r$$

setzt, unter Hinblick auf (104):

$$4\pi e = -\frac{e(p^2 - R^2)}{Rr^3} + \frac{e}{Rp} = \frac{e}{R} \cdot \frac{r^3 - p(p^2 - R^2)}{r^3 p}. \quad (104b)$$

Dieser Ausdruck ist für den der äußeren Ladung  $e$  zugekehrten Kugelpol negativ, denn dort ist  $r = (p - R)$ , also

$$(4\pi e)_{\vartheta=0} = \frac{e}{R} \cdot \frac{(p-R)^3 - p(p^2 - R^2)}{p \cdot (p-R)^3} = - \frac{e \cdot (3p - R)}{p \cdot (p-R)^2}. \quad (104c)$$

An dem abgekehrten Kugelpol ist  $e$  positiv, denn dort ist  $r = p + R$ , also

$$(4\pi e)_{\vartheta=\pi} = \frac{e}{R} \cdot \frac{(p+R)^3 - p(p^2 - R^2)}{p \cdot (p+R)^3} = + \frac{e \cdot (3p + R)}{p \cdot (p+R)^2}. \quad (104d)$$

Dazwischen, auf einem Parallelkreise von bestimmtem Winkel  $\vartheta$ , muß der Zeichenwechsel der Belegung stattfinden. Dort muß  $e = 0$  sein, man findet also für den zugehörigen Abstand  $r = \bar{r}$  aus (104 b) die Bedingung

$$\bar{r}^3 = p(p^2 - R^2) \quad (104e)$$

unabhängig von der Stärke der äußeren Punktladung.

Die Länge  $t$  der Tangente vom geladenen Punkt an die Kugel ist gegeben durch

$$t^2 = p^2 - R^2;$$

es ist also

$$t^3 = t \cdot (p^2 - R^2).$$

Nun ist immer  $t < p$ , folglich lehrt der Vergleich dieses Ausdruckes für  $t^3$  mit demjenigen für  $\bar{r}^3$  in (104 e), daß immer  $\bar{r} > t$  ist. Das Gebiet der negativen Belegung erstreckt sich also etwas weiter als die vom äußeren Punkt  $e$  aus sichtbare Calotte der Kugel. Bei großer Entfernung freilich nähern sich beide Calotten der halben Kugelfläche.

### § 33. Elektrische Bilder in Bezug auf unendliche leitende Ebenen.

Läßt man den Radius  $R$  der leitenden Kugel über alle Grenzen wachsen, während der dem äußeren Punkt zugekehrte Pol der Kugel unveränderte Lage behält, so wächst auch  $p$  über alle Grenzen, das Verhältniß  $R/p$  nähert sich dem Werthe 1, während  $p - R = h$  einen festen endlichen Werth behält. Die Kugelfläche geht dann in eine unendliche Ebene über, der Bildpunkt von  $+e$  nimmt die Stärke  $-e$  an und rückt ebenfalls in den Abstand  $h$  auf der anderen Seite der Ebene, so daß sich in diesem Falle das elektrische Bild mit virtuellen optischen Bilde hinter einem ebenen Spiegel deckt (Figur 8).

Das Potential der bis in's Unendliche reichenden leitenden Ebene muß Null sein, und derselbe Werth herrscht jenseits hinter der Ebene. Vor ihr aber ist

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \quad (105)$$

in einem Punkte, welcher von der reellen Ladung den Abstand  $r$ , von deren virtuellem Bild den Abstand  $r'$  besitzt. Legen wir die  $x$ -Achse durch  $e$  senkrecht zur leitenden Ebene, den Nullpunkt in diese Ebene, die positive Richtung nach  $e$  hin und bezeichnen den seitlichen Abstand des Punktes,

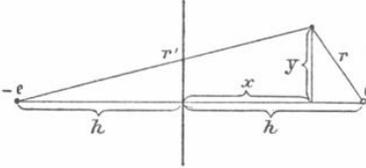


Fig. 8.

in welchem wir  $\varphi$  angeben wollen, von der  $x$ -Achse mit  $y$ , so ist

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(h-x)^2 + y^2}} - \frac{e}{\sqrt{(h+x)^2 + y^2}} \quad (105 \text{ a})$$

folglich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{e(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2 + y^2}^3} + \frac{e(h+x)}{\sqrt{(h+x)^2 + y^2}^3}.$$

Dies wird hart an der Ebene  $x = 0$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=+0} = \frac{2eh}{\sqrt{h^2 + y^2}^3}.$$

Auf der anderen Seite der belegten Fläche ist  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=-0} = 0$ .

Daher ist die Flächendichtigkeit  $e$  gegeben durch

$$4\pi e = -\frac{2eh}{\sqrt{h^2 + y^2}^3} = -\frac{2e}{h^2} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + y^2}} \right)^3 = -\frac{2e}{h^2} \cos^3 \alpha. \quad (105 \text{ b})$$

Im letzten Ausdruck bedeutet  $\alpha$  den Winkel, unter welchem der Strahl vom geladenen Punkt nach dem influenzirten Flächenelement, in welchem die Dichtigkeit  $e$  herrscht, gegen die negative  $x$ -Richtung geneigt ist. Man sieht, dafs mit wachsendem Winkel  $\alpha$  die Dichtigkeit der überall negativen Belegung der Ebene rasch abnimmt. Man braucht deshalb in der Praxis, um die hier berechneten Verhältnisse zu verwirklichen, keine unendlich grofse leitende Ebene, sondern es genügt ein zur Erde abgeleiteter ebener Metallschirm, dessen Linearmaafse nur grofs gegenüber dem Abstand  $h$  sind.

Auch das elektrische Feld einer Punktladung in einem Raume, welcher durch zwei rechtwinklig zusammenstossende ebene Metallwände abgeschlossen ist (Raumquadrant), kann man mit Hülfe der Spiegelbilder leicht angeben (Figur 9). Es sind dazu erstens die beiden Spiegelbilder nöthig, welche sich auf die beiden einzelnen jenseits der Kante bis ins Unendliche fortgesetzt gedachten Ebenen beziehen; diese beiden haben jedes die Stärke  $-e$ . Ferner aber ist in dem vierten

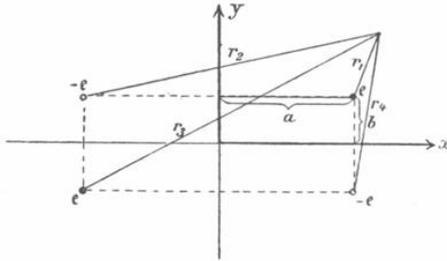


Fig. 9.

Quadranten noch ein virtueller Bildpunkt von der Stärke  $+e$  nöthig. Das Feld dieser vier Punktladungen ist in dem Raumquadranten zwischen den beiden Metallwänden identisch mit dem thatsächlich dort herrschenden. Hinter dem Eckschirm, d. h. auf dessen convexer Seite herrscht in Wirklichkeit überall das Potential Null, dort gelten also die Felder der virtuellen Bildpunkte nicht.

Nehmen wir die Ebene, in welcher die reelle Punktladung und ihre drei Spiegelbilder liegen, zur  $x, y$ -Ebene, die Schnitte der beiden Metallwände zur positiven  $x$ - und  $y$ -Axe, die Kante (senkrecht zum Papier in Figur 9) zur  $x$ -Axe, und numeriren wir der Reihe nach die Abstände eines Raumpunktes  $(x, y, z)$  von den vier Punktladungen mit  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , so ist das Potential für positive  $x$  und  $y$

$$\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} + \frac{e}{r_3} - \frac{e}{r_4}. \quad (106)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2} & r_3 &= \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2} & r_4 &= \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \quad (106 a)$$

wobei  $a, b, 0$  die Coordinaten des geladenen Punktes sind.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{e(x-a)}{r_1^3} + \frac{e(x+a)}{r_2^3} - \frac{e(x+a)}{r_3^3} + \frac{e(x-a)}{r_4^3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{e(y-b)}{r_1^3} + \frac{e(y-b)}{r_2^3} - \frac{e(y+b)}{r_3^3} + \frac{e(y+b)}{r_4^3}. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse sind die Werthe dieser Differentialquotienten an den beiden Metallwänden selbst.

Für  $x = 0$  wird  $r_2 = r_1$  und  $r_3 = r_4$ , mithin:

$$\left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=+0} = \frac{2ea}{r_1^3} - \frac{2ea}{r_4^3} = 2ea \cdot \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_4^3} \right) > 0. \right\}$$

Für  $y = 0$  wird  $r_4 = r_1$  und  $r_3 = r_2$ , mithin:

$$\left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=+0} = \frac{2eb}{r_1^3} - \frac{2eb}{r_2^3} = 2eb \cdot \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) > 0. \right\} \quad (106b)$$

Daraus kann man die influenzirten überall negativen Flächenbelegungen der beiden Schirmwände ablesen, denn hinter dem Schirm ist  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=-0} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-0} = 0$ , also geben die vorstehenden beiden Ausdrücke direct die Werthe von  $-4\pi e$ . Man bemerkt, daß die Dichtigkeit in der concaven Kante auf Null herunter geht, weil dort  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$  wird. Auch läßt sich zeigen, daß die maximale Dichtigkeit auf beiden Wänden nicht normal vor der Punktladung, sondern etwas verschoben in der Richtung aus der Ecke heraus zu finden ist.

In gleicher Weise lassen sich die analogen Probleme für zwei Wände, welche einen Winkel von  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots$  etc. einschließen, behandeln. Die Felder in den immer enger werdenden Raumfächern zwischen den zwei leitenden Wänden lassen sich durch 6, 8, ...

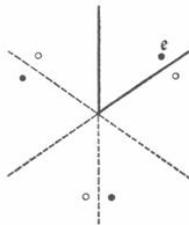


Fig. 10.

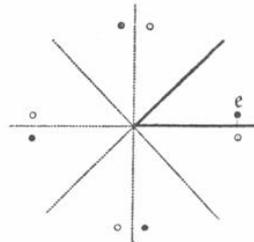


Fig. 11.

gleich stark und paarweise entgegengesetzt geladene Punkte (zu denen auch der eine reelle gehört) darstellen. Die Figuren 10 und 11 mögen zur Anschauung genügen. Sobald aber der Winkel nicht ein einfacher Bruchtheil von  $\pi$  ist, versagt diese Methode, denn man müßte dann unzählig viele Bildpunkte berücksichtigen, welche alle auf einem Kreis um die Schnittekante der beiden Wände angeordnet liegen.

Endlich wollen wir das Feld betrachten, welches ein geladener Punkt zwischen zwei parallelen leitenden Wänden hervorruft. Auch

hier sind unzählige viele Spiegelbilder nach beiden Seiten hin zu Hülfe zu nehmen, wie Figur 12 veranschaulicht. Diese sind auch alle von gleicher Stärke und abwechselndem Vorzeichen und liegen auf derselben geraden Linie senkrecht zu den Wänden. Darum kann man das Potential in dem Raum zwischen den beiden Parallelebenen nur in Form unendlicher convergenter Reihen darstellen, deren einzelne Glieder mit abwechselnden Vorzeichen die Ladung  $\pm e$  des Bildes, dividirt durch den wachsenden Abstand eines beliebigen Punktes im Zwischenraum von dieser Bilderreihe bildet. Für Punkte in der Axe sind diese Reihen am einfachsten: Der geladene Punkt und die Bilderreihe mögen auf der  $x$ -Axe liegen, deren Nullpunkt

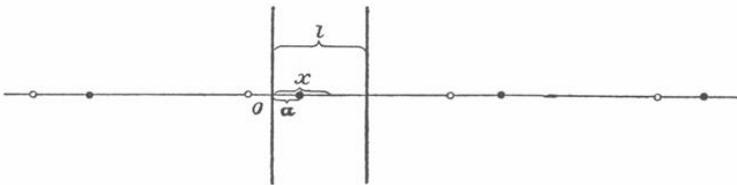


Fig. 12.

in der leitenden Ebene links. Der geladene Punkt habe die Abszisse  $a$  und der Abstand der Parallelebene sei  $l$ . Dann ist das Potential in einem Punkte zwischen den Ebenen ( $0 < x < l$ )

$$\varphi = \left. \begin{aligned} & \frac{e}{|x-a|} + \frac{e}{2l+a-x} + \frac{e}{4l+a-x} + \frac{e}{6l+a-x} + \dots \\ & - \frac{e}{2l-a-x} - \frac{e}{4l-a-x} - \frac{e}{6l-a-x} - \dots \\ & + \frac{e}{2l-a+x} + \frac{e}{4l-a+x} + \frac{e}{6l-a+x} + \dots \\ & - \frac{e}{a+x} - \frac{e}{2l+a+x} - \frac{e}{4l+a+x} - \frac{e}{6l+a+x} - \dots \end{aligned} \right\} (107)$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\frac{x-a}{2l} = \alpha, \quad \frac{x+a}{2l} = \beta, \quad (107a)$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  stets echte Brüche sind, so kann man den vorstehenden Ausdruck folgendermaassen schreiben:

$$\varphi = \frac{e}{|x-a|} - \frac{e}{a+x} + \frac{e}{2l} \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{3-\alpha} + \dots \\ - \frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2-\beta} - \frac{1}{3-\beta} - \dots \\ + \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1}{3+\alpha} + \dots \\ - \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{2+\beta} + \frac{1}{3+\beta} + \dots \end{array} \right) \quad (107b)$$

Die positiven Glieder dieser vier unendlichen Reihen sowie die negativen Glieder bilden für sich allein divergente Reihen, deren Werthe unendlich werden. Wenn man aber die positiven und negativen Glieder von gleicher Ordnungszahl zusammenfasst, so erhält man eine convergente Reihe von bestimmtem Werthe, also eine endliche Function von  $x$ . Solche bedingt convergente Reihen mit abwechselndem Vorzeichen, deren Summenwerth durchaus von der Reihenfolge der Zusammenfassung abhängt, kann man zur Darstellung physikalischer Functionen nur dann brauchen, wenn für die Art der Reihenfolge der Glieder ein innerer Grund vorliegt. Das ist nun hier der Fall. Wenn man nämlich zur Auffindung der successiven Spiegelbilder schreitet, so kommt man zu immer entfernteren Punkten von immer schwächerem Einfluss, so dass man nach einer hinreichenden Menge von Bildpunkten abbrechen darf. Dann hat man aber immer ebensoviel positive wie negative Bildpunkte zu berücksichtigen und deshalb ist die Zusammenfassung der Paare von gleicher Ordnungszahl die einzig gerechtfertigte.

#### § 34. Influenzierung einer leitenden Kugel durch ein festes äusseres Ladungsgebilde. Zwei leitende Kugeln.

In § 32 haben wir nur das reciproke Bild eines einzigen geladenen Punktes in Bezug auf eine Kugel gesucht. Zunächst ist klar, dass eine feste Gruppierung von mehreren äusseren Punktladungen eine nach der Regel der reciproken Abbildung aufzufindende Gruppe von inneren Bildpunkten mit entgegengesetzten und im jeweiligen Verhältniss  $\frac{R}{p}$  oder  $\sqrt{\frac{p'}{p}}$  reducirten Ladungen besitzt, mit deren Hülfe man das elektrische Feld darstellen kann, welches

die festen äußeren Ladungen zusammen mit der Influenzvertheilung auf der leitenden Kugel im äußeren Raume erzeugen. Man kann auch zu continuirlich verbreiteten auf Linien, Flächen oder in Räumen festliegenden Ladungen übergehen und deren reciproke Bilder in der Kugel aufsuchen zum Zweck der Felddarstellung im Außenraum. Bedingung ist dabei nur, daß die Influenzladung der leitenden Kugel nicht wieder rückwärts vertheilend auf die äußeren Ladungen wirkt. Letztere müssen also entweder auf sehr kleinen getrennten Körpern, oder aber auf vollkommenen Isolatoren befindlich gedacht werden. Wie die Bilder der einfachsten geometrischen Objecte gestaltet sind, werden wir im nächsten Paragraphen ausführen.

Ein Beispiel, in welchem man das Feld zwischen zwei influenzirbaren Leitern durch eine Reihe von successiven Bildern finden kann, bilden zwei Kugeln, deren eine vom Radius  $R_1$  wir uns zur Erde abgeleitet denken, während wir die andere vom Radius  $R_2$  isolirt und mit der positiven Menge  $e_0$  beladen annehmen. Der Abstand beider Kugelcentra sei  $p_0$ . Die Kugeln sollen sich ausschließen, also  $p_0 > R_1 + R_2$ . Man kann dann folgende Reihe von Ueberlegungen anstellen, welche Anwendungen der beiden Sonderfälle des § 32 sind.

1. Zunächst wirkt die geladene Kugel 2 wie eine Punktladung  $e_0$  in ihrem Centrum. Deren Bild in der Kugel 1 hat die Stärke

$$e_1 = - \frac{R_1}{p_0} e_0 \quad (108)$$

und liegt auf der Centrallinie im Abstand

$$p_1 = \frac{R_1^2}{p_0} \quad (108a)$$

vom Centrum der Kugel 1.

2. Diese Ladung  $e_1$  wirkt rückwärts influenzirend auf die isolirte Kugel 2. Diese Rückwirkung wird dargestellt durch das Bild von  $e_1$  in der Kugel 2 von der Stärke

$$e_2 = - \frac{R_2}{p_0 - p_1} e_1 = + \frac{R_1 R_2}{p_0 (p_0 - p_1)} e_0 \quad (108b)$$

im Abstand

$$p_2 = \frac{R_2^2}{p_0 - p_1} \quad (108c)$$

vom Centrum der Kugel 2. Außerdem kommt aber in deren Centrum selbst noch die Punktladung  $-e_2$  hinzu, da diese Kugel isolirt und von der Gesamtladung  $e_0$  bleiben muſs.

3. Die beiden Punkte  $e_2$  und  $-e_2$  erzeugen wieder zwei Bilder in der Kugel 1. Das Bild des ersten hat die Stärke

$$e_3 = -\frac{R_1}{p_0 - p_2} e_2 = -\frac{R_1^2 \cdot R_2}{p_0(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)} e_0 \quad (108d)$$

und liegt im Abstand

$$p_3 = \frac{R_1^2}{p_0 - p_2}. \quad (108e)$$

Das Bild des zweiten fällt örtlich mit  $e_1$  zusammen und hat die Stärke

$$e_3' = +\frac{R_1}{p_0} e_2 = \frac{R_1^2 R_2}{p_0^2(p_0 - p_1)} e_0. \quad (108f)$$

4. Es sind die Bilder von  $e_3$  und  $e_3'$  in der Kugel 2 zu bilden. Diese sind

$$e_4 = -\frac{R_2}{p_0 - p_3} e_3 = +\frac{R_1^2 R_2^2}{p_0(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)(p_0 - p_3)} e_0 \quad (108g)$$

im Abstand

$$p_4 = \frac{R_2^2}{p_0 - p_3} \quad (108h)$$

und

$$e_4' = -\frac{R_2}{p_0 - p_1} e_3' = -\frac{R_1^2 R_2^2}{p_0^2(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)} e_0 \quad (108i)$$

im Abstand  $p_2$ , also zusammenfallend mit  $e_2$ .

Außerdem kommt im Centrum der isolirten Kugel noch die Punktladung  $-(e_4 + e_4')$  hinzu. Von diesen drei Punkten sind dann wieder die Bilder in der Kugel 1 zu suchen. Zwei derselben  $e_5'$  und  $e_5''$  fallen über die dort bereits vorhandenen Punkte  $e_1$  und  $e_3$ , während  $e_5$ , das Bild von  $e_4$ , einen neuen Ort im Abstand  $p_5$  einnimmt. In dieser Weise hat man fortzufahren. Die Abstände der neuen Bildpunkte von den Centren werden zwar größer, aber die Bildpunkte rücken dichter und dichter zusammen und sie kommen über zwei gewisse Grenzen  $p_{1\infty}$  und  $p_{2\infty}$ , welche in beiden Kugeln merklich  $< R_1$  resp.  $< R_2$  bleiben, nie hinaus. Die Stärke der Punktladungen aber nimmt successive ab, weil jede folgende aus der vorigen durch Multiplikation mit einem echten Bruch hervorgeht,

welcher kleiner als  $\frac{R_1}{p_{1\infty}}$  resp.  $\frac{R_2}{p_{2\infty}}$  ist, und weil die über einander fallenden Bilder überdies immer im Zeichen wechseln.

Wenn der Abstand  $p_0$  einigermaßen groß gegen beide, oder auch nur gegen einen der beiden Radien ist, so convergiren die Summen sehr schnell und man kann sich mit einer geringen Anzahl der ersten Glieder der successiven Bilderreihe begnügen. Wenn sich aber die Kugeln fast berühren, so convergiren die Reihen sehr langsam, und man muß zu ihrer Berechnung besondere mathematische Kunstgriffe anwenden. Die Theorie dieses Problems wurde von G. KIRCHHOFF (CRELLE'S Journ. 59) vollständig durchgeführt.

§ 35. Reciproke Bilder der einfachsten geometrischen Objecte. Winkeltreue oder Aehnlichkeit der kleinsten Theilchen in Bild und Object.

Bevor wir zu einer neuen Anwendung der reciproken Bilder für die Theorie der Elektrostatik auf leitenden Oberflächen übergehen, ist es nützlich, die einfachsten Fälle der Object- und Bildgestalten und ein allgemeines Gesetz dieser Abbildung zu betrachten. Der Uebersichtlichkeit der Figuren wegen wollen wir dabei immer die Objecte ganz außerhalb der abbildenden Kugel, die Bilder also ganz im Innenraum annehmen, obwohl diese Beschränkung nicht im Wesen der Sache liegt. Es gelten dieselben Gesetze auch für Gebilde, welche theils außerhalb, theils innerhalb der Kugelfläche liegen, deren Bilder deshalb theils nach innen, theils nach außen fallen.

1. Bild einer Ebene. In Figur 13 ist ein Kreis um den Mittelpunkt  $O$  geschlagen. Dessen Radius sei  $OS = R$ . Außerhalb läuft eine gerade Linie, auf der ein beliebiger Punkt  $P$  ausgewählt ist, während  $A$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf dieser Linie ist. Von den beiden Punkten  $A$  und  $P$  sind die reciproken Bilder  $A'$  und  $P'$  angegeben. Nennen wir

$$OA = a, \quad OA' = a', \quad OP = p, \quad OP' = p',$$

so ist also

$$p \cdot p' = a \cdot a' = R^2 \quad (109)$$

oder  $p' : a' = a : p$ . Daraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke  $OP'A'$  und  $OAP$ . Da nun bei  $A$  ein rechter Winkel liegt, liegt auch bei  $P'$  ein solcher. Durchläuft also  $P$  die gerade Linie,

so folgt  $P'$  auf demselben Strahle  $OP$ , stets die Strecke  $OA'$  unter einem rechten Winkel erfassend, d. h.  $P'$  läuft auf dem Kreise, dessen Durchmesser  $OA'$  ist. Dem unendlich fernen Punkte der Geraden entspricht als Bild das Centrum  $O$ . Der Radius des Bildkreises ist  $\frac{1}{2} OA'$ , das ist gleich  $R^2/2a$ . Dreht man nun die Figur um die Axe  $OA$ , so beschreibt der Kreis um  $O$  die abbildende Kugel vom Radius  $R$ , die gerade Linie  $AP$  beschreibt eine Ebene im Raume, welche von  $O$  den Normalabstand  $OA$  besitzt, und der Bildkreis über  $OA'$  beschreibt als Bild jener Ebene eine Kugel.

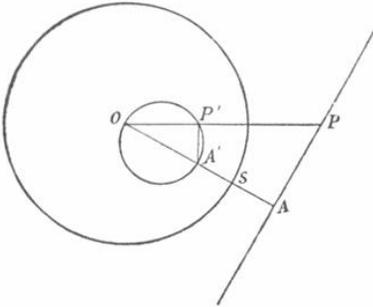


Fig. 13.

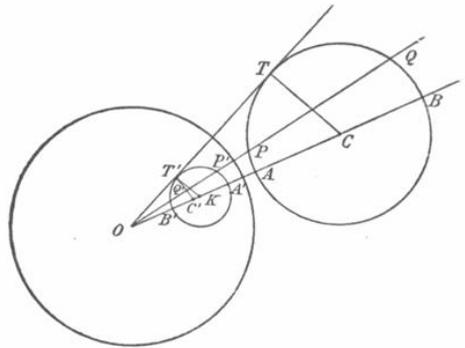


Fig. 14.

2. Bild einer Kugel. In Figur 14 haben wir denselben abbildenden Kreis vom Radius  $R$  um den Punkt  $O$ , als Object aber einen Kreis um den Punkt  $C$ . Die Centrale  $OC$  schneidet ihn in dem Durchmesser  $AB$ , ein beliebiger Strahl von  $O$  aus schneidet ihn in der Sehne  $PQ$ , endlich sei noch die Tangente  $OT$  bemerkt.

Von den Punkten  $ABPQT$  sind die reciproken Bildpunkte  $A'B'P'Q'T'$  construirt. Bezeichnen wir:

$$OA = a \quad OB = b \quad OP = p \quad OQ = q \quad OT = t$$

$$OA' = a' \quad OB' = b' \quad OP' = p' \quad OQ' = q' \quad OT' = t',$$

so ist wegen des Gesetzes der Abbildung

$$a \cdot a' = b \cdot b' = p \cdot p' = q \cdot q' = t \cdot t' = R^2. \tag{110}$$

Andererseits ist wegen der Kreisgestalt des Objectes

$$a \cdot b = p \cdot q = t^2. \tag{110a}$$

Setzt man in diese letzte Relation mit Hülfe der vorhergehenden die gestrichelten Größen ein, so erhält man:

$$\frac{R^2}{a'} \cdot \frac{R^2}{b'} = \frac{R^2}{p'} \cdot \frac{R^2}{q'} = \frac{R^4}{t'^2},$$

was nichts Anderes aussagt, als

$$a' \cdot b' = p' \cdot q' = t'^2. \quad (110b)$$

Daraus erkennt man ohne Weiteres, daß das Bild des Kreises ebenfalls ein Kreis ist, dessen Lage und Dimensionen man aus der Figur 14 leicht ablesen kann. Der Mittelpunkt  $C$  des äußeren Kreises ( $OC = \frac{a+b}{2}$ ) bildet sich in einem Punkte  $C'$  ( $OC' = c'$ ) ab nach dem Gesetz

$$\frac{a+b}{2} \cdot c' = R^2. \quad \text{oder} \quad c' = \frac{2R^2}{a+b}. \quad (110c)$$

Dieser Punkt  $C'$  ist indessen verschieden von dem Mittelpunkt  $K$  des Bildkreises:

$$OK = \frac{a' + b'}{2} = \frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (110d)$$

$C'$  liegt excentrisch gegen  $O$  hin verschoben.

Errichtet man auf  $OT'$  im Punkte  $T'$  eine Senkrechte, so trifft man  $K$ , legt man dagegen einen Kreis über den Durchmesser  $OT'$ , so trifft man  $C'$ , denn dieser Kreis ist das Bild der Geraden  $TC$ .

Für den Radius  $r'$  des Bildkreises und den Radius  $r$  des Objectkreises liest man aus der Figur folgende Gleichung ab

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'}{t}$$

oder unter Benutzung der reciproken Beziehungen und des Sekantensatzes:

$$r' = \frac{R^2}{t^2} r = \frac{R^2}{ab} \cdot \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{a} - \frac{R^2}{b} \right) = \frac{a' - b'}{2}. \quad (110e)$$

Läßt man die Figur 14 um die Axe  $OC$  rotiren, so beschreiben alle 3 Kreise Kugeln: und wir erhalten sogleich den Satz, daß das reciproke Bild einer Kugel im Raum wieder eine Kugel ist, deren Lage aus der ebenen Figur vollkommen erkannt werden kann, da diese einen gemeinsamen Centralschnitt durch alle drei Kugeln darstellt.

3. Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen zwischen Bild und Object. Wir stellen uns jetzt vor, es sei als Object eine beliebig gestaltete Raumfläche gegeben. Auf ihr wollen wir ein Flächenelement von dreieckiger Gestalt abgrenzen, welches so klein ist, daß sowohl dessen Fläche als auch das Bild davon als eben und die

Begrenzungslinien als geradlinig gelten dürfen. In Figur 15 sei in perspektivischer Darstellung das kleine Dreieck auf der Raumfläche durch  $ABC$  gegeben. Das reciproke Bild dazu sei das Dreieck  $A'B'C'$ .

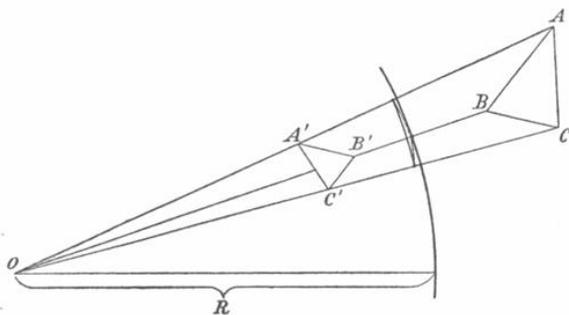


Fig. 15.

Bezeichne

$$OA = a \quad OB = b \quad OC = c$$

$$OA' = a' \quad OB' = b' \quad OC' = c',$$

dann ist

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = R^2. \quad (111)$$

Defshalb liegen auf jeder der drei Seiten der spitzen Ecke  $O$  zwei langgestreckte ähnliche Dreiecke:

$$OB'C' \sim OCB, \quad OC'A' \sim OAC, \quad OA'B' \sim OBA.$$

Bezeichnen wir also noch die kleinen Strecken:

$$BC = \alpha \quad CA = \beta \quad AB = \gamma$$

$$B'C' = \alpha' \quad C'A' = \beta' \quad A'B' = \gamma',$$

so ergibt sich aus den Aehnlichkeiten:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{b'}{c} = \frac{c'}{b} \quad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{c'}{a} = \frac{a'}{c} \quad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}. \quad (111a)$$

Je kleiner nun das Objectdreieck gemacht wird, um so mehr nähern sich die drei Strahlenlängen  $a, b, c$  ein und demselben endlichen Werthe, den wir mit  $p$  bezeichnen und kurz den Abstand des Objectelementes vom Punkt  $O$  nennen. Ebenso nähern sich die drei reciproken Strecken  $a', b', c'$  immer mehr dem gemeinsamen Werth  $p'$  (dem Abstand des Bildelementes von  $O$ ). Danach gehen die drei vorstehenden Gleichungen über in

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{p'}{p}, \quad (111b)$$

d. h. das Bilddreieck wird dem Objectdreieck bei verschwindender Gröfse geometrisch ähnlich.

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist folgende: Wenn auf der Objectfläche zwei beliebige einander schneidende Linien gezeichnet sind, so schneiden sich deren Bilder auf der Bildfläche unter dem gleichen Winkel, oder mit anderen Worten, die reciproke Abbildung ist winkeltreu.

§ 36. Eine andere Anwendung der reciproken Abbildung zur Auffindung des Gleichgewichts der Elektrizität auf Leitern von besonderer Gestalt.

In den §§ 32 und 34 haben wir die abbildende Kugel vom Radius  $R$  immer als Oberfläche des von ausen influenzirten Leiters angesehen. Es giebt aber noch eine andere Anwendung, bei welcher diese Kugel nur ein geometrisches Hilfsmittel für die Ableitung eines Ladungssystems aus einem vorgeschriebenen anderen Ladungssysteme bildet.

Wir denken uns zunächst ein System von Punkten mit den Ladungen  $e_1, e_2, \dots e_a, \dots$  festgelegt und bestimmen das Potential

in einem beliebigen Raumpunkt nach Gleichung (14).  $\varphi = \sum_a \frac{e_a}{r_a}$ .

Nun denken wir uns in einiger Entfernung von dem Ladungssystem ein festes Centrum und nennen die Abstände der elektrischen Punkte von diesem Centrum  $p_1, p_2, \dots p_a, \dots$ , den Abstand des Ortes in dem  $\varphi$  bestimmt worden ist, nennen wir  $s$ , endlich die Winkel zwischen der Richtung  $s$  und den Richtungen der einzelnen  $p_a$  nennen wir  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_a \dots$ . Dann sind die einzelnen Abstände

$$r_a = \sqrt{s^2 + p_a^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a},$$

mithin ist das Potential:

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{s^2 + p_a^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a}}. \tag{112}$$

Jetzt denken wir um das feste Centrum die Kugel vom Radius  $R$  gelegt und bilden in ihr das äußere Ladungssystem ab. Das Bild der Ladung  $e_a$  wird  $-\frac{R}{p_a} e_a$ , dessen Abstand vom Centrum

$p'_a = \frac{R^2}{p_a}$ . Nun suchen wir das Potential  $\varphi'$  dieses Bildsystems,

und zwar in demjenigen Punkte, der das Bild des vorher gewählten ist, dessen Abstand vom Centrum also  $s' = \frac{R^2}{s}$  ist. Die Bilder liegen alle auf denselben Strahlen wie die Objecte; deshalb haben die Winkel  $\vartheta_a$  hier dieselben Werthe und es ist:

$$\varphi' = \sum_a \frac{-\frac{R}{p_a} e_a}{\sqrt{\frac{R^4}{s^2} + \frac{R^4}{p_a^2} - 2 \frac{R^4}{s \cdot p_a} \cos \vartheta_a}}. \quad (113)$$

Wenn wir Zähler und Nenner der einzelnen Summenglieder mit  $\frac{s \cdot p_a}{R^2}$  erweitern, so tritt in allen Zählern der gemeinsame Factor  $\frac{s}{R}$  auf, den wir vor das Summenzeichen stellen dürfen, und es folgt:

$$\varphi' = -\frac{s}{R} \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{p_a^2 + s^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a}}. \quad (113 a)$$

Das ist aber nach Gleichung (112):

$$\varphi' = -\frac{s}{R} \cdot \varphi, \quad (114)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\varphi' = -\frac{R}{s'} \cdot \varphi \quad (114 a)$$

oder

$$\varphi' = -\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s'}} \cdot \varphi. \quad (114 b)$$

Diese einfache Beziehung erlaubt, das Potential  $\varphi'$  des allein vorhanden gedachten Bildsystems zu finden aus dem Potential des ursprünglichen Objectsystems, und zwar gilt die Beziehung für jedes Paar correspondirender Orte in beiden Systemen.

Man braucht die Betrachtung nun nicht auf Punktladungen zu beschränken, sondern kann namentlich auch die in der Elektrostatik der Leiter wichtigen Flächenbelegungen in der Kugel abbilden. Entspricht einem Flächenelemente  $ds$  das Bildelement  $ds'$ , so muß, wie die Betrachtung am Schluß des vorigen Paragraphen und die Figur 15 sofort zeigen, wegen der Aehnlichkeit der Abbildung sein:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{p'^2}{p^2}. \quad (115)$$

Die Dichtigkeit der Flächenbelegung im Object sei  $e$  und wir suchen die entsprechende Dichtigkeit  $e'$  im Bilde. Das Quantum  $e ds$  vertritt einen geladenen Punkt im Object. Das Quantum seines Bildes ist  $e' ds'$ . Deshalb muß die allgemeine Regel wie bei Punkten gelten:

$$(e' ds') = - \frac{R}{p} (e ds)$$

oder, da  $\frac{R}{p} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}$  ist:

$$\frac{e' ds'}{e ds} = - \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}. \quad (115 a)$$

Hieraus und aus der vorstehenden Gleichung für  $\frac{ds'}{ds}$  folgt:

$$\frac{e'}{e} = - \sqrt{\frac{p^3}{p'^3}}, \quad (115 b)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{e'}{e} = - \frac{p^3}{R^3} = - \frac{R^3}{p'^3}. \quad (115 c)$$

Während also das Bild einer äußeren Punktladung schwächer als das Object ist, wird die Flächendichtigkeit größer in dem inneren Bilde als in der äußeren Objectfläche. Das kommt daher, daß die Flächen noch stärker reducirt werden als die Ladungen.

Anhangsweise sei noch auf die Abbildung räumlich geladener Objecte hingewiesen, wengleich man selten davon wird Gebrauch machen können. Ein Volumelement  $d\tau$  im Abstand  $p > R$  besitzt ein Bild  $d\tau'$  im Abstand  $p'$ . Wegen der Aehnlichkeit der kleinsten Theilchen muß sein:

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{p'^3}{p^3}. \quad (116)$$

Die räumliche Dichtigkeit in Object und Bild sei  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ . Dann entspricht  $\varepsilon d\tau$  einem geladenen Objectpunkt,  $\varepsilon' d\tau'$  dessen Bildpunkt, mithin ist:

$$(\varepsilon' d\tau') = - \frac{R}{p} (\varepsilon d\tau)$$

oder

$$\frac{\varepsilon' d\tau'}{\varepsilon d\tau} = - \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}. \quad (116 a)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = - \sqrt{\frac{p}{p'}}^5 = - \frac{p^5}{R^5} = - \frac{R^5}{p'^5}. \quad (116 \text{ b})$$

Diese Abbildungen, insbesondere diejenige elektrisch belegter Oberflächen, wollen wir nun zur Auffindung neuer Gleichgewichte auf Leitern benützen. Würde man als Object einen geladenen Leiter oder einen influenzirten Leiter nebst der die Influenz hervorrufenden Ladung wählen, so würde immer auf der Leiteroberfläche das Potential  $\bar{\varphi}$  einen constanten Werth besitzen. Dann sieht man aber aus Gleichung (114), daß an der Oberfläche des Bildes das Potential  $\bar{\varphi}'$  der Bildladung nicht constant sein kann, da doch die Abstände  $s$  der einzelnen Flächenelemente vom Nullpunkt variabel sind. Eine Abbildung solcher Objecte kann also nicht Gleichgewichtsvertheilungen auf Leitern liefern.

Dagegen erhält man eine solche Gleichgewichtsvertheilung stets in folgender Weise: Man nimmt einen zur Erde abgeleiteten Conductor und erzeugt durch eine äußere Punktladung  $e$  auf dessen Oberfläche eine Influenzbelegung. Das gesammte Potential der Punktladung und der Flächenbelegung zusammen ist dann an der leitenden Fläche überall gleich Null. Nennt man den Abstand der Punktladung von den einzelnen Flächenelementen  $s$ , so ist der von  $e$  herrührende Antheil zum Potential an der Fläche gleich  $\frac{e}{s}$ , folglich der übrige, von der Flächenbelegung allein herrührende Antheil gleich  $-\frac{e}{s}$ .

Entfernt man dann den Punkt  $e$  wieder, so fließt freilich in Natur auch die Influenzbelegung an dem Leiter wieder davon in die Erde, aber man kann diese Belegung in Gedanken so fixirt denken, daß sie in derselben Vertheilung verharret, wie sie durch den Punkt  $e$  angeordnet wurde, auch nachdem man diesen weggenommen hat. Wählt man nun diese fixirte Belegung als Object und legt den Mittelpunkt der abbildenden Kugel in den Ort, wo vorher die Punktladung  $e$  sich befand, so stellt das Bild dieser Vertheilung immer das Gleichgewicht von Elektrizität auf einem isolirten geladenen Leiter dar, dessen Gestalt nach den Regeln der reciproken Abbildung aus der Gestalt des ursprünglichen influenzirten Leiters abgeleitet wird. Der Beweis der Behauptung folgt aus der Gleichung (114). Das Potential  $\varphi$  der Objectladung in einem Punkte der Oberfläche des Conductors ist

$$\varphi = - \frac{e}{s}.$$

Deshalb wird das Potential  $\varphi'$  der Bildladung in dem Bildpunkte, also ebenfalls in einem Punkte der Oberfläche des reciproken Bildes jenes Conductors

$$\varphi' = -\frac{s}{R}\varphi = +\frac{e}{R}.$$

Dieser Betrag ist an allen Stellen der Oberfläche constant. Im Inneren des Objectconductors herrscht im realen Gleichgewicht, d. h. unter Anwesenheit des influenzirenden Punktes  $e$  überall das Potential Null, nach gedachter Fixirung der Oberflächenbelegung und Entfernung des Punktes  $e$  besteht daselbst das variable Potential

$$\varphi = -\frac{e}{s},$$

wo  $s$  der Abstand eines inneren Punktes im Object vom Nullpunkt bedeutet. Im Bildpunkt, der dann ein innerer Punkt des Bildkörpers wird, ist nach Gleichung (114)

$$\varphi' = -\frac{s}{R}\varphi = +\frac{e}{R}.$$

Es sind also die Gleichgewichtsbedingungen für einen isolirten geladenen Leiter in diesem Bilde erfüllt.

Man wird diese Methode mit Nutzen nur da anwenden können, wo das Objectsystem sich in einfacher Weise angeben läßt, sowohl was die Flächenbelegung als auch das Potential im umgebenden Raume betrifft. Ist dies der Fall, so haben wir alle Mittel in der Hand, nun auch die Flächendichtigkeit auf dem und das Potential rings um den Bildkörper anzugeben.

In § 33 lernten wir die durch einen geladenen Punkt  $e$  auf einer im Abstand  $h$  gegenüber gestellten unendlichen leitenden Ebene hervorgerufene Flächenbelegung kennen und konnten auch das Potential dieser Belegung vor der Ebene in einfachster Weise durch das Potential einer fingirten Punktladung  $-e$  hinter der Ebene darstellen. Denken wir nun diese Flächenbelegung fixirt, den Punkt  $e$  entfernt, und die Abbildung der belegten Ebene ausgeführt. Das Bild der Ebene ist nach § 35 eine Kugel vom Radius  $\frac{R^2}{2h}$ , das Bild besitzt auf der Oberfläche und im Inneren (letzteres entsprechend dem Objectraume hinter der Ebene) das constante Potential  $\varphi' = +\frac{e}{R}$ . Die Flächendichtigkeit  $e'$  berechnet sich nach Gleichung

chung (115 c) aus der in Gleichung (105 b) angegebenen Dichtigkeit  $e$  auf der Ebene zu

$$e' = + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2eh}{R^3},$$

ist also ebenfalls constant. Da endlich das Potential der fixirten Belegung der Ebene vor der Ebene aussieht wie dasjenige des Punktes  $-e$  im Spiegelpunkte, so sieht das Potential der Bildbelegung aufserhalb der Bildkugel aus wie dasjenige des reciproken Bildes von jenem Punkte  $-e$ . Dieses Bild fällt in das Centrum der Bildkugel und hat die Stärke

$$e' = + \frac{R}{2h} e,$$

denn der Abstand jenes Spiegelpunktes hinter der Ebene von dem früheren Orte von  $e$  beträgt  $2h$ . Vergleicht man unter einander die hier gefundenen Werthe des Kugelradius, des Potentials auf der Oberfläche, der Flächendichtigkeit und endlich des Potentials im Außenraum, welches aussieht, als käme es von einer Punktladung  $e'$  im Kugelcentrum her, so erkennt man, dafs wir hier alle die uns bekannten Verhältnisse wiederfinden, welche für eine isolirte, leitende, geladene Kugel gelten müssen.

Ein neues Resultat, das Gleichgewicht auf einem complicirter gestalteten Conductor, liefert die Abbildung der ebenfalls in § 33 besprochenen Influenzladung auf zwei senkrecht zusammenstofsenden leitenden Ebenen. Wir knüpfen an Figur 9, S. 143, an, entfernen die reelle Punktladung  $+e$  und legen an ihre Stelle das Centrum  $O$  der abbildenden Kugel vom Radius  $R$  (Figur 16). Die beiden Ebenen bilden sich in zwei Kugeln ab, welche sich ebenso wie die Ebenen, rechtwinklig durchschneiden (Winkeltreue der Abbildung). Die Gröfse der beiden Kugeln hängt von der gewählten Lage des Centrums  $O$ , also von den beiden Abständen  $a$  und  $b$  ab, die Radien sind:

$$e_a = \frac{R^2}{2a} \quad \text{und} \quad e_b = \frac{R^2}{2b}.$$

Das Bild der durch zwei Ebenen gebildeten concaven Raumecke ist also eine geschlossene Oberfläche, welche aus Theilen zweier Kugeln gebildet wird. Die drei Spiegelbilder des reellen Punktes  $e$ , welche zur Darstellung des Potentials in dem concaven Raumquadranten nützlich waren, werden jetzt abgebildet in den beiden Kugelmittelpunkten  $A'$  und  $B'$  und in einem Punkte  $C'$  auf der

Verbindungsline beider. Es ist auch leicht, die Stärke dieser drei Bildpunkte aus der Figur abzulesen:

In  $A'$  ist  $+\frac{R}{2a}e$ , in  $B'$  ist  $+\frac{R}{2b}e$ , in  $C'$  endlich  $-\frac{R}{2\sqrt{a^2+b^2}}e$  zu fingiren. Die körperliche Gestalt des durch unsere Abbildung gefundenen Conductors findet man, wenn man das ebene Bild der beiden einander senkrecht schneidenden Kreise um die Centrale  $A'B'$  rotiren läßt. Das Innere dieses Körpers ist das Abbild des Raumes

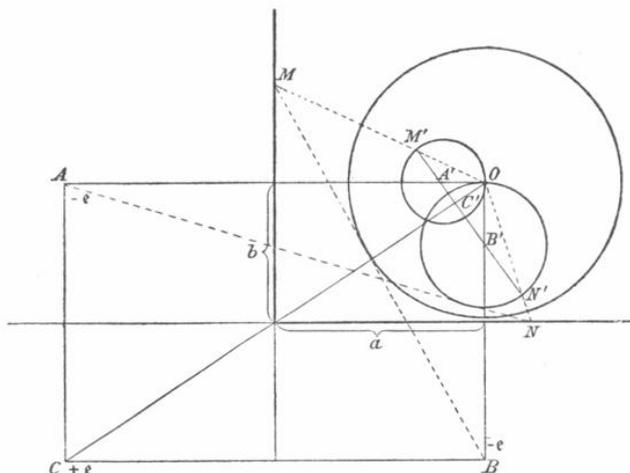


Fig. 16.

hinter der leitenden Wandung. Wir finden daher in der Abbildung im Inneren bis an die Oberfläche des Conductors das constante Potential

$$\varphi' = +\frac{e}{R}.$$

Die Dichtigkeit  $e'$  der Flächenbelegung könnte man mittels der Gleichung (115c) aus der in Gleichung (106 b) angegebenen Dichtigkeit  $e$  auf den beiden Ebenen berechnen. Es würde sich zeigen, daß sie ein stärkstes Maximum an der äußersten Stelle der kleineren Kugel, ein schwächeres an der entgegengesetzten Stelle der größeren Kugel aufweist. Besonders bemerkenswerth ist, daß in der eingeschnürten Falte der Conductorfläche die Dichtigkeit Null ist, da sie auch in der Schnittlinie beider Ebenen gleich Null war.

Nach Außen erzeugt der Conductor ein Feld, als käme es von den drei gedachten Punktladungen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  her. Die gesammte,

dem Conductor mitgetheilte Ladung  $e'$  muß gleich sein der algebraischen Summe dieser drei Punkte, also

$$e' = + \frac{R \cdot e}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (117)$$

Für jeden isolirten und nicht influenzirten Conductor besteht für das Gleichgewicht zwischen Gesammtladung und Potential eine Beziehung von der Form:

$$e' = C \cdot \varphi',$$

wo  $C$  eine nur von der geometrischen Gestalt abhängige Constante von der Dimension einer Länge bedeutet, welche man die Capacität des Conductors nennt. Für den hier betrachteten Körper giebt dies

$$C = \frac{e'}{\varphi'} = \frac{\frac{R \cdot e}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}{\frac{e}{R}} = \left( \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} - \frac{R^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

oder durch die beiden oben angegebenen Kugelradien  $\varrho_a$  und  $\varrho_b$  ausgedrückt:

$$C = \varrho_a + \varrho_b - \frac{\varrho_a \varrho_b}{\sqrt{\varrho_a^2 + \varrho_b^2}}.$$

Der letzte negative Summand dieses Ausdrucks hat einfache geometrische Bedeutung: Er mißt die Länge der Strecke  $OC'$  in Figur 16. Man kann daher die Capacität dieses Conductors sehr leicht als Länge construiren.

---

### Drittes Kapitel.

#### Kugelfunctionen.

---

#### § 37. Vorbemerkungen.

Hat man zwei verschiedene Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der LAPLACE'schen Differentialgleichung gefunden, so ist auch  $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$  eine Lösung, weil die Differentialgleichung linear und homogen ist. Die Coefficienten können complex gesetzt werden, wodurch eingreifende Veränderungen in der äußeren Gestalt der Lösungen entstehen können. Auch unendliche Summen  $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 + \dots$

können Lösungen darstellen, wenn die einzelnen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  der Differentialgleichung genügen und die unendlichen Reihen convergiren. Selbstverständlich übertragen sich Unstetigkeitsstellen einzelner Summanden auf die ganze Summe. Wenn  $\varphi(x, y, z)$  ein Integral ist, so ist  $\varphi(x+a, y+b, z+c)$  auch ein solches, denn die neuen Argumente der Function  $\varphi$  bezeichnen nur andere Raumpunkte, in denen aber  $\varphi$  ebenfalls die LAPLACE'sche Differentialgleichung befriedigt. Die Unstetigkeitsstellen der Function ändern bei der Einsetzung der neuen Argumente ihre Lage im Raume, wie bei einer gemeinsamen translatorischen Verrückung mit den Componenten  $-a, -b, -c$ . Aus einer Vereinigung der bereits angeführten Sätze folgt, dafs auch  $\frac{1}{a} \varphi(x+a, y, z) - \frac{1}{a} \varphi(x, y, z)$  ein Integral ist. Läßt man darin die Strecke  $a$  gegen 0 streben, so erhält der Ausdruck einen festen, im Allgemeinen endlichen Grenzwert, den partiellen Differentialquotient von  $\varphi$  nach  $x$ . Es ist defshalb auch

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

In gleicher Weise kann man höhere Differentialquotienten von  $\varphi$  bilden, nach  $x$ , nach  $y$ , nach  $z$ , gemischt wie man will, und erhält aus  $\varphi$  immer neue Functionen, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen. Jedoch sind die Arten des Unstetig- oder Unendlichwerdens bei den höheren Differentialquotienten andere, und auch die zugehörigen elektrischen Vertheilungen, deren Potentiale durch die höheren Differentialquotienten einer Function  $\varphi$  dargestellt werden, sehen complicirter aus, als die zur Function  $\varphi$  selbst gehörigen Ladungen. Ist z. B.  $\varphi$  das Potential von Ladungen,

so gehören zu  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  als Potentialen sogenannte Doppelpunkte, das sind je zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen, bei denen das Product aus Ladung und Abstand ein festes Moment bildet, während der Abstand selbst verschwindend klein wird. Gehören zu dem Felde von  $\varphi$  elektrische Flächenbelegungen, so erhält man durch geeignete Verbindungen der ersten Differentialquotienten von  $\varphi$  Potentiale von Doppelschichten etc.

Wenn  $\varphi$  bereits Unendlichkeitsstellen oder Unstetigkeitsstellen aufweist, so werden die Differentialquotienten mit steigender Ordnungszahl daselbst immer heftiger unendlich. Solche Stellen sind selbstverständlich von der Betrachtung der Function auszuschließen.

§ 38. Die höheren Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$ .

Wir wollen jetzt ausgehen von der einfachsten Potentialfunction, nämlich derjenigen, welche das Feld um eine im Nullpunkt festgelegte punktförmige positive Einheitsladung bestimmt. Dieses ist

$$\varphi_0 = \frac{1}{r}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (118)$$

Bezeichnen wir noch die Winkel, welche der Strahl  $r$  mit den positiven Coordinatenaxen bildet, mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist

$$\frac{x}{r} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{r} = \cos \beta, \quad \frac{z}{r} = \cos \gamma. \quad (118a)$$

Dann genügt  $\varphi_0$  im ganzen Raume, mit Ausnahme des Nullpunktes der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Bilden wir nun successive die Reihe der Differentialquotienten, so erhalten wir neue Functionen, welche ebenfalls der LAPLACE'schen Gleichung im ganzen Raume genügen, mit Ausnahme des Nullpunktes, in welchem sie unendlich werden wie höhere Potenzen von  $1/r$ .

Die Reihe der nur nach  $x$  genommenen Differentialquotienten beginnt mit folgenden Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3} &= -\frac{\cos \alpha}{r^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} &= \frac{-1 + 3 \cos^2 \alpha}{r^3} \\ \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} &= 9\frac{x}{r^5} - 15\frac{x^3}{r^7} &= \frac{9 \cos \alpha - 15 \cos^3 \alpha}{r^4} \\ \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} &= 9\frac{1}{r^6} - 90\frac{x^2}{r^7} + 105\frac{x^4}{r^9} &= \frac{9 - 90 \cos^2 \alpha + 105 \cos^4 \alpha}{r^5} \\ \frac{\partial^5 \varphi_0}{\partial x^5} &= -225\frac{x}{r^7} + 1050\frac{x^3}{r^9} - 945\frac{x^5}{r^{11}} &= \frac{-225 \cos \alpha + 1050 \cos^3 \alpha - 945 \cos^5 \alpha}{r^6} \\ && \text{etc.} \end{aligned} \right\} (118b)$$

Durch Vertauschung der Buchstaben  $x$  und  $\alpha$  mit  $y$  und  $\beta$  resp.  $z$  und  $\gamma$  erhält man zwei analoge Reihen. Endlich können auch

männigfaltige gemischte Differentialquotienten nach  $x, y, z$  zugleich gebildet werden, z. B.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial x} &= \frac{3 y z}{r^5} &= \frac{3 \cos \beta \cos \gamma}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= 3 \frac{y}{r^5} - 15 \frac{x^2 y}{r^7} &= \frac{3 \cos \beta - 15 \cos^2 \alpha \cos \beta}{r^4} \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial x} &= - \frac{15 x y z}{r^7} &= \frac{- 15 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{r^4} \end{aligned} \right\} (118c)$$

etc.

Die allgemeinste Form eines nten Differentialquotienten von  $\varphi_0$  ist

$$\varphi_{n, a, b, c} = \frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}, \quad a + b + c = n, \quad (119)$$

wobei  $a, b, c, n$  natürliche Zahlen sind.

Es stellt sich das allgemeine Gesetz heraus, daß man  $\varphi_n$  darstellen kann durch eine ganze homogene Function nten Grades von  $x, y, z$ , dividirt durch die Potenz  $r^{2n+1}$ . So läßt sich z. B. der letzte der in Gleichung (118b) angeführten Differentialquotienten auf den Generalnenner  $r^{11}$  bringen und lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \varphi_0}{\partial x^5} &= \frac{- 225 x r^4 + 1050 x^3 r^2 - 945 \cdot x^5}{r^{11}} \\ &= \frac{- 120 x^5 + 600 x^3 y^2 - 225 x y^4 + 600 x^3 z^2 - 450 x y^2 z^2 - 225 x z^4}{r^{11}}. \end{aligned}$$

Nennen wir die auf diese Weise im Zähler entstehenden homogenen Functionen  $H_{n, a, b, c}$ , so ist allgemein

$$\varphi_{n, a, b, c} = \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} = \frac{H_{n, a, b, c}}{r^{2n+1}}. \quad (119a)$$

Andererseits aber können wir mittels der Gleichung (118a) an Stelle von  $x, y, z$  die Richtungscosinus von  $r$  in die Zähler der Ausdrücke schaffen, wie dies in (118b) beispielsweise bereits geschehen ist. Dann erscheint jeder nte Differentialquotient von  $\frac{1}{r}$  als ein Bruch mit dem Nenner  $r^{n+1}$ , während im Zähler eine ganze

Function nten Grades der drei Richtungscosinus auftritt. Nennen wir diese:  $K_{n, a, b, c}$ , so ist

$$\varphi_{n, a, b, c}^n \equiv \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} = \frac{K_{n, a, b, c}}{r_{n+1}} \quad \text{oder} \quad K_{n, a, b, c} = r^{n+1} \cdot \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}. \quad (119b)$$

Einfache Beispiele dieser  $K$ -Functionen sind in den zweiten Formen der Gleichungen (118b) und (118c) gegeben. Diese  $K_n$  sind die sogenannten Kugelfunctionen, welche zuerst von LAPLACE näher untersucht worden sind und deren Nutzen für die Potentialtheorie wir im Folgenden aus einander setzen wollen.

Sofort erkennt man zwischen den Kugelfunctionen und den vorher erwähnten homogenen Coordinatenfunctionen  $H_{n, a, b, c}$  folgenden Zusammenhang:

$$r^n \cdot K_{n, a, b, c} = H_{n, a, b, c}. \quad (119c)$$

Für die praktische Benutzung dieser Functionen ist zwar die hier gegebene Art ihrer Bildung noch schwerfällig, jedoch ist ihre Definition in dieser Fassung verhältnißmäfsig leicht anschaulich und es lassen sich auch gewisse wichtige Gesetze aus ihr leicht ableiten. Das Unendlichwerden der Differentialquotienten  $\varphi_n$  im Nullpunkt erscheint in der Schreibweise (119b) nur durch den Nenner  $r^{n+1}$  verursacht, denn der Zähler  $K_{n, a, b, c}$  als reine Function der Richtungswinkel von  $r$  ist von der Länge  $r$  unabhängig und behält seinen endlichen Werth auch bei verschwindendem  $r$ . In der Form (119a) steht im Nenner gar die Potenz  $r^{2n+1}$  und der Zähler  $H_{n, a, b, c}$  geht im Nullpunkt selbst auf Null herunter wie die positive Potenz  $r^n$ . Dagegen wächst in großer Entfernung vom Nullpunkt  $H_{n, a, b, c}$  über alle Grenzen wie  $r^n$ , während  $\varphi_n$  dort gegen Null schwindet wie  $r^{-(n+1)}$ .

Wir wollen nun nachweisen, dafs die ganze homogene Function  $H_n$  im Zähler für sich allein (ohne den Nenner  $r^{2n+1}$ ) ebenfalls der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt.

Wenn  $U$  und  $V$  zwei differenzirbare Raumfunctionen sind, so gilt ganz allgemein die Formel:

$$\Delta(UV) = U\Delta V + V\Delta U + 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right). \quad (120)$$

Setzen wir nun

$$U = \frac{1}{r^{2n+1}}, \quad V = H_n,$$

so brauchen wir auf der rechten Seite für die runde Klammer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) &= - (2n + 1) \cdot \frac{x}{r^{2n+3}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) &= - (2n + 1) \frac{y}{r^{2n+3}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) &= - (2n + 1) \frac{z}{r^{2n+3}}. \end{aligned}$$

Ferner müssen wir  $\Delta U$  bilden: Durch nochmalige Differentiation des ersten der drei vorstehenden Ausdrücke nach  $x$  erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) = - (2n + 1) \frac{1}{r^{2n+1}} + (2n + 1)(2n + 3) \frac{x^2}{r^{2n+5}}.$$

Bildet man analog die zweiten Differentialquotienten nach  $y$  und  $z$  und addirt alle drei, so ergibt sich:

$$\Delta \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) = - (2n + 1) \frac{3}{r^{2n+3}} + (2n + 1)(2n + 3) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^{2n+5}}$$

oder

$$\Delta \left( \frac{1}{r^{2n+1}} \right) = \frac{2n(2n + 1)}{r^{2n+3}}.$$

Setzen wir dies alles in Gleichung (120) ein, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left( \frac{H_n}{r^{2n+1}} \right) &= \frac{1}{r^{2n+1}} \Delta H_n + H_n \cdot \frac{2n(2n + 1)}{r^{2n+3}} \\ &\quad - 2 \frac{(2n + 1)}{r^{2n+3}} \left( x \frac{\partial H_n}{\partial x} + y \frac{\partial H_n}{\partial y} + z \frac{\partial H_n}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (120a)$$

Für jede homogene Function  $n$ ten Grades gilt der Satz:

$$x \frac{\partial H_n}{\partial x} + y \frac{\partial H_n}{\partial y} + z \frac{\partial H_n}{\partial z} = n H_n. \quad (121)$$

Beweis:

Ein einzelner Summand von  $H_n$  hat die Form:

$$h_n = C \cdot x^p \cdot y^q \cdot z^r, \quad \text{wo } p + q + r = n.$$

Daher ist

$$\frac{\partial h_n}{\partial x} = p C x^{p-1} y^q z^r$$

und

$$x \frac{\partial h_n}{\partial x} = p C x^p y^q z^r = p h_n.$$

Ebenso ist

$$y \frac{\partial h_n}{\partial y} = q h_n$$

$$x \frac{\partial h_n}{\partial x} = r h_n.$$

Also

$$x \frac{\partial h_n}{\partial x} + y \frac{\partial h_n}{\partial y} + z \frac{\partial h_n}{\partial z} = (p + q + r) h_n = n h_n.$$

Dies über sämtliche Summanden der homogenen Function summiert, liefert die Gleichung (121).

Benutzt man diese Gleichung zur Umformung des letzten Gliedes von (120a), so erkennt man, daß ihre beiden letzten Glieder sich aufheben und übrig bleibt:

$$\Delta \left( \frac{H_n}{r^{2n+1}} \right) = \frac{1}{r^{2n+1}} \Delta H_n. \quad (122)$$

Wir wissen nun, daß die linke Seite (bis auf die Stelle  $r = 0$ ) überall gleich Null ist, denn sie ist das  $\Delta$  von einem  $n$ ten Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$ . Deshalb muß auch die rechte Seite verschwinden, d. h. es muß sein

$$\Delta H_n = 0, \quad (122a)$$

d. h. die durch Gleichung (119a) definirten homogenen Functionen  $H_n$  genügen der LAPLACE'Schen Differentialgleichung. Im Nullpunkt ist die linke Seite nicht mehr Null, sondern steigt über alle Grenzen wie  $\frac{1}{r^{n+3}}$  (da der  $n$ te Differentialquotient von  $\frac{1}{r}$  selbst wie  $\frac{1}{r^{n+1}}$  steigt). Da aber rechts eine noch höhere Potenz im Nenner steht, so ist für  $\Delta H_n$  im Nullpunkt keine Ausnahmestelle anzunehmen, vielmehr gilt auch dort (122a). Dagegen wird  $H_n$  selbst in großer Entfernung über alle Grenzen wachsen wie  $r^n$ . Als Potential eines elektrischen Feldes kann daher eine Function  $H_n$  nur in begrenzten Gebieten dienen. Jenseits müssen Unstetigkeiten liegen, welche auf die ursächlichen Ladungen hindeuten, während das Gebiet der Gleichung (122a), auch der Nullpunkt, dabei ganz leer von Electricität sein muß.

Man kann die Gleichung (122) auch zu dem umgekehrten Schlusse verwenden: Hat man auf irgend eine von unserer Gleichung (119a) unabhängigen Weise eine ganze homogene Function

n-ten Grades aufgefunden, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt, so muß diese Function, dividirt durch  $r^{2n+1}$ , ebenfalls ein Integral derselben Differentialgleichung sein, aber mit dem Ausnahmepunkt  $r = 0$ .

Das Auffinden solcher ganzer Functionen ist nicht schwer. Jede Constante (Function 0-ten Grades) und jede lineare homogene Function:  $Ax + By + Cz$  genügt der LAPLACE'schen Differentialgleichung. Bei den Functionen zweiten Grades:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy$  muß schon eine Bedingung zwischen den Coefficienten erfüllt sein, denn das  $\Delta$  dieser Function ist gleich  $2(A + B + C)$ . Die ganze homogene Function zweiten Grades erfüllt die LAPLACE'sche Gleichung nur dann und immer dann, wenn die Coefficienten der drei Quadrate zusammen die Summe Null geben. Bei höheren Graden steigt die Coefficientenzahl, aber auch die Bedingungsanzahl. Im Allgemeinen kann man darüber Folgendes aussagen. Das  $\Delta$  einer homogenen Function n-ten Grades ist eine homogene Function  $(n - 2)$ -ten Grades, deren Coefficienten als algebraische Summen von ganzzahligen Vielfachen der Functioncoefficienten erscheinen. Soll nun dieses  $\Delta$  für jede Werthgruppe der Variablen gleich Null sein, so muß jede dieser eben bezeichneten algebraischen Summen einzeln  $= 0$  sein. Das sind demnach eben so viel Bedingungen, als die homogene Function  $(n - 2)$ -ten Grades Glieder besitzt, nämlich  $\frac{(n - 1)n}{2}$ .

Diese Bedingungen müssen von den  $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$  Coefficienten der homogenen Function n-ten Grades erfüllt werden. Man kann eben so viele Coefficienten, als Bedingungsgleichungen vorliegen, durch die übrig bleibenden ausdrücken, und erkennt, daß

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - \frac{(n - 1)n}{2} = 2n + 1 \quad (123)$$

Coefficienten frei verfügbar bleiben. Das allgemeinste ganze homogene Integral n-ten Grades der LAPLACE'schen Gleichung hat also  $2n + 1$  willkürliche Constanten.

Die von uns im Zähler von Gleichung (119 a) aufgefundenen  $H_{n,abc}$  haben gar keine verfügbaren Coefficienten. Man kann so viele  $H_{n,abc}$  auffinden, als drei natürliche Zahlen (inclusive Null) sich zu der Summe  $a + b + c = n$  zusammenstellen lassen; das sind  $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ . Jede mit einem unbestimmten Factor multiplicirt und alle addirt geben dann auch eine ganze homogene Function

$n$ ten Grades, die der LAPLACE'schen Gleichung genügt. Dieser Ausdruck hat scheinbar  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  disponible Constanten, wie die allgemeinste Function  $n$ ten Grades.

Wir haben aber eben gesehen, daß die allgemeinste passende Function nur  $(2n+1)$  disponible Constanten hat. Also müssen sicher alle durch Summirung der  $H_{n,abc}$  gebildeten Functionen unter denen sein, die wir unter Berücksichtigung der  $\frac{(n-1)n}{2}$  Bedingungengleichungen aus der allgemeinsten Form herausholten, und die überzähligen Coefficienten müssen sich zu solchen Gruppen vereinigen, daß im ganzen doch nur  $2n+1$  unabhängige Bestandteile dadurch gebildet werden. Mit anderen Worten: Die einzelnen  $H_{n,abc}$  sind nicht lauter unabhängige Integrale.

In gleicher Weise kann man die elementaren Kugelfunctionen  $K_{n,abc}$  in Gleichung (119 c), mit je einem Factor erweitert, addiren und erhält so eine allgemeine Kugelfunction  $n$ ter Ordnung, welche ebenso wie die ganze homogene der LAPLACE'schen Gleichung gehorsame Function,  $2n+1$  willkürliche Constanten enthält.

### § 39. Auffindung der Normalformen für die Kugelfunctionen.

Um aus den  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  nach dem Schema der Gleichung (119 b) herstellbaren Kugelfunctionen  $n$ ter Ordnung die  $(2n+1)$  unabhängigen Grundformen herauszusuchen oder zusammenzustellen, müßte man umständliche Betrachtungen durchführen und müßte auch in unsymmetrischer Weise die einen vor anderen gleichberechtigten bevorzugen. Man kommt leichter zum Ziele und findet auch glattere Formen für die unabhängigen Elemente, wenn man einer der drei Axenrichtungen, z. B. der  $x$ -Richtung eine Sonderstellung anweist, wie das auch bei der Einführung räumlicher Polarcoordinaten um die  $x$ -Axe geschieht.

Statt der Variablen  $y$  und  $z$  führen wir nun zwei andere, conjugirt complexe Variabele  $p$  und  $q$  ein durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p &= y + iz \\ q &= y - iz, \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

denen wir sogleich als Folgerungen hinzufügen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial q}{\partial z} = i. \end{aligned} \right\} \quad (124 a)$$

Die Rechengesetze sind für complexe Größen die nämlichen, wie für reelle, mit der einen besonderen Bestimmung, daß  $i^2 = -1$  zu setzen ist. Deshalb kann man auch Functionen von  $x, y, z$  verwandeln in solche von  $x, p, q$ , und auch partielle Differentialgleichungen für diese complexen Variablen umformen. Hat man dann ein complexes Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung wie die LAPLACE'sche, gefunden, so muß der reelle und der imaginäre Theil für sich einzeln auch je ein Integral liefern, so daß man auf einen Schlag zwei particuläre Integrale findet.

Zunächst formen wir das LAPLACE'sche  $\Delta \varphi$  für den Gebrauch der Variablen  $x, p, q$  um. Das erste Glied  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  bleibt ungeändert; zur Bildung der zweiten und dritten müssen wir erst bilden

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z}\end{aligned}$$

oder wegen (124 a)

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= i \frac{\partial \varphi}{\partial p} - i \frac{\partial \varphi}{\partial q}.\end{aligned} \right\} \quad (124 b)$$

Durch nochmalige Anwendung dieser letzten Formeln auf sich selbst erhält man

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\end{aligned} \right\} \quad (124 c)$$

und durch Addition beider Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q}.$$

Es ist daher

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} \quad (125)$$

und man kann die LAPLACE'sche Differentialgleichung in folgende Form bringen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (125 a)$$

Von dieser transformirten Gleichung gilt rein mathematisch — gleichgültig, was man sich unter den Variablen  $x, p, q$  vorstellt — wegen ihrer homogenen Linearität dasselbe Gesetz, welches wir für die cartesischen Coordinaten bereits verwendet haben, nämlich: Hat man eine Function  $\varphi_0$  von  $x, p, q$  gefunden, welche die Differentialgleichung (125 a) befriedigt, so thun dies auch alle ihre mannigfachen Differentialquotienten nach den drei Variablen, so dafs man als ein Integral ansetzen kann:

$$\varphi_{a,b,c}^n = \frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x^a \cdot \partial p^b \cdot \partial q^c}, \quad a + b + c = n. \quad (126)$$

Nun sagt die Differentialgleichung (125 a) nichts Anderes aus, als dafs jede ihr genügende Function, wenn man sie einmal nach  $p$  und dann einmal nach  $q$  differenzirt (Operation  $\frac{\partial^2}{\partial p \partial q}$ ), dasselbe Resultat liefert, als wenn man sie zweimal nach  $x$  differenzirt und den Factor  $-\frac{1}{4}$  zusetzt (Operation  $-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ). Macht man also diese beiden gleichwerthigen Operationen 1 mal an einer der Gleichung genügenden Function  $\varphi$ , so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial^{2l} \varphi}{\partial p^l \cdot \partial q^l} = \left(-\frac{1}{4}\right)^l \cdot \frac{\partial^{2l} \varphi}{\partial x^{2l}}. \quad (127)$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man das Integral (126) umformen, wobei wir die Fälle  $b = c$ ,  $b > c$  und  $b < c$  unterscheiden.

Es sei zuerst  $b = c$ , also  $2b = n - a$ . Dann ist

$$\varphi_{a,b,b}^n = \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left( \frac{\partial^{2b} \varphi_0}{\partial p^b \partial q^b} \right) = \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left[ \left(-\frac{1}{4}\right)^b \frac{\partial^{2b} \varphi_0}{\partial x^{2b}} \right] = \left(-\frac{1}{4}\right)^b \frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x^n}. \quad (127 a)$$

Zweitens sei angenommen  $b > c$ . Wir setzen  $b = c + m$ , also  $a + 2c = n - m$ , und können den Ausdruck (126) dann so anordnen:

$$\varphi_{a,c+m,c}^n = \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left\{ \frac{\partial^{2c}}{\partial p^c \partial q^c} \left( \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial p^m} \right) \right\} = \left(-\frac{1}{4}\right)^c \frac{\partial^{a+2c}}{\partial x^{a+2c}} \left( \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial p^m} \right) \left. \vphantom{\frac{\partial^a}{\partial x^a}} \right\} \quad (127 b)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^c \frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x^{n-m} \partial p^m}.$$

Drittens und letztens sei  $b < c$ . Wir setzen  $c = b + m$ , also  $a + 2b = n - m$  und finden:

$$\varphi_{\substack{n \\ a, b, c + m}}^n = \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left\{ \frac{\partial^{2b}}{\partial p^b \cdot \partial q^b} \left( \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial q^m} \right) \right\} = \left. \begin{aligned} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^b \frac{\partial^{a+2b}}{\partial x^{a+2b}} \left( \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial q^m} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^b \frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x^{n-m} \cdot \partial q^m} \end{aligned} \right\} (127 c)$$

Auf die hier noch beibehaltenen Potenzen von  $-\frac{1}{4}$  kommt weiter nichts an, da man ja jedes Integral dieser Differentialgleichungen mit einem beliebigen constanten Factor erweitern darf.

Die beiden Formen (127 b und c) unterscheiden sich bei Functionen  $\varphi_0$ , welche wie unser  $1/r$  nach  $p$  und  $q$  symmetrisch zusammengesetzt sind [vgl. unten Gleichung (128)], nur im Vorzeichen von  $i$ , liefern also bei der Spaltung in Reell und Imaginär die gleichen Paare von Lösungen. So sieht man bereits, daß der Ausdruck (126) mit seiner scheinbar zweifachen Mannigfaltigkeit der Ordnungszahlen  $a, b, c$  mit der festen Summe  $n$  in Wahrheit nur eine einfache Mannigfaltigkeit zweier natürlicher Zahlen  $(n - m)$  und  $m$  mit der festen Summe  $n$  besitzt, so daß, da jeder Fall von  $m = 1$  bis  $m = n$  ein Lösungspaar enthält, während der Fall  $m = 0$  in (127 a) nur eine einzelne Lösung liefert, im Ganzen  $2n + 1$  verschiedene Grundformen  $n$ ter Ordnung auftreten, aus denen man die allgemeinste Lösung  $n$ ter Ordnung mit  $2n + 1$  disponiblen Coefficienten homogen und linear zusammensetzen kann. (Vergleiche den Schluß des vorigen Paragraphen).

Die Differentialquotienten  $n$ ter Ordnung nach  $x, y, z$  endlich, welche in Gleichung (119 b) als Quelle für die Kugelfunctionen angeführt wurden, lassen sich natürlicher Weise als homogene lineare Summen von  $n$ ten Differentialquotienten nach  $x, p, q$  ausdrücken. Somit sind sowohl jene ganzen Functionen  $H_n$  als auch die Kugelfunctionen  $K_{\substack{n \\ a, b, c}}$  zurückgeführt auf die hier in Aussicht gestellten, von einander unabhängigen  $2n + 1$  Grundformen.

Wollen wir nun deren Gestalt näher kennen lernen, so ist zu beachten, daß in der Function  $\varphi_0 = \frac{1}{r}$  nur die Gruppe  $y^2 + x^2$  vorkommt, für welche sich aus den Gleichungen (124) ergibt:

$$y^2 + x^2 = pq = \rho^2. \quad (128)$$

Die zu differenzierende Function hängt also explicite nur von dem Modulquadrat  $\rho^2$  der conjugirt complexen Größen  $p$  und  $q$  ab. Es ist deshalb

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial (\rho^2)} \cdot \frac{\partial (\rho^2)}{\partial p} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial (\rho^2)} \cdot q,$$

und da  $q$  als unabhängige Variable neben  $p$  besteht, bei  $m$ facher Differentiation nach  $p$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^m \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p^m} &= \frac{\partial^m \left(\frac{1}{r}\right)}{[\partial (\rho^2)]^m} \cdot q^m. \\ \text{Ganz analog ist} \\ \frac{\partial^m \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial q^m} &= \frac{\partial^m \left(\frac{1}{r}\right)}{[\partial (\rho^2)]^m} \cdot p^m. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Hiernach nehmen die Integrale (127 a, b, c) in jedem Falle die Gestalt an:

$$\varphi_{n,m} = \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{n-m} [\partial (\rho^2)]^m} p^m \quad \text{oder} \quad = \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{n-m} [\partial (\rho^2)]^m} \cdot q^m. \quad (129 a)$$

Bei den Potenzen  $p^m$  und  $q^m$  kommt uns zu Statten, daß sie durch die Kreisfunctionen der Vielfachen des Azimuthalwinkels der complexen GröÙen dargestellt werden können. Dieser Azimuthalwinkel ist hier nichts Anderes, als der Längenwinkel der räumlichen Polarcoordinaten um die  $x$ -Axe. Führen wir also jetzt ein:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \cos \eta \\ x &= r \sin \vartheta \sin \eta, \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} p &= y + iz = r \sin \vartheta (\cos \eta + i \sin \eta) = r \sin \vartheta \cdot e^{i\eta} \\ q &= y - iz = r \sin \vartheta \cdot e^{-i\eta} \\ pq &= \rho^2 = r^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (130 a)$$

und schließlic

$$\left. \begin{aligned} p^m &= r^m \sin^m \vartheta \cdot e^{im\eta} = r^m \sin^m \vartheta \cdot (\cos m\eta + i \sin m\eta) \\ q^m &= r^m \sin^m \vartheta \cdot (\cos m\eta - i \sin m\eta) \end{aligned} \right\} \quad (130 b)$$

und die Integrale  $n$ ter Ordnung nehmen im Anschluß an (129 a) die Form an:

$$\varphi_{n,m} = r^m \cdot \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{n-m} [\partial (\rho^2)]^m} \sin^m \vartheta \cdot (\cos m\eta \pm i \sin m\eta). \quad (131)$$

Der reelle Theil mit dem Factor  $\cos m \eta$  und der imaginäre nach Streichung von  $i$  mit dem Factor  $\sin m \eta$  sind, einzeln genommen, ebenfalls Lösungen. Erweitern wir also beide mit zwei willkürlichen Constanten  $A_{n,m}$  und  $B_{n,m}$ , so erhalten wir eine reelle Lösung von folgender Form:

$$\varphi_{n,m} = k \cdot r^m \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^{n-m} \cdot [\partial(\rho^2)]^m} \cdot \sin^m \vartheta \cdot (A_{n,m} \cos m \eta + B_{n,m} \sin m \eta). \quad (131a)$$

An Stelle der beiden eingeführten Constanten kann man auch eine Amplitude  $C_{n,m}$  und eine Phasenconstante  $e_{n,m}$  verwenden durch die Beziehungen:

$$\text{oder} \quad A_{n,m} = C_{n,m} \cos e_{n,m} \quad \text{und} \quad B_{n,m} = C_{n,m} \sin e_{n,m}$$

$$C_{n,m} = \sqrt{A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2}, \quad e_{n,m} = \arctang \frac{B_{n,m}}{A_{n,m}}.$$

Dann erhält man

$$\varphi_{n,m} = k \cdot r^m \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^{n-m} \cdot [\partial(\rho^2)]^m} \sin^m \vartheta \cdot C_{n,m} \cos(m \eta - e_{n,m}). \quad (131b)$$

Der in beiden Ausdrücken rechts vorangestellte Factor  $k_{n,m}$  bedeutet einen Zahlenwerth, dessen geeignete Bestimmung wir auf später verschieben. Jedenfalls hat dessen Hinzufügung nichts Bedenkliches, da außerdem noch die disponiblen Factoren  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  oder  $C_{n,m}$  vorhanden sind.

Aus dem  $\varphi_{n,m}$  gewinnt man nun die Kugelfunctionen ganz analog, wie in Gleichung (119b) angegeben, durch Multiplication mit  $r^{n+1}$ .

Wir wollen folgende Bezeichnung einführen:

$$P_{n,m} = k_{n,m} \cdot r^{n+m+1} \cdot \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x^{n-m} [\partial(\rho^2)]^m}. \quad (132)$$

Dann haben die auf diese Weise gefundenen Kugelfunctionen die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} K_{n,m} &= P_{n,m} \cdot \sin^m \vartheta \cdot (A_{n,m} \cos m \eta + B_{n,m} \sin m \eta) \\ &= P_{n,m} \cdot \sin^m \vartheta \cdot C_{n,m} \cdot \cos(m \eta - e_{n,m}). \end{aligned} \right\} \quad (132a)$$

Die directe Berechnung der  $n$ ten Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$  ist

ziemlich umständlich. Man müßte, um einen bestimmten von ihnen zu finden, eine ganze Reihe der niedrigeren vorher berechnen, auch ist das allgemeine Bildungsgesetz in seiner Abhängigkeit von den Zahlen  $n$  und  $m$  auf diese Weise nur schwierig zu erkennen. Zur Anschauung seien die niedrigsten Vertreter dieser Ausdrücke  $P_{nm}$  von  $n = 0$  bis  $n = 4$  nach Gleichung (132) berechnet, hier angegeben:

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$m = 0$	$k_{0,0} \cdot 1$	$k_{1,0} \cdot \left(-\frac{x}{r}\right)$	$k_{2,0} \cdot \left(-1 + 3\frac{x^2}{r^2}\right)$
$m = 1$		$k_{1,1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$	$k_{2,1} \cdot \left(\frac{3}{2}\frac{x}{r}\right)$
$m = 2$			$k_{2,2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$
$m = 3$			
$m = 4$			

	$n = 3$	$n = 4$
$m = 0$	$k_{3,0} \cdot \left(9\frac{x}{r} - 15\frac{x^3}{r^3}\right)$	$k_{4,0} \cdot \left(9 - 90\frac{x^2}{r^2} + 105\frac{x^4}{r^4}\right)$
$m = 1$	$k_{3,1} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2}\frac{x^2}{r^2}\right)$	$k_{4,1} \cdot \left(-9 \cdot \frac{5}{2}\frac{x}{r} + 15 \cdot \frac{7}{2}\frac{x^3}{r^3}\right)$
$m = 2$	$k_{3,2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{r}\right)$	$k_{4,2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{x^2}{r^2}\right)$
$m = 3$	$k_{3,3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}\right)$	$k_{4,3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}\frac{x}{r}\right)$
$m = 4$		$k_{4,4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}\right)$

(132b)

Unmittelbar kann man hieraus nur erkennen, daß

$$P_{n,n} = k_{n,n} \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2}\right) \quad (132c)$$

ist, und daß die mit  $k_{n,m}$  multiplicirten Ausdrücke ganze Functionen von  $\frac{x}{r}$  sind, welche entweder nach geraden oder ungeraden Potenzen dieses echten Bruches fortschreiten und mit dessen  $(n - m)$ ten Potenz abbrechen. Nun ist nach (130)  $\frac{x}{r} = \cos \vartheta$ , die  $P_{n,m}$  sind also reine Functionen von  $\cos \vartheta$  von dem eben angegebenen Charakter. Es ist üblich in der Theorie der Kugelfunctionen statt der Pol-distanz  $\vartheta$  direct deren Cosinus als Variable einzuführen

$$\cos \vartheta = \mu. \quad (133)$$

Dann ist

$$\sin \vartheta = + \sqrt{1 - \mu^2}$$

stets positiv, weil  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\pi$  bleibt.

#### § 40. Transformation von $\Delta \varphi$ für den Gebrauch räumlicher Polarcoordinaten.

Um die allgemeine Form der Functionen  $P_{n,m}$  des Argumentes  $\mu$  zu finden, ist es nöthig, Integrale  $n$ ter Ordnung der LAPLACE'schen Differentialgleichung durch die gefundene Normalform (132a) der Kugelfunctionen zu bilden, also entweder  $\varphi_{n,m} = \frac{1}{r^{n+1}} K_{n,m}$  oder  $\varphi_{n,m} = r^n \cdot K_{n,m}$  und diese in die Differentialgleichung einzusetzen, welche dadurch befriedigt wird. Da aber jetzt die Integrale in Polarcoordinaten ausgedrückt sind, müssen wir erst das  $\Delta \varphi$  für solche ausdrücken.

Dies geschieht am leichtesten, wenn man den allgemeinen Satz Gleichung (78) S. 92

$$\iiint ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = - \iiint d\tau \cdot \Delta \varphi$$

anwendet auf das Raumgebiet, welches ein Volumelement der Polarcoordinaten ausfüllt. Dieses ist begrenzt durch zwei concentrische Kugelflächen von den Radien  $r$  und  $r + dr$ , durch zwei Kegelmäntel von den Öffnungswinkeln  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  und durch zwei Meridianebenen von den Längewinkeln  $\eta$  und  $\eta + d\eta$ . Diese drei Flächen-

paare durchschneiden sich rechtwinklig. Der Raum sei so klein, daß die Kanten seiner Umgrenzung als geradlinig gelten dürfen. Deren Länge ist

1. in radialer Richtung:  $dr$ ,
2. in Richtung der Meridiankreise:  $r \cdot d\vartheta$ ,
3. in Richtung der Parallelkreise:  $r \sin \vartheta \cdot d\eta$ .

Daher ist das Volumen:

$$d\tau = r^2 \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\eta,$$

das Rechteck auf der Kugelfläche vom Radius  $r$ :

$$ds_1 = r d\vartheta \cdot r \sin \vartheta d\eta,$$

das Rechteck auf dem Kegelmantel vom Winkel  $\vartheta$ :

$$ds_2 = r \sin \vartheta d\eta \cdot dr,$$

das Rechteck auf der Meridianebene vom Längswinkel  $\eta$ :

$$ds_3 = dr \cdot r d\vartheta.$$

Ferner ist die innere Normale auf  $ds_1$  gleich  $dr$ , also der Beitrag zum Oberflächenintegral

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} ds_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\eta.$$

Von der gegenüberliegenden Fläche rührt ein Beitrag her, welcher einerseits entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, weil die innere Normale dort in Richtung  $-dr$  fällt, andererseits einen durch den Schritt  $dr$  veränderten Werth besitzt. Die Summe beider Antheile ist

$$-dr \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\eta \right\} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\eta dr.$$

Die innere Normale auf  $ds_2$  ist gleich  $r d\vartheta$ , also der Beitrag zum Oberflächenintegral

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} ds_2 = \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} \cdot r \sin \vartheta d\eta dr = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\eta dr.$$

Von der gegenüberliegenden Fläche rührt wieder ein entgegengesetzter und durch den Schritt  $d\vartheta$  veränderter Beitrag her, so daß die Summe beider ist

$$-d\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\eta dr \right\} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) d\eta dr d\vartheta.$$

Die innere Normale auf  $ds_3$  endlich ist gleich  $r \sin \vartheta d\eta$ , also der Beitrag zum Oberflächenintegral:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} ds_3 = \frac{\partial \varphi}{r \sin \vartheta d\eta} \cdot dr r d\vartheta = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dr d\vartheta.$$

Von den beiden letzten Flächenelementen zusammen rührt daher der Beitrag her

$$-d\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dr d\vartheta \right\} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} dr d\vartheta d\eta.$$

Nummehr können wir die eingangs citirte Integralformel für unseren Fall zusammensetzen, und im Raumintegral wegen dessen Kleinheit  $\Delta\varphi$  als constante Gröfse absondern. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\eta dr - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) d\eta dr d\vartheta \\ & - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} dr d\vartheta d\eta = -\Delta\varphi \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot dr d\vartheta d\eta \end{aligned}$$

oder

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \quad (134)$$

Wir wollen auch hier  $\mu = \cos \vartheta$  als Variable an Stelle von  $\vartheta$  einführen. Dabei ist zu beachten, daß

$$d\mu = -\sin \vartheta d\vartheta.$$

Das mittlere Glied der vorstehenden rechten Seite wird dadurch äußerlich etwas verändert, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \mu}.$$

Ferner schreiben wir  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - \mu^2}$ . Der Ausdruck nimmt dann die Form an:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \quad (134a)$$

Braucht man das  $\Delta\varphi$  nur für die LAPLACE'sche Differentialgleichung, wo es gleich Null ist (nicht aber etwa für die POISSON'sche oder für die Wellengleichung), so darf man den gemeinsamen Divisor  $r^2$  fortlassen. Die LAPLACE'sche Gleichung lautet also, in den Variablen  $r, \mu, \eta$  ausgedrückt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (135)$$

Es giebt, wie man leicht durchschauen kann, noch einige abweichende Formeln für diese Differentialgleichung, doch weichen sie nur in nebensächlichen Veränderungen von einander ab.

§ 41. Differentialgleichung für  $P_{nm}$  und deren Lösung.

In die soeben gebildete Form der LAPLACE'schen Differentialgleichung setzen wir nun folgende Lösung ein, in welcher die Kugelfunction  $K_{nm}$  aus Gleichung (132a) verwendet wird:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_{nm} \cdot \sqrt{1 - \mu^2}^m \cdot C \cdot \cos(m\eta - e). \quad (136)$$

Nur der erste Factor ist von  $r$  abhängig, und da

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n+1}} \right) = - (n+1) \frac{1}{r^{n+2}}$$

$$r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n+1}} \right) = - (n+1) \frac{1}{r^n}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n+1}} \right) \right) = (n+1)n \frac{1}{r^{n+1}}$$

ist, wird das erste Glied der Differentialgleichung (135)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = (n+1)n \varphi. \quad (136a)$$

Das gleiche Ergebniss würde sich finden, wenn man an Stelle des Factors  $\frac{1}{r^{n+1}}$  in Gleichung (136) den Factor  $r^n$  gesetzt hätte, welcher ja ebenfalls die Kugelfunction in ein Integral der LAPLACE'schen Differentialgleichung verwandelt. Es ist nämlich

$$\frac{d}{dr} (r^n) = n r^{n-1}$$

$$r^2 \frac{d}{dr} (r^n) = n r^{n+1}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} (r^n) \right) = n(n+1) r^n.$$

Die Variable  $\mu$  steckt nur in  $P_{nm} \cdot \sqrt{1 - \mu^2}^m$  und es ist:

$$\frac{d}{d\mu} (P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m) = \frac{dP_{nm}}{d\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^m - m P_{nm} \mu \sqrt{1 - \mu^2}^{m-2}$$

$$(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} (P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m) \\ = \frac{dP_{nm}}{d\mu} \sqrt{1 - \mu^2}^{m+2} - m P_{nm} \mu \sqrt{1 - \mu^2}^m$$

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} (P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m) \right) =$$

$$\frac{d^2 P_{nm}}{d\mu^2} \sqrt{1 - \mu^2}^{m+2} - 2(m+1) \frac{dP_{nm}}{d\mu} \mu \sqrt{1 - \mu^2}^m - m P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m + m^2 P_{nm} \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2}^{m-2}$$

oder etwas anders geformt

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} (P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m) \right) \\ = P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m \left\{ \frac{1}{P_{nm}} \frac{d^2 P_{nm}}{d\mu^2} (1 - \mu^2) - \frac{2(m+1)}{P_{nm}} \frac{dP_{nm}}{d\mu} \mu - m - m^2 + \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\}.$$

Also wird das zweite Glied der Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) \\ & = \varphi \left\{ \frac{1}{P_{nm}} \frac{d^2 P_{nm}}{d\mu^2} (1 - \mu^2) - \frac{2(m+1)}{P_{nm}} \frac{dP_{nm}}{d\mu} \mu - m(m+1) + \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (136 \text{ b})$$

Die Variable  $\eta$  endlich kommt nur in  $\cos(m\eta - c)$  vor und es ist

$$\frac{d^2 \cos(m\eta - c)}{d\eta^2} = -m^2 \cos(m\eta - c).$$

Also wird das dritte Glied der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -\varphi \frac{m^2}{1 - \mu^2}. \quad (136 \text{ c})$$

Alle drei Theile (136 a, b und c) enthalten die ganze Function  $\varphi$  als gemeinsamen Factor, den wir wegen der Null auf der rechten Seite der LAPLACE'schen Differentialgleichung weglassen dürfen. Ferner sieht man, daß das dritte Glied (136c) sich gegen den letzten

Summanden des zweiten Gliedes (136b) weghebt. Wenn man den ganzen Ausdruck noch mit  $P_{n\ m}$  multiplicirt und beachtet, dafs

$$n(n+1) - m(m+1) = (n-m)(n+m+1)$$

ist, so erhält man das Ergebnis:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 P_{n\ m}}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} + (n-m)(n+m+1) P_{n\ m} = 0. \quad (137)$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $P_{n\ m}$  als Function der Variablen  $\mu$  mit zwei natürlichen Zahlen  $n$  und  $m$  ( $\leq n$ ) als Parametern. Die im § 39 bereits betrachteten und durch einige Repräsentanten in der Tabelle (132b) veranschaulichten Functionen  $P_{n\ m}$  müssen ihre Integrale sein, es ist aber nicht gesagt, dafs dieser Differentialgleichung hier nicht noch andere Functionen genügen und dafs sie in Bezug auf die Zahlen  $n$  und  $m$  an die Bedingungen ihrer Entstehung gebunden ist.<sup>1)</sup>

Zuerst leiten wir aus (137) eine Beziehung ab zwischen den  $P_{n\ m}$  mit gemeinsamem  $n$ , aber verschiedenem  $m$ , und differenziren zu diesem Zwecke die vorstehende Gleichung nach  $\mu$ . Dies giebt zunächst ohne Zusammenfassung der entstehenden Glieder:

$$\begin{aligned} (1-\mu^2) \frac{d^3 P_{n\ m}}{d\mu^3} - 2\mu \frac{d^2 P_{n\ m}}{d\mu^2} \\ - 2(m+1)\mu \frac{d^2 P_{n\ m}}{d\mu^2} - 2(m+1) \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} \\ + (n-m)(n+m+1) \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} = 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$-2(m+1) + (n-m)(n+m+1) \equiv (n-m-1)(n+m+2).$$

Das Resultat ist also darstellbar in der Form:

$$\left. \begin{aligned} (1-\mu^2) \frac{d^2 \left[ \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} \right]}{d\mu^2} - 2([m+1] + 1) \frac{d \left[ \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} \right]}{d\mu} \\ + (n - [m+1])(n + [m+1] + 1) \left[ \frac{dP_{n\ m}}{d\mu} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Man erkennt, dafs diese Formel dieselbe Bildung besitzt, wie die vorige (137), nur steht hier  $[m+1]$ , wo dort  $m$  stand, und hier

<sup>1)</sup> Erweiterung der Bedeutung von  $n$  und  $m$  später, in § 46.

$\left[ \frac{\partial P_{nm}}{\partial \mu} \right]$ , wo dort  $P_{nm}$  stand. Wir haben also hier die Differentialgleichung für  $P_{n,m+1}$  erhalten, und sehen zugleich, daß die Function  $\frac{dP_{nm}}{d\mu}$  ihr genügt. Wir können deshalb, freilich zunächst noch immer unter Freihaltung eines wegen der linearen Homogenität der Differentialgleichung unbestimmten constanten Factors folgendes Gesetz aufstellen:

$$P_{n,m+1} = \text{const.} \cdot \frac{dP_{nm}}{d\mu}$$

oder

$$P_{nm} = \text{const.} \cdot \frac{dP_{n,m-1}}{d\mu}. \quad (138a)$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Gesetzes finden wir schliesslich

$$P_{nm} = \text{const.} \cdot \frac{d^m P_{n0}}{d\mu^m}. \quad (138b)$$

Es genügt daher Integrale der Differentialgleichung (137) für den Fall  $m = 0$  zu suchen, die Uebrigen ergeben sich dann aus dieser Formel. Die Gleichung lautet für  $m = 0$ :

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P_{n0}}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_{n0}}{d\mu} + n(n+1) P_{n0} = 0. \quad (139)$$

Auch wenn wir noch nicht wüßten, daß es nach ganzen Potenzen von  $\mu$  fortschreitende  $P_{n0}$  gibt (die erste Zeile der Tabelle (132b) zeigt die ersten Vertreter), könnte man versuchen, diese Differentialgleichung zu integrieren, indem man eine Potenzreihe ansetzt von der Form

$$P_{n0} = A_0 + A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + \dots + A_a \mu^a + \dots \quad (140)$$

Dann ist

$$\frac{dP_{n0}}{d\mu} = 1 A_1 + 2 A_2 \mu + 3 A_3 \mu^2 + 4 A_4 \mu^3 + \dots + (a+1) A_{a+1} \mu^a + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{n0}}{d\mu^2} = & 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 \mu + 4 \cdot 3 \cdot A_4 \mu^2 + 5 \cdot 4 \cdot A_5 \mu^3 + \dots \\ & + (a+2)(a+1) A_{a+2} \mu^a + \dots \end{aligned}$$

Ordnet man hiernach den Ausdruck (139) nach Potenzen von  $\mu$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} & [2 \cdot 1 A_2 + n(n+1) A_0] \mu^0 \\ & + [3 \cdot 2 A_3 + \{n(n+1) - 2\} A_1] \mu \\ & + [4 \cdot 3 A_4 + \{n(n+1) - 2 \cdot 1 - 4\} A_2] \mu^2 \end{aligned}$$



Die Bedingung (141) zeigt, daß sowohl unter den Coefficienten des geschlossenen Ausdrucks (142), wie unter den Coefficienten der unendlichen Reihe (143) resp. (144) nur je ein einziger willkürlich gewählt werden kann, während alle anderen dadurch zugleich festgelegt werden. Unsere Lösung enthält also zwei disponible Constanten, stellt daher das vollständige Integral der Differentialgleichung (139) dar.

Je nachdem man eine oder die andere dieser beiden Constanten gleich Null festsetzt, erhält man entweder nur den geschlossenen Ausdruck (142) oder nur die unendliche Reihe (143) oder (144) als particuläre Lösung. Der Vergleich mit den früheren Betrachtungen zeigt sofort, daß nur die ersteren Formen (142) uns die gesuchten Grundformen für die Kugelfunctionen  $P_{n0}$  liefern, von denen in der obersten Zeile der Tabelle (132b) die ersten Vertreter angeführt sind. Die unendlichen Reihen liefern indessen ebenfalls brauchbare Integrale, transcendente Functionen von  $\mu$ , aus welchen man Potentiale eigenartiger Elektrizitätsvertheilungen gewinnen kann, mit denen wir uns später in § 45 beschäftigen wollen.

Als den willkürlich bleibenden Factor der endlichen Reihe vom  $n$ ten Grade wählen wir denjenigen des höchsten Gliedes,  $A_n$ , und berechnen aus ihm die niedrigeren. Dazu müssen wir die Bedingungsleichung (141) umstellen, wie folgt:

$$A_a = \frac{(a+1)(a+2)}{(-n+a)(n+a+1)} A_{a+2}.$$

Gehen wir um eine Ordnungszahl tiefer, schreiben also  $a-2$  an Stelle von  $a$ , so nimmt sie die Form an

$$A_{a-2} = \frac{a(a-1)}{(-n+a-2)(n+a-1)} A_a. \quad (145)$$

Daraus ergibt sich folgende Reihe von Coefficienten

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_n \text{ (frei verfügbar)} \\ A_{n-2} &= \frac{n(n-1)}{(-2)(2n-1)} A_n \\ A_{n-4} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(-2)(-4)(2n-1)(2n-3)} A_n \\ A_{n-6} &= \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{(-1)^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5)} A_n \\ &\vdots \end{aligned} \right\} (145a)$$

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so heisst der niedrigste Coefficient

$$A_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n \cdot (2n-1)(2n-3) \dots (n+3)(n+1)} A_n,$$

ist  $n$  eine ungerade Zahl, so heisst der niedrigste Coefficient:

$$A_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-3)(n-1)(2n-1)(2n-3) \dots (n+4)(n+2)} A_n.$$

Um nun den gesuchten Kugelfunctionen  $P_{n0}$  bestimmte Zahlenwerthe zu geben, die ihnen ja weder durch ihre Herleitung aus Lösungen der LAPLACE'schen Differentialgleichung noch durch die Differentialgleichung (139) eigen sind, da wir dabei immer einen unbestimmten constanten Factor mitzuführen hatten [vgl. den Zahlenfactor  $k_{nm}$  in Gleichung (132) und hier unser  $A_n$ ], so bestimmt man  $A_n$  so, dass die Kugelfunctionen  $P_{n0}$  für den im Pol der Kugelcoordinaten eintretenden Cosinuswerth  $\mu = 1$  alle den Werth 1 annehmen, im Uebrigen daher stets zwischen  $+1$  und  $-1$  liegen müssen, so lange  $\mu$  als Cosinus eines reellen Polarwinkels echt gebrochen bleibt. Dies erreicht man, indem man festsetzt, es solle sein

$$A_n = + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}. \quad (146)$$

Dadurch werden die  $P_{n0}$  zahlenmäfsig angebbare Functionen. Ihre allgemeine Gleichung ist nach den Formeln (142), (145a) und nach der Festsetzung (146) folgende:

$$P_{n0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left\{ \begin{aligned} &\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - + \dots \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Berechnet man die Zahlenwerthe für eine hinreichende Reihe von Werthen  $\mu$ , untersucht auch die Nullstellen, d. h. die Wurzeln  $\mu$  der Gleichung  $n$ ten Grades, welche durch Nullsetzung der geschweiften Klammer entsteht, sucht die Maxima und Minima auf etc., so kommt man zu Verläufen, welche in graphischer Darstellung für die sechs niedrigsten Zahlen  $n$  in den Diagrammen Figur 17 wiedergegeben sind.

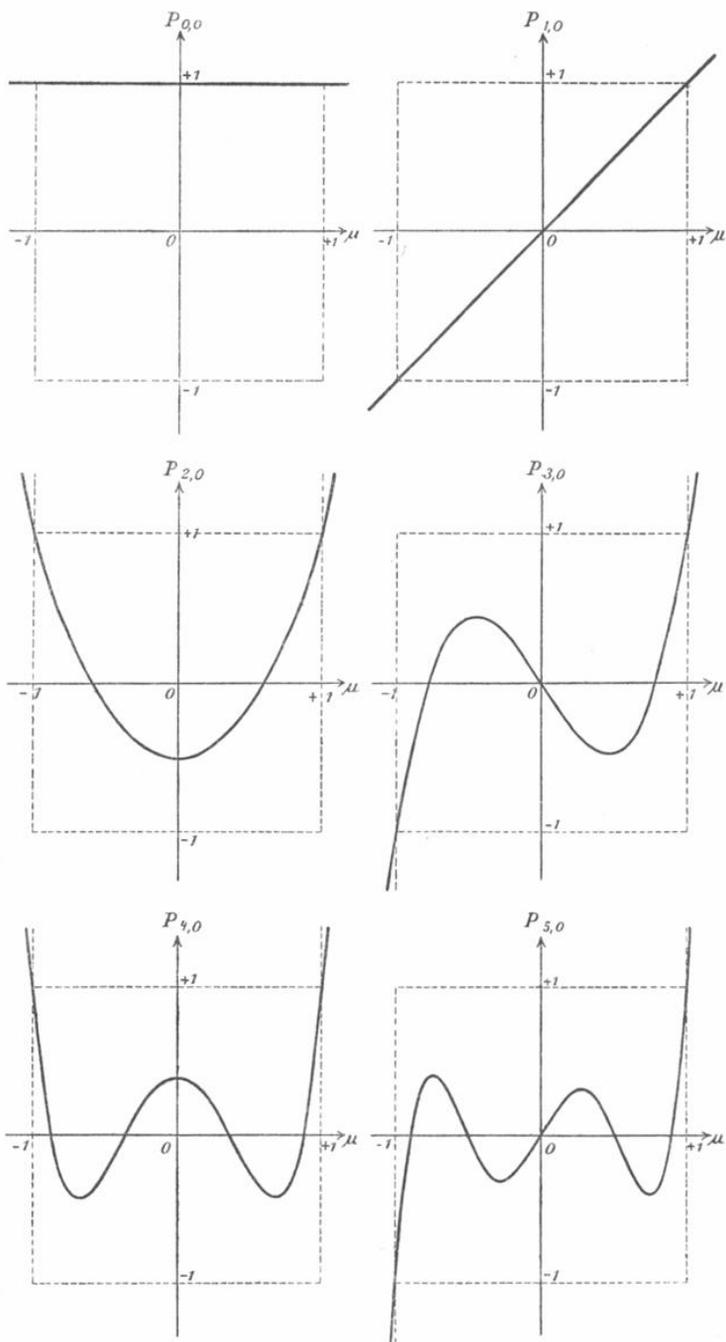


Fig. 17.

Die Gleichungen dieser Curven sind:

$$\begin{aligned}
 P_{0,0} &= 1 \\
 P_{1,0} &= \mu \\
 P_{2,0} &= \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2} \\
 P_{3,0} &= \frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu \\
 P_{4,0} &= \frac{35}{8} \mu^4 - \frac{15}{4} \mu^2 + \frac{3}{8} \\
 P_{5,0} &= \frac{63}{8} \mu^5 - \frac{35}{4} \mu^3 + \frac{15}{8} \mu \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P_{0,0} \\ P_{1,0} \\ P_{2,0} \\ P_{3,0} \\ P_{4,0} \\ P_{5,0} \\ \dots \end{aligned}} \right\} (147 a)$$

Es läßt sich unschwer für das allgemeine  $P_{n,0}$  beweisen, daß es seine  $n$  Nullstellen, seine  $n - 1$  Maxima und Minima,  $n - 2$  Inflexionspunkte, alle reell in dem Intervall  $-1 < \mu < +1$  besitzt, daß die Curven also außerhalb  $\pm 1$  direct in's Unendliche hinauf- resp. hinabsteigen.

Für die  $P_{n,m}$  erhält man ebenfalls feste Zahlenwerthe, wenn man in der zu ihrer directen Berechnung nützlichen Formel (138b) die Constante rechts gleich 1 setzt, also fordert

$$P_{n,m} = \frac{d^m}{d \mu^m} P_{n,0}. \tag{148}$$

Daraus ergeben sich folgende beispielsweise angeführten Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned}
 P_{1,1} &= 1, & P_{2,1} &= 3\mu, & P_{3,1} &= \frac{15}{2} \mu^2 - \frac{3}{2}, & P_{4,1} &= \frac{35}{2} \mu^3 - \frac{15}{2} \mu, & \dots \\
 & & P_{2,2} &= 3, & P_{3,2} &= 15\mu, & P_{4,2} &= \frac{105}{2} \mu^2 - \frac{15}{2}, & \dots \\
 & & & & P_{3,3} &= 15, & P_{4,3} &= 105\mu, & \dots \\
 & & & & & & P_{4,4} &= 105, & \dots
 \end{aligned} \right\} (148a)$$

Die Allgemeinheit der Kugelfunctionen  $K_{n,m}$  mit ihren  $(2n + 1)$  verfügbaren Constanten wird durch diese eindeutigen Zahlenfestsetzungen nicht beschränkt, da wir ja bereits in den Gleichungen (132a) diese als  $A_{n,m}$  und  $B_{n,m}$  oder als  $C_{n,m}$  und  $c_{n,m}$  freigehalten haben; nur die in (131a), (131b) und (132) und in der Tabelle (132b) zugesetzten Factoren  $k_{n,m}$  erhalten vorgeschriebene Zahlenwerthe, die man leicht ermitteln könnte, wo es von Wichtigkeit wäre. Es sei

hier nur angeführt, daß der Factor  $k_{n,n}$  in Gleichung (132 c) den Werth annimmt:

$$k_{n,n} = (-2)^n. \quad (149)$$

§ 42. Darstellung einer willkürlichen Function der Richtungswinkel im Raume durch eine Kugelfunctionenreihe.

Eine wichtige Bedeutung der Kugelfunctionen für die Potentialtheorie besteht, wie aus den bisherigen Ausführungen ersichtlich, darin, daß man aus ihnen auf zwei Weisen: entweder durch Division mit  $r^{n+1}$  oder durch Multiplication mit  $r^n$ , Integrale der LAPLACE'schen Differentialgleichung gewinnen kann, und daß auch Summen mehrerer, vieler, ja convergente Reihen unendlich vieler solcher Gebilde als Potentialfunctionen in ladungsfreien Raumgebieten gedeutet werden können.

Wir kommen jetzt zu einer anderen hervorragenden Eigenschaft der Kugelfunctionen, durch welche in Verbindung mit der vorher erwähnten es möglich wird, jede an einer Kugelfläche willkürlich vorgeschriebene Werthvertheilung stetig durch den inneren und den äußeren Raum so fortzusetzen, wie dies von dem Potential einer elektrischen Flächenbelegung der Kugel gefordert werden muß. Diese neue Eigenschaft ist folgende: Man kann durch die convergirende Summe einer eventuell unendlichen Reihe von Kugelfunctionen in einer der beiden Normalformen (132 a), also durch einen Ausdruck von der Form

$$f(\mu, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n,m} \sqrt{1 - \mu^2}^m (A_{n,m} \cos m \eta + B_{n,m} \sin m \eta) \quad (150)$$

oder von der gleichbedeutenden Form

$$f(\mu, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n,m} \sqrt{1 - \mu^2}^m \cdot C_{n,m} \cos(m \eta - e_{n,m}) \quad (150 a)$$

jeder willkürlich vorgeschriebenen Werthvertheilung einer Function der beiden Polarcordinaten  $\vartheta$  und  $\eta$ , oder was dasselbe bedeutet, jeder Function von  $\mu$  und  $\eta$  beliebig nahe kommen, wobei natürlich der Variable  $\mu$  auf das Intervall  $-1$  bis  $+1$  (die Poldistanz  $\vartheta$  liegt zwischen  $0$  und  $\pi$ ), die Variable  $\eta$  auf einen einmaligen Umkreis, sagen wir auf das Intervall  $0$  bis  $2\pi$  zu beschränkt ist. Um Bedenklichkeiten gegen diesen Ansatz zu entgehen, wollen wir nur annehmen — was in physikalischem Sinne immer zulässig sein

dürfte —, daß Unstetigkeiten bei dieser vorgeschriebenen Function entweder nicht vorkommen oder doch als sehr steile aber continuirliche Uebergänge angesehen werden dürfen, und daß ferner die vorgeschriebenen Werthe für keine Richtung des Raumes unendlich werden. Die Eindeutigkeit der Function ist eine selbstverständliche Vorbedingung, da die Kugelfunctionen einzeln, also auch in Summe eindeutige Werthe liefern. Vom Radiusvector  $r$  der Polarcoordinaten müssen die durch (149) darstellbaren Functionen natürlich auch unabhängig sein, wie es die Kugelfunctionen sind. Man kann sich daher die willkürliche Function dadurch versinnlichen, daß man um den Nullpunkt eine Kugel von beliebigem Radius legt und auf jeder Stelle ihrer Oberfläche topographisch den Werth verzeichnet, welcher auf dem dadurch betroffenen Strahl herrschen soll. Man könnte etwa so, wie auf Landkarten die Darstellung der Hebungen und Senkungen des Terrains durch Isohypsen üblich ist, die Richtungen, in denen die willkürliche Function kein Gefälle zeigt, durch Linienschaaren angeben, welche sich nirgends durchschneiden können und die Stellen der Maxima und Minima ringförmig umgeben. Dieselbe Darstellung ist auch zur Veranschaulichung der einzelnen Kugelfunctionen nützlich, welche jede eine ganz bestimmte regelmäßige Werthvertheilung besitzt. Die Stellen, wo eine einzelne Kugelfunction gleich Null wird, liegen auf Parallelkreisen und auf äquidistanten Meridianen, deren Anzahl durch  $n$  und  $m$  bestimmt wird. In den einzelnen hierdurch abgegrenzten Feldern sind die Werthe abwechselnd positiv und negativ, um ein in der Mitte jedes Feldes liegendes Maximum oder Minimum angeordnet.

Daß man durch Superposition vieler solcher Vertheilungen unter Verfügung über zwei Reihen von Coefficienten ( $A$  und  $B$  oder auch  $C$  und  $c$ ) eine große Mannigfaltigkeit herstellen kann, leuchtet ein; daß man aber jedem gewünschten Verlauf beliebig nahe kommen kann, bedarf vom streng mathematischen Standpunkt eines Beweises, nämlich eines Nachweises der Convergenz der unendlichen Reihe (150) gegen die geforderten Functionswerthe. DIRICHLET und auf anderem Wege Sir W. THOMSON haben diesen Beweis geführt. Die Sache liegt analog wie bei den FOURIER'schen Reihen, nur ist das Problem hier wegen der zwei Variablen  $\mu$  und  $\eta$  noch complicirter.

Wir wollen uns hier damit begnügen, zu zeigen, wie man für jede willkürlich vorgeschriebene Function  $f(\mu, \eta)$  die zwei Reihen von Coefficienten thatsächlich berechnen kann.

Von den beiden Formen (150) und (150 a) ist die zweite die

anschaulichere, weil sie zeigt, daß der Einfluß oder die Stärke eines einzelnen Gliedes der Reihe nur von einer Amplitude  $C_{nm}$  bestimmt wird, während von der Phasenconstante  $e_{nm}$  nur die Lage der Nullmeridiane der einzelnen Kugelfunction abhängt. Die eigenartige Werthvertheilung der einzelnen Kugelfunction erscheint nämlich als drehbar um die Polaraxe, ihre Stellung wird durch  $e_{nm}$  festgelegt. Für die Auswerthung der Coefficienten ist aber die erstere Schreibweise (150) mit zwei gleichartigen Reihen von Amplituden  $A_{nm}$  und  $B_{nm}$  die allein geeignete. Man kann ja nachträglich, nachdem man die  $A$  und  $B$  gefunden hat, leicht die  $C$  und  $e$  daraus bilden.

Wir wollen nun den Werth eines bestimmten Coefficienten  $A_{t,i}$  berechnen. Zu dem Zwecke erweitern wir die Gleichung (150) mit

$$P_{t,i} \sqrt{1 - \mu^2}^i \cos i \mu,$$

d. h. mit eben dem elementaren Bestandtheile jener unendlichen Doppelsumme von Kugelfunctionen (150), welcher durch den gesuchten Coefficienten  $A_{t,i}$  angeführt wird. Sodann multipliciren wir noch mit dem Flächenelement der Einheitskugel und integriren den gewonnenen Ausdruck über diese ganze Fläche.

Das Flächenelement hat, in den Polarcordinaten  $\vartheta$  und  $\mu$  ausgedrückt, den Werth

$$d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\eta$$

und die Integration erstreckt sich für den Polwinkel  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi$ , für den Längenwinkel  $\eta$  von 0 bis  $2\pi$ .

Da hier nun  $\mu = \cos \vartheta$  als Variable statt  $\vartheta$  eintritt, und

$$d\mu = -\sin \vartheta d\vartheta$$

ist, gilt

$$d\sigma = -d\mu \cdot d\eta$$

und die Variable  $\mu$  läuft in dem Integral von  $+1$  bis  $-1$ . Der Werth der Oberfläche der Einheitskugel ist also

$$\iint_{00}^{\pi 2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\eta = \int_{+1}^{-1} \int_0^{2\pi} (-d\mu) \cdot d\eta = \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

Die vorher beschriebenen Operationen an (150) führen also zu der Formel:

$$= \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{fi} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{i+m} (A_{n,m} \cos i \eta \cos m \eta + B_{n,m} \cos i \eta \sin m \eta) \right\}. \quad (151)$$

Dabei sind bereits die von den laufenden Ordnungszahlen  $n$ ,  $m$  unabhängigen Factoren mit den festen Zahlen  $f$ ,  $i$  unter das Doppelsummenzeichen gesteckt, eine Operation, die man sich auch bei unendlichen Summen stets erlauben darf. Nun aber machen wir eine weitere Umformung, welche nur erlaubt ist, wenn sowohl vorher wie nachher unbedingt convergente Reihen im Spiele sind: Wir vertauschen die Reihenfolge der Operationen  $\iint$  und  $\sum \sum$ , führen also die Integration über die Kugelfläche gliedweise an den einzelnen Summanden der Doppelsumme aus. Bezeichnen wir der Kürze wegen die linke Seite der vorstehenden Gleichung (151) mit  $L$ , so folgt:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \int_{-1}^{+1} d\mu P_{fi} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{i+m} \cdot \int_0^{2\pi} d\eta (A_{n,m} \cos i \eta \cdot \cos m \eta + B_{n,m} \cos i \eta \sin m \eta) \right\}. \quad (151 a)$$

Hierbei ist das Doppelintegral über jeden einzelnen Summanden, entsprechend der Abhängigkeit seiner einzelnen Factoren von  $\mu$  allein und von  $\eta$  allein, bereits in das Product zweier einfacher Integrale zerlegt. Letztere sind nun für jedes Zahlenpaar  $n \geq m$ , und für das feste Zahlenpaar  $f \geq i$  aufzusuchen.

Das hintere Integral über den Längenwinkel  $\eta$  ist mit einziger Ausnahme des Falles  $m = i$  für alle anderen Zahlen  $m$  gleich Null. In dem Falle  $m = i > 0$  hat es folgenden Werth:

$$\int_0^{2\pi} d\eta (A_{ni} \cos^2 i \eta + B_{ni} \cos i \eta \sin i \eta) = \pi \cdot A_{ni}, \quad (152)$$

welcher aber für  $m = i = 0$  durch den abweichenden Werth

$$\int_0^{2\pi} d\eta A_{n0} = 2\pi \cdot A_{n0} \quad (152 a)$$

zu ersetzen ist.

Diese Formeln (152) sind auf elementarste Weise herleitbar und kommen in gleicher Weise bei der Berechnung der Coefficienten der FOURIER'schen Reihe zur Anwendung.

Von der Doppelreihe (151) bleibt also nur eine einfache Reihe über die Zahlen  $n$  bestehen, behaftet mit den Factoren  $\pi A_{ni}$  oder im Sonderfall mit  $2\pi A_{n0}$ :

$$L = *) \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{ni} \int_{-1}^{+1} d\mu P_{ti} P_{ni} \cdot (1 - \mu^2)^i \right\}. \quad (153)$$

\*) Für  $i=0$  muß  $2\pi$  statt  $\pi$  eintreten.

Zu bemerken ist, daß jetzt nur noch die Producte von je zwei  $P$ -Functionen mit gleichem  $m=i$  vorkommen, und daß wegen  $i+m=2i$  die Irrationalität von  $\sqrt{1-\mu^2}$  aufgehoben ist.

Diese  $\mu$ -Integrale in (153) sind nun, mit Ausnahme des Falles  $n=i$ , ebenfalls für alle Zahlen  $n$  gleich Null. Zum Beweise dessen können wir uns freilich nicht auf elementare Integralformeln berufen, wir müssen vielmehr den Beweis auf Grund der Definitionen der  $P_{n,m}$  führen.

Die erste Einführungsform (132) dieser Functionen würde ungeschickt zu diesem Zwecke sein. Dagegen kommt man bequem zum Ziele, wenn man die Differentialgleichung (137) für die  $P_{n,m}$  heranzieht. Diese lautet für  $m=i$ :

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P_{ni}}{d\mu^2} - 2(i+1)\mu \frac{dP_{ni}}{d\mu} + (n-i)(n+i+1)P_{ni} = 0.$$

Um im letzten Gliede den Integrandus aus (153) herzustellen, erweitern wir die Gleichung mit  $P_{ti}(1-\mu^2)^i$ . Dadurch entsteht aber zugleich in den beiden vorderen Gliedern ein vollständiger Differentialquotient, denn es ist:

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{dP_{ni}}{d\mu} \right] = (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{d^2 P_{ni}}{d\mu^2} - 2\mu(i+1)(1 - \mu^2)^i \frac{dP_{ni}}{d\mu}.$$

Unsere Differentialgleichung lautet also nun:

$$P_{ti} \cdot \frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{dP_{ni}}{d\mu} \right] + (n-i)(n+i+1)P_{ni} P_{ti} (1 - \mu^2)^i = 0.$$

Nun multipliciren wir mit  $d\mu$  und integriren von  $-1$  bis  $+1$ .

Dann kann man das vordere Integral durch partielle Integration umformen

$$\int P_{ti} \left[ (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{dP_{ni}}{d\mu} \right] d\mu \\ = \overline{P_{ti} (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{dP_{ni}}{d\mu}} - \int (1 - \mu^2)^{i+1} \frac{dP_{ni}}{d\mu} \frac{dP_{ti}}{d\mu} d\mu.$$

Der integrierte Theil verschwindet wegen  $(1 - \mu^2)$  an beiden Grenzen. Im Restintegral ist noch wegen Gleichung (138a) und wegen der am Schluß von § 41 gemachten Festsetzung der Constanten in dieser Gleichung:

$$\frac{dP_{ni}}{d\mu} = P_{n, i+1}, \quad \frac{dP_{ti}}{d\mu} = P_{t, i+1}.$$

Wir erhalten also das Resultat:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} P_{n, i+1} \cdot P_{t, i+1} (1 - \mu^2)^{i+1} d\mu \\ & = (n - i)(n + i + 1) \int_{-1}^{+1} P_{n, i} \cdot P_{t, i} (1 - \mu^2)^i d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Da  $n$  und  $t$  zwei beliebige Ordnungszahlen sind, so muß diese Gleichung auch gelten, wenn man  $n$  und  $t$  vertauscht. Dabei bleiben aber beide Integrale unverändert, nur der Zahlenfactor auf der rechten Seite nimmt jetzt den Ausdruck  $(t - i)(t + i + 1)$  an, ändert also seinen Werth, falls nicht gerade  $t = n$  ist. Daraus ergibt sich aber nothwendig, daß beide Integrale verschwinden müssen, wenn  $t$  und  $n$  verschieden sind:

$$\int_{-1}^{+1} P_{ni} \cdot P_{ti} (1 - \mu^2)^i d\mu = 0 \quad \text{für } n \neq t. \quad (155)$$

Von der Summe über  $n$  in der Formel (153) bleibt also nur das eine Glied  $n = t$  übrig:

$$L = *) \pi \cdot A_{ti} \cdot \int_{-1}^{+1} P_{ti}^2 (1 - \mu^2)^i d\mu. \quad (156)$$

\*) Für  $i = 0$  muß  $2\pi$  statt  $\pi$  eintreten.

Dieses eine Glied kann nicht verschwinden, da das Integral über einen durchweg positiven Werth erstreckt ist, diesen Betrag zu ermitteln, ist unsere nächste Aufgabe.

Man kann die Beziehung (154), nachdem man darin  $n = f$  gesetzt hat, als eine Recursionsformel für diese Integrale entweder bei steigendem oder sinkendem Index  $i$  benutzen. Wir kommen schneller zum Ziele, wenn wir steigende  $i$  benutzen. Nun kann der zweite Index höchstens den Werth des ersten Index  $f$  erreichen. Wir setzen also in der Formel (154) successive  $i, i + 1, i + 2, \dots$  bis  $f - 1$ , und erhalten:

$$\int_{-1}^{+1} P_{f,i}^2 (1 - \mu^2)^i d\mu = \frac{1}{(f-i)(f+i+1)} \int_{-1}^{+1} P_{f,i+1}^2 (1 - \mu^2)^{i+1} d\mu$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{f,i+1}^2 (1 - \mu^2)^{i+1} d\mu = \frac{1}{(f-i-1)(f+i+2)} \int_{-1}^{+1} P_{f,i+2}^2 (1 - \mu^2)^{i+2} d\mu$$

. . . . .

$$\int_{-1}^{+1} P_{f,f-1}^2 (1 - \mu^2)^{f-1} d\mu = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot f} \int_{-1}^{+1} P_{f,f}^2 (1 - \mu^2)^f d\mu .$$

Durch Multiplication der ganzen Schaar folgt:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} P_{f,i}^2 (1 - \mu^2)^i d\mu \\ & = \frac{1}{[1 \cdot 2 \dots (f-i)] [(f+i+1)(f+i+2) \dots 2f]} \int_{-1}^{+1} P_{f,f}^2 (1 - \mu^2)^f d\mu . \end{aligned} \right\} (156a)$$

In dem rechts übrig gebliebenen Integral ist  $P_{f,f}^2$  nur ein constanter Factor. Es ist nämlich

$$P_{f,f} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2f - 1).$$

Dies erkennt man aus (148), wenn man bedenkt, daßs beim  $n$ -fachen Differenziren des Ausdrucks  $P_{n,0}$  in (147) nur noch die Spuren des höchsten Gliedes  $\mu^n$  übrig bleiben, und daßs

$$\frac{d^n (\mu^n)}{d\mu^n} = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$$

ist. Man sieht es auch aus den in (148a) angeführten ersten Vertretern

$$P_{1,1} = 1, \quad P_{2,2} = 3, \quad P_{3,3} = 15, \quad P_{4,4} = 105, \dots$$

Den constanten Factor kann man aus dem Integrale herausziehen und es bleibt schließlicly nur folgendes Integral zu berechnen übrig

$$\int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^f d\mu.$$

Da müssen wir nun, nachdem wir bei der höchsten Stufe  $f$  die  $P^2$  aus dem Integral hinausgeworfen haben, mit einer recurrenten Formel wieder hinunter steigen. Diese Formel gewinnt man so: Es ist:

$$d[(1 - \mu^2)^f \cdot \mu] = (1 - \mu^2)^f d\mu - 2f(1 - \mu^2)^{f-1} \mu^2 d\mu$$

oder wenn man  $\mu^2 \equiv 1 - (1 - \mu^2)$  setzt

$$d[(1 - \mu^2)^f \cdot \mu] = (2f + 1) \cdot (1 - \mu^2)^f d\mu - 2f(1 - \mu^2)^{f-1} d\mu.$$

Dies von  $-1$  bis  $+1$  integrirt, giebt:

$$\frac{[(1 - \mu^2)^f \cdot \mu]_{-1}^{+1}}{-1} = (2f + 1) \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^f d\mu - 2f \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^{f-1} d\mu.$$

Die linke Seite verschwindet an beiden Grenzen, die Integrale rechts sind von der gesuchten Art. Man findet daher:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^f d\mu &= \frac{2f}{2f + 1} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^{f-1} d\mu \\ \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^{f-1} d\mu &= \frac{2f - 2}{2f - 1} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^{f-2} d\mu. \\ &\dots \dots \dots \\ \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^2 d\mu &= \frac{4}{5} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu \\ \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu &= \frac{2}{3} \int_{-1}^{+1} d\mu = \frac{2}{3} \cdot 2. \end{aligned}$$

Durch Multiplication der Schaar ergiebt sich:

$$\int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2)^f d\mu = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots (2f - 2) \cdot 2f}{3 \cdot 5 \dots (2f - 1) \cdot (2f + 1)}.$$

Dazu tritt nun der Factor:

$$P_{f+1}^2 = [1 \cdot 3 \dots (2f - 1)]^2.$$

Die ungeradzahligten Nennerfactoren heben sich also mit Ausnahme des letzten fort. Es bleibt im Nenner nur  $(2f + 1)$  stehen. Im Zähler ist die erste Potenz der ungeraden Zahlen bis  $(2f - 1)$  übrig geblieben. Dazu gesellt sich aber das Product der geraden Zahlen bis  $2f$ , so daß der Zähler das Product aller Zahlen  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2f - 1) \cdot 2f$  enthält. Schließlich ist noch ein einzelner Factor 2 vorhanden. Es ist mithin:

$$\int_{-1}^{+1} P_{f+1}^2 (1 - \mu^2)^f d\mu = \frac{2}{2f + 1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2f - 1) \cdot 2f.$$

Dies haben wir nun in (156a) einzusetzen. Dort steht im Nenner ebenfalls eine Zahlenreihe, beginnend mit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$  und schließend mit  $(2f - 1) \cdot 2f$ , aber sie hat in der Mitte eine Lücke. Es fehlen ihr die Factoren

$$(f - i + 1) \cdot (f - i + 2) \dots (f + i - 1) \cdot (f + i).$$

Während sich also die vorhandenen Factoren gegen die entsprechenden der vollständigen Zahlenfolge im Zähler heben, bleiben die Zahlen der Lücke im Zähler ungehoben stehen, so daß wir die Schlusformel finden:

$$\int_{-1}^{+1} P_{f+i}^2 \cdot (1 - \mu^2)^i d\mu = \frac{2}{2f + 1} \cdot (f - i + 1)(f - i + 2) \dots (f + i). \quad (156b)$$

Für  $i = 0$  versagt diese Schreibweise. Nämlich für diesen Fall zeigt die Zahlenreihe im Nenner von (156a) gar keine Lücke, es folgt vielmehr auf  $(f - i) = f$  unmittelbar  $(f + i + 1) = f + 1$ . Deshalb hat dann obige Schreibweise der Lückenzahlen keinen Sinn, vielmehr hebt sich dann:  $\frac{(2f)!}{(2f)!} = 1$  und es ist

$$\int_{-1}^{+1} P_{f,0}^2 d\mu = \frac{2}{2f + 1}. \quad (156c)$$

Für  $i = 1$  bestehen bereits zwei Lückenzahlen  $f \cdot (f + 1)$ , welche auch in (156b) richtig auftreten.

Wir können nun zu unserer Hauptaufgabe schreiten, den Coefficienten  $A_{\mathfrak{t}i}$  auszudrücken. Wegen der Besonderheiten, welche der Fall  $i = 0$  in zwei Hinsichten aufwies, wollen wir diesen zunächst ausnehmen. Die Formel (156) unter Benützung von (156b) liefert jetzt:

$$L = \frac{2\pi}{2\mathfrak{f} + 1} (\mathfrak{f} - i + 1)(\mathfrak{f} - i + 2) \dots (\mathfrak{f} + i) \cdot A_{\mathfrak{t}i}.$$

Isoliren wir  $A_{\mathfrak{t}i}$  und setzen für  $L$  wieder den ausführlichen Ausdruck ein, welcher die linke Seite der Gleichung (151) bildet, so erhalten wir das Resultat:

$$A_{\mathfrak{t}i} = \frac{2\mathfrak{f} + 1}{2\pi \cdot (\mathfrak{f} - i + 1)(\mathfrak{f} - i + 2) \dots (\mathfrak{f} + i)} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta f(\mu, \eta) P_{\mathfrak{t}i} \sqrt{1 - \mu^2}^i \cos i\eta. \quad (157)$$

Für den Fall  $i = 0$  folgt unter Beachtung der Besonderheiten ( $4\pi$  statt  $2\pi$  und Fehlen der Lückenzahlen)

$$A_{\mathfrak{t},0} = \frac{2\mathfrak{f} + 1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta f(\mu, \eta) P_{\mathfrak{t},0}. \quad (157a)$$

Besonders zu erwähnen ist noch das Anfangsglied:

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta f(\mu, \eta), \quad (157b)$$

welches übrigens in richtiger Form aus  $A_{\mathfrak{t}0}$  folgt, da  $P_{00} = 1$  gesetzt ist. Da  $4\pi$  die Oberfläche der Einheitskugel mißt, sieht man, daß dieses  $A_{00}$  nichts Anderes ist, als der Mittelwerth der willkürlichen Function  $f(\mu, \eta)$ .

Die Berechnung der anderen Coefficientenschaar  $B_{ni}$  geschieht in ganz analoger Weise. Suchen wir ein bestimmtes  $B_{\mathfrak{t}i}$ , so erweitern wir die Gleichung (150) mit

$$P_{\mathfrak{t}i} \cdot \sqrt{1 - \mu^2}^i \cdot \sin i\eta$$

und verfahren genau so weiter, wie vorher.

An Stelle der Gleichung (152) tritt jetzt

$$\int_0^{2\pi} d\eta (A_{ni} \sin i\eta \cos i\eta + B_{ni} \sin^2 i\eta) = \pi B_{ni}.$$

Um den (152a) entsprechenden Sonderfall  $i = 0$  haben wir uns hier nicht zu kümmern, da Glieder mit den Coefficienten  $B_{n0}$  nicht vorkommen.

Das Resultat, entsprechend (157) wird

$$B_{\tau i} = \frac{2\tau + 1}{2\pi(\tau - i + 1)(\tau - i + 2)\dots(\tau + i)} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\eta f(\mu, \eta) P_{\tau i} \sqrt{1 - \mu^2}^i \sin i\eta. \quad (158)$$

### § 43. Einfaches Beispiel für die Darstellung einer Function von $\mu$ durch eine Kugelfunctionen-Reihe.

Um die Brauchbarkeit der vorstehenden Formeln für die Berechnung der Coefficienten einer Kugelfunctionen-Reihe zu zeigen, wählen wir ein einfaches Beispiel, welches zugleich noch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit ist. Wir legen um den Nullpunkt eine Kugelfläche vom Radius  $R_1$  und bestimmen auf der Polaraxe im Abstand  $R_2$  einen festen Punkt. Wir wollen dabei, um eine bestimmte Vorstellung zu haben,  $R_2 > R_1$  annehmen, so daß der feste Punkt außerhalb der Kugel liegt. Die Entfernung  $\varrho$  dieses Punktes von den verschiedenen Stellen der Kugelfläche ist dann unabhängig von deren Längenwinkel  $\eta$ , alle Orte, die auf dem gleichen Parallelkreise liegen, besitzen gleiche Entfernung von jenem auf der verlängerten Polaraxe festgelegten Punkte. Von der Poldistanz  $\vartheta$  hängt diese Entfernung aber ab nach der bekannten Formel

$$\varrho = \sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1 \cos \vartheta},$$

in welcher  $R_1$  und  $R_2$  als Constanten, und  $\cos \vartheta = \mu$  als Variable erscheint.

Wir stellen uns nun die Aufgabe den reciproken Werth dieses Abstandes durch eine Kugelfunctionen-Reihe auszudrücken. Zu dem Zwecke haben wir in die Schlufsformeln (157, a, b) und (158) einzufügen:

$$f(\mu, \eta) = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu}}. \quad (159)$$

Wegen der Unabhängigkeit unserer Function von  $\eta$  werden alle Coefficienten  $A_{\tau i}$  und  $B_{\tau i}$  für  $i > 0$  verschwindend, denn in den Formeln (157) und (158) bleibt von der Integration über den Längenwinkel nur übrig

$$\int_0^{2\pi} \cos i\eta \, d\eta = \int_0^{2\pi} \sin i\eta \, d\eta = 0.$$

Wir brauchen daher nur die Reihe der Coefficienten  $A_{t,0}$  zu berechnen; die Formel (157 a) vereinfacht sich, indem  $\int_0^{2\pi} d\eta = 2\pi$  ist, und lautet:

$$A_{t,0} = \frac{2t+1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{P_{t,0}}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu}}. \quad (159 a)$$

Da  $P_{t,0}$  bekannte ganze Functionen von  $\mu$  sind [(vgl. Gleichung (147)], so kann man hiernach die Coefficienten der Reihe nach ausrechnen. Man wird auf Integraltypen von folgender Form geführt:

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^\alpha}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu}}.$$

Für diese kann man durch partielle Integration eine Reductionsformel für sinkendes  $\alpha$  aufstellen. Dabei erst wird es von Wichtigkeit, daß wir  $R_2 > R_1$  vorausgesetzt haben. Während nämlich die bisherigen Ausdrücke durchaus symmetrisch nach  $R_1$  und  $R_2$  gebaut sind, werden diese Integrale unsymmetrisch.

Wir wollen hier nur die Ausrechnung der niedrigsten Glieder der Reihe andeuten. Die niedrigsten Vertreter der  $P_{t,0}$  findet man in den Gleichungen (147 a), die in Frage kommenden Integrale lauten, wenn man als Abkürzung der Quadratwurzel das Zeichen  $\varrho$  setzt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\varrho} &= \frac{2}{R_2}, & \int_{-1}^{+1} \frac{\mu d\mu}{\varrho} &= \frac{2}{3} \frac{R_1}{R_2^2}, \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2 d\mu}{\varrho} &= \frac{2}{3} \frac{1}{R_2} + \frac{4}{15} \frac{R_1^2}{R_2^3}, & \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^3 d\mu}{\varrho} &= \frac{2}{5} \frac{R_1}{R_2^2} + \frac{4}{35} \frac{R_1^3}{R_2^4}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Danach ist beispielsweise:

$$\begin{aligned} A_{3,0} &= \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu}{\varrho} = \frac{35}{4} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^3}{\varrho} - \frac{21}{4} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu}{\varrho} \\ &= \frac{35}{4} \cdot \left( \frac{2}{5} \frac{R_1}{R_2^2} + \frac{4}{35} \frac{R_1^3}{R_2^4} \right) - \frac{21}{4} \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{R_1}{R_2^2} \right) = 1 \cdot \frac{R_1^3}{R_2^4}. \end{aligned}$$

Ebenso leicht wird man sich überzeugen, daß

$$A_{0,0} = \frac{1}{R_2}$$

$$A_{1,0} = \frac{R_1}{R_2^2}$$

$$A_{2,0} = \frac{R_1^2}{R_2^3}$$

und wenn auch das Bildungsgesetz des allgemeinen Coefficienten hier nicht streng abgeleitet ist, kann man es durch Analogieschluss errathen:

$$A_{t,0} = \frac{R_1^t}{R_2^{t+1}}.$$

Die Kugelfunctionen-Reihe, d. h. so viel wie in unserem einfachen Falle von der Formel (150) übrig bleibt, lautet hiernach:

$$\frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_1^n}{R_2^{n+1}} \cdot P_{n,0} \quad \text{für } R_2 > R_1. \quad (159b)$$

Wenn wir mit dem größeren  $R_2$  erweitern, und die Zeichen  $\varrho$  und  $\sum$  durch die ausführliche Schreibart ersetzen, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu}} &= P_{0,0} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^1 P_{1,0} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 P_{2,0} \\ &+ \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 P_{3,0} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (159c)$$

Nun können wir auch gleich die entgegengesetzte Annahme, daß nämlich der feste Punkt auf der Polaraxe innerhalb der Kugelfläche liegt, verfolgen. Wir brauchen dann den festen Abstand auf der Polaraxe nur  $R_1$  und den Kugelradius  $R_2$  zu nennen; dann ist wieder  $R_1 < R_2$  und sämtliche vorstehende Formeln bleiben ungeändert in Gültigkeit, nur haben  $R_1$  und  $R_2$  ihre geometrische Bedeutung für das Problem vertauscht. Den singulären Fall  $R_1 = R_2$  wollen wir vorsichtshalber ausschließen, da dann die zu entwickelnde Function (159) im Pole für  $\mu = 1$  unendlich wird, und die Convergenz der unendlichen Reihe mindestens zweifelhaft erscheint. Es ist indessen nicht ausgeschlossen, daß sie auch dann noch für echt gebrochenes  $\mu$  zulässig ist.

Dieses Resultat (159c) ist nicht nur als eine Coefficientenberechnung der Kugelfunctionen-Reihe mit höchst einfach geformtem Ergebnifs interessant, sondern auch dadurch, dafs man die linke Seite, unabhängig vom vorigen, durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes direct in eine Potenzreihe des echten Bruches  $\frac{R_1}{R_2}$  entwickeln kann. Diese Entwicklung mufs dann mit unserem Resultat (159c) identisch sein, da dieses, wie sich zeigt, ebenfalls als Potenzreihe von  $\frac{R_1}{R_2}$  erscheint. Bei unserer Herleitung muften die  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^a$  als Coefficienten der Kugelfunctionen-Reihe erst aufgefunden werden, während die  $P_{a,0}$  uns bekannte Normalfunctionen waren. Bei der Entwicklung in eine Potenzreihe hingegen sind die  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^a$  die bekannten Normalfunctionen, während die zugehörigen Coefficienten, welche mit unseren  $P_{a,0}$  identisch sein müssen, erst gefunden werden müssen.

Diese doppelte Bedeutung der Entwicklung (159c) ist für uns wichtig. Wir haben nämlich die Kugelfunctionenreihe aufgestellt, ohne uns streng mathematisch von ihrer Convergenz zu überzeugen. Wir konnten nur sagen: Unter der Voraussetzung, dafs solche Reihen möglich sind, müssen ihre Coefficienten die Form (157) und (158) haben. Von der Potenzreihe des Binomialsatzes ist aber wohl bekannt, dafs sie convergirt, so lange  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$  ein echter Bruch ist. Ferner sieht man, dafs die Reihenentwicklung (159c), als Potenzreihe aufgefafst, zu einer vom Früheren unabhängigen Definition der Kugelfunctionen  $P_{n,0}$  führt, und zwar zu einer solchen, bei welcher nicht erst unbestimmte Factoren geeignet festzusetzen sind, sondern welche sogleich eindeutige Zahlenwerthe liefert.

Dieser Weg ist zuerst von LAPLACE eingeschlagen worden. Wegen der Bedeutsamkeit der merkwürdigen Beziehung wollen wir diese Potenzreihenentwicklung hier ebenfalls noch ausführen. Man kommt am leichtesten zum Ziele, wenn man mit imaginären Exponentialfunctionen rechnet

$$\mu = \cos \vartheta = \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}).$$

Dann zerfällt der Radicandus  $\varrho^2$  in zwei lineare, conjugirt complexe Factoren:

$$R_2^2 + R_1^2 - 2 R_2 R_1 \mu = (R_2 - R_1 e^{i\vartheta})(R_2 - R_1 e^{-i\vartheta}).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung für den echten Bruch

$$\frac{R_1}{R_2} = \alpha,$$

so wird die linke Seite von (159 a):

$$\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2 R_2 R_1 \mu}} = (1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Der binomische Satz liefert:

$$(1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{i\vartheta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 e^{2i\vartheta} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^3 e^{3i\vartheta} + \dots$$

$$(1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{-i\vartheta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 e^{-2i\vartheta} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^3 e^{-3i\vartheta} + \dots$$

Beide unendlichen Reihen convergiren absolut, da der Modul der complexen Zahlen  $\alpha e^{\pm i\vartheta} < 1$  ist. Darum kann man das Product der linken Seiten durch gliedweise Multiplication der rechten Seiten finden, wie folgt:

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} [\alpha (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1}{2} \alpha^2] \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left[ \alpha^2 (e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) + \frac{1}{2} \cdot \alpha^3 (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^4 \right] \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left[ \alpha^3 (e^{3i\vartheta} + e^{-3i\vartheta}) + \frac{1}{2} \alpha^4 (e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^5 (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^6 \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die imaginären Exponentialgrößen vereinigen sich durchweg zu den reellen Werthen der zweifachen Cosinus der Vielfachen von  $\vartheta$ .

Ordnen wir nach Potenzen von  $\alpha$  und bezeichnen zur Abkürzung die auftretenden Zahlenfactoren durch Symbole von der Form:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \left[ \frac{5}{6} \right],$$

so kommt:

$$\begin{aligned}
 (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = & 1 \\
 & + \alpha \cdot 2 \left[ \cdot \frac{1}{2} \right] \cos \vartheta \\
 & + \alpha^2 \cdot 2 \left\{ \left[ \cdot \frac{3}{4} \right] \cos 2 \vartheta + \frac{1}{2} \left[ \cdot \frac{1}{2} \right]^2 \right\} \\
 & + \alpha^3 \cdot 2 \left\{ \left[ \cdot \frac{5}{6} \right] \cos 3 \vartheta + \left[ \cdot \frac{1}{2} \right] \left[ \cdot \frac{3}{4} \right] \cos \vartheta \right\} \\
 & + \alpha^4 \cdot 2 \left\{ \left[ \cdot \frac{7}{8} \right] \cos 4 \vartheta + \left[ \cdot \frac{1}{2} \right] \left[ \cdot \frac{5}{6} \right] \cos 2 \vartheta + \frac{1}{2} \left[ \cdot \frac{3}{4} \right]^2 \right\} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Allgemeines Glied:

$$\begin{aligned}
 + \alpha^n \cdot 2 \left\{ \left[ \cdot \frac{2n-1}{2n} \right] \cos n \vartheta + \left[ \cdot \frac{1}{2} \right] \left[ \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \right] \cos (n-2) \vartheta \right. \\
 \left. + \left[ \cdot \frac{3}{4} \right] \left[ \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \right] \cos (n-4) \vartheta + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Dieses Polynom ist für ungerades  $n$  fortzusetzen, bis das Glied mit  $\cos \vartheta$  (einfacher Winkel) erreicht ist. Für gerades  $n$  schließt der Ausdruck mit dem von  $\vartheta$  unabhängigen reinen Zahlengliede

$$\frac{1}{2} \left[ \cdot \frac{n-1}{n} \right]^2$$

ab, welchem der besondere Factor  $\frac{1}{2}$  zugesetzt werden muß, weil der aus dem Polynom herausgezogene Factor, herrührend von den zweifachen Cosinus, diesem Gliede fehlt.

Damit haben wir die Potenzreihenentwicklung vollendet und zugleich eine neue Darstellung der Kugelfunction  $P_n$  gefunden, denn nach (159 b) ist diese gleich dem Coefficienten von  $\alpha^n = \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^n$ .

Man pflegt noch den Factor  $\left[ \cdot \frac{2n-1}{2n} \right]$  vor die Klammer zu setzen, so daß sich, nach leicht übersehbarer Hebung gemeinsamer Zahlen in den Zählern und Nennern das Resultat ergibt:

$$P_{n,0} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \left. \begin{aligned} & \left\{ \cos n \vartheta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos (n-2) \vartheta \right. \\ & \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1) (2n-3)} \cos (n-4) \vartheta + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Hierbei ist vorstehende Bemerkung über das Abbrechen des Polynoms und für gerades  $n$  auch der Zusatz des Factors  $\frac{1}{2}$  zum letzten Gliede zu beachten.

Wollte man diese Formel (160) zur Deckung mit (147) bringen, so müßte man die Cosinus der Vielfachen von  $\vartheta$  durch Potenzen von  $\cos \vartheta$  ausdrücken. Die Umrechnung ist indessen recht verwickelt. Dafs beide Formeln thatsächlich nur zwei formell verschiedene Ausdrücke für die nämlichen Functionen sind, ist wegen der Reihe (159c) nicht zweifelhaft.

#### § 44. Anwendung der Kugelfunctionen auf elektrostatische Probleme.

Nachdem wir im Vorangegangenen die wichtigsten mathematischen Eigenschaften der Kugelfunctionen dargelegt haben, wollen wir nun deren Anwendungen auf einige elektrostatische Probleme betrachten. Die erste Fundamentalaufgabe ist folgende:

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius  $R$  ist eine bestimmte Vertheilung von Elektrizität festgelegt. Das Potential des Feldes, welches von dieser Vertheilung herrührt, soll gefunden werden. Wir können die Flächendichtigkeit  $e$  als eine willkürlich vorgeschriebene (eindeutige, endliche, stetige) Function durch die Variablen  $\mu (= \cos \vartheta)$  und  $\eta$  eines in den Mittelpunkt der Kugel gelegten Polarcoordinatensystems dargestellt denken. Man kann dann das Potential nach der altbekannten Formel:

$$\varphi = \iint \frac{e ds}{\rho}$$

finden, wo  $ds$  Flächenelement der geladenen Kugeloberfläche,  $\rho$  der Abstand dieses Flächenelementes von dem Raumpunkt ist, in welchem  $\varphi$  bestimmt wird. Wir wollen hier einen ganz anderen Weg einschlagen. Wir entwickeln zunächst  $e$  in einer Kugelfunctionenreihe

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^m \cdot e_{nm} \cdot \cos(m\eta - c_{nm}). \quad (161)$$

Die Coefficienten sind mit  $e_{nm}$  bezeichnet, weil sie ihrer Dimension nach Flächendichtigkeiten sind. Die Phase  $e_{00} = 0$ .

Das Potential bleibt, wie wir früher ausführlich nachgewiesen haben, an Stellen, wo endliche Flächendichten liegen, endlich bestimmt und auch stetig. Daher bilden die Werthe  $\bar{\varphi}$ , welche das Potential auf der Kugeloberfläche selbst annimmt, ebenfalls eine (endliche, eindeutige, stetige) Function von  $\mu$  und  $\eta$ , deren Anord-

nung durch die Vertheilung von  $e$  bedingt wird, wenn wir auch noch nicht wissen, in welcher Weise. Jedenfalls können wir uns auch diese Function  $\bar{\varphi}$  durch eine Kugelfunctionenreihe ausgedrückt denken:

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m \cdot \bar{\varphi}_{nm} \cdot \cos(m\eta - c'_{nm}). \quad (162)$$

Die Coefficienten  $\bar{\varphi}_{nm}$  sind von der Dimension des Potentials. Die Phasenconstanten  $c'_{nm}$  müssen zunächst als verschieden von denjenigen in (161) angenommen werden, jedoch ist auch  $c'_{00} = 0$ .

Wir haben jetzt die Aufgabe, die auf der Kugelfläche durch (162) dargestellte Function  $\varphi$  so in das Innere der Kugel und in den äußeren Raum fortzusetzen, daß der Anschluß an  $\bar{\varphi}$  ein stetiger ist, d. h., daß  $\varphi$  selbst beim Durchgang durch die Kugelfläche stetig bleibt, daß ferner  $\varphi$  überall innen und außen der LAPLACE'schen Gleichung gehorcht, daß  $\varphi$  im Nullpunkt endlich und stetig bleibt und in sehr großen Abständen  $r$  gegen Null schwindet, mindestens wie  $\frac{1}{r}$ . Haben wir eine innere und äußere Fortsetzung gefunden, welche allen diesen Bedingungen genügt, so muß diese das gesuchte Potential sein, denn es gibt nur eine einzige solche Function. Hierbei kommt uns eine zweite Eigenschaft der Kugelfunctionen zu Statten, während wir bis jetzt erst die eine (die Darstellung willkürlicher Functionen auf der Kugelfläche durch Kugelfunctionenreihen) verwendet haben. Wir haben nämlich bereits in § 38, noch vor Aufstellung der Normalformen, bewiesen, daß jede Kugelfunction  $n$ ten Grades sowohl durch Multiplication mit  $r^n$ , als auch durch Multiplication mit  $\frac{1}{r^{n+1}}$  eine Raumfunction liefert, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt. Die erste Klasse dieser Functionen bleibt im Nullpunkt endlich, wird sogar, mit Ausnahme des Falles  $n = 0$ , daselbst gleich Null, sie wachsen aber in großer Entfernung über alle Grenzen. Es sind dies ganze Functionen der cartesischen Coordinaten. Die zweite Klasse hat im Nullpunkt eine Unendlichkeitsstelle, schwindet aber in großer Entfernung gegen Null mindestens wie  $\frac{1}{r}$ .

Wir setzen deshalb das Potential im Inneren der Kugel in der Form an

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r^n}{R^n} P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m \bar{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}), \quad (162a)$$

im Außenraum

$$\varphi_a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^m \bar{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}). \quad (162b)$$

Diese Ausdrücke gehen für  $r = R$  in stetiger Weise in die für  $\bar{\varphi}$  aufgestellte Kugelfunctionenreihe (162) über, sie genügen auch beide der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Im Mittelpunkt erhalten wir den endlichen Betrag

$$\varphi_i = \bar{\varphi}_{00}$$

und in endlicher Entfernung schwindet  $\varphi_a$  mindestens wie

$$\varphi_{\infty} = \frac{R}{r} \bar{\varphi}_{00}.$$

Falls der Coefficient  $\bar{\varphi}_{00} = 0$  ist, schwindet sogar  $\varphi_{\infty}$  wie eine höhere negative Potenz von  $r$ . Wir haben also eine richtige Darstellung für das Potential der Kugelbelegung gefunden, freilich zunächst von unbekanntem Werthe, da wir die Abhängigkeit der Coefficienten  $\bar{\varphi}_{nm}$  und  $c'_{nm}$  von der Vertheilung  $e$ , also von den Coefficienten  $e_{nm}$  und  $e'_{nm}$  noch nicht kennen.

Zu dieser Kenntniß verhilft uns nun der Satz, daß der nach der Normale auf der belegten Fläche genommene Differentialquotient des Potentials beim Durchgang durch diese Fläche einen Sprung erleidet, dessen Betrag gleich  $-4\pi e$  ist. Nehmen wir die Normale auf der Kugelfläche in Richtung der wachsenden  $r$ . Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n n \frac{r^{n-1}}{R^n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^m \bar{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}) \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n -(n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^m \bar{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}). \end{aligned}$$

Setzen wir in diesen beiden Ausdrücken  $r = R$ , so erhalten alle Glieder den Factor  $\frac{1}{R}$  und es ist

$$-4\pi e = \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \right)_{r=R} - \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Faßt man beide Doppelsummen zusammen und dividirt durch  $-4\pi$ , so erhält man

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^m \cdot \left[ \frac{2n+1}{4\pi R} \bar{\varphi}_{nm} \right] \cdot \cos(m\eta - c'_{nm}).$$

Dies ist eine Kugelfunctionenreihe für  $e$ , welche wegen der Eindeutigkeit dieser Entwicklung identisch sein muß mit der Anfangs gebildeten Reihe (161). Die Vergleichung der Coefficienten liefert uns folgende einfache Relationen:

$$e'_{n m} = e_{n m}$$

und

$$e_{n m} = \frac{2n + 1}{4\pi R} \bar{\varphi}_{n m}, \quad (163)$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\bar{\varphi}_{n m} = \frac{4\pi R}{2n + 1} e_{n m}. \quad (163 a)$$

So kann man zu einer vorgeschriebenen Flächenbelegung der Kugel leicht das Potential finden, und auch umgekehrt, wenn die Werthvertheilung von  $\bar{\varphi}$  auf der Kugelfläche vorgeschrieben ist, diejenige Elektrizitätsbelegung berechnen, welche ihr entspricht, zugleich liefern dann (162 a) und (162 b) die richtigen, der LAPLACE-Gleichung genügenden stetigen Fortsetzungen des Potentials durch den inneren und äußeren Raum.

Eine besondere Bedeutung hat der erste Coefficient  $e_{00}$ . Er mißt den Mittelwerth der Dichtigkeit über die ganze Kugelfläche, mithin ist

$$e = 4\pi R^2 \cdot e_{00}$$

die Gesamtladung der Kugel. Der entsprechende erste Coefficient  $\bar{\varphi}_{00}$  ist dann nach (163 a)

$$\bar{\varphi}_{00} = \frac{e}{R}$$

und der erste Summand der Reihen für  $\varphi$  wird

$$\begin{aligned} \text{innen} &= \frac{e}{R} \\ \text{außen} &= \frac{e}{r}, \end{aligned}$$

stellt also das Potential der gleichförmig über die ganze Kugelfläche verbreiteten Ladung  $e$  dar. In großer Entfernung  $r$  bleibt er am längsten spürbar, während die höheren Glieder schon in verhältnißmäßig geringeren Abständen der Reihe nach unmerklich werden. Besitzt die Kugel keine überschüssige Ladung, sondern nur

durch Influenz getrennte Belegung, deren algebraische Summe ja gleich Null sein muß, so fehlt dieses Anfangsglied sowohl in der  $e$ -Reihe, wie auch in den  $\bar{\varphi}$ -,  $\varphi_i$ - und  $\varphi_a$ -Reihen.

Man kann also wegen der ungestörten Superposition der Wirkungen die überschüssige Ladung der Kugel auch hier leicht abtrennen von dem durch Influenz in positive und negative Quanta zerlegten Antheile des unerschöpflichen neutralen Vorraths.

Besonders einfach gestaltet sich die behandelte Aufgabe, wenn die Belegung  $e$  durch ein einziges Glied der Reihe dargestellt wird, weil dann auch das Potential durch ein einziges entsprechendes Glied der Reihen (162 a) und (162 b) gegeben wird.

#### § 45. Die transcendenten Integrale der Differentialgleichung der Kugelfunctionen.

Man kann den Ansatz Gleichung (136) zu Anfang des § 41, unabhängig von der damals aus den vorausgegangenen Betrachtungen übernommenen Bedeutung der Function  $P_{n,m}(\mu)$ , hinstellen als die von sonstigen Rücksichten unabhängige Forderung, es solle eine Potentialfunction  $\varphi$  gefunden werden, welche, ausgedrückt in den räumlichen Polarcordinaten  $r$ ,  $\mu$  und  $\eta$ , von der dort gegebenen Gestalt ist und welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt. Das Ergebnis war, daß diese Forderung erfüllt ist, sobald man für  $P_{n,m}$  irgend eine Function von  $\mu$  einsetzt, wenn diese nur der Differentialgleichung (137) genügt. Weiter zeigte sich, daß jedes solche  $P_{n,m}$  der  $m$ te Differentialquotient einer Function  $P_{n,0}$  ist, welche letztere der Differentialgleichung (139) genügen muß. Mit der Aufindung von Integralen dieser Differentialgleichung (139) sind also die Schlüssel zur Bildung von Potentialfunctionen des Typus (136) gewonnen.

Bisher haben wir nur die eine Hälfte der gewonnenen Ausbeute verwendet. Wir fanden nämlich, daß aufser der gewöhnlichen Kugelfunction  $P_{n,0}$ , welche eine ganze Function  $n$ ten Grades von  $\mu$  ist, noch eine andere Art von Integralen existirt, welche sich in Form der unendlichen Potenzreihen (143) oder (144) darstellen läßt.

Diese sogenannten „Kugelfunctionen zweiter Art“,  $Q_{n,0}$ , wollen wir jetzt näher betrachten und zur Bildung von Potentialen benutzen.

Den Coefficienten des ersten Gliedes dieser Reihen können wir

willkürlich bestimmen; alle folgenden ergeben sich dann mit Hilfe der procurenten Formel (141), welche lautet:

$$A_{a+2} = \frac{(a-n)(n+a+1)}{(a+1)(a+2)} A_a.$$

Man erhält folgende Reihen. Für gerades  $n$ :

$$Q_{n,0} = A_1 \cdot \left\{ \mu + \frac{(1-n)(n+2)}{2 \cdot 3} \mu^3 + \frac{(1-n)(3-n)(n+2)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 \right. \\ \left. + \frac{(1-n)(3-n)(5-n)(n+2)(n+4)(n+6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \mu^7 + \dots \right\} \quad (164)$$

Für ungerades  $n$ :

$$Q_{n,0} = A_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{(0-n)(n+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \frac{(0-n)(2-n)(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 \right. \\ \left. + \frac{(0-n)(2-n)(4-n)(n+1)(n+3)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \mu^6 + \dots \right\} \quad (165)$$

Die nothwendig aufzuwerfende Frage nach der Convergenz dieser Reihen wird erledigt durch GAUSS' Betrachtungen über die hypergeometrische Reihe. Er definiert eine Function  $F$  der Variablen  $x$  mit drei Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  durch die Reihe:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

In diesem Schema stecken, je nach den Werthen von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und je nach etwaiger Substitution einer anderen Variablen für  $x$ , sehr viele verschiedene Functionsarten, darunter auch solche, welche man bereits in anderen analytischen Darstellungen kennt. Wenn  $\alpha$  oder  $\beta$  eine negative ganze Zahl oder Null ist, bricht die Reihe ab, stellt also eine ganze rationale Function dar, in allen anderen Fällen aber läuft die Reihe ohne Ende weiter. Natürlich darf  $\gamma$  keine negative ganze Zahl oder Null sein. GAUSS hat nun gezeigt, daß seine Reihe immer convergirt, wenn  $x^2 < 1$  ist, während sie für  $x^2 > 1$  immer divergirt (wenn sie nicht abbricht). Für den Grenzfall  $x^2 = 1$  ist die Convergenz an die Bedingung  $\gamma > (\alpha + \beta)$  gebunden, ein über alle Grenzen großer Werth ist für  $x^2 = 1$  und

$\gamma = \alpha + \beta$  zu erwarten, und für  $\gamma < (\alpha + \beta)$  ist dann die Reihe unbrauchbar, weil divergent.

Unsere Reihen (164) und (165) lassen sich nun leicht als hypergeometrische ausdrücken. Es ist nämlich für gerades  $n$  inclusive 0:

$$Q_{n,0} = A_1 \cdot \mu \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}; \mu^2\right) \quad (164a)$$

und für ungerades  $n$

$$Q_{n,0} = A_0 \cdot F\left(\frac{0-n}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; \mu^2\right). \quad (165a)$$

[Es sei bemerkt, daß diese Darstellungen auch auf die Kugelfunctionen erster Art  $P_{n,0}$  anwendbar sind. Nur gilt dann (164a) für ungerades  $n$  und (165a) für gerades  $n$ .]

So lange  $\mu$  als Cosinus des Polarwinkels echt gebrochen ist, convergiren also unsere Reihen sicher. Für  $\mu = \pm 1$ , das heißt für Punkte, welche auf der Polaraxe, der  $x$ -Axe unseres cartesischen Coordinatensystems, liegen, werden die dargestellten Werthe indessen unendlich, da in beiden Formeln der Specialfall  $\gamma = \alpha + \beta$  vorliegt. Wir haben also auch zu erwarten, daß die aus den  $Q_{n,0}$  abgeleiteten Potentialfunctionen in dieser Axe unendlich werden, was auf elektrische Belegung von endlicher Liniendichtigkeit schließen läßt (vgl. § 13).

Bilden wir uns nun, um eine Anschauung zu bekommen, die ersten Vertreter dieser Kugelfunctionen zweiter Art, indem wir successive  $n = 0, 1, 2, 3$  in die Reihen (164) resp. (165) einsetzen, so erhalten wir so übersichtliche Coefficientenfolgen, daß eine Absonderung der bekannten Reihe

$$\mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \dots = \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}$$

leicht ist. Die willkürlichen ersten Coefficienten wollen wir noch unbestimmt lassen und mit Const. bezeichnen. Dann erhält man:

$$\left. \begin{aligned} Q_{0,0} &= C \cdot \left( \mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \dots \right) \\ &= C \cdot \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (166_0)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,0} &= C \cdot \left( 1 - \frac{1}{1}\mu^2 - \frac{1}{3}\mu^4 - \frac{1}{5}\mu^6 - \frac{1}{7}\mu^8 - \dots \right) \\ &= C \cdot \left\{ 1 - \mu \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (166_1)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2,0} &= C \cdot \left( \mu - \frac{2}{1 \cdot 3} \mu^3 - \frac{3}{3 \cdot 5} \mu^5 - \frac{4}{5 \cdot 7} \mu^7 - \dots \right) \\
 &= C \cdot \left\{ \frac{3}{4} \mu - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2} \right) \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \right\}
 \end{aligned} \tag{166_2}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{3,0} &= C \cdot \left( 1 - 6 \mu^2 + \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 3} \mu^4 + \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} \mu^6 + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} \mu^8 + \dots \right) \\
 &= C \cdot \left\{ 1 - \frac{15}{4} \mu^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{5}{2} \mu^2 - \frac{3}{2} \right) \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \right\}
 \end{aligned} \tag{166_3}$$

etc.

Man erkennt an diesen ersten Vertretern noch andere gesetzmäßige Bildungen. Der Logarithmus erscheint in den einzelnen  $Q_{n,0}$  multiplicirt mit der entsprechenden ganzen Function  $P_{n,0}$  [vgl. Gleichung (147 a)] und einem Zahlenfactor. Diesen letzteren können wir beseitigen, wenn wir der unbestimmten Constanten einen solchen Werth geben, daß der Factor = + 1 wird.

Wir machen also den Analogieschluss aus obigen einfachen Beispielen, daß allgemein gültig sein wird die Formel

$$Q_{n,0} = R_n + P_{n,0} \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, \tag{166_n}$$

in welcher  $R_n$  eine ganze rationale Function  $(n-1)$ ten Grades von  $\mu$  bedeutet, deren allgemeines Bildungsgesetz hier nicht aufzufinden ist, deren erste Vertreter indessen abgelesen werden können:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = -1, \quad R_2 = -\frac{3}{2} \mu, \quad R_3 = -\frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}.$$

Den allgemeinen Beweis für die Formel (166<sub>n</sub>), sowie die Kenntniß des Bildungsgesetzes der  $R_n$  verdanken wir FRANZ NEUMANN. Dieser hat zwar nicht unsere, für gebrochenes  $\mu$  reellen  $Q_{n,0}$ -Functionen, sondern diejenigen Integrale zweiter Art der Differentialgleichung der Kugelfunctionen betrachtet, welche für  $\mu = \pm 1$  unendlich werden, wie unsere, aber nun für  $\mu^2 > 1$  reell sind und für  $\mu = \pm \infty$  gegen Null schwinden. Diese konnten wir nicht auffinden, weil wir als Lösung in Gleichung (140) eine positive Potenzreihe angesetzt hatten. Würden wir statt dessen eine Reihe mit negativen Potenzen ansetzen, so würden wir eine ganz analoge procurrente Formel für die alternirenden Coefficienten finden,

somit für jede Zahl  $n$  eine Lösung in Form einer unendlichen Reihe mit einem willkürlichen Factor. Diese Reihe convergirt dann für  $\mu^2 > 1$  und giebt die von NEUMANN betrachteten  $Q_{n,0}$ , welche sich mit den unsrigen in der Ausfüllung des Gebietes eines unbeschränkt variablen  $\mu$  gegenseitig ergänzen. Die ersten Vertreter dieser Functionen lauten:

$$\left. \begin{aligned} Q_{0,0}(\sigma) &= A_{-1} \left( \sigma^{-1} + \frac{1}{3} \sigma^{-3} + \frac{1}{5} \sigma^{-5} \right) \\ &= \text{Const.} \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \end{aligned} \right\} \quad (167_0)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,0}(\sigma) &= A_{-2} \left( \sigma^{-2} + \frac{3}{5} \sigma^{-4} + \frac{3}{7} \sigma^{-6} + \frac{3}{9} \sigma^{-8} + \dots \right) \\ &= \text{Const.} \left\{ -1 + \sigma \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (167_1)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{2,0}(\sigma) &= A_{-3} \left( \sigma^{-3} + 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{5 \cdot 7} \sigma^{-5} + 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{7 \cdot 9} \sigma^{-7} + 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{9 \cdot 11} \sigma^{-9} + \dots \right) \\ &= \text{Const.} \cdot \left\{ -\frac{3}{2} \sigma + \left( \frac{3}{2} \sigma^2 - \frac{1}{2} \right) \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (167_2)$$

etc. nach derselben Regel:

$$Q_{n,0}(\sigma) = \text{Const.} \left\{ R_n + P_{n,0} \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \right\}. \quad (167_n)$$

Die Variable ist hier mit  $\sigma$  bezeichnet, um dem Buchstaben  $\mu$  seine Bedeutung als Cosinus eines reellen Winkels zu wahren. Aus diesen Formeln kann man die Gestalt der  $R_n$  für höhere  $n$  leichter erkennen, als aus unseren Gleichungen (166). Denn wenn man hier  $\sigma = \infty$  setzt, muß  $Q_{n,0}(\sigma) = 0$  werden. Daraus folgt, daß alle positiven Potenzen von  $\sigma$  fehlen müssen, was zur Bestimmung von  $R_n$  hinreicht.

Diese Andeutungen mögen hier genügen. Weitere Aufschlüsse z. B. in HEINE's Handbuch der Kugelfunctionen, FRANZ NEUMANN Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen und Aufsatz in CRELLE's Journal Bd. 37 S. 21.

Wir wollen nun die Kugelfunctionen zweiter Art zur Bildung von Potentialen benutzen, und uns dabei auf die für echt gebrochenes  $\mu = \cos \vartheta = \frac{x}{r}$  gültigen beschränken. Aus  $Q_{0,0}$ , welches in (166<sub>0</sub>)

gegeben ist, entstehen zwei im ganzen Raume, mit Ausnahme der  $x$ -Axe, gültige und der LAPLACE'schen Gleichung folgsame Potentiale:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \quad (168)$$

$$\varphi' = \frac{1}{r} \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}. \quad (168 a)$$

Die elektrischen Felder, welche ihnen entsprechen, können herrühren von einer Belegung der beiden Hälften der  $x$ -Axe mit entgegengesetzten Elektricitäten vom Vorzeichen der zugehörigen Abmessungen  $x$ . Im ersten Falle (168) ist die Liniendichtigkeit auf jeder Hälfte bis in's Unendliche constant  $= \pm \frac{1}{2}$ . Im zweiten Falle (168 a) ist die Liniendichtigkeit  $= \frac{1}{2x}$ , nimmt also im Unendlichen gegen Null ab, wird aber in der Nähe des Anfangspunktes über alle Grenzen groß. Im Anfangspunkte selbst stoßen in beiden Fällen entgegengesetzte Ladungen unvermittelt an einander. Die den Raum durchsetzenden Aequipotentialflächen sind im ersten Falle  $\mu = \text{constans}$ , also Kegelflächen mit der Spitze im Nullpunkt, im zweiten Falle haben sie eine rübenähnliche Gestalt, das stumpfe Ende im Nullpunkt. Den aus den höheren  $Q_{n,0}$  gebildeten Potentialen, z. B.

$$\varphi = r \cdot Q_{1,0} \quad \text{und} \quad \varphi' = \frac{1}{r^2} Q_{1,0}$$

etc., allgemein

$$\varphi = r^n Q_{n,0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^{n+1}} Q_{n,0}$$

entsprechen immer complicirtere Belegungen der  $x$ -Axe, und wenn wir gar zu den hier gar nicht betrachteten, aber möglichen Functionen:

$$Q_{n,m} = \frac{d^m Q_{n,0}}{d\mu^m}$$

übergehen, und nach dem Schema der Gleichung (136) Potentiale daraus bilden, so wird die Mannigfaltigkeit noch größer. Indessen haben diese Fälle mehr ein mathematisches Interesse. Für die Elektrostatik sind sie deshalb weniger wichtig, weil alle Ladungen und Niveauflächen sich bis in's Unendliche erstrecken, also niemals etwa einen geladenen Conductor repräsentiren können.

## § 45 a. Einige Potentialfunctionen in elliptischen Coordinaten.

Wichtigere Resultate erhalten wir aus unseren neu gewonnenen Potentialfunctionen durch Anwendung einer Methode, welche auf folgender Ueberlegung beruht: Nehmen wir irgend eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung, welche als analytische Function der cartesianischen Coordinaten ausgedrückt werden kann, also  $\varphi(x, y, z)$ , und setzen wir an die Stelle der einen Raumabmessung  $x$  die complexe Variable  $x + ia$ , wo  $a$  eine constante Länge bedeutet, während  $x$  nachher wieder die gewöhnliche Coordinate bezeichnen soll, so kann man mit bekannten Rechenoperationen die complex gewordene Function  $\varphi$  in einen reellen und einen rein imaginären Theil zerlegen. Wir drücken dies in der Gleichung aus:

$$\varphi(x + ia, y, z) = \psi(x, y, z) + i\chi(x, y, z).$$

Die LAPLACE'sche Operation  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  muß dann auch, an der complexen Function ausgeführt, das Resultat Null geben, weil

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial (x + ia)} \cdot \frac{\partial (x + ia)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (x + ia)}{\partial x} = 1$$

ist, und bei der zweiten Differentiation  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  dasselbe gilt. Wir erhalten also die Bedingung:

$$\Delta(\psi + i\chi) = \Delta\psi + i\Delta\chi = 0,$$

welche nur erfüllt sein kann, wenn

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\chi = 0$$

ist. Diese Methode lehrt uns also aus einer bekannten reellen Lösung  $\varphi$  der LAPLACE'schen Gleichung zwei neue reelle Lösungen  $\psi$  und  $\chi$  herzuleiten, welche, wie wir sehen werden, von ihrer Mutter wesentlich verschieden sind.

Zur Anwendung wählen wir die einfachste der soeben gefundenen Potentialfunctionen (168). Wir können sie leicht in cartesianischen Coordinaten ausdrücken, denn der Cosinus des Polarwinkels ist

$$\mu = \frac{x}{r}, \quad \text{wobei} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Man erhält

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{r+x}{r-x}}.$$

Substituiren wir nun an Stelle von  $x$  die complexe Variable  $x + ia$ , so müssen wir dies auch in dem Ausdruck  $r$  thun, welcher dadurch ebenfalls complex wird:

$$r' = \sqrt{(x + ia)^2 + y^2 + z^2} = a(\lambda + iv).$$

Den Zusammenhang der beiden reellen Zahlen  $\lambda$  und  $\nu$  mit den reellen Abmessungen  $x, y, z$  findet man leicht, wenn man den Ausdruck  $r'$  quadriert und die reellen und rein imaginären Theile einander gleichsetzt. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} x &= a\lambda\nu \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 &= a^2(\lambda^2 - \nu^2). \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Die ausgeführte Substitution liefert die complexe Function:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{a(\lambda + iv) + x + ia}{a(\lambda + iv) - x - ia}}.$$

Setzt man hierin auf Grund der vorstehenden Relation (169)  $x = a\lambda\nu$  und hebt den Factor  $a$  in Zähler und Nenner, so erhält man folgende durch leichte Umformungen aus einander entstehende Ausdrücke:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{\lambda + iv + \lambda\nu + i}{\lambda + iv - \lambda\nu - i}} = \ln \sqrt{\frac{(1 + \nu)(\lambda + i)}{(1 - \nu)(\lambda - i)}} = \ln \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} + \ln \sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}}.$$

Im letzten Gliede führen wir für die complexeren Zahlen  $\lambda \pm i$  den Modul  $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 1}$  und das Azimuth  $\alpha = \text{arc cot } \lambda$  ein. Es ist dann

$$\lambda + i = \rho \cdot e^{i\alpha}, \quad \lambda - i = \rho \cdot e^{-i\alpha},$$

folglich

$$\sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}} = e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad \ln \sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}} = i\alpha,$$

so dafs das Resultat lautet:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} + i \text{arc cot } \lambda. \quad (170)$$

Man erkennt aus den beiden Relationen (169) leicht, dafs  $\nu$  stets ein echter Bruch ist, während  $\lambda$  alle möglichen reellen Zahlenwerthe annehmen kann. Deshalb liefert die Gleichung (170) stets die gewünschte Spaltung der complexen Function  $\varphi$  in einen reellen und einen rein imaginären Theil, und die beiden nach dieser Methode gewonnenen neuen Potentialfunctionen lauten:

$$\psi = \ln \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \quad (170 \text{ a})$$

$$\chi = \text{arc cot } \lambda. \quad (170 \text{ b})$$

Man könnte auf Grund der beiden Relationen (169)  $\lambda$  und  $\nu$  durch  $x, y, z$  ausdrücken, es ist aber viel anschaulicher,  $\lambda$  und  $\nu$  als Coordinaten beizubehalten und ihnen als dritte Abmessung den Längswinkel  $\eta$  an die Seite zu stellen.

Man kann dann die cartesischen Coordinaten in Uebereinstimmung mit (169) folgendermaassen durch  $\lambda, \nu, \eta$  ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \lambda \nu \\ y &= a \sqrt{\lambda^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \cos \eta \\ z &= a \sqrt{\lambda^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Um uns über die Bedeutung dieser Gleichungen zu informiren, eliminiren wir erstens  $\nu$  und  $\eta$ , was durch Quadriren und Addiren der zweiten und dritten und Substitution von  $\nu = \frac{x}{a\lambda}$  aus der ersten Gleichung bewirkt wird. Man erhält:

$$\frac{x^2}{a^2 \lambda^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 (\lambda^2 + 1)} = 1.$$

Für jeden festen Werth  $\lambda^2$  ist dies die Gleichung eines abgeplatteten Rotationsellipsoides. Lassen wir  $\lambda^2$  alle Werthe von 0 bis  $\infty$  durchlaufen, so beginnt die Fläche als platte Kreisscheibe vom Radius  $a$  senkrecht zur  $x$ -Axe, wächst dann und wölbt sich, wird im Zunehmen immer kugelähnlicher und verschwindet als unendlich grosse Kugel.

Andererseits eliminiren wir aus den Gleichungen (171)  $\lambda$  und  $\eta$  und erhalten:

$$-\frac{x^2}{a^2 \nu^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 (1 - \nu^2)} = 1.$$

Dies ist für jeden festen echten Bruch  $\nu^2$  die Gleichung eines einschaligen Rotationshyperboloids. Lassen wir  $\nu^2$  alle Werthe von 0 bis 1 durchlaufen, so beginnt die Fläche, indem sie die  $(y, z)$ -Ebene mit Aussparung eines kreisförmigen Loches vom Radius  $a$  doppelt bedeckt, entfaltet sich dann höher und höher, während jenes Loch in der Grundebene immer enger wird. Schliesslich umhüllt die

Fläche, wie ein enger Schlauch die  $x$ -Axe, in welch' letztere die Fläche für  $v^2 = 1$  degenerirt.

Eliminiren wir endlich  $\lambda$  und  $v$ , so erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \eta}{\cos \eta}.$$

Das liefert für jedes feste  $\eta$  eine an der  $x$ -Axe ansetzende Meridianebene. Während  $\eta$  ein Intervall von der Größe  $2\pi$  durchläuft, dreht sich diese Ebene einmal herum.

Jede der drei Flächenarten durchstreicht bei dem geschilderten Verlauf einmal den ganzen unendlichen Raum, trifft also einmal jeden irgend wo festgehaltenen Punkt  $x, y, z$ . Die drei Zahlenwerthe  $\lambda, v, \eta$ , für welche dies zutrifft, nennen wir seine elliptischen Coordinaten. (Der Vollständigkeit halber müßte hinzugefügt werden: in demjenigen System, welches durch Rotation um die  $x$ -Axe entsteht, aus einem System confocaler Ellipsen und Hyperbeln in der  $xy$ -Ebene, deren Brennpunkt im Abstand  $a$  auf der  $y$ -Axe liegt. Um die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den cartesischen und den elliptischen Coordinaten eindeutig zu machen, kann man festsetzen:

$$0 \leq \lambda \leq \infty$$

$$-1 \leq v \leq +1$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi$$

$$\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - v^2} \quad \text{absolut.}$$

Es ist von Wichtigkeit ein beliebig im Raume gelegenes Längenelement  $dl$  auszudrücken durch die elliptischen Coordinaten seines Ortes und durch die Differentiale  $d\lambda, dv, d\eta$ , welche dem Unterschied seiner beiden Endpunkte entsprechen.

Zu dem Zwecke differenziren wir die Gleichungen (171)

$$dx = av d\lambda + a\lambda dv$$

$$dy = a\lambda \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cos \eta d\lambda - av \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{1-v^2}} \cos \eta dv - a\sqrt{\lambda^2+1} \sqrt{1-v^2} \sin \eta d\eta$$

$$dz = a\lambda \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \sin \eta d\lambda - av \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{1-v^2}} \sin \eta dv + a\sqrt{\lambda^2+1} \sqrt{1-v^2} \cos \eta d\eta$$

und bilden

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Die beim Quadriren der rechten Seiten auftretenden Doppelproducte heben sich beim Addiren sämmtlich fort und man erhält:

$$dl^2 = \left[ a \frac{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} d\lambda \right]^2 + \left[ a \frac{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}{\sqrt{1 - v^2}} dv \right]^2 + [a \sqrt{\lambda^2 + 1} \sqrt{1 - v^2} d\eta]^2. \quad (171a)$$

Aus dieser wichtigen Formel erkennt man, daß die elliptischen Coordinaten orthogonal sind, d. h. daß die drei Flächenschaaren sich überall senkrecht durchschneiden. Zwei eng benachbarte Ellipsoide  $\lambda$  und  $(\lambda + d\lambda)$ , zwei desgleichen Hyperboloide  $v$  und  $(v + dv)$  und zwei desgleichen Meridianebenen  $\eta$  und  $(\eta + d\eta)$  schliessen ein kleines rechteckiges Volumelement ein, dessen drei Kantenlängen (Normalabstände der Nachbarflächen) durch die einzelnen eckigen Klammern der Gleichung (171a) gegeben sind, während  $dl$  die Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ausdrückt. Als besonders wichtig für das Folgende lesen wir heraus, daß die Normale auf der Ellipsoidfläche, welche dem Zuwachs  $d\lambda$  entspricht, die Länge hat

$$n_\lambda = a \frac{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} d\lambda. \quad (171b)$$

Da die Ellipsoide mit wachsendem  $\lambda$  gröfser werden, ist diese Normale nach aufsen gerichtet.

Nach diesen geometrischen Betrachtungen kehren wir nun zu unseren Potentialen (170a und b) zurück. Da  $\psi$  nur von  $v$  abhängt, sind die Niveauflächen bestimmt durch  $v = \text{const}$ , das sind also die Hyperboloide unseres Systems. Da diese sich alle in's Unendliche erstrecken, können wir jedenfalls nicht im ganzen Raume ein elektrisches Feld dadurch darstellen. Dagegen liefert  $\chi$  die Niveauflächen  $\lambda = \text{const}$ , das sind die abgeplatteten Rotationsellipsoide. Wählen wir eines davon mit dem besonderen Werth  $\lambda_0$  als Oberfläche eines geladenen Conductors, so giebt uns  $\chi = \text{arc cot } \lambda$  für  $\lambda \geq \lambda_0$  das Potential des äußeren Feldes, während für  $\lambda < \lambda_0$  das Potential unveränderlich gleich  $\text{arc cot } \lambda_0$  zu setzen ist. In großer Entfernung, d. h. für großes  $\lambda$ , nähert sich  $\text{arc cot } \lambda$  der 0 wie  $\frac{1}{\lambda}$  oder wie  $\frac{a}{a\lambda}$ . Der Nenner  $a\lambda$  mißt die Radien der großen Kugeln, in welche die fernen Ellipsoide übergehen. Dieses Verhalten entspricht dem Verlauf des Potentials in großer Entfernung, herrührend von einer elektrischen Menge  $a$ . So groß muß also, wenn kein weiterer Proportionalitätsfactor zugesetzt wird,

die Gesammtladung des Conductors sein. Will man aber eine willkürliche Gesammtladung  $e$  auf dem Conductor annehmen, so hat man für das Potential zu setzen:

$$\chi = \frac{e}{a} \operatorname{arc} \cot \lambda, \quad (172)$$

was jetzt auch gelten soll.

Der Lauf der Kraftlinien im Außenraum geht normal durch die Ellipsoide, folgt also den Schnittcurven der Hyperboloide und Meridianebenen.

Von besonderem Interesse ist die Vertheilung der Flächen-  
dichtigkeit  $e$  über den Conductor.

Man findet diese aus dem Sprung des Differentialquotienten von  $\chi$  nach der Normale beim Durchgang durch die geladene Fläche. Da innen kein Gefälle vorhanden ist, bleibt nur das äußere übrig. Es ist

$$4 \pi e = - \left( \frac{d\chi}{dn_a} \right)_{\lambda=\lambda_0}. \quad (173)$$

Die dem Zuwachs  $d\lambda$  entsprechende Normalenlänge haben wir in Gleichung (171b) angegeben, und  $d\chi$  finden wir durch Differentiation von (172):

$$d\chi = \frac{e}{a} d \operatorname{arc} \cot \lambda = - \frac{e}{a} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Mithin wird

$$4 \pi e = \frac{\frac{e}{a} \frac{d\lambda}{\lambda_0^2 + 1}}{\frac{a \sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1}} d\lambda} = \frac{e}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1} \sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2}}. \quad (173a)$$

Die Variable  $\nu$  bestimmt die Zonen auf der Ellipsoidfläche ähnlich wie ein Maafs der geographischen Breite. Am Aequator ist  $\nu = 0$ . Dort hat die Dichtigkeit den größten Werth

$$e_{\nu=0} = \frac{e}{4 \pi a^2 \lambda_0 \sqrt{\lambda_0^2 + 1}}, \quad (173b)$$

entsprechend der dort stärksten Krümmung. An den abgeplatteten Polen  $\nu = \pm 1$  herrscht die geringste Dichtigkeit

$$e_{\nu=1} = \frac{e}{4 \pi a^2 (\lambda_0^2 + 1)}. \quad (173c)$$

Degenerirt die Gestalt des Conductors in eine platte Scheibe vom Radius  $a$ , so ist  $\lambda_0 = 0$  zu setzen. Die Dichtigkeit auf der oberen, wie auf der unteren Seite ist dann entsprechend (173a)

$$e = \frac{e}{4 \pi a^2 |v|}.$$

An Stelle der elliptischen Coordinate  $v$ , deren absoluter Betrag vorstehend mit  $|v|$  bezeichnet ist, kann man hier den variablen Radius  $\rho = \sqrt{y^2 + x^2}$  einführen, denn aus (171) folgt für  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= y^2 + x^2 = a^2(1 - v^2) \\ a \cdot |v| &= \sqrt{a^2 - \rho^2} \end{aligned}$$

also

$$e = \frac{e}{4 \pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}}. \quad (173d)$$

Dieser Ausdruck hat im Centrum den Minimalwerth  $\frac{e}{4 \pi a^2}$ , nimmt nach dem Rand hin allmählich zu und wird daselbst unendlich, trotz der endlichen Gesamtladung  $e$ .

Nach derselben Methode der Substitution von  $(x + ia)$  an Stelle von  $x$  wollen wir noch aus einer anderen der uns bekannt gewordenen Potentialfunctionen neues Material gewinnen. Die Kugelfunction zweiter Art  $Q_{1,0}$ , welche wir aus (166<sub>1</sub>) erhalten, wenn wir  $C = -1$  setzen, muß nach Erweiterung sowohl mit  $r$ , wie mit  $\frac{1}{r^2}$  eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung geben. Wir wählen die erste Form

$$\varphi = r \left( -1 + \mu \ln \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} \right) = -r + x \ln \sqrt{\frac{r + x}{r - x}}, \quad (174)$$

substituiren  $x + ia$  für  $x$ , also auch  $r' = a(\lambda + iv)$  für  $r$ , und benutzen dann die Relation  $x = a\lambda v$ .

Die Umwandlung, welche der Logarithmus dadurch erfährt, haben wir soeben berechnet, siehe Gleichung (170). Man erhält

$$\varphi = -a(\lambda + iv) + (a\lambda v + ia) \cdot \left( \ln \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} + i \operatorname{arc} \cot \lambda \right)$$

oder in reell und imaginär gespalten:

$$\begin{aligned} \varphi = & \left\{ -a\lambda + a\lambda v \ln \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} - a \operatorname{arc} \cot \lambda \right\} \\ & + i \left\{ -av + a\lambda v \operatorname{arc} \cot \lambda + a \ln \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \right\}. \end{aligned}$$

Jede dieser beiden geschweiften Klammern, für sich genommen, muß der LAPLACE'schen Gleichung genügen. Nun steht aber in beiden als letzter Summand je ein Ausdruck, den wir aus Gleichung (170 a, b) bereits als Lösung derselben linearen homogenen Differentialgleichung erkannt haben. Wenn wir diese also fortlassen, so muß das Uebrige auch noch der LAPLACE'schen Gleichung genügen. Die beiden neu gewonnenen Potentialfunctionen sind also nach Weglassung des constanten Factors  $a$

$$\psi = \lambda \cdot \left\{ -1 + \nu \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \right\} \quad (174a)$$

$$\chi = \nu \cdot \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \quad (174b)$$

Die zweite Function  $\chi$  ist geeignet die Influenzierung eines platt-ellipsoidischen Conductors durch ein gleichförmiges äußeres Feld (in Richtung der  $x$ -Axe) darzustellen.

Das ursprünglich gleichförmige Feld hat als Potential  $\varphi_1$  eine lineare Function von  $x$ , und da  $x = a \lambda \nu$  ist, können wir ansetzen

$$\varphi_1 = C_1 \lambda \nu. \quad (175)$$

Diesem superponiren wir im äußeren Raume ( $\lambda \geq \lambda_0$ ) als Störungsfeld der influenzirten Ladungen

$$\varphi_2 = C_2 \chi = C_2 \nu \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \quad (175a)$$

In großer Entfernung  $\lambda$  verschwindet dieses Potential, wie  $C_2 \nu \cdot \frac{1}{3 \lambda^2}$ , entspricht also durchaus der hier gemachten Vorstellung einer Elektrizitätsvertheilung von der algebraischen Summe 0. Außerdem wird wegen des Factors  $\nu$  in der ganzen Mittelebene  $\chi = 0$ , was bei der entgegengesetzt gleichen Vertheilung zu beiden Seiten auch nöthig ist. Das Gesamtpotential im äußeren Raume ist also

$$\varphi_a = C_1 \lambda \nu + C_2 \nu \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \quad (175b)$$

Ferner verlangen wir, daß im Innern des Conductors

$$\varphi_i = 0 \quad (175c)$$

sei. Damit ist der Ansatz fertig, es handelt sich nur um die Bestimmung der Constanten  $C_2$ , welche dadurch gewonnen wird, daß das Potential an einer mit einfacher Schicht belegten Fläche selbst stetig bleibt, daß also  $\varphi_a$  für  $\lambda = \lambda_0$  den Werth 0 besitzen muß, der für  $\varphi_i$  gilt:

$$0 = C_1 \lambda_0 + C_2 \{ -1 + \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0 \}$$

$$C_2 = C_1 \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0}. \quad (175d)$$

Die Flächendichtigkeit findet man nach der Formel

$$4\pi e = - \left( \frac{d\varphi_a}{dn_a} \right)_{\lambda=\lambda_0}.$$

Das Differenziren nach der Normale geschieht bei constant gehaltenem  $\nu$ , während  $\lambda$  um  $d\lambda$  wächst:

$$d\varphi_a = C_1 \nu \cdot \left[ 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0} \left\{ \operatorname{arc} \cot \lambda - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right\} \right] d\lambda.$$

Hierin ist  $\lambda = \lambda_0$  zu setzen

$$(d\varphi_a)_{\lambda=\lambda_0} = C_1 \nu \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda_0^2 + 1)(1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0)}.$$

Den Ausdruck für  $dn_a$  entnehmen wir aus (171b) und erhalten:

$$4\pi e = - \frac{C_1 \nu \frac{d\lambda}{(\lambda_0^2 + 1)(1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0)}}{a \frac{\sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1}} d\lambda}$$

oder

$$e = - \frac{C_1}{4\pi a} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1} \sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2} (1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0)}. \quad (175e)$$

Der Factor  $\nu$  muß gleichstimmig mit  $x$  sein, ferner ist  $(1 - \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda)$  immer positiv, deshalb ist  $e$  auf der Seite der positiven  $x$  negativ belegt und umgekehrt. Der Uebergang zur Kugelgestalt kann gemacht werden, wenn man  $a$  verschwindend klein,  $\lambda_0$  unendlich und das Product  $a\lambda_0$  gleich dem endlichen Kugelradius setzt. Man kommt so zu der früher für einen Kugelconductor abgeleiteten Vertheilung zurück. Das Potential  $\chi$  in Gleichung (174b) findet auch Anwendung bei der Berechnung der Magnetisirung eines platten Rotationsellipsoids durch ein gleichförmiges Magnetfeld.

Die im Vorstehenden an zwei Beispielen erprobte Methode der Ersetzung von  $x$  durch  $x + ia$  bot den Vortheil, daß wir von den gefundenen Functionen  $\psi$  und  $\chi$  von vornherein wußten, daß sie der LAPLACE'Schen Gleichung genügen, obgleich sie in elliptischen Coordinaten ausgedrückt erschienen, auf welche wir die Operation  $\Delta\varphi$  nicht transformirt haben. Aber eine gewisse Einseitigkeit liegt darin, daß bei dieser complexen Substitution der aus  $r$  entstehende Ausdruck  $r' = a(\lambda + i\nu)$  in den beiden Zahlen  $\lambda$  und  $\nu$  immer nur auf die elliptischen Coordinaten abgeplatteter Systeme führt.

Zwar könnte man durch geeignete complexe Größen an Stelle von  $y$  und  $x$  auch zu länglichen Systemen elliptischer Coordinaten (mit zweischaligen Hyperboloiden) gelangen, man könnte dann aber nicht die nur von  $\mu = x/r$  abhängigen Kugelfunctionen zur Ableitung analoger Resultate verwenden.

Diese Lücke läßt sich aber nachträglich ausfüllen und eine directe Uebertragung der für abgeplattete Systeme gewonnenen Formeln auf solche für längliche Systeme erreichen. Man braucht in den Coordinatengleichungen (171), welche ja unabhängig von der Art ihrer Herleitung gültig sind, sowie auch in allen durch  $a, \lambda, \nu$  ausgedrückten Formeln nur  $a$  und  $\lambda$  rein imaginär zu setzen, so ist der Uebergang gemacht. Der deutlicheren Unterscheidung wegen wollen wir für das längliche System andere Buchstaben wählen und schreiben jetzt folgende Substitutionen vor:

$$\left. \begin{aligned} a &= i b \\ \lambda &= -i \sigma \\ \nu &= \tau \\ \eta &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

Die Coordinatengleichungen (171) gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} x &= b \sigma \tau \\ y &= b \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \cos \eta \\ z &= b \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \sin \eta. \end{aligned} \right\} \quad (176 a)$$

Die Flächen  $\sigma = \text{const}$  (durch Elimination von  $\tau$  und  $\eta$  gewonnen) haben die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2 \sigma^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 (\sigma^2 - 1)} = 1$$

und geben längliche Rotationsellipsoide mit dem gemeinsamen Focalabstand  $b$  in der  $x$ -Axe. Der Spielraum von  $\sigma$  ist  $+1 \leq \sigma \leq +\infty$ .

Die Schaar der zweischaligen Hyperboloide mit ebenfalls dem Focalabstand  $b$  ist:

$$\frac{x^2}{b^2 \tau^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2 (1 - \tau^2)} = 1.$$

Spielraum der Variablen  $\tau$  ist  $-1 \leq \tau \leq +1$ . Die Meridianebenen liegen wie immer bisher um die  $x$ -Axe.  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ .

Die dem Zuwachs  $d\sigma$  entsprechende Länge der äußeren Nor-

male auf den Ellipsoiden kann man aus Gleichung (171 b) durch die Substitutionen (176) finden:

$$n_\sigma = i b \frac{\sqrt{-\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{-\sigma^2 + 1}} (-i d\sigma) = b \frac{\sqrt{\sigma^2 - \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} d\sigma. \quad (176 b)$$

Nun ziehen wir die beiden Potentiale (170 a und b) heran. Diese liefern zufolge (176):

$$\psi = \ln \sqrt{\frac{1 + \tau}{1 - \tau}} \quad (177 a)$$

$$\chi = \operatorname{arc} \cot(-i\sigma) = i \ln \sqrt{\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}}. \quad (177 b)$$

Die Niveauflächen von  $\psi$  sind die zweischaligen Hyperboloide, sie laufen in's Unendliche und sind elektrostatisch nicht zu verwenden. Dagegen sind die Niveauflächen von  $\chi$  die länglichen Ellipsoide. (Der Factor  $i$  bei einem Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung hat nichts zu bedeuten und kann einfach gestrichen werden.) Eines von ihnen,  $\sigma = \sigma_0$ , kann als Oberfläche eines geladenen Conductors angesehen werden. In großer Entfernung wird  $\chi_\infty = \frac{1}{\sigma} = \frac{b}{b\sigma}$ ,  $b\sigma$  sind die Radien der großen Kugeln, in welche die fernen Ellipsoide übergehen. Die Gesamtladung des Conductors ist also numerisch gleich  $b$ , soll die Ladung einen beliebigen Werth  $e$  haben, so hat man das Potential zu setzen:

$$\chi = \frac{e}{b} \ln \sqrt{\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}}. \quad (177 c)$$

Die Dichtigkeit  $e$  auf der Oberfläche ist gegeben durch

$$4\pi e = - \left( \frac{d\chi}{dn_\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0}.$$

Der Werth  $dn_\sigma$  ist in (176 b) mitgetheilt, ferner ist

$$d\chi = - \frac{e}{b} \frac{d\sigma}{\sigma^2 - 1},$$

also erhält man:

$$e = \frac{e}{4\pi b^2 \sqrt{\sigma_0^2 - 1} \sqrt{\sigma_0^2 - \tau^2}} \quad (177 d)$$

$$\text{Minimum am Aequator } e_{\tau=0} = \frac{e}{4\pi b^2 \sigma_0 \sqrt{\sigma_0^2 - 1}}$$

$$\text{Maximum an den Polen } e_{\tau=1} = \frac{e}{4\pi b^2 (\sigma_0^2 - 1)}.$$

Degenerirt das Ellipsoid in einen verschwindend dünnen Stab von der Länge (2 b), so geht  $\sigma_0$  gegen 1, und  $e$  wird auf der ganzen Stablänge unendlich. Die Capacität geht gegen Null herunter, während sie bei dem zur Kreisscheibe degenerirten platten Ellipsoid endlich bleibt.

Schließlich transformiren wir noch die Potentiale (174 a und b) mit Hülfe der Gleichungen (176). Es entstehen folgende Formen:

$$\psi = -i\sigma \left\{ -1 + \tau \ln \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \right\} \quad (178a)$$

$$\chi = \tau \left\{ -1 - i\sigma \operatorname{arc} \cot(-i\sigma) \right\} = \tau \left\{ -1 + \sigma \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \right\}. \quad (178b)$$

Hier ist wieder  $\psi$  unbrauchbar, aber  $\chi$  kann dazu dienen, die Störung darzustellen, welche ein gleichförmiges elektrisches Feld dadurch erfährt, daß man einen länglich rotationsellipsoidischen Conductor der Länge nach hineinbringt. Auch bei der Magnetisirung länglicher Ellipsoide durch ein gleichförmiges Magnetfeld hat man das Potential (178 b) zu benützen.

#### § 46. Die Kugelfunctionen für nicht ganzzahlige Werthe von $n$ und $m$ .

Nach dem von uns zu Anfang dieses ganzen Kapitels eingeschlagenen Wege zur Auffindung der Kugelfunctionen, nämlich Betrachtung der höheren Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$  nach den Coordinaten, war es selbstverständlich, daß wir unter den Zahlen  $n$  und  $m$  natürliche Ordnungszahlen 0, 1, 2, ... verstanden; es ergab sich auch die Beschränkung  $m \leq n$ . Die Differentialgleichung der  $P_{n,m}$  (137) und die besondere Differentialgleichung der  $P_{n,0}$  (139) haben indessen auch einen Sinn, wenn  $n$  und  $m$  als beliebige gebrochene oder irrationale Zahlen angesetzt werden, und in Bezug auf ihre Ableitung aus der LAPLACE'schen Gleichung für Polarcoordinaten hat man auch die Gewähr, daß dann noch die

Gleichung (136) gültige Potentialfunctionen liefern wird. Auf diese wollen wir zum Schluß noch einen Blick werfen.

Wir beginnen die Erweiterung des Zahlengebietes mit der Frage, was die Integrale der betreffenden Differentialgleichungen bedeuten, wenn  $n$  eine ganze, aber negative Zahl (excl. 0) ist. Wir setzen zu dem Zwecke  $n = -(n' + 1)$ , und denken uns unter  $n'$  eine ganze positive Zahl (incl. 0). Nur der Zahlenfactor des dritten Gliedes der Differentialgleichungen (137) resp. (139) wird dadurch betroffen und es zeigt sich:

$$\begin{aligned} (n - m)(n + m + 1) &= (-n' - 1 - m)(-n' - 1 + m + 1) \\ &= (n' - m)(n' + m + 1). \end{aligned}$$

Ganz so auch im Spezialfalle  $m = 0$ .

Die Differentialgleichungen mit negativem  $n$  sind also identisch mit denjenigen für das positive  $n'$ . Folglich auch ihre Lösungen. Neue Functionscharaktere liefert also diese erste Erweiterung nicht. Interessant ist aber zu beobachten, daß die Kugelfunctionen erster und zweiter Art ihre Rollen austauschen. Man muß setzen:

$$\begin{aligned} P_{-(n'+1), m} &= Q_{n', m}, \\ Q_{-(n'+1), m} &= P_{n', m}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt übrigens auch noch, wenn  $n'$  keine natürliche Zahl mehr ist.

Auch negative ganze Zahlen für  $m$  lehren uns nichts Neues. Ein Blick auf die Function (136) zeigt, daß ein Zeichenwechsel von  $m$  gleichbedeutend ist mit einem Wechsel der Umlaufsrichtung des Längenwinkels  $\eta$ . Dieser Wechsel ist aber hier, wo es sich um nicht rotatorische Phänomene handelt, ohne Bedeutung.

Setzen wir jetzt aber  $m$  als eine echt oder unecht gebrochene (eventuell auch irrationale) Zahl fest, so tritt eine Veränderung gegen früher hervor. Zwar kann man noch die Relation (138 a) ebenso ableiten, aber die Gleichung (138 b) verliert ihren Sinn. Man kann die Function  $P_{n, m}$  nicht mehr ableiten aus  $P_{n, 0}$ ; es genügt daher nicht mehr allein, die Integrale der einfacheren Differentialgleichung (139) aufzusuchen, sondern man muß auf die allgemeinere Differentialgleichung (137) selbst zurückgehen. Diese kann man auch direct durch eine positive Potenzreihe von  $\mu$  integrieren:

$$P_{n, m} = B_0 + B_1 \mu + B_2 \mu^2 + \dots + B_a \mu^a + \dots \quad (179)$$

Man findet dann ganz analog, wie bei der Integration der Differentialgleichung (139), daß ein gerader und ein ungerader Coefficient,

z. B.  $B_0$  und  $B_1$  willkürlich, oder nach anderweitigen Rücksichten, gewählt werden können und daß für die höheren die procurrente Formel gilt:

$$B_{\alpha+2} = \frac{(-n+m+\alpha)(n+m+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} B_{\alpha}. \quad (179a)$$

Wenn nun  $(n-m)$  eine positive ganze Zahl (incl. 0) ist, so werden die Coefficienten

$$B_{(n-m)+2} = B_{(n-m)+4} = \text{alle alternirend folgenden} = 0.$$

Die Lösung zerfällt in eine ganze Function  $(n-m)$ ten Grades, welche, entsprechend  $(n-m)$ , nur gerade oder nur ungerade Potenzen von  $\mu$  hat, und in eine unendliche Potenzreihe, welche für  $\mu^2 < 1$  convergirt. Bei ganzzahligem  $n$  sind dies die beiden particulären Integrale  $P_{n,m}$  und  $Q_{n,m}$ , welche wir schon kennen. Hier tritt nun aber die Möglichkeit auf, ganz ebensolche Lösungen zu bilden, wenn zwar  $(n-m)$  positiv ganzzahlig oder 0 ist, aber  $n$  und  $m$  einzeln gebrochen oder irrational sind. Das führt dann zu eigenartigen von den früher betrachteten wesentlich verschiedenen Potentialfunctionen. Setzen wir der Einfachheit wegen in (136) die Phasenconstante  $c = \frac{\pi}{2}$ , nehmen also

$$\varphi = r^n P_{n,m} \sqrt{1-\mu^2}^m \cdot \sin m\eta \quad (179b)$$

oder

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} P_{n,m} \sqrt{1-\mu^2}^m \sin m\eta. \quad (179c)$$

Für  $m=0$  ist der Sinus ringsherum = 0. Für  $m=1$  existiren zwei diametral gegenüberliegende Meridianebenen  $\eta=0$  und  $\eta=\pi$ , in denen  $\varphi=0$  ist. Wenn nun  $m$  zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 liegt, so wird  $\sin m\eta=0$  erstens für  $\eta=0$  und zweitens für  $\eta = \frac{\pi}{m}$ , welches letzteres im dritten oder vierten Quadranten des Längenwinkels liegt. (Würden wir  $\eta$  nicht auf das Intervall 0 bis  $2\pi$  beschränken, so würden jetzt die Functionen vieldeutig werden.) Wir erhalten somit zwei in der  $x$ -Axe als convexer Kante unter beliebigem Winkel zusammenstoßende Halbebenen, in welchen das Potential 0 herrscht. Diese Flächen können daher als leitend mit der Erde verbundene Conductorgrenzen (etwa als sehr große geknickte Blechplatte) gedacht werden. Hinter dem concaven Theile gilt dann überall  $\varphi=0$ ,

während vor dem convexen Theile jeder der vorstehenden Ausdrücke mit

$$n = m \text{ oder } = m + 1, m + 2, \dots \text{ etc.}$$

eine Potentialfunction darstellt. Die Flächenbelegung berechnet man aus der Formel:

$$4 \pi e = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \right) \text{ für } \eta = 0 \text{ oder } \eta = \frac{\pi}{m}.$$

Die äufere Normale auf der Meridianebene  $\eta = 0$  geht in Richtung des wachsenden  $d\eta$  auf einem Kreise vom Radius  $r \sin \vartheta = r \sqrt{1 - \mu^2}$ , ist also

$$dn_a = r \sqrt{1 - \mu^2} \cdot d\eta,$$

andererseits ist

$$d\varphi = m \left\{ \begin{matrix} r^n \\ \text{oder} \\ r^{-(n+1)} \end{matrix} \right\} P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^m \cos m \eta \cdot d\eta,$$

also wegen  $\cos m \eta = 1$ :

$$4 \pi e = m \left\{ \begin{matrix} r^{n-1} \\ \text{oder} \\ r^{-(n+2)} \end{matrix} \right\} P_{nm} \sqrt{1 - \mu^2}^{m-1}. \quad (179d)$$

In der Kante selbst wird die Dichtigkeit unendlich, weil  $\sqrt{1 - \mu^2}$  gegen Null strebt und der Exponent  $m - 1$  jetzt negativ ist.

Auch die Superposition einer ganzen Reihe solcher Potentiale, alle mit dem gleichen  $m$  zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1, kann man ansetzen, und findet so eine große Mannigfaltigkeit.

Endlich wollen wir  $n$  gebrochen annehmen ohne Beziehung zu  $m$ . Wir wollen uns sogar auf den einfachsten Fall  $m = 0$ , also auf die rein zonalen Kugelfunctionen beschränken.

Es geht aus der früher durchgeführten Integration der hier einschlägigen Differentialgleichung (139) hervor, daß bei nicht ganzzahligem  $n$  keines der beiden particulären Integrale eine abbrechende Potenzreihe bildet, sondern daß man zwei von einander getrennte unendliche Reihen erhält, welche sowohl für  $\mu = -1$  wie für  $\mu = +1$  logarithmisch unendlich werden. Dergleichen Ausdrücke haben wir schon unter den Functionen  $Q_{n,0}$  kennen gelernt (Anfang des § 45), aber noch fehlen uns Functionen, welche für den einen Pol, also entweder für  $\mu = +1$  oder für  $\mu = -1$  unendlich werden, während sie am anderen Pol endlich und stetig bleiben. Diese erhält man durch Substitution einer anderen Variablen an Stelle von  $\mu$ , und zwar einer solchen, welche nicht vom ganzen, sondern vom halben

Polwinkel regiert wird, entweder  $\sin \frac{\vartheta}{2}$  oder  $\cos \frac{\vartheta}{2}$ . Diese Substitution würde aber nutzlos sein, wenn wir sie an der fertigen Reihe  $P_{n,0}$  ausführen, wir müssen sie bereits in der Differentialgleichung (139) vornehmen, und ein neues Integral als Potenzreihe einer der beiden Kreisfunctionen des halben Polwinkels aufstellen. Wir haben die Wahl zwischen

$$1 - \mu = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad \text{und} \quad 1 + \mu = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Beide führen im Wesentlichen zu dem gleichen Resultat. Wählen wir die erstere, und setzen zur Abkürzung

$$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = s,$$

so ist

$$1 - \mu = 2s, \quad 1 - \mu^2 = 4s(1 - s),$$

$$-d\mu = 2ds, \quad \text{also} \quad \frac{d}{d\mu} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds}.$$

Die Differentialgleichung (139) kann in der Form geschrieben werden

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{dP_{n,0}}{d\mu} \right) + n(n+1)P_{n,0} = 0$$

und geht nach der Substitution zufolge der angeführten Formeln über in

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( 4s(1-s) \frac{dP_{n,0}}{ds} \right) + n(n+1)P_{n,0} = 0$$

oder kürzer

$$\frac{d}{ds} \left( s(1-s) \frac{dP_{n,0}}{ds} \right) + n(n+1)P_{n,0} = 0. \quad (180)$$

Wählen wir die zweite Möglichkeit, und setzen

$$\cos^2 \frac{\vartheta}{2} = t,$$

so ist

$$1 + \mu = 2t, \quad 1 - \mu^2 = 4t(1-t)$$

$$d\mu = 2dt, \quad \text{also} \quad \frac{d}{d\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}$$

und die Differentialgleichung geht über in

$$\frac{d}{dt} \left( t(1-t) \frac{dP_{n,0}}{dt} \right) + n(n+1) P_{n,0} = 0.$$

Das ist genau dieselbe Form, wie bei Einsetzung von  $s$ , deshalb auch dieselbe Lösung. Wir setzen als Integral eine Potenzreihe an

$$P_{n,0} = C_0 + C_2 s + C_1 s^2 + C_3 s^3 + \dots + C_a s^a + \dots, \quad (180 a)$$

fügen diese in Differentialgleichung (180) ein, führen die Differentiationen und Multiplicationen gliedweise aus und fordern schließlich jeden Coefficienten der daraus entstehenden Potenzreihe gleich Null, so erhalten wir folgende Reihe von Bedingungen:

$$\begin{aligned} C_1 + n(n+1) C_0 &= 0 \\ 2^2 C_2 - [2 \cdot 1 - n(n+1)] C_1 &= 0 \\ 3^2 C_3 - [3 \cdot 2 - n(n+1)] C_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ (a+1)^2 C_{a+1} - [(a+1)a - n(n+1)] C_a &= 0. \end{aligned}$$

Also  $C_0$  bleibt willkürlich, für die folgenden gilt die procurrente Formel:

$$C_{a+1} = \frac{(a-n)(a+n+1)}{(a+1)^2} C_a. \quad (180 b)$$

Ist  $n$  eine ganze Zahl, so bricht die Reihe der Coefficienten mit dem höchsten Gliede  $C_n$  ab, während alle folgenden gleich Null werden. In diesem Falle kann man auch noch nachweisen, daß nach Rückwärtssubstitution von  $\mu$  an Stelle von  $s$  und geeigneter Wahl von  $C_0$  wieder die uns bekannten Kugelfunctionen erster Art zum Vorschein kommen. Wenn aber  $n$  keine ganze Zahl ist, so erhalten wir jetzt folgende unendliche Reihe:

$$P_{n,0} = C_0 \left\{ 1 + \frac{(-n)(n+1)}{1 \cdot 1} s + \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} s^2 + \frac{(-n)(-n+1)(-n+2)(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots \right\} \quad (180 c)$$

oder als hypergeometrische Reihe in symbolischer Schreibweise:

$$P_{n,0} = C_0 \cdot F(-n, n+1, 1; s).$$

Natürlich würden wir genau dieselbe Reihe auch für die Variable  $t$  erhalten.

Die Form der hypergeometrischen Reihe giebt uns die Sicherheit, daß für echt gebrochenes  $s$  der Ausdruck einen endlichen Werth hat. Für  $s = 1$  wird er logarithmisch unendlich, weil auch hier, wie schon früher, der kritische Fall  $\alpha + \beta = \gamma$  vorliegt.

Diese Function  $P_{n,0}$  von  $s = \sin \frac{\vartheta}{2}$  besitzt also an dem Pol  $\vartheta = 0$  den endlichen Werth  $C_0$ , während sie an dem entgegengesetzten Pole  $\vartheta = \pi$ , also für  $s = 1$ , zur Grenze  $\pm \infty$  läuft.

Würden wir an Stelle von  $s$  als Variable  $t = \cos \frac{\vartheta}{2}$  wählen, so würde für den Pol  $\vartheta = 0$  ein unendlicher, und für den Pol  $\vartheta = \pi$  ein endlicher Werth resultiren.

Ebenso wie die Function  $P_{n,0}$  bei ganzzahligem  $n$  gewisse Nullstellen für bestimmte Werthe von  $\vartheta$  oder  $\mu$  oder  $s$  oder  $t$  besitzt, so auch bei nicht ganzzahligem  $n$ . Die Orte, welche denselben Polarwinkel besitzen, liegen auf Kreiskegelmänteln, also auch die Nullstellen von  $P_{n,0}$ . Wenn man nun  $n$  stetig variabel setzt, also alle auch irrationalen Werthe durchlaufen läßt, so verändern die Kegelmäntel, welche die Nullstellen enthalten, ihren Oeffnungswinkel  $\vartheta$  stetig. Wie dieser Lauf der Nullwerthkegel vor sich geht, kann man sich leicht veranschaulichen. Wir wählen die Darstellung durch  $s$ , welche für  $\vartheta = 0$  endlich bleibt und nehmen  $C_0$  positiv an. Wenn  $n = 0$  ist, giebt es gar keine Nullstellen, weil  $P_{00}$  einen constanten endlichen Werth hat. Beginnt nun  $n$  über Null zu wachsen, so löst sich von der negativen  $x$ -Axe ganz allmählich ein Nullkegel ab (die Spitze liegt immer im Anfangspunkt der Coordinaten.) Im concaven Raum ist  $P_{n,0}$  negativ. Wenn  $n$  bis  $\frac{1}{2}$  gestiegen ist, hat der Kegelmantel eine Oeffnung von etwa  $50^\circ$  gegen die negative  $x$ -Axe, und bei  $n = 1$  erreicht er die Aequatorebene. Wächst  $n$  über 1, so wird er concav nach der Seite der positiven  $x$ -Axe, zugleich löst sich ein zweiter Nullkegel auf dieselbe Weise ab wie der erste etc.

Aus den  $P_{n,0}$  für echt gebrochenes  $n$  können wir nun Potentialfunctionen

$$\varphi = r^n P_{n,0} \quad (180d)$$

und

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} P_{n,0} \quad (180e)$$

bilden, welche auf einem Kegelmantel von beliebigem Oeffnungswinkel gleich Null werden. Setzen wir in dem concaven Raum, wo bei Fortsetzung der Function  $P_{n,0}$  die bis in's negative Unendliche sinkenden Werthe liegen würden, überall  $\varphi = 0$ , so haben wir eine Bedingung des elektrischen Gleichgewichts auf einem unendlich ausgedehnten leitenden Kegel, wofür man praktisch auch setzen kann einen sehr grossen Conductor, welcher eine kegelförmige Spitze besitzt. Die Dichtigkeit wird an der Spitze unendlich gross. Ebenso die Intensität des elektrischen Feldes.

---

Viertes Kapitel.

---

§ 47. Zweidimensionale Probleme.

Schliesslich soll noch die durch Eleganz ausgezeichnete Methode erwähnt werden, auf welche die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen die zweidimensionalen Probleme der Elektrostatik behandelt. Die Bezeichnung „zweidimensional“ ist so zu verstehen, daß die dritte Coordinate, etwa  $z$ , gar keine Rolle spielt, weil alle Körper unendlich lange Cylinder sind, deren erzeugende Geraden parallel zur  $z$ -Axe sind, und weil die Dichte ihrer Ladung von  $z$  unabhängig ist. Dasselbe gilt dann auch für die Potentialfunction, so daß die LAPLACE'sche Operation die Form

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

annimmt. Da wir also den Buchstaben  $z$  in diesem Paragraphen nicht in der bisherigen Bedeutung brauchen, wollen wir hier

$$z = x + iy \tag{181}$$

setzen;  $z$  ist dann die complexe Variable, von deren Functionen die Rede sein soll.

Als Function von  $z$  könnte man jede Function

$$\chi(x, y) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y) \tag{182}$$

bezeichnen, was für Functionen auch  $\varphi$  und  $\psi$  sein mögen; denn durch Angabe eines complexen Werthes für  $z$  sind nach (181)  $x$  und  $y$  und nach (182) auch  $\chi$  bestimmt. Man ist aber überein-

gekommen, den Begriff einer Function des complexen Arguments  $z$  auf solche Functionen  $\chi$  einzuschränken, welche  $x$  und  $y$  nur in der Verbindung  $x + iy$  enthalten, bei welchen also

$$d\chi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy$$

proportional zu

$$dz = dx + i dy$$

ist. Dazu ist erforderlich, dafs

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) : 1 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) : i,$$

und dafür sind nothwendig und hinreichend die Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (183)$$

Nur wenn sie erfüllt sind, kann man der Function  $\chi(z)$  einen Differentialquotienten nach  $z$

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

zuschreiben. Da die Gleichungen (183), wenn sie für  $\varphi$  und  $\psi$  gelten, auch durch die Functionen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  erfüllt werden, so ist dann auch  $\frac{d\chi}{dz}$  Function des complexen Arguments  $z$ , so dafs man auch von den höheren Differentialquotienten  $\frac{d^2 \chi}{dz^2}$ ,  $\frac{d^3 \chi}{dz^3}$  etc. in bestimmtem Sinne reden kann.

Die hohe Bedeutung dieser Functionen für elektrische Probleme erkennt man, wenn man aus den Gleichungen (183) die eine der Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  eliminirt; man findet dabei

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Der reelle und der imaginäre Bestandtheil einer jeden Function der complexen Veränderlichen  $z$  sind also Lösungen der Differentialgleichung  $\Delta\varphi = 0$ . Um ein vorgelegtes Problem der Elektrostatik zu lösen, hat man demnach nur eine Function  $\chi(z)$  zu suchen, bei welcher entweder der reelle oder der imaginäre Theil den Grenzbedingungen genügt.

Aus (183) folgt ferner

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \quad (185)$$

Ist  $\varphi$  die Potentialfunction, so sind

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

die Gleichungen der Niveauflächen, welche hier natürlich Cylinderflächen sind. Ihre Schnitte mit der  $xy$ -Ebene bezeichnen wir als Niveaulinien. Nun sagt (185) aus, daß die Linien  $\varphi = \text{const}$  und  $\psi = \text{const}$  auf einander senkrecht stehen. Ist also  $\varphi$  die Potentialfunction, so sind  $\psi = \text{const}$  die Gleichungen der Kraftlinien, und umgekehrt.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel die Function

$$\chi(z) = -\log z.$$

Die Polarcoordinaten  $\rho, \vartheta$  in der Ebene hängen mit den rechtwinkligen Coordinaten durch die Relationen

$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \vartheta$$

zusammen, aus denen

$$z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$$

folgt. Also ist

$$\chi(z) = -\log z = -\log \rho - i\vartheta;$$

und da die Functionen

$$-\log \rho = -\log(\sqrt{x^2 + y^2})$$

und

$$-\vartheta = -\text{arctg} \frac{y}{x}$$

beide reell sind, so ist

$$\varphi = -\log \rho$$

der reelle Bestandtheil von  $\chi(z)$ , genügt demnach der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$ . Da es ferner sammt seinen Differentialquotienten im End-

lichen überall endlich und stetig mit Ausnahme des Punktes  $x = y = 0$  ist (vergl. § 13), so entspricht es genau der Lösung  $\varphi = \frac{1}{r}$  der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  für drei Dimensionen; es stellt die Potentialfunction eines unendlich langen, unendlich dünnen, positiv geladenen Cylinders dar. Die Kraftcomponenten sind

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} = +\frac{1}{\rho} \cos\vartheta$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial y} = +\frac{1}{\rho} \sin\vartheta,$$

da

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\vartheta$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\vartheta.$$

ist. Die elektrische Kraft nimmt mit wachsendem Abstand  $\rho$  ab, wie  $\frac{1}{\rho}$ . Im Unendlichen wird  $\varphi$  nicht wie bei dreidimensionalen Problemen 0, sondern negativ unendlich.

Dieselbe Function

$$\varphi = -\log\rho$$

stellt natürlich auch die Potentialfunction im Raume zwischen zwei metallischen, coaxialen Kreiscylindern dar, da auf diesem  $\rho = \text{const}$ , also auch  $\varphi = \text{const}$  ist.

Statt aber  $\chi$  als geeignete Function von  $z$  zu bestimmen, ist es manchmal einfacher, umgekehrt  $z$  als Function von  $\chi$  aufzusuchen; beides ist gleichwerthig; denn hat der Differentialquotient  $\frac{dz}{d\chi}$  einen bestimmten Sinn, so gilt das Gleiche von  $\frac{d\chi}{dz}$ , ist also  $z$  Function des complexen Arguments  $\chi$ , so ist auch  $\chi$  Function der complexen Veränderlichen  $z$ . Dieser Art ist das Beispiel, auf welches wir nun ein wenig näher eingehen wollen.

Die praktisch wichtigste Form des elektrischen Condensators besteht in zwei einander parallelen, metallischen Kreisscheiben, deren Abstand gegen den Radius klein ist. Man macht sich leicht klar, daß in den Theilen des Zwischenraumes, an denen ein Einfluß des

Randes der Platten nicht zu merken ist, die Platten also als unendlich ausgedehnt gelten können:

$$\varphi = ay + b$$

( $a$  und  $b$  Constante) die Potentialfunction ist, vorausgesetzt, daß die Plattennormale die  $y$ -Richtung hat; denn dann ist  $\Delta\varphi = 0$  und an den Platten  $y = \text{const}$ , also  $\varphi = \text{const}$ . Wesentlich schwieriger ist die Frage nach dem Einfluß des Randes. Man kann sie aber wenigstens angenähert behandeln, wenn man wegen des vorausgesetzten Verhältnisses zwischen Plattenabstand und Radius von der Krümmung absieht und die Platten als unendlich ausgedehnte Halbebenen betrachtet. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir festsetzen, daß sie denjenigen Theil der Ebenen

$$y = \pm A\pi$$

ausfüllen sollen, in welchem  $x < -A$  ist, obwohl hier der Plattenabstand  $2\pi A$  und die Lage der Randlinien ( $x = -A$ ) durch dieselbe Constante  $A$  bestimmt sind; denn die letztere Festsetzung giebt nur die relative Lage des Coordinatensystems zu den Condensatorplatten an. Die Platten sollen auf entgegengesetzt gleichen Potentialen sein, welche wir, um nicht noch eine Constante mehr einführen zu müssen, zu  $\pm\pi$  festsetzen. Hierfür läßt sich jeder andere Werth erzielen, wenn man die unten angegebene Potentialfunction mit einem passenden Factor multiplicirt.

Diese Aufgabe löst der Ansatz:

$$z = A(\chi + e^x)$$

oder

$$x + iy = A(\varphi + i\psi + e^{\varphi + i\psi}) = A(\varphi + i\psi + e^{\varphi}(\cos\psi + i\sin\psi)),$$

wenn man  $\psi$  als die Potentialfunction betrachtet. Denn wegen

$$\left. \begin{aligned} x &= A(\varphi + e^{\varphi} \cos \psi) \\ y &= A(\psi + e^{\varphi} \sin \psi) \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

entspricht den Niveaulinien

$$\psi = \pm \pi$$

der Theil der Geraden

$$y = \pm A\pi,$$

den

$$x = A(\varphi - e^{\varphi}) = Ae^{\varphi}(\varphi e^{-\varphi} - 1)$$

durchläuft, wenn  $\varphi$  die Reihe der reellen Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchwandert. Für  $\varphi = -\infty$  ist aber  $e^\varphi = 0$ , also  $x = -\infty$ , für  $\varphi = +\infty$  wird  $\varphi e^{-\varphi} - 1 = -1$  und  $e^\varphi = +\infty$ , so daß wiederum  $x = -\infty$  wird, während  $x$  für  $\varphi = 0$  seinen Maximalwerth  $-A$  annimmt, da für diesen Werth

$$\frac{dx}{d\varphi} = A(1 - e^\varphi) = 0$$

ist. Der fragliche Theil der beiden Geraden ist demnach identisch mit den Schnitten der Platten mit der  $xy$ -Ebene.

Daß die Niveaulinien  $\psi = \pm \pi$  auf die angegebene Weise doppelt durchlaufen werden, wird verständlicher, wenn man eine der anderen Niveaulinien discutirt, für welche

$$-\pi < \psi < +\pi$$

ist. Ist  $\varphi$  sehr groß und negativ, so ist annähernd

$$x = A\varphi, \quad y = A\psi,$$

demnach  $-\pi A < y < +\pi A$ , so daß diesen Werthen von  $\varphi$  der vom Rande weit entfernte Theil des Raumes zwischen den Platten entspricht. Dagegen sind für sehr große positive Werthe von  $\varphi$   $x$  und  $Ay$  je nach dem Zeichen von  $\cos \psi$  und  $\sin \psi$  positiv oder negativ sehr groß, während für  $\varphi = 0$

$$x = A \cos \psi > -A$$

$$y = A(\psi + \sin \psi)$$

wird. Die Linie  $\psi = 0$  fällt mit der  $x$ -Axe zusammen. Den Verlauf der Niveau- und Kraftlinien  $\psi = \text{const}$  und  $\varphi = \text{const}$  veranschaulicht Figur 18, und zwar ist die Differenz der Werthe von  $\psi$  und  $\varphi$  für benachbarte Niveau- und Kraftlinien stets die gleiche. Man sieht aus ihr, daß für jeden Punkt  $x, y$   $\psi$  in dem angegebenen Intervall von  $-\pi$  bis  $+\pi$  liegt; andere Werthe entbehren der physikalischen Bedeutung. Längs den Niveaulinien  $\psi = \pm \pi$  aber entspricht ein negativer Werth von  $\varphi$  einem Punkt der Innenseite, ein positiver Werth einem Punkt der Außenseite.

Das Hauptinteresse beansprucht die Frage nach der Vertheilung der Ladungen. Betrachten wir die positiv geladene Platte, für welche  $\psi = +\pi$ ,  $y = +A\pi$  ist; da an ihrer Innenseite die Normale in die negative  $y$ -Richtung weist, ist  $+\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ , an der Außen-

seite dagegen  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial y}$  die Flächendichte. Nun ist nach (183) und (186) an dieser Platte

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{A(1 - e^\varphi)},$$

so daß die Flächendichte gleich

$$\pm \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm \frac{1}{4\pi A(1 - e^\varphi)}$$

ist, wo das Vorzeichen  $+$  an der Innenseite,  $-$  an der Außenseite gilt. Da der ersteren ein negativer Werth von  $\varphi$  entspricht,  $1 - e^\varphi$

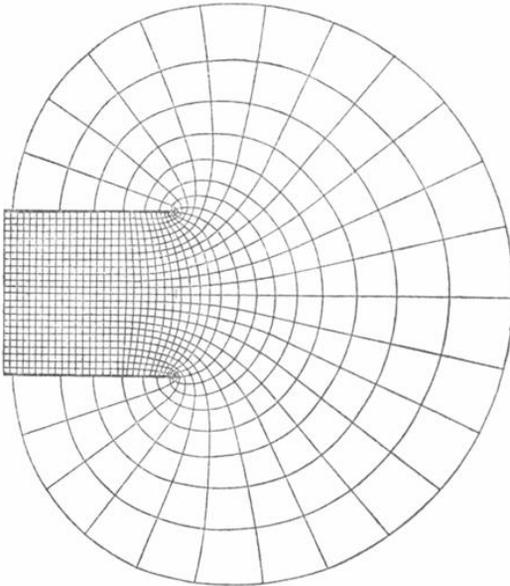


Fig. 18.

dort also positiv ist, während an der letzteren  $\varphi > 0$ ,  $1 - e^\varphi < 0$  ist, so ist das Vorzeichen der Flächenbelegung stets das positive.

Die Dichte ist  $\frac{1}{4\pi A}$  auf der Innenseite in großem Abstände vom Rande, an den entsprechenden Stellen der Außenseite aber Null. Dagegen wird sie auf beiden Seiten unendlich groß, wenn man sich dem Rande nähert.

Eine wichtige Frage ist nun, ob bei der angenommenen Potentialdifferenz  $2\pi$  zwischen den Platten die Gesamtladung eines endlichen am Rande gelegenen Stückes der Platten endlich ist; denn

andernfalls müßten wir schliessen, daß sich ein Condensator unter Aufwand endlicher Energie überhaupt nicht auf endliche Potentialdifferenz laden läßt. Legen wir einen Streifen der positiv geladenen Platte, welcher in der Richtung des Randes, d. h. senkrecht zur  $xy$ -Ebene, die Breite 1 hat, und von der Linie  $x = x_0$  ( $x_0 < -A$ ) bis zum Rand  $x = -A$  reicht, der Betrachtung zu Grunde; er trägt auf der Innenseite die Ladung:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{x_0}^{-A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx,$$

wo von den beiden Werthen von  $\varphi$ , welche einem und demselben Werthe von  $x$  angehören, der negative zu nehmen ist, während die Ladung seiner äusseren Seite

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{x_0}^{-A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

beträgt, wo von den beiden in Frage kommenden Werthen von  $\varphi$  der positive eingesetzt werden muß. Sind  $\varphi_0$  und  $\varphi_0'$  die beiden zu  $x_0$  gehörenden Werthe, so ist aber das erstere Integral  $= -\frac{\varphi_0}{4\pi}$  das zweite  $= +\frac{\varphi_0'}{4\pi}$ , also beide endlich.

Da in der Figur die Differenz der Werthe von  $\varphi$  auf benachbarten Kraftlinien constant ist, liegt zwischen je zwei Endpunkten von Kraftlinien auf den Platten die gleiche Elektrizitätsmenge; sie giebt daher unmittelbar ein Bild der Ladungsvertheilung.

Für den aus zwei kreisförmigen Platten bestehenden Condensator können wir hieraus schliessen: Jede der Platten trägt nur Ladung eines Vorzeichens, diese liegt überwiegend auf der Innenseite, nur am Rande, wo auch auf der Innenseite die Ladung besonders stark angehäuft ist, ist die Außenseite einigermaßen geladen.

#### § 48. Das Energieprincip in der Elektrostatik.

Schon in § 9 [siehe Gleichung (19)] wurde gezeigt, daß die potentielle Energie einer Anzahl von elektrischen Punktladungen  $e_i$  gleich  $\frac{1}{2} \sum e_i \varphi_i$  ist, wenn man unter  $\varphi_i$  den Werth der Potentialfunction aller Punktladungen, mit Ausnahme von  $e_i$  selbst, am Ort

von  $e_i$  versteht. Dies wurde in § 25 auf stetig über räumliche oder flächenhafte Gebiete vertheilte Ladungen übertragen, indem die Energie

$$W = \frac{1}{2} \left( \iiint \varphi \varepsilon dx dy dz + \iint ds \varphi e \right) \quad (187)$$

gesetzt wurde. Dafs hier  $\varphi$  als die Potentialfunction aller Ladungen aufgefaßt werden kann, findet, wie dort erwähnt, seine Begründung darin, dafs die Ladungen  $\varepsilon dx dy dz$  und  $e ds$  auch am eigenen Ort nur unendlich wenig zu  $\varphi$  beitragen. In demselben Paragraphen wurde der Ausdruck  $W$  auch schon mit Hülfe des GREEN'schen Satzes umgeformt in

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (187a)$$

In dem speciellen Fall, dafs nur leitende Körper Träger elektrischer Ladungen sind, ist  $\varepsilon = 0$  und (187) reducirt sich auf

$$W = \frac{1}{2} \iint ds \varphi e = \frac{1}{2} \sum P_i e_i, \quad (187b)$$

wo unter  $P_i$  das Potential, unter  $e_i$  die gesammte Ladung eines der leitenden Körper zu verstehen ist. Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst an einem Beispiel, dann allgemein beweisen, dafs die aus (187a) oder (187b) berechnete Energie das Aequivalent der Arbeit ist, welche gegen die ponderomotorischen Kräfte geleistet werden mufste, um die Ladungen  $e_i$  auf den Conductoren herzustellen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst eine Punktladung  $e'$  einer leitenden Kugel vom Radius  $R$  aus dem Unendlichen her genähert, bis ihr Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt gleich  $r_0$  geworden ist; und zwar soll dabei ein dünner Draht die Kugel leitend mit der Erde verbinden, so dafs ihr Potential dauernd 0 bleibt. Dann unterbrechen wir diese Ableitung und entfernen die Punktladung wieder in's Unendliche.

Aus den Erörterungen des § 31 entnehmen wir, dafs die Kugel während der Annäherung eine Ladung  $-\frac{R}{r}e'$  trägt, welche nach Außen so wirkt, als wäre sie im Spiegelbild des geladenen Punktes concentrirt. In der Endlage  $r = r_0$  ist die Ladung

$$e = -\frac{R}{r_0}e', \quad (188)$$

und diese bleibt auf der Kugel, wenn wir nach Unterbrechung der Ableitung  $e'$  wieder in's Unendliche fortrücken lassen. Sie vertheilt sich dabei so, daß ihre Wirkung nach Außen der zweier Punktladungen  $-\frac{R}{r}e'$  und  $-Re'\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$  äquivalent ist, von denen die erstere ihren Sitz wiederum im Spiegelbild des geladenen Punktes, die zweite im Kugelmittelpunkt hat. Beide üben auf  $e'$  eine Anziehung aus, welche bei der Entfernung von  $e'$  überwunden werden muß. Die Arbeit, welche die erstere Ladung,  $-\frac{R}{r}e'$ , erforderlich macht, wurde aber bei der Annäherung von  $e'$  gewonnen; die gesammte bei dem Proceß geleistete Arbeit ist also gleich der, welche zur Ueberwindung der Anziehungskraft

$$-\frac{Re'^2}{r^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

der im Mittelpunkt concentrirt gedachten Ladung  $-Re'\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$  dient; d. h. gleich

$$Re'^2 \int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Re'^2}{r_0^2}.$$

Da nach (188) im Endzustand das Potential der Kugel

$$P = \frac{e}{R} = -\frac{e'}{r_0}$$

ist, so ist sie in der That gleich  $\frac{1}{2}Pe$ .

Bevor wir nun zu dem allgemeinen Beweis übergehen, wollen wir zeigen, daß die Energie  $W$  im Gleichgewichtszustande den kleinsten Werth hat, den sie annehmen kann, solange die Lage und Form der Leiter erhalten bleibt und leitende Verbindungen zwischen ihnen und der Erde oder zwischen verschiedenen Conductoren weder neu hergestellt noch unterbrochen werden. Mathematisch formulirt, lautet dies: Verändern wir die Flächendichte der Elektrizität  $e$  um  $\delta e$ , so daß die Gesammtladungen  $e_i$  der isolirten Conductoren an der Veränderung nicht theilnehmen, so ändert sich die Potentialfunction  $\varphi$  um  $\delta\varphi$  und die Energie  $W$  um  $\delta W$ . Aber vermöge der Gleichgewichtsbedingungen, daß überall

$$\Delta\varphi = 0,$$

daß ferner an allen Conductoren

$$\varphi = P_i = \text{const}$$

und speciell auf den zur Erde abgeleiteten

$$P_i = 0$$

ist, ist

$$\delta W = 0.$$

Um dies zu zeigen, berechnen wir  $\delta W$  nach (187a), indem wir

$$\delta \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \text{ etc.}$$

setzen. In der so entstehenden Gleichung

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ist wie in (187a) über den ganzen Raum, oder da die Differentialquotienten von  $\varphi$  in Leitern verschwinden, über den von Leitern freien Theil des Raumes zu integriren. Wenden wir nun die zum GREEN'schen Satz führende partielle Integration an, so finden wir vermöge  $\Delta \varphi = 0$

$$\delta W = - \frac{1}{4\pi} \iint ds \varphi \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n} = - \frac{1}{4\pi} \iint ds \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

wo das Integral über alle Oberflächen von Conductoren zu erstrecken ist. An diesen ist aber  $\varphi$  constant und nach (69a)

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = e;$$

also ist

$$\delta W = \sum P_i \iint ds_i \delta e = \sum P_i \delta e_i = 0,$$

da an den isolirten Conductoren  $\delta e_i$ , an den zur Erde abgeleiteten aber  $P_i = 0$  ist.

Nun denken wir uns alle Ableitungen zur Erde aufgehoben und ertheilen einem der Conductoren, den wir durch den Index  $i$  auszeichnen, eine unendlich kleine Verschiebung und Drehung, welchen einem seiner Punkte die Verrückung  $\delta l$  mittheilt; Formänderungen schliessen wir aus. Dann müssen wir gegen die ponderomotorischen Kräfte die Arbeit  $\delta A$  leisten, während sich die Energie um  $\delta W$  ändert. Im Allgemeinen verändert sich mit der Verschiebung auch die Vertheilung der Ladungen auf allen Conductoren und  $\delta W$  besteht dementsprechend aus zwei Summanden, von denen der erste die Veränderung von  $W$  in Folge der Verrückung des Conductors

bei unveränderter Vertheilung, der zweite die in Folge der Verschiebung der Ladungen allein stattfindende Veränderung von  $W$  angiebt. Der zweite Summand ist aber, wie soeben bewiesen, Null. Denken wir nun die ursprünglich vorhandenen Ableitungen zur Erde wieder hergestellt, so erfolgt eine neue unendlich kleine Verschiebung der Ladungen, welche aber wiederum zu  $\delta W$  nichts beiträgt. Zur Berechnung von

$$\delta W = \frac{1}{2} \delta \iint ds \varphi e \quad (189)$$

haben wir also  $e$  als fest an den Flächenelementen  $ds$  haftend zu denken.

Dies und die vorausgesetzte Starrheit des Conductors 1 hat zur Folge, daß die Potentialfunction  $\varphi_1$  der auf ihm befindlichen Ladung sich in einem an der Verrückung theilnehmenden Punkt nicht ändert; das über seine Oberfläche zu erstreckende Integral

$$\iint_1 ds \varphi_1 e$$

bleibt daher unverändert. Dagegen bleibt die Potentialfunction  $\varphi_2$  aller anderen Ladungen in allen Punkten unverändert, welche an der Verrückung nicht theilnehmen, also u. A. an den Oberflächen der Conductoren, welche ihren Platz nicht wechseln; das für ihre Oberflächen gebildete Integral

$$\iint_2 ds \varphi_2 e$$

ändert sich also auch nicht, und es wird nach (189) und wegen  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$

$$\left. \begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \delta \iint ds \varphi e \\ &= \frac{1}{2} \delta \left( \iint_1 ds \varphi_1 e + \iint_1 ds \varphi_2 e + \iint_2 ds \varphi_1 e + \iint_2 ds \varphi_2 e \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta \left( \iint_1 ds \varphi_2 e + \iint_2 ds \varphi_1 e \right). \end{aligned} \right\} \quad (189a)$$

Aber auch diese Gleichung läßt sich mit Hülfe des GREEN'schen Satzes noch vereinfachen; denn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  genügen im ganzen Raum der Differentialgleichung  $\Delta \varphi = 0$  und den Stetigkeitsbedingungen,

nur das der Differentialquotient  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$  an der Oberfläche des Conductors 1,  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$  an der der anderen die durch die Relation (69a)

$$-\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \right) = e$$

gegebene Unstetigkeit besitzt. Das für den ganzen Raum gebildete Integral

$$\iiint \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ist deshalb sowohl gleich

$$-\int_2 ds \varphi_1 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_a} \right) = 4\pi \int_2 ds \varphi_1 e,$$

als auch gleich

$$-\int_1 ds \varphi_2 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a} \right) = 4\pi \int_1 ds \varphi_2 e.$$

Flächenintegrale für die unendlich ferne Begrenzung des Raumes treten bei beiden Umformungen nicht auf, weil  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  im Unendlichen wie  $1/R$ , ihre Ableitungen wie  $1/R^2$  verschwinden. Ganz allgemein gilt demnach

$$\int_1 ds \varphi_2 e = \int_2 ds \varphi_1 e,$$

so daß nach (189a)

$$\delta W = \delta \int_1 ds \varphi_2 e$$

wird. Das hier allein auftretende Integral erfährt seine Veränderung dadurch, daß ein Flächenelement  $ds$  bei der Verschiebung um  $\delta l$  von einem Ort mit dem Werthe  $\varphi_2$  an einen mit dem Werthe  $\varphi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} \delta l$  kommt; also ist

$$\delta W = \int_1 ds e \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} \delta l. \quad (189b)$$

Die von den in Ruhe bleibenden Conductoren auf das Element  $ds$  des Conductors 1 in der Richtung von  $\delta l$  ausgeübte pondero-

motorische Kraft ist aber

$$- ds e \frac{\partial \varphi_2}{\partial l},$$

die zu ihrer Ueberwindung erforderliche Arbeit

$$ds e \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} \delta l,$$

also folgt aus (189b) unmittelbar

$$\delta W = \delta A,$$

was zu beweisen war.

Es werden demnach bei dieser unendlich kleinen Verschiebung elektrische Energie und mechanische Arbeit unmittelbar in einander umgewandelt. Dasselbe gilt von jeder endlichen Verrückung, vorausgesetzt, daß sie so langsam vor sich geht, daß sich in jedem Augenblick das elektrostatische Gleichgewicht wieder einstellt; denn sonst fielen die Voraussetzungen unseres Beweises fort. Es entstünden dann elektrische Ströme, welche Kräfte auf einander ausüben, die ganz aus dem Bereich der bisherigen Betrachtungen herausfallen, und aufer elektrischer Energie und mechanischer Arbeit träten in der Energiegleichung noch magnetische Energie und JOULE'sche Wärme auf. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so können wir aus der Gleichheit von  $\delta W$  und  $\delta A$  schließen, daß die aufzuwendende Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage abhängt, auf welchem Wege man auch die eine in die andere überführen mag; denn die Aenderung der elektrischen Energie ist auch vom Wege unabhängig.

Die Verwandlung mechanischer Arbeit in elektrische Energie spielt in der praktischen Physik eine große Rolle; die Wirksamkeit aller Influenzmaschinen beruht auf ihr. Beim Elektrophor, der einfachsten derartigen Vorrichtung, z. B. wird der metallische Deckel der elektrisch geladenen isolirenden Scheibe genähert, während er abgeleitet, und dann von ihr entfernt, nachdem er isolirt worden ist. Ganz wie in dem durchgerechneten Beispiel die leitende Kugel erhält er dabei eine Ladung, deren Energie das Aequivalent der Arbeit ist, welche bei der Annäherung und Wiederentfernung geleistet werden muß.